

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

VINICIUS ERLER DE SOUSA RAMOS

**APLICAÇÃO RECURSIVA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM
PROBLEMAS DE POISSON**

VITÓRIA

2015

VINICIUS ERLER DE SOUSA RAMOS

**APLICAÇÃO RECURSIVA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM
PROBLEMAS DE POISSON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler.

VITÓRIA

2015

PÁGINA DESTINADA À FICHA CATALOGRÁFICA.

VINICIUS ERLER DE SOUSA RAMOS

**APLICAÇÃO RECURSIVA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM
PROBLEMAS DE POISSON**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

COMISSÃO EXAMINADORA:

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler –
Orientador**

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Luciano de Castro Lara

Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Webe João Mansur

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Vitória (ES), 31 de agosto de 2015.

AGRADECIMENTOS

Muito aconteceu para que eu pudesse chegar aonde cheguei hoje. Muito tenho a agradecer.

Em primeiro, à minha mãe, Ozélia de Lurdes Erler de Sousa, que não obstante a tarefa de educar-me e criar-me, sempre me alfinetou positivamente, com uma simples pergunta: “Meu filho, e o seu Mestrado?”.

Também agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler, pela paciência e inestimável confiança, e mesmo quando eu parecia longe nunca deixou de acreditar e orientar.

À secretária Andréia Guzi Eyng, que sempre teve um sorriso paciente e amigável frente aos problemas que levava, e sempre esteve disposta a nos auxiliar no que podia.

Muito mais aconteceu aqui, entre acertos e tropeços, e agradeço a Deus por cada um deles, que me fez crescer e trilhar os caminhos certos. Agradeço por cada centelha de luz que abriu minha mente.

RESUMO

Este trabalho apresenta a aplicação do denominado Procedimento Recursivo do Método dos Elementos de Contorno (MEC), com a finalidade de melhorar a precisão dos resultados numéricos calculados em problemas governados pela Equação de Poisson, usando malhas com diversos graus de refinamento. Classicamente, os valores em pontos internos são geralmente determinados através da reaplicação da equação integral, após serem calculados os valores no contorno. O mesmo procedimento, utilizando novos pontos fonte no contorno, é implementado nesse sentido. Neste trabalho mostra-se que esta ideia, já utilizada com êxito em problemas governados pela Equação de Laplace e Navier de elasticidade linear, pode ser utilizada para melhorar a precisão dos resultados, reutilizando a equação integral de contorno. A base matemática do procedimento recursivo provém da idéia do Método dos Resíduos Ponderados (MRP), importante ferramenta numérica fundamentada na minimização de resíduos. O Tensor de Galerkin é utilizado e aplicado em problemas uni e bidimensionais, comparando seus resultados com a solução analítica. Os resultados demonstram melhorias significativas no cálculo das derivadas do campo, e pequenas melhoras nos resultados da variável básica.

Palavras chave: Método dos Elementos de Contorno, Procedimento Recursivo, Método dos Resíduos Ponderados, Equação de Poisson.

ABSTRACT

This work presents the Recursive application of the Boundary Element Method (BEM), aiming to increase the precision of the numeric calculation in problems governed by Poisson Equation, using different refined degrees of meshing. Classically, the internal points are calculated by reusing the integral equation, after calculating the boundary points. The same technique is used, but now by means of choosing new boundary points again. As it was successful in problems of Laplace and linear elasticity of Navier, here this procedure is used to obtain better results. The mathematic basis of this technique comes from the Weighted Residual Method (WRM), an important numeric method based on minimizing residue along all the domain of the problem. The Galerkin Tensor is used and applied in one and two dimension problems, with the results being compared to the analytical solution. There is better accuracy in the results of the derivative; a slightly improvement on the accuracy is also achieved in the basic variable.

Keywords: Boundary Element Methods, Recursive Procedure, Weighted Residual Method, Poisson Equation.

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------------|--|
| BEM | Boundary Element Method |
| MDF | Método das Diferenças Finitas |
| MEC | Método dos Elementos de Contorno |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| MRP | Método dos Resíduos Ponderados |
| MVF | Método dos Volumes Finitos |
| WRM | Weighted Residual Method |
| $L[\]$ | Operador diferencial linear sobre alguma função |
| $u_0(X)$ | Solução exata do problema diferencial |
| $p(x)$ | Ação de domínio |
| $\Omega(X)$ | Domínio do problema |
| Γ | Contorno do problema |
| Γ_u | Região do contorno cuja condição essencial é conhecida |
| $\overline{u_0}$ | Valor da condição essencial no contorno Γ_u |
| Γ_q | Região do contorno cuja condição natural é conhecida |
| $\overline{q_0}$ | Valor da condição natural no contorno Γ_q |
| $u(X)$ | Solução aproximada do problema diferencial |
| $\phi_k(X)$ | Função de aproximação |
| α_k | Coeficiente da função $\phi_k(X)$ |
| β | Um valor pequeno positivo |
| ϵ_d | Resíduo |
| ϵ_r | Erro |
| ϵ_u | Resíduo no contorno Γ_q |
| ϵ_q | Resíduo no contorno Γ_u |
| ψ_j | Função de ponderação do resíduo ϵ_q |

| | |
|---------------------|---|
| $\overline{\psi}_j$ | Função de ponderação do resíduo ϵ_u |
| ξ | Ponto fonte |
| $u^*(\xi; x)$ | Solução fundamental do problema de Poisson, aplicada no ponto ξ |
| $q^*(\xi; x)$ | Derivada de $u^*(\xi; x)$ na direção normal ao contorno do problema |
| $r(\xi; x)$ | Distância cartesiana do ponto fonte ξ até o ponto x |
| π | Constante matemática |
| ∂n | Relativo à direção normal do contorno |
| $\Delta(\xi; x)$ | Função Delta de Dirac |
| $g(x)$ | Uma função qualquer, unidimensional |
| d | Um valor numérico |
| e | Um valor numérico |
| f | Um valor numérico |
| $c(\xi)$ | Um coeficiente relacionado à posição do ponto fonte |
| ε | Raio no entorno do ponto fonte, cujo limite tende a zero |
| ξ^i | Pontos fonte arbitrários |
| U | Valor do potencial do campo em um ponto nodal |
| Q | Valor do fluxo do campo em um ponto nodal |
| η | Variável adimensional |
| L_e | Comprimento do elemento de contorno |
| ω_j | Pesos de Gauss |
| NPG | Números de Pontos de Gauss |
| $[\tilde{H}]$ | Matriz de coeficientes dos valores do potencial nos pontos nodais |
| $[\tilde{G}]$ | Matriz de coeficientes dos valores do fluxo nos pontos nodais |
| G^* | Função primitiva da solução fundamental |
| z_1, z_2 | Derivada da ação de domínio nas direções cartesianas |
| z | Projeção da ação de domínio na direção normal |

| | |
|------------------|--|
| ϕ_1, ϕ_2 | Funções de aproximação de galerkin |
| e | Elemento nodal |
| $\{\check{P}\}$ | Vetor de coeficientes relacionados à ação de domínio |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| ρ_0 | Massa específica |
| g | Aceleração da gravidade |
| E | Módulo de Young |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1: Domínio do problema e condições de contorno. | 16 |
| Figura 2: Representação do Delta de Dirac. | 20 |
| Figura 3: Representação dos valores de $c(\xi)$ | 22 |
| Figura 4: Contorno em elementos segmentados por nós..... | 26 |
| Figura 5: Cossenos diretores no elemento de contorno retilíneo. | 30 |
| Figura 6: Elementos anterior e posterior ao ponto fonte. | 30 |
| Figura 7: Gráfico das equações a serem integradas..... | 31 |
| Figura 8: Posição do elemento fonte no procedimento recursivo..... | 35 |
| Figura 9: Gráfico das equações a serem integradas no procedimento recursivo..... | 36 |
| Figura 10: Ação de domínio constante..... | 39 |
| Figura 11: Caso 1: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal..... | 39 |
| Figura 12: Ação de domínio linear..... | 40 |
| Figura 13: Caso 2: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal..... | 41 |
| Figura 14: Membrana com carga senoidal. | 42 |
| Figura 15: Caso 3: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal..... | 43 |
| Figura 16: Membrana sob carga constante..... | 44 |
| Figura 17: Caso 4: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal..... | 44 |
| Figura 18: Caso 5: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal..... | 45 |

SUMÁRIO

| | | |
|-----|--|----|
| 1 | INTRODUÇÃO..... | 11 |
| 1.1 | ESTADO DA ARTE | 11 |
| 1.2 | OBJETIVO | 14 |
| 1.3 | ESTRUTURA DO TRABALHO..... | 15 |
| 2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 16 |
| 2.1 | O MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS | 16 |
| 2.2 | O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA POTENCIAL ESCALAR..... | 19 |
| 2.3 | RELAÇÃO ENTRE MEC E MRP..... | 22 |
| 2.4 | DISCRETIZAÇÃO | 25 |
| 3 | O TENSOR DE GALERKIN APLICADO À EQUAÇÃO DE POISSON..... | 28 |
| 4 | O PROCEDIMENTO RECURSIVO..... | 33 |
| 5 | TESTES REALIZADOS | 38 |
| 5.1 | AÇÃO DE DOMÍNIO CONSTANTE | 38 |
| 5.2 | AÇÃO DE DOMÍNIO LINEAR | 40 |
| 5.3 | MEMBRANA COM CARGA SENOIDAL | 42 |
| 5.4 | MEMBRANA COM CARGA CONSTANTE | 43 |
| 5.5 | MEMBRANA COM CARGA POLINOMIAL..... | 45 |
| 6 | CONCLUSÕES..... | 47 |
| | REFERÊNCIAS..... | 49 |
| | APÊNDICE A..... | 52 |
| | APÊNDICE B..... | 53 |
| | APÊNDICE C | 54 |
| | APÊNDICE D | 58 |
| | APÊNDICE E..... | 61 |

1 INTRODUÇÃO

1.1 ESTADO DA ARTE

A evolução e popularização da computação permitiu amplo acesso ao computador como uma eficiente ferramenta de processamento de dados. A engenharia se aproveitou dessa capacidade de processamento para efetuar cálculos de forma muito rápida, aplicando diariamente métodos numéricos para obter soluções aproximadas para os complexos problemas que precisava resolver e frequentemente aparecem sob a forma de equações diferenciais. Antes, obter respostas aos problemas de engenharia não era possível seja pela falta de uma solução analítica, desconhecida até o momento, ou pela dificuldade de conceber um modelo físico em escala para simulação.

