

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁLEFE DE OLIVEIRA FREIRE DE ALMEIDA

**EFEITOS NÃO-LINEARES DE RELATIVIDADE GERAL E
MATÉRIA ESCURA EM GALÁXIAS**

VITÓRIA
2015

ÁLEFE DE OLIVEIRA FREIRE DE ALMEIDA

**EFEITOS NÃO-LINEARES DE RELATIVIDADE GERAL E MATÉRIA ESCURA
EM GALÁXIAS**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Alberto Saa.
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Júlio Cesar Fabris.
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2015

**EFEITOS NÃO-LINEARES DE RELATIVIDADE GERAL E
MATÉRIA ESCURA EM GALÁXIAS**

ÁLEFE DE OLIVEIRA FREIRE DE ALMEIDA

**EFEITOS NÃO-LINEARES DE RELATIVIDADE GERAL E
MATÉRIA ESCURA EM GALÁXIAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-
-Graduação em Física do Centro de Ciências
Exatas da Universidade Federal do Espírito
Santo como requisito parcial para a obten-
ção do grau de Mestre em Física, na área de
concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. DAVI CABRAL RODRIGUES

Vitória
06 de março de 2015

*Aos meus pais Luiza e Mário.
À minha esposa Ediane.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e pelo sustento durante estes dois anos. Aos meus pais, Luiza e Mário, que sempre me apoiaram em minhas escolhas e decisões. À minha esposa Ediane que sempre prestou solidariedade e compreensão durante todo o meu mestrado. Ao Professor Davi pela oportunidade que me concedeu de estar sob sua orientação, pelos momentos em que se dispôs a me atender solucionando minhas dúvidas e me orientando para uma melhor compreensão do tema deste trabalho. Ao Professor Oliver que também sempre se dispôs a ouvir minhas dúvidas e comentários acerca da proposta estudada por mim nesta dissertação. Aos meus amigos de da pós-graduação: Eddy, Fernando, Adriano, Cássio, Tays, Felipe, Alan sempre compartilhando não somente de física mas também de piadas e momentos de descontração. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

“A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original”

(Albert Einstein)

Resumo

A dinâmica de galáxias é normalmente tratada no regime de gravitação newtoniana, pois efeitos não-lineares de relatividade geral são considerados desprezíveis nesse contexto. Entretanto, algumas propostas recentes têm questionado esse procedimento. Nesta dissertação revisamos e avaliamos criticamente duas propostas que sugerem que esses efeitos não-lineares poderiam ser fortes o suficiente para eliminar ou reduzir a necessidade de matéria escura em galáxias. Além de reforçarmos certas críticas sobre a base teórica destas abordagens, mostramos que fenomenologicamente os procedimentos adotados para uma das propostas não são robustos e podem levar a resultados bem diferentes da observação, em contrapartida para a segunda proposta nossos testes apresentam resultados satisfatórios. Além disso, enfatizamos que o entendimento atual de dinâmica de galáxias no contexto de relatividade geral ainda não é sólido, assim uma precisa avaliação de suas correções nesse contexto necessita de mais atenção.

Palavras-chave: matéria escura, relatividade geral, dinâmica de galáxias..

Abstract

The dynamics of galaxies is usually evaluated within Newtonian gravity, since general relativity non-linear effects are assumed negligible in this context. Nevertheless, some recent proposals pose doubts in this procedure. In this dissertation we review and critically evaluate two proposals that suggest that these non-linear effects could be strong enough to eliminate the dark matter necessity in galaxies. Beyond reinforcing criticisms on the theoretical basis, we show that the adopted procedures for the first proposal are not phenomenologically robust and may lead to results that significantly differ from the observational data, on the other hand the second proposal shows satisfactory results. Furthermore, we emphasize that the current understanding of the galaxy dynamics in the general relativity context is not yet robust, hence a precise evaluation of its corrections is still in need for additional attention.

Keywords: dark matter, general relativity, galactic dynamics.

Lista de Figuras

3.1	Via Láctea	15
3.2	A galáxia de Andrômeda M31	15
3.3	A Grande Nuvem de Magalhães	16
3.4	Reprodução esquemática do problema do “enrolamento”	18
5.1	Órbita real dos planetas	24
6.1	Gráfico de $V_c(r, z)$ para o modelo de BG	57
7.1	Curvas de rotação das galáxias DDO 154, ESO116-G12, NGC 3198, NGC 2403, NGC 2841 e ESO 287-G13 para os modelos BG e CT.	62

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros de alguns dos perfis de matéria escura	22
7.1	Tabela contendo os valores de ajuste do modelo BG	60
7.2	Tabela contendo os valores de ajuste do modelo CT.	60

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
2 Gravitação Newtoniana	3
2.1 Resultados Gerais	3
2.2 Sistemas Esféricos	5
2.3 Potenciais de Disco	6
2.3.1 Potenciais de Discos Via Integrais Elípticas	6
2.3.2 Potenciais de Discos Via Funções de Bessel	8
3 Galáxias Espirais	12
3.1 Aspectos gerais	12
3.2 Classificação das Galáxias Espirais	13
3.3 Estrutura Espiral	14
4 Matéria Escura	19
5 Relatividade Geral	23
5.1 Breve Histórico	23
5.2 Variedades e tensores	26
5.3 Derivada Covariante	30
5.4 Transporte paralelo e curvatura	35
5.5 Geometria Riemanniana	36
5.6 Equações de Campo de Einstein	39
5.7 Limite Newtoniano	40

5.8	Simetrias em Variedades Riemannianas	43
5.9	Espaço-tempo estacionário e com simetria axial	45
6	Dinâmica de Galáxias via Relatividade Geral	49
6.1	A proposta de Cooperstock e Tieu	50
6.2	A Solução de Balasin e Grumiller	52
7	Análise Numérica e Resultados	58
8	Conclusões e Perspectivas	63
	Referências Bibliográficas	65
	Apêndice A Código da Análise Numérica	71
A.1	Balasin e Grumiller	71
A.2	Cooperstock e Tieu	76

Capítulo 1

Introdução

Na década de trinta, matéria escura era uma vaga hipótese com duvidosa base observacional em aglomerados de galáxias [1]. Com o passar dos anos, as observações ficaram mais precisas e atualmente apontam para a existência de algo exótico, interpretado como matéria escura, que aparece nas escalas de galáxias, aglomerados de galáxias e do universo observável como um todo [2]. Há ainda muitos detalhes por saber sobre matéria escura (os quais influenciam diretamente sua medição e criação aqui na Terra, com boas chances de ocorrer nos próximos anos), mas já sabemos muito do que ela não pode ser. O atual modelo padrão de matéria escura (CDM, “cold dark matter”), a despeito de seu sucesso em várias escalas, tem demonstrado problemas sistemáticos para explicar as galáxias observadas e sua formação, ver por exemplo [3]. Não há atualmente resposta ao problema, o que talvez seja devido às observações atuais serem mais precisas que a validade do modelo padrão de matéria escura.

As primeiras observações que indicavam a presença de matéria escura, isto a partir da década de 30, assumiam gravitação Newtoniana. As velocidades típicas dos constituintes de uma galáxia (estrelas e gás) são no máximo da ordem de centenas de quilômetros por segundo, enquanto o potencial Newtoniano médio estimado para a galáxia é muito menor que o quadrado da velocidade da luz ($\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$), isto sugere que os efeitos não lineares de relatividade geral sejam desprezíveis, e que portanto o emprego de gravitação newtoniana esteja bem fundamentada.

Cooperstock e Tieu [4] apresentaram críticas à conclusão acima, e construíram uma solução das equações de Einstein, com as simetrias de uma galáxia de disco, cuja cinemática de galáxias difere significativamente da cinemática Newtoniana. Eles ainda especularam sobre a possibilidade dessas diferenças entre a cinemática de relatividade geral e a newtoniana responderem pela totalidade, ou grande parte, dos efeitos gravitacionais comumente atribuídos à matéria escura.

Balasin e Grumiller [5] frente às diversas críticas [5–7] referentes à proposta de Cooperstock constroem outra solução de relatividade geral com simetrias de uma galáxia de disco obtendo um comportamento não newtoniano em regime de campo fraco e velocidades

baixas.

O objetivo deste trabalho, por fim, é rever a abordagem de Cooperstock e Tieu e de Balasin e Grumiller e propor um teste observacional para estes modelos ou qualquer outro com as mesmas características. A dissertação está dividida em 8 capítulos: Introdução; Gravitação Newtoniana, onde revisamos os aspectos gerais da teoria e aplicamos para o caso de galáxias do tipo disco; Galáxias Espirais, onde descrevemos sucintamente sobre as características gerais de galáxias espirais, bem como os aspectos históricos do estudo da estrutura espiral e seus componentes, classificação das galáxias espirais; Matéria Escura, onde descrevemos de maneira resumida historicamente como se deu historicamente a necessidade da matéria escura para explicação de alguns fenômenos astrofísicos, bem como os candidatos à partícula de matéria escura e os experimentos que existem a fim de detectá-las, além das alternativas, do ponto de vista da gravitação, à necessidade de matéria escura; Relatividade Geral, onde mostramos o contexto histórico de seu desenvolvimento além dos princípios que levaram Einstein à elaboração de sua teoria, apresentamos também os elementos matemáticos e suas propriedades, indispensáveis para o entendimento da relatividade geral; Dinâmica de Galáxias via Relatividade Geral, onde apresentamos em detalhes as propostas de Cooperstock e Tieu e de Balasin e Grumiller; Análise numérica e Resultados, onde realizamos a comparação dos modelos relativísticos para dinâmica de galáxias frente à observação e uma discussão sobre os resultados; Conclusões e Perspectivas, onde realizamos um breve resumo das principais idéias compreendidas neste trabalho e apresentamos propostas futuras de trabalho no âmbito destes modelos relativísticos. Por fim, essa dissertação ainda apresenta um apêndice contendo as principais rotinas numéricas feitas para a obtenção dos resultados.

Capítulo 2

Gravitação Newtoniana

Este capítulo é destinado a descrever, com base na Ref. [8], a aplicação da teoria Newtoniana no cálculo do potencial gravitacional gerado por uma distribuição de matéria arbitrária, bem como a aplicabilidade destes potenciais na descrição de galáxias tipo disco, idealizadas por disco finos e com simetria axial. A primeira seção apresenta resultados gerais da teoria newtoniana. A segunda, aborda resultados da teoria newtoniana aplicados a sistemas com simetria esférica. E por fim, a terceira seção aborda a aplicação da teoria newtoniana a disco finos e com simetria axial.

2.1 Resultados Gerais

Nosso objetivo nesta seção é descrever resultados gerais obtidos na teoria gravitacional Newtoniana. Vamos obter, então, a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ em uma partícula de massa m_s localizada no ponto \mathbf{x} gerada pela atração gravitacional de uma distribuição de massa $\rho(\mathbf{x}')$. A partir da Lei da Gravitação Universal de Newton a força $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ pode ser obtida através da soma de pequenas contribuições

$$\delta\mathbf{F}(\mathbf{x}) = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \delta m(\mathbf{x}') = Gm_s \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \quad (2.1)$$

onde $\delta m_s(\mathbf{x}') = \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'$. Assim, a contribuição total de cada pequeno elemento do volume $d^3\mathbf{x}'$ localizado em \mathbf{x}'

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m_s \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

sendo

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}', \quad (2.3)$$

o campo gravitacional por unidade de massa.

Se definirmos o potencial gravitacional como sendo

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \quad (2.4)$$

e utilizando a relação

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \quad (2.5)$$

podemos escrever \mathbf{g} como

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi, \quad (2.6)$$

onde omitimos, por simplicidade, o subscrito \mathbf{x} no gradiente.

Se tomarmos a divergência da equação (2.6), encontramos que

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = G \int \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.7)$$

Agora

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = -\frac{3}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} + \frac{3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^5}. \quad (2.8)$$

Quando $\mathbf{x}' - \mathbf{x} \neq 0$, temos

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0. \quad (2.9)$$

Agora nos resta analisar o caso $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, e para isso vamos restringir o volume de integração a uma pequena esfera de raio ϵ centrada no ponto $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Ora, uma vez que a densidade $\rho(\mathbf{x}')$ neste volume é praticamente constante, podemos tirá-la da integral

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \epsilon} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3 \mathbf{x}' \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq \epsilon} \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3 \mathbf{x}' \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = \epsilon} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

No último passo utilizamos o teorema da divergência para converter uma integral de volume numa integral de superfície. Assim, na esfera $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = \epsilon$ temos $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \in d^2 \Omega$, onde $d^2 \Omega$ é um pequeno elemento de ângulo sólido. Logo, a equação (2.10) se torna

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2 \Omega = -4\pi G\rho(\mathbf{x}). \quad (2.11)$$

Se substituirmos a equação (2.6) na expressão acima obtemos a equação de Poisson que relaciona o potencial $\Phi(\mathbf{x})$ à densidade $\rho(\mathbf{x})$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \quad (2.12)$$

Esta é uma equação diferencial que pode ser resolvida para $\Phi(\mathbf{x})$ dado $\rho(\mathbf{x})$ e condições de contorno apropriadas. Para um sistema isolado a condição de contorno é $\Phi \rightarrow 0$ para

$|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. O potencial que definimos em (2.4) satisfaz automaticamente esta condição de contorno.

Um caso especial, $\rho = 0$, a equação de Poisson se torna a equação de Laplace,

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad (2.13)$$

Se integramos de ambos os lados da equação (2.12) sobre um volume arbitrário contendo a massa total M , e então aplicamos o teorema da divergência obtemos

$$4\pi GM = 4\pi G \int \rho d^3\mathbf{x} = \int d^3\mathbf{x} \nabla^2\Phi = \int d^2\mathbf{S} \cdot \nabla\Phi. \quad (2.14)$$

Este resultado é o Teorema de Gauss, que estabelece que a integral da componente normal de $\nabla\Phi$ sobre qualquer superfície é igual a $4\pi G$ vezes a massa contida no interior da superfície.

2.2 Sistemas Esféricos

Enunciaremos aqui os teoremas de Newton, que nos permite calcular o potencial gravitacional de qualquer distribuição de matéria esfericamente simétrica.

1º Teorema de Newton *Um corpo dentro de uma casca esférica de matéria não experimenta nenhuma força por parte da casca.*

2º Teorema de Newton *A força gravitacional experimentada por um corpo que está fora da casca esférica de matéria é a mesma se considerássemos toda a matéria da casca concentrada em seu centro.*

A demonstração destes teoremas, de maneiras distintas, pode ser encontrada na Ref. [8].

Um importante corolário do primeiro teorema de Newton é que o potencial dentro de uma casca esférica vazia é constante pois $\nabla\Phi = -\mathbf{g} = 0$. Assim, utilizando a definição (2.4) podemos calcular o potencial $\Phi(\mathbf{x})$ para \mathbf{x} localizado em qualquer ponto interior à casca, o local mais conveniente é o centro da casca, onde todos os pontos na casca estão a mesma distância R , e imediatamente temos

$$\Phi = -\frac{GM}{r}. \quad (2.15)$$

A partir dos teoremas acima podemos concluir que a atração gravitacional de uma distribuição esférica $\rho(r')$, sendo r' a coordenada radial, em uma massa de prova unitária localizada no raio r é completamente determinada pela massa interior a r . Assim

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r, \quad (2.16)$$

onde

$$M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'. \quad (2.17)$$

Podemos agora calcular o potencial gravitacional em \mathbf{x} gerado por uma densidade volumé-

trica e esfericamente simétrica $\rho(\mathbf{x}')$ considerando a soma de potenciais de cascas esféricas de massa $dM(r) = 4\pi\rho(r)r^2dr$. Assim, adicionando as contribuições ao potencial produzidas pelas cascas (i) $r' < r$ e (ii) $r' > r$. Dessa forma obtemos, usando (2.4)

$$\begin{aligned}\Phi(r) &= -\frac{G}{r} \int_0^r dM(r') - G \int_r^\infty \frac{dM(r')}{r'} \\ &= -4\pi G \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + \int_r^\infty r' \rho(r') dr' \right].\end{aligned}\quad (2.18)$$

Uma importante propriedade de uma distribuição esférica de matéria é a velocidade circular $v_c(r)$, definida como a velocidade de uma partícula de massa desprezível (partícula teste) em uma órbita circular de raio r . Podemos obter a expressão para a velocidade circular igualando a atração gravitacional $|\mathbf{F}|$, da equação (2.16), à força centrípeta $\frac{v_c^2}{r}$ para uma partícula de massa unitária

$$v_c^2 = r|\mathbf{F}| = r \frac{d\Phi}{dr}. \quad (2.19)$$

Note que a expressão para a velocidade circular, depende essencialmente do $\nabla\Phi$, ou seja, o conceito de velocidade circular é por fim geométrico, não restrito apenas à simetria esférica.

2.3 Potenciais de Disco

Grande parte da luz emitida por uma galáxia espiral é oriunda de um disco fino e uma fração considerável da massa da galáxia está concentrada no disco [8]. Portanto, se faz necessária a eficiência no cálculo do campo gravitacional gerado por um disco fino e vamos considerar, nesta seção, o cálculo do potencial de um disco com simetria axial e de espessura zero. Para obtenção do potencial explicitaremos dois métodos [8,9]: (i) **o método das integrais elípticas** e (ii) **o método das funções de Bessel**. Outras formas para obtenção do potencial, que não serão explicitadas aqui, podem ser encontradas na Ref. [8].

2.3.1 Potenciais de Discos Via Integrais Elípticas

Se $\mathbf{x}' = (R', \phi', 0)$ é um dado ponto, em coordenadas cilíndricas, em um disco fino e $\mathbf{x} = (R, \phi, z)$ é qualquer outro ponto, então partindo da definição de $\Phi(\mathbf{x})$ dada por (2.4) obtemos

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_0^\infty \Sigma(R')R' dR' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z') dz', \quad (2.20)$$

onde $\rho(\mathbf{x}) = \Sigma(R')\delta(z)$, sendo Σ a densidade superficial do disco e $\delta(z)$ a distribuição delta de Dirac.

Uma vez que o potencial de um disco com simetria axial não depende da coordenada

ϕ , podemos calcular Φ para $\phi = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 &= R'^2 + R^2 - 2RR' \cos \phi' + z^2 \\ &= [(R + R')^2 + z^2][1 - k^2 \cos^2(\frac{1}{2}\phi')], \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde

$$k^2 = \frac{4RR'}{(R + R')^2 + z^2}, \quad (2.22)$$

e usando a relação $1 + \cos \phi' = 2 \cos^2(\frac{1}{2}\phi')$.

Agora substituindo a equação (2.21) em (2.20) e fazendo a mudança de variável $x = \cos(\frac{1}{2}\phi')$ e sabendo que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z') dz' = 1$, temos

$$\Phi(R, z) = -4G \int_0^{\infty} \frac{\Sigma(R')R' dR'}{\sqrt{(R + R')^2 + z^2}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}. \quad (2.23)$$

A integração em x é uma integral elíptica e é tabelada [10]. Então, temos que finalmente

$$\Phi(R, z) = -4G \int_0^{\infty} K \left(\sqrt{\frac{4RR'}{(R + R')^2 + z^2}} \right) \frac{\Sigma(R')R' dR'}{\sqrt{(R + R')^2 + z^2}}, \quad (2.24)$$

sendo K uma integral elíptica de primeiro tipo. A equação (2.24) pode ser escrita de uma forma mais compacta utilizando a definição para k^2 , dada por (2.22), assim

$$\Phi(R, z) = -\frac{2G}{\sqrt{R}} \int_0^{\infty} K(k)k\Sigma(R')\sqrt{R'} dR'. \quad (2.25)$$

Se diferenciarmos com respeito a R , obtemos

$$\frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} = \frac{G}{R^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \left[kK - 2R \frac{d(kK)}{dk} \frac{\partial k}{\partial R} \right] \Sigma(R')\sqrt{R'} dR'. \quad (2.26)$$

A derivada de K na equação (2.26) pode ser eliminada usando a identidade (Binney2008)

$$\frac{d(kK)}{dk} = \frac{E(k)}{1 - k^2} \quad (2.27)$$

onde $E(k)$ é uma integral elíptica de segundo tipo. Assim, da equação (2.22) obtemos

$$2R \frac{\partial k}{\partial R} = \frac{k^3}{4} \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'} + \frac{z^2}{RR'} \right). \quad (2.28)$$

Com as equações (2.27) e (2.28), a equação (2.26) se torna

$$R \frac{\partial \Phi(R, z)}{\partial R} = \frac{G}{\sqrt{R}} \int_0^\infty \left[K(k) - \frac{1}{4} \left(\frac{k^2}{1-k^2} \right) \left(\frac{R'}{R} - \frac{R}{R'} + \frac{z^2}{RR'} \right) E(k) \right] k \Sigma(R') \sqrt{R'} dR'. \quad (2.29)$$

Agora se analisamos para $z = 0$, a equação (2.29), iremos obter a velocidade circular ao quadrado, no mesmo sentido que a equação (2.19). Infelizmente quando $z = 0$, k se aproxima da unidade à medida que a variável de integração R' passa pelo valor de R , e para valores próximos de $k = 1$, tanto K quanto $(1 - k^2)^{-1}$ diverge. Este comportamento é inconveniente do ponto de vista numérico. Por outro lado, a singularidade é integrável e tanto a equação (2.29) quanto a equação (2.24) ainda oferece uma excelente rotina para o cálculo da velocidade circular e do potencial de um disco fino.

2.3.2 Potenciais de Discos Via Funções de Bessel

Um método alternativo para a obtenção de $\Phi(R, z)$, para o caso de um disco fino com simetria axial, foi apresentada por Toomre, em 1963 [11]. Tal método consiste em resolver a equação de Laplace (2.13) sujeita às condições de contorno apropriadas para um disco fino no infinito. Em coordenadas cilíndricas, (R, ϕ, z) , a equação (2.13) se torna

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.30)$$

Utilizando o método de separação de variáveis escrevemos

$$\Phi(R, z) = F(R)Z(z). \quad (2.31)$$

Inserindo $\Phi(R, z)$ dada por (2.31) na equação (2.30) obtemos

$$\frac{1}{F(R)R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dF}{dR} \right) = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2, \quad (2.32)$$

onde k é uma constante arbitrária real ou um número complexo. Assim,

$$\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0 \quad (2.33)$$

e

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{dF}{dR} \right) + k^2 F(R) = 0. \quad (2.34)$$

A equação (2.33) é imediatamente integrável e obtemos

$$Z = S \exp(\pm z), \quad (2.35)$$

onde S é uma constante. A equação (2.34) é simplificada se fazemos a substituição de variável

$$u = kR,$$

$$\frac{1}{u} \frac{d}{du} \left(u \frac{dF}{du} \right) + F(u) = 0. \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é uma equação diferencial de Bessel de ordem zero, um caso particular de

$$u \frac{d}{du} \left(u \frac{dF}{du} \right) + (u^2 - m^2)F(u) = 0, \quad (2.37)$$

que é a equação diferencial de Bessel de ordem m . Note que a equação (2.36) é um caso particular para $m = 0$.

As soluções para a equação (2.37) são as funções de Bessel de primeiro e segundo tipo, $J_m(u)$ e $I_m(u)$, respectivamente. As funções de Bessel de segundo tipo, $I_0(u)$, divergem para $u \rightarrow 0$ ($R \rightarrow 0$). As que são, portanto, de interesse são as de primeiro tipo $J_0(u) = J_0(kR)$. Logo, $\Phi(R, z)$, segundo (2.31), se torna

$$\Phi_{\pm}(R, z) = S J_0(kR) \exp(\pm kz), \quad (2.38)$$

e sendo, portanto, solução da equação (2.13).

