



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**VINICIUS PIRES FALCHETTO**

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO E O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS  
PARA PROBLEMAS DE LAPLACE**

VITÓRIA

2015



**VINICIUS PIRES FALCHETTO**

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E O  
MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA PROBLEMAS DE LAPLACE**

Dissertação apresentado ao Departamento de Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO

VITÓRIA

2015

## AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem devo todas as conquistas de minha vida.

Aos meus Pais que sempre me amaram e me deram todas as condições e incentivos para que eu esteja aqui hoje.

Ao meu irmão, pelas risadas.

A Renata pelo amor, pela preocupação e pela compreensão.

Aos amigos, colegas de trabalho e de Mestrado, pela parceria e pelo incentivo.

A Technip, pela liberação para as aulas e demais compromissos com o Mestrado durante o horário de trabalho.

Ao meu orientador Prof. Dr. CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER NETO, pela oportunidade e pela orientação.

Aos demais professores e funcionários do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo.

*“Quem já passou por essa vida e não viveu,  
pode ser mais, mas sabe menos do que eu.”*

Vinicius de Moraes

## RESUMO

Neste trabalho comparam-se os desempenhos numéricos dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e Método das Soluções Fundamentais Clássico (MSF) na solução de problemas governados pela Equação de Laplace. São métodos similares, que usam a idéia de uma solução fundamental, mas também apresentam algumas distinções importantes. É possível fazer com que estas diferentes técnicas interajam na solução de alguns problemas mais complexos, o que implica em maior conhecimento das particularidades do MSF, uma vez que o MEC é atualmente uma técnica muito mais conhecida, de reconhecida eficiência em diversas aplicações importantes. Já o MSF experimenta uma redescoberta a partir da intensificação das técnicas de discretização sem malha. Este trabalho compara a precisão dos dois métodos e examina algumas particularidades numéricas de ambos em exemplos simples, mas importantes para a identificação do alcance de cada técnica.

Palavra chave: Método dos Elementos de Contorno, Método das soluções fundamentais, Problemas de Laplace, Comparação entre métodos.

## ABSTRACT

In this work is compared the numerical performance of the Boundary Elements Method (BEM) and the classic Method of Fundamental Solutions (MFS) in solution of problems governed by Laplace's Equation. They are similar methods, that use the idea of a fundamental solution, but shows some important distinctions. Its possible to make these different methods interact in the solution of some more complex problems, what implies in more knowledge of MFS particularities, once the BEM is currently a method much more known, of notorious efficiency in diverse important applications. The MFS however, faces a rediscovery from the intensification of the meshless discretization technics. This work compares the accuracy of both methods and examines some particularities of each method in simple, but important problems for the identification of the reach of each technic.

Keywords: Boundary Elements Method, Method of Fundamental Solutions, Laplace's Problems, Methods comparison.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 2.1 – Distancia euclidiana entre o ponto campo e o ponto fonte. ....   | 9  |
| Figura 2.2 – Domínio $\Omega(x)$ com isolamento na região carregada.....  | 14 |
| Figura 2.3 – Funções de forma $\phi_k$ .....  | 15 |
| Figura 3.1 – Disposição dos pontos fontes e de colocação na geometria do problema<br>(Cordeiro. S.G.F, Leonel. E.D – 2014) .....                          | 18 |
| Figura 4.1 – Quantidade e disposição dos pontos colocacionais na discretização de<br>malha com nós duplos. ....   | 23 |
| Figura 4.2 – Disposição dos pontos colocacionais na discretização de malha sem<br>nós duplos. ....  | 23 |
| Figura 4.3 – Disposição dos pontos fontes no arranjo circular. ....   | 24 |
| Figura 4.4 – Disposição dos pontos fontes no arranjo conforme. ....   | 25 |
| Figura 4.5 – Condições de contorno para o Problema 1 – Barra Tracionada. ....   | 27 |
| Figura 4.6 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjo circular.....                                       | 28 |
| Figura 4.7 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjo conforme. ....                                      | 28 |
| Figura 4.8 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Circular.....   | 29 |
| Figura 4.9 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 - Malha com nós<br>duplos – Arranjo Conforme. ....  | 29 |
| Figura 4.10 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjos circulares com R min, R=1,5, R=1,9 e R=2,25. .... | 31 |
| Figura 4.11 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25.....          | 32 |
| Figura 4.12 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjos circulares R min, R=3,5, R=6 e R=11.....          | 33 |
| Figura 4.13 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com<br>nós duplos – Arranjos conformes com d=2,5, d=5 e d=10.....              | 33 |
| Figura 4.14 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem<br>nós duplos – Arranjo Circular.....                                      | 35 |
| Figura 4.15 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem<br>nós duplos – Arranjo Conforme.....                                      | 36 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.16 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.....  | 36 |
| Figura 4.17 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme. ....   | 37 |
| Figura 4.18 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R$ min, $R=1,5$ , $R=1,9$ e $R=2,25$ . ....                 | 39 |
| Figura 4.19 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=0,5$ , $d=0,9$ e $d=1,25$ .....                            | 39 |
| Figura 4.20 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R=3,5$ , $R=6$ e $R=11$ . ....                              | 40 |
| Figura 4.21 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=2,5$ , $d=5$ e $d=10$ .....                                | 40 |
| Figura 4.22 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com raio mínimo. .... | 42 |
| Figura 4.23 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=1,5$ . ....    | 42 |
| Figura 4.24 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=1,9$ . ....    | 43 |
| Figura 4.25 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=2,25$ . ....   | 43 |
| Figura 4.26 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=3,5$ . ....    | 44 |
| Figura 4.27 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=6$ . ....      | 44 |
| Figura 4.28 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com $R=11$ . ....     | 45 |
| Figura 4.29 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com $d=0,5$ . ....    | 45 |



|  |    |
|--|----|
| Figura 4.30 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com $d=0,9$ . | 46 |
| Figura 4.31 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme $d=1,25$ .    | 46 |
| Figura 4.32 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com $d=2,5$ . | 47 |
| Figura 4.33 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com $d=5$ .   | 47 |
| Figura 4.34 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com $d=10$ .  | 48 |
| Figura 4.35 – Condições de contorno para o Problema 2 – Problema de potencial com condições de contorno não constantes.  | 49 |
| Figura 4.36 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.  | 50 |
| Figura 4.37 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.  | 50 |
| Figura 4.38 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.  | 51 |
| Figura 4.39 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.  | 51 |
| Figura 4.40 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjos circulares com $R$ min, $R=1,5$ , $R=1,9$ e $R=2,25$ .              | 53 |
| Figura 4.41 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjos conformes com $d=0,5$ , $d=0,9$ e $d=1,25$ .                        | 54 |
| Figura 4.42 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjos circulares com $R=3,5$ , $R=6$ e $R=11$ .                           | 55 |
| Figura 4.43 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjos conformes com $d=2,5$ , $d=5$ e $d=10$ .                            | 56 |
| Figura 4.44 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo circular.  | 57 |
| Figura 4.45 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo conforme.  | 58 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 4.46 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo circular.....  | 58 |
| Figura 4.47 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo conforme.....  | 59 |
| Figura 4.48 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R_{min}$ , $R=1,5$ , $R=1,9$ e $R=2,25$ . ....            | 61 |
| Figura 4.49 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=0,5$ , $d=0,9$ e $d=1,25$ .....                          | 61 |
| Figura 4.50 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R=3,5$ , $R=6$ e $R=11$ . ....                            | 62 |
| Figura 4.51 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=2,5$ , $d=5$ e $d=10$ .....                              | 63 |
| Figura 4.52 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R$ mínimo..... | 64 |
| Figura 4.53 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=1,5$ . ....  | 65 |
| Figura 4.54 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=1,9$ . ....  | 65 |
| Figura 4.55 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=2,25$ . .... | 66 |
| Figura 4.56 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=3,5$ . ....  | 66 |
| Figura 4.57 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=6$ . ....    | 67 |
| Figura 4.58 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com $R=11$ . ....   | 67 |
| Figura 4.59 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=0,5$ . ....  | 68 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 4.60 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=0,9$ .  | 68 |
| Figura 4.61 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=1,25$ . | 69 |
| Figura 4.62 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=2,5$ .  | 69 |
| Figura 4.63 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=5$ .    | 70 |
| Figura 4.64 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com $d=10$ .   | 70 |
| Figura 4.65 – Condições de contorno para o Problema 3 – Transferência de calor em placa plana.  | 71 |
| Figura 4.66 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.   | 72 |
| Figura 4.67 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.   | 73 |
| Figura 4.68 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.   | 76 |
| Figura 4.69 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.   | 76 |
| Figura 4.70 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R$ min, $R=1,5$ , $R=1,9$ e $R=2,25$ .               | 78 |
| Figura 4.71 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=0,5$ , $d=0,9$ e $d=1,25$ .                         | 78 |
| Figura 4.72 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com $R=3,5$ , $R=6$ e $R=11$ .                            | 80 |
| Figura 4.73 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com $d=2,5$ , $d=5$ e $d=10$ .                             | 80 |
| Figura 4.74 – Comportamento da função logarítmica neperiana.  | 84 |
| Figura A.1 – Condições de contorno para o Problema 1 – Barra Tractionada.   | 92 |
| Figura B.1 – Condições de contorno para o Problema 3 – Transferência de calor em placa plana.   | 95 |

Figura B.2 – Condições de contorno do Problema 3 após substituição de  $u$  por  $\theta$ . .96

## LISTA DE TABELAS

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Raio mínimo do arranjo circular para o numero de pontos colocacionais.<br>.....                         | 25 |
| Tabela 2 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Circular.....   | 30 |
| Tabela 3 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Conforme. ....  | 30 |
| Tabela 4 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós duplos<br>– Arranjo Circular. ....      | 30 |
| Tabela 5 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós duplos<br>– Arranjo Conforme.....       | 31 |
| Tabela 6 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha com nós duplos –<br>Arranjo Circular. ....              | 34 |
| Tabela 7 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha com nós duplos –<br>Arranjo Conforme.....               | 35 |
| Tabela 8 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós<br>duplos – Arranjo Circular.....   | 37 |
| Tabela 9 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós<br>duplos – Arranjo Conforme. ....  | 38 |
| Tabela 10 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós<br>duplos – Arranjo Circular.....      | 38 |
| Tabela 11 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós<br>duplos – Arranjo Conforme. ....     | 38 |
| Tabela 12 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha sem nós duplos –<br>Arranjo Circular. ....             | 41 |
| Tabela 13 – Singularidades na solução do Problema 1 - Malha sem nós duplos –<br>Arranjo Conforme.....              | 41 |
| Tabela 14 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Circular.....  | 52 |
| Tabela 15 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Conforme. .... | 52 |
| Tabela 16 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós<br>duplos – Arranjo Circular.....      | 52 |
| Tabela 17 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 - Malha com nós duplos<br>– Arranjo Conforme.....      | 53 |

|   |    |
|---|----|
| Tabela 18 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.....              | 56 |
| Tabela 19 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.....              | 57 |
| Tabela 20 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.....  | 59 |
| Tabela 21 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme. .... | 60 |
| Tabela 22 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.....      | 60 |
| Tabela 23 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.....      | 60 |
| Tabela 24 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular. ....             | 63 |
| Tabela 25 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.....              | 64 |
| Tabela 26 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.....  | 73 |
| Tabela 27 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme. .... | 74 |
| Tabela 28 – Singularidades na solução do Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular. ....             | 74 |
| Tabela 29 – Singularidades na solução do Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.....              | 75 |
| Tabela 30 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.....  | 77 |
| Tabela 31 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme. .... | 77 |
| Tabela 32 – Singularidades na solução do Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular. ....             | 81 |
| Tabela 33 – Singularidades na solução do Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.....              | 82 |

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\Omega$  – domínio bidimensional;

$X$  – posição do ponto colocacional;

$x_1$  – direção do eixo das abscissas;

$x_2$  – direção do eixo das ordenadas;

$u$  – potencial;

$\Gamma$  – contorno;

$q$  – derivada normal ao contorno do potencial, fluxo;

$\eta$  – direção normal ao contorno;

$n$  – vetor unitário normal ao contorno;

$\xi$  – posição do ponto fonte;

$r$  – distancia euclidiana entre um ponto colocacional e um ponto fonte;

$u^*$  – solução fundamental;

$q^*$  - derivada normal ao contorno da solução fundamental;

$N$  – números de pontos colocacionais, número de pontos fontes;

$\phi$  – funções de forma;

$h$  - coeficiente do potencial no sistema de equações

$g$  – coeficiente do fluxo no sistema de equações;

$H$  – matriz dos coeficientes do potencial;

$G$  – matriz dos coeficientes do fluxo;

$U$  – vetor dos potenciais;

$Q$  – vetor dos fluxos;

$c$  – coeficiente de influência; vetor dos coeficientes de influência;

$A$  – matriz das soluções fundamentais;

$y$  – vetor das condições das grandezas prescritas;

$d$  – distancia normal entre os pontos fontes e o contorno no arranjo conforme;

$R$  – raio do circulo fictício formado pelos pontos fontes no arranjo circular;

$E$  – Erro percentual médio;

$a$  – valor analítico da solução do problema em um ponto;

$v$  – valor encontrado na solução numérica do problema em um ponto.



## SUMÁRIO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 - COMENTÁRIOS PRELIMINARES .....   | 1         |
| 1.2 - O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS.....  | 4         |
| 1.3 - OBJETIVO.....  | 6         |
| <b>CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MEC.....</b>  | <b>8</b>  |
| 2.1 - A EQUAÇÃO DE LAPLACE.....  | 8         |
| 2.2 - REPRESENTAÇÃO INTEGRAL .....   | 10        |
| 2.3 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL.....   | 13        |
| <b>CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MSF .....</b>                                       | <b>18</b> |
| <b>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS .....</b>   | <b>22</b> |
| 4.1 - INTRODUÇÃO.....  | 22        |
| 4.1.1 - PONTOS COLOCACIONAIS.....  | 22        |
| 4.1.2 - PONTOS FONTES .....  | 24        |
| 4.1.3 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....   | 26        |
| 4.2 - PROBLEMA 1 – BARRA TRACIONADA.....   | 27        |
| 4.2.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS.....                                      | 27        |
| 4.2.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS .....                                     | 35        |
| 4.2.3 - COMPARAÇÃO ENTRE AS DISCRETIZAÇÕES COM E SEM NÓS<br>DUPLOS.....                    | 41        |
| 4.3 - PROBLEMA 2 – PROBLEMA DE POTENCIAL COM CONDIÇÕES DE<br>CONTORNO NÃO CONSTANTES ..... | 49        |
| 4.3.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS.....                                      | 49        |
| 4.3.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS .....                                     | 57        |
| 4.3.3 - COMPARAÇÃO ENTRE AS DISCRETIZAÇÕES COM E SEM NÓS<br>DUPLOS.....                    | 64        |
| 4.4 - PROBLEMA 3 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA PLANA.....                              | 71        |
| 4.4.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS.....                                      | 72        |
| 4.4.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS .....                                     | 75        |
| 4.5 - COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE OS RESULTADOS.....  | 82        |
| <b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO.....</b>   | <b>85</b> |
| <b>CAPÍTULO 6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>  | <b>88</b> |
| <b>APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 1 – BARRA<br/>TRACIONADA.....</b>            | <b>92</b> |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 3 – TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA PLANA.....</b> | <b>95</b> |
|--|-----------|

# **CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO**

## **1.1 - COMENTÁRIOS PRELIMINARES**

De modo geral, o propósito da engenharia consiste no estudo e solução de problemas físicos reais. Para tanto, estes são idealizados na forma de modelos, adotando-se uma série de simplificações. Os modelos criados podem ser estudados de duas formas: a experimental ou a matemática.

A solução por modelos experimentais usualmente se dá pela reprodução do problema, ou de parte dele, e os dados coletados servem de base para a solução do problema. Tais modelos foram, por muito tempo, as ferramentas mais empregadas na busca de soluções de engenharia; no entanto, a dificuldade da reprodução dos problemas na forma de experimentos se tornou excessiva em muitos casos, dependendo da complexidade, e mesmo proibitiva em função dos custos de execução dos mesmos.

Assim que o emprego de computadores se tornou acessível, o uso de modelos matemáticos para o estudo desses problemas se tornou a ferramenta dominante no desenvolvimento de soluções na engenharia. Antes limitados a problemas simples onde eram aplicáveis soluções analíticas, os modelos matemáticos passaram a ser resolvidos através de métodos numéricos que, graças a pesquisas nas últimas décadas, os têm transformado em uma poderosa ferramenta na resolução de problemas de engenharia, em destaque, aqueles governados por equações diferenciais parciais e não lineares.

Com auxílio de computadores, estes métodos tornaram a resolução dos mais variados tipos e complexidades de problemas de engenharia acessível. Conforme os recursos computacionais disponíveis, os métodos numéricos permitem a solução de equações diferenciais com grau de aproximação bastante satisfatório. Por outro lado, as pesquisas no meio acadêmico e industrial avançam tornando-os cada vez mais precisos e capazes de processar grande quantidade de informação, em tempos cada vez menores.

Os principais métodos numéricos trabalham com a ideia de discretização, ou seja, a substituição de um domínio matemático contínuo por um conjunto de elementos

representativos do mesmo, comumente chamado de malha. De forma geral, quanto maior o número de elementos em uma malha, maior será a precisão do resultado e, em contrapartida, também o custo computacional.

Os métodos numéricos que obtiveram os maiores destaques ao longo do tempo são:

*Método das Diferenças Finitas (MDF);*

*Método dos Elementos Finitos (MEF);*

*Método dos Elementos de Contorno (MEC);*

*Método dos Volumes Finitos (MVF).*

Dentre as pesquisas modernas sobre métodos numéricos ou técnicas de aproximação, procedimentos que empregam uma função escalar que depende de múltiplas variáveis, como as funções de base radial, têm sido dos mais comuns e bem sucedidos para aplicação em engenharia. Tais funções encontram respaldo matemático eficiente sob a ótica da teoria moderna da aproximação, sobretudo quando se trata de aproximar dados esparsos em várias dimensões (Buhmann, 2003, Fasshauer, 2007).

A popularidade destas funções está relacionada ao fato de oferecerem uma interessante forma de superar alguns sérios problemas no âmbito da abordagem de métodos de discretização de domínio, como o Método de Elementos Finitos (MEF), particularmente a questão da geração de malhas para representar geometrias complicadas. Além disso, a reestruturação da malha através de algum método adaptativo, visando à otimização da resposta, encontra dificuldades por conta da conectividade existente entre os elementos (Bertolani et al, 2010).

Por conta da relativa modernidade desta abordagem, existem ainda muitas pesquisas em andamento, buscando encontrar os métodos mais eficazes em precisão e funcionalidade. O fator que mais se destaca, portanto, é a grande expectativa relativa à possibilidade destes métodos eliminarem ou reduzirem significativamente o uso de uma malha no sentido clássico e a possibilidade de definir funções de aproximação locais, que não sejam necessariamente polinomiais.

O conceito de método sem malha (meshless), no entanto, precisa ser melhor explicado. Nestes não se usam elementos base ou células para delimitar e gerenciar o

posicionamento e a conectividade dos graus de liberdade definidos pela discretização no modo clássico apresentado pelo MEF. As funções que aproximam o campo, essas sim podem demarcar uma região de influência. Os nós de cada região de influência podem ser distribuídos arbitrariamente e cada região pode e deve se sobrepor às demais. Assim, discretiza-se o domínio de interesse através de um conjunto de nós, posicionados sem que exista explicitamente uma malha estruturada de elementos.

Pois uma das maneiras mais eficientes, tanto para se gerar os pontos de discretização, quanto para correlacionar os domínios, consiste no emprego das funções de base radial. É possível utilizá-las tanto exclusivamente, quanto em conjunto com funções de interpolação referenciadas globalmente (Bertolani et al, 2010).

Além disso, a redução na dimensão matricial do sistema de equações pode ser adequadamente implementada com o uso de funções radiais de base compacta, ou seja, funções que limitam os domínios de influência, de modo tal que nem todos os pontos base necessariamente sobreponham informações com os demais, atenuando a questão do custo computacional.

Atualmente, com o intenso desenvolvimento de novas técnicas que envolvem as funções de base radial, novas classes de funções foram testadas e aplicadas com sucesso em problemas de interpolação, ajuste e solução de equações diferenciais parciais, particularmente no âmbito da abordagem do MEF, pelas razões já expostas. De algum modo, guardadas certas peculiaridades, este mesmo esforço tem sido despendido no desenvolvimento de técnicas associadas ao Método dos Elementos de Contorno (MEC), em busca de uma melhor solução para diversos problemas, particularmente os problemas matematicamente heterogêneos, como os problemas de Poisson e também casos dependentes do tempo (Loeffler et al, 2015).

Exaustivas pesquisas mostram que o MEC tem ótimo desempenho nas aplicações em que os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são auto-adjuntos (Brebbia et al., 1984). Nestes casos, é possível eliminar todas as integrais de domínio, particularmente aquela que persiste após se chegar à forma inversa da equação integral (Brebbia e Walker, 1980) graças à escolha estratégica de uma função auxiliar, que é a solução fundamental (Brebbia, 1978). Esta função é a

solução de um problema correlato, governado por uma Equação de Poisson, onde uma fonte concentrada é aplicada num ponto específico de um meio infinito.

Ressalta-se, primeiramente, que as expressões da solução fundamental e sua derivada normal não são funções de ponto e sim funções da distância euclidiana entre dois pontos, tais como as funções de base radial atualmente bastante empregadas, conforme mencionado. Em segundo lugar, vale destacar que elas são bem conhecidas no âmbito da Física Matemática como Funções de Green, entendendo-se que elas equivalem à resposta observada num ponto campo, pertinente ao domínio do problema abordado, governado por uma equação diferencial parcial linear, a uma excitação de amplitude unitária aplicada num dado ponto dele distante, denominado ponto fonte.

Finalizando estas considerações iniciais, existe um método aparentado com o MEC, pois usa como cerne as mencionadas Funções de Green, mas que se destaca pelo fato de não precisar definir uma malha e realizar integrações de contorno. Nesse sentido, ele se aproxima bastante do que se almeja como concepção dominante nas técnicas sem malha utilizadas com o MEF. É o Método das Soluções Fundamentais (MSF). Preliminarmente, dele se ocupará o item seguinte com detalhes sobre seu desenvolvimento histórico.

## **1.2 - O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS**

Historicamente, os fundamentos matemáticos do MSF foram publicadas em torno de algumas décadas atrás e foram desenvolvidas principalmente por V. D. Kupradze e M. A. Alexidze no final dos anos 1950 e início dos anos 1960 (Kupradze & Alexidze, 1964). No entanto, o método foi proposto como uma técnica computacional muito mais tarde por R. Mathon e R.L. Johnston no final de 1970 (Mathon & Johnston, 1977), seguido por uma série de trabalhos de Mathon, Johnston, Graeme Fairweather com aplicações (Chen et al, 2008). Um interessante trabalho de Fairweather e Karageorghis apresenta o desenvolvimento do MSF nas décadas de 70, 80 e 90 (Fairweather & Karageorghis, 1998). Lenta, mas seguramente, o MSF tornou-se uma ferramenta útil para a solução de uma grande variedade de problemas físicos e de engenharia (Fu et al, 2009; Chen et al, 2011; Chen e Wang, 2010; Jiang & Chen, 2011).

Um grande obstáculo foi superado quando, na década de 90, MA Golberg e CS Chen ampliou o MSF para lidar com equações não homogêneas e problemas dependentes do tempo (Golberg & Chen, 1994; Golberg & Chen, 1998). Os desenvolvimentos recentes indicam que o MSF pode ser usado para resolver equações diferenciais parciais com coeficientes variáveis (Fan et al, 2009). O MSF tem se revelado particularmente eficaz para certas classes de problemas, tais como problemas inversos (Hon & Wei, 2005), de domínio sem limites (Fairweather e Karageorghis, 1998).

O MSF, por não requerer uma malha (no sentido clássico), nem se proceder a qualquer integração, apresenta algumas vantagens, como, a facilidade de implementação em relação ao MEC. Além disso, o método permite obter resultados para as tensões em pontos do contorno e do interior sem a necessidade de aplicação de técnicas especiais (Medeiros, 2001).

O método se baseia, essencialmente, na solução fundamental ou Função de Green associada a uma equação diferencial parcial de interesse. Essa função será escolhida como sendo a sua função de base ou de influência, num sentido bastante similar aos coeficientes de rigidez ou flexibilidade de barras, vigas e outros elementos de sustentação, pertinentes ao estudo da Mecânica das Estruturas (Moreira, 1977).

O MSF, no entanto, exige a delimitação de um contorno fictício fora do domínio físico do problema para contornar as singularidades que aparecem devido à natureza da solução fundamental.

Diversos trabalhos publicados consideram o contorno fictício com o mesmo formato que o contorno do problema a ser solucionado, porém maior, de forma a circunscrever o problema, como apresentado por Patterson & Sheikh (1983); Redekop & Thompson (1983). No entanto, Bogolmony (1985) sugere que uma superfície circular como a superfície ótima para problemas em duas dimensões, e uma esférica para três dimensões.

A escolha do posicionamento dos pontos deste contorno fictício ainda é controversa, pois os trabalhos sobre o método ainda não apresentam uma convergência para uma determinada forma para este contorno. Isto restringiu seriamente a sua difusão e aplicabilidade aos problemas de engenharia. Mas, recentemente, o desenvolvimento de alguns procedimentos auxiliares junto ao MSF tem mostrado que o mesmo pode ser

competitivo em algumas aplicações, tais como problemas de regiões infinitas (Santos et al, 2014).

Além das pesquisas com o MSF, algumas das novas técnicas têm sido desenvolvidas para resolver os problemas relacionados ao uso da fronteira fictícia, tais como o método de fronteira nó (Mukherjee e Mukherjee, 1997), método de fronteira singular (Chen e Wang, 2010), e o método regularizado sem malha (Young et al, 2005).

### **1.3 - OBJETIVO**

Neste trabalho comparam-se os desempenhos numéricos dos Métodos dos Elementos de Contorno (MEC) e Método das Soluções Fundamentais Clássico (MSF) na solução de problemas governados pela Equação de Laplace. São métodos similares, que usam a ideia de uma solução fundamental, mas também apresentam algumas distinções importantes.

É possível fazer com que estas diferentes técnicas interajam na solução de alguns problemas mais complexos, o que implica em maior conhecimento das particularidades do MSF, uma vez que o MEC é atualmente uma técnica muito mais conhecida, de reconhecida eficiência em diversas aplicações importantes. Já o MSF experimenta uma redescoberta a partir da intensificação das técnicas de discretização sem malha.

Este trabalho compara a precisão dos dois métodos e examina algumas particularidades numéricas de ambos em exemplos simples, mas importantes para a identificação do alcance de cada técnica. Três exemplos de geometria quadrática são resolvidos pelo MEC e pelo MSF, sendo que para este último são testados diferentes arranjos para os pontos do contorno fictício e distâncias destes para o contorno do problema .

No primeiro exemplo é resolvido um problema unidimensional, que pode ser interpretado como sendo uma barra tracionada. O segundo e o terceiro exemplos resolvidos são problemas típicos de transferência de calor em duas dimensões. Estes dois últimos exemplos se distinguem no seguinte: no primeiro resolve-se um caso cujas condições de contorno obedecem a uma curva em dois dos lados do problema; no



exemplo final as condições de contorno em determinado ponto apresentam uma singularidade.

Os resultados do MEC e do MSF são comparados com as soluções analíticas disponíveis e o erro percentual médio é calculado e apresentado na forma de curvas de convergência, ou seja, em função do refinamento da discretização. Os resultados são discutidos para cada problema após sua apresentação.

## CAPÍTULO 2 - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MEC

Neste Capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos do MEC na sua formulação clássica ou singular para problemas de Laplace. A formulação do MEC baseia-se na transformação das equações diferenciais que descrevem o problema abordado em equações integrais de contorno na região analisada. As equações integrais são discretizadas e formam um sistema de equações lineares algébricas cuja solução fornece o valor das incógnitas no contorno.

### 2.1 - A EQUAÇÃO DE LAPLACE

Equação de Laplace é uma equação diferencial parcial do tipo elíptica, de grande importância, que descreve o comportamento de diversos e importantes fenômenos naturais de caráter estacionário, seja na mecânica dos sólidos, na mecânica dos fluidos, no eletromagnetismo e na astronomia, entre outros campos. Normalmente, sua teoria geral de soluções é conhecida como Teoria do Potencial (Ponce, 2009).

Na ausência de fontes ou ações de corpo, considerando um domínio bidimensional  $\Omega(X)$ , onde  $X = X(x_1; x_2)$ , a equação de Laplace se expressa matematicamente por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad 2.1$$

Onde  $u(X)$  é uma grandeza escalar, comumente chamada potencial.

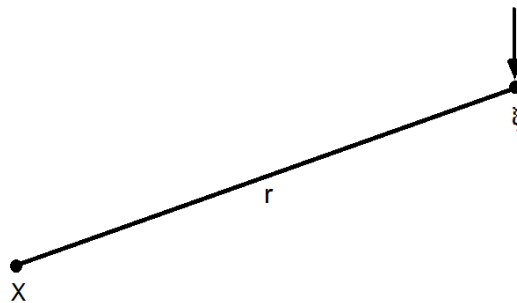
Matematicamente, para que um problema seja bem posto, é preciso que as condições essenciais e naturais sejam definidas no contorno  $\Gamma(X)$ , respectivamente, através das seguintes equações:

$$u(X) = \bar{u}(X) \text{ em } \Gamma_u \quad 2.2$$

$$q(X) = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}(X) \text{ em } \Gamma_q \quad 2.3$$

Nesta última equação,  $n$  é o vetor unitário normal no ponto  $X = X(x_i)$  e  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$ .

Considerando-se um caso específico de grande importância, demonstra-se que, dado um meio bidimensional  $\Omega(X)$  com domínio aberto ou infinito, o potencial  $u(X)$  e sua derivada  $q(X)$  numa direção  $\eta$ , gerados num ponto campo  $X = X(x_1, x_2)$  por uma fonte situada em  $\xi$  a uma distância euclidiana  $r$  daquele são dados por (Brebbia, 1978):



**Figura 2.1 – Distância euclidiana entre o ponto campo e o ponto fonte.**

$$u^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad 2.4$$

$$q^*(\xi; X) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad 2.5$$

A demonstração destas expressões pode ser encontrada na literatura especializada (Brebbia, 1978). A distância euclidiana  $r$  é expressa por:

$$r(\xi; X) = \sqrt{(x(\xi) - x(X))^2 + (y(\xi) - y(X))^2} \quad 2.6$$

Percebe-se que a independência angular das equações 2.4 e 2.5 faz com que o equacionamento do problema possa ser bastante simplificado.

As equações 2.4 e 2.5 são extremamente importantes na composição do MEC, onde fazem o papel de funções auxiliares na formulação integral. O mesmo ocorre no caso do MSF, onde caracterizam a ação à distância ou a função de influência entre dois diferentes pontos do domínio.

## 2.2 - REPRESENTAÇÃO INTEGRAL

O equacionamento geral para o MEC pode ser obtido pela aplicação de princípios pertinentes à Teoria das Equações Integrais, particularmente o emprego do procedimento de integração por partes e o Teorema da Divergência. Esta abordagem será a adotada neste trabalho por conveniência, mas também é possível a obtenção do equacionamento do MEC pelo Método dos Resíduos Ponderados (Weinberger, 1970).

Assim, através da Teoria das Equações Integrais, para se alcançar a formulação do MEC, a equação de Laplace é levada para uma forma integral. Para tanto se utiliza a função  $u^*(\xi, X)$  – a função de Green ou de influência do MSF – como função auxiliar de forma que se resulta na seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega \quad 2.7$$

Por ser um operador auto-adjunto, o Laplaciano permite a aplicação da técnica de integração por partes duas vezes na equação anterior, de modo que se pode reescrevê-la como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} \right] u d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x_1} u \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial u^*}{\partial x_2} u \right] \right\} d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} u^* \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_2} u^* \right] \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.8}$$

O Teorema da Divergência é então aplicado nas segunda e terceira parcelas do lado direito da equação 2.8 obtendo-se a expressão abaixo:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] u^* d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} \right] u d\Omega - \int_{\Gamma} \{uq^*\} d\Gamma + \int_{\Gamma} \{u^*q\} d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Onde:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial n} \tag{2.10}$$

$$q = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} \tag{2.11}$$

A função auxiliar  $u^*(\xi; X)$  é, na verdade, a solução fundamental tradicional, que é a solução de um problema correlato pela Equação de Poisson, onde uma carga concentrada unitária é aplicada em um ponto fonte  $\xi$  de um domínio espacial infinito. A equação de governo nessas condições de simetria angular é expressa por:

$$\frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} = -\Delta(\xi; X) \quad 2.12$$

Onde  $r(\xi; X)$  é a distância Euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $X = X(x_i)$ ;  $\Delta(\xi; X)$  é a função Delta de Dirac, singular em  $r = \xi$ . Uma solução particular da equação 2.12 é dada por:

$$u^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \ln[r(\xi; X)] \quad 2.13$$

Daí resulta:

$$q^*(\xi; X) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r(\xi; X)} \frac{\partial r}{\partial n} \quad 2.14$$

Devido às propriedades da função Delta de Dirac, a substituição da equação 2.13 no primeiro termo do lado direito da equação 2.9 permite transformar a equação integral de domínio original em uma única expressão constituída de integrais de contorno e uma função de ponto, na forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} \{uq^*\}d\Gamma - \int_{\Gamma} \{qu^*\}d\Gamma = 0 \quad 2.15$$

Nesta última equação,  $c(\xi)$  é uma constante que depende do posicionamento do ponto fonte com relação ao domínio. Se esse ponto estiver fora do domínio físico,  $c(\xi)$  é nulo; se o ponto fonte estiver situado internamente,  $c(\xi)$  é igual a 1 e se estiver posicionado sobre o contorno,  $c(\xi)$  é igual a 0,5 (Brebbia, 1978).

Usualmente, efetuada a etapa de discretização com o MEC, os pontos fonte precisam ser localizados externamente ao domínio ou então sobre o contorno, para gerarem um sistema matricial de equações resolvível. O posicionamento dos pontos fonte  $\xi$  externamente é bastante razoável, desde que se estabeleça um bom critério de posicionamento, de modo a gerar um sistema de equações linearmente independente e

bem condicionado. No entanto, a opção mais comum e difundida localiza os pontos fonte no contorno, preferencialmente coincidentes com os pontos nodais.

Assim, a equação 2.15 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}u(\xi) + \int_{\Gamma} \{uq^*\}d\Gamma - \int_{\Gamma} \{qu^*\}d\Gamma = 0 \quad 2.16$$

### 2.3 - DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL

O Método dos Elementos de Contorno pertence à classe dos métodos numéricos discretos. Assim sendo, a representação do problema físico original deixa de ser contínua e passa a ser representada matematicamente por um número finito de pontos, nos quais as variáveis podem ser conhecidas ou incógnitas.

Desde que se tenha um modelo matemático bem posto, ou seja, o valor do potencial ou de sua derivada normal (um ou outro) sejam conhecidos em todos os pontos de contorno, os valores desconhecidos destes podem ser encontrados após a resolução de um sistema de equações algébricas, gerado por esse processo de discretização.

Na discretização, tanto a geometria do problema quanto o campo de variáveis são aproximados no contorno através de elementos, de acordo com certas funções pré-estabelecidas. Dentro de cada elemento se definem os pontos discretos, chamados pontos nodais, que variam em número e posicionamento, em função da ordem ou tipo de elemento. Também a forma geométrica dos elementos pode variar de acordo com essas funções que aproximam o campo de variáveis nodais. Neste trabalho, são usados elementos lineares isoparamétricos, ou seja, a interpolação do campo de variáveis e da geometria é a mesma.

O MEC, por ser um método misto, resolve tanto os valores incógnitos do potencial quanto de sua derivada normal simultaneamente. Ainda é possível se calcular valores no interior do domínio, usando a mesma equação integral, num pós-processamento, cuja ideia geral resulta no chamado procedimento recursivo (Loeffler, 2011). No entanto, detalhes desse processo não serão abordados neste trabalho.

O sentido de integração para o contorno de domínios fechados é percorrido de maneira que o domínio  $\Omega$  esteja sempre à esquerda, desta maneira garantindo que o vetor normal  $n$  esteja apontando para fora do domínio. Assim, quando o contorno é percorrido no sentido anti-horário, o sistema ou volume de controle, tem seu domínio definido internamente, como o mostrado na Figura 2.2 – Domínio  $\Omega(x)$  com isolamento na região carregada.

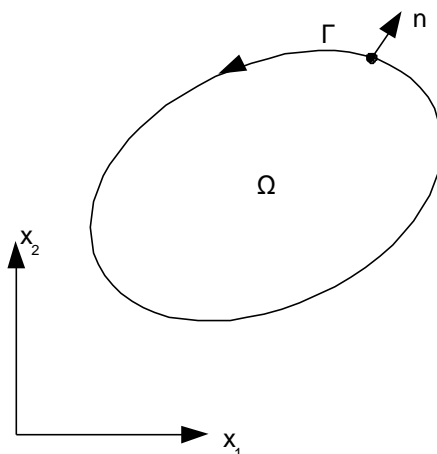


Figura 2.2 – Domínio  $\Omega(x)$  com isolamento na região carregada

Considerando-se o contorno dividido em  $N$  elementos e admitindo-se que os valores de  $u(X)$  e  $q(X)$  variam linearmente ao longo de cada elemento de contorno, pode-se discretizar a equação integral 2.16 de modo que:

$$\frac{1}{2}u(\xi^i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [u(X)q^*(\xi^i; X)]d\Gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} [q(X)u^*(\xi^i; X)]d\Gamma_j \quad 2.17$$

Dado que  $u$  e  $q$  são assumidos com variação linear ao longo do elemento, este podem ser reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 \\ q &= \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 \end{aligned} \quad 2.18$$

Nas equações anteriores, as funções  $\Phi_k$  representam as funções de forma, que no caso dos elementos lineares, empregados nesse trabalho, são dados pela Figura 2.3:





Que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2}u + \sum_{j=1}^N [h_1 \quad h_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j = \sum_{j=1}^N [g_1 \quad g_2] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \quad 2.22$$

Onde:

$$h_1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 q^* d\Gamma_j$$

$$h_2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 q^* d\Gamma_j$$

$$g_1 = \int_{\Gamma_j} \phi_1 u^* d\Gamma_j$$

$$g_2 = \int_{\Gamma_j} \phi_2 u^* d\Gamma_j$$

2.23

Assim, para um nó  $i$  pode-se, então, escrever a equação 2.22 na forma:

$$-\frac{1}{2}u_i = \sum_{j=1}^N [h_1 \quad h_2]_j \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_j - \sum_{j=1}^N [g_1 \quad g_2]_j \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_j \quad 2.24$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}u_i &= [h_1 \quad h_2]_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_1 + [h_1 \quad h_2]_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_2 + [h_1 \quad h_2]_3 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_3 \cdots \\ &+ [h_1 \quad h_2]_N \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_N - [g_1 \quad g_2]_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_1 - [g_1 \quad g_2]_2 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_2 \\ &\quad - [g_1 \quad g_2]_3 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_3 \cdots - [g_1 \quad g_2]_N \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_N \end{aligned} \quad 2.25$$

Como  $u$  é uma grandeza escalar, então:

$$\begin{aligned}(u_2)_i &= (u_1)_{i+1} = u_i \\ (u_2)_N &= (u_1)_1 = u_1\end{aligned}\tag{2.26}$$

Aplicando as equações 2.26 na equação 2.25, esta pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}u_i &= \frac{[(h_1)_1 + (h_2)_N]}{H_{i1}}u_1 + \sum_{j=2}^N \frac{[(h_2)_{j-1} + (h_1)_j]}{H_{ij}}u_j \\ &- \sum_{j=1}^N \left[ \frac{(g_1)_j (q_1)_j}{G_{ij}^1 q_j^1} + \frac{(g_2)_j (q_2)_j}{G_{ij}^2 q_j^2} \right]\end{aligned}\tag{2.27}$$

De acordo com procedimentos operacionais tradicionais do MEC, são estabelecidos  $N$  pontos nodais e a aplicação da equação 2.27 para todos esses pontos gera um sistema de equações matricialmente expresso por:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \cdots & H_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1N} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}\tag{2.28}$$

Ou simplesmente:

$$HU - GQ = 0\tag{2.29}$$

Cuja solução pode ser feita por qualquer método eficiente de solução para sistemas de equações lineares não simétricas. Comumente é usado o método de Gauss, com precisão plenamente satisfatória.

## CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MSF

Neste capítulo será apresentado a formulação clássica do MSF para resolução de problemas de Laplace em duas dimensões.

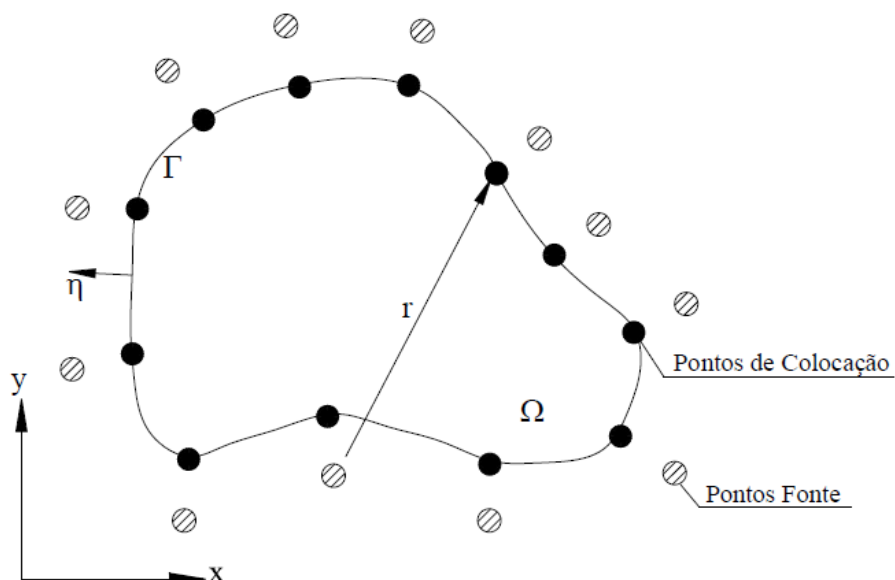


Figura 3.1 – Disposição dos pontos fontes e de colocação na geometria do problema (Cordeiro. S.G.F, Leonel. E.D – 2014)

Considere um contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$  na Figura 3.1 acima. As condições essenciais e naturais são definidas no contorno  $\Gamma(X)$ , respectivamente, através das seguintes equações:

$$u(X) = \bar{u}(X) \text{ em } \Gamma_u \quad 3.1$$

$$q(X) = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q}(X) \text{ em } \Gamma_q \quad 3.2$$

Nesta última equação,  $n$  é o vetor unitário normal no ponto  $X = X(x_i)$  e  $\bar{u}$  e  $\bar{q}$  são respectivamente os valores do potencial e de sua derivada normal conhecidos nos pontos colocacionais.

Para modelagem do MSF deve ser inserida uma série de pontos de colocação  $X_i$  sobre o contorno onde o problema será analisado. Nestes pontos as condições de contorno são prescritas. Embora o método não requeira uma discretização explícita, a geométrica do problema físico e suas condições de contorno devem ser rigorosamente computadas.

Similarmente ao MEC, também deve ser inserida uma série de pontos fontes  $\xi_j$ , mas estes devem se situar externamente ao contorno  $\Gamma$ , formando uma fronteira fictícia que circunscreve a geometria do problema físico.

Na formulação do MSF admite-se que:

$$u_i = \sum_{j=1}^N u_{ij}^* c_j \quad em \Gamma_u \quad 3.3$$

$$q_i = \sum_{j=1}^N q_{ij}^* c_j \quad em \Gamma_q \quad 3.4$$

Onde:

- $i$  representa o conjunto de pontos de colocação  $X$  no contorno;
- $j$  representa o conjunto de pontos fontes  $\xi$  em volta do contorno;
- $u^*$  é a solução fundamental do problema potencial no ponto  $X_i$  devido a uma fonte concentrada no ponto  $\xi_j$ ;
- $q^*$  é a derivada da função fundamental no ponto  $X_i$  devido a uma fonte concentrada no ponto  $\xi_j$ ;
- $c_j$  é a intensidade da grandeza incógnita no ponto  $\xi_j$ ;
- $N$  é o numero de pontos colocacionais, que é igual ao numero de pontos fontes.

Existe formulação onde o numero de pontos fontes é igual  $N-1$ , proposto por (Golberg et al, 1996), no entanto, neste trabalho o numero de pontos fontes utilizado foi igual ao número de pontos colocacionais, por apresentar melhor precisão (Medeiros, 2001).

No caso do problema de Laplace, conforme apresentado anteriormente, tem-se:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln[r(X, \xi)] \quad 3.5$$

e

$$q^* = -\frac{\partial u^*}{\partial \eta} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r(X, \xi)}{\partial \eta} \quad 3.6$$

Onde  $r$  é a distância euclidiana entre o ponto  $X$  e o ponto  $\xi$ .

As equações 3.3 e 3.4 podem ser escritas na forma matricial respectivamente nas equações abaixo:

$$\begin{bmatrix} u^*_{11} & u^*_{12} & \cdots & u^*_{1n} \\ u^*_{21} & u^*_{22} & \cdots & u^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u^*_{n1} & u^*_{n2} & \cdots & u^*_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} \quad 3.7$$

$$\begin{bmatrix} q^*_{11} & q^*_{12} & \cdots & q^*_{1n} \\ q^*_{21} & q^*_{22} & \cdots & q^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q^*_{n1} & q^*_{n2} & \cdots & q^*_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \end{bmatrix} \quad 3.8$$

Percebe-se que nas equações 3.7 e 3.8 os  $N$  coeficientes  $c$  são os mesmos em ambas as matrizes, assim, podem-se combinar as linhas de ambas as matrizes gerando um novo sistema no qual o vetor situado a direita da igualdade é composto exclusivamente de valores prescritos.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \end{bmatrix} \quad 3.9$$

Ou, de maneira simplificada:

$$[A]_{ij}[c]_j = [y]_i$$

3.10

Resumindo, na matriz  $A$  cada linha é formada pelas equações 3.3 onde  $u$  é prescrito e 3.4 onde  $q$  é prescrito. O vetor  $c$  é formado pelos coeficientes de influencia  $c_j$ , que são as incógnitas do sistema, e o vetor  $y$  é formada pelos valores prescritos de  $u$  e  $q$  nos pontos de colocação.

Resolvendo-se a equação 3.10 encontra-se o valores dos coeficientes de influencia  $c_j$ . Estes valores são usados nas equações 3.3 e 3.4 para se encontrar a grandeza desconhecida em cada ponto  $X_i$ .

Ainda é possível encontrar facilmente os valores do potencial no interior do contorno. Considerando  $X_k$  uma série de pontos internos ao contorno, seus valores podem ser obtidos pela equação 3.3, fazendo  $i = k$ .

$$u_k = \sum_{j=1}^n u_{kj}^* c_j$$

3.11

Neste trabalho, a obtenção de valores em pontos internos não foi abordada.

## CAPÍTULO 4 - RESULTADOS

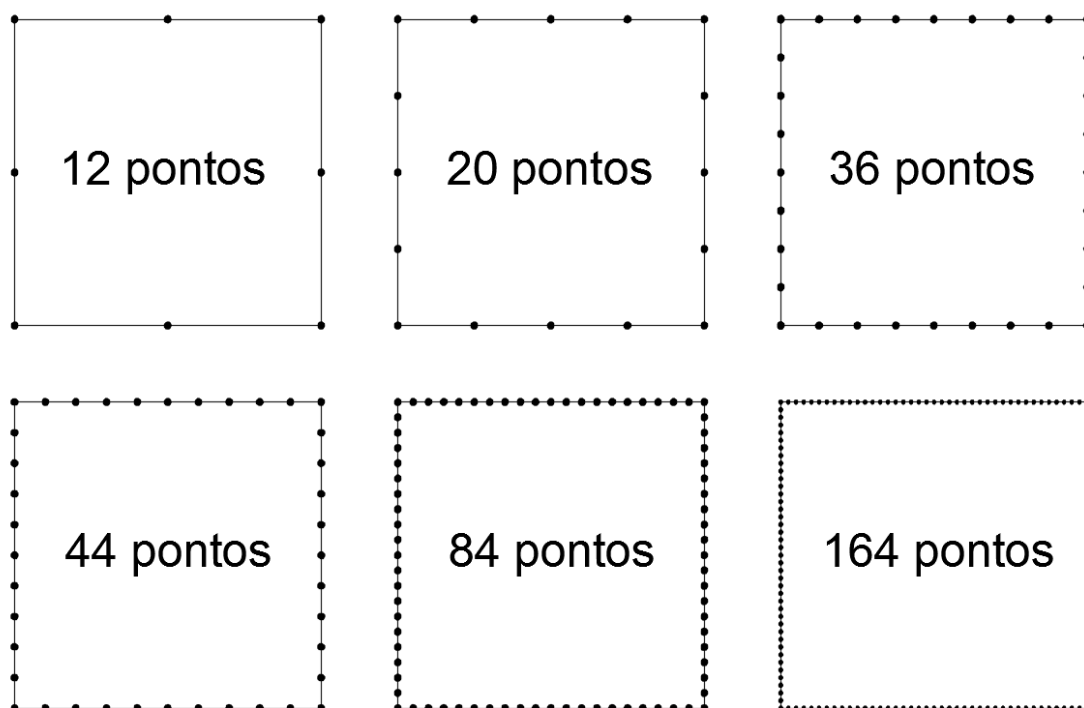
### 4.1 - INTRODUÇÃO

O MSF, em sua formulação clássica, foi usado e comparado ao MEC, também em sua formulação clássica com elementos lineares, para a resolução de três problemas de duas dimensões e de geometria em forma de quadrado com comprimento do lado unitário.

#### 4.1.1 - PONTOS COLOCACIONAIS

Em todos os três problemas, para ambos os métodos, usaram-se 6 diferentes quantidades de pontos no contorno distribuídos igualmente entre as faces do contorno: 12, 20, 36, 44, 84 e 164 pontos.

Em um primeiro momento, em cada face, um ponto é posicionado em cada extremidade da face e o restante dos pontos distribuídos igualmente entre estes. Assim, nos vértices, são posicionados nós duplos, ou seja, dois pontos de contorno sobre um mesmo ponto geométrico, sendo que cada um destes pertencente a uma face do contorno.



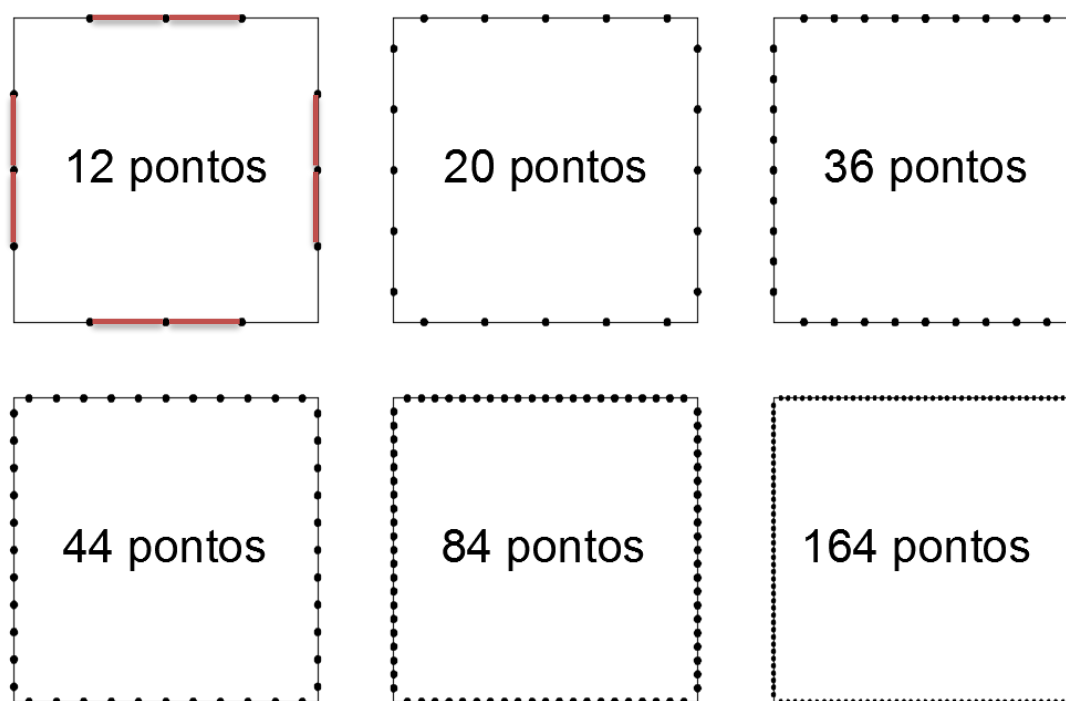


**Figura 4.1 – Quantidade e disposição dos pontos colocacionais na discretização de malha com nós duplos.**

Para estas discretizações, na resolução com o MEC, no caso de condições de contorno de Dirichlet em ambos os pontos de um nó duplo, estes pontos foram afastados em 13% de seu comprimento.

Os problemas resolvidos com estas discretizações serão referenciados futuramente no texto como “malhas com nós duplos”.

Em um segundo momento, os pontos são redistribuídos para que não seja posicionado nenhum ponto nas extremidades de cada face, evitando a existência de nós duplos. Os elementos de contorno para o MEC, neste caso, ficam apenas entre os pontos de uma mesma face, como representado em vermelho na malha de 12 pontos na Figura 4.2.



**Figura 4.2 – Disposição dos pontos colocacionais na discretização de malha sem nós duplos.**

Da mesma forma que os problemas com nós duplos, os problemas resolvidos com estas discretizações serão referenciadas no texto futuramente apenas como “malhas sem nós duplos”.

#### 4.1.2 - PONTOS FONTES

Como descrito anteriormente, o MSF precisa que seja definido pontos fontes para o seu funcionamento. Para a resolução dos problemas utilizou-se a mesma quantidade de pontos fontes que a quantidade de pontos no contorno, que conforme Medeiros (2001) apresenta melhores resultados.

Sabe-se que o arranjo dos pontos fontes no espaço é de grande importância para o funcionamento do método, por simplicidade, o posicionamento fixo dos pontos fontes foi o escolhido para este trabalho, porém, variando-se a geometria.

Duas geometrias para o posicionamento dos pontos foram utilizadas, a circular, defendida por (Bogomolny, 1985) como a geometria ótima e o arranjo de mesma geometria que o problema, porém maior, de forma a engloba-lo:

- **Arranjo circular**, em que os pontos fontes ficam dispostos, igualmente espaçados, em círculo fictício que envolve o problema, concêntrico com a geometria do contorno.

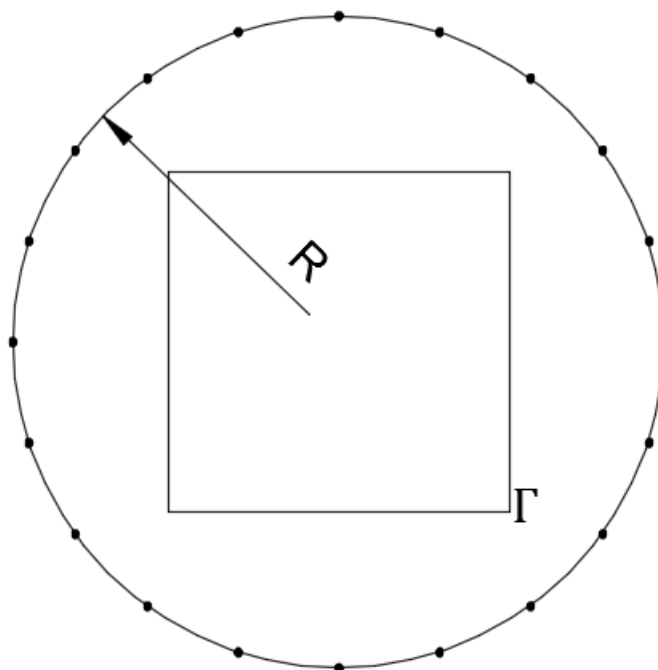


Figura 4.3 – Disposição dos pontos fontes no arranjo circular.

Seis valores para o raio são utilizados: Um valor mínimo, que varia com a quantidade de pontos no contorno, e os valores de  $R = 1,5$ ;  $R = 1,9$ ;  $R = 2,25$ ;  $R = 3,5$ ;  $R = 6$  e  $R = 11$ . O raio mínimo segundo Medeiros (2001) é igual a distância do centro da

geometria para ponto mais afastado do contorno somado à distancia regular entre dois pontos de contorno, ou seja, o comprimento de um elemento de contorno no MEC.A apresenta os valores dos raios mínimos para a quantidade de pontos no contorno.

Tabela 1 – Raio mínimo do arranjo circular para o numero de pontos colocacionais.

| N° pontos | 12   | 20   | 36   | 44   | 84   | 164  |
|-----------|------|------|------|------|------|------|
| R         | 1,21 | 0,96 | 0,83 | 0,81 | 0,76 | 0,73 |

- **Arranjo conforme**, em que os pontos fontes são posicionados a uma distancia  $d$  na direção normal do ponto colocacional correspondente. Foram testados arranjos para os valores de  $d = 0,5$ ,  $d = 0,9$ ,  $d = 1,25$ ,  $d = 2,5$ ,  $d = 5$  e  $d = 10$ .

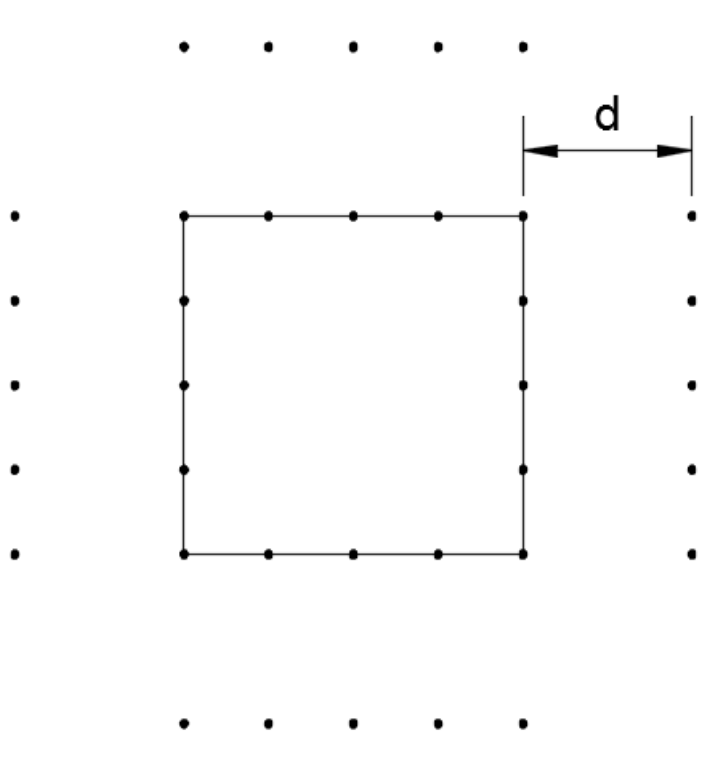


Figura 4.4 – Disposição dos pontos fontes no arranjo conforme.

Para os problemas com malha sem nós duplos, o arranjo de pontos fontes usado se manteve os mesmos dos problemas com nós duplos para uma mesma quantidade de pontos no contorno.

Ao todo, foram feitas 156 simulações com o MSF e 12 simulações com o MEC para cada problema com diferentes combinações de arranjos e distâncias dos pontos fontes.

### 4.1.3 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para cada combinação foi calculado o erro médio percentual dos resultados em comparação aos valores analíticos.

O erro foi calculado pela formula abaixo:

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n |v_i - a_i|}{a_{max}} * \frac{100}{n} \quad 4.1$$

Onde:

- $E$  é o erro percentual
- $n$  é o número de pontos no contorno onde a variável foi calculada;
- $v_i$  é o resultado encontrado no ponto  $i$ ;
- $a_i$  é o valor analítico no ponto  $i$
- $a_{max}$  é maior valor analítico do problema.

Curvas de convergência foram montadas cruzando o erro encontrado em cada resultado com o número de pontos no contorno.

As curvas de convergência para cada problema são apresentadas nos capítulos subsequentes comparando os resultados para cada arranjo de pontos fontes.

Posteriormente, em cada capítulo, são comparados os resultados obtidos com as discretizações com nós duplos com as discretizações sem nós duplos.

## 4.2 - PROBLEMA 1 – BARRA TRACIONADA

O primeiro problema resolvido é um problema de barra tracionada e as condições de contorno do mesmo são mostradas na figura abaixo:

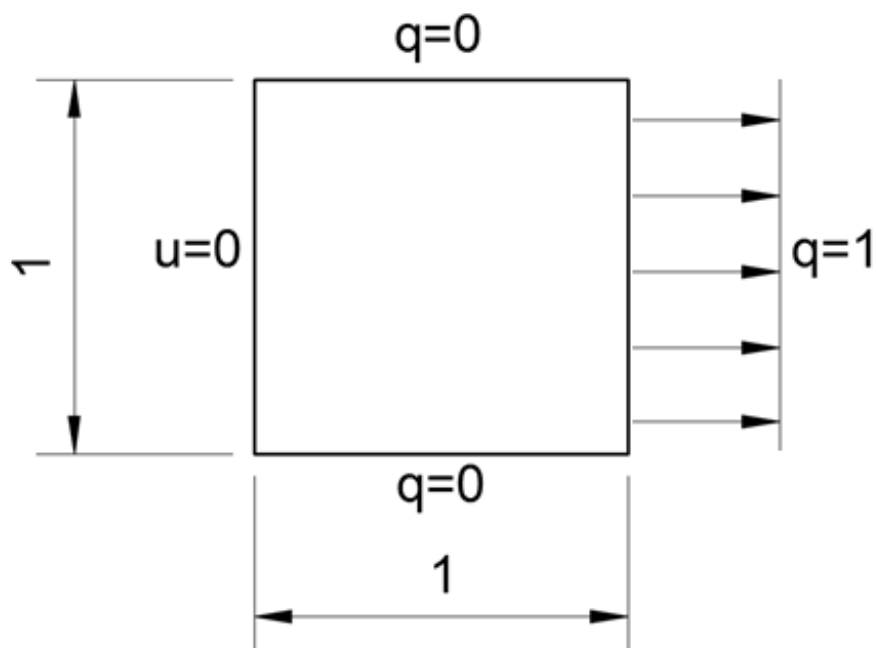


Figura 4.5 – Condições de contorno para o Problema 1 – Barra Tracionada.

A solução analítica do problema é dada no Apêndice A.

### 4.2.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS

As curvas de convergência do MSF para o primeiro problema, com nós duplos, são apresentadas, junto às curvas de convergência do MEC, nas figuras de Figura 4.6 a Figura 4.9.

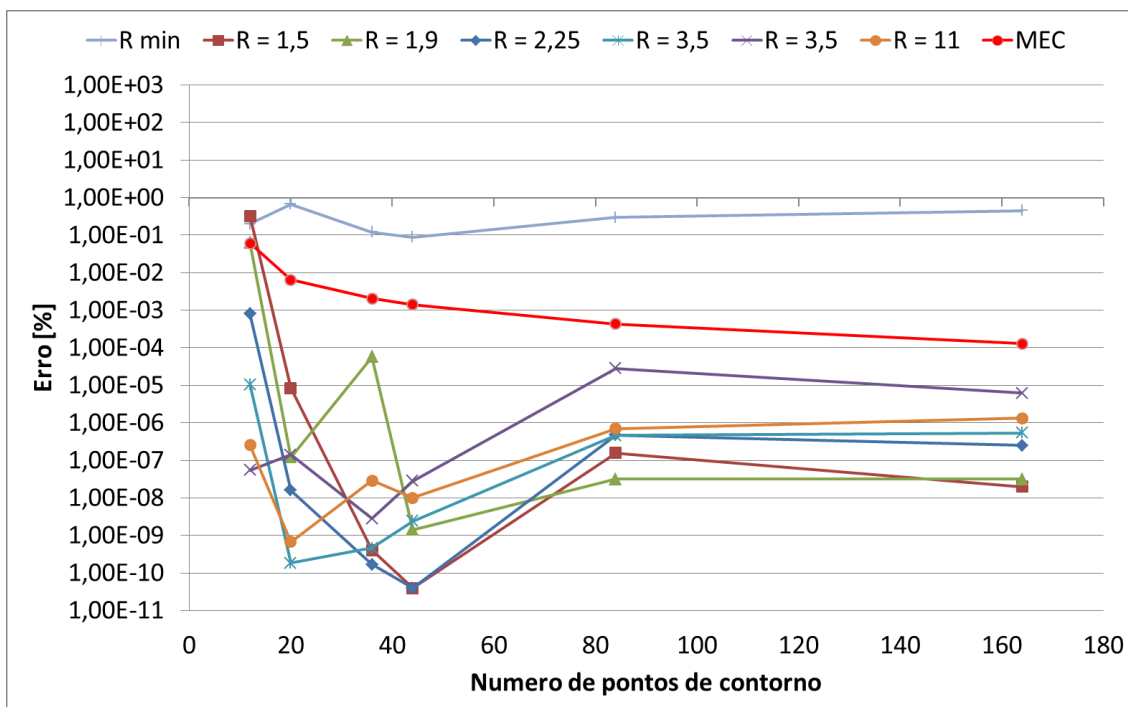


Figura 4.6 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo circular.

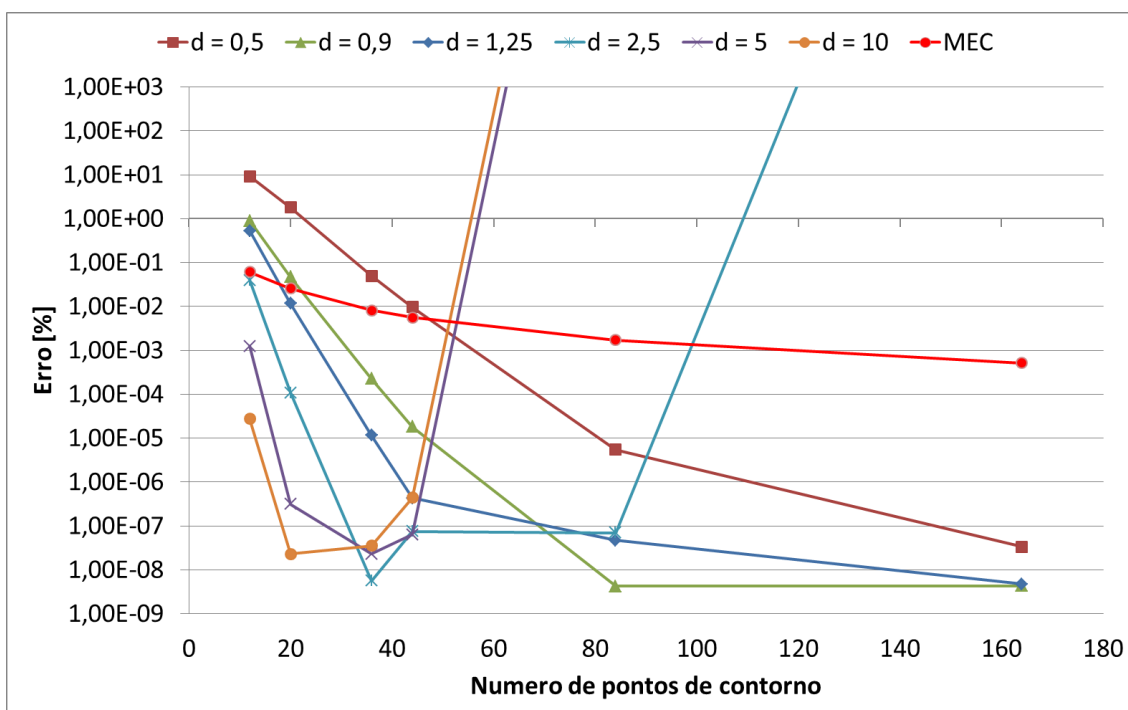


Figura 4.7 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo conforme.

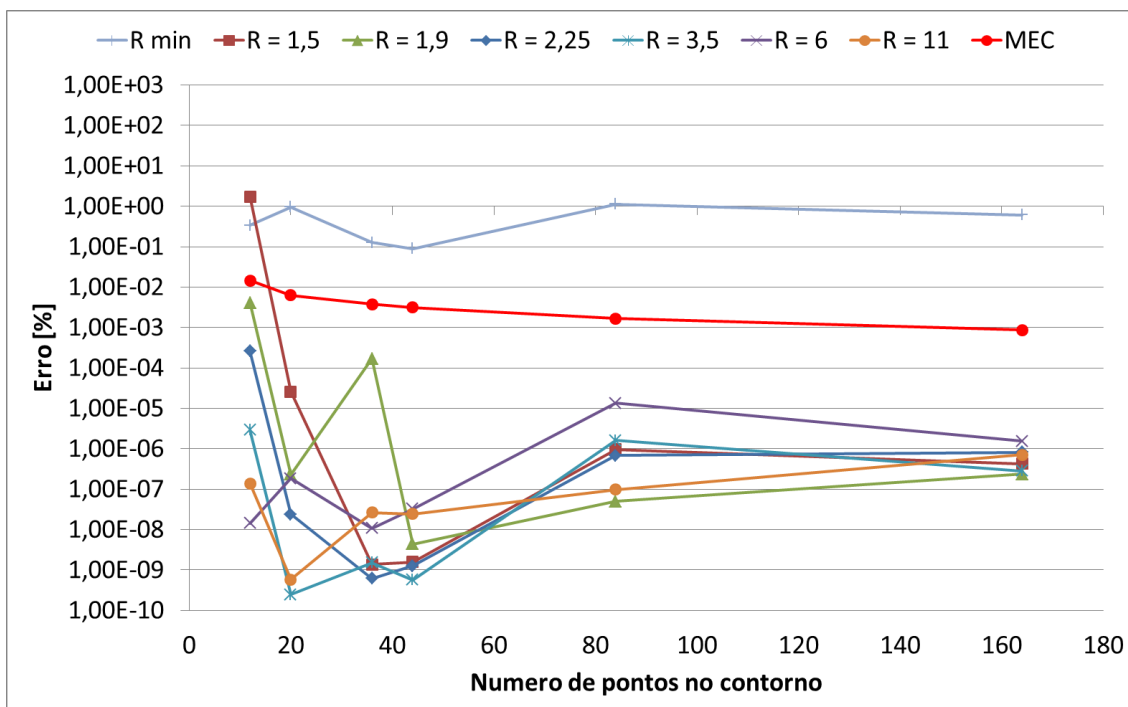


Figura 4.8 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.

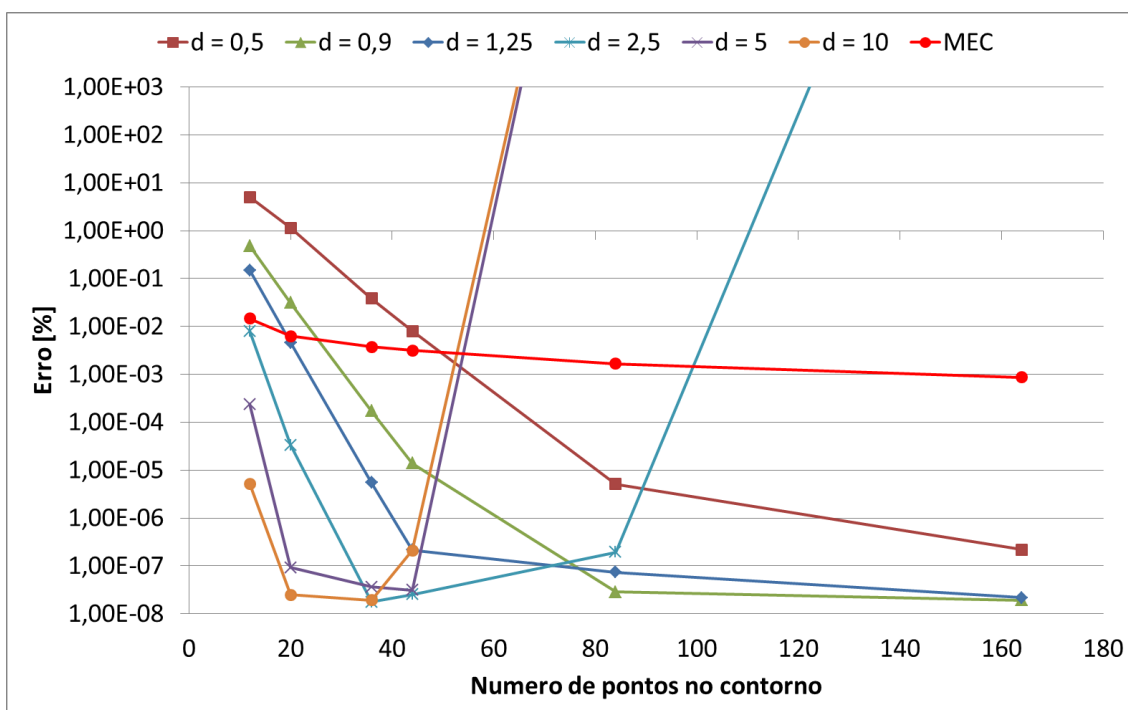


Figura 4.9 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.