As bases matemáticas dos métodos numéricos foram desenvolvidas ao longo da história pela evolução do conhecimento e da ciência, baseados na matemática e no cálculo. Na busca de soluções plausíveis dos problemas de engenharia sem solução conhecida, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos para obter uma solução aproximada, dentre eles o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Um dos fatores que favoreceu a popularização destes métodos foi a criação de códigos comerciais utilizando os métodos acima que permitem ao usuário resolver problemas sem que seja necessário realizar qualquer programação. Porém, isto não exime o usuário de conhecer as bases do método que o programa computacional utiliza sob o risco de aceitar qualquer resultado como verdadeiro, ignorando possíveis falhas de implementação de dados, desconsiderando condições importantes ao método e seus limites em relação ao problema em estudo (AZEVEDO, 2003).

Pela sua concepção, cada método numérico possui aplicações em que é mais vantajoso que outro. Seguindo este raciocínio, o usuário deveria estudar diferentes métodos para que pudesse aplicar o mais adequado a cada situação. Porém, o dispêndio de tempo em estudo e compreensão de cada método seria demasiado em virtude de cada um possuir premissas básicas distintas, tempo que nem sempre está

disponível. Para evitar este tipo de trabalho, os métodos foram desenvolvidos para que, através de alguns procedimentos pudessem ampliar a gama de problemas resolvíveis satisfatoriamente, aumentando sua aplicabilidade.

Para encontrarem uma solução aproximada, os métodos numéricos manipulam as equações de governo dos problemas de modo a torná-las convenientes, através de uma técnica de solução baseada em premissas matemáticas. Nesse algebrismo, os diversos métodos possuem um ponto em comum: em algum momento, transformam as equações, geralmente definidas num domínio contínuo, em um meio discreto, solucionando-as em alguns pontos do domínio do problema. O MEC, em particular, tem como principal característica a discretização somente do contorno do problema (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992), enquanto outros métodos, como Elementos Finitos, Diferenças Finitas e Volumes Finitos, demandam que o contorno e o domínio do problema sejam discretizados. Desta forma, no MEC o sistema linear gerado possui menor ordem, pois não precisa gerar uma malha no domínio, reduzindo o custo computacional para a solução do problema.

Outro ponto a destacar no MEC é sua melhor precisão em diversos problemas, cuja justificativa pode ser encontrada à luz dos princípios do Método dos Resíduos Ponderados (BREBBIA e WALKER, 1980). Este consiste de uma técnica de solução de equações que utiliza uma função de ponderação atuando de forma a expurgar os resíduos da solução aproximada, minimizando o erro cometido. Pelo fato de empregar uma função de ponderação correlata ao problema que se quer resolver, pode-se efetuar tal expurgo de resíduos com maior efetividade.

O Método dos Elementos de Contorno encontrou sucesso ao ser aplicado em problemas de concentração de tensão e problemas cujo domínio é infinito. Na sua formulação, os Elementos de Contorno utilizam uma equação chamada de solução fundamental (solução de um problema correlato com o problema em estudo), como as funções de base radial, capazes de representar bem este tipo de problema, onde uma fonte pontual afeta o domínio em seu entorno. Isto leva o método a ser utilizado para o estudo de fraturas e propagação de trincas, como fizeram Guimarães (1992) e Figueiredo (2008), obtendo bons resultados.

Outra vantagem do MEC é que ele calcula em um único procedimento os valores do potencial da função e do fluxo da mesma (derivada normal) no contorno. É possível calcular valores no domínio do problema reutilizando as equações com as soluções

no contorno e escolhendo pontos no domínio, com uma vantagem: uma vez que a formulação do MEC traz consigo a ponderação de resíduos, repetir o uso das equações implica em calcular soluções mais precisas ainda, de forma que o cálculo de soluções no domínio torna-se mais preciso que no próprio contorno (LOEFFLER, 2011; LOEFFLER E FREITAS, 2015).

Alguns exemplos de aplicações bem sucedidas e que mostram a abrangência do MEC são os problemas de elasticidade (TAGUTI, 2010), condução de calor (OLIVEIRA, 2011), fluidodinâmica (ZHANG e LIU, 2015), análise de campos elétricos (MOROVATI e MALEK, 2015), acústica (KIRKUP, 2007) e biomedicina (MENIN, 2009).

Porém, como todo método, o MEC possui suas limitações naturais. Por ser um método de contorno, problemas que envolvem ações de domínio tem sua representação dificultada. Problemas com geometrias esbeltas, com pouco domínio e muito contorno, também têm a precisão de sua resposta diminuída. Em termos computacionais, as matrizes são problemáticas por não serem simétricas, dificultando o cálculo da solução e demandando maior tempo computacional.

Outro elemento que pode complicar a formulação do MEC é a resolução numérica de integrais. Por vezes surgem funções singulares que precisam ter tratamento adequado em suas integrações (SILVA, 2011).

O Método dos Elementos de Contorno teve desenvolvimento recente se comparado a outros métodos, como o Método dos Elementos Finitos e das Diferenças Finitas e por isso também é menos difundido que os demais. Sua utilização comercial é proporcional à sua difusão.

Suas restrições não impediram a aplicação e o desenvolvimento do MEC em diversos campos da engenharia. Na busca de melhorias para o método os pesquisadores buscaram formas de aumentar a gama de problemas para os quais o MEC trabalha satisfatoriamente e com alguma vantagem competitiva, diminuindo seu tempo de processamento e melhorando a precisão dos resultados.

O procedimento recursivo é uma destas iniciativas voltadas ao aprimoramento do Método dos Elementos de Contorno. Neste sentido, a seguir apresenta-se um breve resumo dos trabalhos envolvendo este esquema de pós processamento dos

resultados do MEC. Uma vez que se trata de algo novo e, portanto, pouco conhecido, são poucos os trabalhos abordando a técnica.

Loeffler (2011) apresentou a técnica em casos simples, exemplificando-a em problemas de potencial escalar governados pela equação de Laplace, objetivando assim aumentar a precisão numérica das respostas obtidas diretamente através do Método clássico dos Elementos de Contorno. Os resultados obtidos no contorno são usados novamente, isto é, recursivamente, em nova formulação integral. Assim, uma vez calculados o potencial e o fluxo no contorno do problema, do mesmo modo que se calculam valores no domínio busca-se calcular novamente valores no contorno, em pontos diferentes dos calculados anteriormente (e também dos pontos onde as variáveis são prescritas, evidentemente), aumentando a precisão dos resultados.

Valoto (2011) buscou replicar os resultados de Loeffler (2011) em problemas sujeitos à Equação de Navier da elasticidade linear, obtendo muitos resultados favoráveis, porém alguns nem tanto, demonstrando que ainda havia o que explorar a respeito deste procedimento. Nesta linha, Loeffler, Freitas e Valoto (2013a, 2013b) aprimoraram o trabalho anterior e não apenas apresentou resultados recursivos para os deslocamentos, mas também para as forças de superfície.

Loeffler e Matos (2012) exploraram essa técnica em problemas de Poisson com solução obtida pela técnica da Dupla Reciprocidade, não obtendo resultados positivos, cuja razão, em princípio, reputa-se à introdução de aproximações com funções de base radial.

1.2 OBJETIVO

Este trabalho busca aplicar a técnica recursiva no Método dos Elementos de Contorno em problemas governados pela Equação de Poisson utilizando-se o Tensor de Galerkin, efetuando testes em diferentes problemas de potencial escalar, buscando obter resultados mais precisos. Uma vez que a técnica do Tensor de Galerkin não introduz aproximações em problemas com ações de domínio harmônicas, pode-se então estender o campo de investigação da eficiência do procedimento recursivo em problemas de campo estacionários.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O Capítulo 2 apresenta os fundamentos do Método dos Resíduos Ponderados e do Método dos Elementos de Contorno para potencial escalar, explicando a relação entre os dois métodos.

O capítulo 3 mostra a aplicação do Tensor de Galerkin a problemas de Poisson, desenvolvendo o equacionamento adequado e necessário.

O Capítulo 4 apresenta o procedimento recursivo bem como o desenvolvimento da formulação matemática necessária para aplicar a técnica em problemas de Poisson.

O Capítulo 5 apresenta os problemas nos quais foram aplicados o procedimento recursivo e os resultados obtidos em cada um deles.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas neste trabalho.

Apêndices finais estão dispostos com o desenvolvimento das soluções analíticas dos problemas trabalhados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

Uma das técnicas utilizadas para encontrar a solução de equações diferenciais lineares é o Método dos Resíduos Ponderados (MRP). Uma descrição estratégica do método é feita considerando-se uma equação diferencial linear da forma da Eq. (1):

$$L[u_0(X)] = p(x) \quad (1)$$

Onde $L(u)$ é um operador diferencial linear, $u_0(X)$ é a solução exata do problema e $p(x)$ é uma equação conhecida.

A função é definida no domínio $\Omega(X)$ cujo contorno Γ pode ser descrito por regiões Γ_u onde é conhecido o potencial \bar{u}_0 (condições de contorno essenciais) ou por regiões Γ_q onde é conhecido seu fluxo \bar{q}_0 (condições de contorno naturais). A Figura 1 mostra essas divisões embora a segmentação do contorno em regiões Γ_u e Γ_q pode ser intercalada sem prejuízo ao método. Mas em qualquer localização do contorno uma das condições deve ser conhecida.

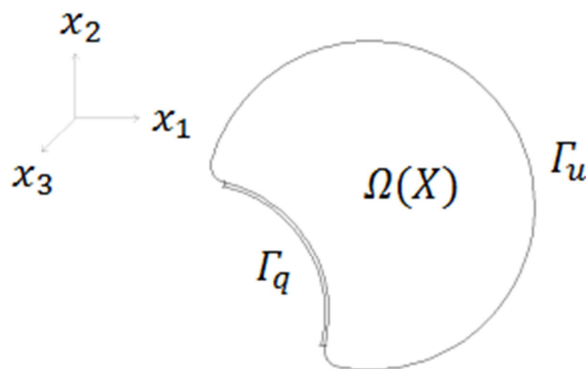


Figura 1: Domínio do problema e condições de contorno.

O MRP consiste em utilizar uma função aproximada $u(X)$ no lugar da solução exata $u_0(X)$ que seja um somatório de funções, com coeficientes α_k a determinar:

$$u(X) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(X) \quad (2)$$

As funções ϕ_k devem ser linearmente independentes de modo a criar uma base para representar a solução aproximada $u(X)$. Ainda, a base de funções $\phi(X)$ devem ser tal que:

$$\left\| u_0(X) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k(X) \right\| < \beta \quad (3)$$

Onde β é um valor pequeno positivo, de forma que a base gerada pelas funções ϕ_k deve ser representativa da solução exata. A precisão da aproximação pode ser melhorada aumentando-se o número de coeficientes α_k a serem determinados.