Agora consideremos a seguinte função

$$\varphi(R, z, k) = \exp(-k|z|) J_0(kR), \quad (2.39)$$

sendo k uma função real e positiva. Notemos que $\varphi(R, z, k) \rightarrow 0$ quando $z \rightarrow \infty$ e ainda, $\varphi(R, z, k) \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, pois $J_0(u) \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow \infty$. Logo, $\varphi(R, z, k)$ satisfaz todas as condições para um potencial gerado por uma dada distribuição de matéria. Além disso, $\varphi(R, z, k)$ coincide, a menos de uma constante, com $\Phi_-(R, z)$ para $z > 0$ e para $z < 0$, $\varphi(R, z, k)$ coincide com $\Phi_+(R, z)$. Então, $\varphi(R, z, k)$ resolve a equação de Laplace (2.13), exceto no plano $z = 0$. Em $z = 0$, $\varphi(R, z, k)$ não satisfaz a equação de Laplace pois seu gradiente sofre uma descontinuidade. É possível por meio da aplicação do teorema de Gauss (2.14) encontrar a densidade superficial desta lâmina que gera essa descontinuidade. Assim,

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = -k J_0(kR) \quad (2.40)$$

e

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = +k J_0(kR). \quad (2.41)$$

A integral de $\nabla \varphi(R, z, k)$ sobre uma superfície fechada deve ser igual a $4\pi G \sigma(k, R)$, então segue que

$$\sigma(R, k) = -\frac{k}{2\pi G} J_0(kR). \quad (2.42)$$

Podemos usar as equações (2.39) e (2.42) para encontrar o potencial gerado por um disco de

densidade superficial arbitrária $\Sigma(R)$. Para isso, consideremos uma função $S(k)$, tal que

$$\Sigma(R) = \int_0^\infty S(k)\sigma(R, k)dk = -\frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty S(k)J_0(kR)kdk, \quad (2.43)$$

e ainda,

$$\Phi(R, z) = \int_0^\infty S(k)\varphi(R, z, k)dk = \int_0^\infty J_0(kR) \exp(-k|z|)dk. \quad (2.44)$$

Se

$$g(k) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(kx) dx, \quad (2.45)$$

então g é chamada de **Transformada de Hankel** de f . A transformada de Hankel é definida para qualquer inteiro e todos os reais $\nu \geq -\frac{1}{2}$ e possui propriedades muito similares às transformadas de Fourier. Em particular, elas podem ser invertidas

$$f(x) = \int_0^\infty k g(k) J_\nu(kx) dk. \quad (2.46)$$

A equação (2.43) estabelece que $S(k)$ é a transformada de Hankel de $-2\pi G\Sigma$. Usando a equação (2.46) podemos encontrar

$$S(k) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR)\Sigma(R)RdR. \quad (2.47)$$

Podemos agora eliminar $S(k)$ na equação (2.44) com a equação (2.47). Assim, temos finalmente

$$\Phi(R, z) = -2\pi G \int_0^\infty J_0(kR) \exp(-k|z|)dk \int_0^\infty \Sigma(R')J_0(kR')R'dR'. \quad (2.48)$$

Logicamente a quantidade de interesse é a velocidade circular v_c . Analisando a equação (2.44) para $z = 0$ e em seguida derivando com respeito a R , temos

$$v_c^2(R) = R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = -R \int_0^\infty S(k)k J_1(kR)dk, \quad (2.49)$$

onde usamos a identidade $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$. Substituindo a equação (2.47) na equação (2.49), temos

$$v_c^2(R) = 2\pi GR \int_0^\infty J_1(kR)kdk \int_0^\infty \Sigma(R')R'J_0(kR')dR'. \quad (2.50)$$

Encontrando a transformada inversa de Hankel via fórmula (2.46), temos

$$S(k) = - \int_0^\infty v_c^2(R')J_1(kR')dR'. \quad (2.51)$$

Agora, substituindo a equação (2.51) na equação (2.43), obtemos

$$\Sigma(R) = \frac{1}{2\pi G} \int_0^\infty J_0(kR)kdk \int_0^\infty v_c^2(R')J_1(kR')dR'. \quad (2.52)$$

Comparando as equações (2.52) e (2.50) vemos uma completa simetria entre as quantidades $v_c(R)$ e $\Sigma(R)$, e os resultados acima nos mostram que matematicamente é possível determinar a densidade superficial do disco a partir da medida de sua velocidade circular. Infelizmente, restrições observacionais destroem essa simetria. De um lado, a densidade superficial decai rapidamente com o raio, o que permite determinar com acurácia a velocidade circular, esta última, por sua vez, decresce muito lentamente com o raio, conseqüentemente, na prática, não podemos obter dados necessários para determinar com acurácia a densidade superficial via equação (2.52).

Capítulo 3

Galáxias Espirais

Este capítulo é dedicado ao estudo, baseado nas Ref. [8, 12], sobre galáxias espirais. Iniciando com um contexto um pouco mais geral sobre tais estruturas seguida de uma discussão sobre a classificação das galáxias espirais. E, por fim, uma descrição sobre o estudo da estrutura espiral.

3.1 Aspectos gerais

Galáxias espirais são galáxias, como a Via Láctea, Fig.(3.1) e M31, Fig.(3.2), que contém um disco proeminente composto de estrelas, gás e poeira. O disco contém **braços espirais**, filamentos que possuem contínua formação estelar. Os mesmos braços espirais são vistos em estrelas antigas que dominam na massa do disco. Os braços espirais variam muito em sua forma, comprimento e proeminência de galáxia para galáxia mas sempre estão presentes.

Em regiões do universo de baixa densidade, cerca de 60% de todas as galáxias luminosas são espirais, mas a fração cai para cerca de 10% em regiões densas como aglomerados de galáxias.

O brilho superficial, que é a luminosidade estelar total emitida por unidade de área, em discos de galáxias espirais nos dá a distribuição radial de estrelas. Tal distribuição obedece uma lei exponencial [13]

$$I(R) = I_d \exp\left(-\frac{R}{R_d}\right), \quad (3.1)$$

onde R_d é o comprimento de escala de disco (disc scale length) e I_d é o brilho superficial quando $R = 0$. O gás interestelar em discos de galáxias espirais frequentemente se estende para raios muito maiores do que as estrelas, provavelmente por que a formação estelar é suprimida quando a densidade superficial do gás cai abaixo de um valor crítico.

Usando a linha de 21cm do hidrogênio neutro interestelar, a velocidade circular, ou curvas de rotação, $v_c(R)$ de galáxias espirais pode ser estendida para raios bem além da borda externa da distribuição estelar. A curva de rotação de galáxias espirais são, em geral, aproximadamente planas para raios maiores. Se a contribuição maior para a massa das

galáxias vêm das estrelas, seria de se esperar uma curva de rotação do tipo $v_c(R) = \left(\frac{GM}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$, sendo M a massa total estelar. A conclusão então é que a massa da galáxia, nestes raios maiores, é governada por um halo de matéria que não enxergamos, uma matéria escura, ao invés das estrelas.

Curvas de rotação de galáxias espirais tipicamente estão entre 100 e 300 km/s. Existe uma correlação entre a velocidade de rotação na região plana de uma galáxia espiral e sua magnitude absoluta, esta relação é conhecida como relação de **Tully-Fisher** [14], esta relação é calculada empiricamente

$$M = a \log_{10} V_0 + b, \quad (3.2)$$

sendo M a magnitude absoluta, V_0 a velocidade de rotação na região plana e a, b constantes que são ajustadas aos dados observacionais. A relação de Tully-Fisher também pode ser encontrada na literatura da seguinte maneira

$$v_c^4 \propto L, \quad (3.3)$$

onde L a luminosidade intrínseca da galáxia. Como a velocidade de rotação das galáxias espirais pode ser obtida de uma maneira mais fácil através da linha de 21cm do hidrogênio neutro interestelar, a relação Tully-Fisher pode ser usada para estimar as distâncias das galáxias espirais mais remotas. Primeiramente, calibra-se a relação usando galáxias espirais próximas o suficiente para se medir sua distâncias usando Cefeidas, estrelas em que o brilho e o diâmetro variam regularmente com uma frequência que está relacionada com a magnitude absoluta da estrela. Posteriormente, mede-se a curva de rotação da galáxia e usa-se a relação (3.3) para obter sua luminosidade. Comparando a luminosidade com a magnitude aparente da galáxia obtêm-se a sua distância.

Como a Via Láctea, muitas galáxias espirais contém um bojo, um sistema concentrado de estrelas que têm uma aparência suave ou amorfa. A origem dos bojos não é entendida muito bem, uns se assemelham a pequenas galáxias elípticas, enquanto outros se assemelham a discos finos, que podem ter sido formados a partir de processos dinâmicos [15].

A luminosidade do bojo relativa ao disco está correlacionada outras propriedades da galáxias, tais como a fração de massa no disco na forma do gás, a cor do disco, e o quanto os braços espirais são enrolados.

3.2 Classificação das Galáxias Espirais

Em 1923, Edwin Powell Hubble [16, 17], foi capaz de identificar estrelas Cefeidas na “nebulosa”, nome dado na época a corpos extensos e difusos, de Andrômeda (M31). Ele notou que o brilho dessas estrelas seguia o mesmo padrão das Cefeidas de nossa Galáxia. Assumindo que elas seguiam a relação conhecida entre período e luminosidade, Hubble foi capaz de calcular a distância de Andrômeda, obtendo o valor de 1 milhão de anos-luz, hoje sabemos que este valor é de 2,2 milhões de anos-luz. Isso localizava Andrômeda bem além

dos limites de nossa Galáxia, que por sua vez tem 100 mil anos-luz de diâmetro. Ficou, assim, provado que Andrômeda era sim um sistema estelar independente.

Um dos primeiros e mais simples esquemas de classificação de galáxias, que é usado até hoje, foi inventado por Hubble. O esquema consiste de três sequências principais de classificação: elípticas, espirais, e espirais barradas. Nesta seção estaremos restritos apenas as galáxias espirais.

Galáxias espirais, quando vistas de frente, apresentam nitidamente uma estrutura espiral, como por exemplo a nossa Galáxia. As galáxias espirais apresentam diferenças entre si, principalmente no que diz respeito no tamanho do núcleo e o grau de desenvolvimento dos braços. Assim elas são subdivididas nas categorias **Sa**, **Sb** e **Sc**, de acordo com o grau de desenvolvimento e enrolamento dos braços espirais, **a**, braços pequenos e bem enrolados, **c**, braços grandes e mais abertos, e também com o tamanho do núcleo em relação ao disco, **a**, núcleo maior, **c**, núcleo menor. Portanto uma galáxia **Sa** é uma espiral com núcleo grande e braços pequenos e bem enrolados.

Existem algumas galáxias que possuem núcleo, disco e halo, mas não possuem traços de estrutura espiral. Hubble as classificou como **S0**, e elas são comumente chamadas de **lenticulares**. O conjunto das lenticulares e espirais é chamado de **discoidais**.

Uma grande parte das galáxias discoidais apresentam uma estrutura em forma de barra atravessando o núcleo. Estas galáxias são chamadas **barradas**, e na classificação de Hubble elas são indicadas por **SB**. As galáxias barradas ainda geram subcategorias denominadas **SB0**, **SBa**, **SBb**, **SBc**. Nas espirais barradas os braços, geralmente, partem da barra. A formação das barras ainda não é muito bem entendida mas acredita-se ser a resposta do sistema a algum tipo de perturbação gravitacional, ou simplesmente a consequência de uma assimetria na distribuição de massa do disco. Acredita-se também que a barra seja responsável pela formação da estrutura espiral. Propriedades mais detalhadas sobre barras podem ser encontrada em [8].

Uma galáxia barrada clássica é a NGC 1300. Nossa Galáxia, Fig.(3.1), e sua vizinha a Nuvem de Magalhães, são ambas barradas.

3.3 Estrutura Espiral

Entender a origem e evolução da estrutura espiral das galáxias mostrou-se ser um dos problemas mais complicados da astrofísica. A primeira abordagem de grande relevância foi feita pelo astrônomo sueco Bertil Lindblad, que atacou este problema até a sua morte em 1965. Lindblad [18], sugeriu que a estrutura espiral vinha da interação entre as órbitas e as forças gravitacionais das estrelas do disco. Neste ponto de vista, Lindblad permaceu sozinho, pois até a sua morte a maioria dos astrônomos acreditavam que a estrutura espiral era causada pelo campo magnético interestelar, que sabemos não ser o responsável pela estrutura espiral em larga escala, uma vez que o campo magnético típico de galáxias é da ordem de 0.5 nT [19], embora facilite a formação de pequenas estruturas como spurs [20], numa tradução literária,

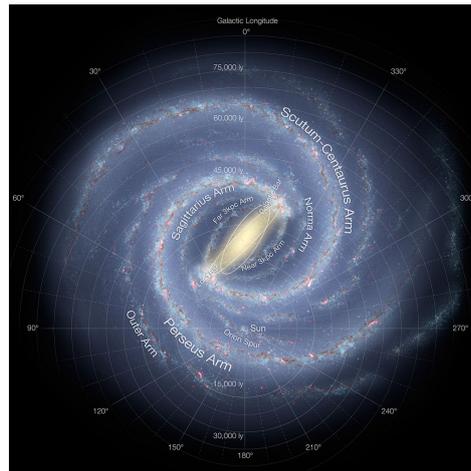


Figura 3.1. Concepção artística da Via Láctea, a nossa galáxia. Crédito: NASA/JPL-Caltech/ESO/R.Hurt.

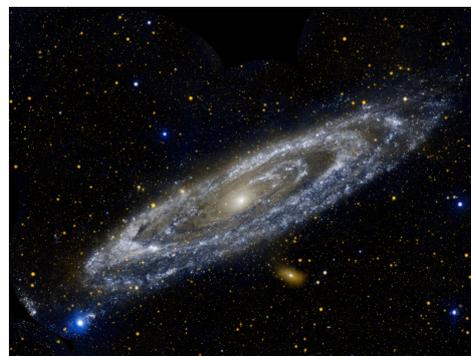


Figura 3.2. A galáxia de Andrômeda M31, ou NGC 224, a galáxia espiral mais próxima a nós. M31 está se aproximando da nossa Galáxia e provavelmente colidirá em mais ou menos 3 Gyr. Crédito: NASA/JPL-Caltech.

esporas, estruturas complexas que se formam entre os braços espirais. Além de complexos de nuvem [21] e anéis nucleares [22].

Após a morte de Lindblad, dois grandes estudos estimularam o interesse da comunidade astronômica em estrutura espiral, e contribuíram muito com a base teórica, tanto no estudo de estrutura espiral quanto no de estabilidade de discos galácticos.

O primeiro destes estudos foi feito por C. C. Lin e Frank Shu no MIT. Eles concluíram que a estrutura espiral poderia ser vista como uma perturbação de densidade que se move ao longo do disco, intitulada de **ondas de densidade** que, por sua vez, resistem a tendência da estrutura espiral “enrolar”, problema conhecido como “problema do enrolamento” (winding problem), Fig.(3.4), causando uma rotação rígida do padrão espiral. Lin e Shu também mostraram que muitas das ferramentas usadas na mecânica ondulatória poderiam ser usadas no estudo das propriedades de ondas de densidade em discos estelares girantes. Eles combinaram essas idéias e acrescentaram uma hipótese ousada, que padrões espirais em galáxias são duradouros, ou seja, estacionários. Estes conceitos ficaram conhecidos como **hipóteses de Lin-Shu**, de que a estrutura espiral é uma **onda de densidade estacionária**. As hipóteses de



Figura 3.3. A Grande Nuvem de Magalhães é uma galáxia satélite da Via Láctea, localizada entre 45 e 50 kpc do Sol. Crédito: C-141 KAO Imagery: Supernova 1987A (April 1987 - New Zealand Deployment) Large Magellanic Cloud; Photographer: C-141 Imagery; Date: Jun 23, 1987.

Lin-Shu permitiram, pela primeira vez, que teóricos pudessem fazer previsões quantitativas e compará-las com as observações de galáxias espirais. Infelizmente, as hipóteses de Lin-Shu não estão corretas, pelo menos para a maioria das galáxias. A estrutura espiral em larga escala é uma onda de densidade, a mais convincente evidência vem de imagens próximas do infra-vermelho de galáxias mais próximas, mas está longe de ser estacionária.

Uma vez que a taxa de formação estelar nos braços espirais é muito maior do que no resto do disco as imagens no ótico são fortemente afetadas pela população estelar jovem, então é importante examinar galáxias espirais em outros comprimentos de onda, como por exemplo, próximos do infra-vermelho, o que é uma vantagem uma vez que a absorção pela poeira é muito menor nestes comprimentos de onda. A contribuição de estrelas mais jovens ao fluxo infra-vermelho é pequeno, exceto em regiões de rápida formação estelar [23, 24]. Assim, comprimentos de onda próximos do infra-vermelho são indicadores de massa enquanto comprimentos de onda azuis indicam formação estelar. Ambos indicadores são valiosos mas a massa é mais fundamental para a dinâmica da estrutura espiral. Uma análise feita por Zwicky [1] e posteriormente confirmada e estendida por Schweizer [25], mostram que o padrão espiral na imagem infra-vermelha é similar à imagem da população estelar jovem, estrelas azuis, porém os braços são mais suaves e mais amplos. A presença da estrutura espiral em estrelas mais antigas que dominam na massa é comum em galáxias espirais [26], e implica que todo o disco estelar participa da estrutura espiral, ou seja, existe um padrão espiral tanto na densidade superficial do disco estelar (visto no infra-vermelho) quanto na formação estelar (visto no ótico). Tipicamente o braço traçado pelas jovens estrelas é levemente deslocado dentro do braço gerado pelas estrelas antigas. A presença de espirais no disco estelar é uma forte evidência de que a estrutura espiral é uma onda de densidade.

Mas qual é a conexão física entre a onda de densidade espiral e o padrão espiral nas estrelas mais jovens? A resposta está no campo gravitacional que desvia e pressiona as linhas de corrente do gás interestelar aumentando a densidade de gás nos braços e a taxa de formação estelar aumenta nestas regiões de alta densidade. À medida que o braço se move, novas estrelas vão se formando pela compressão do material, de forma que sempre existam estrelas mais jovens nos braços, embora não sejam sempre as mesmas estrelas.

O segundo grande estudo foi realizado por Peter Goldreich e Donald Lindell-Bell

[27,28], e mostrou que os discos galácticos são responsáveis por pequenas perturbações. A evolução de perturbações em pequena escala em um modelo simplificado de um disco gigante são amplificadas, crescem por um tempo limitado enquanto começam a ser freados pela rotação. Essas perturbações podem ser justamente as “sementes” necessárias para produzir as ondas de densidade. Bem como forças de maré, interações com outras galáxias também são cogitadas pelos astrônomos como fontes para as ondas de densidade.

O estudo da dinâmica de discos girantes foi bem desenvolvida num formalismo chamado **teoria de onda de densidade**, que é o centro do estudo de todos os tipos de discos astrofísicos. A teoria de onda de densidade é uma ferramenta que permite também o estudo da estabilidade gravitacional de discos galácticos. Uma revisão interessante sobre teoria de estrutura espiral pode ser encontrada em [29].

Vejamos agora alguns componentes da estrutura espiral

a) Poeira: a poeira desempenha um papel importante na descrição astrofísica de uma galáxia. Em particular, do meio interestelar e a termodinâmica e química do gás para a formação de estrelas [30]. Na Galáxia, por exemplo, a poeira é composta principalmente de grafite, silicatos e água na forma de gelo. Além de possuir um tamanho, que varia entre 0.1 a 1 micrometro, são suficientemente pequenas para espalharem a luz de menor comprimento de onda. Dessa maneira, a poeira faz as estrelas parecerem avermelhadas.

b) Elétrons relativísticos: o gás interestelar contém elétrons relativísticos e campos magnéticos, que por sua vez, fazem os elétrons espiralarem e emitirem radiação síncrotron, que é detectável como emissão de rádio polarizada. A taxa de perda de energia por unidade de volume é proporcional a $n_e B^2$, sendo n_e a densidade de elétrons e B o valor do campo magnético. Sendo o campo magnético, no gás interestelar, praticamente constante [31], a compressão do gás nos braços espirais aumenta tanto n_e quanto B contribuindo ainda mais para a emissão síncrotron.

c) Gás molecular: moléculas como H_2 , CO e NH_3 são detectados nos braços espirais. Baseados principalmente em medições de CO , nota-se que estes gases se concentram na forma de nuvens moleculares. Braços espirais espessos delineados por CO indicam regiões de alta densidade de gás [32] e conseqüentemente a formação de estrelas.

d) Gás atômico neutro: a estrutura espiral também se manifesta na densidade superficial do hidrogênio atômico neutro (HI), medida a partir da transição hiperfina de 21-cm do hidrogênio neutro. A emissão HI oferece um mapa cinemático bem detalhado da velocidade do gás em função da posição no disco galáctico. A maior parte das galáxias que possuem braços espirais simétricos e bem desenvolvidos, os braços em HI coincidem com braços que contém estrelas mais brilhantes. Essa coincidência sugere que a alta densidade de HI nos braços vêm da dissociação de hidrogênio molecular por radiação ultravioleta emitida por estrelas jovens nos braços [33], ao invés da compressão do gás. Assim, nestes casos podemos ver os braços de HI como um produto, ao invés de um precursor, de formação estelar.

e) Regiões HII: Existem, em estruturas espirais, regiões de gás ionizado (HII) que rodeiam estrelas quentes. Estas regiões são visíveis devido à linha de emissão $H\alpha$ da série de Balmer em 656 nm, que acontece quando um próton se combina com um elétron livre

formando, assim, um átomo de hidrogênio neutro em um estado excitado, que ao decair para o estado fundamental emite uma série de fótons, que são medidos, por exemplo, nas frequências de rádio.

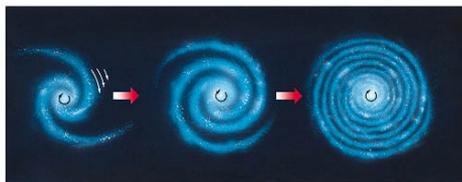


Figura 3.4. Reprodução esquemática do problema do "enrolamento".(Domínio público)

Capítulo 4

Matéria Escura

Este capítulo destina-se a uma breve discussão sobre a matéria escura, com base nas Ref. [8, 34–36], mostrando suas evidências em estruturas do universo, como galáxias e aglomerados, e a sua importância no cenário cosmológico padrão. Apresentaremos também alguns dos candidatos à matéria escura encontrados na literatura e, por fim, uma pequena discussão sobre algumas alternativas à matéria escura mas do ponto de vista da gravitação.

A primeira evidência de que o universo poderia conter uma matéria escura, ou seja, um tipo de matéria que não interage eletromagneticamente apenas gravitacionalmente, foi trazida por Zwicky, em 1933, ao estudar o aglomerado de Coma, concluindo que a massa necessária para manter o aglomerado unido (virializado) era 400 vezes maior que a matéria luminosa na forma de estrelas. Em 1937, Zwicky reforçou esta análise e notou que galáxias associadas a esta grande quantidade de massa funcionariam como **lentes gravitacionais** provocando múltiplas imagens de outras galáxias. Porém mesmo com estes estudos, Zwicky permaneceu sozinho em suas conclusões levando cerca de 40 anos para que a hipótese da existência de uma matéria escura fosse aceita completamente. Em meados dos anos 70 os estudos de Ostriker [37] e Einasto [38] estenderam os estudos de Zwicky e notaram que halos de matéria escura ao redor de nossa Galáxia e de galáxias próximas eram necessários para explicar o movimento de seus satélites. As evidências da matéria escura foram reforçadas pelos estudos de curva de rotação de galáxias espirais [39–41], que por sua vez, permanece plana por mais do que 10 vezes o comprimento de escala do disco estelar, o que nos mostra que a massa da galáxia a raios grandes é dominada por matéria escura ao invés de estrelas. Em raios da ordem de 100 kpc, a distribuição de matéria escura pode ser medida utilizando cinemática de galáxias satélites e lenteamento gravitacional fraco. Dentro de uma incerteza considerável, os dados são consistentes com a hipótese de que os halos de galáxias espirais são os mesmos, em tamanho e massa, dos de galáxias elípticas isoladas, ou seja cerca de 300 kpc de raio e aproximadamente 10 vezes a massa estelar da galáxia.

Para grande parte das galáxias espirais, as contribuições vindas das matérias escura e luminosa são difíceis de separar. Por outro lado, galáxias espirais com baixo brilho superficial (LSB), a matéria escura domina na massa em todo o raio [42], tornando-se então,

aparentemente, um excelente laboratório para o estudo de matéria escura.

Do ponto de vista da Cosmologia, a matéria escura, no cenário cosmológico padrão, é intitulada de CDM (Cold Dark Matter) sendo que o termo “frio”(Cold) refere-se ao seu comportamento não-relativístico. CDM é indispensável para a formação das estruturas que existem hoje no universo, aglomerados e galáxias, tais estruturas são analisadas na Cosmologia a partir de uma teoria de perturbação. Sendo δ o contraste de densidade de CDM que relaciona a variação na densidade escalar da matéria escura em relação ao fundo homogêneo e isotrópico no qual está fundamentada a Cosmologia de base temos, em uma teoria de perturbação linear, $\delta \propto a(t)$, sendo a o fator de escala, função associada à taxa de expansão do universo $H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ que hoje equivale a $H_0 = (67.4 \pm 1.4) \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ [43].

À medida em que as análises de curva de rotação indicavam a necessidade de um conteúdo material exótico, sugestões foram feitas sobre a possível natureza dessa componente escura, partindo de objetos bariônicos como anãs marrons, anãs brancas e buracos negros [44, 45] até neutrinos massivos [46, 47].