Na mesma ordem, os valores dos erros percentuais para os resultados apresentados se encontram nas tabelas de Tabela 2 a Tabela 5 a seguir:

**Tabela 2 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 1,98E-01         | 3,21E-01 | 6,18E-02 | 7,96E-04 | 1,04E-05 | 5,52E-08 | 2,58E-07 | 6,07E-02 |
| 20           | 6,69E-01         | 8,37E-06 | 1,20E-07 | 1,60E-08 | 1,83E-10 | 1,41E-07 | 6,65E-10 | 2,59E-02 |
| 36           | 1,19E-01         | 4,08E-10 | 5,67E-05 | 1,66E-10 | 4,63E-10 | 2,79E-09 | 2,87E-08 | 8,22E-03 |
| 44           | 8,84E-02         | 3,93E-11 | 1,43E-09 | 3,95E-11 | 2,38E-09 | 2,82E-08 | 9,98E-09 | 5,63E-03 |
| 84           | 2,99E-01         | 1,57E-07 | 3,15E-08 | 4,72E-07 | 4,61E-07 | 2,82E-05 | 6,94E-07 | 1,72E-03 |
| 164          | 4,46E-01         | 2,01E-08 | 3,12E-08 | 2,49E-07 | 5,35E-07 | 6,23E-06 | 1,33E-06 | 5,20E-04 |

**Tabela 3 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 9,23E+00         | 9,03E-01 | 5,33E-01 | 3,95E-02 | 1,26E-03 | 2,74E-05 | 6,07E-02 |
| 20           | 1,79E+00         | 4,74E-02 | 1,16E-02 | 1,09E-04 | 3,15E-07 | 2,31E-08 | 2,59E-02 |
| 36           | 4,99E-02         | 2,27E-04 | 1,17E-05 | 5,66E-09 | 2,32E-08 | 3,54E-08 | 8,22E-03 |
| 44           | 9,76E-03         | 1,81E-05 | 4,37E-07 | 7,48E-08 | 6,40E-08 | 4,41E-07 | 5,63E-03 |
| 84           | 5,50E-06         | 4,28E-09 | 4,69E-08 | 7,03E-08 | 8,09E+14 | 4,09E+15 | 1,72E-03 |
| 164          | 3,37E-08         | 4,32E-09 | 4,74E-09 | 4,74E+15 | 5,34E+16 | 7,39E+15 | 5,20E-04 |

**Tabela 4 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 3,35E-01         | 1,74E+00 | 4,13E-03 | 2,59E-04 | 2,92E-06 | 1,43E-08 | 1,37E-07 | 1,45E-02 |
| 20           | 9,58E-01         | 2,60E-05 | 2,32E-07 | 2,40E-08 | 2,47E-10 | 1,85E-07 | 5,85E-10 | 6,27E-03 |
| 36           | 1,27E-01         | 1,38E-09 | 1,71E-04 | 6,15E-10 | 1,52E-09 | 1,08E-08 | 2,68E-08 | 3,78E-03 |
| 44           | 8,96E-02         | 1,58E-09 | 4,42E-09 | 1,26E-09 | 5,66E-10 | 3,28E-08 | 2,43E-08 | 3,13E-03 |
| 84           | 1,13E+00         | 9,56E-07 | 4,96E-08 | 6,85E-07 | 1,60E-06 | 1,36E-05 | 9,88E-08 | 1,67E-03 |
| 164          | 6,12E-01         | 4,22E-07 | 2,37E-07 | 8,18E-07 | 2,83E-07 | 1,56E-06 | 7,15E-07 | 8,64E-04 |

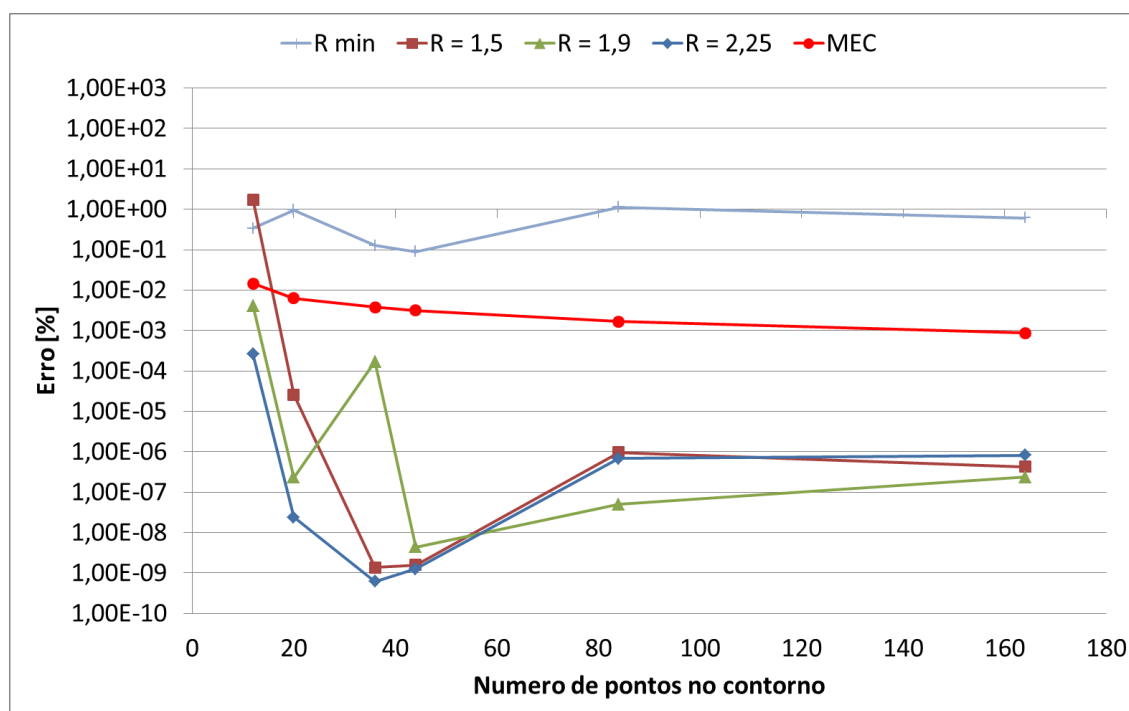


**Tabela 5 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

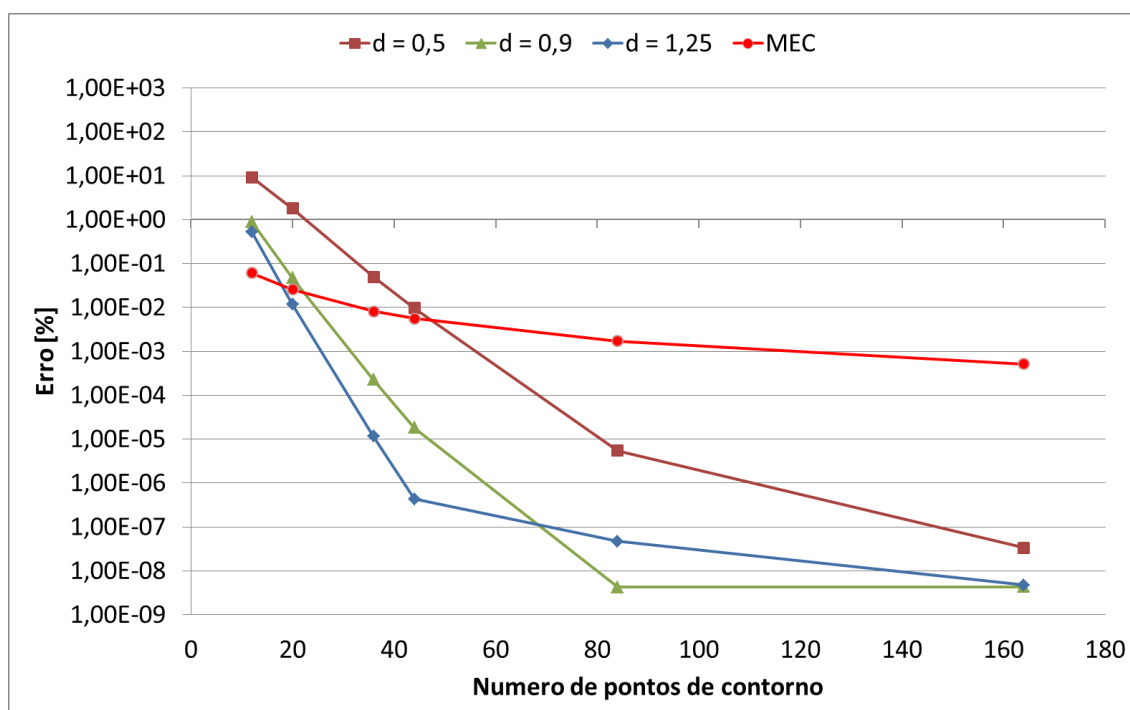
| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 5,03E+00         | 4,87E-01 | 1,50E-01 | 7,95E-03 | 2,39E-04 | 5,16E-06 | 1,45E-02 |
| 20           | 1,13E+00         | 3,11E-02 | 4,64E-03 | 3,33E-05 | 9,30E-08 | 2,49E-08 | 6,27E-03 |
| 36           | 3,86E-02         | 1,71E-04 | 5,46E-06 | 1,76E-08 | 3,66E-08 | 1,91E-08 | 3,78E-03 |
| 44           | 7,96E-03         | 1,40E-05 | 2,14E-07 | 2,53E-08 | 3,13E-08 | 2,12E-07 | 3,13E-03 |
| 84           | 5,10E-06         | 2,85E-08 | 7,39E-08 | 1,95E-07 | 1,69E+12 | 1,29E+12 | 1,67E-03 |
| 164          | 2,17E-07         | 1,91E-08 | 2,16E-08 | 4,78E+13 | 5,21E+13 | 8,67E+11 | 8,64E-04 |

As curvas de convergência para o potencial e para o fluxo apresentaram comportamentos semelhantes. Por conveniência, a análise dos resultados que se segue será feita tomando-se por base os resultados para o potencial apenas.

Para uma melhor avaliação dos resultados, são apresentadas as curvas de convergência apenas para os arranjos circulares com R mínimo, R=1,5, R=1,9 e R=2,25 e para os arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25 comparadas ao MEC.



**Figura 4.10 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjos circulares com R min, R=1,5, R=1,9 e R=2,25.**



**Figura 4.11 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjos conformes com  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  e  $d=1,25$ .**

Com exceção do arranjo circular com raio mínimo, as curvas de convergência mostram um avanço na precisão dos resultados com o aumento do número de pontos no contorno e chegam a ultrapassar a precisão do MEC para as discretizações com maior número de pontos.

Para os arranjos em que pontos fontes são posicionados mais afastados do contorno o comportamento difere bastante dos demais. A Figura 4.12 mostra as curvas de convergência para os arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$  e a Figura 4.13 para os arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$ .

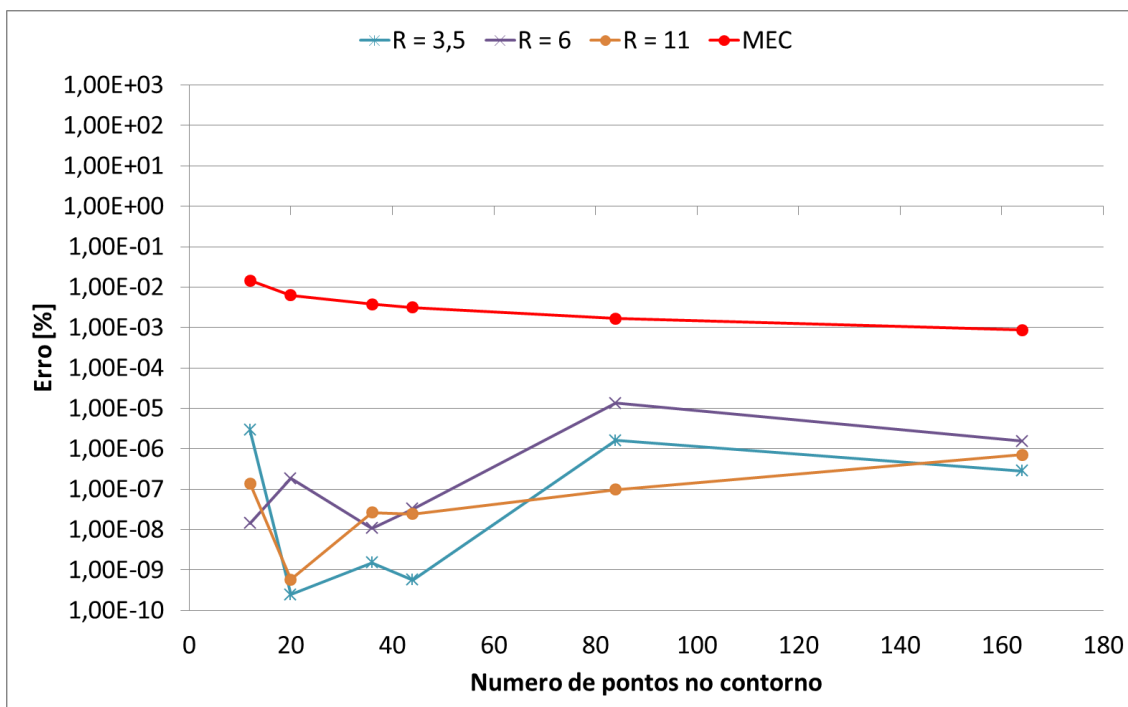


Figura 4.12 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjos circulares R min, R=3,5, R=6 e R=11.

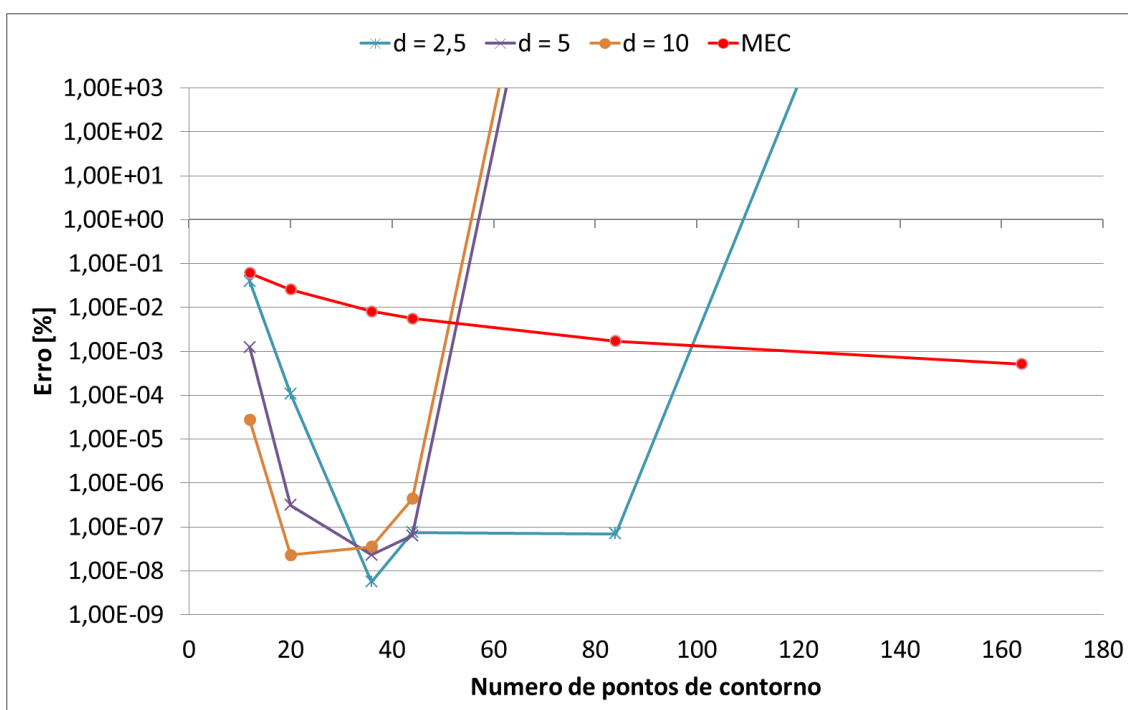


Figura 4.13 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjos conformes com d=2,5, d=5 e d=10.

Os arranjos circulares demonstram uma irregularidade nos valores dos erros para esses valores de R, se apresentando hora melhores hora piores em precisão, mas seguindo uma tendência crescente após 44 pontos. Apesar da irregularidade apresentada, os resultados foram melhores que os alcançados com os arranjos conformes e não foram encontradas singularidades na solução dos problemas.

Já as curvas para os arranjos conforme apresentam inicialmente um resultado decrescente para o erro até uma determinada quantidade de pontos de discretização. A partir daí, comportamento de erro crescente a partir de 36 pontos no contorno até se produzir uma singularidade no sistema de equações, o que ocorre para 164 pontos no caso de  $d=2,5$  e para 84 pontos nos casos de  $d=5$  e  $d=10$ .

O programa computacional implementado neste trabalho aborta a solução do sistema de equações quando encontra uma singularidade; portanto, estes resultados não são válidos para avaliação do método. Tais resultados não são apresentados no gráfico, pois inviabilizariam a observação da curva para os outros níveis de distanciamento e quantidades de pontos.

As tabelas Tabela 6 e Tabela 7 abaixo mostram em que linha do sistema de equações as singularidades foram encontradas na resolução deste problema.

**Tabela 6 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      |
|  | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 44   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 84   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 164  | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |

**Tabela 7 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 44   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 84   | -                | -     | -      | -     | 79  | 16   |
| 164  | -                | -     | -      | 163   | 22  | 15   |

#### 4.2.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS

Em seguida as discretizações no contorno foram alteradas para que não fossem posicionados pontos nos vértices da geometria, eliminando assim a presença de nós duplos.

As curvas de convergência destes casos são apresentadas nas figuras de Figura 4.14 a Figura 4.17:

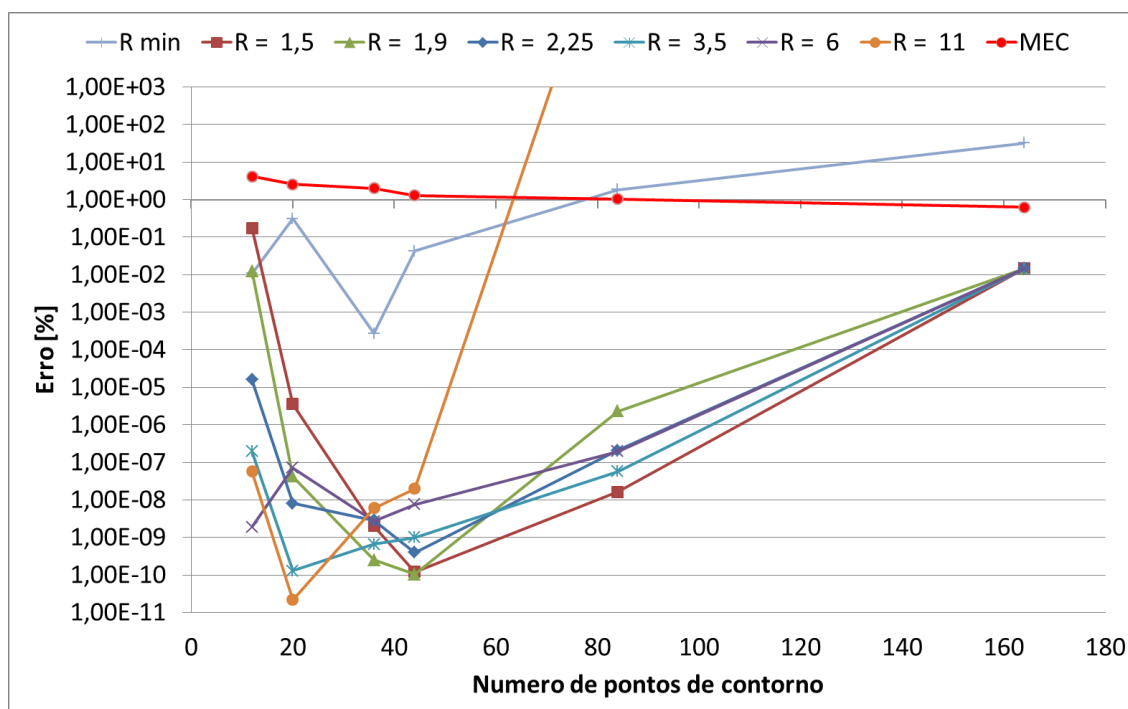


Figura 4.14 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.

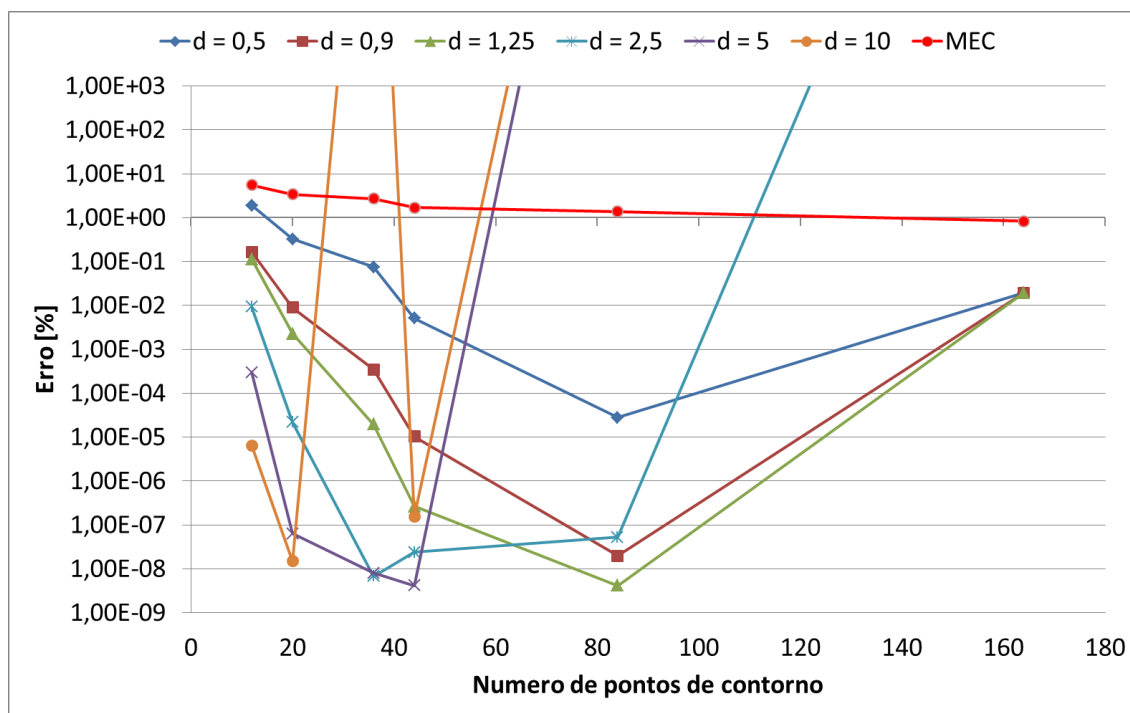
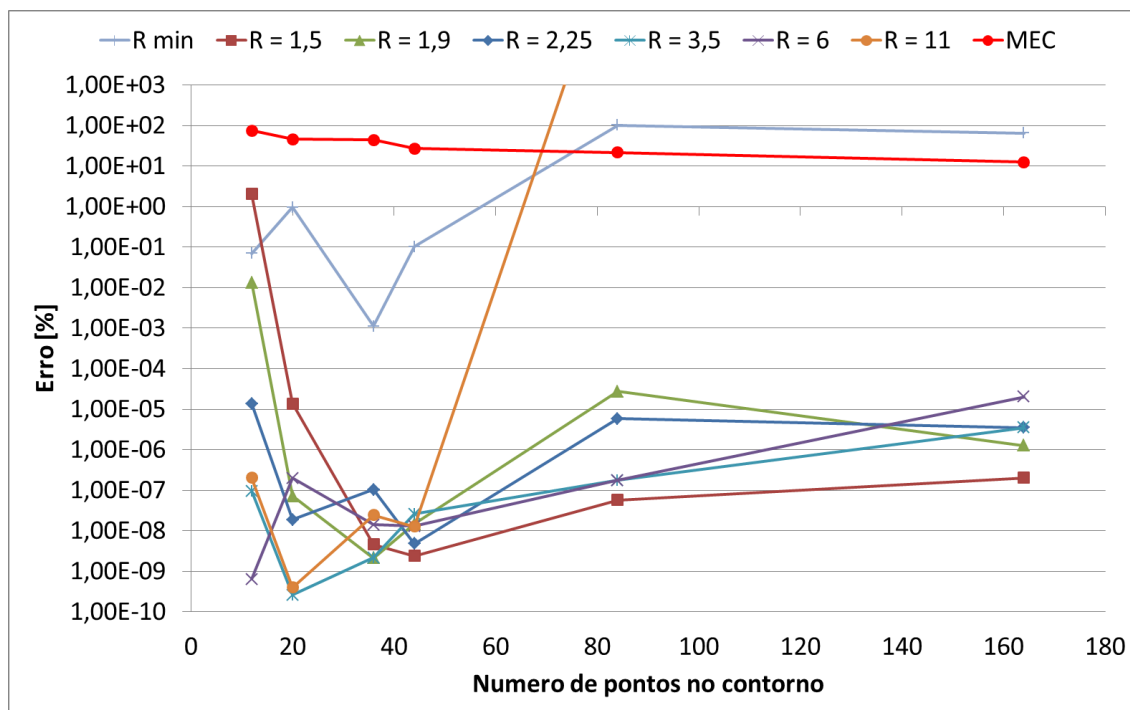
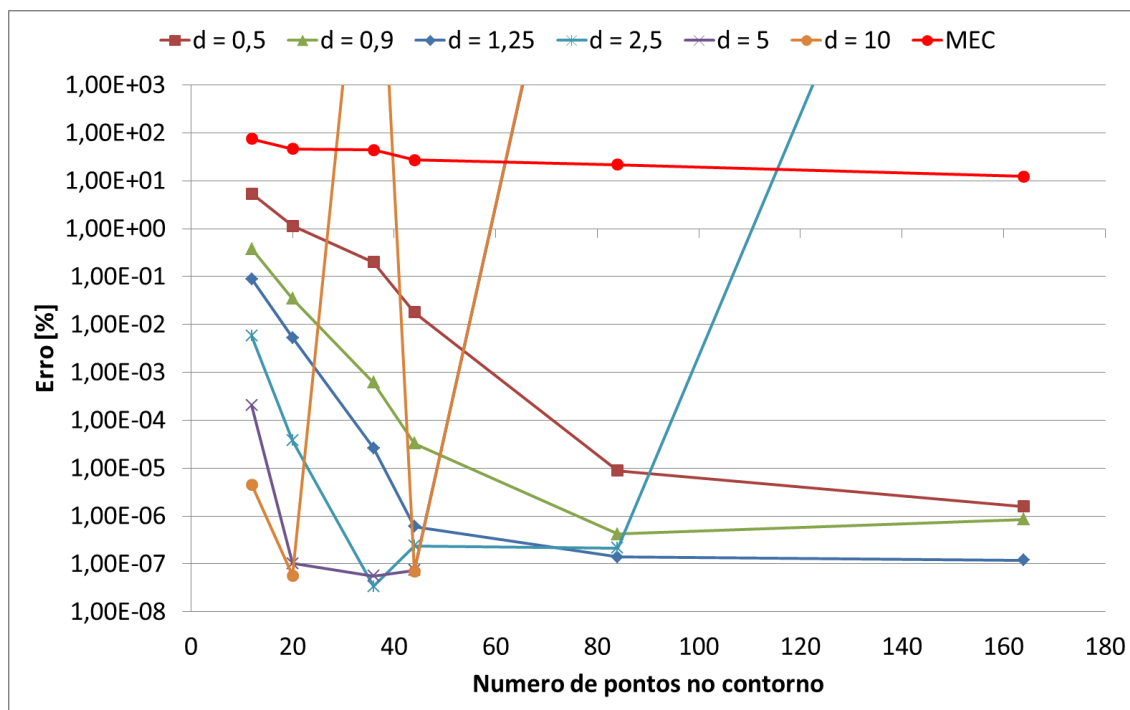


Figura 4.15 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.



**Figura 4.16 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**



**Figura 4.17 – Curvas de convergência para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

Do mesmo modo, as tabelas de Tabela 8 a Tabela 11 trazem os valores dos erros percentuais médios para estes mesmos casos.

**Tabela 8 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| Nº de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 1,41E-02         | 2,35E-01 | 1,68E-02 | 2,14E-05 | 2,60E-07 | 2,50E-09 | 7,64E-08 | 5,56E+00 |
| 20           | 4,13E-01         | 4,75E-06 | 5,64E-08 | 1,09E-08 | 1,71E-10 | 9,58E-08 | 2,91E-11 | 3,41E+00 |
| 36           | 3,60E-04         | 2,70E-09 | 3,34E-10 | 3,86E-09 | 8,83E-10 | 3,57E-09 | 8,07E-09 | 2,70E+00 |
| 44           | 5,67E-02         | 1,59E-10 | 1,37E-10 | 5,33E-10 | 1,32E-09 | 1,01E-08 | 2,66E-08 | 1,71E+00 |
| 84           | 2,46E+00         | 2,18E-08 | 3,08E-06 | 2,78E-07 | 7,61E-08 | 2,61E-07 | 2,27E+08 | 1,39E+00 |
| 164          | 4,29E+01         | 1,95E-02 | 1,95E-02 | 1,95E-02 | 1,95E-02 | 1,95E-02 | 4,01E+05 | 8,40E-01 |

**Tabela 9 – Erro médio percentual para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 1,90E+00         | 1,67E-01 | 1,14E-01 | 9,31E-03 | 2,98E-04 | 6,49E-06 | 5,56E+00 |
| 20           | 3,24E-01         | 9,00E-03 | 2,29E-03 | 2,19E-05 | 6,40E-08 | 1,51E-08 | 3,41E+00 |
| 36           | 7,58E-02         | 3,46E-04 | 1,96E-05 | 6,82E-09 | 8,02E-09 | 7,02E+11 | 2,70E+00 |
| 44           | 5,17E-03         | 1,05E-05 | 2,68E-07 | 2,39E-08 | 4,17E-09 | 1,58E-07 | 1,71E+00 |
| 84           | 2,81E-05         | 1,99E-08 | 4,15E-09 | 5,32E-08 | 5,30E+13 | 4,06E+14 | 1,39E+00 |
| 164          | 1,95E-02         | 1,95E-02 | 1,95E-02 | 3,21E+14 | 1,94E+15 | 1,09E+15 | 8,40E-01 |

**Tabela 10 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 7,01E-02         | 2,04E+00 | 1,34E-02 | 1,37E-05 | 9,58E-08 | 6,43E-10 | 2,04E-07 | 7,52E+01 |
| 20           | 9,63E-01         | 1,38E-05 | 7,12E-08 | 1,86E-08 | 2,61E-10 | 2,00E-07 | 3,98E-10 | 4,61E+01 |
| 36           | 1,11E-03         | 4,62E-09 | 2,13E-09 | 1,03E-07 | 2,15E-09 | 1,41E-08 | 2,44E-08 | 4,39E+01 |
| 44           | 1,02E-01         | 2,39E-09 | 1,47E-08 | 4,77E-09 | 2,61E-08 | 1,31E-08 | 1,28E-08 | 2,73E+01 |
| 84           | 1,01E+02         | 5,69E-08 | 2,74E-05 | 5,79E-06 | 1,76E-07 | 1,75E-07 | 8,06E+06 | 2,18E+01 |
| 164          | 6,51E+01         | 2,03E-07 | 1,26E-06 | 3,54E-06 | 3,54E-06 | 2,02E-05 | 1,58E+05 | 1,24E+01 |

**Tabela 11 – Erro médio percentual para o fluxo – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 5,36E+00         | 3,82E-01 | 8,87E-02 | 5,76E-03 | 2,05E-04 | 4,53E-06 | 7,52E+01 |
| 20           | 1,14E+00         | 3,48E-02 | 5,25E-03 | 3,75E-05 | 1,03E-07 | 5,74E-08 | 4,61E+01 |
| 36           | 2,02E-01         | 6,10E-04 | 2,64E-05 | 3,39E-08 | 5,63E-08 | 1,84E+09 | 4,39E+01 |
| 44           | 1,79E-02         | 3,31E-05 | 6,03E-07 | 2,39E-07 | 7,39E-08 | 6,95E-08 | 2,73E+01 |
| 84           | 8,89E-06         | 4,21E-07 | 1,39E-07 | 2,16E-07 | 8,35E+11 | 9,84E+11 | 2,18E+01 |
| 164          | 1,59E-06         | 8,45E-07 | 1,19E-07 | 3,15E+13 | 2,02E+13 | 1,30E+12 | 1,24E+01 |



Para uma melhor avaliação dos resultados, as curvas de convergência do potencial para os arranjos circulares com  $R$  mínimo,  $R=1,5$ ,  $R=1,9$  e  $R=2,25$  são apresentadas na Figura 4.18 e os resultados para os arranjos conformes com  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  e  $d=1,25$  na Figura 4.19. A curva para o MEC também é apresentada como referencia.

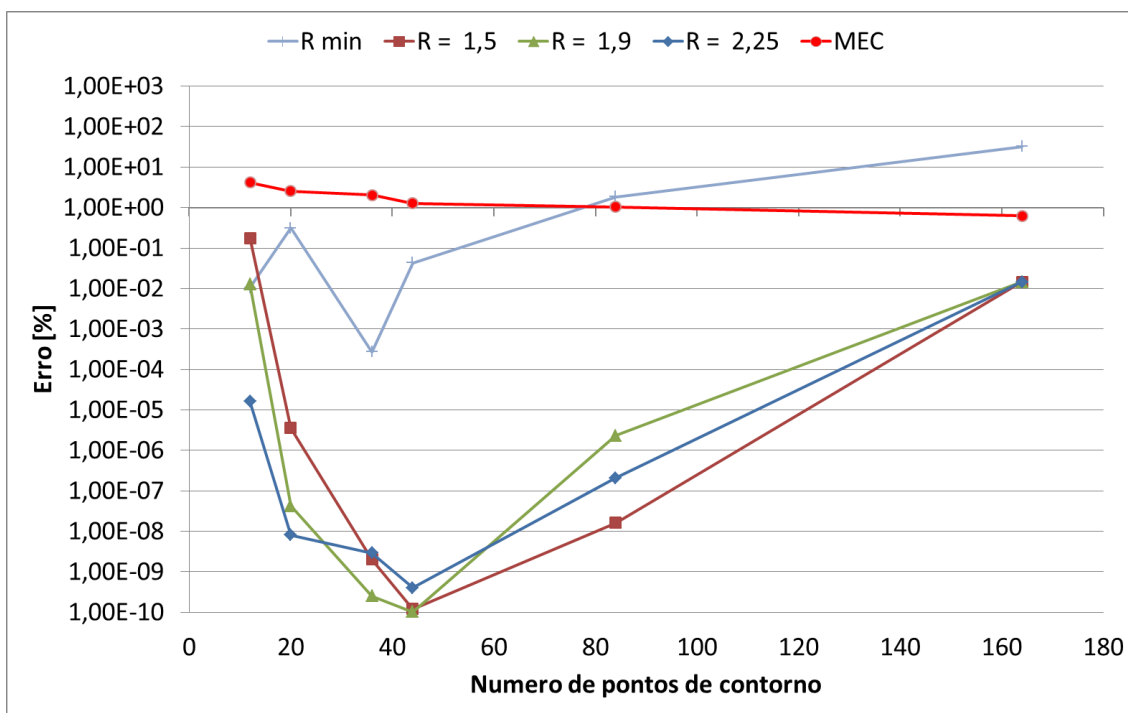


Figura 4.18 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com  $R$  min,  $R=1,5$ ,  $R=1,9$  e  $R=2,25$ .

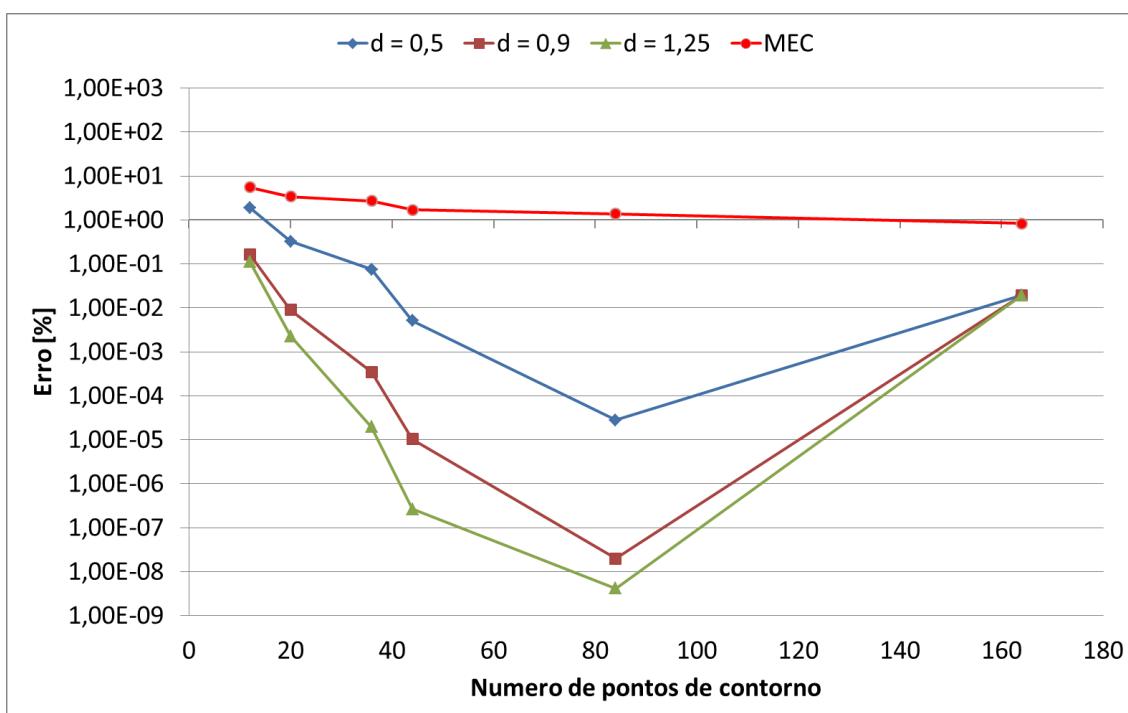


Figura 4.19 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  e  $d=1,25$ .

As figuras Figura 4.20 e Figura 4.21 mostram respectivamente as curvas para os arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$  e para os arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$  junto à curva do MEC para medida de comparação.

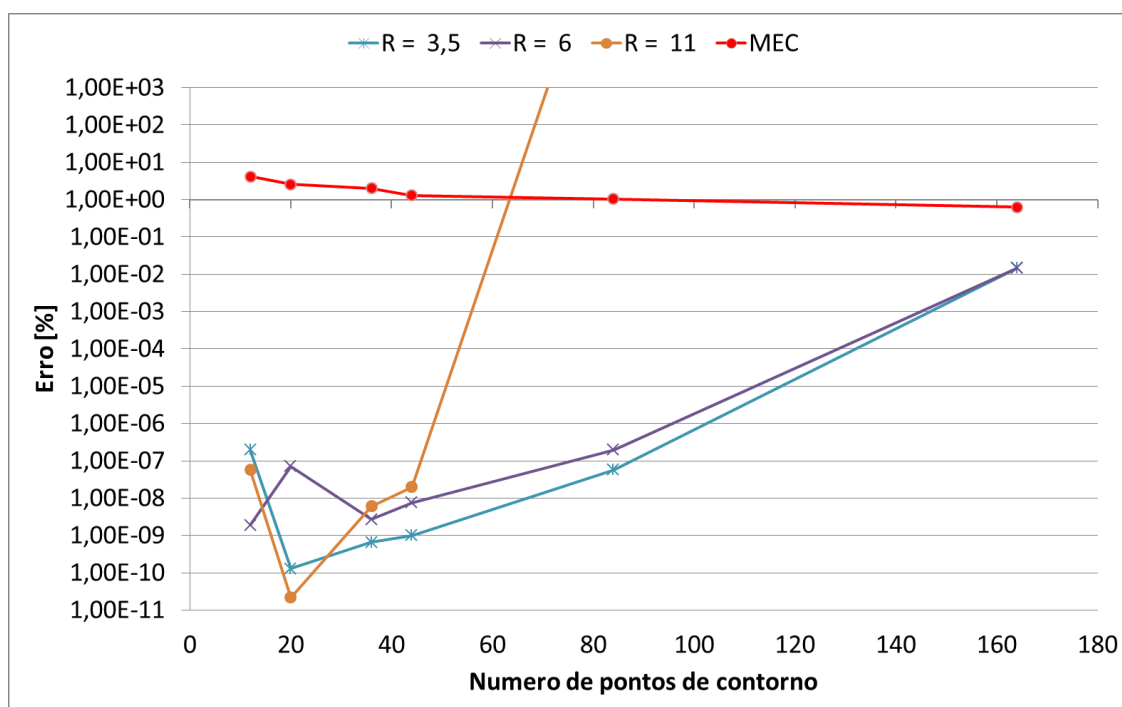


Figura 4.20 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com R=3,5, R=6 e R=11.

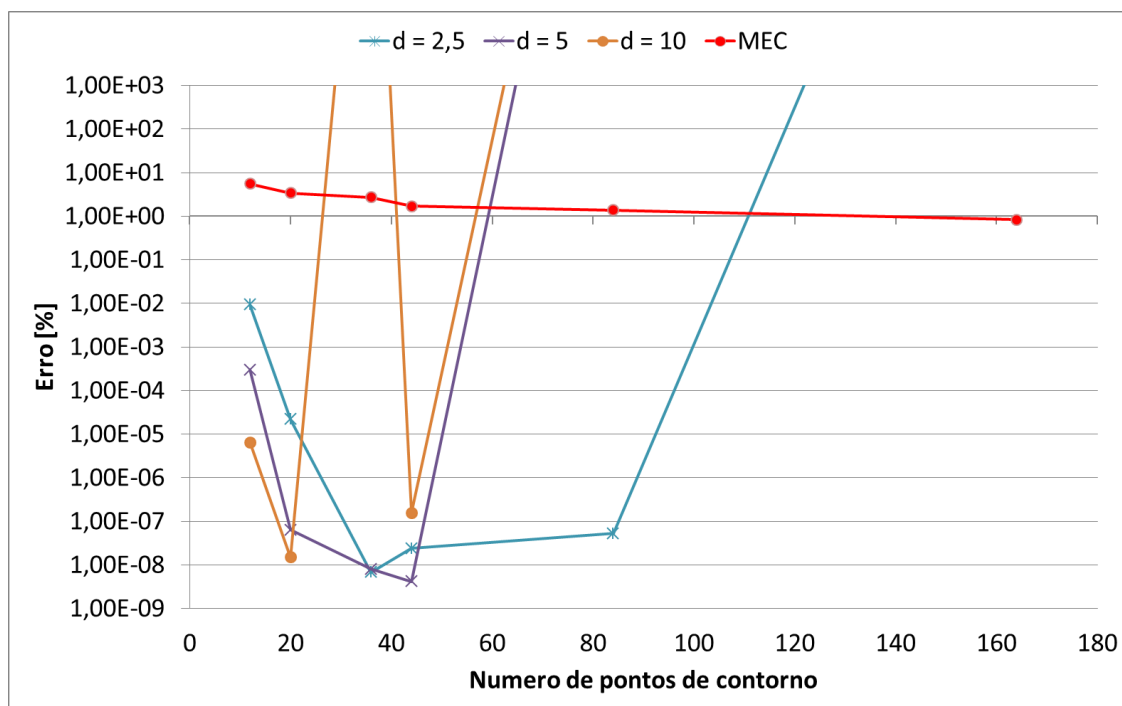


Figura 4.21 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com d=2,5, d=5 e d=10.