A substituição da solução exata $u_0(X)$ pela solução aproximada $u(X)$ na Eq. (1) naturalmente gera uma diferença chamada de resíduo, definido na Eq. (4):

$$\epsilon_d = L(u) - p(X) \neq 0 \quad (4)$$

Este conceito difere do conceito de erro (ϵ_r). Este está relacionado diretamente com a diferença dos valores da solução exata e da solução aproximada:

$$\epsilon_r = u - u_0 \quad (5)$$

No contorno, porém, esses dois conceitos se equivalem haja vista a ausência da ação de domínio. Então, define-se o resíduo ϵ_u no contorno onde são calculadas os valores do potencial do campo e o resíduo ϵ_q onde são calculadas as soluções do fluxo do campo.

$$\epsilon_u = u - u_0 \quad (6)$$

$$\epsilon_q = q - q_0$$

Com o objetivo de minimizar o resíduo gerado o MRP utiliza funções de ponderação ψ_j , com características semelhantes às de ϕ_k , de modo a ponderar o resíduo no domínio do problema, forçando-o, neste intervalo, a ter um valor médio nulo.

$$\int_{\Omega} \epsilon_d \psi_j d\Omega = 0 \quad (7)$$

A melhor tática para se obter soluções numéricas via MRP é utilizar uma função de aproximação $u(X)$ que respeite as condições de contorno, mas nem sempre isto é viável. Caso não seja possível encontrar uma função que obedeça ao contorno, é preciso fazer a ponderação de resíduos no contorno utilizando as Eqs. (8) e (9):

$$\int_{\Gamma_u} \epsilon_u \bar{\psi}_j d\Gamma = \int_{\Gamma_u} (u - u_0) \bar{\psi}_j d\Gamma = 0 \quad (8)$$

$$\int_{\Gamma_q} \epsilon_q \psi_j d\Gamma = \int_{\Gamma_q} (q - q_0) \psi_j d\Gamma = 0 \quad (9)$$

Combinando estas três últimas equações, tem-se uma ponderação de resíduos no domínio e também no contorno, quando as condições de contorno não são obedecidas pela aproximação proposta, conforme Eq. (10):

$$\int_{\Omega} \epsilon_d \psi_j d\Omega = \int_{\Gamma_u} \epsilon_u \bar{\psi}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \epsilon_q \psi_j d\Gamma = \int_{\Gamma_u} (u - u_0) \bar{\psi}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_q} (q - q_0) \psi_j d\Gamma \quad (10)$$

A penúltima integral da Eq. (10) representa a minimização de resíduos no contorno devido à não obediência das condições de contorno essenciais, enquanto que a última integral minimiza resíduos devido à desobediência das condições de contorno naturais.

Nas próximas seções será mostrado que essa estrutura integral de minimização de resíduos, em sua forma geral conforme mostra a Eq. (10), está implícita na formulação integral do método dos elementos de contorno. O Método dos Elementos Finitos, em sua formulação clássica, não dispõe da primeira integral do lado direito da Eq. (10), o que significa que caso não haja continuidade no modelo numérico entre os valores da variável $u(X)$, os resultados numéricos serão ruins, pois não há minimização de resíduos com relação à descontinuidade desta variável.

Ressalta-se ainda que no caso do MEC as funções de ponderação são: a solução fundamental do problema de Poisson $u^*(\xi; x)$, considerando um meio homogêneo infinito sujeito a uma ação concentrada no ponto ξ , denominado fonte; e $q^*(\xi; x)$ a sua derivada normal ao contorno externo Γ . Por serem funções solução de um problema correlato, constroem um espaço solução afim e sua potencialidade na minimização de resíduos é elevada. Os detalhes que justificam esta afirmativa são mostrados a seguir.

2.2 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA POTENCIAL ESCALAR

A Equação de Poisson descreve matematicamente diversos problemas de engenharia de potencial escalar, como problemas de condução de calor, escoamento fluido, processos de difusão, aquíferos, torção, entre outros (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992). Tomando um campo escalar de domínio bidimensional e utilizando notação indicial, a Equação de Poisson tem a forma da Eq. (11).

$$u_{,ii} = p(x) \quad (11)$$

Onde $p(x)$ pode ser um valor constante ou mesmo uma função das variáveis do problema. Na sua forma homogênea, isto é, com $p(x) = 0$, surge a Equação de Laplace, que descreve problemas de mesma natureza que os problemas governados pela Equação de Poisson. A diferença entre eles é que a parcela não homogênea da Equação de Poisson representa, fisicamente, ações no interior domínio do problema, cuja interpretação depende do problema em estudo, como fontes e sumidouros de fluido, energia nos problemas termofluídicos, ou carregamentos devidos à ação de massa distribuída em problemas de elasticidade. O tratamento da ação de domínio pode ser feita de várias formas. Uma delas, aplicada no presente trabalho é o Tensor de Galerkin, apresentado mais à frente. Neste ponto, é estratégico apresentar a formulação básica do MEC para a Equação de Laplace, ou seja, considerando a ausência de fontes ou ações de domínio em geral.

Em linhas gerais, o Método dos Elementos de Contorno é uma formulação integral, que busca uma aproximação global, eficiente em todo o domínio de integração $\Omega(X)$, em contraste com as formulações diferenciais do tipo do Método das Diferenças Finitas, onde a aproximação é local.

Há algumas formas de se deduzir o MEC, uma delas sendo o MRP. Por conveniência, será apresentada agora uma dedução usando as ferramentas do cálculo integral, para uma melhor avaliação do método.

Na formulação integral clássica o Método dos Elementos de Contorno utiliza-se uma função auxiliar arbitrária u^* que seja contínua no domínio do problema, assim como

pelo menos suas duas primeiras derivadas. Para simplificar, vamos aplicar este procedimento na equação de Laplace:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (12)$$

A função u^* , além das características já citadas, deve ser a solução de um problema correlato, atuando como função de aproximação da solução exata (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992). Ela forma uma base funcional para a solução do problema de forma que deve ser composta de funções linearmente independentes e que no problema em estudo é definida pelas Eqs. (13) e (14):

$$u^*(\xi; x) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; x) \quad (13)$$

$$u_{,i}^*(\xi; x) = q^*(\xi; x) = \frac{\partial u^*}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (14)$$

Onde q^* representa a derivada de u^* na direção normal ao contorno, enquanto $r(\xi; x)$ representa a distância euclidiana do ponto fonte ξ até o ponto x onde a ação do ponto ξ gera um efeito. A Figura 2 representa geometricamente esta distância.

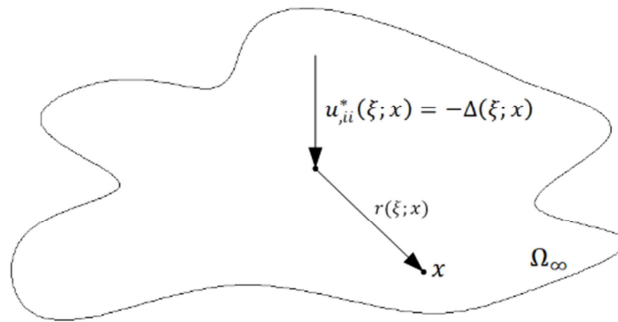


Figura 2: Representação do Delta de Dirac.

Em outras palavras, u^* representa a função Delta de Dirac, numa região de domínio infinito, onde a ação concentrada num ponto fonte se propaga em todas as direções até o ponto x , o que permite escrever:

$$u_{,ii}^*(\xi; x) = -\Delta(\xi; x) \quad (15)$$

Na Eq. (12), a existência do operador Laplaciano sobre a solução exata u torna esta solução muito exigida, por exemplo, em termos de continuidade. Esta equação é chamada de forma integral forte. Ainda, a Eq. (12) está definida no domínio Ω do

problema, desinteressante ao MEC. Então, aplica-se sobre ela a técnica de integração por partes obtendo a Eq. (16), que é chamada de forma integral fraca:

$$\int_{\Omega} (u_i u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_i u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (16)$$

Sobre a primeira integral da Eq. (16) é possível aplicar o Teorema da Divergência, transformando a integral de domínio em integral de contorno. Desta forma obtém-se a Eq. (17):

$$\int_{\Gamma} u_i u^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_i u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (17)$$

Sobre a segunda integral da Eq. (17) repetem-se os passos anteriores, aplicando a integração por partes seguida do Teorema da Divergência, levando à Eq. (18), chamada de forma integral inversa.

$$\int_{\Gamma} u_i u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (18)$$

Apesar de obter duas integrais de contorno, restou uma integral de domínio. Nela existe uma integração sobre a função Delta de Dirac que possui propriedades interessantes: seu valor tende ao infinito em ξ e é nulo em qualquer outro ponto, mas se a sua integral envolver um domínio no qual está incluso o ponto ξ , o resultado desta integral será 1 (um). Desta forma, a integral que envolva a multiplicação de uma função qualquer $g(x)$ com o Delta de Dirac cujo domínio de integração inclua o ponto ξ terá como resultado o valor da função no ponto ξ (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1992). Em termos matemáticos:

$$\int_d^f g(x) \Delta(x = e) dx = g(e); \quad \text{onde } d < e < f \quad (19)$$

Desta forma:

$$\int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = \int_{\Omega} -u \cdot \Delta(\xi; x) d\Omega = -c(\xi) u(\xi) \quad (20)$$

Assim a equação de Laplace para problemas de potencial escalar é escrita como:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^*(\xi; x)n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} qu^*(\xi; x)n_i d\Gamma = 0 \quad (21)$$

Ou:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^*(\xi; x)n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^*(\xi; x)n_i d\Gamma \quad (22)$$

Brebbia e Dominguez (1992) explicam que o ponto ξ pode ser visto como o centro de um círculo de raio ε no seu entorno, com valor ε tendendo a zero. Este princípio está em consonância com o Valor Principal de Cauchy, de modo que o valor de $c(\xi)$ pode ser enxergado como a fração do círculo que está localizada dentro do domínio do problema. Desta forma, quando o ponto ξ está no domínio do problema, $c(\xi)$ vale 1 (um), e quando o ponto ξ localiza-se no contorno seu valor depende da sua posição no contorno. A Figura 3 ilustra esta situação.

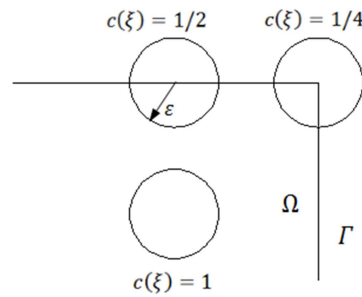


Figura 3: Representação dos valores de $c(\xi)$.