As hipóteses de que neutrinos poderiam ser matéria escura foi, em parte, motivada pela física de partículas. Entre os anos 60 e 70, com o desenvolvimento das teorias de grande unificação (GUTs), permitiu-se a existência de neutrinos massivos, e as tentativas de medir suas massas em laboratório se iniciaram. No início dos anos 80, Lyubimov [48] e Reines [49] anunciaram a detecção da massa de um neutrino eletrônico a um nível de interesse cosmológico, em torno de 30 eV. Estes resultados então estimularam a investigação de neutrinos como possíveis candidatos à matéria escura e a formação de estruturas, galáxias e aglomerados, num universo dominado por neutrinos foi enfaticamente trabalhada. Porém um argumento baseado no princípio de exclusão de Pauli [50] mostrou que halos de galáxias não poderiam ser feitos de neutrinos com massa inferior a 30 eV, além disso simulações de formação de estrutura em universo dominado por neutrinos [44] demonstrou um desacordo em relação às observações. Problemas como estes causaram um desinteresse nos neutrinos como partículas de matéria escura no fim dos anos 80.

Ainda nos anos 80, outros modelos surgiram para tentar explicar a natureza da matéria escura sugerindo que esta era um tipo diferente de partícula massiva que interage fracamente (WIMPs). Estas partículas são previstas por modelos de física de partículas baseados nas idéias da supersimetria, uma teoria que estende o modelo padrão da física de partículas postulando a existência de companheiras mais massivas para todas as partículas do universo com a mesma carga elétrica, mas com spin diferente. Surge, então, uma certa “zoologia” de candidatos à matéria escura, como por exemplo neutralinos, gravitinos e photinos. As WIMPs, são as preferidas mas não são as únicas candidatas à matéria escura, outro candidato possível é o áxion, uma partícula neutra e também de interação fraca, porém pode ser mais leve que as WIMPs. Devido à sua grande massa, algo em torno de 100 GeV, muito maior que a do neutrino, as WIMPs são também genericamente chamadas de CDM, em contrapartida os neutrinos de HDM (Hot Dark Matter).

A busca pela existência dessas partículas tem sido feita nos últimos anos. Dentre

os experimentos que visam a detecção de WIMPs estão, por exemplo, XENON100, no laboratório subterrâneo Gran Sasso, na Itália. A CDMS, que significa Cryogenic Dark Matter Search, ou Busca Criogênica por Matéria Escura, foi um projeto que se iniciou em um túnel abaixo da universidade de Standford, na Califórnia, e uma versão mais sensível do projeto já está funcionando no subsolo da Mina Soudan, em Minnesota. Um experimento intitulado de ADMX, que significa literalmente Experimento Áxion de Matéria Escura na universidade de Washington utiliza um grande imã supercondutor para procurar por essas partículas. Outro local de busca por partículas de matéria escura é o acelerador de partículas localizado na Suíça, o LHC (Large Hadron Collider), que já limitou a existência de algumas partículas supersimétricas mas não eliminou completamente a supersimetria. Até os dias de hoje, nenhum destes experimentos anunciaram, ainda, a descoberta de uma possível partícula de matéria escura.

Mas não somente em aceleradores de partículas ou laboratórios subterrâneos têm-se investigado a natureza da matéria escura. Recentemente, Boyarsky e colaboradores [51] realizaram análises de espectro de raios-X da galáxia de Andrômeda, Fig.(3.2), e do aglomerado de Perseus através do telescópio XMM-Newton e identificaram um decaimento semelhante ao previsto para a matéria escura. Semelhantemente, mas com métodos de análise diferentes e utilizando as informações do mesmo telescópio XMM-Newton, Esra e colaboradores [52] analisaram imagens de raios-X de vários aglomerados e obtiveram uma fraca linha de emissão não identificada, onde atribuíram essa linha ao decaimento de um neutrino *sterile*, que também já foi posto como candidato à matéria escura [53].

Uma abordagem teórica muito utilizada para o estudo do universo em grande escala e a formação de estruturas no regime não-linear são as simulações de N-corpos. A acurácia de uma simulação de N-corpos está baseada nas resoluções de massa e comprimento. Basicamente, a resolução de massa está ligada ao valor de massa da menor partícula considerada sendo que quaisquer flutuações abaixo desta escala de massa são negligenciadas. A resolução de comprimento é utilizada para evitar infinitos na computação da força gravitacional quando as partículas colidirem, para mais detalhes veja Ref. [34].

As simulações de N-corpos sugerem um perfil **universal** para a matéria escura com uma parametrização usual dada por

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^\gamma \left[1 + \left(\frac{r}{r_s}\right)^\alpha\right]^{\frac{\beta-\gamma}{\alpha}}}. \quad (4.1)$$

Na Tabela (4.1) listamos os valores dos parâmetros (α, β, γ) dos perfis de matéria escura mais utilizados, os perfis de Kravstov (Krav [54]); Navarro, Frenk e White (NFW [55]); Moore [56] e o perfil isotérmico (Iso [57]).

É necessário frisar que mesmo com os avanços proporcionados pelas simulações de N-corpos para CDM e a obtenção de um perfil universal para a matéria escura em galáxias, tal abordagem apresenta problemas em relação às observações. Estas, por sua vez, parecem indicar uma distribuição aproximadamente constante em partes interiores de galáxias LSB

e anãs ricas em gás, enquanto as simulações cosmológicas indicam uma lei de potência, este problema é conhecido como “core/cusp problem”, ou problema do núcleo/cúspide, e ainda está em aberto na cosmologia de pequena escala. Para detalhes a Ref. [58] apresenta uma revisão do problema.

Tabela 4.1. Parâmetros de alguns dos perfis de matéria escura mais utilizados em galáxias, segundo a Ref. [36]. Os valores de r_s podem mudar de sistema para sistema.

	α	β	γ	$r_s(\text{kpc})$
Kra	2.0	3.0	0.4	10.0
NFW	1.0	3.0	1.0	20.0
Moore	1.5	3.0	1.5	28.0
Iso	2.0	2.0	0	3.5

Por outro lado, existem propostas na literatura que objetivam suavizar e até mesmo eliminar a necessidade de matéria escura, porém tais propostas não se concentram no conteúdo material em si mas na teoria gravitacional empregada. A mais influente destas teorias e, talvez, a que melhor explica a questão da matéria escura, do ponto de vista da gravitação, é a MOND (Modified Newtonian Dynamics) proposta por Milgrom [59,60]. MOND é baseada em uma gravitação não-newtoniana na qual existe uma escala de aceleração, fixada por uma constante a_0 e pode gerar curvas de rotação razoáveis sem a necessidade de matéria escura e explicar a relação de Tully-Fisher [61].

Outra proposta RGGR (Renormalization Group and General Relativity), esta mais recente, utiliza efeitos de Grupos de Renormalização [62], da teoria quântica de campos, em Relatividade Geral induzindo uma forma funcional para a constante gravitacional G modelando, sob um limite newtoniano adequado [63], a curva de rotação de galáxias sem matéria escura [64].

Modelos baseados na Relatividade Geral também têm sido recentemente estudados [4, 5], aproveitando-se da não linearidade das equações de Einstein têm-se encontrado um comportamento não-newtoniano e uma modelagem razoável para curva de rotação sem a necessidade de matéria escura.

Capítulo 5

Relatividade Geral

Este capítulo consiste de uma revisão, baseada nas Ref. [65–68], sobre relatividade geral envolvendo aspectos históricos, formulação matemática, equivalência com a gravitação newtoniana e a descrição de espaços-tempos estacionários e axissimétricos que, por sua vez, podem ser aplicados a objetos astrofísicos como galáxias tipo disco (espirais).

5.1 Breve Histórico

O nome **relatividade** se aplica a duas teorias. A primeira, que não explicitaremos aqui mas para mais detalhes veja a Ref. [69], chamada de relatividade especial, publicada em 1905 por Albert Einstein [70–72] que basicamente decreve os fenômenos eletromagnéticos e mecânicos tomando em conta sistemas de referência que se movem com velocidades altas em relação a um observador, mas sem levar em conta efeitos gravitacionais. Posteriormente, em 1915, a teoria da relatividade geral foi publicada [73,74] descrevendo as propriedades do espaço e do tempo, e os fenômenos eletromagnéticos e mecânicos na presença da gravitação.

Na mecânica e gravitação newtonianas o espaço e o tempo são absolutos e a inércia das partículas materiais é uma propriedade intrínseca a elas não dependendo de quaisquer interações com as demais. Porém na segunda metade do século dezenove um filósofo austríaco, Ernst Mach [75], argumentou que o tempo e o espaço absolutos da mecânica newtoniana não existiam, todas as coisas são mutuamente dependentes inclusive a inércia, esta, segundo Mach, só existia devido à presença das outras massas do universo. Einstein denominou estas idéias como princípio de Mach, embora tenha inspirado Einstein a analisar futuramente a teoria newtoniana sob um outro ponto de vista, este princípio tem uma abordagem matemática um tanto vaga. Por isso é simplesmente descartado por alguns físicos, e levado em conta por outros a espera de uma formulação matemática adequada. Para alguns, não passam de idéias de caráter filosófico.

Além disso a teoria Newtoniana passou a apresentar problemas sérios em relação a testes observacionais no sistema solar. Primeiro verificou-se que as órbitas dos planetas, em torno do Sol, não eram órbitas fechadas, mas sim abertas, Fig.(5.1). A explicação com base

na teoria newtoniana era a seguinte: a órbita de um planeta é uma elipse exata somente se assumirmos que o Sol tem apenas um planeta orbitando-o. Uma vez que o Sol tem vários planetas, eles interagem mutuamente perturbando suas órbitas. Sendo levada em conta essas perturbações temos o efeito observado.

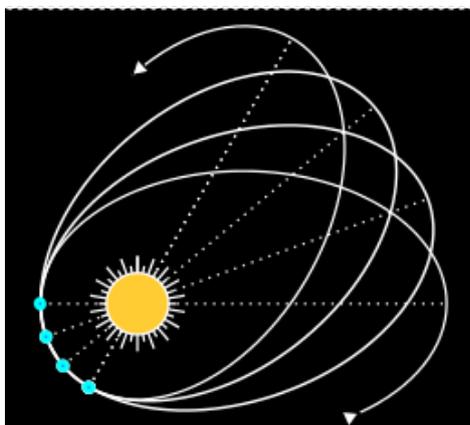


Figura 5.1. Órbita real dos planetas, devido à perturbação gravitacional dos demais, não são elipses mas, sim, órbitas abertas. Por ser uma reprodução esquemática o ângulo de revolução do periélio nesta figura está exagerado. Na realidade o maior valor observado, no sistema solar, para o ângulo de desvio do periélio é o de Mercúrio, aproximadamente 1.5° por século. (Domínio público)

Porém, Urbain J. LeVerrier, em 1859, o mesmo que anos antes com base nos mesmos cálculos previu a existência de Netuno, verificou que os valores calculados para a precessão do periélio de Mercúrio e os valores medidos eram de uma discrepância muito maior que erro observacional. Astrônomos e físicos tentaram explicar esse efeito de várias formas: cogitando a hipótese de um outro planeta, Vulcão, orbitando em torno do Sol dentro da órbita de Mercúrio, perturbando-a; a interação de Mercúrio com poeira interestelar; ou assumindo que o Sol era achatado devido à sua rotação, gerando um campo gravitacional que não era esféricamente simétrico mas suficientemente achatado para explicar a precessão do periélio de Mercúrio. Todas essas hipóteses falharam frente aos dados observacionais. O hipotético planeta Vulcão deveria ser tão massivo que deveria ser visível, o que não era. Não existia poeira interplanetária com massa suficiente para gerar a precessão do periélio. E se o Sol fosse achatado, causaria outras consequências nas órbitas dos demais planetas: os planos das órbitas teriam que variar periodicamente em torno de suas posições médias com uma amplitude de $43''$ por século e isto deveria ser observado e não era [76].

A elaboração da teoria da relatividade geral não foi instantânea mas progrediu gradualmente, até porque Einstein cometeu alguns erros e acrescentou hipóteses que foram, com o passar do tempo e do amadurecimento da teoria, retirados. Einstein construiu a teoria à medida que aprendia geometria Riemanniana, a base matemática da teoria. Além disso, teve que lidar com os questionamentos, naturalmente, que surgiam indagando-o a cerca da necessidade desta nova teoria e os competidores que queriam chegar à relatividade geral antes dele [77].

Einstein, como dissemos anteriormente, iniciou suas críticas à teoria Newtoniana inspiradas nas idéias de Mach. A teoria Newtoniana nos diz que em um espaço livre de interações, corpos massivos permanecem em repouso ou se movem com velocidade constante, num movimento retilíneo uniforme. Por outro lado, um universo real é preenchido por campos gravitacionais que não podem ser blindados, ou seja, o campo gravitacional está acoplado a tudo. Este princípio ficou conhecido como princípio de equivalência **fraco**. Como consequência todos os corpos descreveriam trajetórias curvas independentes de sua massa e de sua composição, este é conhecido como princípio de equivalência **forte**.

Porém se concluímos que as trajetória são curvas, significa que podemos definir de alguma maneira uma trajetória reta. Mas como fazer isso se acabamos de afirmar que nenhum corpo segue tal trajetória. Seria um raio luz o candidato a execução desta trajetória? Para verificarmos se esse seria o caso, basta considerarmos dois sistemas de referência cartesianos K e K' , paralelos, cujos eixos são (x, y, z) e (x', y', z') , respectivamente. Seja K inercial e K' se move com respeito a K com uma aceleração $g(t, x, y, z)$ ao longo do eixo z . Considerando a origem destes sistemas de referência coincidentes em $t = 0$, temos que as equações de movimento de uma partícula livre que em K são dadas por

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0, \quad (5.1)$$

em K' assumem a forma

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2} = 0, \quad (5.2)$$

e

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = -g(t, x, y, z). \quad (5.3)$$

A quantidade que em K é interpretada como aceleração pode ser interpretada em K' como a intensidade de um campo gravitacional, com sinal oposto. Portanto o campo gravitacional pode, então, ser simulado por um movimento acelerado, ou, mais exatamente a força gravitacional pode ser simulada por uma **força fictícia**, como por exemplo a força centrífuga. Assim o feixe de luz deve se comportar em um campo gravitacional assim como se comportaria em um sistemas de referência acelerado, ou seja, o feixe de luz seria defletido, consequentemente não podendo atuar como um padrão de trajetória retilínea.

Então se não podemos formular um modelo físico a partir de uma noção fundamental de física Newtoniana, temos que fazer sem ela. Assumimos que não existem forças gravitacionais que curvam a trajetória dos corpos, mas sim que os mesmos executam “linhas retas” em uma geometria modificada (curva) e essa modificação é feita pela gravitação via matéria e(ou) energia ¹, sendo esta idéia a mais usual, no sentido pedagógico, para a descrição da relatividade geral.

Uma geometria modificada implica numa geometria não-Euclidiana, e para o estudo

¹É necessário frisar que não somente a matéria e a energia modificam a geometria em questão mas também o vácuo, motivo imediato que leva à conclusão de que a relatividade geral apesar de inspirada nas idéias de Mach, por fim, não concorda com este princípio.

destas necessitamos da **geometria diferencial**, que é a base matemática da relatividade geral e veremos seus elementos a seguir.

5.2 Variedades e tensores

Como mencionamos em relatividade geral a utilização de uma geometria não-Euclidiana torna-se necessária. A classe mais geral de espaços que iremos considerar são as **variedades diferenciáveis**, que são, basicamente, a generalização de uma superfície curva. Assim, uma variedade diferenciável M de classe p , n -dimensional e que cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança O_x é tal que possui as seguintes propriedades:

i) Deve existir um mapeamento um-a-um κ_x da vizinhança O_x em um subconjunto U_x de \mathbb{R}^n chamado **mapa** de O_x . A imagem de $\kappa_x(x)$ são as coordenadas de $x \in M$.

ii) Se quaisquer duas vizinhanças O_x e O_y de $x, y \in M$ possuem uma intersecção não vazia, $O_x \cap O_y \neq \emptyset$, κ_x um mapa de O_x e κ_y um mapa de O_y , podemos considerar o mapa $\kappa_y \circ \kappa_x^{-1}$, onde \circ denota composição, que toma pontos em $\kappa_x[O_x \cap O_y] \subset U_x \subset \mathbb{R}^n$ a pontos em $\kappa_y[O_x \cap O_y] \subset U_y \subset \mathbb{R}^n$.

Para efeito de cálculo nestas variedades um espaço tangente a elas se faz necessário. Pois, ao considerarmos uma geometria curva a estrutura de espaço vetorial que conhecemos se perde. Por outro lado, a estrutura de espaço vetorial pode ser recuperada na vizinhança de um ponto $x \in M$ a partir de **vetores tangentes**. Para variedades como a esfera, que surge naturalmente como uma superfície embebida no \mathbb{R}^n , é intuitiva a noção de vetor tangente em um ponto x como um vetor pertencente ao plano tangente a esfera. Porém, em situações mais gerais um embebedamento no \mathbb{R}^n não é possível, como o caso da relatividade geral, assim a construção de um espaço tangente requer uma atenção maior.

Como ponto de partida assumir um vetor tangente como uma derivada direcional parece razoável. Assim, um vetor $v = (v^1, \dots, v^n)$ define um **operador** de derivada direcional $\sum_{\mu} v^{\mu}(\partial/\partial x^{\mu})$. Derivadas direcionais são caracterizadas por sua linearidade e respeito à regra de Leibnitz quando atuam em funções. Considere, então, uma variedade M e seja \mathcal{F} uma coleção de funções contínuas e diferenciáveis de M em \mathbb{R} . Definimos um vetor tangente em um ponto $x \in M$ como o mapa $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

i) $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}$;

ii) $v(fg) = f(x)v(g) + g(x)v(f)$.

Um **espaço tangente** V_x à variedade M em um ponto $x \in M$ é um espaço vetorial gerado pelos vetores tangentes em x .

Agora considere $\kappa_x: O_x \rightarrow U_x \subset \mathbb{R}^n$ um mapa com $x \in O_x$. Se $f \in \mathcal{F}$, então por definição $f \circ \kappa_x^{-1}: U_x \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável. Assim para $\mu = 1, \dots, n$ definimos $X_{\mu}: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$X_{\mu}(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (f \circ \kappa_x^{-1}) \right|_{\kappa_x(x)}, \quad (5.4)$$

onde (x^1, \dots, x^n) são as coordenadas Cartesianas de x em \mathbb{R}^n dadas por $\kappa_x(x)$. Ora, X_1, \dots, X_n são vetores tangentes e vemos que são linearmente independentes e, por sua vez, podem ser utilizados como base para expandir V_x [65], tal que $\dim V_x = n$. Logo, um vetor tangente arbitrário v pode ser escrito como uma expansão da base X_μ , que por sua vez é chamada de **base coordenada**

$$v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu. \quad (5.5)$$

Se escolhermos um mapa diferente, κ'_x , obteremos uma base coordenada diferente X'_ν . Podemos, então, expressar X_μ em termos da nova base X'_ν usando a regra da cadeia

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^n \left. \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right|_{\kappa_x(x)} X'_\nu, \quad (5.6)$$

onde x'^ν denota a ν -ésima componente do mapa $\kappa'_x \circ \kappa_x^{-1}$. Logo, as componentes v'^ν do vetor v na nova base coordenada está relacionada com as componentes v^μ da base antiga por

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} v^\mu. \quad (5.7)$$

Uma **curva suave**, C , em uma variedade M é um mapa de \mathbb{R} , ou um intervalo de \mathbb{R} , em M , $C: \mathbb{R} \rightarrow M$. Em cada ponto $x \in M$ podemos encontrar uma curva C e associá-la a um vetor tangente $T \in V_x$ da seguinte forma. Seja uma função $f \in \mathcal{F}$, definimos então $T(f)$ como a derivada da função $f \circ C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avaliada em x , ou seja, $T(f) = d(f \circ C)/dt$.

$$T = \frac{d(f \circ C)}{dt} = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \kappa_x^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt} = \sum_{\mu} \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu. \quad (5.8)$$

Note que a base coordenada X_μ associada ao mapa κ_x é tangente à curva em M , sendo a curva C em M mapeada em uma curva $x^\mu(t)$ em \mathbb{R}^n via κ_x .

A partir daqui adotaremos a seguinte convenção

$$U^\alpha V_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1}^n U^\alpha V_\alpha. \quad (5.9)$$

Na física Newtoniana uma classe específica de sistemas de referência é usada, os inerciais. Nos quais o **Princípio da relatividade** nos garante que todas as leis da mecânica devem ser as mesmas. Nestes referenciais, todo o corpo sobre o qual não atua nenhuma força externa permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Porém, vimos que na prática um referencial inercial é difícil de ser identificado devido ao fato de que campo gravitacional não pode ser blindado, sugerindo, então, que as leis da física devem ser formuladas de tal maneira que nenhum sistema de referência seja privilegiado, ou seja, todos os observadores são equivalentes, portanto as equações que regem tais leis devem

possuir a forma **tensorial ou covariante**. Este princípio ficou conhecido como **Princípio da covariância geral** e compõem a lista, juntamente com o princípio da equivalência, de princípios que contribuíram para a formulação da relatividade geral.

Necessitamos, então, de uma definição precisa de tensores. Para isso, seja V um espaço vetorial de dimensão finita, no nosso caso de interesse um espaço tangente V_x . Considere uma coleção, V^* , de mapas lineares $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Se definimos adição e multiplicação por um escalar dos tais mapas lineares, da maneira usual, ou seja, uma transformação linear, naturalmente chegamos a uma estrutura de espaço vetorial para V^* . Chamamos, então, V^* espaço vetorial **dual** a V , e seus elementos de vetores duais. Se v_1, \dots, v_n é base de V , podemos definir elementos $v^{1*}, \dots, v^{n*} \in V^*$ tal que

$$v^{l*}(v_\nu) = \delta_\nu^l, \quad (5.10)$$

onde $\delta_\nu^\mu = 1$ se $\mu = \nu$ e 0 caso contrário. Segue imediatamente que $\{v^{l*}\}$ é base de V^* , chamada de base dual à base $\{v_\mu\}$, e naturalmente $\dim V = \dim V^*$.

Agora estamos aptos a definir a noção de tensor. Seja V um espaço vetorial com dimensão finita e V^* seu espaço dual. Um **tensor**, T , do tipo (k, l) sobre V é um mapa multilinear

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \rightarrow \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Basicamente, dados k vetores duais e l vetores ordinários, T produz um número. Assim, pela definição um tensor do tipo $(0, 1)$ é precisamente um vetor dual. Similarmente, um tensor do tipo $(1, 0)$ é um vetor ordinário.

Uma quantidade de interesse, no que diz respeito aos tensores, é o chamado **rank** do tensor e é basicamente dada por $k + l$. Vetores duais e ordinários são tensores de rank 1. Um tensor de rank zero é dito um **escalar**. Formalmente, um escalar é uma função ϕ na variedade M que satisfaz a seguinte lei de transformação

$$\phi(x) = \phi'(x'), \quad (5.12)$$

onde $x, x' \in M$.

Com as definições de adição e multiplicação por um escalar feitas acima, a coleção $\mathcal{T}(k, l)$ de todos os tensores do tipo (k, l) têm, de forma natural, a estrutura de um espaço vetorial de dimensão n^{k+l} . Duas operações simples mas comumente usadas em tensores serão apresentadas a seguir. A primeira é chamada de **contração** com respeito ao i -ésimo vetor dual e o j -ésimo vetor ordinário e é um mapa $C: \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k-1, l-1)$. Se T é um tensor do tipo (k, l) , a contração é definida como

$$CT = T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots). \quad (5.13)$$

A segunda operação é o **produto tensorial**. Dado um tensor T do tipo (k, l) e um outro tensor T' do tipo (k', l') , pode-se construir um terceiro vetor do tipo $(k+k', l+l')$ chamado

produto tensorial de T e T' denotado por $T \otimes T'$. Podemos, então, construir tensores a partir do produto tensorial entre vetores e vetores duais. Pois, se $\{v_\mu\}$ é uma base de V e $\{v^{\nu*}\}$ é uma base de V^* , pode-se concluir que n^{k+l} tensores $\{v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_k} \otimes v^{\nu_1*} \otimes \cdots \otimes v^{\nu_l*}\}$ formam uma base para $\mathcal{T}(k, l)$. Assim, cada tensor do tipo (k, l) pode ser expresso

$$T = T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k} v_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes v^{\nu_l*} . \quad (5.14)$$

Os coeficientes de expansão acima, $T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k}$, são chamados de **componentes** do tensor T com respeito à base $\{v_\mu\}$.