Em geral as curvas de convergência para os problemas resolvidos com as discretizações sem nós duplos apresentaram o mesmo comportamento que as resolvidas com os nós duplos, porém com resultados próximos ou piores.

A Tabela 12 e a Tabela 13 abaixo mostram as singularidades encontradas e a linha do sistema de equações em que elas foram encontradas para os casos com malhas sem nós duplos.

Tabela 12 – Singularidades na solução do Problema 1 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|
| Nº de pontos   | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      |
|  | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | 36   |
| 44   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |

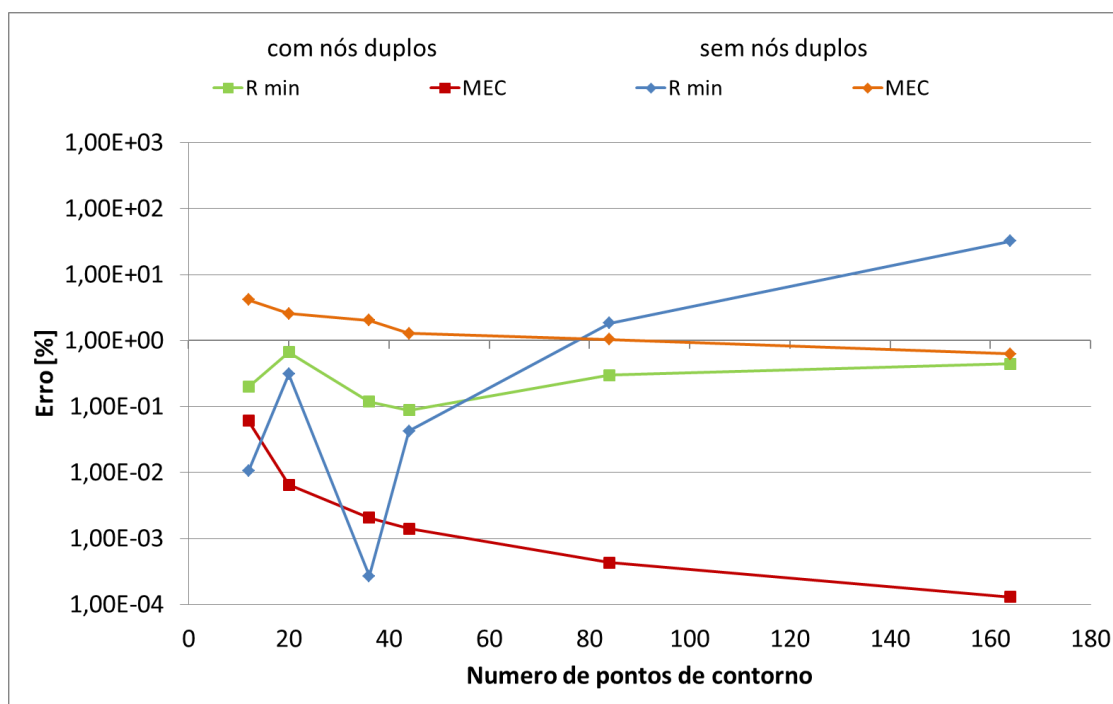
|     |   |   |   |   |     |    |    |
|-----|---|---|---|---|-----|----|----|
| 84  | - | - | - | - | -   | 79 | 17 |
| 164 | - | - | - | - | 164 | 27 | 15 |

**Tabela 13 – Singularidades na solução do Problema 1 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

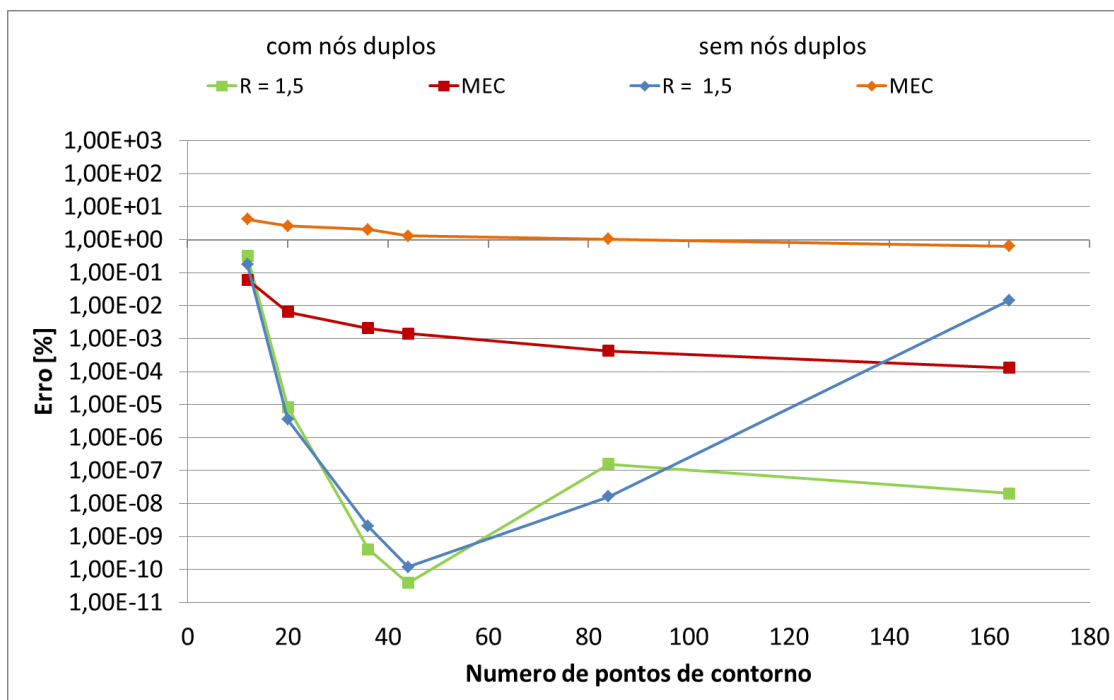
| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| Nº de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -      | -     | -   | 36   |
| 44   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 84   | -                | -     | -      | -     | 79  | 17   |
| 164  | -                | -     | -      | 164   | 27  | 15   |

#### 4.2.3 - COMPARAÇÃO ENTRE AS DISCRETIZAÇÕES COM E SEM NÓS DUPLOS

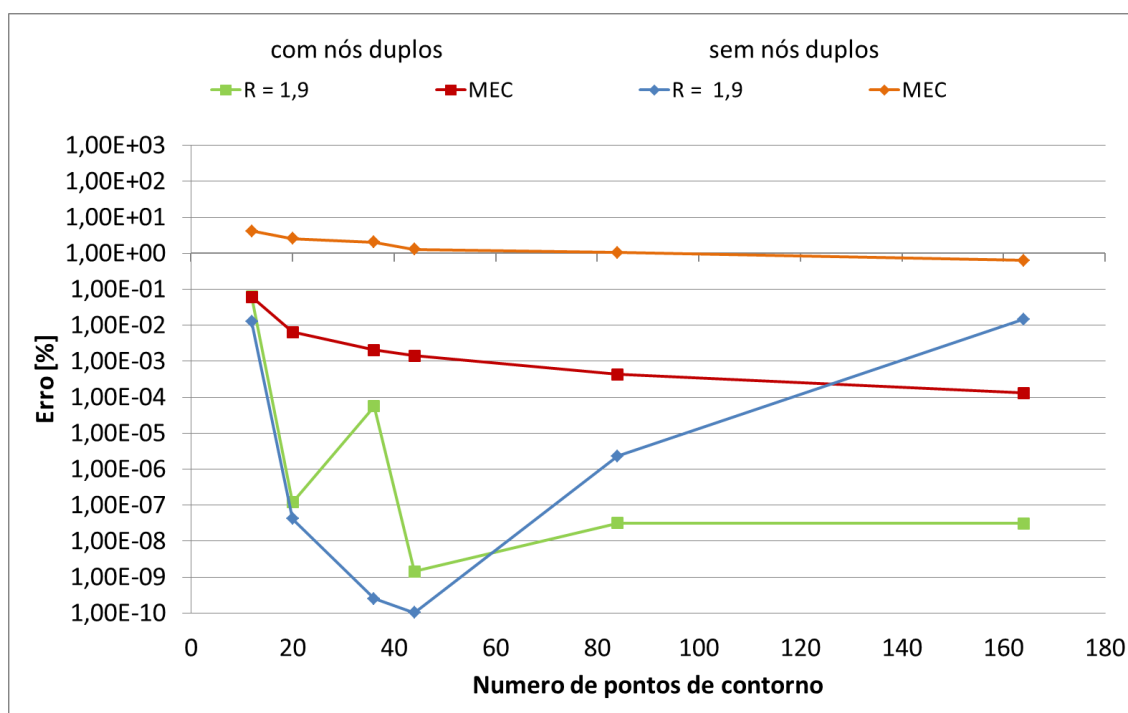
As figuras de Figura 4.22 a Figura 4.34 mostram em um mesmo gráfico para cada arranjo de pontos fontes as curvas de convergência para as discretizações com e sem nós duplos.



**Figura 4.22 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com raio mínimo.**



**Figura 4.23 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=1,5.**



**Figura 4.24 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=1,9.**

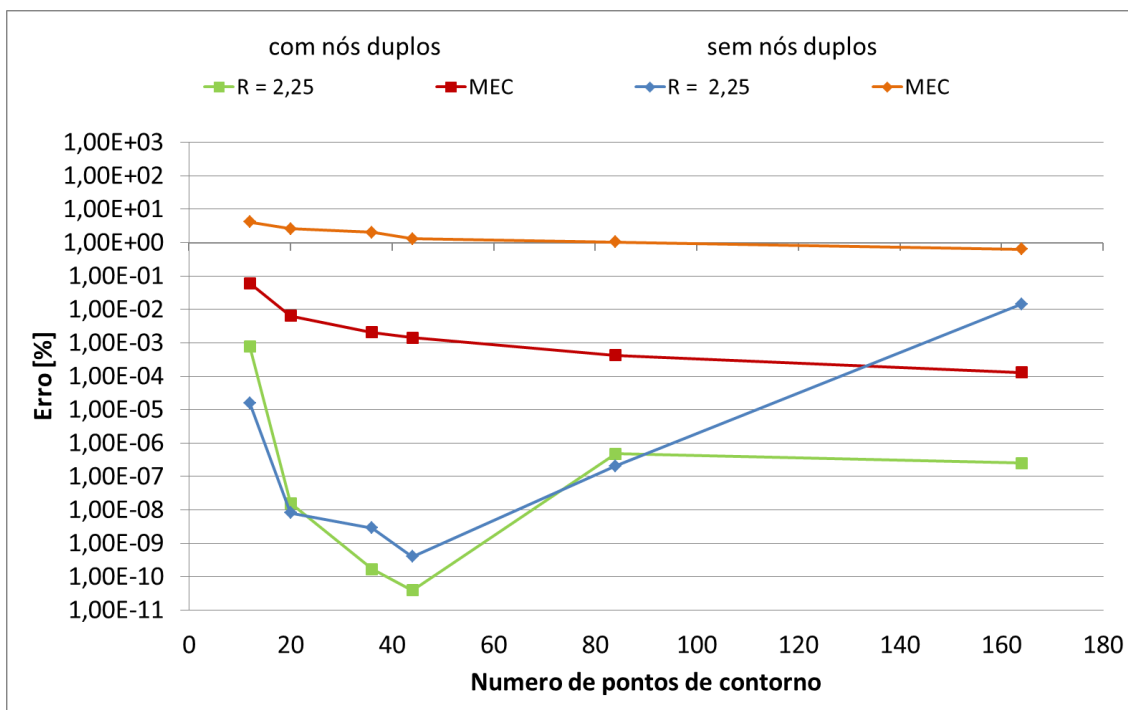


Figura 4.25 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=2,25.

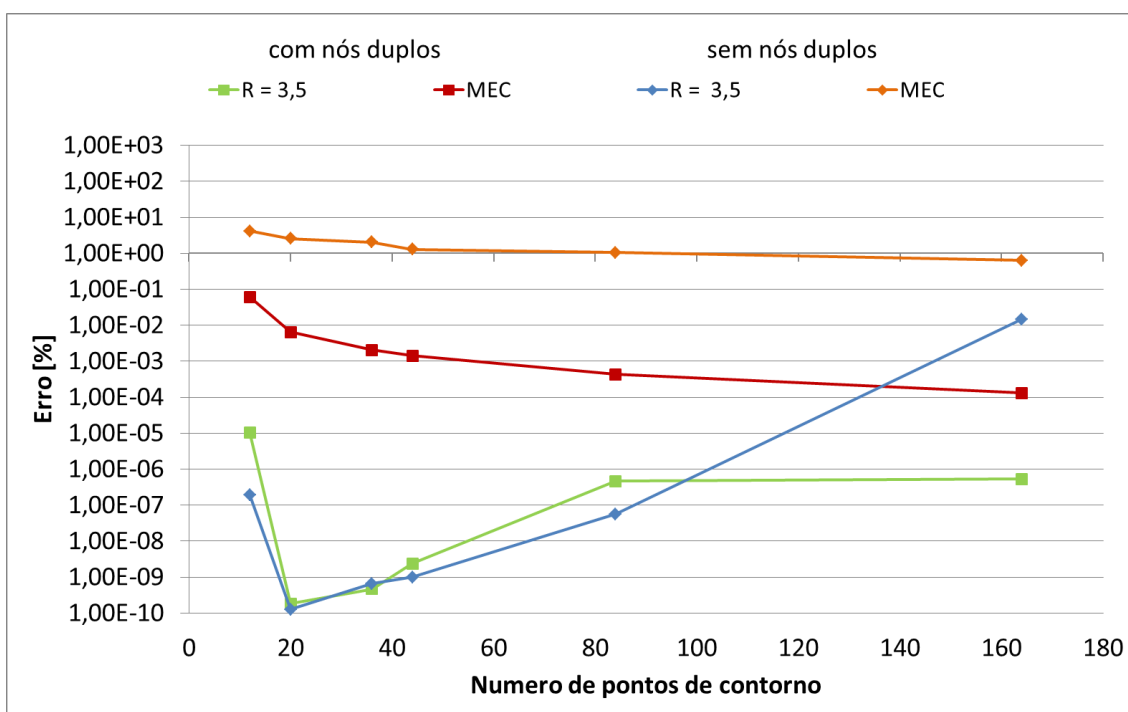


Figura 4.26 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=3,5.

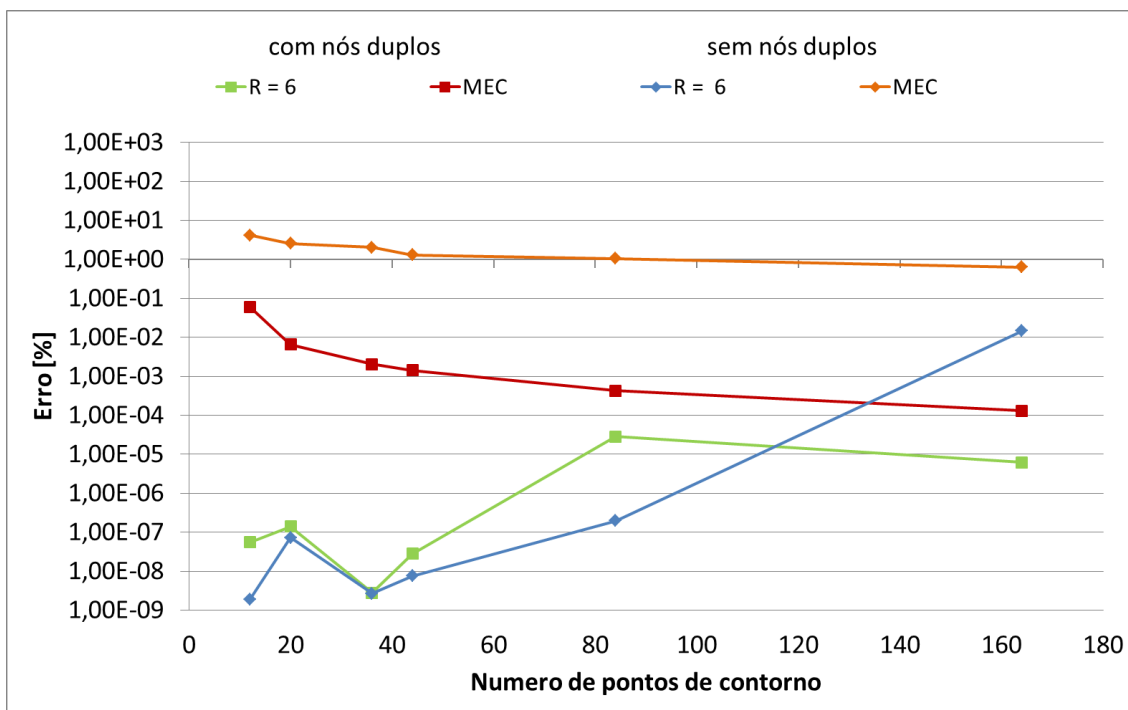


Figura 4.27 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=6.

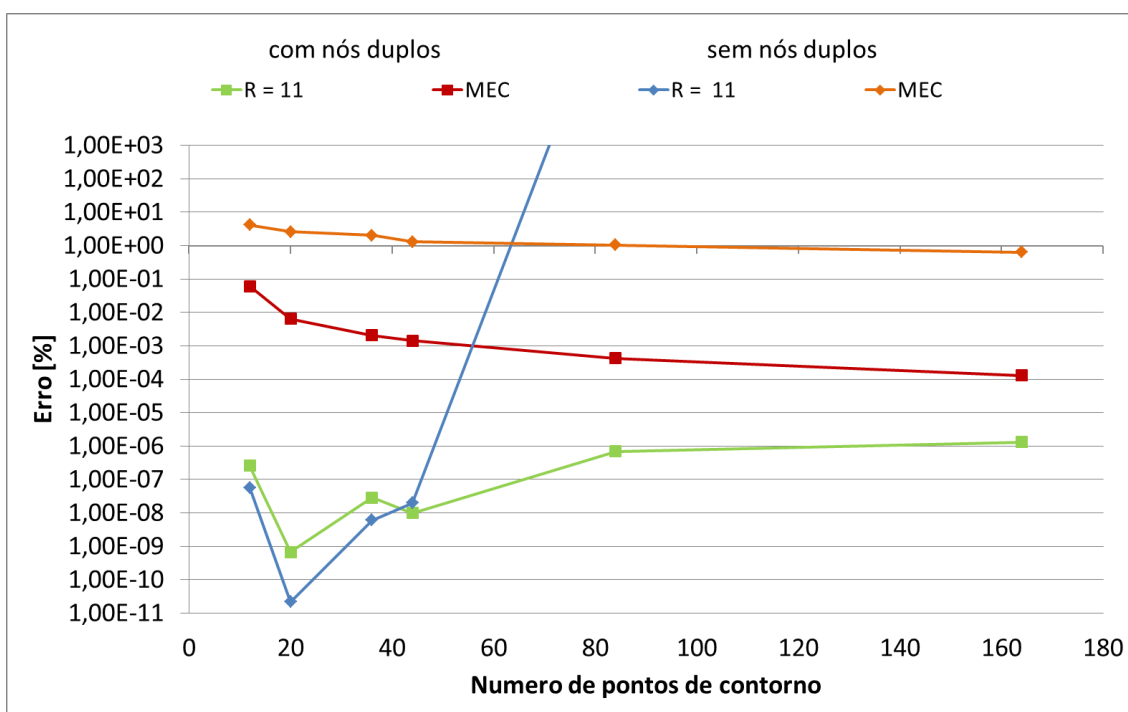


Figura 4.28 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo circular com R=11.

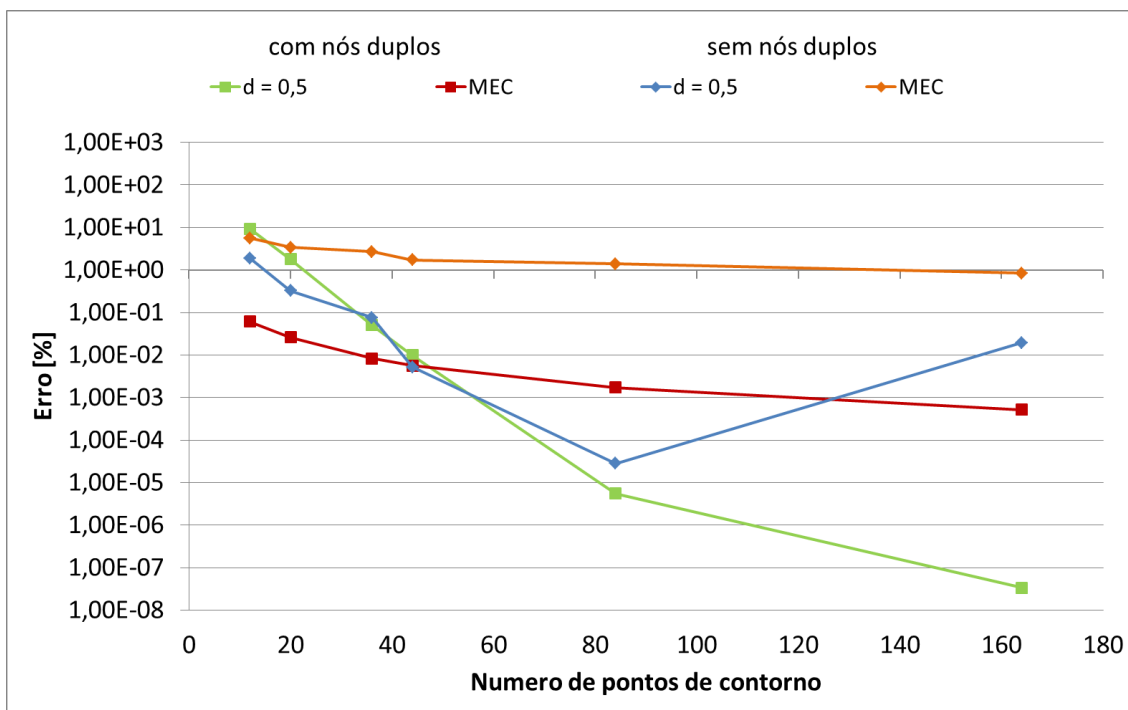


Figura 4.29 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com  $d=0,5$ .

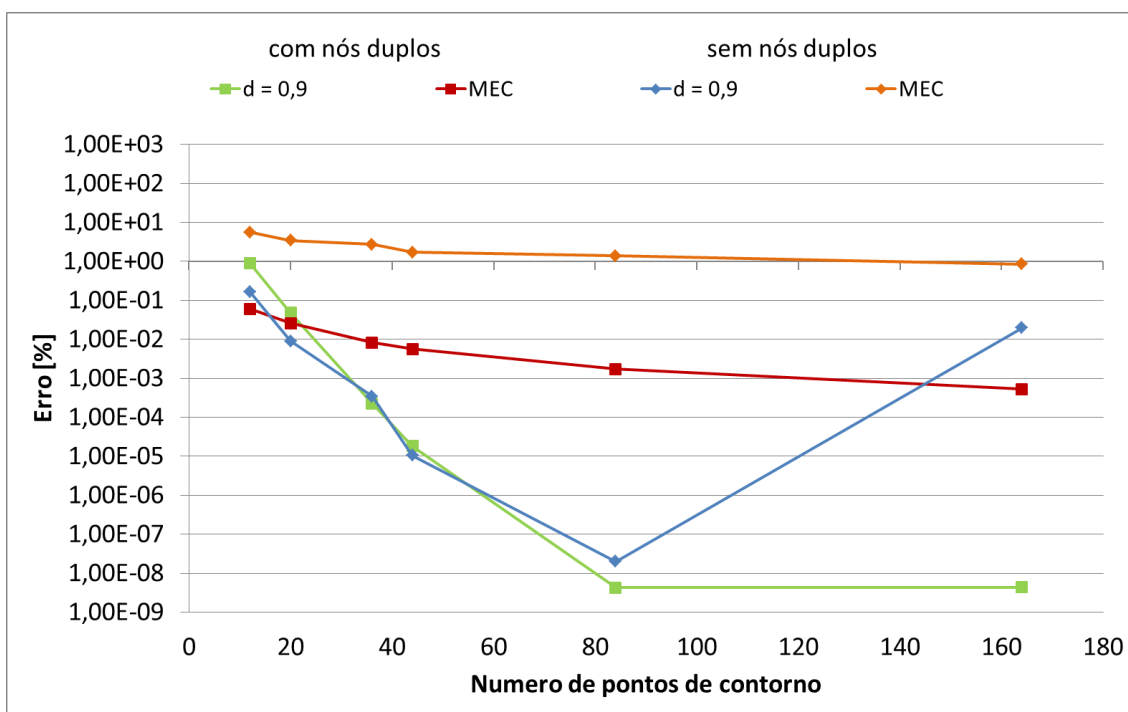


Figura 4.30 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com  $d=0,9$ .



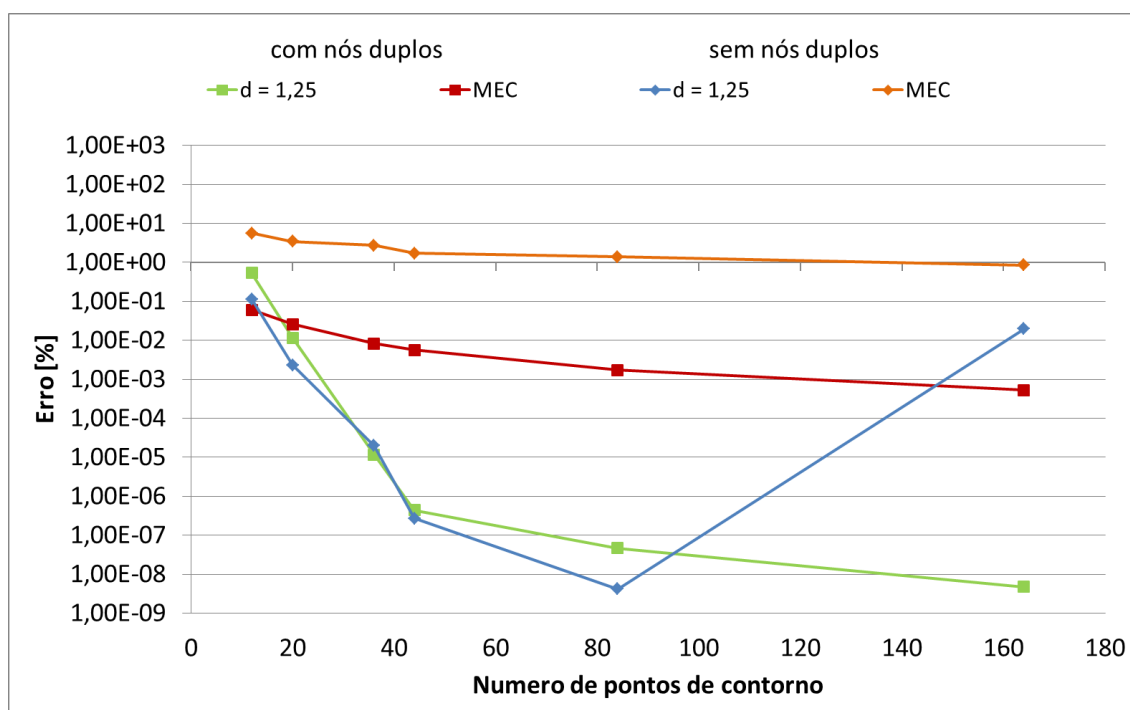


Figura 4.31 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme  $d=1,25$ .

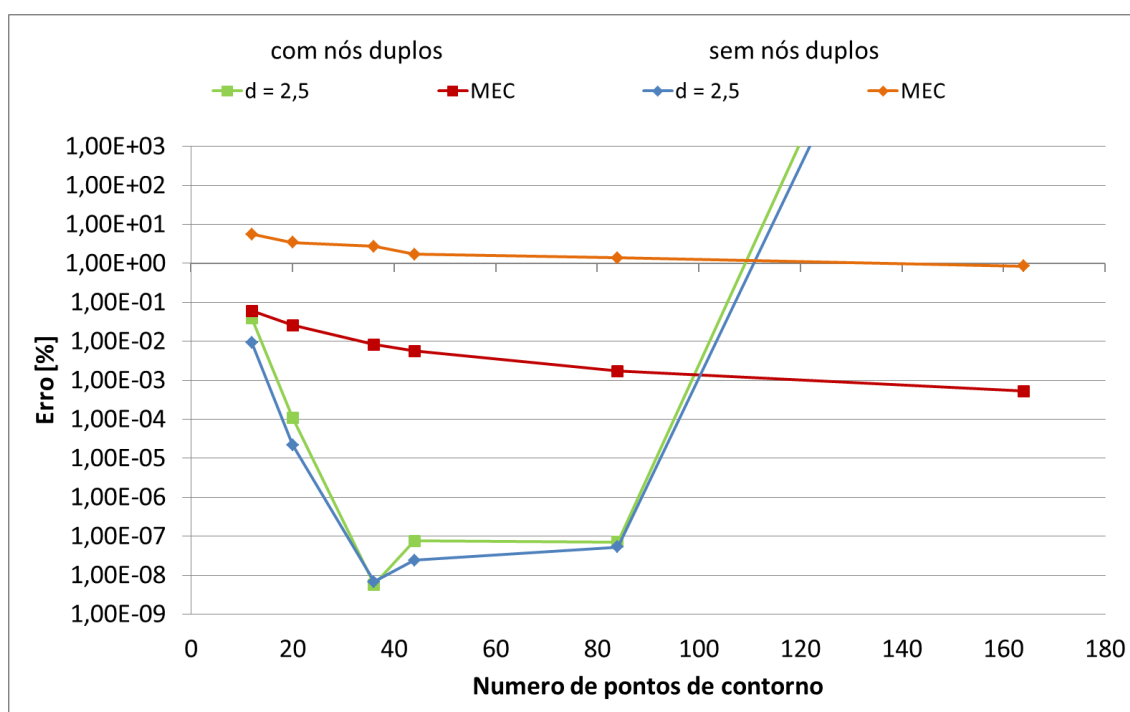


Figura 4.32 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com  $d=2,5$ .

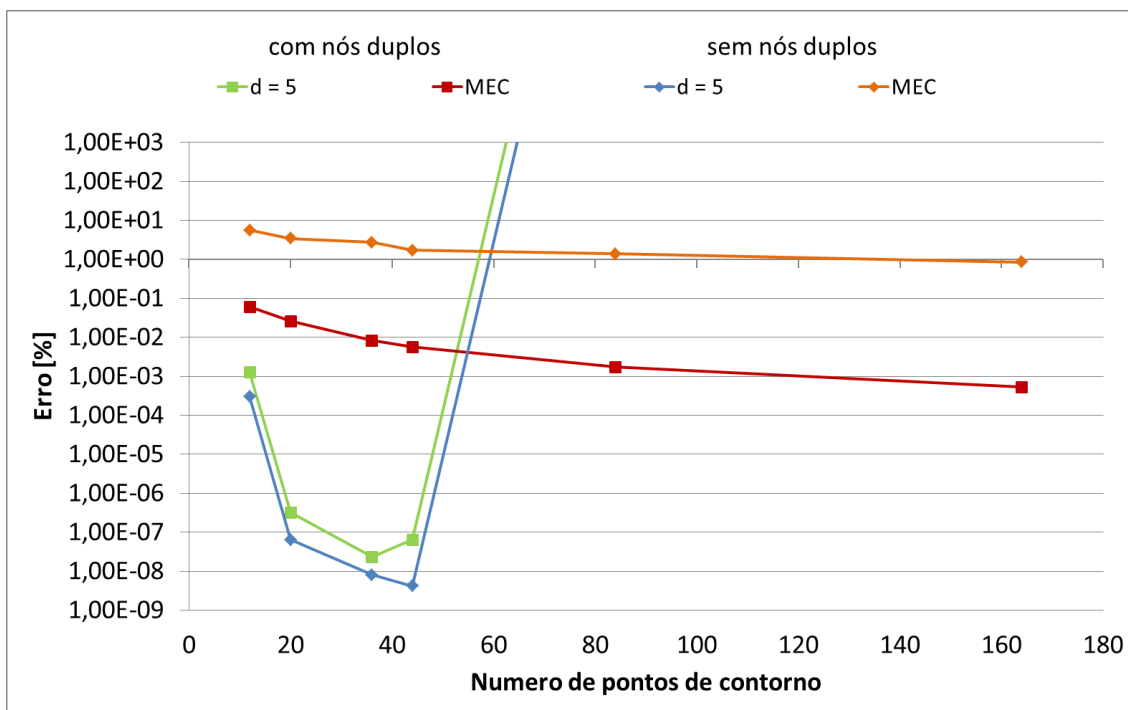


Figura 4.33 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com d=5.

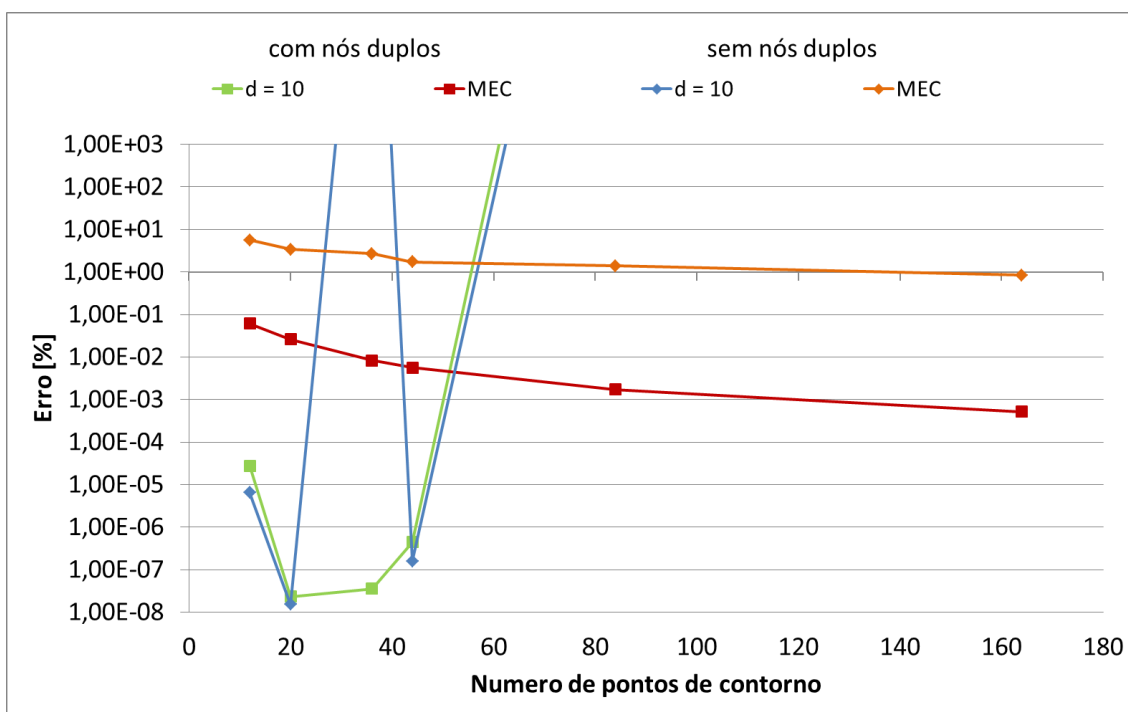
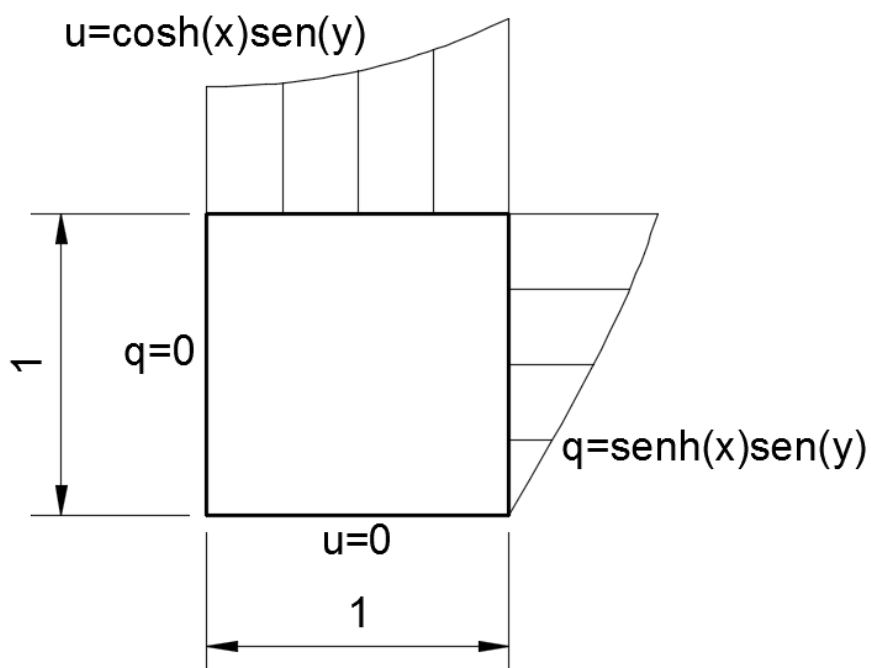


Figura 4.34 – Curvas de convergência para o potencial – Problema 1 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos – Arranjo conforme com d=10.

Uma análise comparativa das curvas para as duas discretizações mostra que a eliminação dos nós duplos não foi eficaz nem para a melhoria da precisão do método, nem para adiar o encontro de singularidades no sistema de equações.

#### 4.3 - PROBLEMA 2 – PROBLEMA DE POTENCIAL COM CONDIÇÕES DE CONTORNO NÃO CONSTANTES

O segundo problema foi retirado do trabalho de Prado (1991). É um problema de potencial cujas condições de contorno são dadas pela figura a seguir:



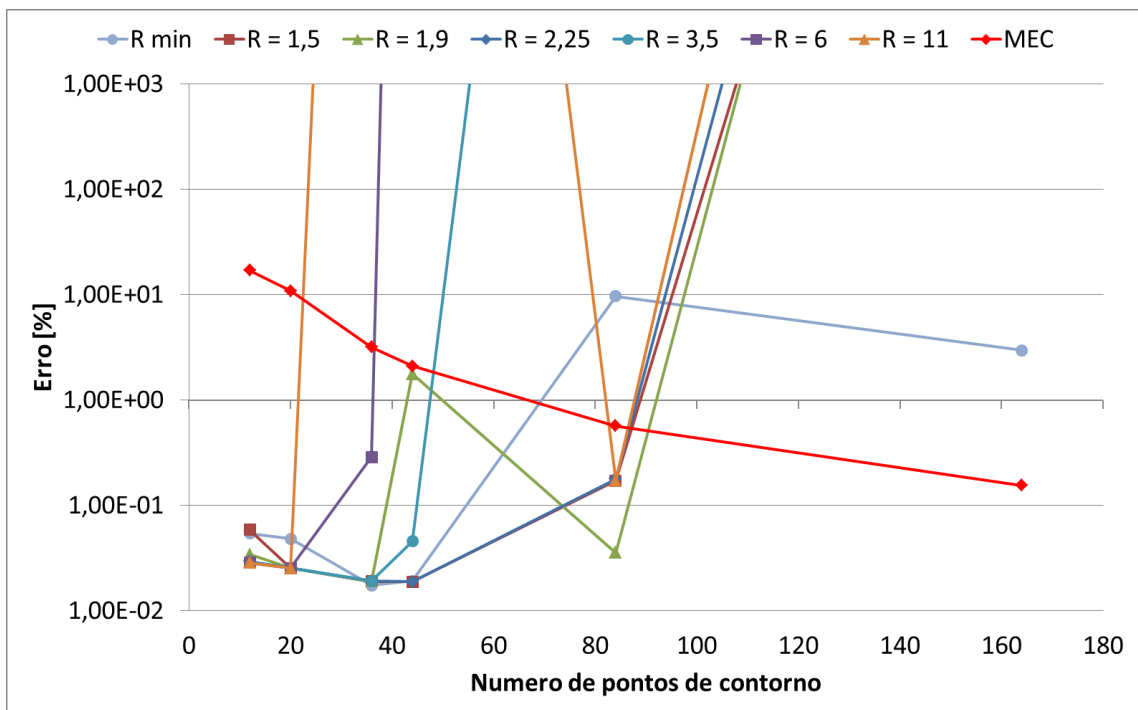
**Figura 4.35 – Condições de contorno para o Problema 2 – Problema de potencial com condições de contorno não constantes.**

A solução exata deste problema é dada pelas seguintes expressões:

$$\begin{cases} u(x, y) = \cosh(x) \operatorname{sen}(y) \\ q(x, y) = \operatorname{sen}n_x + \cosh(x) \cos(y) n_y \end{cases}$$

#### 4.3.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS

As curvas de convergência para este problema resolvido com discretização com nós duplos são apresentadas a seguir nas figuras de Figura 4.36 a Figura 4.39, para o potencial e para o fluxo, respectivamente.