2.3 RELAÇÃO ENTRE MEC E MRP

Esta seção resume-se a demonstrar que quando utilizam-se formulações integrais fracas e inversas existe naturalmente uma minimização de resíduos. Retomando-se a Eq. (17) e reescrevendo a integral de contorno:

$$\int_{\Gamma} u_{,i}u^*n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{,i}n_i u^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma = \int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} qu^* d\Gamma \quad (23)$$

No contorno Γ_q é prescrito o valor \bar{q}_0 . Combinando as equações (17) e (23):

$$\int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u_{,i}^* d\Omega = 0 \quad (24)$$

Reescreve-se a forma integral forte a partir da integral de domínio da Eq. (24), mantendo as integrais de contorno com o valor prescrito \bar{q}_0 :

$$\int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega - \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma = 0 \quad (25)$$

$$\int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} qu^* d\Gamma = 0 \quad (26)$$

As duas primeiras integrais são herança da utilização dos valores prescritos, sendo que no contorno Γ_u o valor de q é calculado. Desta forma, as duas integrais sobre Γ_u se anularão, pois dizem respeito a valores aproximados, mas as duas integrais em Γ_q não se anularão, pois a primeira refere-se ao valor exato \bar{q}_0 prescrito, enquanto a última é o valor aproximado. Então, escrevemos:

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q}_0) u^* d\Gamma \quad (27)$$

A expressão do lado esquerdo da Eq. (27) representa a minimização de resíduos no domínio. A expressão que surge do lado direito representa a minimização de resíduos da condição de contorno natural quando as condições de contorno não são respeitadas. Em outras palavras, uma forma integral fraca apresenta, em sua formulação, uma minimização de resíduos das condições de contorno naturais.

Ao integrar por partes e aplicar o teorema da divergência sobre a integral de domínio da Eq. (17) obtém-se o seguinte resultado:

$$-\int_{\Omega} u_{,i} u_{,i}^* d\Omega = -\int_{\Gamma} uu_{,i}^* n_i d\Gamma + \int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega \quad (28)$$

$$-\int_{\Omega} u_{,i} u_{,i}^* d\Omega = -\int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega \quad (29)$$

Onde q^* é a derivada da função de aproximação na direção normal ao contorno. Substituindo a Eq. (29) na Eq. (24) tem-se:

$$\int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega = 0 \quad (30)$$

Divide-se a integral de contorno pelas regiões onde são prescritas as condições de contorno naturais e essenciais:

$$\int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_0 q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega = 0 \quad (31)$$

Mais uma vez utiliza-se a integral de domínio para retomar à forma forte da equação, preservando os valores prescritos nas integrais de contorno. Isto resultará em:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}_0 u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{u}_0 q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} uq^* d\Gamma + \int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega - \int_{\Gamma_u} qu^* d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_q} qu^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} uq^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} uq^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Lembra-se que os valores de u em Γ_q serão calculados assim como os valores de q em Γ_u . Mas onde o contorno prescreve a condição essencial ela diferirá do valor calculado, assim como onde a condição natural é prescrita o valor exato diferirá do valor aproximado, não anulando estas integrais. Isto resulta em:

$$\int_{\Omega} uu_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Gamma_u} (\bar{u}_0 - u)q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q}_0)u^* d\Gamma \quad (33)$$

Reaparece a integral da Eq. (27) que minimiza o resíduo das condições naturais. Mas, na forma integral inversa, surge também um termo de minimização de resíduos devido à desobediência das condições de contorno essenciais.

A Eq. (33) mostra que o Método dos Elementos de Contorno, ao utilizar a forma integral inversa, apresenta implicitamente ferramentas matemáticas que minimizam resíduos caso as condições de contorno não sejam obedecidas, aumentando a precisão do método.

2.4 DISCRETIZAÇÃO

A Eq. (22) será discretizada para resolver o problema de Laplace. Os pontos ξ nela relacionados representam os locais nos quais o resíduo é mínimo. Para tanto, pode-se aplicar os mesmos métodos de discretização do Método dos Resíduos Ponderados. Pelo Método da Colocação, por exemplo, arbitram-se pontos ξ^i em que se deseja mínimo resíduo, seja no domínio físico do problema Ω , no contorno Γ dele ou fora de ambos, de modo que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} c(\xi)u(\xi) \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega + \int_{\Omega^*} \left[\int_{\Gamma} uq^*(\xi; x)n_i d\Gamma \right] \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega \\ = \int_{\Omega^*} \left[\int_{\Gamma} qu^*(\xi; x)n_i d\Gamma \right] \Delta(\xi^i; \xi) d\Omega \end{aligned} \quad (34)$$

Onde Ω^* representa um espaço que contém o domínio físico Ω do problema e é maior que ele. O resultado das integrais da Eq. (34) é:

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \int_{\Gamma} uq^*(\xi^i; x)n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^*(\xi^i; x)n_i d\Gamma \quad (35)$$

O Método da Colocação é simples e apresenta resultados satisfatórios para um grande número de aplicações, mas existe outra técnica de discretização muito interessante em problemas de potencial escalar: o Método de Galerkin, que utiliza-se de funções de ponderação ϕ_k para interpolar o campo dos valores do potencial U e de sua derivada Q no contorno. Desta forma, a Eq. (22) será integrada como mostrado na Eq. (36):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^*} c(\xi)u(\xi) \phi_k(\xi^i; \xi) d\Omega + \int_{\Omega^*} \left[\int_{\Gamma} uq^*(\xi; x)n_i d\Gamma \right] \phi_k(\xi^i; \xi) d\Omega \\ = \int_{\Omega^*} \left[\int_{\Gamma} qu^*(\xi; x)n_i d\Gamma \right] \phi_k(\xi^i; \xi) d\Omega \end{aligned} \quad (36)$$

Resultando em:

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \phi_k U^e q^*(\xi^i; x) d\Gamma = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \phi_k Q^e u^*(\xi^i; x) d\Gamma \quad (37)$$

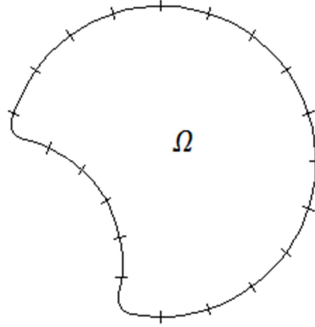


Figura 4: Contorno em elementos segmentados por nós.

A integração é realizada sobre cada elemento funcional sobre o contorno, onde existe um elemento nodal com um valor a ser calculado. De forma a facilitar a integração numérica, uma mudança de variável de integração é feita, conforme as Eqs. (38) e (39):

$$\eta = \frac{2x}{L_e} - 1 \quad (38)$$

$$d\eta = \frac{2}{L_e} dx \quad (39)$$

Onde L_e representa o comprimento do elemento. Neste trabalho serão utilizadas funções de interpolação ϕ_k lineares, que utilizam os valores de dois nós para interpolar o valor do campo, conforme as Eqs. (40) e (41):

$$\phi_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (40)$$

$$\phi_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (41)$$

A interpolação do campo é feita pelas Eqs. (42) e (43):

$$u(\eta) = U_1^e \phi_1(\eta) + U_2^e \phi_2(\eta) \quad (42)$$

$$q(\eta) = Q_1^e \phi_1(\eta) + Q_2^e \phi_2(\eta) \quad (43)$$

Os valores U_1^e e U_2^e representam, respectivamente, o primeiro e o segundo valores utilizados para a interpolação dos valores potenciais do campo interpolado no elemento e , que neste caso, correspondem ao início e fim do elemento. O raciocínio é análogo para Q_1^e e Q_2^e .

As integrais da Eq. (37) são resolvidas numericamente pelo Método de Gauss. Aplicando estes últimos resultados, a Eq. (37) toma a forma seguinte:

$$c(\xi^i)u(\xi^i) + \sum_{e=1}^N U_k^e \sum_{j=1}^{NPG} \phi_k(\eta_j)q^*(\xi^i; \eta_j)\omega_j = \sum_{e=1}^N Q_k^e \sum_{j=1}^{NPG} \phi_k(\eta_j)u^*(\xi^i; \eta_j)\omega_j \quad (44)$$

Onde são ω_j os pesos de Gauss, e NPG são os Números de Pontos de Gauss. Finalmente, é possível garantir resíduo mínimo colocando-se os pontos ξ^i coincidentes com os nós funcionais, em número igual ao de nós funcionais de forma a gerar o sistema de equações a ser resolvido:

$$[\tilde{H}]\{\tilde{U}_k^e\} = [\tilde{G}]\{\tilde{Q}_k^e\} \quad (45)$$

A matriz \tilde{H} possui os coeficientes associados aos valores do potencial do campo escalar no nó funcional, e o vetor \tilde{U} possui os valores do campo. No lado direito da equação, a matriz \tilde{G} possui os coeficientes associados ao valor do fluxo normal ao contorno no elemento funcional, enquanto o vetor \tilde{Q} possui os valores do fluxo. Conhecida uma destas condições de contorno em cada nó é possível calcular a outra, de forma que o Método dos Elementos de Contorno calcula o potencial do campo e sua derivada em um único procedimento.

3 O TENSOR DE GALERKIN APLICADO À EQUAÇÃO DE POISSON

Como já foi dito anteriormente, a equação de Laplace pode ser vista como uma particularização da equação de Poisson, onde esta última é a forma não homogênea da primeira, escrita conforme a Eq. (46).

$$u_{,ii} = p(x) \quad (46)$$

A aplicação da função de ponderação u^* agora deve ser feita em toda a equação e integrada no domínio do problema, conforme a Eq. (47).