Em termos das componentes podemos obter as expressões para as operações de contração e produto tensorial. Suponha, então, que o tensor T tenha as componentes $T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k}$. Assim, a contração, CT , do tensor T possui componentes dadas por

$$(CT)_{\nu_1 \cdots \nu_{l-1}}^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1}} = T_{\nu_1 \cdots \sigma \cdots \nu_{l-1}}^{\mu_1 \cdots \sigma \cdots \mu_{k-1}} . \quad (5.15)$$

Se T' tem componentes $T'_{\nu'_1 \cdots \nu'_l}{}^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}$, então o produto tensorial $S = T \otimes T'$ possui as seguintes componentes

$$S_{\nu_1 \cdots \nu_l \nu'_1 \cdots \nu'_l}{}^{\mu_1 \cdots \mu_k \mu'_1 \cdots \mu'_k} = T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k} T'_{\nu'_1 \cdots \nu'_l}{}^{\mu'_1 \cdots \mu'_k} . \quad (5.16)$$

Toda a discussão feita anteriormente a respeito dos tensores se aplica a um espaço vetorial arbitrário com dimensão finita V . Porém, nosso caso particular de interesse é o caso em que V é o nosso espaço tangente V_x , em um ponto $x \in M$. Neste caso, V_x^* é comumente chamado espaço **cotangente** em x e seus vetores de vetores cotangentes. Outra forma usual é nos referir aos vetores em V_x como vetores **covariantes** e vetores em V_x^* como vetores **contravariantes**. A base que expande V_x é usualmente dada por $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$. A base dual associada, por sua vez, é comumente denotada por dx^1, \dots, dx^n . Se trocarmos o sistema de coordenadas vimos anteriormente que as componentes $v'^{\mu'}$ do vetor v nesta nova base está relacionada às componentes da base antiga pela lei de transformação do vetor

$$v'^{\mu'} = v^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} . \quad (5.17)$$

Se ω_μ denota as componentes do vetor dual ω com respeito a sua base dual $\{dx^\mu\}$, então a lei de transformação para um vetor covariante, usando a equação $v'^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^{\mu*}$ e a equação (5.17), é dada por

$$\omega'_{\mu'} = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} . \quad (5.18)$$

Assim as componentes de um tensor T do tipo (k, l) se transformam como

$$T'_{\nu'_1 \cdots \nu'_l}{}^{\mu'_1 \cdots \mu'_k} = T_{\nu_1 \cdots \nu_l}^{\mu_1 \cdots \mu_k} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} . \quad (5.19)$$

Outras propriedades básicas dos tensores ainda podem ser mencionadas:

i) Se um tensor T do tipo (k, l) é nulo em um dado sistemas de coordenadas, então será nulo em todos os sistemas de coordenadas.

ii) Uma combinação linear de dois tensores do tipo (k, l) é um tensor do tipo (k, l) .

iii) Se a componente de um tensor T do tipo (k, l) não muda de valor quando dois índices, covariantes ou contravariantes, são trocados entre si o tensor T é chamado **simétrico** em relação a este par de índices. Se a componente apenas muda de sinal, então o tensor é chamado **antisimétrico** em relação a este par de índices.

iv) A última propriedade nos permite definir simetrização e antisimetrização de um tensor. A parte simétrica de um tensor T do tipo $(0, l)$ com respeito a um conjunto de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é a quantidade

$$T_{(\alpha_1 \dots \alpha_l)} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{\alpha_{\pi(1)} \dots \alpha_{\pi(l)}}, \quad (5.20)$$

e a parte antisimétrica de um tensor T do tipo $(0, l)$ com respeito a um conjunto de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ é a quantidade

$$T_{[\alpha_1 \dots \alpha_l]} \equiv \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{\alpha_{\pi(1)} \dots \alpha_{\pi(l)}}, \quad (5.21)$$

onde a soma é sobre todas as permutações, π , de $1, \dots, l$ e δ_{π} é $+1$ para permutações pares e -1 para permutações ímpares.

Um tensor **totalmente antisimétrico** T do tipo $(0, l)$ é tal que

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = T_{[\alpha_1 \dots \alpha_l]}. \quad (5.22)$$

A métrica g desempenha o papel de um produto interno, não necessariamente positivo definido, no espaço tangente V_x em cada ponto $x \in M$. Assim podemos encontrar uma base ortonormal v_1, \dots, v_n do espaço tangente V_x no ponto x tal que $g(v_{\mu}, v_{\nu}) = \pm \delta_{\mu\nu}$. A quantidade de sinais $+$ e $-$ é chamada **assinatura** da métrica. Em geometria diferencial ordinária, usualmente são utilizadas métricas positivas definidas, ou seja, métricas com assinatura $++ \dots +$. Por outro lado, a métrica do espaço-tempo que lidamos em relatividade geral tem assinatura $- + ++$ ou $+ - --$. Métricas positivas definidas são chamadas de **Riemannianas** e métricas com assinatura como as do espaço-tempo são chamadas **Lorentzianas**.

5.3 Derivada Covariante

Como vimos anteriormente, em um dado ponto $x \in M$ podemos definir um espaço tangente V_x , e nele definirmos os tensores. É interessante analisarmos agora a diferenciação destes tensores. Porém, ao definirmos uma derivada de um campo tensorial necessitamos compará-los na vizinhança de um ponto $x \in M$. Ora, diferentes pontos, por exemplo x e $y \in M$ possuem planos tangentes diferentes, logo, de imediato, não possuímos uma maneira de adicionar ou subtrair tensores pertencentes a espaços tangentes distintos.

Para solucionar este problema definimos, então, uma estrutura matemática que intermedia a identificação entre espaços tangentes de diferentes pontos, tal estrutura chamamos de **conexão afim**.

Antes de partirmos para a definição de conexão afim de forma mais explícita, analisemos algumas considerações pertinentes ao espaço tangente V_x . Como vimos, todo espaço tangente n -dimensional pode ser expandido por vetores contravariantes linearmente independentes. Em particular, tomemos a base não-coordenada $\{e_1^\alpha, \dots, e_n^\alpha\}$. A coleção de campos vetoriais $\{e_a^\alpha(x)\}$, com $a, \alpha = 1, \dots, n$ é tal que

$$e_a^\alpha e_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha, \quad (5.23)$$

sendo $\{e_\alpha^a\}$ base dual a e_a^α .

Agora, definimos o conjunto de quantidades

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha := -e_s^\alpha (\nabla_\gamma - \partial_\gamma) e_\beta^s, \quad (5.24)$$

como as componentes da conexão afim. O termo $\partial_\gamma \equiv \partial/\partial x^\gamma$ refere-se à derivada parcial ordinária e o termo ∇_γ refere-se à **derivada covariante**.

A derivada covariante, por sua vez, é definida como um mapa $\nabla: \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k, l+1)$, ou seja, toma campos tensoriais do tipo (k, l) e leva em campos tensoriais do tipo $(k, l+1)$ e satisfaz as propriedades listadas a seguir.

i) Linearidade: Para todo A e $B \in \mathcal{T}(k, l)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\nabla_\gamma(\alpha A[k, l] + \beta B[k, l]) = \alpha \nabla_\gamma A[k, l] + \beta \nabla_\gamma B[k, l]; \quad (5.25)$$

ii) Regra de Leibnitz: Para todo $A \in \mathcal{T}(k, l)$, $B \in \mathcal{T}(k', l')$,

$$\nabla_\gamma(A[k, l] \otimes B[k', l']) = (\nabla_\gamma A[k, l]) \otimes B[k', l'] + A[k, l] \otimes (\nabla_\gamma B[k', l']); \quad (5.26)$$

iii) Comutatividade com a contração: Para todo $A \in \mathcal{T}(k, l)$

$$\nabla_\gamma(A_{v_1 \dots v_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}) = \nabla_\gamma A_{v_1 \dots v_k}^{\mu_1 \dots \mu_k}; \quad (5.27)$$

iv) Reduz à derivada parcial ordinária quando atua em uma função escalar $f \in \mathcal{F}$

$$\nabla_\gamma f = \partial_\gamma f. \quad (5.28)$$

Uma propriedade relacionada à conexão é que a mesma não depende da base escolhida. Para mostrar isso, assumimos $\{e_\alpha^a\}$ e $\{e_{a'}^\alpha\}$ duas bases distintas. Como estas bases são vetores contravariantes podemos, via equação (5.17), estabelecer

$$e_{a'}^\alpha = \Lambda_{a'}^b e_b^\alpha, \quad (5.29)$$

onde os elementos da matriz de transformação $\Lambda_{a'}^b$ são funções escalares. Então, calculando a $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ na base $\{e_{a'}^\alpha\}$ temos

$$(\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)_{e'} = -\Lambda_{s'}^r e_r^\alpha (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)[(\Lambda^{-1})_s^{s'} e_\beta^s] = -\delta_s^r e_r^\alpha (\nabla_\gamma - \partial_\gamma) e_\beta^s = (\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha)_e. \quad (5.30)$$

Outra característica que podemos notar é que $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ não é um tensor. Verifiquemos, então, como as componentes $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ se transformam quando aplicamos uma mudança de sistema de coordenadas. Logo, partindo da equação (5.24) temos

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} &= -e_s^{\alpha'}(\nabla_{\gamma'} - \partial_{\gamma'})e_{\beta'}^s \\ &= -e_s^{\alpha'}\nabla_{\gamma'}e_{\beta'}^s + e_s^{\alpha'}\partial_{\gamma'}e_{\beta'}^s.\end{aligned}\quad (5.31)$$

Ora, o termo $e_s^{\alpha'}\nabla_{\gamma'}e_{\beta'}^s$ é tensor devido à natureza de ∇_{γ} . Portanto

$$\begin{aligned}\Gamma_{\beta'\gamma'}^{\alpha'} &= -e_s^{\alpha'}(\nabla_{\gamma'} - \partial_{\gamma'})e_{\beta'}^s \\ &= -e_s^{\alpha'}\nabla_{\gamma'}e_{\beta'}^s + e_s^{\alpha'}\partial_{\gamma'}e_{\beta'}^s \\ &= -\frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}e_s^{\alpha}(\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})e_{\beta}^s + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}e_s^{\alpha}e_{\beta}^s\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x'^{\beta'}} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\delta_{\beta}^{\alpha}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x'^{\beta'}} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho'}\partial x'^{\beta'}}\frac{\partial x'^{\rho'}}{\partial x^{\gamma}} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}}\delta_{\gamma'}^{\rho'}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\rho'}\partial x'^{\beta'}} \\ &= \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\gamma'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\beta'}}\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\gamma'}\partial x'^{\beta'}}.\end{aligned}\quad (5.32)$$

Podemos, ainda, a partir de $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ definir o tensor de **torção**

$$\Omega_{\beta\gamma}^{\alpha} := \Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha}.\quad (5.33)$$

Agora convém obtermos a forma explícita da derivada covariante em tensores. Para isso inicialmente notemos que

$$(\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})(e_s^{\alpha}e_{\beta}^s) = (\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})\delta_{\beta}^{\alpha} = 0,\quad (5.34)$$

sendo que na última igualdade utilizamos $\nabla_{\gamma}\delta_{\beta}^{\alpha} = 0$ a partir da propriedade (iii). Assim, explorando um pouco mais a equação (5.34) obtemos

$$-e_s^{\alpha}(\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})e_{\beta}^s = e_{\beta}^s(\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})e_s^{\alpha}.\quad (5.35)$$

Logo

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = e_{\beta}^s(\nabla_{\gamma} - \partial_{\gamma})e_s^{\alpha}.\quad (5.36)$$

Além disso, podemos escrever as componentes de um tensor T do tipo (k, l) como funções escalares em função das bases $\{e_{\alpha}^s\}$ e $\{e_s^{\alpha}\}$

$$T_{b_1\dots b_l}^{a_1\dots a_k} = e_{a_1}^{s_1}\dots e_{a_k}^{s_k}e_{b_1}^{s_1}\dots e_{b_l}^{s_l}T_{s_1\dots s_l}^{s_1\dots s_k}.\quad (5.37)$$

Assim, de posse da equação (5.37) temos

$$(\nabla_\gamma - \partial_\gamma)T_{b_1 \dots b_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} = 0. \quad (5.38)$$

Desenvolvendo um pouco mais o lado esquerdo e tendo em mãos as equações (5.24) e (5.36), temos

$$\begin{aligned} (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)T_{b_1 \dots b_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \sum_{i=1}^k e_{\alpha_1}^{a_1} \dots (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)e_{\alpha_i}^{a_i} \dots e_{\alpha_k}^{a_k} e_{b_1}^{\beta_1} \dots e_{b_l}^{\beta_l} T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} + \\ &\quad \sum_{j=1}^l e_{\alpha_1}^{a_1} \dots e_{\alpha_k}^{a_k} e_{b_1}^{\beta_1} \dots (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)e_{b_j}^{\beta_j} \dots e_{b_l}^{\beta_l} + \\ &\quad e_{\alpha_1}^{a_1} \dots e_{\alpha_k}^{a_k} \dots e_{b_1}^{\beta_1} \dots e_{b_l}^{\beta_l} (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \\ &= (\nabla_\gamma - \partial_\gamma)T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} - \sum_{i=1}^k \Gamma_{\rho_i \gamma}^{\alpha_i} T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \rho_i \dots \alpha_k} + \sum_{j=1}^l \Gamma_{\beta_j \gamma}^{\rho_j} T_{\beta_1 \dots \rho_j \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Usando a equação (5.38) finalmente temos

$$\begin{aligned} \nabla_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \partial_\gamma T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} + \sum_{i=1}^k \Gamma_{\rho_i \gamma}^{\alpha_i} T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \rho_i \dots \alpha_k} + \\ &\quad - \sum_{j=1}^l \Gamma_{\beta_j \gamma}^{\rho_j} T_{\beta_1 \dots \rho_j \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Apesar de termos definido a conexão afim e em termos dela obter um operador diferencial que atue em tensores de diferentes espaços tangentes, uma questão ainda merece ser respondida: Como a conexão afim faz para conectar estes tensores? A resposta está na noção de **transporte paralelo**. Pensando euclidianamente, somamos e subtraímos vetores, pois os transportamos paralelamente para que suas origens coincidam e assim os somemos. Considerando, então, um espaço Euclidiano e utilizando coordenada cartesianas, vetores são transportados paralelamente quando

$$\frac{dv^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (5.41)$$

onde τ é um parâmetro ao longo de uma curva C , e $x^\alpha(\tau)$ são as coordenadas de um ponto $x \in C$. A intenção, então, é generalizar esta idéia euclidiana para uma variedade n -dimensional arbitrária M . A partir da definição dada pela equação (5.41) temos

$$\frac{Dv^\alpha}{d\tau} := (\nabla_\rho v^\alpha) \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (5.42)$$

explicitamente utilizando a equação (5.3) temos

$$\partial_\rho v^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} + \Gamma_{\sigma\rho}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0, \quad (5.43)$$

que pode ser escrita equivalentemente como

$$\frac{dv^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{\sigma\rho}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau}. \quad (5.44)$$

Agora uma curva G cujo vetor tangente $v^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, após ser transportado ao longo de G a partir de $x^\alpha(\tau_0) \in G$ a $x^\alpha(\tau) \in G$ é colinear com o vetor tangente definido no ponto $x^\alpha(\tau)$ é dita uma curva **geodésica**. Logo

$$v_{\parallel}^\alpha(\tau) = \lambda(\tau)v^\alpha(\tau). \quad (5.45)$$

Assim da equação (5.42) aplicada em v_{\parallel}^α temos

$$0 = \frac{Dv_{\parallel}^\alpha}{d\tau} = \frac{D\lambda}{d\tau} v^\alpha + \lambda \frac{Dv^\alpha}{d\tau} = \lambda \left(\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) + \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (5.46)$$

Assim

$$\lambda \left(\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) = -\frac{d\lambda}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (5.47)$$

Agora, podemos fazer uma reparametrização $\tau \rightarrow s(\tau)$ tal que o vetor ao ser transportado paralelamente não seja apenas colinear mas coincida em módulo com o vetor tangente à curva G no ponto $x^\alpha(s) \in G$

$$\frac{Dv^\alpha}{d\tau} = \frac{Dv^\alpha}{ds} \frac{ds}{d\tau} = \left(\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} \right) \frac{ds}{d\tau} = 0. \quad (5.48)$$

Como $ds/d\tau \neq 0$ temos a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0. \quad (5.49)$$

O parâmetro s é conhecido como **parâmetro afim** e é fácil verificarmos que um dado parâmetro s' tal que

$$s' = as + b, \quad (5.50)$$

com a, b constantes, também é afim.

Apesar de toda a discussão anterior acerca do transporte paralelo ter sido feita em torno de vetores tangentes, a extensão para campos tensoriais é imediata. Considerando um campo tensorial T do tipo (k, l) o transporte paralelo deste é dado por

$$\frac{D}{D\tau} T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} := \nabla_\rho T_{\beta_1 \dots \beta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (5.51)$$

5.4 Transporte paralelo e curvatura

Consideremos o transporte paralelo de um vetor em torno de uma curva fechada C em uma variedade n -dimensional M . Podemos definir uma superfície arbitrária \mathcal{A} delimitada por esta curva C e quebrar esta superfície em pequenas áreas cada qual delimitada por curvas fechadas C_N . As mudanças nas componentes v^α do vetor à medida em que é transportado paralelamente em torno de uma curva fechada C são dadas por

$$\Delta v^\alpha = \sum_N (\Delta v^\alpha)_N, \quad (5.52)$$

onde $(\Delta v^\alpha)_N$ corresponde à mudança em v^α em torno de uma pequena curva C_N . Por outro lado, as contribuições das pequenas curvas interiores se cancelam mutuamente restando apenas as contribuições da borda exterior, ou seja, a curva C .

Calculemos, então, as mudanças $(\Delta v^\alpha)_N$ em torno de uma pequena curva fechada C_N parametrizada por $x^\alpha(\tau)$. Integrando a equação (5.42) considerando que um vetor é transportado paralelamente ao longo de uma pequena curva C_N de um ponto inicial $x^\alpha(\tau_0)$ até um ponto qualquer $x^\alpha(\tau)$ nesta curva, temos

$$v^\alpha(\tau) = v^\alpha_{x(\tau_0)} - \int_{x(\tau_0)}^{x(\tau)} \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} v^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} d\tau. \quad (5.53)$$

Por outro lado, uma vez que as curvas são pequenas podemos expandir o integrando em torno do ponto P de coordenadas $x^\alpha(\tau_0)$ até primeira ordem em $x^\alpha - x^\alpha_P$. Logo

$$\Gamma^\alpha_{\rho\sigma}(\tau) = (\Gamma^\alpha_{\rho\sigma})_P + (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\sigma})_P [x^\mu(\tau) - x^\mu_P] + \dots, \quad (5.54)$$

e

$$v^\alpha(\tau) = v^\alpha_P - (\Gamma^\alpha_{\rho\sigma})_P v^\rho_P [x^\sigma(\tau) - x^\sigma_P] + \dots. \quad (5.55)$$

Substituindo as equações (5.54) e (5.55) na equação (5.53) e considerando até primeira ordem, temos

$$v^\alpha(\tau) = v^\alpha_P - (\Gamma^\alpha_{\rho\sigma})_P v^\rho_P \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} d\tau - (\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\sigma})_P v^\rho_P \int_{\tau_0}^{\tau} [x^\mu - x^\mu_P] \frac{dx^\sigma}{d\tau} d\tau. \quad (5.56)$$

Se integramos em torno de uma curva fechada temos $\oint dx^\sigma = 0$, assim ficamos com

$$\Delta v^\alpha = -(\partial_\mu \Gamma^\alpha_{\rho\sigma} - \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\nu_{\rho\mu})_P v^\rho_P \oint_{\tau_0}^{\tau} x^\mu dx^\sigma. \quad (5.57)$$

Um resultado análogo ao anterior pode ser obtido ao trocar os índices mudos μ e σ e ainda utilizando o seguinte resultado

$$\oint d(x^\mu x^\sigma) = \oint (x^\mu dx^\sigma + x^\sigma dx^\mu) = 0, \quad (5.58)$$

e obtemos

$$\Delta v^\alpha = -\frac{1}{2}(\partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\rho\mu}^\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\rho\sigma}^\nu) v_P^\alpha \oint x^\sigma dx^\mu. \quad (5.59)$$

que de forma mais compacta pode ser expresso como

$$\Delta v^\alpha = -\frac{1}{2}(R_{\rho\sigma\mu}^\alpha) v_P^\rho \oint x^\sigma dx^\mu, \quad (5.60)$$

onde definimos

$$R_{\rho\sigma\mu}^\alpha := \partial_\sigma \Gamma_{\rho\mu}^\alpha - \partial_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\alpha + \Gamma_{\nu\sigma}^\alpha \Gamma_{\rho\mu}^\nu - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha \Gamma_{\rho\sigma}^\nu \quad (5.61)$$

como **tensor de curvatura**.

A equação (5.60) estabelece uma conexão entre o transporte paralelo em uma pequena curva fechada em torno do ponto P e o tensor de curvatura no ponto P . Então, as componentes v^α do vetor permanecem inalteradas após ser transportado paralelamente em torno de uma pequena curva próxima ao ponto P somente se o tensor de curvatura for nulo no ponto P .

Outra forma de obtermos o tensor de curvatura é a partir da não-comutatividade da derivada covariante ao atuar em um vetor covariante. Tal característica da derivada covariante é natural, pois sua relação direta com o transporte paralelo depende de um caminho escolhido. Calculemos, então, o comutador de derivadas covariantes

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) v_\mu = \nabla_\alpha \nabla_\beta v_\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha v_\mu. \quad (5.62)$$

Primeiramente

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta v_\mu = \partial_\alpha \partial_\beta v_\mu - v_\rho \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\rho - \partial_\alpha v_\rho \Gamma_{\mu\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho \partial_\rho v_\mu + \Gamma_{\beta\alpha}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma v_\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \partial_\beta v_\rho + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma v_\sigma. \quad (5.63)$$

Trocando os índices α e β obtemos a expressão para $\nabla_\beta \nabla_\alpha v_\mu$ e com a equação (5.63) obtemos

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) v_\mu = (\partial_\beta \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\beta}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\rho \Gamma_{\mu\rho}^\sigma) v_\sigma + 2\Omega_{\alpha\beta}^\rho \nabla_\rho v_\mu. \quad (5.64)$$

Ou simplesmente

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) v_\mu = R_{\mu\beta\alpha}^\sigma v_\sigma + 2\Omega_{\alpha\beta}^\rho \nabla_\rho v_\mu. \quad (5.65)$$

5.5 Geometria Riemanniana

Até agora lidamos com variedades em que o único objeto que adicionamos foi a conexão afim. Tal estrutura matemática permitiu-nos comparar tensores em diferentes pontos. Por outro lado, não podemos ainda calcular distâncias ou ângulos entre os mesmos.

Para solucionar esta questão convém, agora, introduzir um segundo elemento: o **tensor métrico**. Uma métrica está supostamente associada a uma distância infinitesimal ao quadrado ou ainda um deslocamento infinitesimal. Assim, uma métrica deve ser um mapa linear de $V_x \times V_x$ em números, ou seja, um tensor do tipo $(0, 2)$. Além disso, a métrica deve ser simétrica e não degenerada. Simétrica significa que para todo $v_1, v_2 \in V_x$ temos

$g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$. Não degenerada significa que o único caso em que temos $g(v, v_1) = 0$ para todo $v \in V_x$ é o caso $v_1 = 0$. Logo, uma métrica g em uma variedade M é um tensor do tipo $(0, 2)$, simétrico e não degenerado. Em uma dada base coordenada, podemos expandir a métrica g em termos de suas componentes como

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu . \quad (5.66)$$

Usualmente a notação ds^2 é usada no lugar de g para representar o tensor métrico

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (5.67)$$

onde omitimos o sinal do produto tensorial.

A métrica g desempenha o papel de um produto interno, não necessariamente positivo definido, no espaço tangente V_x em cada ponto $x \in M$. Assim, podemos encontrar uma base ortonormal v_1, \dots, v_n do espaço tangente V_x no ponto x tal que $g(v_\mu, v_\nu) = \pm \delta_{\mu\nu}$. A quantidade de sinais $+$ e $-$ é chamada **assinatura** da métrica. Em geometria diferencial ordinária, usualmente são utilizadas métricas positivas definidas, ou seja, métricas com assinatura $++ \dots +$. Por outro lado, a métrica do espaço-tempo que lidamos em relatividade geral tem assinatura $- + ++$ ou $+ - --$. Métricas positivas definidas são chamadas de **Riemannianas** e métricas com assinatura como as do espaço-tempo são chamadas **Lorentzianas**.