**Figura 4.36 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

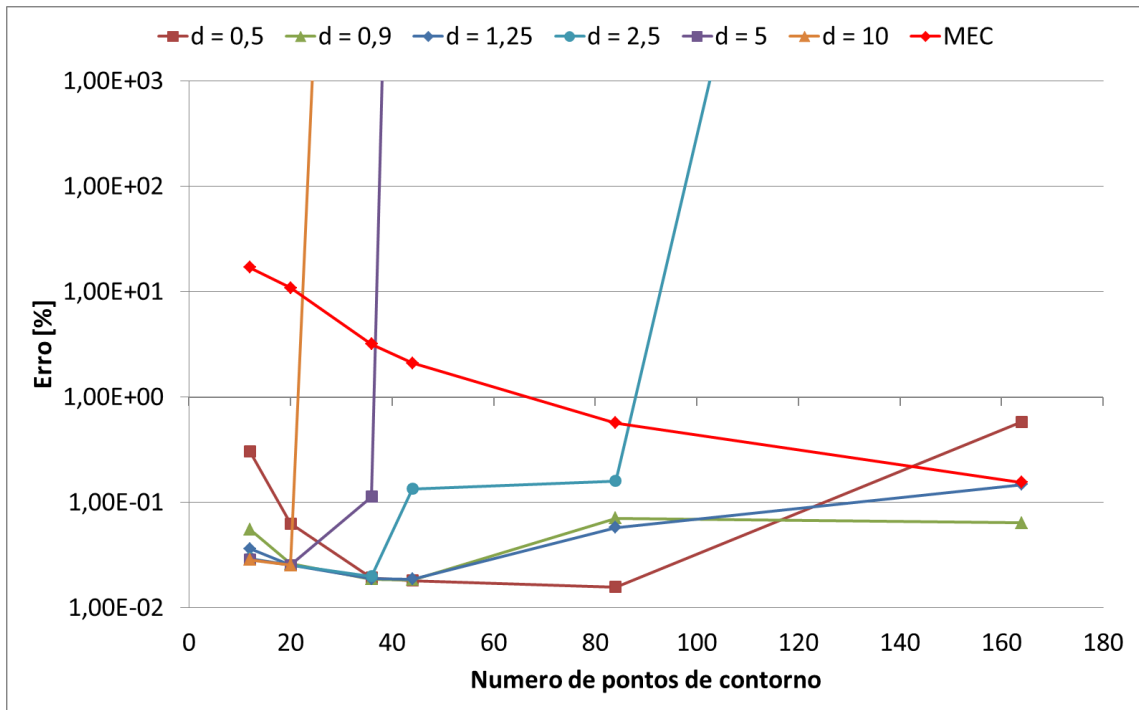


Figura 4.37 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.

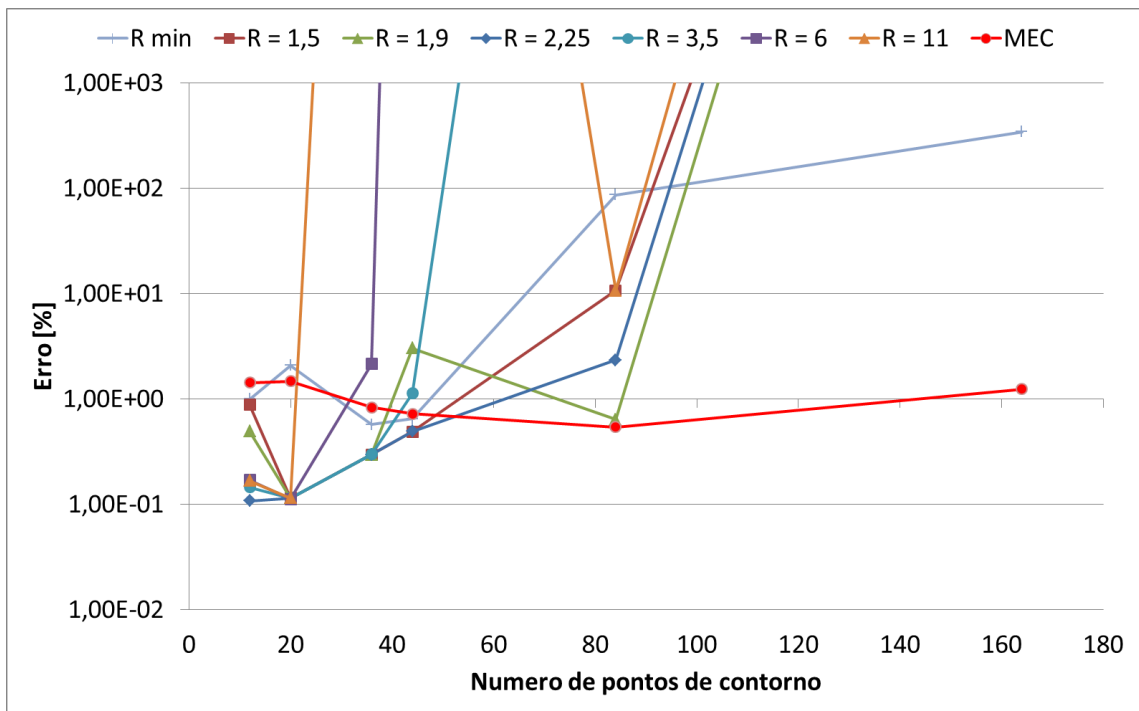


Figura 4.38 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.

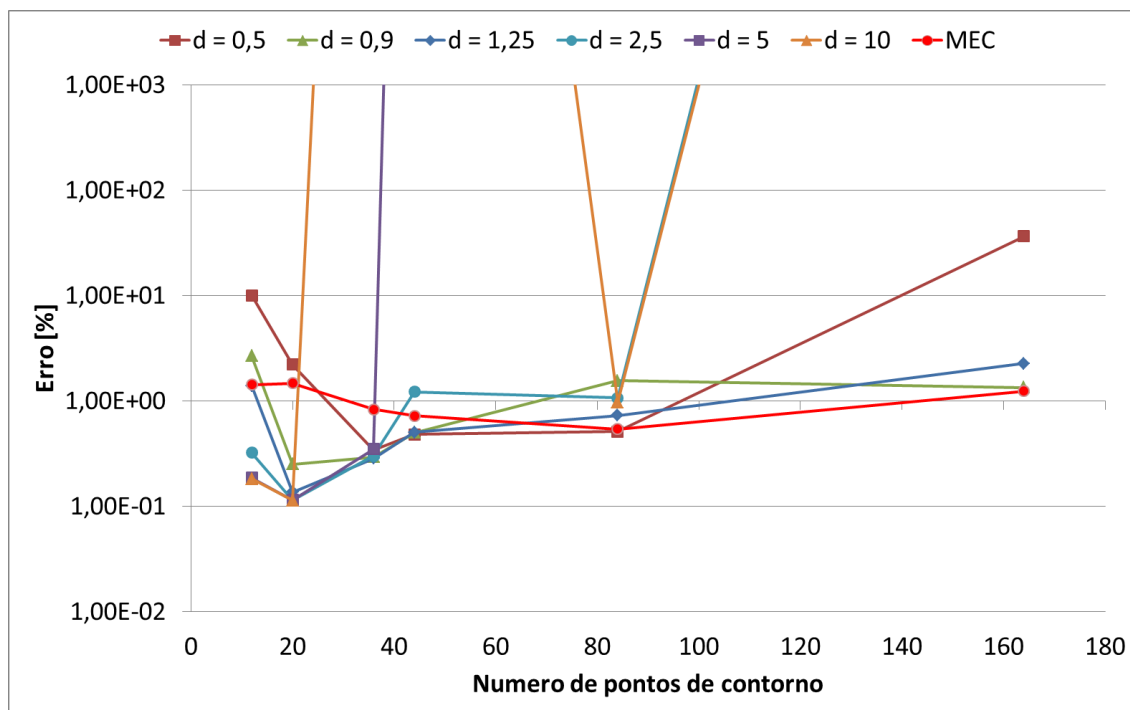


Figura 4.39 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.

Os valores dos erros médios percentuais para o potencial e para o fluxo são apresentados nas tabelas de Tabela 14 a Tabela 17 a seguir.

Tabela 14 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 5,43E-02         | 5,88E-02 | 3,41E-02 | 2,95E-02 | 2,88E-02 | 2,87E-02 | 2,85E-02 | 1,70E+01 |
| 20           | 4,81E-02         | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 1,09E+01 |
| 36           | 1,75E-02         | 1,90E-02 | 1,91E-02 | 1,91E-02 | 1,91E-02 | 2,87E-01 | 8,87E+14 | 3,19E+00 |
| 44           | 1,91E-02         | 1,89E-02 | 1,77E+00 | 1,89E-02 | 4,58E-02 | 4,45E+14 | 5,71E+14 | 2,11E+00 |
| 84           | 9,70E+00         | 1,71E-01 | 3,56E-02 | 1,79E-01 | 1,23E+14 | 1,14E+15 | 1,71E-01 | 5,67E-01 |
| 164          | 2,98E+00         | 8,56E+11 | 1,22E+13 | 3,97E+13 | 8,59E+14 | 5,02E+14 | 7,10E+15 | 1,55E-01 |

Tabela 15 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 3,06E-01         | 5,56E-02 | 3,64E-02 | 2,95E-02 | 2,87E-02 | 2,87E-02 | 1,70E+01 |
| 20           | 6,31E-02         | 2,62E-02 | 2,55E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 2,54E-02 | 1,09E+01 |

|     |          |          |          |          |          |          |          |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 36  | 1,92E-02 | 1,87E-02 | 1,89E-02 | 1,99E-02 | 1,14E-01 | 3,58E+15 | 3,19E+00 |
| 44  | 1,81E-02 | 1,85E-02 | 1,87E-02 | 1,34E-01 | 1,70E+14 | 4,64E+15 | 2,11E+00 |
| 84  | 1,57E-02 | 7,08E-02 | 5,77E-02 | 1,60E-01 | 3,48E+16 | 3,41E+15 | 5,67E-01 |
| 164 | 5,83E-01 | 6,39E-02 | 1,47E-01 | 4,37E+15 | 1,88E+15 | 2,24E+16 | 1,55E-01 |

**Tabela 16 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| Nº de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 1,00E+00         | 8,81E-01 | 4,95E-01 | 1,08E-01 | 1,46E-01 | 1,70E-01 | 1,68E-01 | 2,38E+01 |
| 20           | 2,08E+00         | 1,15E-01 | 1,15E-01 | 1,15E-01 | 1,15E-01 | 1,12E-01 | 1,15E-01 | 1,48E+01 |
| 36           | 5,74E-01         | 2,97E-01 | 2,98E-01 | 2,98E-01 | 2,98E-01 | 2,14E+00 | 1,68E+13 | 4,63E+00 |
| 44           | 6,52E-01         | 4,90E-01 | 3,04E+00 | 4,94E-01 | 1,13E+00 | 3,84E+13 | 7,11E+12 | 3,28E+00 |
| 84           | 8,70E+01         | 1,07E+01 | 6,38E-01 | 2,35E+00 | 1,00E+13 | 2,01E+14 | 1,07E+01 | 1,29E+00 |
| 164          | 3,43E+02         | 5,66E+11 | 3,22E+12 | 4,67E+12 | 8,27E+13 | 2,80E+13 | 4,33E+14 | 1,51E+00 |

**Tabela 17 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Nº de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 1,01E+01         | 2,68E+00 | 1,40E+00 | 3,24E-01 | 1,87E-01 | 1,83E-01 | 2,38E+01 |
| 20           | 2,23E+00         | 2,51E-01 | 1,37E-01 | 1,15E-01 | 1,15E-01 | 1,14E-01 | 1,48E+01 |
| 36           | 3,42E-01         | 2,94E-01 | 2,84E-01 | 3,00E-01 | 3,50E-01 | 2,31E+14 | 4,63E+00 |
| 44           | 4,83E-01         | 5,02E-01 | 5,04E-01 | 1,23E+00 | 2,12E+13 | 2,14E+14 | 3,28E+00 |
| 84           | 5,14E-01         | 1,56E+00 | 7,30E-01 | 1,08E+00 | 4,94E+15 | 9,79E-01 | 1,29E+00 |
| 164          | 3,66E+01         | 1,35E+00 | 2,28E+00 | 1,80E+15 | 2,64E+14 | 1,19E+15 | 1,51E+00 |

Como no primeiro problema, as curvas de convergência para os arranjos circulares com R mínimo, R=1,5, R=1,9, R=2,25 e os arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25, junto a curva para o MEC, são apresentadas separadamente nas figuras Figura 4.40 e Figura 4.41 abaixo.

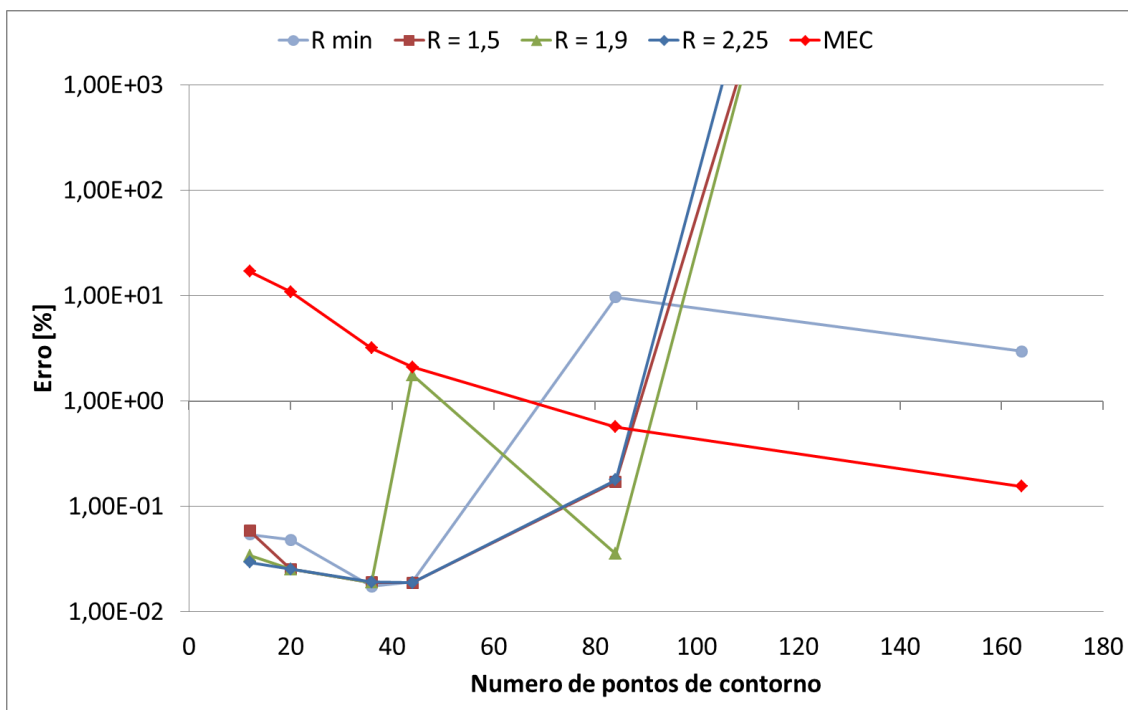


Figura 4.40 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjos circulares com R min, R=1,5, R=1,9 e R=2,25.

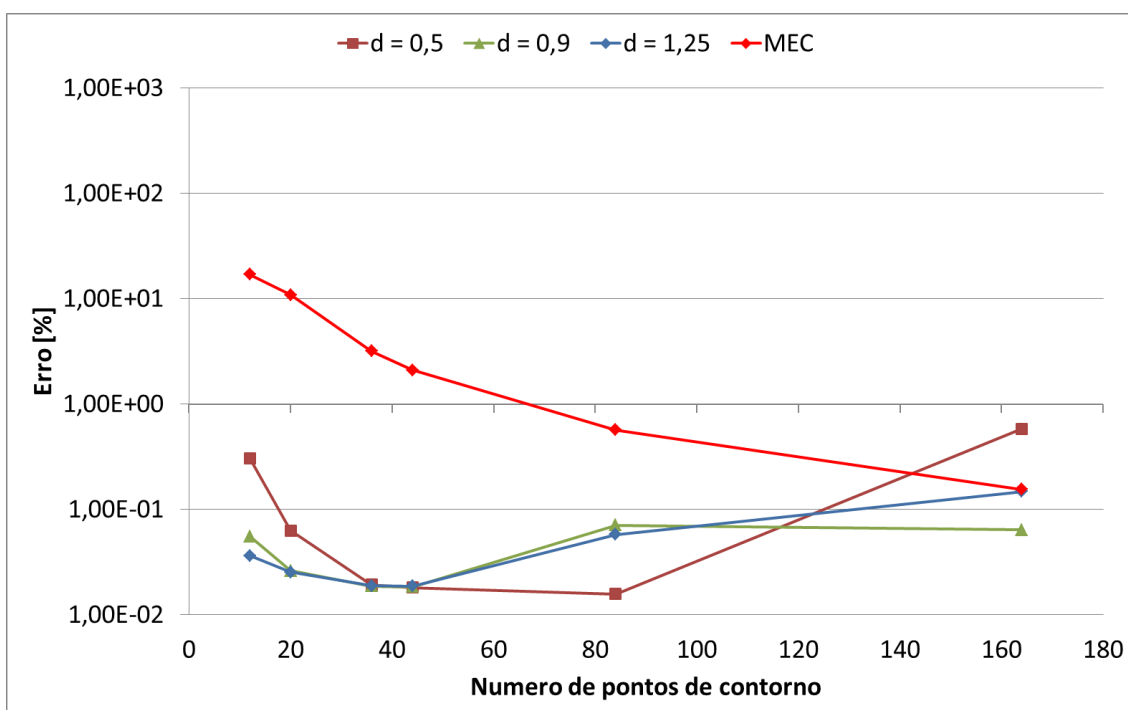


Figura 4.41 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25.



Em comparação com o primeiro problema, os resultados para o MSF foram piores, porém o mesmo também aconteceu para o MEC. Tal comportamento é esperado, pois a complexidade deste problema é maior em relação ao primeiro.

Neste problema, no entanto, o MSF apresentou resultados melhores que o MEC já desde o início, com 12 pontos de contorno. Enquanto o MSF manteve seu erro abaixo do patamar de 1%, para praticamente todos os casos, o MEC só atingiu tal marca a partir do uso de 84 pontos.

O arranjo circular apresentou um comportamento pior do que os arranjos conformes, pois, a partir de um determinado nível de refinamento, sua precisão decresce de modo repentino com níveis de erro altos, mesmo nos menores raios. Sabendo-se que uma significativa parcela dos pesquisadores do MSF opta por tal arranjo de pontos fonte, fica a dúvida se esta escolha se deve ao fato de que o modelo que acompanha o contorno tem baixo desempenho no caso de reentrâncias, situação esta que não será abordada nesta dissertação.

No entanto, o MSF mostrou ter atingido um patamar mínimo do erro para 36 e 44 pontos, apresentando, para o aumento da quantidade de pontos, tendência de aumento do erro, enquanto o MEC apresenta a tendência de maior precisão como se é esperado de um método de discretização.

O distanciamento dos pontos fontes aparenta ter influência na precisão dos resultados. A curva para  $R=1,5$  e  $d=5$  ainda apresenta um comportamento mais regular, as curvas para os outros valores de distancias, no entanto, apresentam hora maior precisão, hora menor, conforme o número de pontos aumentam.

As curvas para os arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$  e para os arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$ , junto à curva do MEC, são apresentadas nas figuras Figura 4.42 e Figura 4.43 a seguir.

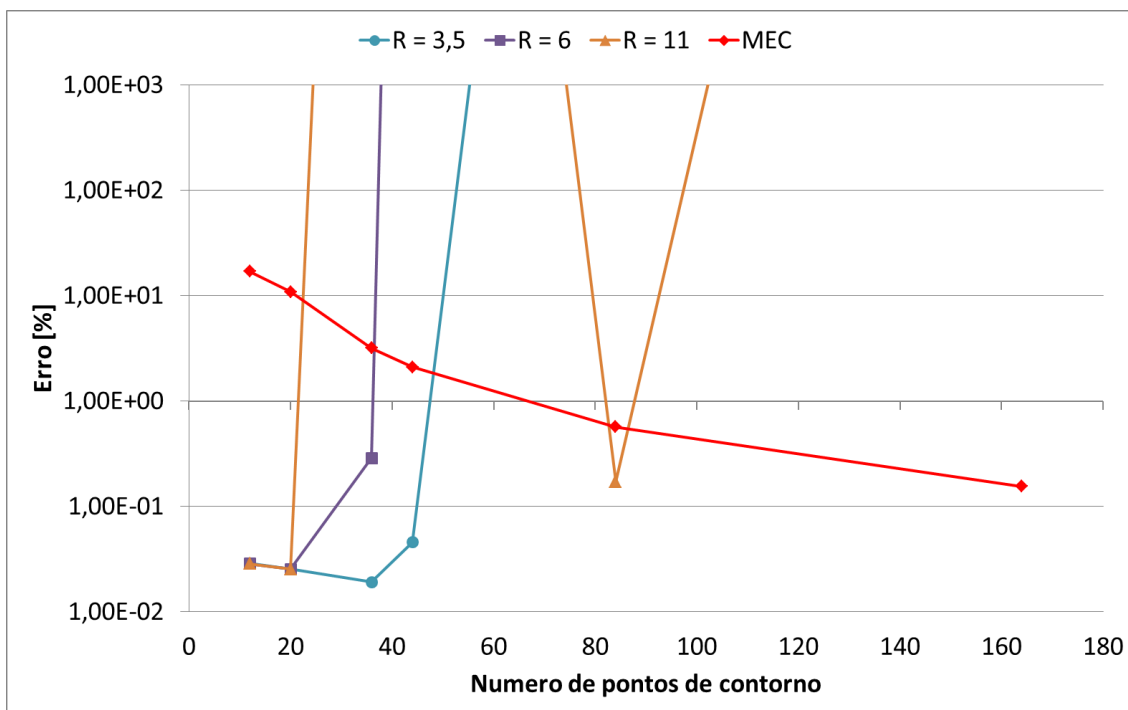


Figura 4.42 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjos circulares com R=3,5, R=6 e R=11.

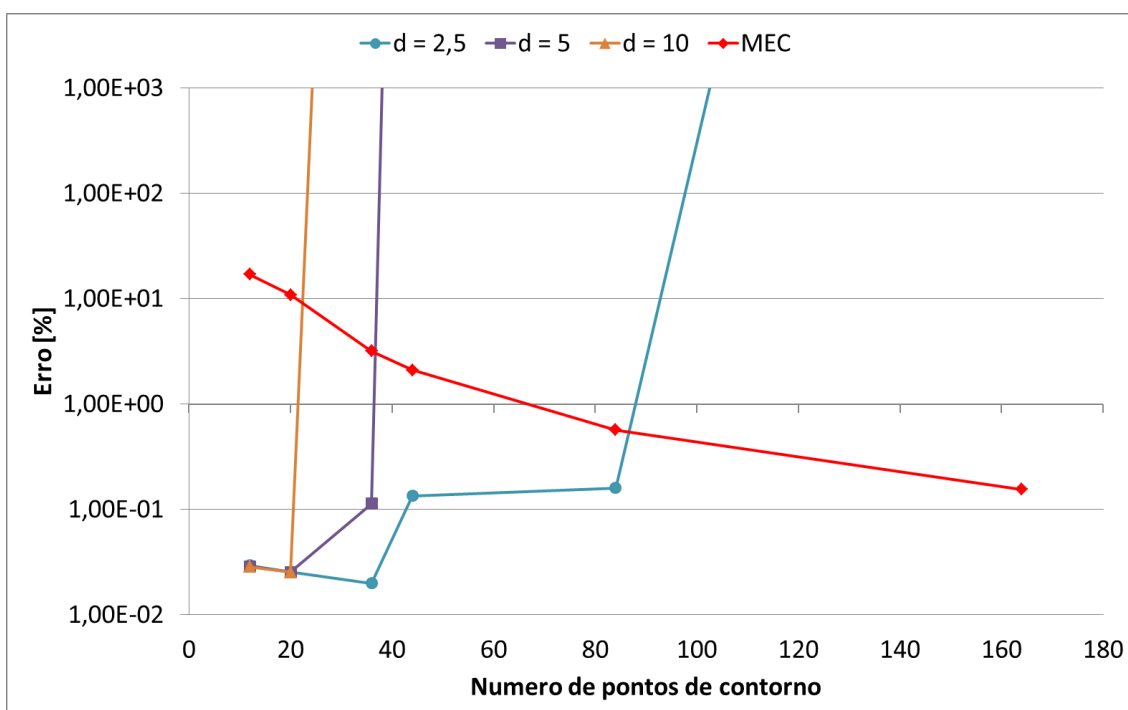


Figura 4.43 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Malha com nós duplos – Arranjos conformes com d=2,5, d=5 e d=10.

As curvas para os maiores distanciamentos dos pontos fontes mostram um comportamento semelhante ao do primeiro problema. Apesar de inicialmente

apresentarem melhores resultados, com o aumento do número de pontos logo suas curvas tendem a subir o nível de erro, e com pouco número de pontos já atingem singularidade.

As tabelas Tabela 18 e Tabela 19 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme. mostram as singularidades encontradas e a linha do sistema de equações em que elas foram encontradas para os arranjos circulares e conformes respectivamente.

**Tabela 18 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|
| Nº de pontos   | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      |
|  | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | 36   |
| 44   | -                | -     | -     | -      | -     | 44  | 43   |
| 84   | -                | -     | -     | -      | 84    | 83  | 78   |
| 164  | -                | 164   | 162   | 163    | 159   | 153 | 148  |

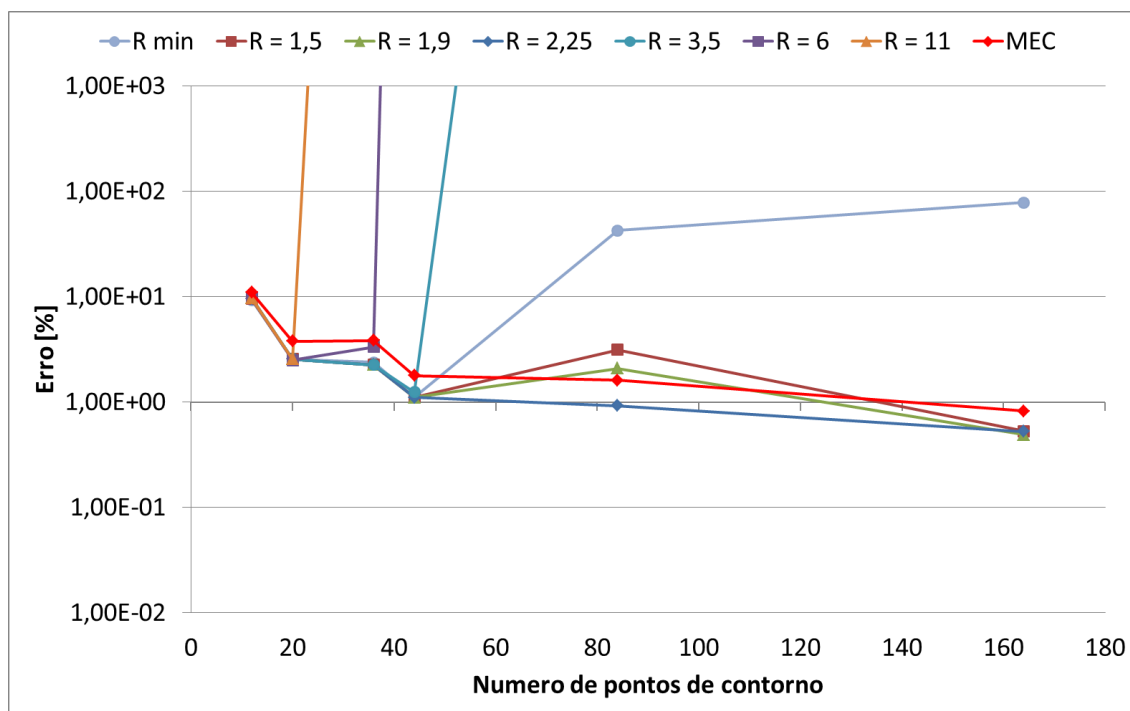
**Tabela 19 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| Nº de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -      | -     | -   | 35   |
| 44   | -                | -     | -      | -     | 44  | 41   |
| 84   | -                | -     | -      | -     | 77  | 55   |
| 164  | -                | -     | -      | 155   | 33  | 22   |

#### 4.3.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS

Em seguida as discretizações no contorno foram alteradas para que não fossem posicionados pontos nos vértices da geometria, eliminando assim a presença de nós

duplos. As curvas de convergência destes resultados para o potencial e para o fluxo são apresentadas nas figuras de Figura 4.44 a Figura 4.47.



**Figura 4.44 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo circular.**

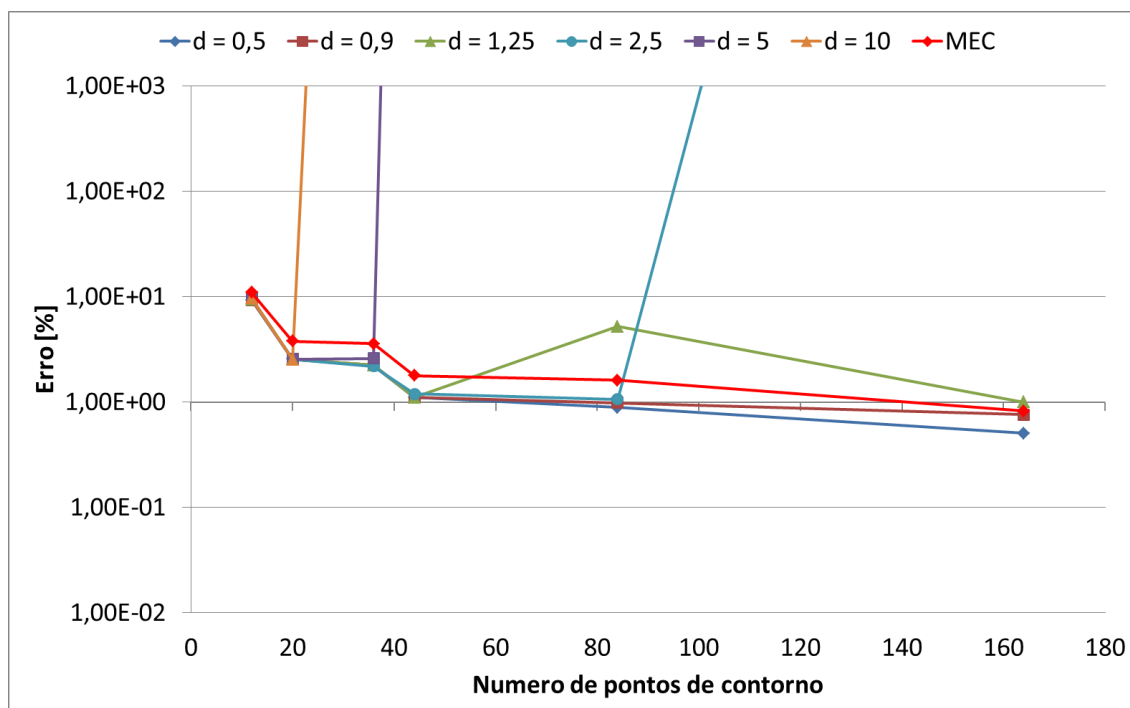


Figura 4.45 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo conforme.

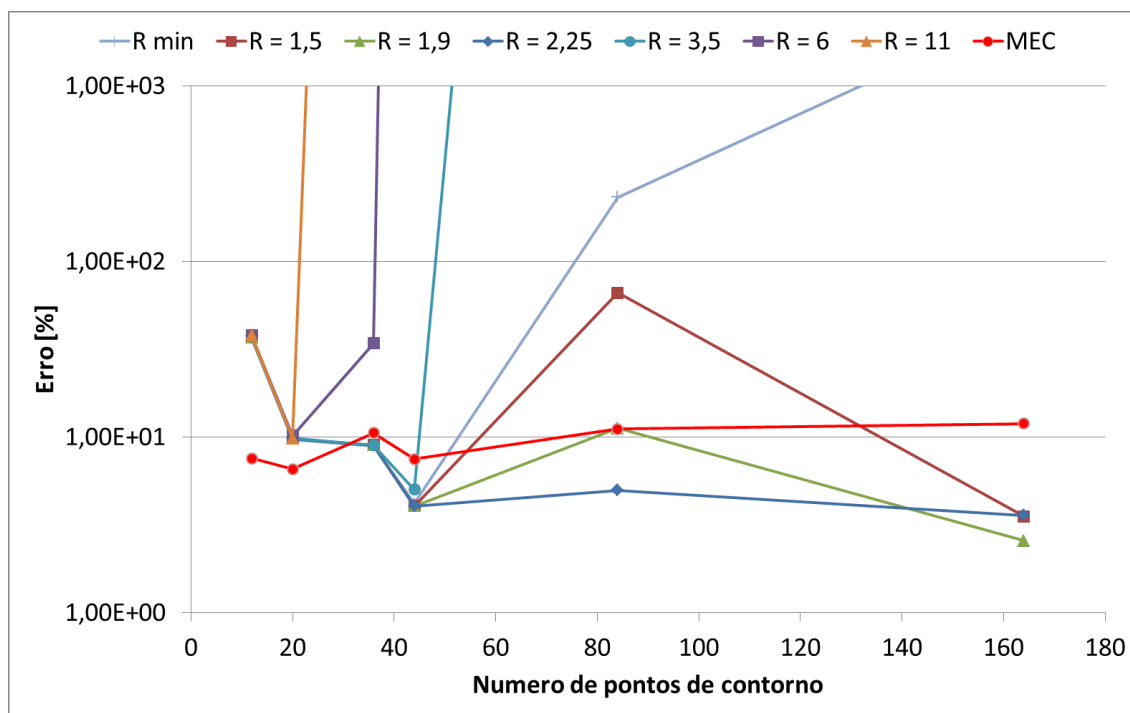
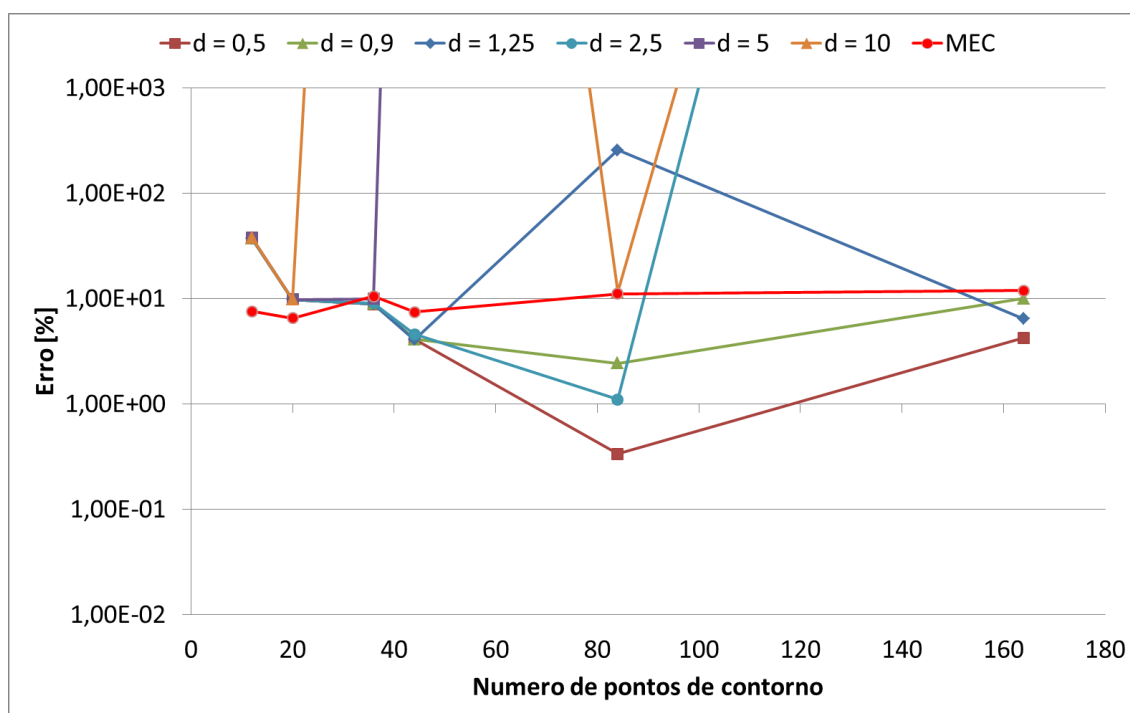


Figura 4.46 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo circular.



**Figura 4.47 – Curvas de convergência para o fluxo - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo conforme.**

As tabelas de Tabela 20 a Tabela 23 abaixo apresentam os valores dos erros médios percentuais para o potencial e para o fluxo para os arranjos circulares e conformes.