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} p(x) u^* d\Omega \quad (47)$$

O tratamento para resolver o lado esquerdo da equação já foi demonstrado nas seções anteriores, de forma que pode-se escrever, a partir da Eq. (21):

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u q^*(\xi; x) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^*(\xi; x) n_i d\Gamma = \int_{\Omega} p(x) u^* d\Omega \quad (48)$$

A resolução do lado direito da equação via Tensor de Galerkin segue, em princípio, o mesmo procedimento, sendo necessário operacionalizar a forma integral de um modo semelhante ao já realizado para se chegar a uma forma inversa. Para isso, reescreve-se a função u^* em termo de uma função primitiva G^* - o Tensor de Galerkin – que equivale ao seu Laplaciano:

$$u^* = G_{,ii}^* \quad (49)$$

Uma vez escrita desta forma, é possível levar à forma inversa aplicando a integração por partes e o Teorema da Divergência duas vezes, conforme realizado anteriormente com a equação de Laplace.

$$\int_{\Omega} p(x) G_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Omega} [p(x) G_{,i}^*]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} p_{,i}(x) G_{,i}^* d\Omega \quad (50)$$

$$\int_{\Omega} p(x) G_{,ii}^* d\Omega = \int_{\Omega} [p(x) G_{,i}^*]_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} [p_{,i}(x) G^*]_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} p_{,ii}(x) G^* d\Omega \quad (51)$$

$$\int_{\Omega} p(x)G_{,ii}^*d\Omega = \int_{\Gamma} p(x)G_{,i}^*n_id\Gamma - \int_{\Gamma} p_{,i}(x)n_iG^*d\Gamma + \int_{\Omega} p_{,ii}(x)G^*d\Omega \quad (52)$$

A Eq. (52) é a forma integral inversa da parcela não homogênea da Eq. (47). A integral de domínio que persiste pode ser facilmente excluída se o Laplaciano da ação de domínio for nulo. Em outras palavras, considerando-se a Eq. (53):

$$p_{,ii} = 0 \quad (53)$$

A Eq. (47) então é reescrita inserindo-se os pontos fonte ξ :

$$\begin{aligned} c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} uq^*(\xi; x)n_id\Gamma - \int_{\Gamma} qu^*(\xi; x)n_id\Gamma \\ = \int_{\Gamma} p(x)G_{,i}^*(\xi; x)n_id\Gamma - \int_{\Gamma} p_{,i}(x)n_iG^*(\xi; x)d\Gamma \end{aligned} \quad (54)$$

De modo a garantir o exposto na Eq. (49), as expressões para G^* e $G_{,i}^*n_i$ são:

$$G^*(\xi; x) = \frac{1}{8\pi}r^2(1 - \ln r) \quad (55)$$

$$G_{,i}^*(\xi; x)n_i = \frac{1}{8\pi} \left[r + 2 \ln \frac{1}{r} \right] \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} \quad (56)$$

Ainda:

$$p_{,i}(x)n_i = \frac{\partial p}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n} + \frac{\partial p}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial n} = z_1n_1 + z_2n_2 = z \quad (57)$$

Onde n_1 e n_2 representam os cossenos diretores normais ao contorno. Para discretizar a equação integral serão utilizados elementos lineares, como feito anteriormente. Observa-se que, apesar da existência de um termo singular na Eq. (56) (no logaritmo natural) a equação como um todo não é singular quando a distância r tende a. Quando isto ocorre as integrais da Eq. (54) convergem, como será demonstrado a partir deste momento:

$$\int_{\Gamma} p(x)G_{,i}^*(\xi; x)n_id\Gamma = \int_{\Gamma} (p_1^e\phi_1 + p_2^e\phi_2) G_{,i}^*(\xi; x)n_id\Gamma \quad (58)$$

Onde ϕ_1 e ϕ_2 representam as funções de aproximação de Galerkin e p_1 e p_2 são os valores da ação de domínio no início e no fim do elemento e .

Para o caso de elementos retilíneos, mostrado na Figura 5, os termos referentes ao cosseno diretor são:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial n} = r_i n_i = \frac{r_i n_i}{r} = 0 \quad (59)$$

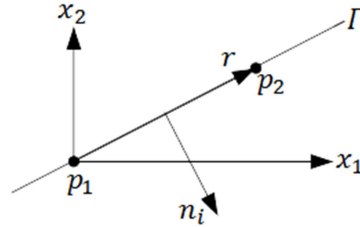


Figura 5: Cossenos diretores no elemento de contorno retilíneo.

Esta integral se anula se o ponto fonte for colinear ao elemento integrado. Naturalmente isto sempre acontecerá quando o elemento sobre o qual a integração acontece contiver o ponto fonte, anulando a integral singular. Avalia-se agora a integral com o termo G^* na Eq. (54), que não se anula.

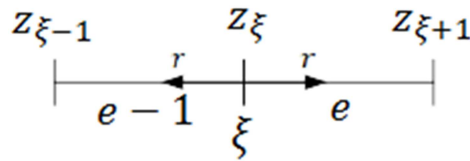


Figura 6: Elementos anterior e posterior ao ponto fonte.

A Figura 6 apresenta o ponto fonte localizado no nó z_{ξ} e os elementos anterior e posterior a ele, com seus pontos nodais $z_{\xi-1}$ e $z_{\xi+1}$. Neste caso, o valor de z_{ξ} será afetado pela integração sobre os elementos $(e-1)$ e (e) . As integrais resultantes da discretização sobre este ponto nodal são mostradas na Eq. (60).

$$\int_{\Gamma_{e-1}} (z_{\xi-1}\phi_1 + z_{\xi}\phi_2)G^*(\xi; x_{e-1})d\Gamma_{e-1} + \int_{\Gamma_e} (z_{\xi}\phi_1 + z_{\xi+1}\phi_2)G^*(\xi; x_e)d\Gamma_e \quad (60)$$

Ressalta-se que para a formação do sistema matricial são necessárias integrações em todos os elementos, mas a equação acima mostra apenas como será tratada a situação quando o ponto fonte e o elemento de integração coincidem. As demais integrações são tratadas numericamente sem problemas. Considerando apenas os termos relacionados com z_{ξ} :

$$\int_{\Gamma_{e-1}} z_i \phi_2 G^*(\xi; x_{e-1}) d\Gamma_{e-1} + \int_{\Gamma_e} z_i \phi_1 G^*(\xi; x_e) d\Gamma_e \quad (61)$$

Aqui serão utilizadas funções de forma dimensionais para solução analítica das integrais da Eq. (61). Por isto:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (62)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L} \quad (63)$$

Aplicando as Eqs. (62) e (63) na Eq. (61):

$$\frac{z_\xi}{8\pi} \int_0^{L_{e-1}} \left(\frac{x}{L_{e-1}} \right) r^2 (1 - \ln r) dr + \frac{z_\xi}{8\pi} \int_0^{L_e} \left(1 - \frac{x}{L_e} \right) r^2 (1 - \ln r) dr \quad (64)$$

Pela Figura 7 é possível perceber que as integrais das duas funções que se multiplicam no núcleo da integral convergem. Uma parte delas se anula mutuamente e a outra é integrável.

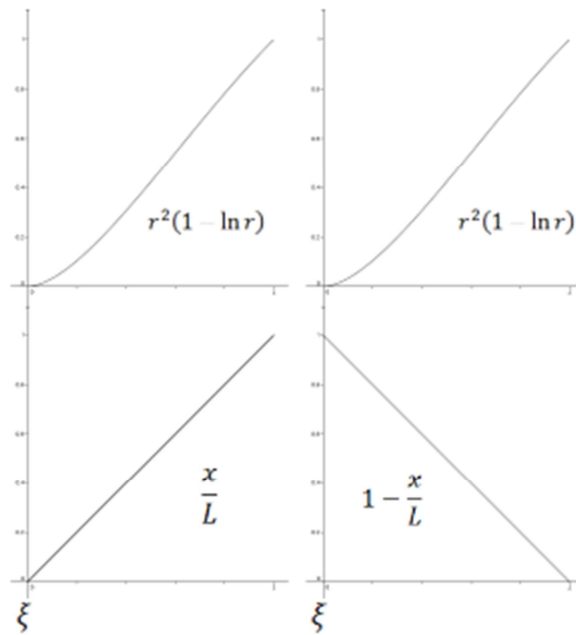


Figura 7: Gráfico das equações a serem integradas.

Então, resolvemo-las analiticamente para o caso geral em que os elementos não tenham o mesmo comprimento. Integrando, tem-se:

$$\frac{z_\xi}{8\pi} \int_0^{L_{e-1}} \left(\frac{r}{L_{e-1}} \right) r^2 (1 - \ln r) dr + \frac{z_\xi}{8\pi} \int_0^{L_e} \left(1 - \frac{r}{L_e} \right) r^2 (1 - \ln r) dr \quad (65)$$

Após resolvidas, estas integrais resultam em:

$$\frac{z_\xi}{8\pi} \left[\frac{L_{e-1}^3}{16} (5 - 4 \ln L_{e-1}) + \frac{L_e^3}{144} (19 - 12 \ln L_e) \right] \quad (66)$$

É comum simplificar a criação de malhas utilizando-se elementos constantes, ou seja, todos com o mesmo comprimento L . Neste caso, a Eq. (66) se reduz a:

$$\frac{z_\xi L^3}{72\pi} (4 - 3 \ln L) \quad (67)$$

Em outras palavras, apesar de haver singularidade, em virtude de o ponto fonte coincidir com o elemento, fazendo com que a distância r se anule, a sua integral existe e tem valor exato, definido analiticamente. Seu cálculo analítico reduz os erros que seriam cometidos caso fosse realizada a integração numérica.

Com estes resultados acima pode-se resolver as integrais do lado direito da Eq. (54). Colocando-se os pontos fontes tantos quantos forem a quantidade de elementos com os quais foi dividido o problema, obtém-se um sistema matricial semelhante ao problema de Laplace, com um termo a mais:

$$[\tilde{H}]\{\tilde{U}_k^e\} = [\tilde{G}]\{\tilde{Q}_k^e\} + \{\check{P}\} \quad (68)$$

Onde $\{\check{P}\}$ representa as integrais relacionadas ao termo fonte, conhecido e calculado.

4 O PROCEDIMENTO RECURSIVO

O Método dos Elementos de Contorno apresenta-se como uma formulação que calcula diretamente soluções na variável básica e em sua derivada normal apenas no contorno do problema. Se for desejado conhecer os valores da variável básica no interior do domínio do problema é preciso reutilizar a Eq. (35) (no caso do Problema de Laplace) ou a Eq. (54) (no caso do Problema de Poisson), colocando novos pontos fonte na posição desejada no interior do problema. A partir destes novos pontos fonte geram-se novas matrizes, cuja ordem dependerá de quantos pontos fonte são colocados. Ressalta-se, entretanto, que como numa espécie de pós-processamento computacional, nenhum novo sistema matricial será resolvido, pois as grandezas incógnitas da variável básica estão explícitas e apenas produtos matriciais estão envolvidos, de modo que o custo computacional é bastante baixo. Assim, considerando como ξ^i os novos pontos fonte no interior e sendo U_k^e e Q_k^e os valores de contorno previamente calculados, tem-se:

$$\begin{aligned}
 u(\xi^i) = & \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\xi^i; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\xi^i; X) d\Gamma_e \\
 & + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,i}^*(\xi^i; X) n_i d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G^*(\xi^i; X) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{69}$$

Para se determinar os valores da derivada do potencial em pontos internos é preciso derivar a equação anterior com relação às direções coordenadas dos pontos fonte ξ^i , ou seja:

$$\begin{aligned}
 u_{,j}(\xi^i) = & \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u_{,i}^*(\xi^i; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q_{,i}^*(\xi^i; X) d\Gamma_e \\
 & + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k (G_{,i}^*(\xi^i; X) n_{i,j}) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,j}^*(\xi^i; X) d\Gamma_e
 \end{aligned} \tag{70}$$

Nesta última equação:

$$u_{,i}^*(\xi^i; X) = q_i^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,i} \tag{71}$$

$$q_{,i}^*(\xi^i; X) = p_i^* = \frac{1}{2\pi r^2} [2r_{,i} r_{,j} n_j - r_{j,i} n_j] \tag{72}$$

$$G_{,j}^*(\xi^i; X) = \left[\frac{2 \ln r - 1}{8\pi} \right] r_j \quad (73)$$

$$(G_{,i}^*(\xi^i; X)n_i)_{,j} = \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{r_j}{r^2} r_i n_i + (2 \ln r - 1) \delta_{ij} n_i \right] \quad (74)$$

Verifica-se que as funções do núcleo das integrais ficam de ordem inversa maior, ou seja, o expoente da distância euclidiana r cresce negativamente. Mas tais integrais, não são singulares nem hipersingulares, pois os pontos fonte são internos e a integração acontece sobre o contorno.