Vimos que um vetor ao ser transportado paralelamente ao longo de uma curva G sob uma parametrização afim, preserva seu comprimento. Que condições poderiam ser impostas ao tensor métrico a fim de satisfazer esta exigência?

Considere, então, s um parâmetro afim. O comprimento de um vetor v , paralelamente transportado ao longo de uma curva G parametrizada por $x^\alpha(s)$, não varia. Assim,

$$0 = \frac{D}{ds}(g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta) = \frac{D}{ds}(g_{\alpha\beta}) v^\alpha v^\beta + g_{\alpha\beta} v^\alpha \frac{Dv^\beta}{ds} + g_{\alpha\beta} v^\beta \frac{Dv^\alpha}{ds} = \frac{D}{ds} g_{\alpha\beta} . \quad (5.68)$$

Obtemos, então, a seguinte condição para o tensor métrico

$$\nabla_\rho g_{\alpha\beta} = 0 . \quad (5.69)$$

Podemos resolver esta equação para $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, escrevendo-a três vezes permutando os índices. Assim,

$$\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\alpha\rho}^\sigma g_{\sigma\beta} - \Gamma_{\beta\rho}^\sigma g_{\alpha\sigma} = 0 , \quad (5.70)$$

$$\partial_\alpha g_{\beta\rho} - \Gamma_{\beta\alpha}^\sigma g_{\sigma\rho} - \Gamma_{\rho\alpha}^\sigma g_{\beta\sigma} = 0 , \quad (5.71)$$

$$\partial_\beta g_{\rho\alpha} - \Gamma_{\rho\beta}^\sigma g_{\sigma\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma g_{\rho\sigma} = 0 . \quad (5.72)$$

Adicionando as equações (5.71) e (5.72) e na sequencia subtraindo da equação (5.70), obtemos

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\gamma\rho}(\partial_{\beta}g_{\alpha\rho} + \partial_{\alpha}g_{\beta\rho} - \partial_{\rho}g_{\alpha\beta}). \quad (5.73)$$

As componentes da conexão afim explicitadas em função das derivadas do tensor métrico são comumente chamadas de **símbolos de Christoffel**. Uma propriedade imediata que retiramos da equação (5.73) é $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \Gamma_{(\alpha\beta)}^{\gamma}$, sendo assim

$$\Omega_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0. \quad (5.74)$$

Variedades em que o tensor métrico satisfaz a equação (5.69) e que possuem, em adição, a equação (5.74), são ditas **variedades Riemannianas**.

Um tensor de curvatura em uma geometria Riemanniana construído a partir dos símbolos de Christoffel é chamado **tensor de Riemann**. Este tensor, por sua vez, possui as seguintes propriedades:

- i) $R_{\alpha\beta\delta}^{\gamma} = -R_{\alpha\delta\beta}^{\gamma}$.
- ii) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.
- iii) Identidade de Bianchi: $\nabla_{[\rho}R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0$.
- iv) $R_{\alpha[\beta\gamma\delta]} = 0$.

A partir das propriedades (ii) e (iv) temos

$$R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\beta\delta\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0. \quad (5.75)$$

Agora, contraindo primeiro α e γ e depois β e δ , temos

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma\beta\delta} + g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\beta\delta\gamma} + g^{\alpha\gamma}R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 \\ R_{\gamma\beta\delta}^{\gamma} + R_{\beta\delta\gamma}^{\gamma} + R_{\delta\gamma\beta}^{\gamma} &= 0 \\ g^{\beta\gamma}R_{\gamma\beta\delta}^{\gamma} + R_{\delta\gamma}^{\gamma\delta} + R_{\gamma\beta}^{\gamma\beta} &= 0 \\ g^{\beta\gamma}R_{\gamma\beta\delta}^{\gamma} - R_{\gamma\delta}^{\gamma\delta} + R_{\gamma\beta}^{\gamma\beta} &= 0 \\ R_{\gamma\delta\beta}^{\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Por outro lado, contraindo α e β , temos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\gamma\beta\delta} + R_{\alpha\beta\delta\gamma} + R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 \\ R_{\gamma\beta\delta}^{\beta} + R_{\beta\delta\gamma}^{\beta} - R_{\delta\beta\gamma}^{\beta} &= 0 \\ R_{\gamma\beta\delta}^{\beta} &= R_{\delta\beta\gamma}^{\beta}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Definimos, então, o **tensor de Ricci** como sendo

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\gamma\nu}^{\gamma}. \quad (5.78)$$

Pela equação (5.77) verificamos que

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (5.79)$$

Uma contração do tensor de Ricci nos dá o **escalar de Ricci** ou escalar de curvatura

$$R := R^\alpha_\alpha. \quad (5.80)$$

A partir da identidade de Bianchi e da propriedade (ii), temos

$$\nabla_\alpha R_{\rho\beta\gamma\delta} + \nabla_\rho R_{\beta\alpha\gamma\delta} + \nabla_\beta R_{\alpha\rho\gamma\delta} = 0. \quad (5.81)$$

Contraindo primeiramente os índices ρ e γ e depois β e δ , temos

$$\begin{aligned} g^{\rho\gamma} \nabla_\alpha R_{\rho\beta\gamma\delta} + g^{\rho\gamma} \nabla_\rho R_{\beta\alpha\gamma\delta} + g^{\rho\gamma} \nabla_\beta R_{\alpha\rho\gamma\delta} &= 0 \\ \nabla_\alpha R_{\beta\delta} + \nabla_\rho R_{\delta\beta\alpha}^\rho - \nabla_\beta R_{\alpha\delta} &= 0 \\ \nabla_\alpha R + \nabla_\rho R_{\beta\alpha}^{\rho\beta} - \nabla_\beta R_\alpha^\beta &= 0 \\ \nabla_\alpha R - 2\nabla_\beta R_\alpha^\beta &= 0 \\ \nabla_\beta (2R_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta R) &= 0 \\ \nabla_\beta (R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R) &= 0. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Definimos o **tensor de Einstein** como sendo

$$G^{\alpha\beta} := R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (5.83)$$

5.6 Equações de Campo de Einstein

Na relatividade geral o tensor métrico desempenha o papel da gravitação. Este, por sua vez, no caso mais geral e em 4 dimensões possui 10 componentes. Então, a princípio, temos que resolver 10 equações para determiná-lo. Além disso, como vimos no início deste capítulo, a gravitação é interpretada como um efeito geométrico causado pela presença de matéria e(ou) energia. De acordo com a relatividade especial, a massa de um corpo depende de sua energia, portanto a energia de movimento de um meio contínuo deve contribuir para o campo gravitacional.

Na relatividade especial, o estado físico de um meio contínuo é descrito pelo tensor energia-momento cujas componentes designaremos por $T_{\alpha\beta}$. Em qualquer sistema de coordenada, a componente T_{00} é igual a densidade de energia ρc^2 , sendo c a velocidade da luz no vácuo. As componentes T_{0i} , $i = 1, 2, 3$, formam as componentes do vetor de fluxo de energia através de uma superfície unitária ortogonal à direção do fluxo, e T_{ij} são as componentes do tensor de stress ou cisalhamento. O tensor energia-momento é simétrico e possui, em geral, 10 componentes independentes. Isto nos sugere o tensor energia-momento como candidato mais natural à fonte do campo gravitacional. As equações de movimento são descritas a

partir da **lei de conservação** do tensor energia-momento, que em coordenadas cartesianas possui a forma

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.84)$$

Uma generalização natural desta lei para qualquer sistema de coordenadas é

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (5.85)$$

Do lado geométrico, o primeiro candidato natural que traz consigo linearidade nas derivadas de segunda ordem do tensor métrico, simétrico e com 10 componentes é o tensor de Ricci. Assim, uma equação de campo possível é

$$R_{\alpha\beta} = \aleph T_{\alpha\beta}. \quad (5.86)$$

sendo \aleph uma constante de acoplamento.

Porém, estas equações não são consistentes com a equação (5.85), pois $\nabla_\beta R^{\alpha\beta} \neq 0$. Outro candidato tão favorável quanto o tensor de Ricci é o tensor de Einstein, este sim satisfaz a equação (5.85). Portanto, as equações de campo de Einstein que regem a relatividade geral são dadas por

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \aleph T_{\alpha\beta}. \quad (5.87)$$

5.7 Limite Newtoniano

Como mencionamos a Relatividade Geral é uma extensão da teoria da gravitação de Newton, portanto deve existir um limite Newtoniano para Relatividade Geral, em que as equações de Einstein se reduzam às equações de Newton sob circunstâncias específicas: **velocidades baixas e campo gravitacional fraco**.

Explicitamente, o caso de velocidades baixas consiste em $dx^i/dt \ll c$, com $i = 1, 2, 3$, e o de campo fraco $\Phi_N/c^2 \ll 1$.

Consideremos, então, o caso em que uma partícula se move lentamente em um campo gravitacional fraco, ou seja, $\Phi_N/c^2 \ll 1$, sendo Φ_N o potencial newtoniano. Sendo a trajetória da partícula uma geodésica sob uma parametrização afim e desprezando os termos dx^i/ds em relação aos termos de dx^0/ds , pois estamos num regime de baixas velocidades, a equação (5.49), considerando $x^\lambda = (ct, x^1, x^2, x^3)$ com $x^0 = ct$ e t coordenada temporal, fica

$$\frac{d^2 x^\lambda}{ds^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \approx 0, \quad (5.88)$$

Da relação entre o tensor métrico e os símbolos de Christoffel dada por (5.73) e considerando o campo estacionário, ou seja, $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Logo

$$\Gamma_{00}^0 = 0. \quad (5.89)$$

Assim, a componente temporal da equação (5.88)

$$\frac{d^2 x^0}{ds^2} = 0, \quad (5.90)$$

que resolvendo nos dá

$$x^0 = as + b, \quad (5.91)$$

com a, b constantes.

Como supomos, o campo gravitacional é fraco, portanto podemos entendê-lo como uma pequena perturbação em torno do espaço-tempo de Minkowski

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (5.92)$$

com $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ e $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski.

Analisando apenas contribuições de primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$ temos

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}, \quad (5.93)$$

pois

$$g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = (\eta^{\alpha\mu} - h^{\alpha\mu})(\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) \quad (5.94)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + \eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} - h^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \quad (5.95)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} \eta_{\rho\sigma} h_{\mu\beta} - g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} h_{\rho\sigma} \eta_{\mu\beta} \quad (5.96)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + g^{\alpha\rho} g^{\mu\sigma} (\eta_{\rho\sigma} h_{\mu\beta} - h_{\rho\sigma} \eta_{\mu\beta}) \quad (5.97)$$

$$= \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} \quad (5.98)$$

$$= \delta_{\beta}^{\alpha}$$

$$(5.99)$$

Agora, para o cálculo da i -ésima componente da equação (5.88) considerando apenas contribuições de 1ª ordem em $h_{\alpha\beta}$, temos

$$\Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00}. \quad (5.100)$$

Substituindo (5.100) em (5.88) para i -ésima componente

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} - \frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00} \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 \approx 0. \quad (5.101)$$

Ora, pela equação (5.91), x^0 é um parâmetro afim pois é combinação linear de s , que é

afim. Assim a equação (5.101) se torna

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx \frac{c^2}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00}, \quad (5.102)$$

que por sua vez, é a equação da aceleração prevista pela mecânica Newtoniana para

$$h_{00} = -2\frac{\Phi}{c^2} + A, \quad (5.103)$$

sendo Φ um potencial escalar e A uma constante aditiva.

Porém, temos que o potencial deve anular-se no infinito, bem como $g_{\alpha\beta}$ deve tender a Minkowski para grandes distâncias, ou seja, h_{00} deve desaparecer no infinito, então $A = 0$ e $h_{00} = -2\Phi/c^2$. Portanto, para o limite newtoniano a única componente relevante do tensor métrico é a componente g_{00} dada por

$$g_{00} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right). \quad (5.104)$$

O potencial Φ é um potencial efetivo. Para que o limite newtoniano seja completo devemos verificar se Φ é equivalente ao potencial newtoniano, ou seja, se o mesmo satisfaz a equação de Poisson.

As equações de campo da relatividade geral (5.87) podem ser escritas de uma outra maneira mais conveniente para análise que se seguirá. Tomando o traço da equação (5.87), obtemos

$$R = -\mathfrak{N}T, \quad (5.105)$$

onde $T := T^\alpha_\alpha$ é o traço do tensor energia-momento. Inserindo (5.105) em (5.87) as equações de Einstein ficam

$$R_{\alpha\beta} = \mathfrak{N}\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}\right). \quad (5.106)$$

Logo

$$R_{00} \approx \mathfrak{N}\left(T_{00} - \frac{1}{2}Tg_{00}\right). \quad (5.107)$$

Como a componente essencial no cálculo é g_{00} , segue que para o tensor energia-momento

$$T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \approx g_{00}T^{00} \approx -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right)\rho c^2 \approx -\rho c^2, \quad (5.108)$$

pois $\rho\Phi$ é da segunda ordem. Assim a equação (5.107) fica

$$R_{00} \approx \mathfrak{N}\frac{\rho c^2}{2}, \quad (5.109)$$

lembrando que $T_{00} = \rho c^2$.

Em contrapartida,

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^\mu \approx \partial_i \Gamma_{00}^i \approx -\frac{1}{2}\eta^{ij}\partial_i\partial_j h_{00}. \quad (5.110)$$

Substituindo na equação (5.107) temos por fim

$$\eta^{ij}\partial_i\partial_j\Phi \approx \aleph \frac{\rho c^4}{2}. \quad (5.111)$$

Como $\eta^{ij} \equiv \delta^{ij}$ temos

$$\delta^{ij}\partial_i\partial_j\Phi = \nabla^2\Phi \approx 4\pi G\rho \quad (5.112)$$

sendo

$$\aleph = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (5.113)$$

5.8 Simetrias em Variedades Riemannianas

Considere o mapa $F : M \rightarrow M$ um isomorfismo entre dois subconjuntos da variedade M , $x \in M$ e $F(x) = x' \in M$. Então, o mapeamento associado a F carrega tensores de x a x' . Assim, um tensor que foi definido em um ponto x antes de ser transformado torna-se T' ao ser definido em x' . Agora, considere um subconjunto $U \subset M$ e sua respectiva imagem $F(U) \subset M$. Suponha que F é um elemento de um grupo contínuo de mapeamentos $\{F_t\}$, com $\{F_{t_0}\}$ sendo o mapa identidade. Se $F = F_{t_1}$ e $|t_1 - t_0|$ é suficientemente pequeno, então $F(U) \cap U \neq \emptyset$. Então, $x, x' \in F(U) \cap U$. Assim, x é uma imagem de outro ponto y , tal que $x = F(y)$, e os tensores que foram ligados em y antes da transformação foram enviados para x . Portanto, temos dois tensores em cada ponto: $T(x)$ que foi definido antes da transformação e $T'(x)$ que foi enviado para x de y pela transformação. O valor de $T(y)$ pode ser calculado via lei de transformação tensorial. Assim, podemos comparar $T(x)$ com $T'(x)$. Se $T'(x) = T(x)$ sob um mapeamento F para todos os pontos da variedade, dizemos que T é invariante sob a ação de T . Se a variedade é Riemanniana, e o tensor métrico é invariante sob a ação de F , chamamos F de **isometria** de M .

Agora consideramos Γ uma família de mapeamentos de uma variedade n -dimensional M nela mesma tal que $t \in [t_1, t_2] := B \subset \mathbb{R}$ corresponda a um mapa $f_t : M \rightarrow M$ e $x'^\alpha = f^\alpha(t, \{x\})$, onde f_t é uma coleção de funções f^α para uma dado $t \in B$. Assumindo também que para $t = t_0$, sendo $t_1 \leq t_0 \leq t_2$, o mapa f_{t_0} uma identidade, ou seja, $f^\alpha(t_0, \{x\}) = x^\alpha$.

Considerando então $x \in M$, e aplicamos a coleção de mapas f_t em x para todo o valor de $t \in B$. Assim, o conjunto de todas as imagens do ponto x definirá uma curva na variedade M passando pelo ponto inicial $p = f_{t_0}(p)$, denominada **órbita** de p . Nestas curvas existem vetores tangentes que podem ser diferenciados. Assumimos, então, que as funções $f^\alpha(t, \{x\})$ são contínuas e diferenciáveis até a segunda ordem. Os mapas f_t possuem inversa, que por sua vez, também são uma coleção de funções contínuas e diferenciáveis até segunda ordem. Assim, para cada mapeamento f_t , expandindo em série de Taylor

$$x'^\alpha = x^\alpha + \left. \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + O(\epsilon^2) \quad (5.114)$$

onde $x'^{\alpha} = f^{\alpha}(t, \{x\})$, $x^{\alpha} = f^{\alpha}(t_0, \{x\})$ e $\epsilon := (t - t_0)$. Definimos ainda

$$k^{\alpha} := \left. \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t} \right|_{t=t_0} \quad (5.115)$$

como as componentes do vetor tangente às órbitas em seus pontos iniciais $x = f_{t_0}(x)$ para $x \in M$.

Agora vamos considerar um tensor cujas componentes são dadas por $T_{\alpha\beta}$, tal que este é invariante frente a todas as transformações em Γ . Assim,

$$T'_{\alpha\beta}(x) = T_{\alpha\beta}(x), \quad (5.116)$$

para todo $x \in M$ e $t \in B$.

Ora, mas da lei de transformação de um tensor temos

$$T'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} T_{\mu\nu}. \quad (5.117)$$

Porém, aplicando uma expansão em série de Taylor

$$T'_{\alpha\beta}(x') = T'_{\alpha\beta}(x) + \epsilon \partial_{\mu} T_{\alpha\beta} k^{\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.118)$$

Por outro lado, utilizando a equação (5.114), segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}} (x'^{\mu} - k^{\mu} \epsilon - \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} - \epsilon \partial_{\rho} k^{\mu} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\alpha}} - \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} - \epsilon \partial_{\rho} k^{\mu} \delta_{\alpha}^{\rho} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} - \epsilon \partial_{\alpha} k^{\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Inserindo este resultado na equação (5.117) obtemos

$$\begin{aligned} T'_{\alpha\beta}(x') &= (\delta_{\alpha}^{\mu} - \epsilon \partial_{\alpha} k^{\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) (\delta_{\beta}^{\nu} - \epsilon \partial_{\beta} k^{\nu} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) T_{\alpha\beta} \\ &= \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} T_{\mu\nu} - \epsilon (T_{\mu\nu} \delta_{\beta}^{\nu} \partial_{\alpha} k^{\mu} + T_{\mu\nu} \delta_{\alpha}^{\mu} \partial_{\beta} k^{\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= T_{\alpha\beta} - \epsilon (T_{\mu\beta} \partial_{\alpha} k^{\mu} + T_{\alpha\nu} \partial_{\beta} k^{\nu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (5.120)$$

Agora, substituindo a equação (5.118) e utilizando a equação (5.116) obtemos

$$k^{\mu} \partial_{\mu} T_{\alpha\beta} + T_{\mu\beta} \partial_{\alpha} k^{\mu} + T_{\alpha\nu} \partial_{\beta} k^{\nu} = 0, \quad (5.121)$$

onde ainda consideramos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\epsilon} = 0. \quad (5.122)$$

As equações (5.121) são conhecidas como **equações de Killing** e suas soluções k^{μ} são

as componentes dos vetores de Killing. Cada vetor de Killing é um vetor tangente à órbita gerada pelas transformações de simetria da coleção Γ para um dado ponto $x \in M$ e $t \in B$.

Não explicitaremos aqui mas as equações (5.121) ficam invariantes ao trocarmos $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$ e no caso $T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$, o tensor métrico, a equação de Killing se torna

$$\nabla_\alpha k_\beta + \nabla_\beta k_\alpha = 0. \quad (5.123)$$

5.9 Espaço-tempo estacionário e com simetria axial

Um espaço-tempo é dito estacionário quando o tensor métrico, cujas componentes são dadas por $g_{\mu\nu}$, é invariante frente a um grupo de isometrias $\{\sigma_t\}$ cujas órbitas são do tipo tempo e possuem um campo vetorial de Killing de tipo tempo ξ . Analogamente, um espaço-tempo é dito axissimétrico quando o tensor métrico é invariante frente a um grupo de isometrias $\{\chi_\phi\}$ cujas órbitas são do tipo espaço, fechadas e possuem um campo vetorial de Killing do tipo espaço ψ . Para detalhes sobre classificação de vetores e curvas consulte a Ref. [65].

Um espaço-tempo estacionário e axissimétrico possui ambas as simetrias e ainda não deve variar quando as ações de σ_t e χ_ϕ comutam, ou seja

$$\sigma_t \circ \chi_\phi = \chi_\phi \circ \sigma_t. \quad (5.124)$$

O significado físico desta exigência é que a fonte do campo gravitacional possui movimentos puramente rotacionais em torno do eixo de simetria, ou seja, estamos considerando um espaço-tempo associado a uma **fonte girante**.

Consideremos, então, um sistema de coordenadas tal que as componentes dos vetores de Killing são dadas por $\xi^\mu = \delta_0^\mu$ e $\psi^\mu = \delta_2^\mu$, sendo o índice 0 para a coordenada temporal e 2 para a coordenada ϕ . Ao aplicarmos a equação (5.121) para o tensor métrico obtemos em cada caso

$$\xi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \partial_\nu \xi^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \xi^\rho = \delta_0^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} = \partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \quad (5.125)$$

e

$$\psi^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\mu\rho} \partial_\nu \psi^\rho + g_{\nu\rho} \partial_\mu \psi^\rho = \delta_2^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} = \partial_2 g_{\mu\nu} = 0. \quad (5.126)$$

Visivelmente, neste sistema de coordenadas, as componentes do tensor métrico não dependem das coordenadas t e ϕ . Por outro lado, a equação (5.121) é tensorial, portanto se as derivadas das componentes do tensor métrico desaparecem em relação a t e ϕ desaparecem também em qualquer outro sistema de coordenadas. Além disso, neste sistema de coordenadas adaptado aos vetores de Killing e conseqüentemente nos demais sistemas $g_{03} = g_{23} = g_{01} = g_{12} = 0$, onde denotamos as demais coordenadas como x^1 e x^3 , que é equivalente a exigir que a métrica seja invariante à transformação $(t, \phi) \rightarrow (-t, -\phi)$. Assim, após essas simplificações a métrica adquire a seguinte forma

$$ds^2 = -Vdt^2 + 2Wd\phi dt + Xd\phi^2 + [g_{33}(dx^3)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{13}dx^1 dx^3], \quad (5.127)$$

onde as funções $V, W, X, g_{33}, g_{11}, g_{13}$ dependem exclusivamente das coordenadas x^1 e x^3 . O termo entre colchetes é uma sub-variedade Riemanniana bidimensional, usando o fato de que qualquer variedade Riemanniana bidimensional é conformalmente plana [66], ou seja, é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas que

$$\gamma_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}, \quad (5.128)$$

onde $\gamma_{\mu\nu}$ são as componentes do tensor métrico de uma variedade Riemanniana bidimensional.