**Tabela 20 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 9,34E+00         | 9,55E+00 | 9,76E+00 | 9,63E+00 | 9,68E+00 | 9,70E+00 | 9,70E+00 | 1,10E+01 |
| 20           | 2,54E+00         | 2,56E+00 | 2,56E+00 | 2,56E+00 | 2,56E+00 | 2,50E+00 | 2,56E+00 | 3,79E+00 |
| 36           | 2,38E+00         | 2,25E+00 | 2,25E+00 | 2,26E+00 | 2,26E+00 | 3,33E+00 | 1,40E+14 | 3,84E+00 |
| 44           | 1,10E+00         | 1,11E+00 | 1,11E+00 | 1,11E+00 | 1,24E+00 | 1,31E+15 | 7,93E+14 | 1,78E+00 |
| 84           | 4,26E+01         | 3,13E+00 | 2,09E+00 | 9,21E-01 | 2,14E+14 | 1,65E+16 | 5,85E+15 | 1,61E+00 |
| 164          | 7,83E+01         | 5,30E-01 | 4,90E-01 | 5,24E-01 | 3,26E+13 | 4,71E+15 | 1,81E+15 | 8,22E-01 |

**Tabela 21 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 2 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 9,33E+00         | 9,33E+00 | 9,47E+00 | 9,65E+00 | 9,70E+00 | 9,71E+00 | 1,10E+01 |
| 20           | 2,55E+00         | 2,55E+00 | 2,56E+00 | 2,56E+00 | 2,56E+00 | 2,55E+00 | 3,79E+00 |
| 36           | 2,22E+00         | 2,23E+00 | 2,24E+00 | 2,20E+00 | 2,60E+00 | 1,01E+16 | 3,58E+00 |
| 44           | 1,10E+00         | 1,11E+00 | 1,11E+00 | 1,19E+00 | 5,92E+14 | 1,99E+16 | 1,78E+00 |
| 84           | 8,87E-01         | 9,81E-01 | 5,22E+00 | 1,06E+00 | 3,80E+15 | 1,30E+15 | 1,61E+00 |
| 164          | 5,04E-01         | 7,59E-01 | 9,98E-01 | 3,26E+14 | 1,04E+15 | 5,60E+15 | 8,22E-01 |

**Tabela 22 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      | MEC |
|--------------|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|-----|
|              | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |     |

|     |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 12  | 3,65E+01 | 3,74E+01 | 3,71E+01 | 3,75E+01 | 3,79E+01 | 3,80E+01 | 3,80E+01 | 1,26E+02 |
| 20  | 9,73E+00 | 9,79E+00 | 9,81E+00 | 9,82E+00 | 9,84E+00 | 1,02E+01 | 9,85E+00 | 6,57E+01 |
| 36  | 8,88E+00 | 9,01E+00 | 9,02E+00 | 9,02E+00 | 9,02E+00 | 3,43E+01 | 4,59E+12 | 5,86E+01 |
| 44  | 4,19E+00 | 4,06E+00 | 4,05E+00 | 4,05E+00 | 5,03E+00 | 6,26E+13 | 1,66E+12 | 3,41E+01 |
| 84  | 2,33E+02 | 6,63E+01 | 1,12E+01 | 4,98E+00 | 1,49E+13 | 1,36E+15 | 2,84E+12 | 2,65E+01 |
| 164 | 2,66E+03 | 3,54E+00 | 2,58E+00 | 3,58E+00 | 1,14E+13 | 2,41E+14 | 1,49E+14 | 1,46E+01 |

**Tabela 23 – Erro médio percentual para o fluxo - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 3,79E+01         | 3,74E+01 | 3,75E+01 | 3,79E+01 | 3,80E+01 | 3,81E+01 | 1,26E+02 |
| 20           | 9,87E+00         | 9,84E+00 | 9,83E+00 | 9,84E+00 | 9,85E+00 | 9,82E+00 | 6,57E+01 |
| 36           | 8,87E+00         | 8,93E+00 | 8,97E+00 | 9,06E+00 | 9,98E+00 | 5,13E+14 | 5,86E+01 |
| 44           | 4,15E+00         | 4,13E+00 | 4,10E+00 | 4,61E+00 | 7,58E+12 | 9,94E+14 | 3,41E+01 |
| 84           | 3,35E-01         | 2,43E+00 | 2,58E+02 | 1,11E+00 | 4,76E+14 | 1,16E+01 | 2,65E+01 |
| 164          | 4,25E+00         | 1,01E+01 | 6,46E+00 | 8,77E+14 | 1,46E+14 | 2,98E+14 | 1,46E+01 |

As curvas de convergência do potencial para os arranjos circulares com R mínimo, R=1,5, R=1,9, R=2,25 e para os arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25 são apresentadas nas figuras Figura 4.48 e Figura 4.49 respectivamente. A curva para o MEC também é apresentada como referência.

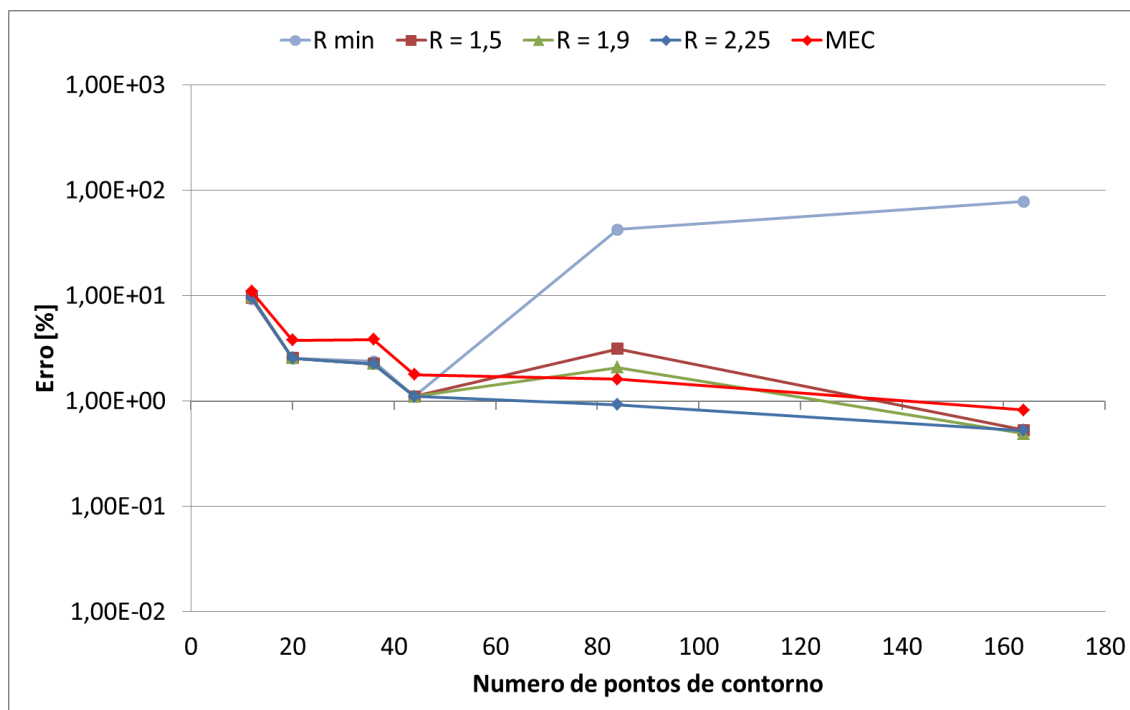


Figura 4.48 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - malha sem nós duplos – Arranjos circulares com Rmin, R=1,5, R=1,9 e R=2,25.

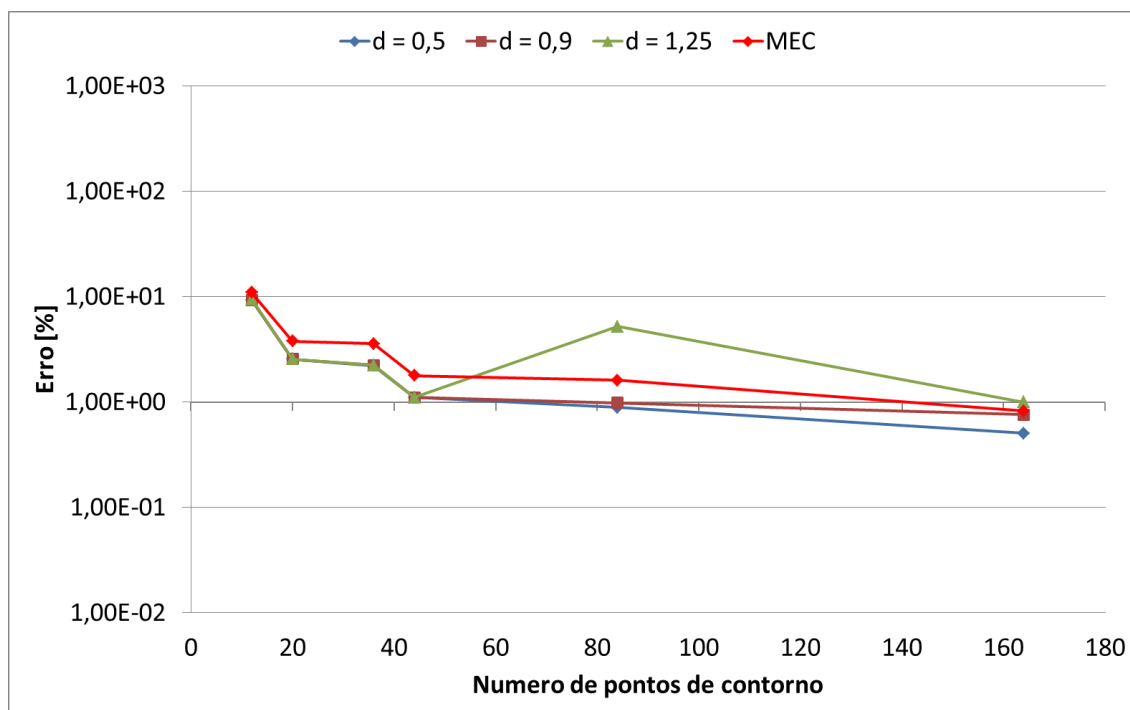


Figura 4.49 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com d=0,5, d=0,9 e d=1,25.

O comportamento das curvas apresentou tendência oposta de aumento do erro, enquanto os arranjos circulares tiveram seus erros reduzidos para o maior

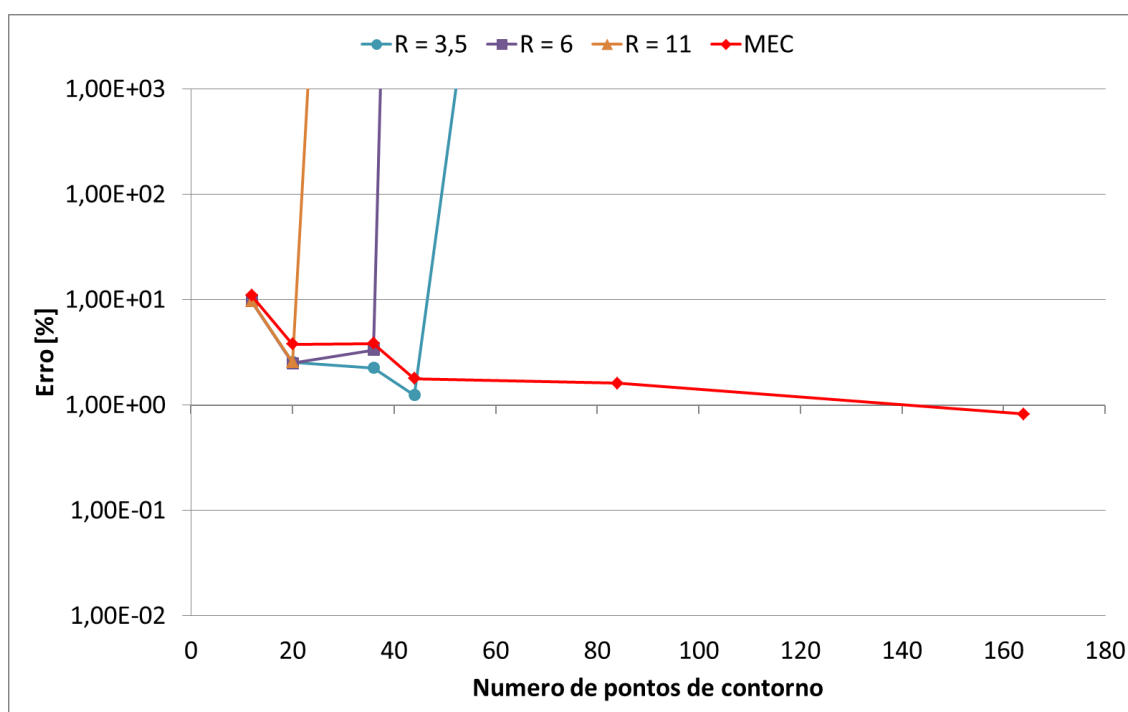


distanciamento dos pontos fontes, os arranjos conformes mostram a tendência de aumento.

A exceção do arranjo circular com raio mínimo, todos tendem a melhora dos resultados para o aumento do numero de pontos de contorno, entretanto, apesar da tendência de redução do erro, os valores dos erros se comparados aos resultados com nós duplos são piores na grande maioria dos casos.

Os arranjos circulares apresentaram erro maior para 84 pontos, mas voltaram a apresentar melhora do resultado para 164 pontos, mas com o aumento do afastamento dos pontos fontes esse comportamento foi menor. Nos arranjos conformes somente o arranjo com  $d=1,25$  apresentou esse comportamento.

A Figura 4.50 abaixo mostra as curvas para os arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$  e a curva do MEC para medida de comparação.



**Figura 4.50 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$ .**

A Figura 4.51 apresenta as curvas de convergência para os arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$  junto à curva do MEC.

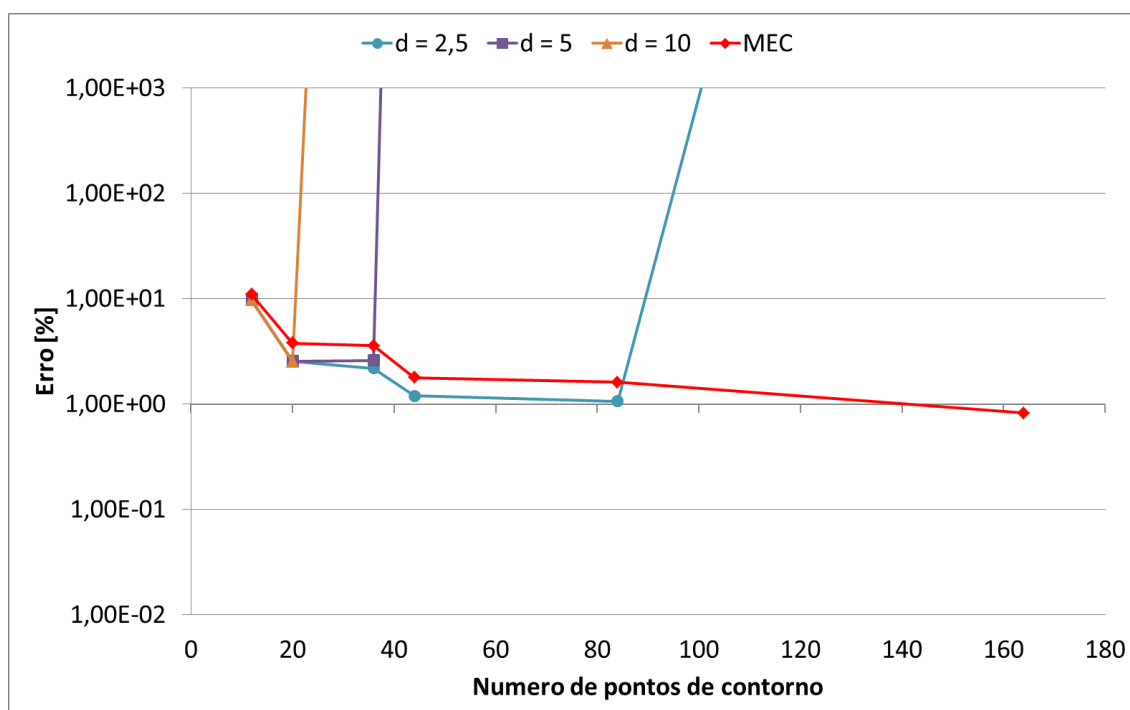


Figura 4.51 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$ .

As tabelas Tabela 24 e Tabela 25 a seguir mostram as singularidades encontradas e a linha do sistema de equações em que elas foram encontradas.

Tabela 24 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.

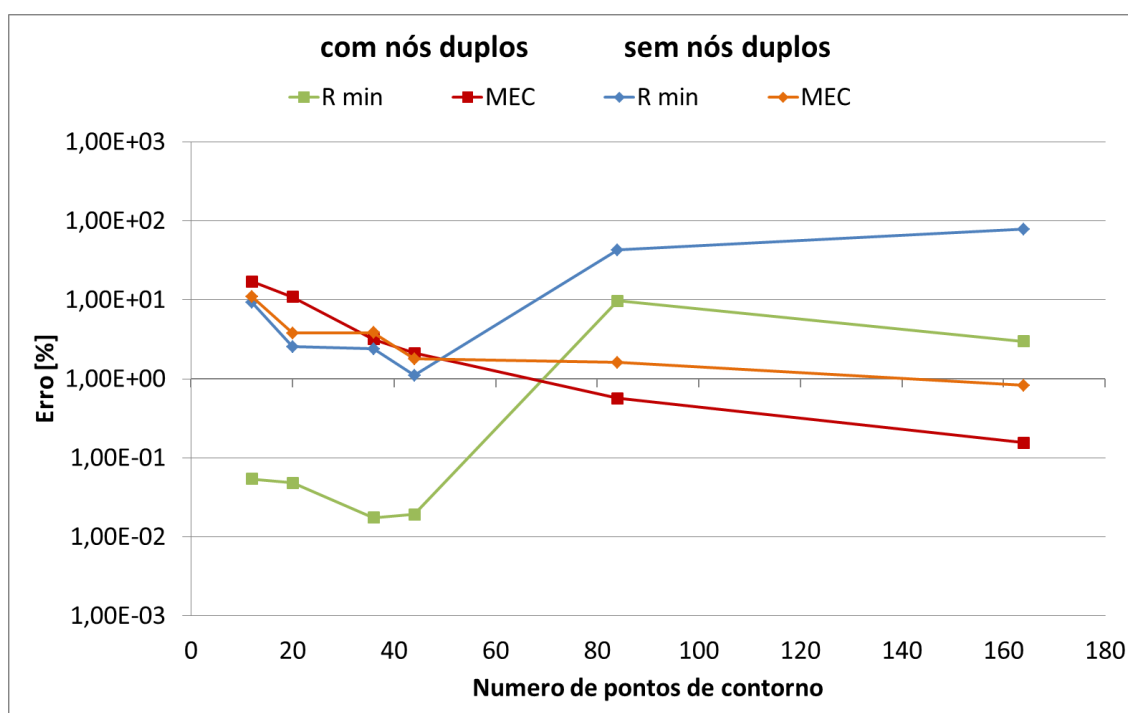
| Nº de pontos | Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |       |       |        |       |     |      |
|--------------|--|-------|-------|--------|-------|-----|------|
|              | Arranjo Circular   |       |       |        |       |     |      |
|              | R min  | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12           | -  | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20           | -  | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36           | -  | -     | -     | -      | -     | -   | 36   |
| 44           | -  | -     | -     | -      | -     | 44  | 43   |
| 84           | -  | -     | -     | -      | 84    | 81  | 79   |
| 164          | -  | -     | -     | -      | 163   | 154 | 146  |

**Tabela 25 – Singularidades na solução do Problema 2 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| Nº de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -      | -     | -   | 34   |
| 44   | -                | -     | -      | -     | 44  | 41   |
| 84   | -                | -     | -      | -     | 78  | 42   |
| 164  | -                | -     | -      | 151   | 38  | 23   |

#### 4.3.3 - COMPARAÇÃO ENTRE AS DISCRETIZAÇÕES COM E SEM NÓS DUPLOS

As figuras de Figura 4.52 a Figura 4.64 abaixo mostram as curvas de convergência para os resultados das discretizações com e sem nós duplos comparadas para cada arranjo de pontos fontes:



**Figura 4.52 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com R mínimo.**

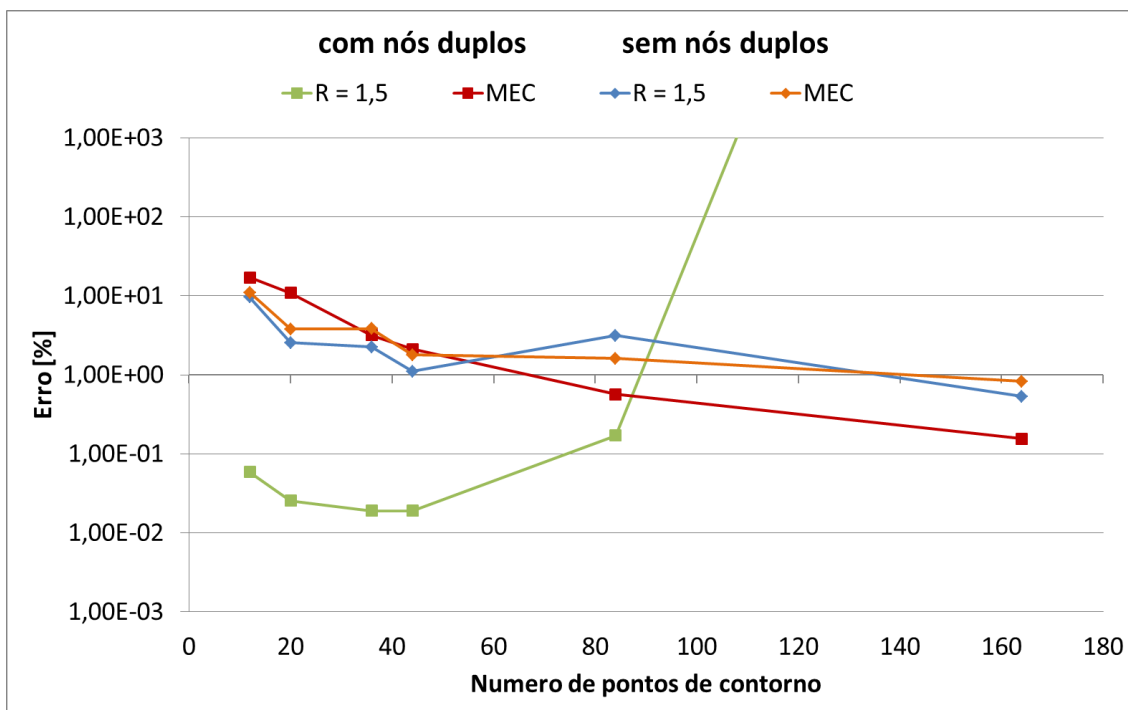


Figura 4.53 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com R=1,5.

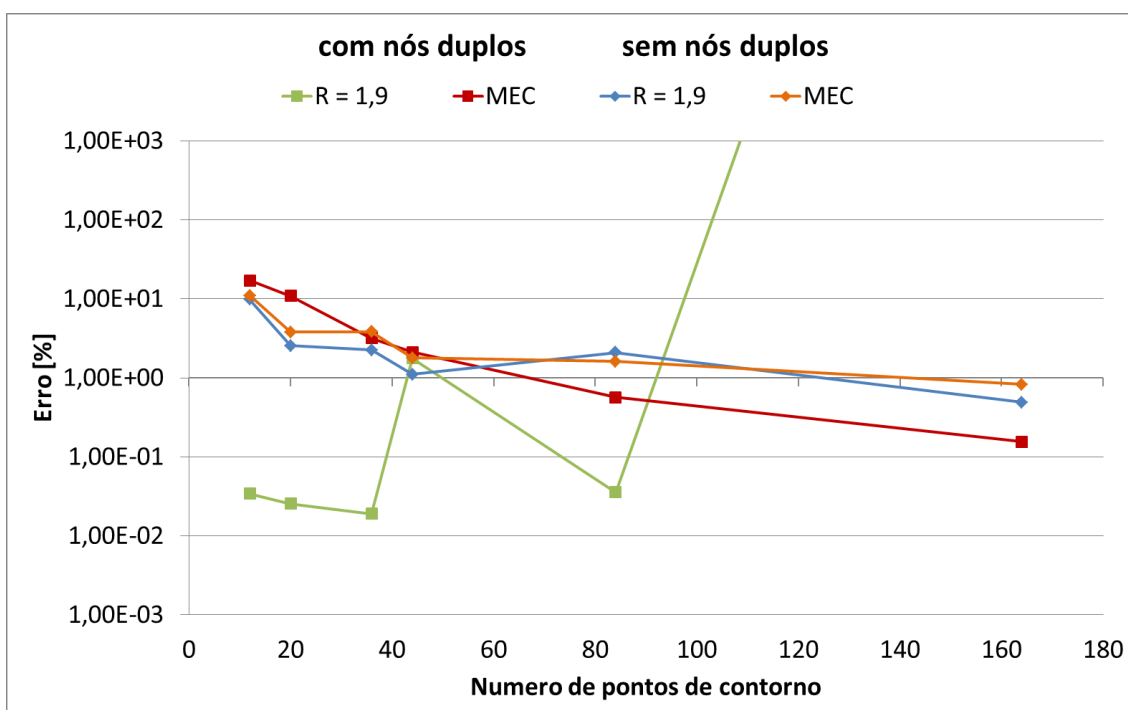


Figura 4.54 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com R=1,9.

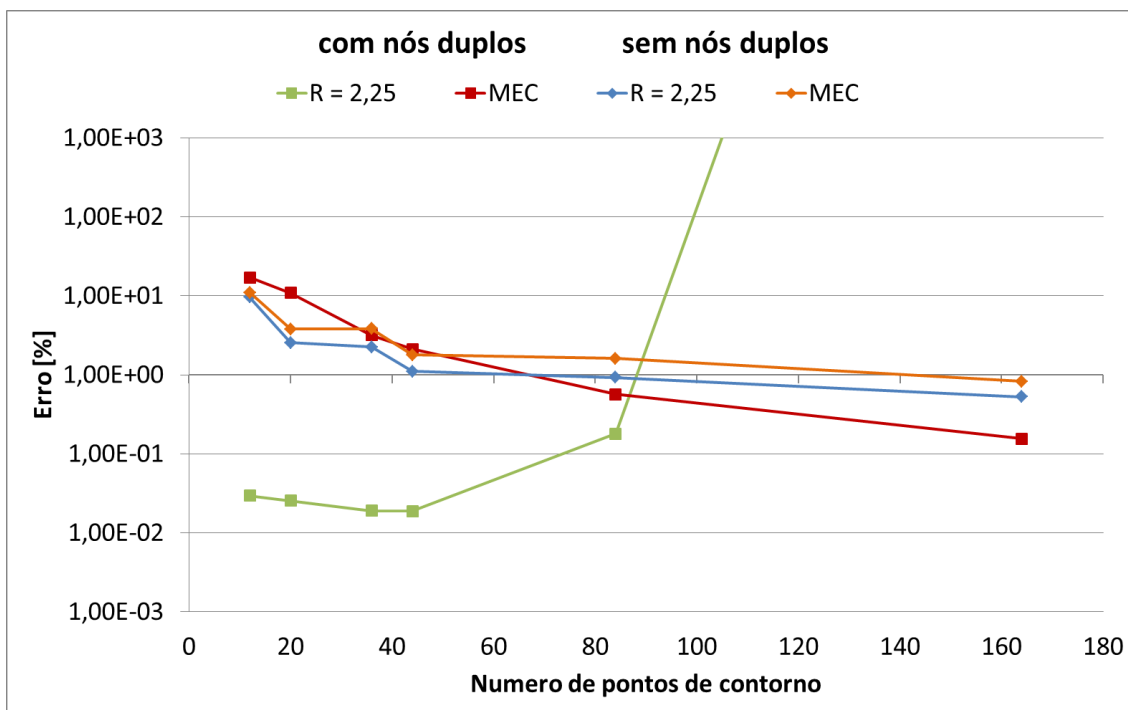


Figura 4.55 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com R=2,25.

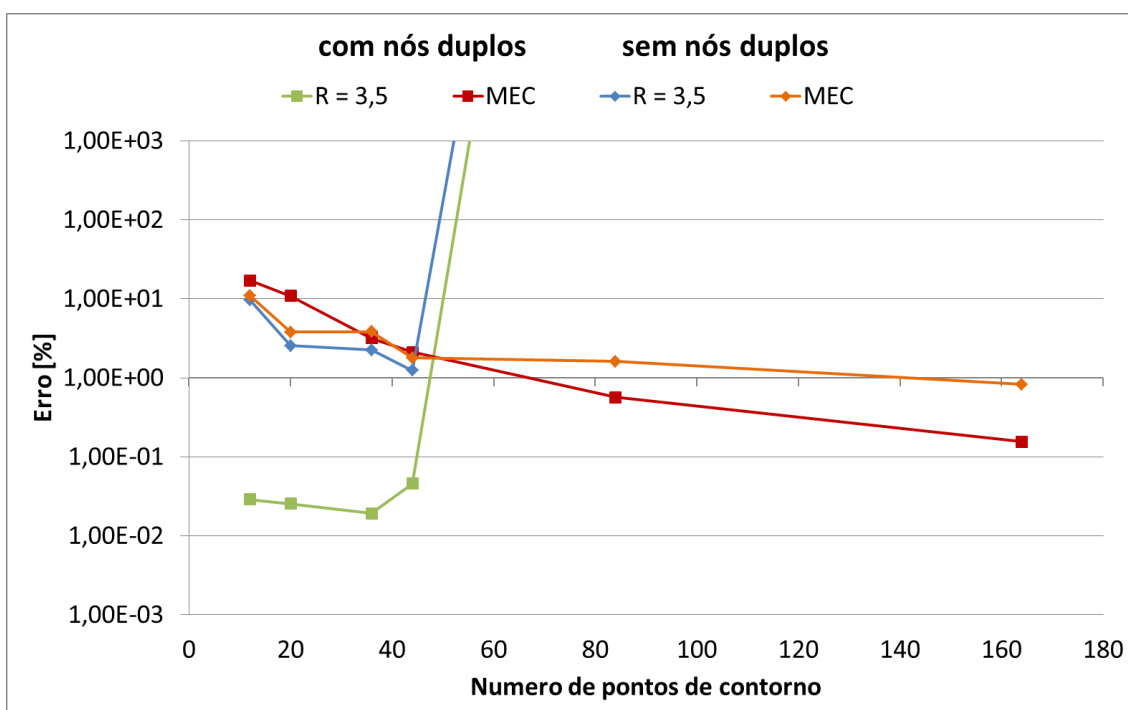


Figura 4.56 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com R=3,5.

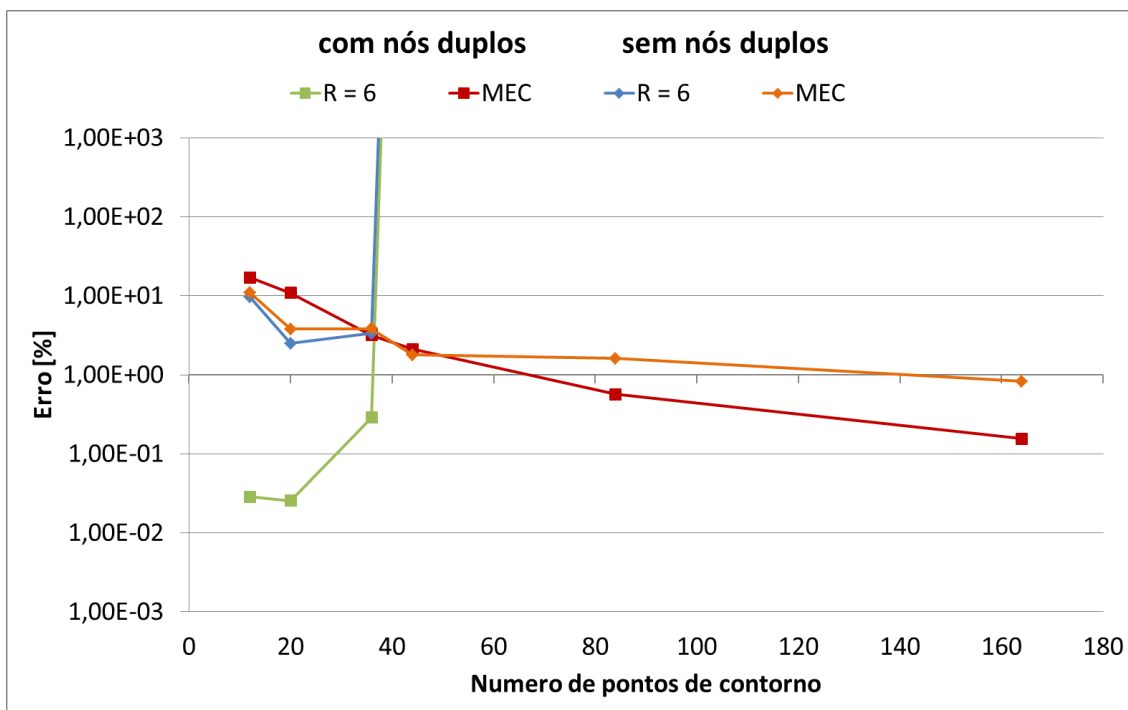


Figura 4.57 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com  $R=6$ .

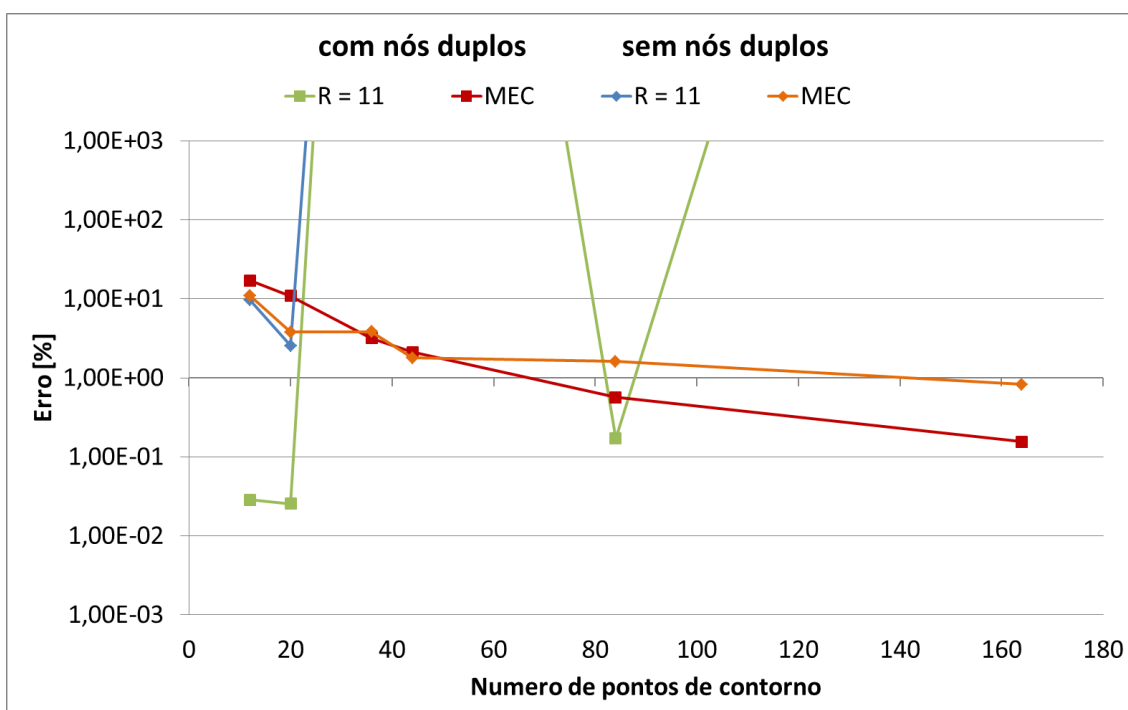


Figura 4.58 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo circular com  $R=11$ .

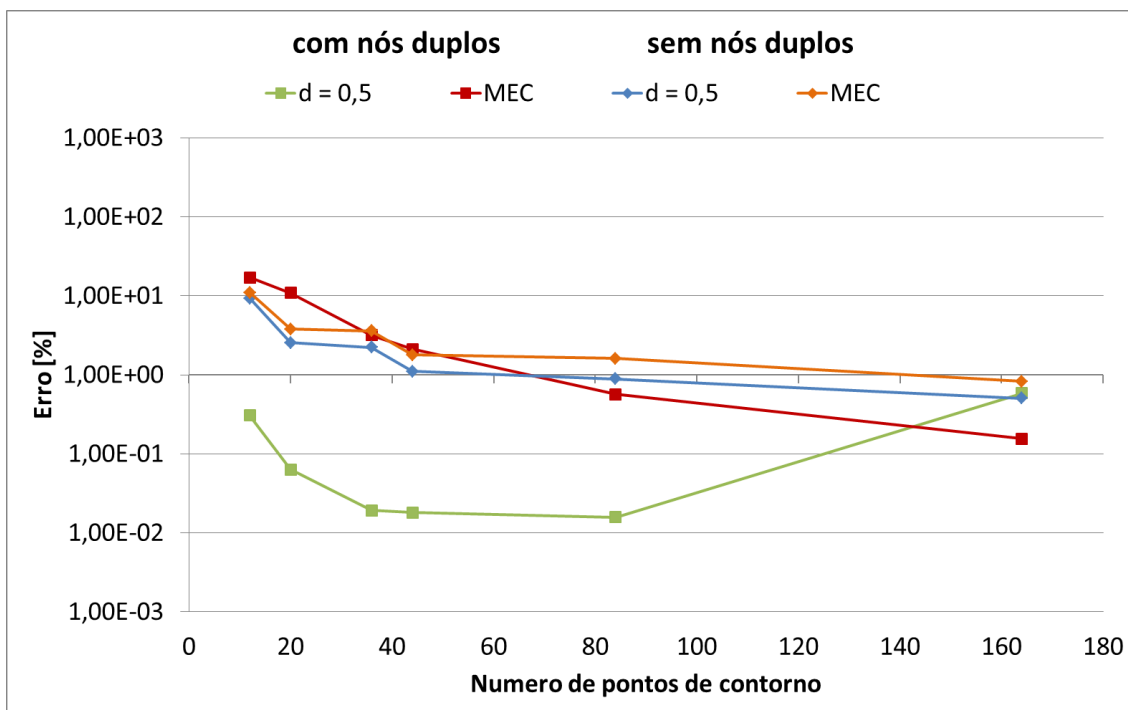


Figura 4.59 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com  $d=0,5$ .