Embora este pós-processamento possa se constituir numa limitação do MEC, caso a quantidade de pontos internos a se calcular seja muito grande, há outros pontos a considerar. Uma vez que a formulação integral inversa possui, como já foi demonstrada, uma equivalência à formulação de minimização de resíduos, reaplicar esta equação implica em realizar novo procedimento de minimização de resíduos. Isto faz com que o resultado dos valores calculados no interior do problema sejam mais precisos que aqueles calculados primeiramente no contorno.

O procedimento recursivo consiste em aplicar novamente a formulação integral inversa e calcular valores no contorno novamente, em novos pontos fonte diferentes dos anteriores. A posição dos novos pontos fonte não deve coincidir com a dos pontos nodais, porque estes já foram objeto de minimização de resíduos; nem devem ser posicionados onde os valores já são prescritos. A utilização recursiva da equação integral é mais eficaz quando os novos pontos se situam aproximadamente meia distância de dois pontos nodais adjacentes.

A justificativa para o emprego do procedimento recursivo é simples: a precisão numérica do cálculo das variáveis internas é melhor do que a obtida no cálculo dos valores de contorno, sendo a razão matemática para esse comportamento proveniente do fato de que o reuso da equação integral equivale a uma nova minimização dos erros numéricos cometidos. Ressalta-se que já foi mostrado anteriormente que existe uma associação entre a equação integral de governo (Eq. (54)) e uma sentença do método dos resíduos ponderados (BREBBIA, 1978). Assim, se há minimização de resíduos para os novos pontos fonte internos, também deve ser o caso se forem tomados novos pontos fonte, agora situados no contorno, em posições distintas dos pontos fonte originais.

A equação integral recursiva para novos pontos fonte ξ^r é similar à Eq. (69) considerando apenas que, estando os novos pontos fonte no contorno e sendo este suave, tem-se:

$$(0.5)u(\xi^r) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\xi^r; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\xi^r; X) d\Gamma_e \\ + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,i}^*(\xi^r; X) n_i d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G^*(\xi^r; X) d\Gamma_e \quad (75)$$

Não somente os valores do potencial no contorno podem ser recalculados pelo procedimento recursivo; também os valores das derivadas espaciais do potencial podem ser obtidos pelo mesmo processo. A fundamentação matemática para determinação das derivadas espaciais segue os mesmos passos da formulação hipersingular do MEC (MANSUR, FLEURY e AZEVEDO, 1997). No caso de contornos suaves:

$$(0.5)q(\xi^r) = \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u_{,n}^*(\xi^r; X) d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N U_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q_{,n}^*(\xi^r; X) d\Gamma_e \\ + \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k (G_{,n}^*(\xi^r; X) n_i)_{,j} d\Gamma_e - \sum_{e=1}^N z_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k G_{,n}^*(\xi^r; X) d\Gamma_e \quad (76)$$

Onde temos:

$$u_{,n}^*(\xi^i; X) = q_i^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,i} n_i \quad (77)$$

$$q_{,n}^*(\xi^i; X) = p_i^* = \frac{1}{2\pi r^2} [2r_{,i} r_{,j} n_j - r_{j,i} n_j] n_i \quad (78)$$

$$G_{,n}^*(\xi^i; X) = \left[\frac{2 \ln r - 1}{8\pi} \right] r_j n_i \quad (79)$$

$$(G_{,n}^*(\xi^i; X) n_i)_{,j} = \frac{1}{8\pi} \left[2 \frac{r_j}{r^2} r_i n_i + (2 \ln r - 1) \delta_{ij} n_i \right] n_j \quad (80)$$

Conforme mencionado, no caso de elementos lineares, estes novos pontos fonte são posicionados no meio do elemento, conforme Figura 8.

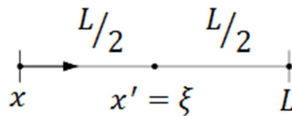


Figura 8: Posição do elemento fonte no procedimento recursivo.

Naturalmente, as funções de forma precisam ser reescritas para adequarem-se ao novo sistema de referência:

$$\phi_1 = 1 - \frac{x}{L} = 1 - \frac{x'}{L} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{x'}{L} \quad (81)$$

$$\phi_2 = \frac{x}{L} = \frac{x'}{L} + \frac{1}{2} \quad (82)$$

Então, as integrais de contorno podem ser distinguidas em dois grupos: uma composta pela integração referente aos elementos que não contém o ponto ξ , e outra referente à integração do elemento que contém o ponto ξ .

De forma simplificada, para as integrais que compõem o Tensor de Galerkin tem-se:

$$\int_{\Gamma} z_i G^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{\xi}} z_i G^* d\Gamma + \int_{\Gamma - \Gamma_{\xi}} z_i G^* d\Gamma \quad (83)$$

Onde a integral $\int_{\Gamma_{\xi}} z_i G^* d\Gamma$ representa a integração sobre o elemento que possui o ponto fonte. Para este termo:

$$\int_{\Gamma_{\xi}} z_i G^* d\Gamma = z_1^{\xi} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{x'}{L} \right) G^*(\xi; x') dx' + z_2^{\xi} \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{x'}{L} \right) G^*(\xi; x') dx' \quad (84)$$

A visualização gráfica destas funções simplifica a resolução das integrais.

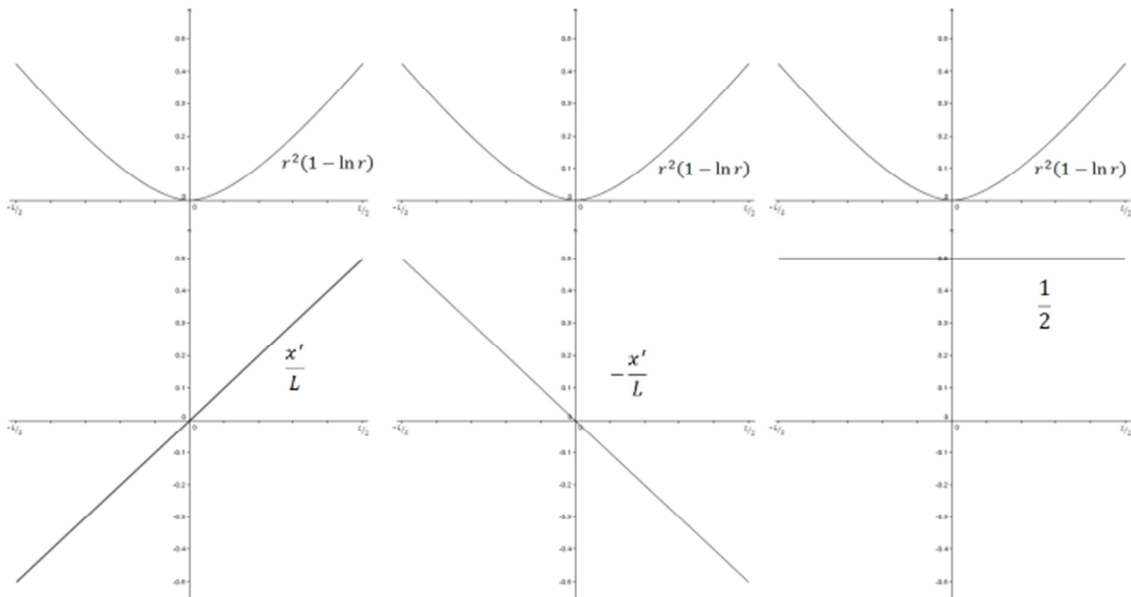


Figura 9: Gráfico das equações a serem integradas no procedimento recursivo.

Percebe-se que a integração sobre o produto das funções ímpares, seja x'/L ou $-x'/L$, pela função G^* no intervalo dado se anulam. Resta a integração sobre o valor constante:

$$\int_{\Gamma_\xi} z_i G^* d\Gamma = z_1^\xi \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} G^*(\xi; x') dx' + z_2^\xi \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} G^*(\xi; x') dx' \quad (85)$$

Dado que a função G^* é uma função par:

$$\int_{\Gamma_\xi} z_i G^* d\Gamma = z_1^\xi \int_0^{L/2} G^*(\xi; x') dx' + z_2^\xi \int_0^{L/2} G^*(\xi; x') dx' \quad (86)$$

Calculando as integrais:

$$\int_0^{L/2} G^*(\xi; x') dx' = \int_0^{L/2} \frac{1}{8\pi} r^2 (1 - \ln r) dr = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{L^3}{24} \left(\frac{4}{3} + \ln \frac{2}{L} \right) \right] \quad (87)$$

E agora a integração singular pode ser escrita analiticamente, enquanto todos os termos relacionados à integral $\int_{\Gamma-\Gamma_\xi} z_i G^* d\Gamma$ são calculados numericamente sem dificuldades. As integrais referentes ao termo $G_{,i}^*(\xi; x) n_i$ vão se anular novamente, em virtude do exposto na seção anterior.

5 TESTES REALIZADOS

A metodologia e equações apresentadas no capítulo anterior foram aplicadas a cinco problemas de potencial escalar governados pela Equação de Poisson, com características adequadas àquela formulação, ou seja, os termos fonte são funções harmônicas e seu Laplaciano é nulo, anulando a integral de domínio da Eq. (52). Os diferentes problemas permitem testar o procedimento recursivo em casos de fontes com distribuições diversas e assim permitir estender o leque de investigações da sua eficiência além dos problemas de Laplace.