Definimos, então, uma função escalar

$$r^2 = VX + W^2, \quad (5.129)$$

que é menos o determinante da parte $t - \phi$ do tensor métrico em (5.130). Assumindo que $\nabla_\alpha r \neq 0$ escolhemos r como uma das coordenadas x^1 . Escolhendo $z = x^3$ tal que $\nabla_\alpha z$ é ortogonal a $\nabla_\alpha r$. Nas coordenadas (t, r, ϕ, z) e fazendo $c = 1$, temos

$$ds^2 = -V(dt - wd\phi)^2 + V^{-1}r^2d\phi^2 + \Omega^2(dr^2 + \Lambda dz^2), \quad (5.130)$$

com $w := \frac{W}{V}$ e V, w, Λ, Ω funções das coordenadas r, z . Ou ainda, mediante as substituições

$$\begin{aligned} V &= e^w, \\ w &= N, \\ \Omega^2 &= e^{v-w}, \\ \Lambda &= u, \end{aligned} \quad (5.131)$$

temos

$$ds^2 = -e^w(dt - Nd\phi)^2 + e^{-w}r^2d\phi^2 + e^{v-w}(dr^2 + udz^2). \quad (5.132)$$

Algo interessante no estudo de espaços-tempos estacionários e axissimétricos é a existência de **observadores localmente não-girantes** (LNRO), que foram introduzido pela primeira vez por Bardeen [78]. Para a análise de tais observadores é conveniente expressar a métrica (5.132) como

$$ds^2 = -e^{2\varphi}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{v-w}(dr^2 + udz^2), \quad (5.133)$$

considerando as seguinte relações

$$e^{2v} = e^w + e^{2\psi}\omega^2, \quad (5.134)$$

$$e^{2\varphi} = r^2e^{-w} - N^2e^w, \quad (5.135)$$

$$Ne^w = -\omega e^{2\psi}. \quad (5.136)$$

De (5.135) em (5.136) temos

$$\omega = \frac{Ne^w}{N^2e^w - r^2e^{-w}}. \quad (5.137)$$

Imaginemos, então, um observador que se move com uma 4-velocidade, denotada por $U^\mu := \frac{dx^\mu}{ds}$, tal que $U^1 = U^3 = 0$, ou seja, o observador está circulando na superfície (t, ϕ) . Definimos então $\Omega := \frac{d\phi}{dt}$ como sendo a velocidade angular do observador com respeito ao infinito. Imagine, agora, que este observador seja capaz de colocar uma fibra ótica ao longo de sua órbita de tal modo que consiga emitir feixes de luz tanto na direção contrária quanto a favor de seu movimento. Seja T_ε o tempo que um raio de luz, ao ser emitido, leva para retornar ao observador, com $\varepsilon = +1$ para o mesmo sentido que o movimento do observador e $\varepsilon = -1$ para o sentido contrário. Durante o tempo T_ε o observador se moverá da posição ϕ_1 para a posição $\phi_2 = \phi_1 + \Omega T_\varepsilon$. O raio de luz, por sua vez, se deslocará da posição ϕ_1 para $\phi_3 = \phi_1 + \Omega T_\varepsilon + 2\pi\varepsilon$. Para um feixe de luz temos $ds^2 = 0$, considerando a métrica (5.133) temos para r, z fixos

$$\begin{aligned} e^{2\varphi} dt^2 &= e^{2\psi} (d\phi - \omega dt)^2 \\ \varepsilon e^{2\varphi} dt &= e^\psi (d\phi - \omega dt) \\ dt &= \frac{e^\psi}{e^\psi \omega + \varepsilon e^\varphi} d\phi. \end{aligned} \quad (5.138)$$

Integrando obtemos o tempo gasto por um feixe de luz para retornar ao observador

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\varepsilon} dt &= \frac{e^\psi}{e^\psi \omega + \varepsilon e^\varphi} \int_{\phi_1}^{\phi_1 + \Omega T_\varepsilon + 2\pi\varepsilon} d\phi \\ T_\varepsilon &= \frac{e^\psi (\Omega T_\varepsilon + 2\pi\varepsilon)}{\omega e^\psi + \varepsilon e^\varphi} \\ T_\varepsilon &= \frac{2\pi}{e^{\varphi-\psi} - \varepsilon(\Omega - \omega)}. \end{aligned} \quad (5.139)$$

Por outro lado, para o observador $ds^2 = -d\tau^2$, onde τ é o tempo próprio com $c = 1$. Assim, da métrica (5.133) para r, z fixos e usando a relação $d\phi = \Omega dt$, temos

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= e^{2\varphi} dt^2 - (d\phi - \omega dt)^2 e^{2\psi} \\ \varepsilon d\tau &= \sqrt{e^{2\varphi} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2} dt. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Integrando, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon T_O &= \sqrt{e^{2\varphi} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2} \int_0^{T_\varepsilon} dt \\ \varepsilon T_O &= \sqrt{e^{2\varphi} - e^{2\psi}(\Omega - \omega)^2} T_\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.141)$$

Substituindo a expressão encontrada para T_ε (5.139) e uma pequena álgebra, temos

$$T_O = 2\pi e^\psi \sqrt{\frac{1 + \varepsilon(\Omega - \omega)e^{\psi-\varphi}}{1 - \varepsilon(\Omega - \omega)e^{\psi-\varphi}}}. \quad (5.142)$$

Quando temos $\Omega = \omega$ os raios de luz emitidos em sentidos opostos entre si levam o mesmo tempo para retornarem ao observador, portanto existe um conjunto de observadores locais para os quais o efeito de rotação desaparece, tais observadores são os ditos localmente não-girantes.

Capítulo 6

Dinâmica de Galáxias via Relatividade Geral

Vimos anteriormente que as observações astrofísicas levaram, assumindo gravitação newtoniana, a existência de matéria escura na tentativa de explicar o comportamento das curvas de rotação de galáxias. Por outro lado, temos que a relatividade geral é a teoria mais completa em gravitação hoje, e portanto pode nos dar mais informações acerca deste fenômeno. Porém vimos que as velocidades dos constituintes de uma galáxia (estrelas e gás) são baixas, além do potencial gravitacional ser muito menor que o quadrado da velocidade da luz $\frac{\Phi_N}{c^2} \ll 1$, ou seja, um regime de campo fraco. Portanto dentro deste regime e com estas velocidades, num cenário de relatividade geral, o limite newtoniano existe e portanto gravitação Newtoniana é uma das alternativas para descrever este sistema físico. Cooperstock e Tieu [4], ou simplesmente CT, apresentaram críticas à abordagem descrita acima enfatizando que galáxias são sistemas ligados gravitacionalmente que, de fato, possuem campo fraco e velocidades baixas do ponto de vista observacional. Porém, isso não significa que são sistemas lineares. Assim propõem um esquema de perturbação não-linear que leva em conta a contribuição das componentes g_{0i} do tensor métrico na reprodução de curvas de rotação de galáxias do tipo disco sem, aparentemente, a necessidade de matéria escura.

Outra proposta, que iremos mencionar e analisar neste trabalho, é a de Balasin e Grumiller [5], ou simplesmente BG, que por sua vez concordam com CT apenas na questão da não-linearidade de sistemas autogravitantes. Porém, discordam em algumas abordagens técnicas do modelo CT e propõem um alternativa para a reprodução de curvas de rotação a partir uma solução exata de relatividade geral e fenomenologia das curvas de rotação com o objetivo, não de eliminar, mas reduzir a necessidade de matéria escura.

6.1 A proposta de Cooperstock e Tieu

A proposta se inicia considerando um fluido perfeito, ou seja $T_{0i} = 0$ e $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$, e sem pressão que gira uniformemente em torno do seu eixo de rotação. Então, sem perda de generalidade podemos utilizar o tensor energia-momento de um fluido perfeito dado por

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)P, \quad (6.1)$$

no caso da pressão, P , nula segue

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu, \quad (6.2)$$

e a métrica de um espaço-tempo estacionário e axissimétrico (5.132)

$$ds^2 = -e^w(dt - Nd\phi)^2 + e^{-w}r^2d\phi^2 + e^{v-w}(dr^2 + udz^2), \quad (6.3)$$

com w, u, N, v funções de r e z .

Utilizando-se de um esquema de perturbação não trivial onde $N \sim \mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$. As equações de Einstein (5.87) até a ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ e velocidades baixas são dadas por

$$2rv_r + N_r^2 - N_z^2 = 0, \quad (6.4)$$

$$rv_z + N_r N_z = 0, \quad (6.5)$$

$$N_r^2 + N_z^2 + 2r^2(v_{zz} + v_{rr}) = 0, \quad (6.6)$$

$$N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r} = 0, \quad (6.7)$$

$$\left(w_{rr} + w_{zz} + \frac{w_r}{r}\right) + \frac{3}{4}r^{-2}(N_r^2 + N_z^2) + \frac{N}{r^2}\left(N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r}\right) - \frac{1}{2}(v_{rr} + v_{zz}) = 8\pi G\rho, \quad (6.8)$$

onde G é a constante gravitacional e ρ é a densidade de matéria e os subscritos indicam derivadas parciais com respeito às coordenadas indicadas. Além disso, devido à ordem requerida e o esquema de perturbação aplicado u pode ser tomado como unidade. Assim, combinando estas equações obtemos

$$\nabla^2 w + \frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} = 8\pi G\rho. \quad (6.9)$$

A fim de simplificar as equações de campo podemos adotar um sistema que está comóvel com o fluido $U^\mu = (U^0(r, z), 0, 0, 0)$. Logo, da equação da geodésica (5.49)

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta = 0. \quad (6.10)$$

A parte temporal nos dá

$$\frac{dU^0}{ds} = 0. \quad (6.11)$$

Por outro lado, a componente espacial

$$\Gamma_{00}^i = 0. \quad (6.12)$$

Assim,

$$w_r = w_z = 0, \quad (6.13)$$

portanto, $w = \text{constante}$, em particular, podemos fazer $w = 0$. Logo,

$$\nabla^2 w = 0. \quad (6.14)$$

Enfim, as equações envolvendo exclusivamente N ficam

$$\begin{aligned} N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r} &= 0 \\ \frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} &= 8\pi G\rho, \end{aligned} \quad (6.15)$$

onde notamos explicitamente a relação não-linear envolvendo ρ e N .

Vimos anteriormente que em espaços-tempos de natureza estacionária e axissimétrica podemos definir observadores locais (inerciais) que não sentem o efeito da rotação (LNRO). Estes, na proposta CT, podem ser obtidos via transformação local de coordenadas, (r, z) fixos, que diagonalizam localmente a métrica. Assim,

$$\bar{\phi} = \phi + \vartheta(r, z) t. \quad (6.16)$$

Considerando a métrica (6.3) para (r, z) fixos e exigindo que os termos que acompanham $d\bar{\phi}dt$ sejam nulos, temos

$$\begin{aligned} e^w N + e^w N^2 \vartheta - e^{-w} r^2 \vartheta &= 0 \\ e^w N &= r^2 e^{-w} \vartheta - e^w N^2 \vartheta \\ \vartheta &= \frac{N e^w}{r^2 e^{-w} - N^2 e^w}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Tomando a equação (6.17) no sistema de coordenadas comóveis e aplicando o esquema de perturbação proposto, temos

$$\vartheta = \frac{N}{r^2 - N^2} \approx \frac{N}{r^2 \left(1 - \frac{N^2}{r^2}\right)} \approx \frac{N}{r^2} \left(1 + \frac{N^2}{r^2}\right) \approx \frac{N}{r^2}. \quad (6.18)$$

Em se tratando de um LNRO temos $\vartheta = \Omega$, sendo Ω sua velocidade angular em relação a um observador distante. Sendo o LNRO e o observador distante inerciais ambos, então, concordam pelo princípio de relatividade que

$$V_c = r\Omega = r\vartheta = \frac{N}{r}. \quad (6.19)$$

A equação (6.7) pode ser expressa como

$$\nabla^2 \Psi = 0, \quad (6.20)$$

com

$$\Psi = \int \frac{N}{r} dr. \quad (6.21)$$

Diante da equação (6.20) os autores assumem a solução

$$\Psi = C e^{-k|z|} J_0(kr), \quad (6.22)$$

com C uma constante arbitrária e J_0 a função de Bessel de ordem zero. Sendo a equação (6.20) uma equação linear é válido o princípio de superposição. Então

$$\Psi = \sum_n C_n e^{-k_n|z|} J_0(k_n r). \quad (6.23)$$

Das equações (6.19), (6.21) e (6.23), temos

$$N = -r \sum_n C_n k_n e^{-k_n|z|} J_1(k_n r), \quad (6.24)$$

e

$$V_c = \frac{N}{r} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = - \sum_n C_n k_n e^{-k_n|z|} J_1(k_n r), \quad (6.25)$$

com $J_1(x) = -\frac{dJ_0(x)}{dx}$.

A solução (6.22) proposta por CT foi alvo de críticas [5–7] que argumentavam a presença de um fluido exótico em $z = 0$ devido à descontinuidade da derivada de N em $z = 0$. Cooperstock e Carrick argumentaram posteriormente [79] que a massa gerada pela descontinuidade e a massa do disco integrada a partir de ρ são praticamente as mesmas, apenas são modos diferentes de calcular a mesma massa ligadas pelo teorema da divergência de Gauss (2.14). Entretanto, deve-se enfatizar que, a despeito do que foi discutido em [79], a solução proposta 6.22 não é solução da equação de Laplace

6.2 A Solução de Balasin e Grumiller

Balasin e Grumiller motivados pelas críticas à proposta de Cooperstock desenvolveram uma abordagem a partir de soluções exatas para explicar o comportamento não-newtoniano no limite de campo fraco e velocidades baixas para distribuições contínuas de matéria em rotação.

Como mencionamos, as divergências entre os modelos CT e BG se dão no âmbito técnico, do ponto de vista das soluções encontradas. Porém, a motivação relacionada à não-linearidade de sistemas autogravitantes permanece intacta.

Os autores iniciam do mesmo ponto de partida que CT: um fluido perfeito sem pressão

e um espaço-tempo estacionário e axissimétrico. Dessa forma, introduzem o elemento de linha (5.130)

$$ds^2 = -V(dt - Nd\phi)^2 + V^{-1}r^2d\phi^2 + \Omega^2(dr^2 + \Lambda dz^2), \quad (6.26)$$

onde novamente fazendo $c = 1$ e N, V, Λ, Ω funções de r e z . Em seguida, considerando que o fluido sem pressão esteja comóvel, ou seja, não existe movimento relativo entre as partículas do fluido e o espaço, assim $U^\mu = (U^0(r, z), 0, 0, 0)$. Da equação da geodésica (5.49), segue

$$\frac{dU^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu U^\alpha U^\beta = 0. \quad (6.27)$$

Da componente espacial da equação supracitada, temos

$$\Gamma_{00}^i = 0, \quad (6.28)$$

resultando

$$K_r = K_z = 0. \quad (6.29)$$

Assim, $K = \text{constante}$ e sem perda de generalidade podemos fazer $K = 1$.

Analisemos, agora, as equações de Einstein (5.106) para um fluido perfeito comóvel e sem pressão. Tomando o traço do tensor energia-momento (6.2) para este fluido, temos

$$T = -\rho. \quad (6.30)$$

As equações de Einstein (5.106), utilizando um sistema de unidade em que $c = G = 1$, ficam

$$R_\nu^\mu = 8\pi(\rho U^\mu U_\nu + \frac{\rho}{2}\delta_\nu^\mu). \quad (6.31)$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -4\pi\rho \\ R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 &= 4\pi\rho. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Obtemos, de imediato, a seguinte quantidade

$$R_0^0 + R_2^2 = 0. \quad (6.33)$$

Por outro lado,

$$R_0^0 + R_2^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial\Lambda}{\Lambda\Omega^2}. \quad (6.34)$$

Então,

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial r} = 0, \quad (6.35)$$

ou seja, $\Lambda = \Lambda(z)$. Assim, podemos simplificar o elemento de linha (6.26) fazendo a transfor-

mação $z' = \int \Lambda^{1/2}(z)dz$. Finalmente, o elemento de linha (6.26) se reduz a

$$ds^2 = -(dt - Nd\phi)^2 + r^2 d\phi^2 + e^\nu(dr^2 + dz^2), \quad (6.36)$$

onde fizemos $\Omega^2 = e^\nu$.

Inserindo, portanto, nas equações de campo de Einstein (5.87), temos

$$2rv_r + N_r^2 - N_z^2 = 0, \quad (6.37)$$

$$N_r^2 + N_z^2 + 2r^2(v_{zz} + v_{rr}) = 0, \quad (6.38)$$

$$rv_z + N_r N_z = 0, \quad (6.39)$$

$$N_{rr} + N_{zz} - \frac{N_r}{r} = 0, \quad (6.40)$$

$$\frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} = 8\pi\rho e^\nu. \quad (6.41)$$

A estratégia adotada pelos autores a fim de resolver as equações de campo parte da resolução da equação (6.40). Ao invés de recorrer a substituição de variáveis, adotada por CT, BG atacam o problema diretamente a partir de um ansatz $N = \mathcal{R}(r)\mathcal{Z}(z)$. Assim a equação (6.40) fica

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{d^2\mathcal{R}}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) = -\frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{d^2\mathcal{Z}}{dz^2} = -k^2, \quad (6.42)$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Exigindo uma simetria de reflexão para N , ou seja, $N(r, z) = N(r, -z)$ temos que

$$\mathcal{Z}(z) = \int A(k)\mathcal{Z}(k, z)dk, \quad (6.43)$$

com $\mathcal{Z}(k, z) = \cosh(\sqrt{k}z)$. Se $k > 0$, $\mathcal{Z}(k, z)$ diverge para $|z| \rightarrow \infty$. Nos resta, então, considerar $k = -\lambda^2$, com $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Logo, $\mathcal{Z}(k, z) = \cos(\lambda z)$.

Agora, fazendo a substituição de variável $x = \lambda r$ e aplicando na equação diferencial ordinária (6.42), temos

$$\mathcal{R}'' - \frac{1}{x}\mathcal{R}' - \mathcal{R} = 0, \quad (6.44)$$

sendo a diferenciação, agora, com respeito a x . A solução da equação (6.44) é uma combinação linear das funções de Bessel modificadas [80]. Assim, a solução para $N = \mathcal{R}\mathcal{Z}$ é dada por

$$N(r, z) = \int_0^\infty \cos(\lambda z)(r\lambda)[A(\lambda)K_1(\lambda r) + B\lambda I_1(\lambda r)]d\lambda. \quad (6.45)$$

Os coeficientes $A(\lambda)$ e $B(\lambda)$, intituladas por BG como densidades espectrais, podem ser escolhidas de acordo com o comportamento desejado para $N(r, z)$. As funções I_1 e K_1 são as funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo, respectivamente. Devido à divergência exponencial de I_1 para valores grandes de r fazemos $B(\lambda) = 0$. As funções

decaem exponencialmente para grandes valores de r e divergem como $1/r$ para valores próximos de $r = 0$. Porém, esta divergência é compensada pelo pré-fator linear ($r\lambda$), assim o integrando é bem definido para qualquer $A(\lambda)$ bem comportado. Finalmente, temos

$$N(r, z) = \int_0^\infty \cos(\lambda z)(r\lambda)A(\lambda)K_1(\lambda r)d\lambda . \quad (6.46)$$

Ao invés de fixar $A(\lambda)$ diretamente, BG propõem a seguinte relação

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C(x) \cos(\lambda x)dx , \quad (6.47)$$

onde $A(\lambda)$ é determinada em termos da transformada de Fourier [80] da densidade espectral $C(x)$.

Para a determinação da densidade espectral $C(x)$, BG se baseiam na fenomenologia das curvas de rotação de galáxias do tipo disco (espirais). É necessário frisar que não são todas as curvas de rotação que obedecem aos critérios estipulados por BG, mas ressaltando que a pretensão dos autores é construir um modelo simples (toy-model) para a curva de rotação. Assim, estabelecem que a curva de rotação deve ser linear para pequenos valores de r e para valores intermediários em r assume um perfil aproximadamente plano. Uma densidade espectral que satisfaz essas condições é dada por

$$C(x) = (x - r_0)[H(x - r_0) - H(x - R)] + (R - r_0)H(x - R) , \quad (6.48)$$

sendo $H(x)$ a função Heaviside [80]. Inserindo a equação (6.48) em (6.46), temos

$$N(r, z) = V_0(R - r_0) + \frac{V_0}{2} \sum_{\pm} \left(\sqrt{(z \pm r_0)^2 + r^2} - \sqrt{(z \pm R)^2 + r^2} \right) . \quad (6.49)$$

Assim como na abordagem CT, aqui a velocidade circular é dada por

$$V_c = \frac{N}{r} = \frac{V_0(R - r_0) + \frac{V_0}{2} \sum_{\pm} \left(\sqrt{(z \pm r_0)^2 + r^2} - \sqrt{(z \pm R)^2 + r^2} \right)}{r} , \quad (6.50)$$

sendo os parâmetros R, r_0, V_0 escolhidos adequadamente. A quantidade V_0 está associada à velocidade no regime plano $V_0 \approx 200$ km/s. O parâmetro r_0 está ligado ao regime linear, ou seja, corresponde ao raio do bojo $r_0 \approx 1$ kpc. E, por fim, o parâmetro R está ligado ao comportamento assintótico do tipo $1/r$ para a velocidade a fim de mapear na solução de Kerr [68], $R \approx 100$ kpc.

Inserindo a solução para N (6.46) nas equações de Einstein (6.37) e (6.38) podemos obter ν . Devido ao fato de que $\frac{V_0^2}{4} \approx 10^{-7} \ll 1$, em unidades $c = G = 1$, podemos fazer $\nu(r, z) \approx -\ln \beta = \text{constante}$, sendo β uma constante de integração. Assim a densidade dada por (6.41) fica

$$8\pi\rho \approx \beta \frac{N_r^2 + N_z^2}{r^2} . \quad (6.51)$$

Os autores determinam o valor de β a partir da comparação entre as previsões newtoniana e relativística para a densidade de matéria. No regime linear da curva de rotação a matéria luminosa domina e uma coincidência entre relatividade geral e gravitação newtoniana é razoável. Então, no caso newtoniano com simetria esférica a densidade de matéria é dada igualando a energia cinética e a energia potencial

$$\frac{mV_c^2}{2} = \frac{4\pi \int \rho_N r^2 dr}{r}. \quad (6.52)$$

Assim, no plano galático, temos

$$\rho_N(r) \propto \frac{V_c^2 + 2rV_c V_c'}{r}. \quad (6.53)$$

Por outro lado, a densidade prevista pela equação (6.51) no plano galático é dada por

$$\rho(r) \propto \frac{\beta(V_c + rV_c')^2}{r^2}. \quad (6.54)$$

Agora, no regime linear da curva de rotação no plano galático, ou seja, $V_c \propto r$, temos

$$\frac{\rho}{\rho_N} = 1 = \beta \frac{4}{3}. \quad (6.55)$$

Consequentemente, no regime plano da curva de rotação no plano galático, ou seja, $V_c = \text{constante}$, temos

$$\frac{\rho}{\rho_N} = \beta = \frac{3}{4}. \quad (6.56)$$

Assim, exigindo equivalência entre gravitação newtoniana e relatividade geral no regime linear da curva de rotação leva a um considerável desvio no regime plano. Gravitação newtoniana necessita de 133% de densidade de matéria em comparação à relatividade geral para obter o mesmo perfil de velocidade. Portanto, relatividade geral reduz em cerca de 30% a necessidade de matéria escura para explicar curvas de rotação de galáxias.

A solução obtida por BG para a curva de rotação apresenta uma singularidade no eixo z , a solução $V_c(r, z)$ diverge em $r = 0$ e $|z| \geq r_0$, como nos mostra a Fig. (6.1). Os autores reconhecem que esta singularidade é um problema mas argumentam que no centro galático existe um buraco negro e que esta singularidade estaria associada a emissão de jets por parte da galáxia indicando também o motivo pelo qual estas regiões não podem ser descritas por um modelo do tipo poeira. Assim, os autores negligenciam esta região alegando que embora não seja satisfatório não é muito diferente e nem pior que o problema de núcleo/cúspide em gravitação newtoniana que mencionamos no capítulo 4.

Na realidade esta singularidade não está associada aos jets emitidos por galáxias até por que nem todas as galáxias emitem jets, parece que esta singularidade sempre está presente em modelos com poeira [81].

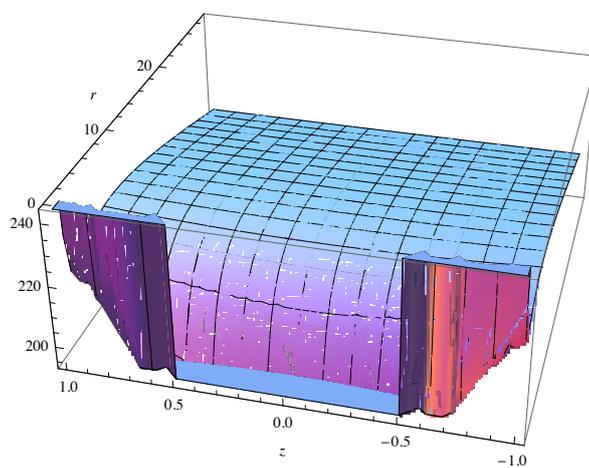


Figura 6.1. Gráfico de $V_c(r, z)$ para o modelo de BG evidenciando a divergência para $r = 0$ e $|z| \geq r_0$.

Capítulo 7

Análise Numérica e Resultados

Vimos, no capítulo anterior, que os modelos relativísticos a princípio ajudam a solucionar a necessidade de matéria escura para explicar a “planeza” das curvas de rotação das galáxias. Mesmo com as críticas sérias ao modelo CT e alguns problemas no modelo BG ainda são modelos viáveis do ponto de vista fenomenológico e nosso objetivo é propor um teste observacional para estes modelos ou qualquer outro semelhante.