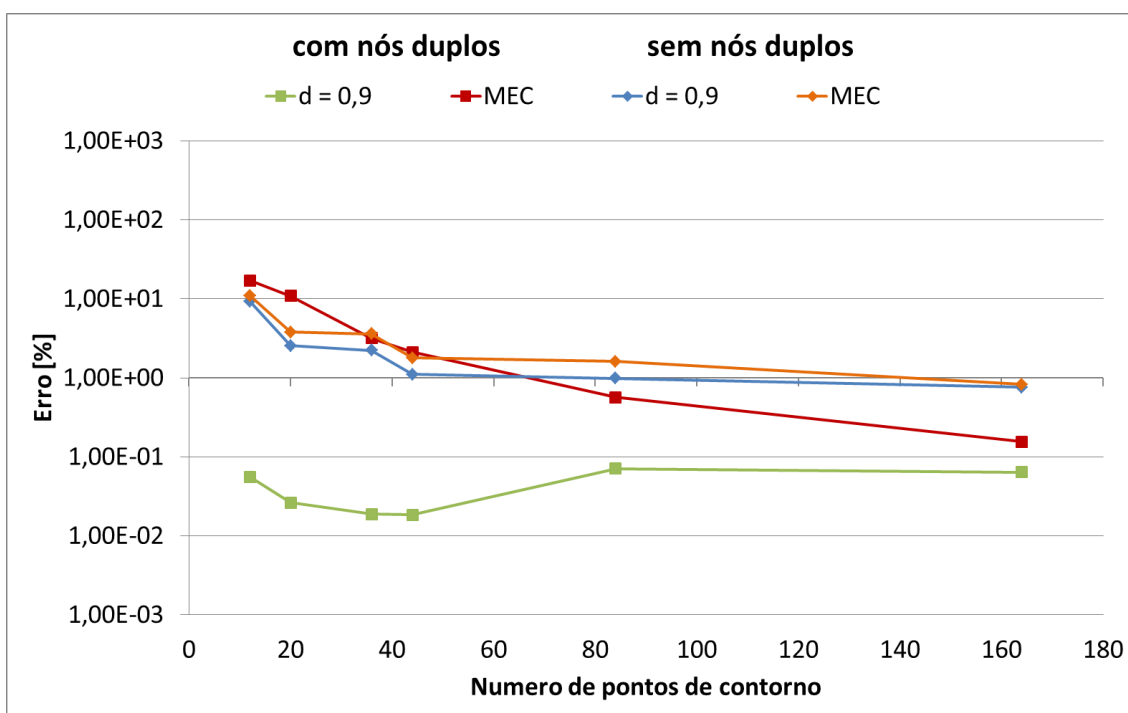


Figura 4.60 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com  $d=0,9$ .

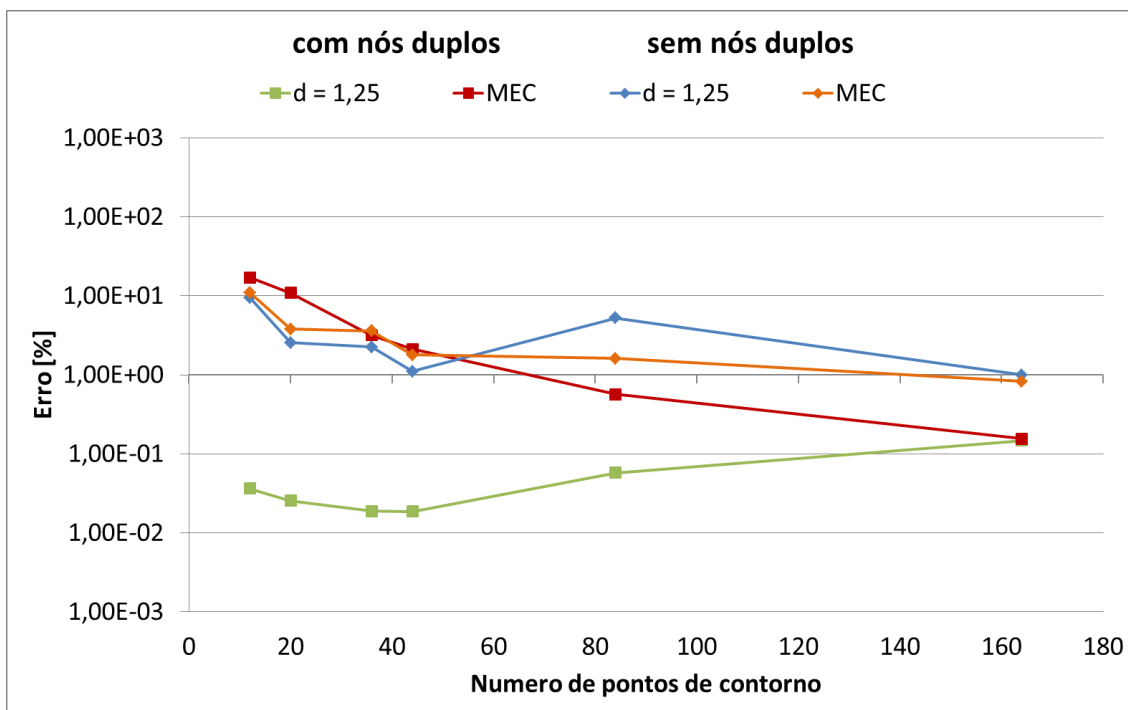


Figura 4.61 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com  $d=1,25$ .

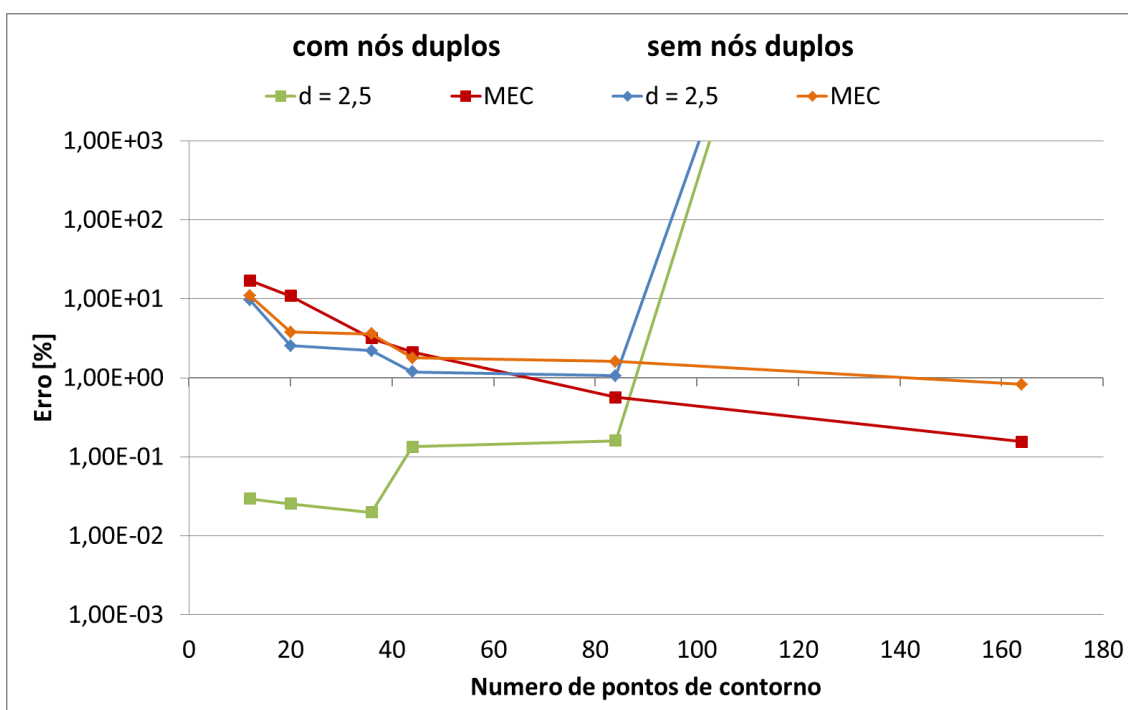


Figura 4.62 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com  $d=2,5$ .



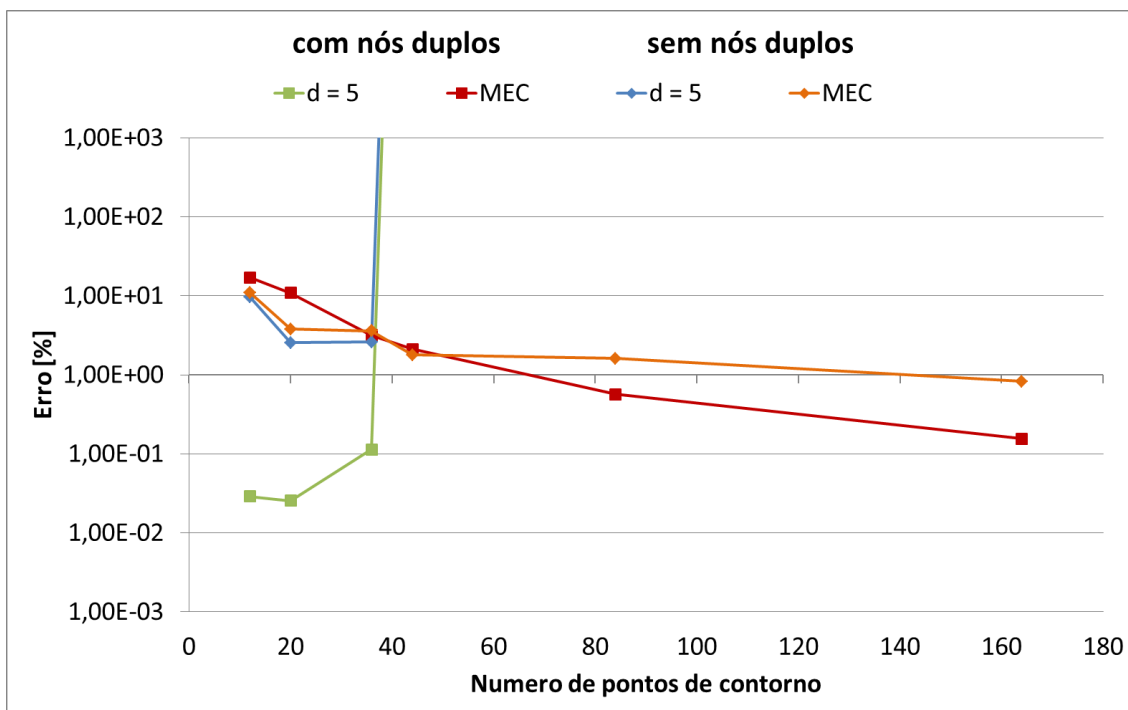


Figura 4.63 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com d=5.

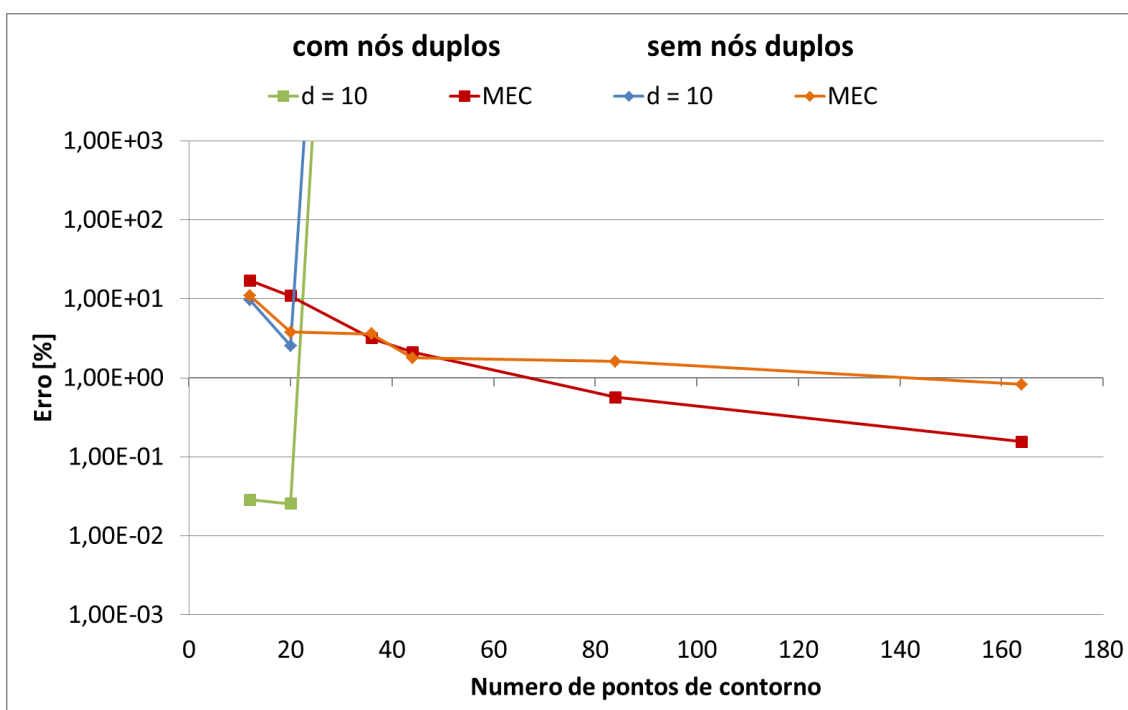


Figura 4.64 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 2 – Comparação entre solução resultados com e sem malha com nós duplos - Arranjo conforme com d=10.

Em geral o comportamento das curvas com e sem nós duplos mantiveram os mesmos nestes dois casos. Mas, assim como no primeiro problema, a mudança da discretização dos pontos no contorno, afastando os mesmos dos vértices da geometria, não gerou melhora de precisão nos resultados.

Para os arranjos circulares, os resultados sem nós duplos só não foram piores quando os resultados para o mesmo número de pontos com nós duplos encontraram singularidades, o que aconteceu para  $R=1,5$ ,  $R=1,9$  e  $R=2,25$ . Isso mostra que apesar de não gerar melhora na precisão dos resultados adiou o encontro de singularidades nestes casos.

Para os arranjos conformes, apesar de que para os valores de afastamento de  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  as curvas terem mantido uma tendência de queda até 164 pontos para a discretização sem nós duplos, o valores dos erros para estes casos só superou os resultados com nós duplos com 164 pontos e  $d=0,5$  quando essa apresentou crescimento do erro.

#### 4.4 - PROBLEMA 3 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA PLANA

O terceiro problema é um caso de transferência de calor por uma placa plana. As condições de contorno são dadas pela figura abaixo:

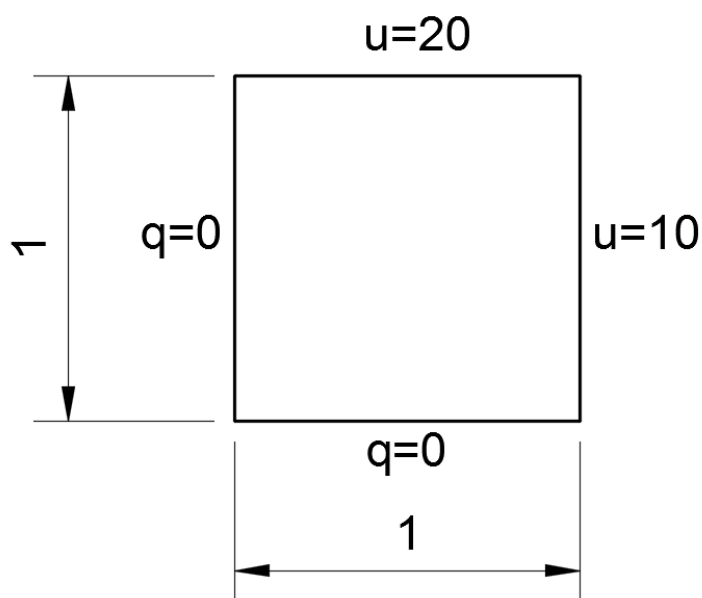


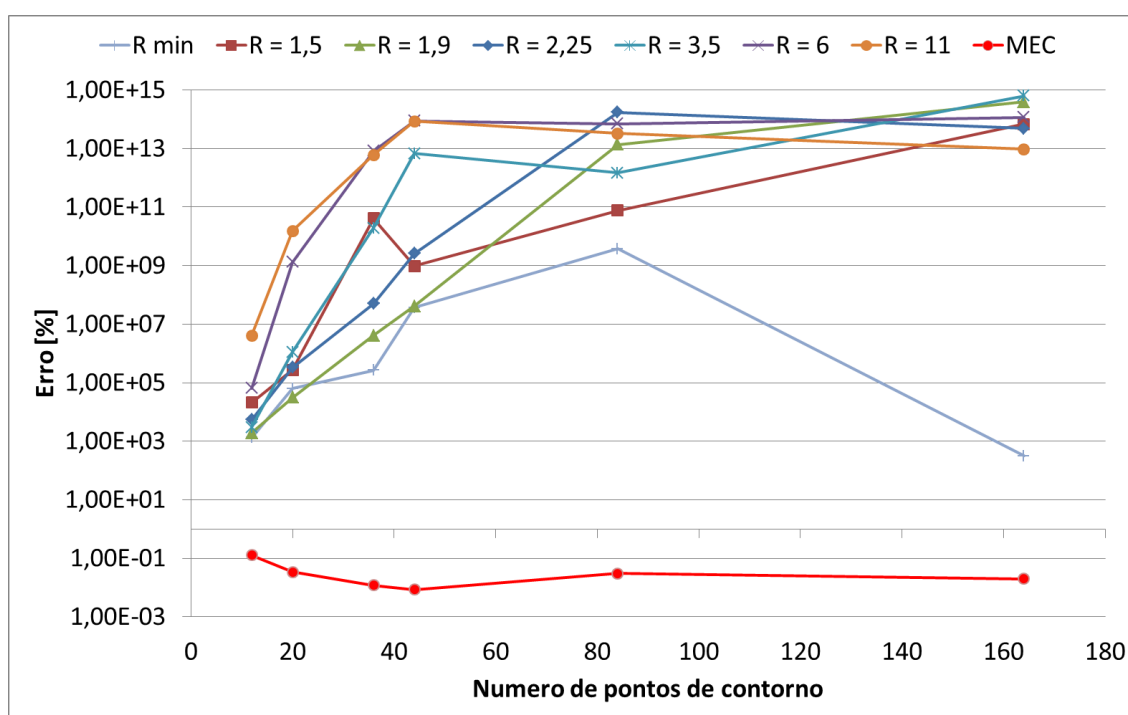
Figura 4.65 – Condições de contorno para o Problema 3 – Transferência de calor em placa plana.

A solução exata deste problema é dada no Apêndice B.

Este problema foi resolvido apenas para o potencial no contorno.

#### 4.4.1 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO COM NÓS DUPLOS

As curvas de convergência do MSF para este problema com a discretização com nós duplos para o potencial para os arranjos circulares e conformes são apresentadas respectivamente nas figuras Figura 4.66 e Figura 4.67a seguir.



**Figura 4.66 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

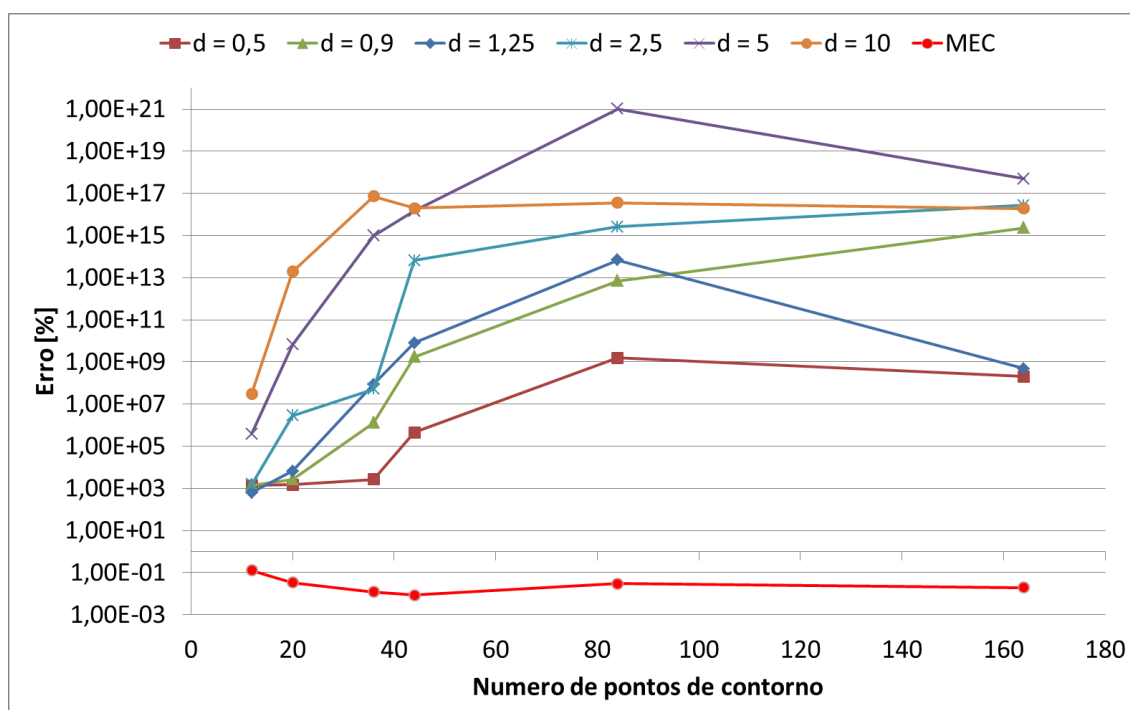


Figura 4.67 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.

A Tabela 26 e a Tabela 27 abaixo apresentam os valores dos Erros percentuais médios para os resultados expostos acima.

Tabela 26 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.

| Nº de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 1,33E+03         | 2,11E+04 | 1,90E+03 | 5,37E+03 | 2,97E+03 | 6,40E+04 | 4,07E+06 | 1,29E-01 |
| 20           | 6,23E+04         | 2,74E+05 | 3,10E+04 | 3,30E+05 | 1,13E+06 | 1,33E+09 | 1,54E+10 | 3,42E-02 |
| 36           | 2,67E+05         | 4,12E+10 | 4,11E+06 | 5,00E+07 | 1,94E+10 | 8,18E+12 | 6,12E+12 | 1,20E-02 |
| 44           | 3,71E+07         | 9,76E+08 | 4,09E+07 | 2,60E+09 | 6,81E+12 | 8,86E+13 | 8,54E+13 | 8,54E-03 |
| 84           | 3,78E+09         | 7,69E+10 | 1,37E+13 | 1,74E+14 | 1,49E+12 | 6,99E+13 | 3,25E+13 | 3,05E-02 |
| 164          | 3,14E+02         | 6,74E+13 | 3,95E+14 | 4,91E+13 | 6,27E+14 | 1,17E+14 | 9,44E+12 | 1,96E-02 |

**Tabela 27 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 6,91E+02         | 7,22E+02 | 3,19E+02 | 7,62E+02 | 1,93E+05 | 1,54E+07 | 6,44E-02 |
| 20           | 7,49E+02         | 1,34E+03 | 3,25E+03 | 1,40E+06 | 3,37E+09 | 9,73E+12 | 1,71E-02 |
| 36           | 1,35E+03         | 6,44E+05 | 4,22E+07 | 2,54E+07 | 4,85E+14 | 3,70E+16 | 6,01E-03 |
| 44           | 2,24E+05         | 8,68E+08 | 4,09E+09 | 3,33E+13 | 7,22E+15 | 1,01E+16 | 4,27E-03 |
| 84           | 7,73E+08         | 3,57E+12 | 3,46E+13 | 1,30E+15 | 5,07E+20 | 1,78E+16 | 1,52E-02 |
| 164          | 1,02E+08         | 1,17E+15 | 2,41E+08 | 1,38E+16 | 2,47E+17 | 9,49E+15 | 9,79E-03 |

Para este problema o MSF apresentou um péssimo resultado para a discretização com nós duplos. Para quase todos os resultados o programa apontou singularidade na resolução do sistema de equações.

As tabelas Tabela 28 e Tabela 29 abaixo resumem as singularidades encontradas e a linha do sistema de equações em que elas foram encontradas.

**Tabela 28 – Singularidades na solução do Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Circular.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      |
|  | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12   | 12               | 12    | 12    | 12     | 12    | 12  | 12   |
| 20   | 20               | 20    | 20    | 20     | 20    | 20  | 20   |
| 36   | 36               | -     | 36    | 36     | 36    | 36  | 36   |
| 44   | -                | -     | 44    | 44     | 44    | 44  | 44   |
| 84   | -                | 84    | 84    | 84     | 84    | 84  | 84   |
| 164  | -                | 164   | 164   | 163    | 164   | 164 | 164  |

**Tabela 29 – Singularidades na solução do Problema 3 - Malha com nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | 12               | 12    | 12     | 12    | 12  | 12   |
| 20   | 20               | 20    | 20     | 20    | 20  | 20   |
| 36   | 36               | 36    | 36     | -     | 35  | 35   |
| 44   | 44               | -     | 44     | 44    | 43  | 40   |
| 84   | 84               | 84    | 84     | 84    | 83  | 38   |
| 164  | -                | 164   | -      | 163   | 33  | 19   |

A tabela acima mostra um estranho comportamento de alguns resultados, como se pode observar para o arranjo circular com R mínimo. O problema solucionado com este arranjo com um menor número de pontos apontou-se existência de singularidade no sistema de equações, mas a mesma não foi encontrada nos casos com mais pontos de contorno.

Na realidade, o sistema com essa discretização já apresenta singularidade desde o início devido ao nó duplo com condições de Dirichlet nas duas faces.

A matriz A é formada pela função fundamental no caso de condição de Dirichlet, e esta é função exclusiva da distância euclidiana entre dois pontos, a relação entre todos os pontos fontes com estes dois pontos que fazem parte deste nó duplo irão resultar nos mesmos coeficientes, ou seja, a matriz A gerada para este problema terá necessariamente duas linha iguais.

#### 4.4.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO SEM NÓS DUPLOS

Em seguida as discretizações no contorno foram alteradas para que não fossem posicionados pontos nos vértices da geometria, eliminando assim a presença de nós duplos.

As curvas de convergência dos resultados para o potencial para ambos os arranjos de pontos fontes são apresentadas nas figuras Figura 4.68 e Figura 4.69 abaixo.

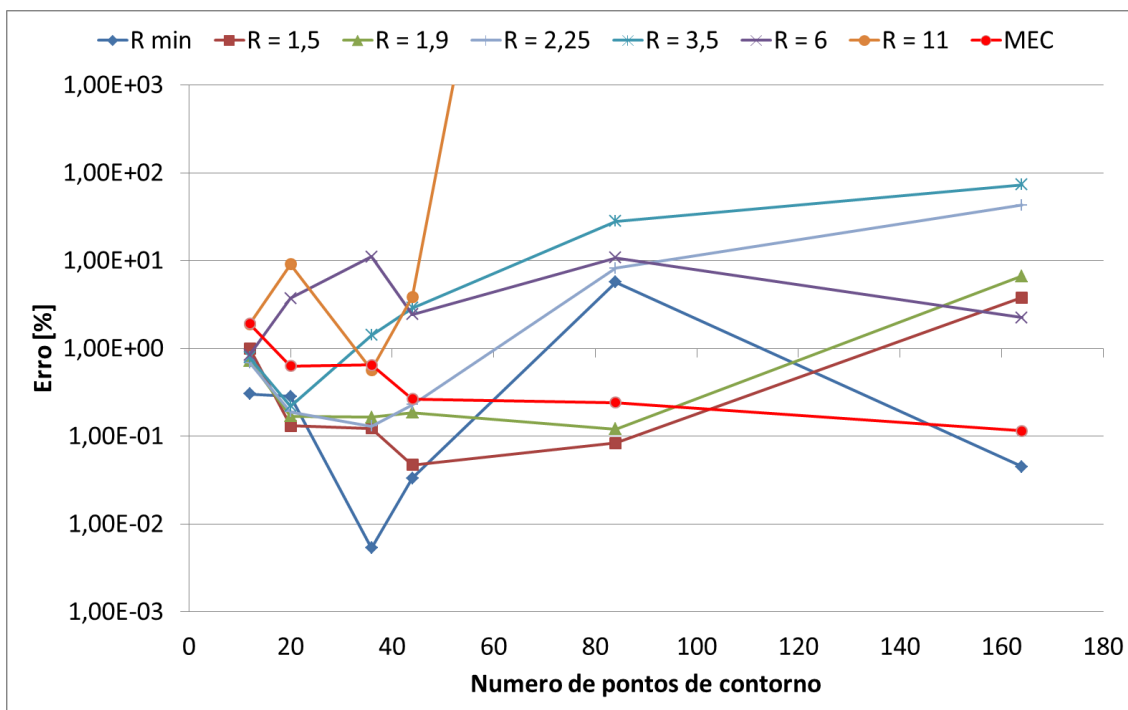


Figura 4.68 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.

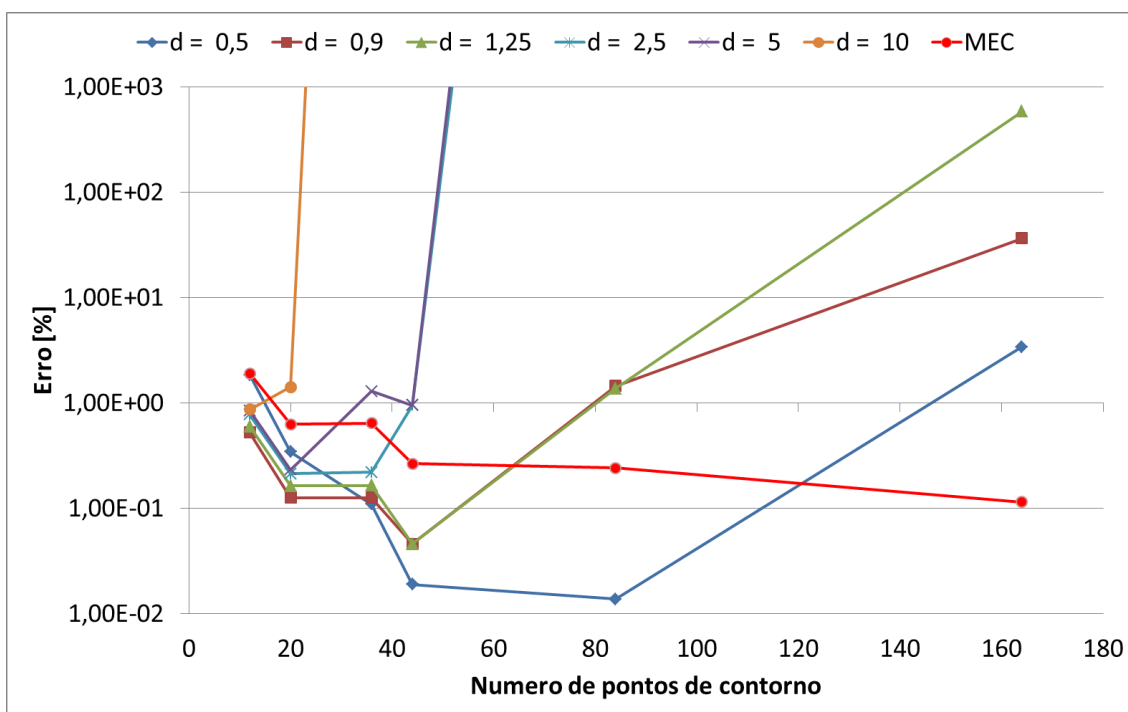


Figura 4.69 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.

As tabelas Tabela 30 e Tabela 31 seguir apresentam os valores do erro médio percentual para os resultados expostos acima.

**Tabela 30 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| N° de pontos | Arranjo Circular |          |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | R min            | R=1,5    | R=1,9    | R=2,25   | R=3,5    | R=6      | R=11     |          |
| 12           | 3,04E-01         | 1,00E+00 | 7,27E-01 | 6,83E-01 | 7,93E-01 | 8,46E-01 | 1,89E+00 | 1,92E+00 |
| 20           | 2,85E-01         | 1,31E-01 | 1,69E-01 | 1,89E-01 | 2,19E-01 | 3,72E+00 | 9,11E+00 | 6,28E-01 |
| 36           | 5,35E-03         | 1,23E-01 | 1,64E-01 | 1,30E-01 | 1,41E+00 | 1,10E+01 | 5,66E-01 | 6,47E-01 |
| 44           | 3,32E-02         | 4,71E-02 | 1,87E-01 | 2,29E-01 | 2,88E+00 | 2,45E+00 | 3,87E+00 | 2,66E-01 |
| 84           | 5,68E+00         | 8,34E-02 | 1,20E-01 | 8,16E+00 | 2,81E+01 | 1,08E+01 | 4,36E+12 | 2,41E-01 |
| 164          | 4,48E-02         | 3,81E+00 | 6,66E+00 | 4,28E+01 | 7,32E+01 | 2,24E+00 | 3,42E+13 | 1,16E-01 |

**Tabela 31 – Erro médio percentual para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| N° de pontos | Arranjo Conforme |          |          |          |          |          | MEC      |
|--------------|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|              | d=0,5            | d=0,9    | d=1,25   | d=2,5    | d=5      | d=10     |          |
| 12           | 1,86E+00         | 5,28E-01 | 5,99E-01 | 7,76E-01 | 8,45E-01 | 8,66E-01 | 1,92E+00 |
| 20           | 3,45E-01         | 1,26E-01 | 1,63E-01 | 2,14E-01 | 2,33E-01 | 1,42E+00 | 6,28E-01 |
| 36           | 1,09E-01         | 1,26E-01 | 1,64E-01 | 2,20E-01 | 1,29E+00 | 2,36E+15 | 6,47E-01 |
| 44           | 1,90E-02         | 4,59E-02 | 4,59E-02 | 9,51E-01 | 9,51E-01 | 1,66E+16 | 2,66E-01 |
| 84           | 1,38E-02         | 1,46E+00 | 1,38E+00 | 3,00E+15 | 2,46E+16 | 4,83E+17 | 2,41E-01 |
| 164          | 3,41E+00         | 3,67E+01 | 5,84E+02 | 5,88E+16 | 3,62E+15 | 1,90E+17 | 1,16E-01 |

A Figura 4.70 a seguir apresenta as curvas de convergência para os arranjos circulares com R mínimo, R=1,5, R=1,9 e R=2,25. A curva para o MEC é apresentada na mesma figura como referencia.



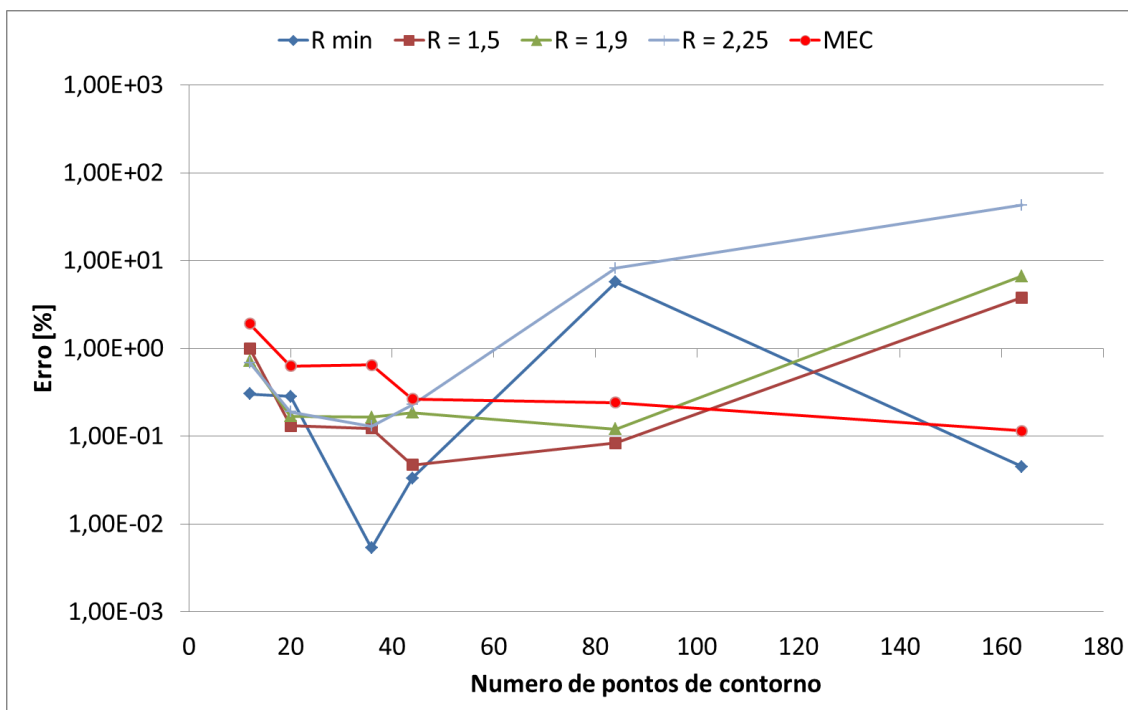


Figura 4.70 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com R min, R=1,5, R=1,9 e R=2,25.

Da mesma forma a Figura 4.71 apresenta as curvas de convergência para os arranjos conformes com  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  e  $d=1,25$ .

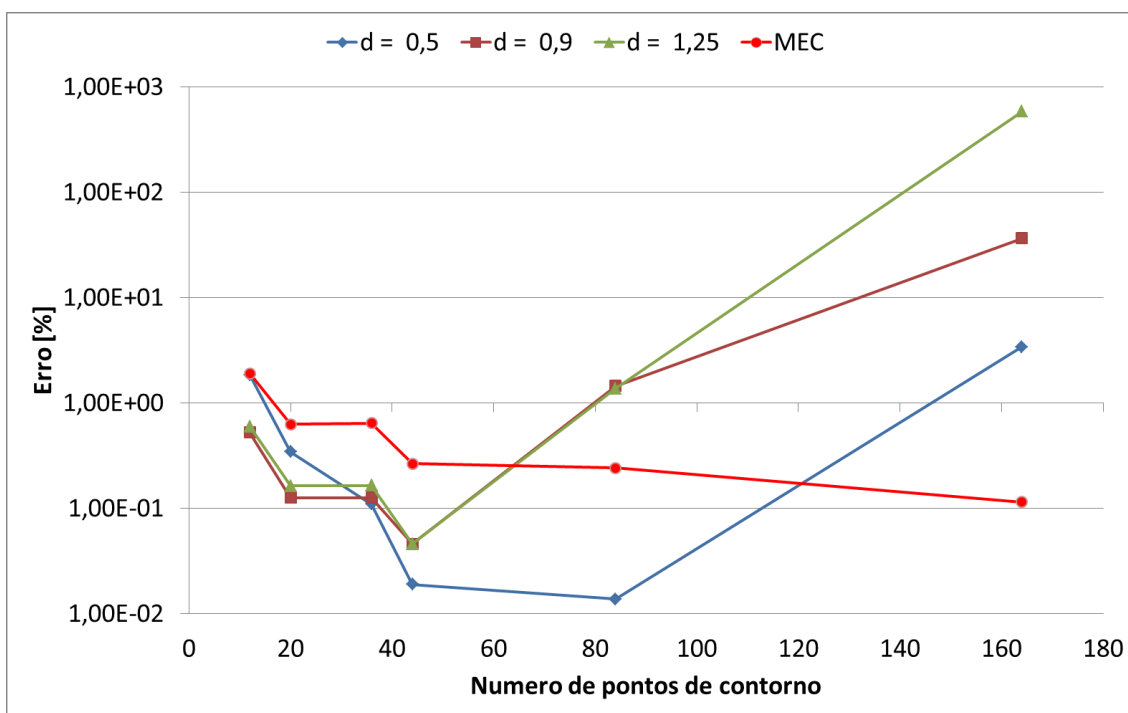


Figura 4.71 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com  $d=0,5$ ,  $d=0,9$  e  $d=1,25$ .

Neste caso a melhora do resultado comparada à discretização com nós duplos foi evidente, devido principalmente ao afastamento dos pontos do nó duplo onde o potencial era descrito em ambas as faces da geometria.

Os resultados para este problema, como nos outros, se mostraram decrescentes para o aumento do número de pontos até atingir um patamar mínimo para então se tornar crescentes em erro.

Neste problema, os arranjos encontraram sua melhor precisão entre 36 e 44 pontos de contorno, a exceção do arranjo conforme com  $d=0,5$  que encontrou com 84 pontos. O aumento dessa quantidade de pontos a partir desses valores resultou em perda de precisão.