Em todos os casos a geometria dos problemas é sempre quadrada com lados de medida unitária e foram realizados testes com quatro malhas diferentes em cada problema, contendo 16, 32, 64 e 80 nós, incluídos os nós duplos nos vértices.

Foram calculados os valores desconhecidos de potencial e de fluxo no contorno do problema. A seguir foi aplicado o procedimento recursivo calculando-se novamente os valores no contorno, em novos pontos. Os resultados obtidos nos procedimentos direto e recursivo foram comparados com a solução exata, cuja obtenção é demonstrada nos apêndices.

Foi calculado o erro médio relativo de cada procedimento, tomando-se como parâmetro relativo o maior valor absoluto que a solução exata pode atingir na região delimitada pelo contorno (incluindo o domínio do problema). Foram considerados o maior valor do potencial para cálculo do erro relativo da solução aproximada para o potencial, e o valor máximo da derivada no cálculo do erro relativo para a solução aproximada do fluxo.

A seguir são apresentados os testes realizados e os resultados de cada um.

5.1 AÇÃO DE DOMÍNIO CONSTANTE

A Figura 10 mostra o problema. A ação de domínio é constante, um lado do contorno possui condição de contorno essencial nula enquanto nos outros três a condição de contorno natural é nula. Fisicamente poderia representar uma barra engastada submetida à ação do peso próprio uniforme em toda a sua extensão.

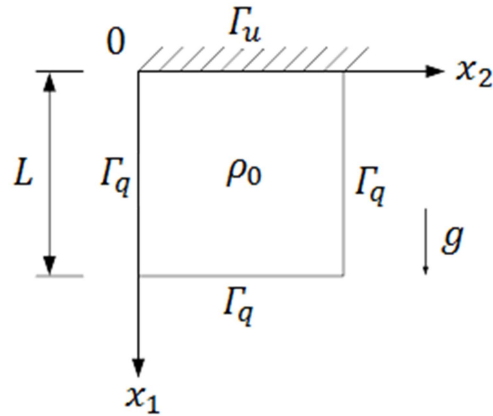


Figura 10: Ação de domínio constante.

O Apêndice A mostra o desenvolvimento da solução exata, porquanto são apresentados aqui somente seus resultados. A Eq. (88) é a solução exata para o potencial.

$$u(x) = P \left[\frac{x^2}{2} - Lx \right] \quad (88)$$

Onde a ação de domínio é:

$$P = \rho_0 g \quad (89)$$

Este é um problema unidimensional, portanto a solução exata para a derivada da função na direção x é:

$$\frac{du}{dx} = P[x - L] \quad (90)$$

A ação de domínio foi implementada com valor unitário. Os valores dos erros médios para malhas com diferentes níveis de refinamento são mostrados na Figura 11.

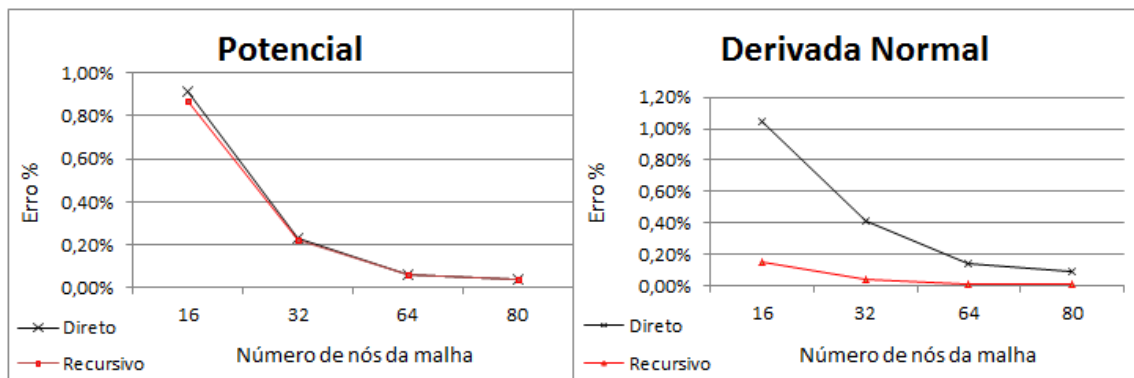


Figura 11: Caso 1: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal.

Para este problema percebe-se que o valor de erro no cálculo do potencial foi muito parecido entre o procedimento direto e o recursivo, sem nenhuma diferença

significativa. No caso do potencial, cuja variação analítica neste caso é quadrática, o uso de elementos lineares com o MEC já fornece boa precisão. Pode-se adiantar que sempre que os valores numéricos ofereçam boa precisão e, naturalmente, nenhuma minimização eficiente de resíduos for cabível, a diferença de resultados entre o procedimento recursivo e a solução direta não será significativa. Isto é ratificado com o comportamento das soluções com o refinamento das malhas.

Porém, no cálculo da derivada do potencial o procedimento recursivo obteve resultados mais precisos. A diferença foi maior quando se utilizou malhas pobres, enquanto que o uso de malhas refinadas aproximou os resultados. Ainda assim, o procedimento recursivo obteve melhor precisão, que nas malhas de 64 e 80 nós teve erro da ordem de $10^{-2}\%$, enquanto o procedimento direto chegou a $10^{-1}\%$.

Cabe destacar que embora as derivadas do potencial sejam descritas por funções de mais baixa ordem, o seu cálculo por meio de métodos numéricos é frequentemente menos preciso, mesmo pelo MEC. Isto de certo modo ratifica o melhor desempenho do procedimento recursivo neste caso.

5.2 AÇÃO DE DOMÍNIO LINEAR

Neste exemplo buscou-se verificar o comportamento de uma ação de domínio variável. Ele difere do problema anterior apenas pela ação de domínio que desta vez é linear. A Figura 12 mostra esta situação.

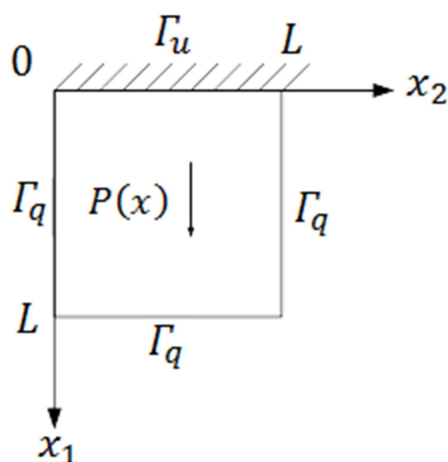


Figura 12: Ação de domínio linear.

O carregamento utilizado foi:

$$P(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (91)$$

O Apêndice B desenvolve as soluções exatas para o problema, apresentadas nas Eqs. (92) e (93).

$$u(x) = \frac{\rho_0 g}{E} \left(-\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2}\right) \quad (92)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho_0 g}{E} \left(-\frac{x^2}{2L} + x - \frac{L}{2}\right) \quad (93)$$

Considerando que a aresta do problema é unitária, também foram utilizados valores unitários para a razão $\rho_0 g/E$. Os valores calculados de erro são mostrados na Figura 13.

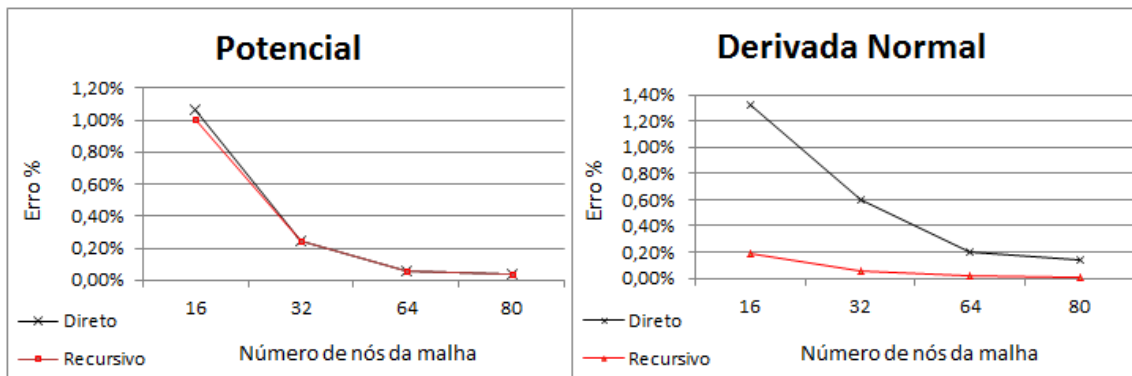


Figura 13: Caso 2: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal.

Os resultados para o cálculo do potencial dos procedimentos direto e recursivo apresentaram o mesmo comportamento do problema anterior, com diferenças inexpressivas entre eles.

As diferenças entre as técnicas são bem acentuadas quando calculadas as derivadas do problema. Novamente o procedimento recursivo apresenta melhores resultados desde malhas pobres em nós até malhas mais refinadas. Por comparação, para obter a mesma precisão do procedimento recursivo com uma malha de 16 nós, o procedimento direto precisou de uma malha de 64 nós, quatro vezes mais nós, exigindo computacionalmente bem mais que o procedimento recursivo. Ainda, o procedimento recursivo nas duas malhas mais refinadas chegou a ter erro de $10^{-2}\%$, enquanto o procedimento direto conseguiu apenas $10^{-1}\%$.

5.3 MEMBRANA COM CARGA SENOIDAL

Neste exemplo desejou-se verificar como uma ação de domínio mais sinuosa poderia exigir das soluções e como os diferentes procedimentos iriam responder. O problema, mostrado na Figura 14, consiste de dois contornos opostos cuja condição essencial é nula, e os outros dois opostos nos quais a condição natural é nula. Isto é a mesma condição de uma membrana fixa em duas extremidades opostas.

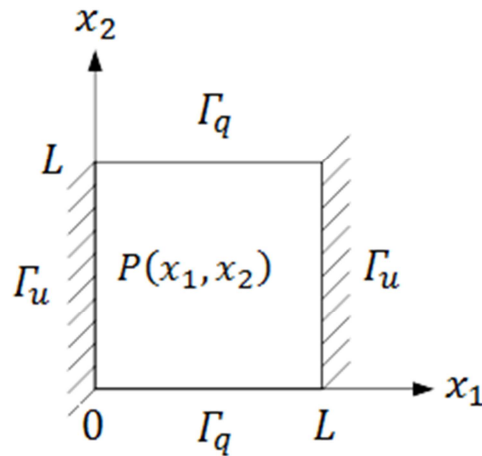


Figura 14: Membrana com carga senoidal.