Em gravitação newtoniana a curva de rotação observada pode ser modelada a partir da inserção de um halo de matéria escura, como por exemplo Navarro, Frenk e White [55]. Dada a distribuição de matéria do halo é possível via equação de Poisson (2.12) obter o potencial associada a distribuição de matéria escura e sendo o potencial uma grandeza escalar permite que adicionemos os potenciais associados ao gás e as estrelas, como segue

$$\Phi_{galaxia} = \Phi_{estrelas} + \Phi_{ME} + \Phi_{gas} . \quad (7.1)$$

Assim, obtendo a curva de rotação para a galáxia

$$V_{galaxia}^2 = V_{gas}^2 + V_{ME}^2 + V_{estrelas}^2 , \quad (7.2)$$

onde utilizamos a relação (2.19) entre a velocidade circular e o gradiente do potencial gravitacional. Uma análise recente de curvas de rotação de galáxias com base no perfil de Navarro, Frenk e White foi feita em Ref. [64].

Por outro lado, nos modelos relativísticos que abordamos o que acontece é exatamente o contrário: dada a curva de rotação infere-se o perfil de densidade. Isto só é possível pois sabemos a curva de rotação até o infinito, o que não ocorre no caso newtoniano como mencionamos no capítulo 2. Assim, a análise observacional a princípio imediata para estes modelos vem da comparação entre a densidade bariônica da galáxia e a densidade prevista por tais modelos via equação (6.15) e equação (6.51). Porém, a análise observacional das densidades de matéria bariônica não contém barras de erros referentes a erros sistemáticos, logo uma análise mais robusta nesse sentido fica prejudicada. Por outro lado, as curvas de rotação possuem barras de erro, que são baseadas na observação do redshift, com cerca de

68% de confiança além de fornecerem informações a respeito de desvios de simetria axial e movimentos circulares, por exemplo. Nossa proposta de trabalho, portanto, baseia-se numa análise não da densidade bariônica da galáxia, mas no melhor ajuste da curva de rotação bariônica da galáxia em relação à curva, que intitularemos **pseudo-newtoniana**, obtida a partir da densidade prevista pelos modelos relativísticos. A curva de rotação bariônica é composta por parte estelar, com ou sem bojo, e gás. A curva de rotação da parte estelar é obtida a partir de modelos newtonianos [8], por outro lado, a do gás é obtida diretamente das observações. O ajuste da curva de rotação bariônica à curva pseudo-newtoniana nos dará o valor da constante Υ_* para o disco estelar e para o bojo, se houver, de cada galáxia. Esta constante é chamada de razão de massa-luminosidade.

O ajuste da curva de rotação prevista pelos modelos relativísticos em relação à curva de rotação observada se dá a partir da minimização de χ^2 [82] dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{V_{\text{modelo}}(r_i) - V_i}{\sigma_i} \right)^2, \quad (7.3)$$

sendo σ_i o erro correspondente ao i -ésimo dado observacional.

Tendo o valor dos parâmetros que melhor ajustam as curvas de rotação previstas pelos modelos CT e BG podemos obter a densidade de matéria. Em seguida, podemos via integrais elípticas (2.24) computar o potencial pseudo-newtoniano. Por outro lado, algumas considerações devem ser feitas considerando o comportamento das soluções propostas por CT e BG para a curva de rotação.

Como $V_c(r, z)$ está diretamente associada a $N(r, z)$ que, por sua vez, através de suas derivadas se relaciona diretamente com a distribuição de matéria $\rho(r, z)$ a integração elíptica (2.24) para a obtenção do potencial pseudo-newtoniano no eixo z será na região $|z| \geq r_0$ para o modelo BG.

Por outro lado, o modelo CT apresenta inconveniências na componente radial da densidade. Pelo fato da modelagem da componente radial da densidade ser em funções de Bessel com $n = 10$, à medida que aumentamos o raio a densidade apresenta muitas oscilações o que é ruim do ponto de vista numérico, pois a integral elíptica (2.24) não converge. A solução que encontramos foi impor um decaimento do tipo exponencial a partir do raio máximo da galáxia, e^{-r/R_D} , onde R_D é o comprimento de escala do disco. Como não necessitamos das derivadas de ρ , apenas integramos, essa junção pode ser feita sem problemas. Tendo em mãos o potencial pseudo-newtoniano obtemos imediatamente a curva de rotação e por meio de minimização de χ^2 obtemos o melhor ajuste da curva bariônica à curva pseudo-newtoniana.

O ajuste dos modelos CT e BG, via minimização de χ^2 , levam em conta as barras de erro da curva de rotação observacional. A fim de “transportar” as barras de erro da curva de rotação observada para a curva pseudo-newtoniana realizamos uma maximização e uma minimização da curva pseudo-newtoniana em cada ponto com base na variação dos parâmetros dentro de um intervalo específico: as barras de erro dos parâmetros dos

modelos BG e CT obtidas a partir do ajuste à curva de rotação observacional. Para o modelo CT encontramos dificuldades em obter as barras de erro da curva pseudo-newtoniana devido à quantidade de parâmetros necessitando, assim, de um tempo computacional enorme.

Dessa forma, aplicamos a nossa proposta de trabalho a seis galáxias espirais para os modelos BG e CT. As galáxias são: DDO 154, ESO116-G12, NGC 3198 1D, NGC 2403 2D, NGC 2841 e ESO 287-G13 e os resultados obtidos estão dispostos na Fig. (7.1). Os dados observacionais da curva de rotação, bem como os valores de R_D e da luminosidade do disco e do bojo para as galáxias DDO 154, NGC 2403 2D, NGC 3198 1D, NGC 2841 foram retirados da Ref. [58] e para as galáxias ESO 116-G12 e ESO 287-G13 da Ref. [83]. Os valores de minimização de χ^2 para os modelos BG e CT em relação à curva de rotação observacional estão dispostos na Tabela (7.1) e na Tabela (7.2), respectivamente, bem como os valores das constantes de massa-luminosidade do disco estelar e do bojo para ambos os modelos.

Tabela 7.1. Tabela contendo os valores de minimização de χ^2 e χ_{red}^2 para o modelo BG da curva de rotação, da curva pseudo-newtoniana, χ_{PN}^2 e $\chi_{red(PN)}^2$, e os valores das constantes de razão massa-luminosidade do disco estelar, Υ_{*D} , e do bojo, Υ_{*B} . Os valores $\langle \Upsilon_{*D} \rangle$ e $\langle \Upsilon_{*B} \rangle$ são retirados de modelos de população estelar dados pelas Ref. [58,83].

	χ^2	χ_{red}^2	χ_{PN}^2	$\chi_{red(PN)}^2$	Υ_{*D}	$\langle \Upsilon_{*D} \rangle$	Υ_{*B}	$\langle \Upsilon_{*B} \rangle$
DDO 154	26.45	0.45	52.97	0.88	3.23	0.32	-	-
ESO 116-G12	63.38	1.22	11.20	0.8	0.55	0.5-1.8	-	-
NGC 3198 1D	78.87	0.99	3733.66	40.15	0.41	0.80	-	-
NGC 2403 2D	275.66	0.96	4679.26	16.36	0.62	0.39	1.23	0.60
NGC 2841	75.78	0.55	147.05	1.06	0.005	0.74	0.24	0.84
ESO 287-G13	37.68	1.63	2278.12	91.12	0.63	0.5-1.8	-	-

Tabela 7.2. Tabela contendo os valores de minimização de χ^2 e χ_{red}^2 para o modelo CT da curva de rotação, da curva pseudo-newtoniana, χ_{PN}^2 e $\chi_{red(PN)}^2$, e os valores das constantes de razão massa-luminosidade do disco estelar, Υ_{*D} , e do bojo, Υ_{*B} . Os valores $\langle \Upsilon_{*D} \rangle$ e $\langle \Upsilon_{*B} \rangle$ são retirados de modelos de população estelar dados pelas Ref. [58,83].

	χ^2	χ_{red}^2	χ_{PN}^2	$\chi_{red(PN)}^2$	Υ_{*D}	$\langle \Upsilon_{*D} \rangle$	Υ_{*B}	$\langle \Upsilon_{*B} \rangle$
DDO 154	35.66	0.70	3981.62	66.36	4.17	0.32	-	-
ESO 116-G12	8.83	1.76	1973.68	140.98	0.80	0.5-1.8	-	-
NGC 3198 1D	22.14	0.26	57 882.39	622.39	1.08	0.80	-	-
NGC 2403 2D	239.28	0.86	258 725.91	904.63	2.80	0.39	0.00	0.60
NGC 2841	58.18	0.44	465 474.16	3348.73	1.62	0.74	0.00	0.84
ESO 287-G13	13.96	0.87	7114.32	284.57	1.15	0.5-1.8	-	-

De acordo com os resultados obtidos para os modelos CT e BG dispostos na Tabela (7.1), na Tabela (7.2) e na Fig. (7.1) vemos claramente que a proposta CT é inviável na modelagem de curvas de rotação de galáxias sem a necessidade de matéria escura, o modelo além de apresentar problemas teóricos como mencionamos no capítulo anterior, do ponto de vista fenomenológico também apresenta problemas sérios, segundo nossos testes. Por outro lado, a proposta BG apresenta resultados satisfatórios para a ESO 116-G12 mostrando a

descrição de curvas de rotação sem a necessidade de matéria escura, parcialmente satisfatório para as galáxias DDO 154 e NGC 2841. Para DDO 154 apesar de um bom ajuste da curva bariônica à pseudo-newtoniana a constante de massa-luminosidade Υ_{*D} difere e muito do valor esperado, porém vale ressaltar que a análise de massa para a DDO 154 foi feita de maneira diferente em relação as demais galáxias NGC 2403 2D, NGC 3198 1D e NGC 2841 [58], pois as imagens eram mal detectadas. Assim os autores de Ref. [58] utilizaram os métodos da Ref. [84] para obter o valor esperado que consta na Tabela (7.1), portanto uma certa discrepância entre valores ajustados e valores esperados é razoável.

A galáxia NGC 2841 apresenta bom ajuste entre a curva bariônica e a pseudo-newtoniana porém há uma discrepância de duas ordens de magnitude entre o valor esperado para a constante de razão massa-luminosidade do disco estelar e o valor obtido para o modelo, ao contrário do bojo que possui Υ_{*B} da mesma ordem de magnitude que o esperado. Isso, entendemos, se deve ao fato da curva pseudo-newtoniana possuir um comportamento típico de uma curva descrita por bojo e isso deve estar diretamente conectado ao fato da curva de rotação observacional ser decrescente.

As galáxias NGC 2403 2D, NGC 3198 1D e ESO 287-G13 foram as que o modelo BG não conseguiu um bom ajuste entre as curvas bariônica e pseudo-newtoniana, necessitando ainda da matéria escura para uma total descrição de curvas de rotação. Porém, vale ressaltar que a proposta BG, diferentemente da CT, não extingue a necessidade de matéria escura mas defende a possibilidade de reduzir sua quantidade a partir de uma descrição baseada na relatividade geral.

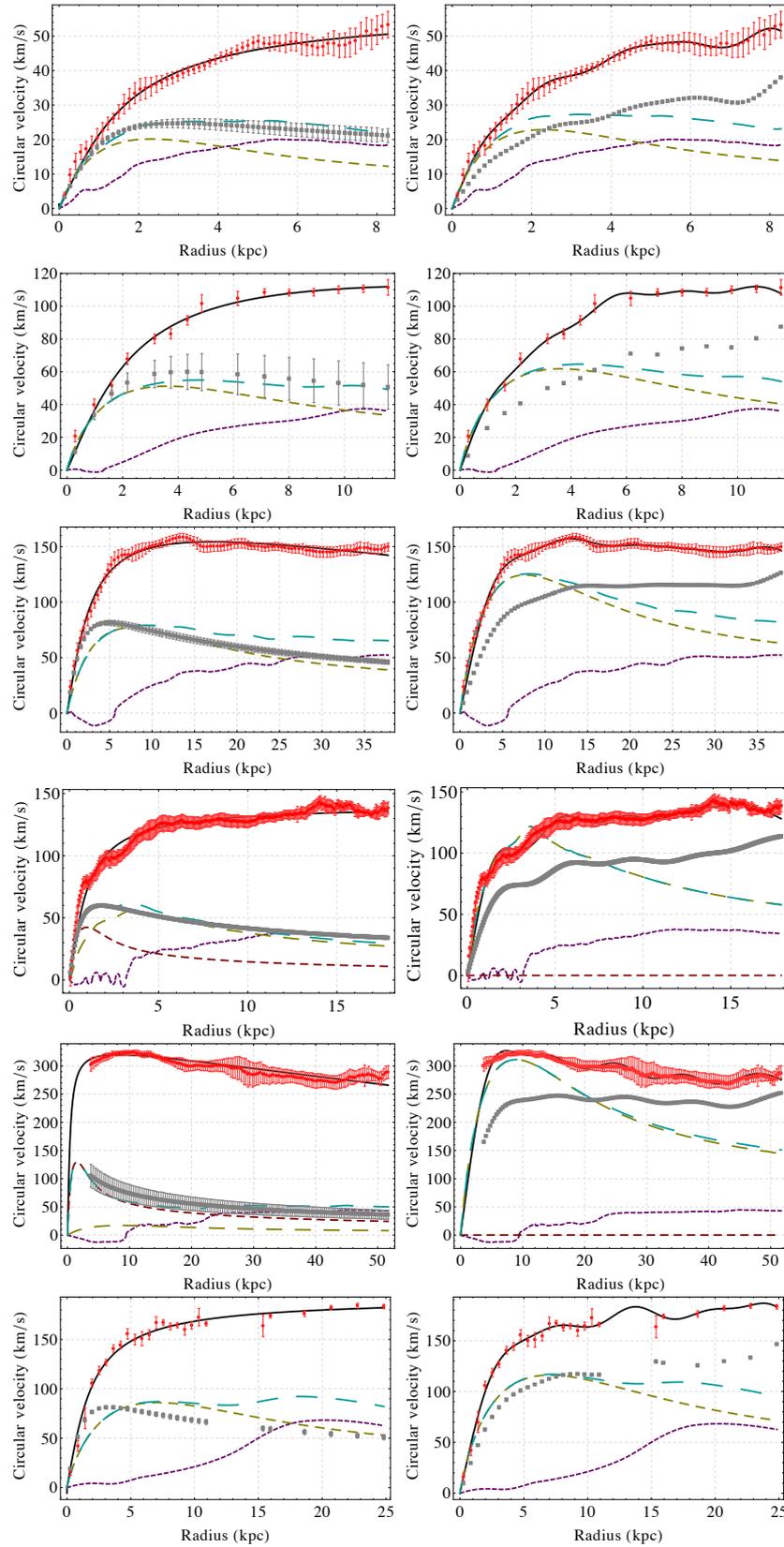


Figura 7.1. Curvas de rotação das galáxias DDO 154, ESO116-G12, NGC 3198, NGC 2403, NGC 2841 e ESO 287-G13 para os modelos BG e CT. Os pontos vermelhos com erros correspondem aos dados da curva de rotação observacional. Os pontos em quadrado cinza correspondem à curva pseudo-newtoniana com barras de erro no caso BG e sem erro no caso CT. A curva sólida em preto é o melhor ajuste dos modelos à curva de rotação observacional, seguida da curva bariônica (tracejada em azul) de melhor ajuste à curva pseudo-newtoniana. A curva bariônica se decompõe na curva do disco estelar (tracejada em amarelo), do bojo (tracejada marrom) e do gás (tracejada em roxo).

Capítulo 8

Conclusões e Perspectivas

Vimos neste trabalho que a gravitação newtoniana até meados do século XX destacou-se como principal teoria da gravitação. Porém, testes observacionais mais detalhados apontaram a ineficiência da teoria na descrição de fenômenos astrofísicos. A extensão da relatividade restrita na relatividade geral, cuja base matemática está na geometria Riemanniana, elaborada por Albert Einstein permitiu descrever os fenômenos nos quais a teoria newtoniana não previa corretamente como a precessão do perihélio de Mercúrio. Em paralelo, vimos que a necessidade de uma matéria escura nasce das observações astrofísicas de aglomerados de galáxias e curvas de rotação e o seu papel indispensável na formação de estruturas no regime linear reforçam ainda mais sua importância no cenário das interações fundamentais. A questão agora é: o que é a matéria escura? Surgem, então, candidatos, alguns pertencentes ao modelo padrão das partículas como o neutrino, outros pertencentes a extensões do modelo padrão como o neutralino. Seguiu-se então uma busca, desde as observações astrofísicas até a construção de aceleradores de partículas, para encontrar a partícula de matéria escura sem sucesso até os dias de hoje. Alternativas à gravitação newtoniana e à relatividade geral surgem para tentar explicar, dentre outras coisas no universo, os fenômenos pertinentes à matéria escura sem a necessidade dela.

Mas seria relatividade geral ineficiente na explicação de curvas de rotação de galáxias sem a necessidade de matéria escura? A princípio sim, vimos que no regime de campo gravitacional fraco e baixas velocidades relatividade geral e gravitação newtoniana coincidem. Porém, ao obter o limite newtoniano da relatividade geral fizemos uma perturbação linear considerando que todas as componentes da métrica contribuem da mesma maneira. Porém, vimos que Cooperstock e Tieu questionam essa análise afirmando que estruturas como galáxias, que são ligadas gravitacionalmente, mesmo em campo fraco e velocidades baixas são altamente não-lineares. Logo, utilizando-se de um esquema de perturbação não trivial de tal forma que em limite de campo fraco e velocidades baixas as contribuições não-lineares se manifestem, os autores aparentemente explicam a curva de rotação de galáxias sem a necessidade de matéria escura. Após o surgimento de várias críticas à proposta de Cooperstock alegando a existência de soluções não físicas, Balasin e Grumiller trataram o

problema, segundo nossa visão, de maneira correta, mas não livre de alguns problemas, obtendo um comportamento não newtoniano para regime de campo fraco e velocidades baixas. Ambas análises mostram a obtenção da densidade de matéria a partir da curva de rotação dada, sugerindo que o teste em relação às observações não deve ser feito na curva de rotação, mas sim, na densidade de matéria. Porém, como vimos, isso não é imediato pois análise de densidade bariônica de galáxias não apresentam em suas barras de erro os erros sistemáticos tornando uma análise nesse sentido menos robusta já que estamos tratando da necessidade ou não da matéria escura. Propomos então um teste, não pela curva de densidade, mas pela curva de rotação pseudo-newtoniana, pois curvas de rotação e suas barras de erro são medições de redshift, algo que é explorado há bastante tempo na astrofísica. Nossos resultados descartam o modelo CT como viável á descrição de curvas de rotação de galáxias via relatividade geral e o modelo BG como promissor na análise de curvas de rotação e distribuição de matéria escura a nível de galáxia. Entendemos que o estudo de propostas como CT e BG colaboram para um maior entendimento da matéria escura, ao memos, em nível de galáxia e nossa proposta de análise observacional é viável e pode ser implementada em qualquer modelo com essas características: dada curva de rotação obtêm-se a densidade de matéria associada.

As perspectivas futuras incluem análises para uma quantidade maior de galáxias a fim de estabelecer resultados estatisticamente razoáveis e poder afirmar com maior propriedade a respeito desses modelos relativísticos para galáxias, como por exemplo: verificar se a constante β pode realmente ser fixada globalmente como BG afirmam; analisar se o caso NGC 2841 é um caso isolado ou se o modelo BG apresenta dificuldades na descrição de galáxias com curvas de rotação decrescentes; analisar a inserção de um halo de matéria escura nos testes para esses modelos relativísticos, por exemplo Navarro, Frenk e White a fim de obter os parâmetros do halo e compará-los com o caso usual newtoniano verificando o quanto de matéria escura pode ser reduzida.

Referências Bibliográficas

- [1] Zwicky, F. Some Novel Features of the Whirlpool Nebula as Revealed by Composite Analytical Photography. *PASP* **67**, 232 (1955).
- [2] Garrett, K. & Dūda, G. Dark Matter: A Primer. *Advances in Astronomy* **2011**, 8 (2011). [1006.2483](#).
- [3] Primack, J. R. Cosmology: small-scale issues. *New Journal of Physics* **11**, 105029 (2009). [0909.2247](#).
- [4] Cooperstock, F. I. & Tieu, S. General Relativity Resolves Galactic Rotation Without Exotic Dark Matter. *ArXiv Astrophysics e-prints* (2005). [astro-ph/0507619](#).
- [5] Balasin, H. & Grumiller, D. Non-Newtonian Behavior in Weak Field General Relativity for Extended Rotating Sources. *International Journal of Modern Physics D* **17**, 475–488 (2008). [astro-ph/0602519](#).
- [6] Vogt, D. & Letelier, P. S. Presence of exotic matter in the Cooperstock and Tieu galaxy model. *ArXiv Astrophysics e-prints* (2005). [astro-ph/0510750](#).
- [7] Korzynski, M. Singular disk of matter in the Cooperstock-Tieu galaxy model. *ArXiv Astrophysics e-prints* (2005). [astro-ph/0508377](#).
- [8] Binney, J. & Tremaine, S. *Galactic dynamics* (Princeton university press, 2011).
- [9] Binney, J. & Tremaine, S. *Galactic dynamics* (Princeton university press, 1987).
- [10] Abramowitz, M. & Stegun, I. A. *Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 1964).
- [11] Toomre, A. On the distribution of matter within highly flattened galaxies. *ApJ* **138**, 385 (1963).
- [12] de Souza Oliveira Filho, K. & de Fátima Oliveira Saraiva, M. *Astronomia e Astrofísica* (Livraria da Física, 2003).

- [13] de Jong, R. S. Near-infrared and optical broadband surface photometry of 86 face-on disk dominated galaxies. III. The statistics of the disk and bulge parameters. *A&A* **313**, 45–64 (1996). [astro-ph/9601005](#).
- [14] Tully, R. B. & Fisher, J. R. A new method of determining distances to galaxies. *A&A* **54**, 661–673 (1977).
- [15] Kormendy, J. & Kennicutt, R. C., Jr. Secular Evolution and the Formation of Pseudobulges in Disk Galaxies. *ARA&A* **42**, 603–683 (2004). [astro-ph/0407343](#).
- [16] Hubble, E. Messier 87 and Belanowsky’s Nova. *PASP* **35**, 261 (1923).
- [17] Hubble, E. Density distribution in the photographic images of elliptical nebulae (abstract). *Popular Astronomy* **31**, 644 (1923).
- [18] Lindblad, B. On the state of motion in the galactic system. *MNRAS* **87**, 553–564 (1927).
- [19] Beck, R., Brandenburg, A., Moss, D., Shukurov, A. & Sokoloff, D. Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives. *ARA&A* **34**, 155–206 (1996).
- [20] Kim, W.-T. & Ostriker, E. C. Formation and fragmentation of gaseous spurs in spiral galaxies. *ApJ* **570**, 132 (2002).
- [21] Basu, S., Mouschovias, T. C. & Paleologou, E. V. Dynamical Effects of the Parker Instability in the Interstellar Medium. *ApJ* **480**, L55–L58 (1997).
- [22] Beck, R., Ehle, M., Shoutenkov, V., Shukurov, A. & Sokoloff, D. Magnetic field as a tracer of sheared gas flow in barred galaxies. *Nat* **397**, 324–327 (1999).
- [23] Rix, H.-W. & Rieke, M. J. Tracing the Stellar Mass in M51. *ApJ* **418**, 123 (1993).
- [24] Rhoads, J. E. Young red supergiants and the near-infrared light appearance of disk galaxies. *AJ* **115**, 472 (1998). [astro-ph/9710189](#).
- [25] Schweizer, F. Photometric studies of spiral structure. I - The disks and arms of six SB I and SC I galaxies. *ApJS* **31**, 313–332 (1976).
- [26] Eskridge, P. B. *et al.* Near-Infrared and Optical Morphology of Spiral Galaxies. *ApJS* **143**, 73–111 (2002). [astro-ph/0206320](#).
- [27] Goldreich, P. & Lynden-Bell, D. II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *MNRAS* **130**, 125 (1965).
- [28] Goldreich, P. & Lynden-Bell, D. I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. *MNRAS* **130**, 97 (1965).
- [29] Toomre, A. Theories of spiral structure. *ARA&A* **15**, 437–478 (1977).
- [30] Draine, B. T. Interstellar Dust Grains. *ARA&A* **41**, 241–289 (2003). [astro-ph/0304489](#).