No entanto, a perda de precisão do MSF neste problema quando comparada ao do exemplo anterior é significativa. Pode-se inferir que o valor constante das condições de contorno resultou num fator desfavorável ao MSF, pois predispõe à singularidade do sistema de equações. Já para o MEC, não houve maiores implicações, apesar de que o valor constante das condições de contorno se apresentaria como um fator favorável ao método. No entanto, as condições de Dirichlet impostas em duas das arestas em ângulo reto sempre trazem alguma perda de desempenho ao método, conforme observado em diversas simulações. Ao final, os dois aspectos se compensaram e o desempenho do MEC se manteve estável e com convergência crescente com o refinamento.

As figuras Figura 4.72 e Figura 4.73, respectivamente, mostram as curvas para os arranjos circulares com  $R=3,5$ ,  $R=6$  e  $R=11$  e para os arranjos conformes com  $d=2,5$ ,  $d=5$  e  $d=10$  respectivamente. A curva do MEC é apresentada para medida de comparação.

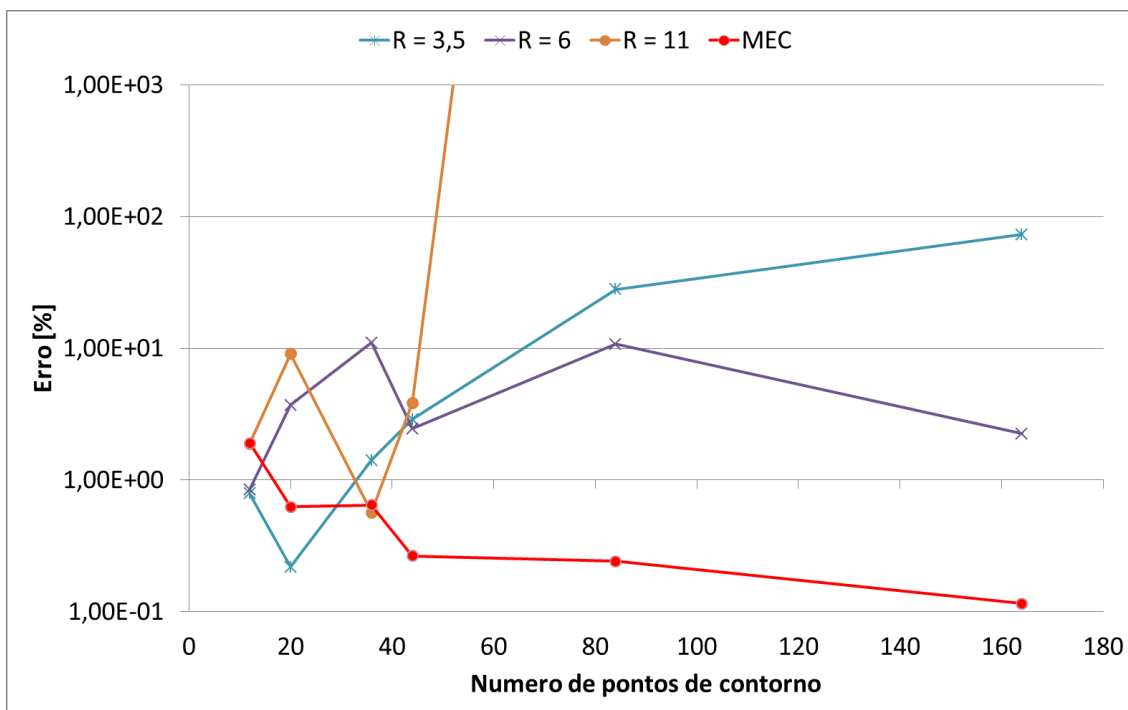


Figura 4.72 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjos circulares com R=3,5, R=6 e R=11.

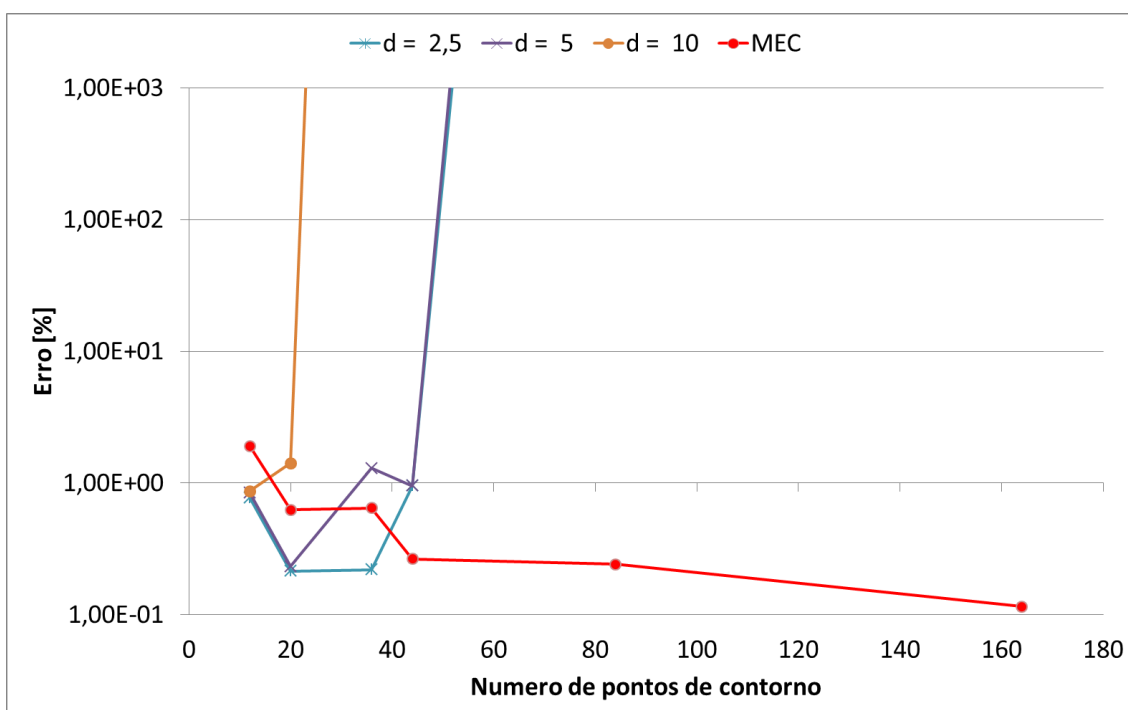


Figura 4.73 – Curvas de convergência para o potencial - Problema 3 - Malha sem nós duplos – Arranjos conformes com d=2,5, d=5 e d=10.

O comportamento do erro para os arranjos conformes com maior distancia dos pontos fontes se apresentou semelhante aos dos outros problemas resolvidos, rapidamente encontrando singularidade para o aumento do número de pontos.

Para os arranjos circulares, no entanto, as singularidades só foram encontradas para  $R=11$ . Para  $R=3,5$  o comportamento foi semelhante aos casos de menor afastamento dos pontos fontes, porem piores em relação à precisão.

A solução com  $R=6$  apresentou um comportamento que difere dos outros resultados. Inicialmente crescente, a curva se torna decrescente após os 84 pontos, mas é difícil tirar qualquer conclusão deste caso, pois o resultado com 44 pontos também foge da curva se comparada aos outros resultados, demonstrando a instabilidade do comportamento do erro neste caso.

As tabelas Tabela 32 e Tabela 33 abaixo mostram as singularidades encontradas e a linha do sistema de equações em que elas foram encontradas.

**Tabela 32 – Singularidades na solução do Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjo Circular.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Circular |       |       |        |       |     |      |
|  | R min            | R=1,5 | R=1,9 | R=2,25 | R=3,5 | R=6 | R=11 |
| 12   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 44   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | -    |
| 84   | -                | -     | -     | -      | -     | -   | 84   |
| 164  | -                | -     | -     | -      | -     | -   | 164  |

**Tabela 33 – Singularidades na solução do Problema 3 – Malha sem nós duplos – Arranjo Conforme.**

| Linha do sistema de equações onde foi encontrada singularidade |                  |       |        |       |     |      |
|--|------------------|-------|--------|-------|-----|------|
| N° de pontos   | Arranjo Conforme |       |        |       |     |      |
|  | d=0,5            | d=0,9 | d=1,25 | d=2,5 | d=5 | d=10 |
| 12   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 20   | -                | -     | -      | -     | -   | -    |
| 36   | -                | -     | -      | -     | -   | 32   |
| 44   | -                | -     | -      | -     | 44  | 41   |
| 84   | -                | -     | -      | 84    | 81  | 21   |
| 164  | -                | -     | -      | 164   | 35  | 20   |

#### 4.5 - COMENTÁRIOS GERAIS SOBRE OS RESULTADOS

O método utilizado neste trabalho para a solução do sistema de equações foi o Método de Eliminação de Gauss, cujo procedimento se inicia pelo escalonamento da matriz de coeficientes.

Devido à geometria dos problemas resolvidos e a própria formulação da solução fundamental e de sua derivada, que são os coeficientes da matriz A, quanto maior o número de pontos utilizado, mais próximos são os seus valores e maior o número de operações necessárias para realizar o escalonamento dessa matriz.

O processo de escalonamento tende a subtrair esses coeficientes uns dos outros, e em algum momento esses coeficientes podem vir a atingir valores inferiores a  $1E-15$  que o limite de casas decimais que o Fortran trabalha (Microsoft, 1995). Esses coeficientes então passam a ter seus valores nulos.

O programa implementado para este trabalho aponta singularidade ao não encontrar nenhum candidato a elemento da diagonal na coluna da matriz A com um valor não nulo, ou seja, superior a  $15E-15$ .

Isso também significa que durante o processo de escalonamento da matriz os elementos fora da diagonal podem ser anulados antes que o programa aponte singularidade, causando perda de precisão.

Isso justificaria o comportamento observado nas curvas de convergência de atingirem um patamar mínimo e então adotarem um sentido crescente do erro, que normalmente é seguido do encontro de singularidades, para o aumento do número de pontos.

Esta ocorrência de valores anulados, no entanto também pode fazer com que uma singularidade no sistema de equações seja eliminada. Neste caso o programa pode chegar à solução do sistema de matrizes sem que uma singularidade existente seja identificada, por vezes até mesmo permitindo redução do erro encontrado.

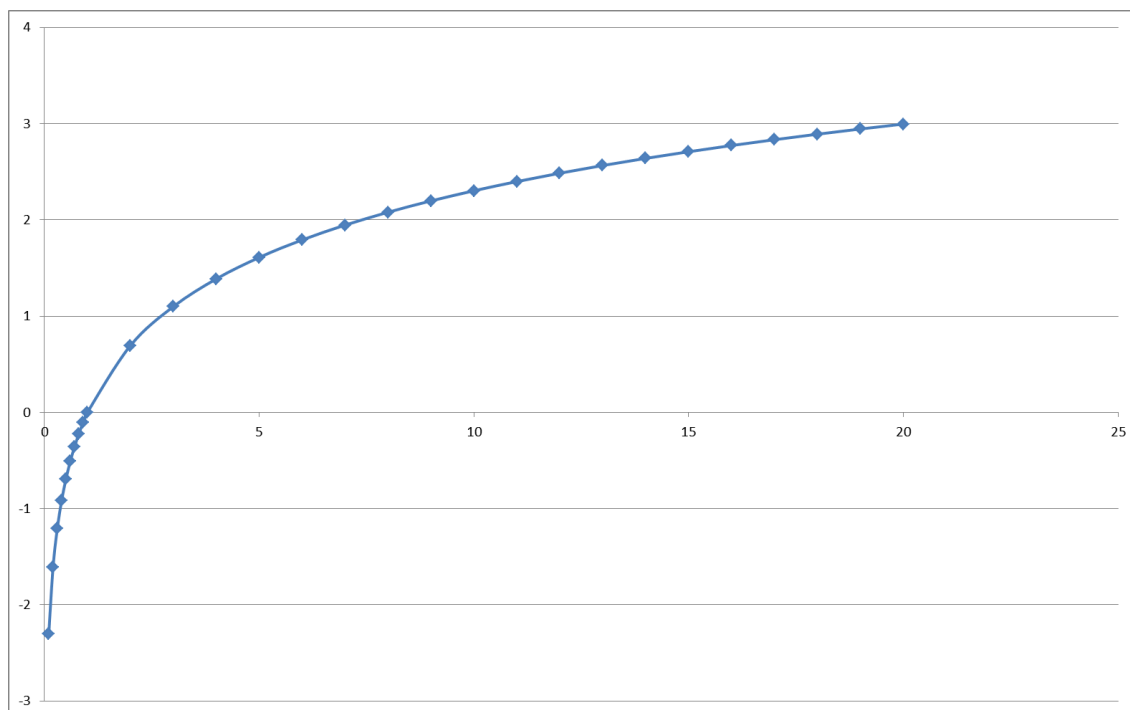
Essa condição onde a singularidade é eliminada durante o processamento é o caso do terceiro problema para a discretização com nós duplos.

Neste problema, a matriz de coeficientes para os pontos do nó duplo onde ambos têm como condição de contorno o potencial prescrito gera necessariamente duas linhas iguais na matriz, porém nas operações de escalonamento dessa matriz a dependência linear entre essas linhas acaba sendo perdida.

Este comportamento explica o motivo das singularidades terem sido encontradas com menores quantidades de pontos de contorno, mas não para maiores quantidades para o arranjo circular com R mínimo neste mesmo terceiro problema.

Outro fator que pode influenciar na proximidade dos valores dos coeficientes, e conseqüentemente na crescente perda de precisão dos arranjos com pontos fontes mais distantes para o aumento do número de pontos de contorno é o próprio comportamento da função fundamental que gera os coeficientes.

Pelo comportamento assintótico da função logarítmica neperiana, quanto maior se torna o seu argumento, menor é a variação do resultado da função, ou seja, quanto maior o afastamento dos pontos fontes, menor será a diferença para os resultados dos coeficientes da matriz, como pode ser observado na Figura 4.74.



**Figura 4.74 – Comportamento da função logarítmica neperiana.**

De modo geral, também se percebe a influencia deste comportamento nos resultados para diferença entre os arranjos. O arranjo circular, devido diferença de geometria para o contorno, possui maior variação da distancias entre pontos fontes e de contorno, e assim demonstra que suporta um maior numero de pontos de contorno antes que a proximidades dos valores possa afetar a precisão dos resultados.

A complexidade dos problemas também demonstra influenciar na diferença entre os tipos de arranjos. Para o primeiro problema, o menos complexo, os arranjos circulares se demonstraram bem superiores em precisão que os arranjos conformes. No entanto, isto não pode ser observado nos problemas 2 e 3. Nestes, além de não demonstrar grande diferença na precisão dos resultados, os arranjos circulares apresentaram grande instabilidade. Neste ponto, a compatibilidade das geometrias do contorno fictício e do problema pode ter sido determinante para os resultados.

Fica claro também que o reposicionamento dos pontos no contorno não surtiu efeito positivo na precisão de resultados, exceto para o terceiro problema por ter eliminado uma situação de singularidade.

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÃO

O MSF é um dos mais simples métodos numéricos na atualidade. Praticamente redescoberto há alguns anos, tem sido empregado com êxito na análise acústica, em problemas cujas fronteiras apresentam certa simplicidade e regularidade. Não obstante este sucesso, ainda há muitas dúvidas com relação à identificação de parâmetros que cercam sua aplicação generalizada, pois há uma tendência em calibrar o método diante de problemas cuja conformação geométrica se repete.

Em princípio, para os problemas aqui abordados, governados pela Equação de Laplace, o MSF se mostrou ser uma técnica de boa precisão dos resultados; porém, mostra grande instabilidade, demonstrando hora resultados melhores, hora piores. Tal instabilidade se deve a inúmeros motivos que já foram apresentados nos comentários dos resultados.

O que se pode concluir a partir desses motivos é que a precisão do método tem uma grande relação de dependência com o posicionamento dos pontos de contorno e dos pontos fontes.

No primeiro caso, a obtenção de singularidades devido o posicionamento dos pontos de contorno ainda pode ser contornado se identificando previamente situações onde o fato ocorre e os afastando os pontos neste caso, como já é feito para o MEC.

No entanto, a geração de coeficientes com valores muito próximos uns dos outros exige um estudo mais profundo já que a própria formulação do método cria esses coeficientes.

Um estudo que pode trazer informações preciosas e testar a solução de um mesmo problema, com mesma geometria, porém com dimensões diferentes, por exemplo variar as dimensões do quadrado multiplicando estas por 0,1 ou 10 e comparar com os resultados para o comprimento do lado igual a 1. Assim pode-se verificar a influencia da função fundamental como usada, como citado nos comentários dos resultados, na proximidade dos valores dos coeficientes.

A solução do sistema de equações por um método como o de Eliminação de Gauss não se mostrou eficiente para estes casos devido à incapacidade do código fonte de trabalhar com valores tão baixos. A utilização de métodos iterativos de solução de



sistemas de equações, como o GMRES (Saad, 1986), é uma alternativa que pode ser testada em futuros trabalhos em busca de melhores resultados,

Fica claro que para utilização do método em sua forma pura, há um equilíbrio a ser buscado entre o número de pontos utilizados e o posicionamento tanto dos pontos colocacionais quanto dos pontos fonte. Este pode ter sido o motivo do método não ter se consagrado desde sua introdução, já que esse equilíbrio não é de fácil identificação.

Com o recente destaque dos métodos sem malha nas pesquisas modernas, estudos já procuram evitar a dependência do método a esse posicionamento dos pontos fontes. Como exemplo, o Método da Fronteira Singular, foi introduzido por (Chen e Wang, 2010) como o MSF sem contorno fictício.

Um método de otimização para o posicionamento dos pontos fontes também foi usado por (Mathon e Jonsthor, 1977) e posteriormente por outros pesquisadores nas décadas e 80 e 90, principalmente por Karageorghis e Fairweather. Este método, no entanto, foi dado como de alto custo computacional devido ao grande número de avaliações da função necessário (Medeiros, 2005).

Já o desempenho do MEC se mostrou mais robusto e apresenta uma curva de convergência nítida com o refinamento da malha em todos os casos, o que não acontece com o MSF. As variações das condições de contorno, embora também afetem o MEC, pois quanto mais complexas maiores são as necessidades de maior refinamento da malha, mostraram-se muito mais sérias no MSF, nos exemplos abordados e em outros que não puderam ser aqui apresentados. Foi nítido que nestes casos que há uma tendência ainda maior à instabilidade numérica.

De maneira geral o MSF se apresenta como uma alternativa interessante para o MEC por se tratar de um método de fácil implementação, e dispensar a necessidade de malha no sentido clássico. No entanto o método em sua forma pura não oferece segurança suficiente para afirmar que este é mais preciso nestes casos devido à instabilidade apresentada na solução dos problemas.

Por fim, deve-se ressaltar a carência de uma bibliografia que apresente minuciosamente os testes com problemas governados pela Equação de Laplace, etapa importante antes da solução de problemas mais complexos que envolvem operadores diferenciais ainda mais elaborados. Daí a proposta e a importância de realização do

presente trabalho. É possível, portanto, que outras aplicações, como em casos governados pela Equação de Poisson e em outros com operadores mais elaborados, como os governados pela Equação de Helmholtz, devido presença de outros termos no sistema discreto de equações, forneçam um modo de reduzir a tendência à singularidade do método e de mostrá-lo como uma técnica mais competitiva nestes casos.

## CAPÍTULO 6 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERTOLANI, M. N. LOEFFLER, C. F. MENANDRO, F. M. BULCÃO, A. Desempenho De Funções De Base Radial de Suporte Compacto na Construção de Superfícies Bidimensionais, **Anais do MECOM/CILAMCE 2010**, Buenos Aires, Argentina.

BOGOLMONY, A. Fundamental Solutions Method for Elliptic Boundary Value Problems, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, vol. 22, No. 4, ago 1985, pag. 644-669.

BREBBIA, C. A. The Boundary Element Method for Engineers, London: **Ed. Pentech Press**, 1978

BREBBIA, C. A. WALKER, M. A. Boundary Element Techniques in Engineering, London: **Ed. Newnes-Butterworths**, 1980.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C.; WROBEL, L. C. Boundary element Techniques. Berlin: **Springer-Verlag**, 1984

BUHMANN, M. D. Radial Basis Function: Theory and Implementations. Cambridge: **Cambridge University**, 2003.

CHEN, C. S. KARAGEOGHIS, A. SMYRLIS, Y. S. The Method of Fundamental Solutions a Meshless Method, **Dynamic Publishers, Inc.** Atlanta, 2008.

CHEN, W. LIN, J. WANG, F. Regularized meshless method for nonhomogeneous problems, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 35, pag. 253-257, 2011.

CHEN, W. WANG, F.Z. A method of fundamental solutions without fictitious boundary, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 34, pag 530–532, mai 2010

CORDEIRO, S. G. F. LEONEL, E. D. Análise de Problemas de Potencial por Meio do Método das Soluções Fundamentais e do Método dos Elementos de Contorno com Reciprocidade Dual e Elementos de Alta Ordem, **XI Simpósio de Mecânica Computacional e II Encontro Mineiro de Modelagem Computacional**, 2014.

FAIRWEATHER, G. KARAGEOGHIS, A. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems, **Advances in Computational Mathematics** 9, 1998, pag. 69–95.

FAN, C. M. CHEN, C. S. MONROE, J. The method of fundamental solutions for solving convection-diffusion equations with variable coefficients, **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, 1, pag. 215-230, 2009.

FASSAHAUER, G. E. Meshfree Approximation Methods with MATLAB, Singapura: **World Scientific Publishers**, 2007.

FU, Z. CHEN, W. YANG, W. Winkler plate bending problems by a truly boundary-only boundary particle method, **Computational Mechanics**, 44, pag. 757-763, 2009

GOLBERG, M. A., CHEN, C. S. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems, *In: Golberg, M. A., editor. Boundary integral methods: numerical and mathematical aspects, Boston/Southampton: WIT Press, pag. 103-176, 1998.*

GOLBERG, M. A., CHEN, C. S. KARUR, S. R. Improved Multiquadric Approximation for Partial Differential Equations, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 18, pag. 9-17, 1996.

GOLBERG, M. A., CHEN, C. S. The Theory of Radial Basis Functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations, **Boundary Element Communications**, vol. 5, pag. 57-61, 1994.

HON, Y.C. Wei, T. The method of fundamental solution for solving multidimensional inverse heat conduction problems, **CMES Computational Modeling in Engineering & Sciences**, vol. 7, pag. 119–132, 2005.

JIANG, X. CHEN, W. Method of fundamental solution and boundary knot method for 90Helmholtz equations: a comparative study, **Chinese Journal of Computational Mechanics**, vol. 28:3, pag. 338–344, 2011.

KUPRADZE, V. D. ALEKSIDZE, M. A. A Method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics, **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, vol. 4, pag. 199-205, 1964.

LOEFFLER, C. F. A Recursive Application of the Integral Equation in the Boundary Element Method, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, vol. 35, pag. 77-84, 2011.

LOEFFLER, C. F.; CRUZ, A. L.; BULCÃO, A. Direct Use of Radial Basis interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method, **Engineering Analysis with Boundary Elements** , v.50, p. 97-108, 2015.

MATHON, R. JOHNSTON, R. L The approximate solution of Elliptic Boundary Value Problems by Fundamental Solutions, **SIAM Journal of Numerical Analysis**, vol. 14, pag. 638-650, 1977.

MEDEIROS, G. C. O Método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Potencial, 2001, **Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)**, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília.

MEDEIROS, G. C. O Método das Soluções Fundamentais para Problemas da Elasticidade Linear, 2005, **Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil)**, Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília, Brasília.

MICROSOFT CORPORATION, Programmer's Guide, **Software Microsoft Developer Studio**, Copyright 1994-95.

MOREIRA, D. F. Análise Matricial das Estruturas, **Ed. Universidade de São Paulo**, 1977.

MUKHERJEE, Y. X. MUKHERJEE, S. The Boundary Node Method for Potential Problems, **International Journal for Numerical Methods in Engineering** vol. 40, Issue 5, pag 797–815, mar 1997.

PATTERSON, C. SHEIKH, M. A. A Modified Trefftz Method for Three Dimensional Elasticity, in *Boundary Elements* Ed. C. A. Brebbia, **Springer Verlag**, pag. 427-437, 1983.

PONCE, A. C. Métodos Clássicos em Teoria do Potencial, **Minicurso Apresentado durante a II Escola de Equações Diferenciais**, Rio de Janeiro, 2006, Versão - 17 agosto 2009.

PRADO, A. A. Uma Formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais, **Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)**, COPPE/UF–J - Departamento de Engenharia Civil, 1991.

REDEKOP, D. THOMPSON, J. C. Use of Fundamental Solutions in the Collocation Method in Axisymmetric Elastostatics, **Computers and Structures**, vol. 17, pag. 485-490, 1983.

SAAD, Y. SCHULTZ, M. GMRES a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetrical linear systems, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 7, pag 856-868, 1986.

SANTOS, W. J. SANTIAGO, J. A. F. TELLES, J. C. F. Optimal positioning of anodes and virtual sources in the design of cathodic protection systems using the method of fundamental solutions, **Engineering Analysis with Boundary Elements** vol 46, set 2014, pag 67–74.

WEINBERGER, H. F. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, **Editorial Reverte**, Barcelona, 1970.

YOUNG, D. L. CHEN, K. H. LEE, C. W. Novel meshless method for solving the potential problems with arbitrary domain, **Research Article Journal of Computational Physics**, vol. 209, out 2005, pag. 290-321.



## APÊNDICE A – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 1 – BARRA TRACIONADA

Neste apêndice, serão demonstradas as expressões utilizadas no cálculo analítico do potencial e sua derivada que representam no caso da barra engastada o deslocamento axial e a tensão.

Considerando a figura A.1 a seguir (idêntica a Figura 4.5) tem-se:

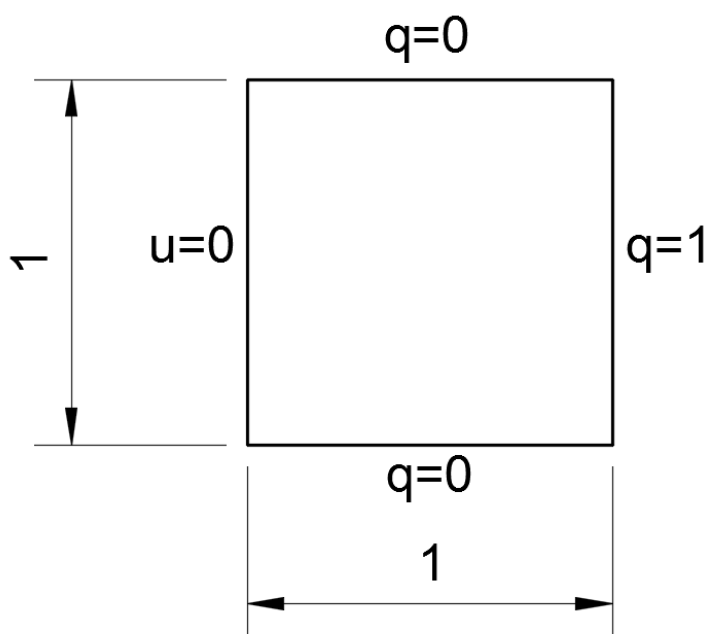


Figura A.1 – Condições de contorno para o Problema 1 – Barra Tractionada.

$$T = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \forall x \in (0,1) \quad \text{A.1}$$

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} = k_1 = EA \quad \text{A.2}$$

Como condição de contorno tem-se:

$$u = 0, \quad \text{em } x_1 = 0 \quad \text{A.3}$$

$$v = 1, \quad \text{em } x_1 = 1 \quad \text{A.4}$$

E

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{A.5}$$

Considerando-se A.2 e A.5, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = EA = 1 \quad \text{A.6}$$

Mas

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{A.7}$$

Sabendo-se que

$$\sigma = \frac{f}{A} \quad \text{A.8}$$

Então:

$$\varepsilon = \frac{f}{AE} \quad \text{A.9}$$

Assim, das equações A.6 e A.9 obtêm-se que a força é igual a deformação

$$\varepsilon = f \quad \text{A.10}$$



Voltando a equação A.7 tem-se:

$$\int du = \int dx_1 \quad \text{A.11}$$

$$u(x_1) = x_1 + C \quad \text{A.12}$$

Considerando A.3:

$$u(0) = 0, \text{ logo } C = 0 \quad \text{A.13}$$

Então:

$$u(x_1) = x_1 \quad \text{A.14}$$

## APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA 3 – TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM PLACA PLANA

Neste apêndice, serão demonstradas as expressões utilizadas no cálculo analítico do potencial para este problema que representa um problema clássico de transferência de calor em duas dimensões. A solução será calculada pelo método de separação de variáveis.

Considerando a figura B.1 a seguir (idêntica a Figura 4.65) tem-se:

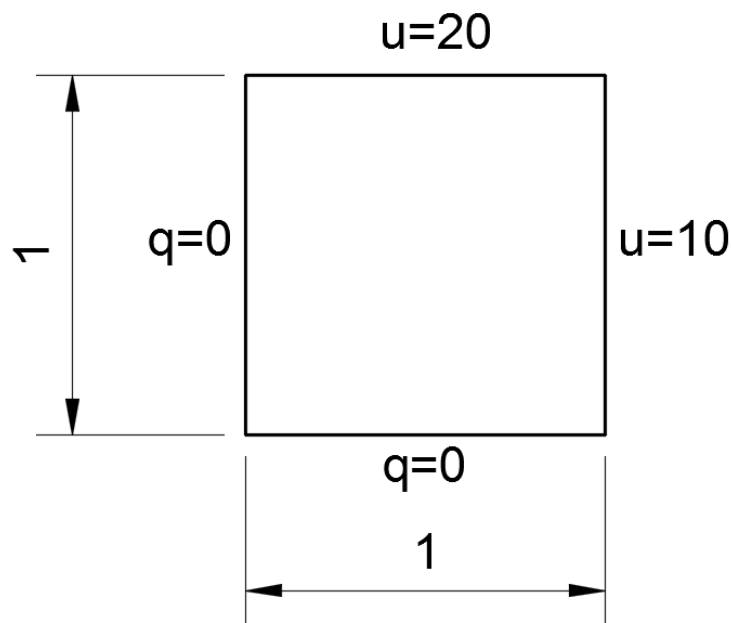


Figura B.1 – Condições de contorno para o Problema 3 – Transferência de calor em placa plana.

Considere a seguinte nomenclatura, por simplificação

$$u(1, x_2) = U_1, \text{ para } 0 \leq x_2 \leq 1 \quad \text{B.1}$$

$$u(x_1, 1) = U_2, \text{ para } 0 \leq x_1 \leq 1 \quad \text{B.2}$$

Partindo da equação de Laplace, que governa este problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{B.3}$$

Considere a substituição de  $u$  por  $\theta$  na equação de governo, onde:

$$\theta = \frac{u - U_1}{U_2 - U_1} \quad \text{B.4}$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{B.5}$$

E as condições de contorno ficam como na figura B.2 a seguir:

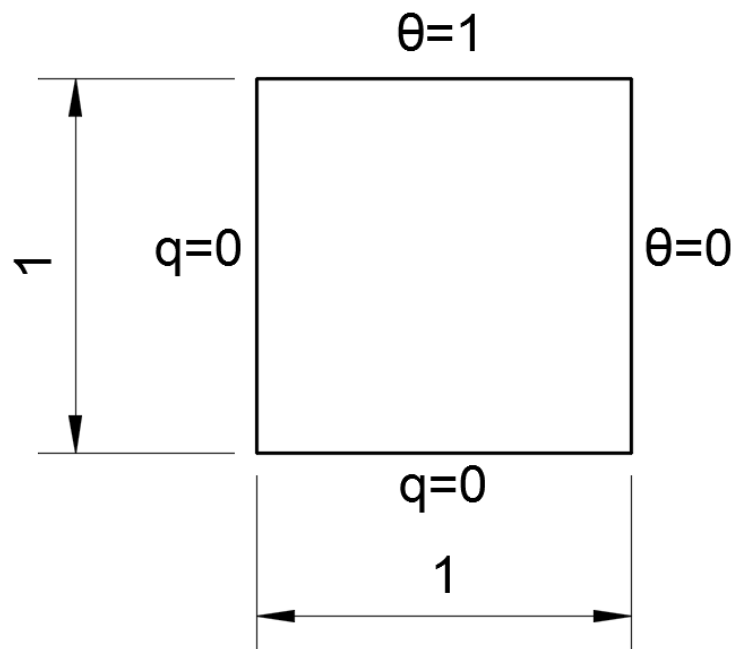


Figura B.2 – Condições de contorno do Problema 3 após substituição de  $u$  por  $\theta$ .

Supõe-se uma solução do tipo:

$$\theta(x_1, x_2) = X(x_1)Y(x_2) \quad \text{B.6}$$

E substitui-se a mesma na equação B.6

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{B.7}$$

Dividindo-se B.7 por  $XY$  tem-se:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x_1^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{B.8}$$

A partir de B.8 pode-se retirar as duas seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{d^2 X}{dx_1^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{B.9}$$

$$\frac{d^2 Y}{dx_2^2} + \lambda^2 Y = 0 \quad \text{B.10}$$

E as soluções para estas equações são:

$$X = C_1 \cos(\lambda x_1) + C_2 \sin(\lambda x_1) \quad \text{B.11}$$

$$Y = C_3 e^{-\lambda x_2} + C_4 e^{\lambda x_2} \quad \text{B.12}$$

Considere a condição de contorno:

$$\frac{\partial \theta(0, x_2)}{\partial x_1} = 0 \quad \text{B.13}$$

Aplicando-se B.6 e as soluções B.11 e B12 tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_1} = Y \frac{\partial X}{\partial x_1} = (C_3 e^{-\lambda x_2} + C_4 e^{\lambda x_2}) \frac{\partial}{\partial x_1} [C_1 \cos(\lambda x_1) + C_2 \sin(\lambda x_1)] \quad \text{B.14}$$

$$\frac{\partial \theta(0, x_2)}{\partial x_1} = (C_3 e^{-\lambda x_2} + C_4 e^{\lambda x_2}) \left[ -\lambda C_1 \overbrace{\sin(0)}^0 + \lambda C_2 \overbrace{\cos(0)}^1 \right] \quad \text{B.15}$$

$$\frac{\partial \theta(0, x_2)}{\partial x_1} = (C_3 e^{-\lambda x_2} + C_4 e^{\lambda x_2}) \lambda C_2 \quad \text{B.16}$$

Assim:

$$C_2 = 0, \text{ para } x_2 \neq 0 \quad \text{B.17}$$

Considere a condição de contorno abaixo

$$\frac{\partial \theta(x_1, 0)}{\partial x_2} = 0 \quad \text{B.18}$$

Aplicando-se B.6, B.11, B12 e B17 tem-se:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = X \frac{\partial Y}{\partial x_2} = C_1 \cos(\lambda x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} (C_3 e^{-\lambda x_2} + C_4 e^{\lambda x_2}) \quad \text{B.19}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} = X \frac{\partial Y}{\partial x_2} = C_1 \cos(\lambda x_1) (-\lambda C_3 e^{-\lambda x_2} + \lambda C_4 e^{\lambda x_2}) \quad \text{B.20}$$

$$\frac{\partial \theta(x_1, 0)}{\partial x_2} = C_1 \cos(\lambda x_1) \left( -\lambda C_3 \overbrace{e^{-\lambda 0}}^1 + \lambda C_4 \overbrace{e^{\lambda 0}}^1 \right) = 0 \quad \text{B.21}$$

$$C_1 \cos(\lambda x_1) \lambda (C_4 - C_3) = 0 \quad \text{B.22}$$

$$C_4 - C_3 = 0 \quad \text{B.23}$$

Assim:

$$C_3 = C_4, \text{ para } x \neq 0 \quad \text{B.24}$$

Considerando B.17 e B.24 pode-se reescrever B.6 da seguinte forma:

$$\theta(x_1, x_2) = C_1 \cos(\lambda x_1) C_3 (e^{-\lambda x_2} + e^{\lambda x_2}) \quad \text{B.25}$$

Fazendo as seguintes substituições

$$C_5 = C_1 C_3 \quad \text{B.26}$$

$$\cosh(\lambda x_2) = e^{-\lambda x_2} + e^{\lambda x_2} \quad \text{B.27}$$

A equação B.25 fica:

$$\theta(x_1, x_2) = C_5 \cos(\lambda x_1) \cosh(\lambda x_2) \quad \text{B.28}$$

Aplicando em seguida a condição de contorno abaixo:

$$\theta(1, x_2) = 0 \quad \text{B.29}$$

$$\theta(1, x_2) = C_5 \cos(\lambda) \cosh(\lambda x_2) = 0 \quad \text{B.30}$$

Como

$$\cosh(\lambda x_2) > 0 \quad \text{B.31}$$

logo

$$\cos(\lambda) = 0 \quad \text{B.32}$$

e então

$$\lambda = (2n - 1) \frac{\pi}{2}, \text{ para } n = 1, 2, 3 \dots \quad \text{B.33}$$

Assim a equação B.28 pode ser reescrita na forma a seguir:

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} C_5 \cos \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \cosh \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} x_2 \right] \quad \text{B.34}$$

Finalmente, considere condição de contorno abaixo:

$$\theta(x_1, 1) = 1 \quad \text{B.35}$$

$$\theta(x_1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} C_5 \cos \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \cosh \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} \right] = 1 \quad \text{B.36}$$

Fazendo:

$$C_5 = \frac{A_n}{\cosh \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} \right]} \quad \text{B.37}$$

Tem-se que:

$$\theta(x_1, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[ (2n - 1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] = 1 \quad \text{B.38}$$

Agora considere que:



$$A_n = \frac{\int_0^1 \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] dx}{\int_0^1 \cos^2 \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] dx} \quad \text{B.39}$$

$$A_n = \frac{\frac{2}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen} \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \Big|_0^1}{\left( \frac{1}{2\pi(2n-1)} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x_1] + \frac{x_1}{2} \right) \Big|_0^1} \quad \text{B.40}$$

$$A_n = \frac{2 \operatorname{sen} \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \Big|_0^1}{\left( \frac{1}{2} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x_1] + \frac{\pi(2n-1)x_1}{2} \right) \Big|_0^1} \quad \text{B.41}$$

$$A_n = \frac{2 \operatorname{sen} \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \right]}{\frac{\pi(2n-1)}{2}} \quad \text{B.42}$$

$$A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen} \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{B.43}$$

$$A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)} (-1)^{n+1} \quad \text{B.44}$$

Aplicando B.37 e em seguida B.44 em B.34, tem-se:

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\cosh \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \right]} \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \cosh \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_2 \right] \quad \text{B.45}$$

$$\theta(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1} \cos \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_1 \right] \cosh \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} x_2 \right]}{\pi(2n-1) \cosh \left[ (2n-1) \frac{\pi}{2} \right]} \quad \text{B.46}$$

Finalmente, retornando a relação B.4 tem-se:

$$u(x_1, x_1) = (U_2 - U_1) \theta(x_1, x_2) + U_1 \quad \text{B.47}$$

Onde  $\theta$  atende pela equação B.46.