- [31] Kulsrud, R., Ji, H., Fox, W. & Yamada, M. An electromagnetic drift instability in the magnetic reconnection experiment and its importance for magnetic reconnection). *Physics of Plasmas* **12**, 082301 (2005).
- [32] Rand, R. J. & Kulkarni, S. R. M51 - Molecular spiral arms, giant molecular associations, and superclouds. *ApJ* **349**, L43–L46 (1990).
- [33] Tilanus, R. P. J. & Allen, R. J. Spiral structure of M51 - Displacement of the H I from the nonthermal radio arms. *ApJ* **339**, L57–L61 (1989).
- [34] Mo, H., Van den Bosch, F. & White, S. *Galaxy formation and evolution* (Cambridge University Press, 2010).
- [35] Dodelson, S. *Modern cosmology* (Academic press, 2003).
- [36] Bertone, G., Hooper, D. & Silk, J. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Physics Reports* **405**, 279–390 (2005). [hep-ph/0404175](#).
- [37] Ostriker, J. P., Peebles, P. J. E. & Yahil, A. The size and mass of galaxies, and the mass of the universe. *ApJ* **193**, L1–L4 (1974).
- [38] Einasto, J., Kaasik, A. & Saar, E. Dynamic evidence on massive coronas of galaxies. *Nat* **250**, 309–310 (1974).
- [39] Roberts, M. S. & Rots, A. H. Comparison of Rotation Curves of Different Galaxy Types. *A&A* **26**, 483–485 (1973).
- [40] Rubin, V. C., Thonnard, N. & Ford, W. K., Jr. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC. *ApJ* **225**, L107–L111 (1978).
- [41] Rubin, V. C., Ford, W. K. J. & Thonnard, N. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/. *ApJ* **238**, 471–487 (1980).
- [42] Swaters, R. A., Madore, B. F., van den Bosch, F. C. & Balcells, M. The Central Mass Distribution in Dwarf and Low Surface Brightness Galaxies. *ApJ* **583**, 732–751 (2003). [astro-ph/0210152](#).
- [43] Planck Collaboration *et al.* Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *A&A* **571**, A16 (2014). [1303.5076](#).
- [44] White, S. D. M. & Rees, M. J. Core condensation in heavy halos - A two-stage theory for galaxy formation and clustering. *MNRAS* **183**, 341–358 (1978).
- [45] Carr, B. J., Bond, J. R. & Arnett, W. D. Cosmological consequences of Population III stars. *ApJ* **277**, 445–469 (1984).

- [46] Gershtein, S. S. & Zel'dovich, Y. B. Rest Mass of Muonic Neutrino and Cosmology. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **4**, 120 (1966).
- [47] Cowsik, R. & McClelland, J. An Upper Limit on the Neutrino Rest Mass. *Physical Review Letters* **29**, 669–670 (1972).
- [48] Lubimov, V. A., Novikov, E. G., Nozik, V. Z., Tretyakov, E. F. & Kosik, V. S. An estimate of the ν_e mass from the β -spectrum of tritium in the valine molecule. *Physics Letters B* **94**, 266–268 (1980).
- [49] Reines, F., Sobel, H. W. & Pasierb, E. Evidence for neutrino instability. *Physical Review Letters* **45**, 1307–1311 (1980).
- [50] Tremaine, S. & Gunn, J. E. Dynamical role of light neutral leptons in cosmology. *Physical Review Letters* **42**, 407–410 (1979).
- [51] Boyarsky, A., Ruchayskiy, O., Iakubovskiy, D. & Franse, J. Unidentified Line in X-Ray Spectra of the Andromeda Galaxy and Perseus Galaxy Cluster. *Physical Review Letters* **113**, 251301 (2014). [1402.4119](#).
- [52] Bulbul, E. *et al.* Detection of an Unidentified Emission Line in the Stacked X-Ray Spectrum of Galaxy Clusters. *ApJ* **789**, 13 (2014). [1402.2301](#).
- [53] Dodelson, S. & Widrow, L. M. Sterile neutrinos as dark matter. *Physical Review Letters* **72**, 17–20 (1994). [hep-ph/9303287](#).
- [54] Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., Bullock, J. S. & Primack, J. R. The Cores of Dark Matter-dominated Galaxies: Theory versus Observations. *ApJ* **502**, 48–58 (1998). [astro-ph/9708176](#).
- [55] Navarro, J. F., Frenk, C. S. & White, S. D. M. The Structure of Cold Dark Matter Halos. *ApJ* **462**, 563 (1996). [astro-ph/9508025](#).
- [56] Moore, B., Quinn, T., Governato, F., Stadel, J. & Lake, G. Cold collapse and the core catastrophe. *MNRAS* **310**, 1147–1152 (1999). [astro-ph/9903164](#).
- [57] Bergström, L., Edsjö, J. & Gondolo, P. Indirect detection of dark matter in km-size neutrino telescopes. *Physical Reviews D* **58**, 103519 (1998). [hep-ph/9806293](#).
- [58] de Blok, W. J. G. The Core-Cusp Problem. *Advances in Astronomy* **2010**, 5 (2010). [0910.3538](#).
- [59] Milgrom, M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *ApJ* **270**, 365–370 (1983).
- [60] Milgrom, M. A Modification of the Newtonian Dynamics - Implications for Galaxy Systems. *ApJ* **270**, 384 (1983).

- [61] McGaugh, S. S. The Baryonic Tully-Fisher Relation of Gas-rich Galaxies as a Test of Λ CDM and MOND. *AJ* **143**, 40 (2012). [1107.2934](#).
- [62] Weinberg, S. *The quantum theory of fields*, vol. 2 (Cambridge university press, 1996).
- [63] Rodrigues, D. C., Letelier, P. S. & Shapiro, I. L. Galaxy rotation curves from general relativity with renormalization group corrections. *JCAP* **4**, 20 (2010). [0911.4967](#).
- [64] Rodrigues, D. C., de Oliveira, P. L., Fabris, J. C. & Gentile, G. Modified gravity models and the central cusp of dark matter haloes in galaxies. *MNRAS* **445**, 3823–3838 (2014). [1409.7524](#).
- [65] Wald, R. M. *General relativity* (University of Chicago press, 2010).
- [66] Hobson, M. P., Efstathiou, G. P. & Lasenby, A. N. *General relativity: an introduction for physicists* (Cambridge University Press, 2006).
- [67] d’Inverno, R. A. & Einstein, A. *Introduction Einstein’s Relativity* (Clarendon Press, 1992).
- [68] Plebanski, J. & Krasinski, A. *An introduction to general relativity and cosmology* (Cambridge University Press, 2006).
- [69] Rindler, W. *Relativity: special, general, and cosmological*, vol. 1 (2001).
- [70] Einstein, A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik* **322**, 891–921 (1905).
- [71] Einstein, A. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik* **322**, 132–148 (1905).
- [72] Einstein, A. Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? *Annalen der Physik* **323**, 639–641 (1905).
- [73] Einstein, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 844–847. 844–847 (1915).
- [74] Einstein, A. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 778–786. 778–786 (1915).
- [75] Mach, E. *The science of mechanics: A critical and historical account of its development* (1960).
- [76] Dicke, R. H. The Sun’s Rotation and Relativity. *Nat* **202**, 432–435 (1964).
- [77] Mehra, J. *Einstein, Hilbert, and the theory of gravitation* (1974).
- [78] Bardeen, J. M. A Variational Principle for Rotating Stars in General Relativity. *ApJ* **162**, 71 (1970).
- [79] Carrick, J. D. & Cooperstock, F. I. General relativistic dynamics applied to the rotation curves of galaxies. *Astrophys.Space Sci* **337**, 321–329 (2012). [1101.3224](#).

- [80] Arfken, G. B. & Weber, H. J. *Mathematical Methods For Physicists International Student Edition* (Academic press, 2005).
- [81] Bonnor, W. B. A rotating dust cloud in general relativity. *Journal of Physics A Mathematical General* **10**, 1673–1677 (1977).
- [82] Gregory, P. *Bayesian logical data analysis for the physical sciences*, vol. 10 (Cambridge University Press Cambridge, UK, 2005).
- [83] Gentile, G., Salucci, P., Klein, U., Vergani, D. & Kalberla, P. The Cored distribution of dark matter in spiral galaxies. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.* **351**, 903 (2004). [astro-ph/0403154](#).
- [84] Oh, S.-H., de Blok, W. J. G., Walter, F., Brinks, E. & Kennicutt, R. C., Jr. High-Resolution Dark Matter Density Profiles of THINGS Dwarf Galaxies: Correcting for Noncircular Motions. *AJ* **136**, 2761–2781 (2008). [0810.2119](#).

Apêndice A

Código da Análise Numérica

Este apêndice é destinado ao programa feito com base no software Mathematica 9. Compreende os testes observacionais para os modelos BG e CT. Neste apêndice encontra-se apenas o programa relativo à ESO 116-G12 para ambos modelos.

A.1 Balasin e Grumiller

Iniciamos com a aquisição dos dados referentes à curva de rotação observacional

```
Dist=15.3 10^3;
datavobs=Import[datapath["ESO116G12vobs.txt"],"Table"];
PRadVobs=Transpose[datavobs][[1]]*Dist\[Pi]/(180 3600) ;
Vobs=Table[{PRadVobs[[i]],datavobs[[i, 2]]},{i,1,Dimensions[datavobs][[1]]}
Rmax=Vobs[[Dimensions[Vobs][[1]],1]];
VobsWError=Table[{{PRadVobs[[i]],datavobs[[i, 2]]},ErrorBar[datavobs[[i, 4]]]},
{i, 1, Dimensions[datavobs][[1]]}].
```

Em seguida obtemos os potenciais gravitacionais e as curvas de rotação para a parte estelar e para o gás

```
GAS
dataHI=Import[datapath["dataESO116G12gas.txt"],"Table"];
(*Unities:''(Angular Radius)XMsun/pc^2*)

Gfactor=1.33;
PRadHI=Transpose[dataHI][[1]]*Dist\[Pi]/(180 3600) ;
\[Sigma]gas=Table[{PRadHI[[i]],Gfactor*10^6*dataHI[[i, 2]]},
{i,1,Dimensions[dataHI][[1]]}];
I\[Sigma]gas=Interpolation[\[Sigma]gas,Method->Spline]
```

```
RmaxHI=\[Sigma]gas[[Dimensions\[Sigma]gas][[1]],1];
```

```
\[CapitalPhi]gasESO[R_-]:=-G0 NIntegrate[I\[Sigma]gas[Rlinha](4 EllipticK[(4RRlinha)/
(R^2+Rlinha^2 + 2RRlinha)])/(R+Rlinha)Rlinha,{Rlinha,0,RmaxHI},
Exclusions->{R==Rlinha},WorkingPrecision->20,PrecisionGoal->6,AccuracyGoal->6]
```

```
points=Table[i,{i,0,RmaxHI,RmaxHI/100}];
```

```
Timing[table\[CapitalPhi]gasESO =Re[Table[{R,\[CapitalPhi]gasESO[R]},{R,points}]]];]
points=.
```

```
I\[CapitalPhi]gasESO=Interpolation[table\[CapitalPhi]gasESO]
```

```
VgasESO[R_]=Piecewise[{{kpc Sqrt[I\[CapitalPhi]gasESO'[R]R},
I\[CapitalPhi]gasESO'[R]>0},{-kpc Sqrt[-I\[CapitalPhi]gasESO'[R]R],
I\[CapitalPhi]gasESO'[R]<0}}];
```

```
VVgasESO[R_]=I\[CapitalPhi]gasESO'[R]R kpc^2;
```

STARS

```
\[Sigma]stars[R_]=Mstars/(2\[Pi]RD^2)E^(-R/RD);
RD=5.4/3.2>(*kpc. 3.2 is the conversion factor from Roptical to RD.*)
```

```
\[CapitalPhi]starsESO[R_-]:=-G0 Mstars NIntegrate[\[Sigma]stars[Rlinha]/
Mstars(4 EllipticK[(4RRlinha)/(R^2+Rlinha^2+2RRlinha)])/(R+Rlinha)Rlinha,
{Rlinha,0,\[Infinity]},Exclusions->{R==Rlinha},
```

```
WorkingPrecision->20,PrecisionGoal->6,AccuracyGoal->6]
```

```
points=Table[i,{i,0,Rmax,Rmax/100}];
```

```
Timing[table\[CapitalPhi]starsESO=Re[Table[{R,\[CapitalPhi]starsESO[R]/Mstars},
{R,points}]]];]
points =.
```

```
I\[CapitalPhi]starsESO=Interpolation[table\[CapitalPhi]starsESO,Method->Spline]
```

```
VstarsESO[R_]=kpc Sqrt[Mstars I\[CapitalPhi]starsESO'[R]R];
```

```
VVstarsESO[R_]=Mstars kpc^2 I\[CapitalPhi]starsESO'[R]R.
```

Em seguida fazemos o ajuste do modelo em relação aos dados observacionais.

```
Subscript[\[Chi],i_]:= (v[Vobs[[i,1]]]-Vobs[[i,2]])/datavobs[[i,4]];
Schi=\!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\),\(\i =1\),
```

```

\(\(Dimensions[Vobs]\)\(\([\]\(1\)\([\]\)\)\))
\*SuperscriptBox[\(\(\*SubscriptBox[\(\([\Chi]\)\),\(\(i\)\)\)\),\(\(2\)\)\);

NMresult=NMinimize[{Schi,\[Alpha]>0,r0>0,V0>0},{\[Alpha],50,200},{r0,0.5,5},
{V0,200,300}],WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,
AccuracyGoal->\[Infinity],MaxIterations->10000]

NMresult2=NMinimize[{Schi,\[Alpha]>0,r0>0,V0>0},{\[Alpha],50,200},{r0,0.5,5},
{V0,200,300}],WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,
AccuracyGoal->\[Infinity],MaxIterations->10000,Method->SimulatedAnnealing]

NMresult3=NMinimize[{Schi,\[Alpha]>0,r0>0,V0>0},{\[Alpha],50,200},{r0,0.5,5},
{V0,200,300}],WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,
AccuracyGoal->\[Infinity],MaxIterations->10000,Method->NelderMead]

NMresult4=NMinimize[{Schi,\[Alpha]>0,r0>0,V0>0},{\[Alpha],50,200},{r0,0.5,5},
{V0,200,300}],WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,
AccuracyGoal->\[Infinity],MaxIterations->10000,Method->DifferentialEvolution]

NMresult5=NMinimize[{Schi,\[Alpha]>0,r0>0,V0>0},{\[Alpha],50,200},{r0,0.5,5},
{V0,200,300}],WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,
AccuracyGoal->\[Infinity],MaxIterations->10000,
Method->{"DifferentialEvolution","RandomSeed"->2}].

```

De posse dos parâmetros obtemos a densidade de matéria e em seguida o potencial pseudo newtoniano

```

\[CapitalPhi]eso[R_]:=-G0 NIntegrate[\[Rho][Rlinha,zlinha](4EllipticK[(4RRlinha)/(R^2
+Rlinha^2+2RRlinha+zlinha^2))]/Sqrt[(R^2)+(Rlinha^2)+2RRlinha+(zlinha^2)]Rlinha,
{Rlinha,0,\[Infinity]},{zlinha,-r0,r0},Exclusions->{R==Rlinha},WorkingPrecision->20,
PrecisionGoal->5,AccuracyGoal->\[Infinity]]

```

```

points=Table[i,{i,0,Rmax,Rmax/100}];
Timing[table\[CapitalPhi]eso=Re[Table[{R,\[CapitalPhi]eso[R]},{R,points}]];]
points=.

```

```

I\[CapitalPhi]eso=Interpolation[table\[CapitalPhi]eso,Method->Spline]

```

```

dataVobsBG=Table[{Vobs[[i,1]],Sqrt[I\[CapitalPhi]eso'[Vobs[[i,1]]Vobs[[i,1]]]},
{i,1,Dimensions[Vobs][[1]]}].

```

Agora obtendo as barras de erro dos parâmetros para o modelo BG, aqui ilustraremos apenas o parâmetro R , que no programa designamos por α .

```
NMaximize[{\[Alpha], Schi<=First[NMresult]+\[CapitalDelta]
\[Chi]2Table[[1, freeparameters]]},
{{\[Alpha], 0.9\[Alpha]sol, 1.1\[Alpha]sol}, {r0, 0.9r0sol, 1.1r0sol},
{V0, 0.9V0sol, 1.1V0sol}}, WorkingPrecision->20,
PrecisionGoal->7, AccuracyGoal->7, MaxIterations->500, Method->DifferentialEvolution]
```

```
\[Sigma]\[Alpha]1=First[%]-\[Alpha]sol
```

```
NMinimize[{\[Alpha], Schi<=First[NMresult]+\[CapitalDelta]
\[Chi]2Table[[1, freeparameters]]}, {{\[Alpha], 0.9\[Alpha]sol, \[Alpha]sol},
{r0, 0.9r0sol, 1.1r0sol}, {V0, 0.9 V0sol, 1.1V0sol}}, WorkingPrecision->20,
PrecisionGoal->7, AccuracyGoal->7, MaxIterations->500, Method->DifferentialEvolution]
```

```
\[Sigma]\[Alpha]2=\[Alpha]sol-First[%].
```

Em seguida geramos as barras de erro para a curva pseudo-newtoniana

```
\[CapitalPhi]ESO[R_,\[Alpha]_,r0_,V0_] := -2 G0 NIntegrate[\[Rho][Rlinha,zlinha,
\[Alpha],r0,V0](4 EllipticK[(4RRlinha)/(R^2+Rlinha^2+2RRlinha+zlinha^2)]/Sqrt[(R^2)
+(Rlinha^2)+2RRlinha+(zlinha^2)]Rlinha, {Rlinha, 0, \[Infinity]}},
{zlinha, 0, r0}, Exclusions->{R==Rlinha}, WorkingPrecision->20,
PrecisionGoal->5, AccuracyGoal->\[Infinity]]
```

```
pointsR=Table[i, {i, 0, Rmax, Rmax/100}];
pointsV0=Table[i, {i, V0sol-\[Sigma]V02, V0sol+
\[Sigma]V01, (V0sol+\[Sigma]V01-(V0sol-\[Sigma]V02))/5}];
points\[Alpha]=Table[i, {i, \[Alpha]sol-\[Sigma]\[Alpha]2, \[Alpha]sol+
\[Sigma]\[Alpha]1, (\[Alpha]sol+\[Sigma]\[Alpha]1-(\[Alpha]sol-\[Sigma]\[Alpha]2))/5}];
pointsr0 =Table[i, {i, r0sol-\[Sigma]r02, r0sol+\[Sigma]r01, (r0sol+
\[Sigma]r01-(r0sol-\[Sigma]r02))/5}];
ParallelEvaluate[Off[NIntegrate::precw]];
ParallelEvaluate[Off[NIntegrate::zeroregion]];
ParallelEvaluate[Off[NIntegrate::inumri]];
Timing[table\[CapitalPhi]ESO=ParallelTable[{R, \[Alpha], r0, V0},
Re\[CapitalPhi]ESO[R, \[Alpha], r0, V0]}], {R, pointsR}, {\[Alpha], points\[Alpha]},
{r0, pointsr0}, {V0, pointsV0}]
```

```
I\[Phi]starESO=Interpolation[table\[CapitalPhi]ESOFlattened]
```

```
VPpseudoNewt[R_, \[Alpha]_, r0_, V0_] = Sqrt[D[I\[Phi]starESO[R, \[Alpha], r0, V0], R]R];
```

```
pseudodataMax = Table[{NMaximize[{VPpseudoNewt[dataVobsBG[[i, 1]], \[Alpha], r0, V0],
Schi <= First[NMresult] + \[CapitalDelta] \[Chi]^2 Table[[1, freeparameters]]}],
{{\[Alpha], 0.9 \[Alpha]sol, 1.1 \[Alpha]sol}, {r0, 0.9r0sol, 1.1r0sol},
{V0, 0.9V0sol, 1.1V0sol}}, Method -> DifferentialEvolution}],
{i, 1, Dimensions[dataVobsBG][[1]]}]
```

```
pseudodataMin = Table[{NMinimize[{VPpseudoNewt[dataVobsBG[[i, 1]], \[Alpha], r0, V0],
Schi <= First[NMresult] + \[CapitalDelta] \[Chi]^2 Table[[1, freeparameters]]}],
{{\[Alpha], 0.9 \[Alpha]sol, 1.1 \[Alpha]sol}, {r0, 0.9r0sol, 1.1r0sol},
{V0, 0.9V0sol, 1.1V0sol}}, Method -> DifferentialEvolution}],
{i, 1, Dimensions[dataVobsBG][[1]]}].
```

Agora, simetrizamos as barras de erro para a curva pseudo-newtoniana

```
ErrorTableMaxsimetrico = Table[{If[Abs[-dataVobsBG[[i, 2]] + pseudodataMinFlattened[[i, 1]]] >
Abs[pseudodataMaxFlattened[[i, 1]] - dataVobsBG[[i, 2]]],
Abs[-dataVobsBG[[i, 2]] + pseudodataMinFlattened[[i, 1]]],
Abs[pseudodataMaxFlattened[[i, 1]] - dataVobsBG[[i, 2]]]}], {i, 1, Length[dataVobsBG]}].
```

Com os erros simetrizados realizamos o ajuste da curva bariônica em relação à curva pseudo-newtoniana

```
VVobsBG[R_] = VVgasESO[R] + VVstarsESO[R];
Subscript[\[Chi], i_] := (Sqrt[VVobsBG[dataVobsBG[[i, 1]]] - dataVobsBG[[i, 2]]) /
ErrorTableMaxsimetrico[[i, 1]];
```

```
Schi = \!\(\*UnderoverscriptBox[\(\[Sum]\), \{i=1\},
\(\(Dimensions[dataVobsBG]\)\)\(\(\)\(1\)\(\)\)\)]
\!\*SuperscriptBox[\(\(*SubscriptBox[\(\[Chi]\), \{i\}\)\]\), \{2\}\)\];
```

```
ESOresult = NMinimize[{Schi, 8.61534*10^9 > Mstars > 2.3931504616131897*10^9}, {Mstars},
WorkingPrecision -> 30, PrecisionGoal -> 15, AccuracyGoal -> \[Infinity], MaxIterations -> 10000]
```

```
ESOresult2 = NMinimize[{Schi, 8.61534*10^10 > Mstars > 2.3931504616131897*10^9}, {Mstars},
WorkingPrecision -> 30, PrecisionGoal -> 15, AccuracyGoal -> \[Infinity],
MaxIterations -> 10000, Method -> SimulatedAnnealing]
```

```
ESOresult3 = NMinimize[{Schi, 8.61534*10^11 > Mstars > 2.3931504616131897*10^9}, {Mstars},
WorkingPrecision -> 30, PrecisionGoal -> 15, AccuracyGoal -> \[Infinity],
MaxIterations -> 10000, Method -> NelderMead]
```

```
ES0result4=NMinimize[{Schi,8.61534*10^9>Mstars>2.3931504616131897*10^9},{Mstars},
WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,AccuracyGoal->\[Infinity],
MaxIterations->10000,Method->DifferentialEvolution]
```

```
ES0result5=NMinimize[{Schi,8.61534*10^9>Mstars>2.3931504616131897*10^9},{Mstars},
WorkingPrecision->30,PrecisionGoal->15,AccuracyGoal->\[Infinity],
MaxIterations->10000,Method->{"DifferentialEvolution","RandomSeed"->2}].
```

A.2 Cooperstock e Tieu

Para o modelo CT a parte do programa que faz a análise bariônica, estrelas e gás, e o ajuste do modelo CT à curva de rotação observacional é mesma que no modelo BG. Porém na computação do potencial pseudo-newtoniano realizamos uma mudança na densidade prevista pelo modelo CT conforme explicado no capítulo 7.

```
\[Sigma]discreto=Table[{r,\[Rho][r,0]},{r,0.1,Rmax,Rmax/100}]
```

```
\[Sigma]discretoEnd=Table[{\[Sigma]discreto[[i,1]],\[Sigma]discreto[[i,2]]},{i,
Dimensions[\[Sigma]discreto][[1]],
Dimensions[\[Sigma]discreto][[1]]}]
```

```
Rd = 1.7;
```

```
{a} = .
```

```
FindFit[\[Sigma]discretoEnd,a E^(-R/Rd),{a},R]
```

```
{a}= {a}/.%
```

```
Plot[a E^(-R/Rd),{R,Rmax,Rmax+5},PlotRange->All]
```

```
\[Rho]extended[R_,z_]=a E^(-R/Rd)Sum[E^(-kn[[i]]z),{i,1,10}]/10
```

```
\[Rho]total[R_,z_]= Piecewise[{{\[Rho][R,z],R<Rmax},{\[Rho]extended[R,z],
R >= Rmax}}].
```

O restante da análise para o modelo CT segue análoga ao modelo BG com exceção das barras de erro da curva pseudo-newtoniana, que não foram obtidas nesta análise conforme explicado no capítulo 7.