A ação de domínio utilizada foi:

$$P(x_1, x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (94)$$

A solução exata é desenvolvida no Apêndice C, apresentada apenas a solução na Eq. (95).

$$u(x_1, x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \left[\frac{L}{2\pi} y \cosh\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) - \frac{L^2}{2\pi^2} \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) - \frac{L^2}{2\pi} \cosh\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right] \quad (95)$$

Só nos interessa a derivada normal sobre o contorno Γ_q , logo:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx_2}(x_1, x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) & \left[\frac{L}{2\pi} \cosh\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) + \frac{1}{2} y \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) - \frac{L}{2\pi} \cosh\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right. \\ & \left. - \frac{L}{2} \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \right] \quad (96) \end{aligned}$$

Os erros calculados são apresentados na Figura 15:

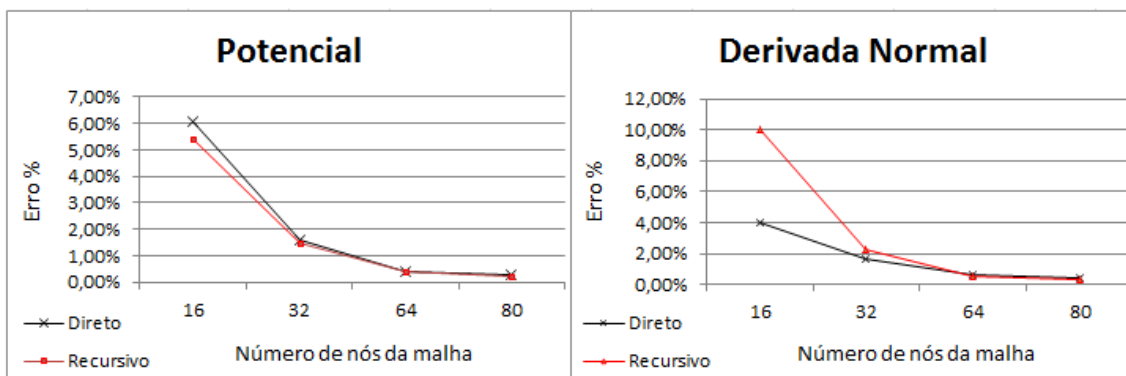


Figura 15: Caso 3: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal.

O cálculo do potencial apresentou erro menor no procedimento recursivo em malhas pobres, embora os dois procedimentos tiveram erro acima de 5%, um tanto quanto elevado. Com o refinamento da malha as diferenças não foram tão significativas, e ambos tiveram precisão muito semelhantes.

O cálculo da derivada surpreendeu desta vez. O procedimento direto foi muito mais preciso que o recursivo na malha mais pobre, embora o erro tenha ficado em torno de 4%. Quando as malhas foram refinadas ambos os procedimentos tiveram resultados semelhantes, de diferença indistinguível nos gráficos. Esta diferença apareceu num problema em que a carga é bidimensional, diferente das outras. Na conclusão este resultado é comentado com maiores detalhes.

5.4 MEMBRANA COM CARGA CONSTANTE

Este problema carrega semelhanças com o anterior, mas difere pela ação de domínio, agora constante e unitária, e nas condições de contorno, agora apresentando potencial nulo em todo o contorno. Pode ser visto como uma membrana completamente fixa em todo o seu contorno, como mostra a Figura 16:

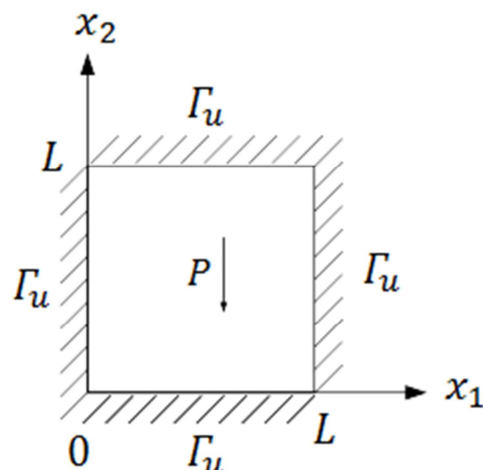


Figura 16: Membrana sob carga constante.

Neste problema interessa apenas calcular o erro devido à derivada visto as condições de contorno essenciais serem prescritas em todo o contorno. Dado a simetria do problema, espera-se que as soluções das derivadas nos contornos congruentes sejam análogas. De qualquer forma, elas foram desenvolvidas no Apêndice D e são:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{m\pi^3(n^2 + m^2)} \cos(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (97)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{n\pi^3(n^2 + m^2)} \text{sen}(\alpha_n x_1) \cos(\beta_m x_2) \quad (98)$$

Os erros calculados estão apresentados na Figura 17:

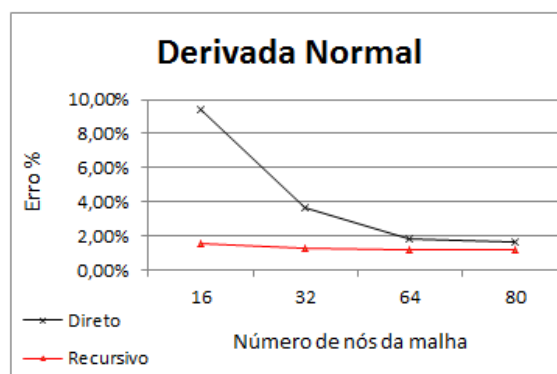


Figura 17: Caso 4: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal.

Aqui o procedimento recursivo se demonstrou muito poderoso em relação ao procedimento direto. Nas malhas mais refinadas os dois ficaram próximos, porém nas malhas menos refinadas o procedimento recursivo apresentou erro 5 vezes menor. Interessante notar que o erro do procedimento recursivo se manteve

praticamente estável desde as malhas mais pobres, melhorando muito pouco. Ainda, a malha com 80 nós no procedimento direto obteve resultado semelhante à malha de 16 nós do procedimento recursivo, porém a um custo computacional maior.

5.5 MEMBRANA COM CARGA POLINOMIAL

Neste último exemplo buscou-se verificar se um carregamento mais variável poderia afetar os resultados. A geometria do problema é a mesma do anterior, alterando-se a ação de domínio, que agora é:

$$P(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad (99)$$

A solução foi desenvolvida no Apêndice E, e as derivadas valem:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n E_{nm} \cos(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (100)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \cos(\beta_m x_2) \quad (101)$$

Onde:

$$E_{nm} = \frac{4L}{\pi^3(n^2 + m^2)} \left\{ \frac{\cos(m\pi) - 1}{m} \left[2 \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 [\cos(n\pi) - 1] - \frac{L^3}{n\pi} \cos(n\pi) \right] - \frac{\cos(n\pi) - 1}{n} \left[2 \left(\frac{L}{m\pi} \right)^3 [\cos(m\pi) - 1] - \frac{L^3}{m\pi} \cos(m\pi) \right] \right\} \quad (102)$$

Os resultados são mostrados na Figura 18:

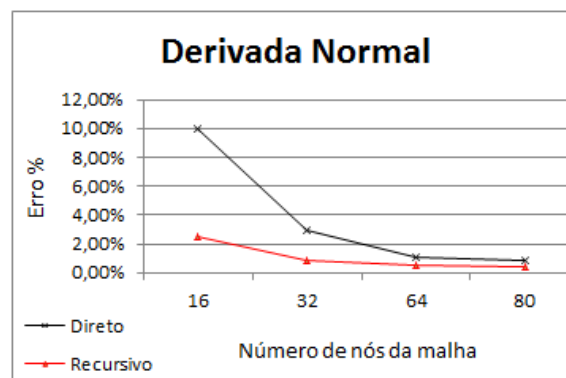


Figura 18: Caso 5: Erro relativo dos procedimentos direto e recursivo no potencial e na derivada normal.

O procedimento recursivo novamente apresenta erros menores que o cálculo direto, apresentando resultados muito mais precisos que o procedimento direto em malhas mais pobres. Com o refinamento da malha, os resultados se aproximam, mas o procedimento recursivo mantém resultados ligeiramente mais precisos.

6 CONCLUSÕES

Um dos propósitos do presente trabalho foi estender o leque de aplicações às quais poderia se avaliar o efeito do reuso das equações integrais na melhora dos resultados do MEC, ou seja, do procedimento denominado recursivo.

Embora importantes resultados já tenham sido apresentados para os problemas governados pela Equação de Laplace, a extensão das técnicas aos problemas governados pela Equação de Poisson garantiu um número bem maior de exemplos que poderiam ser avaliados.

Um problema imediato se apresenta quando problemas governados pela Equação de Poisson são resolvidos pelo MEC: a resolução das integrais de domínio referentes ao termos fonte. Estudos anteriores mostraram que a solução destes problemas usando aproximações para os termos fonte com a técnica da Dupla Reciprocidade introduziam imprecisões e efeitos espúrios, que poderiam ser, em princípio, creditadas aos efeitos de interpolação das funções radiais nas sentenças de ponderação ou minimização de resíduos.

Para evitar estes problemas, foram abordados problemas que poderiam ser resolvidos pela técnica do Tensor de Galerkin, que não introduziam nenhuma imprecisão referente à transformação das integrais de domínio em integrais de contorno. Por outro lado, a programação computacional se tornou mais complexa do que nos casos governados pela Equação de Laplace.

Os resultados apresentados nas seções 5.1, 5.2 e 5.4 e 5.5 demonstraram que o procedimento recursivo aplicado em problemas de Poisson torna-se muito interessante para calcular resultados mais precisos das derivadas do potencial de um campo escalar. É possível utilizar malhas bem pobres, gerando um sistema matricial reduzido, e aplicar o procedimento recursivo, de menor custo computacional, para refinar os resultados.

Porém, os resultados do valor da variável básica do campo não apresentam melhoras significativas, e a aplicação do procedimento recursivo não é tão vantajosa para melhorar os resultados quanto no caso das derivadas, a menos que as malhas sejam pouco refinadas. Em casos simples, o refinamento da malha torna-se uma

alternativa mais funcional para melhorar a precisão do que o procedimento recursivo, apesar do aumento do custo computacional.

Considerando os resultados obtidos neste trabalho, o procedimento recursivo se mostra promissor para o cálculo de derivadas de problemas governados pela equação de Poisson, embora a confirmação plena destes resultados mereça estudos ainda mais profundos, particularmente análises matemáticas em tópicos relacionados à teoria das integrais nas formulações hipersingulares.

REFERÊNCIAS

- AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 2003. Disponível em <<http://www.fe.up.pt/~alvaro>>.
- BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**. Londres, Pentech Press, 1978.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An Introductory Course**. 2. ed. Boston: Witpress, 1992.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. Newnes-Butterworths, Londres, 1980.
- FIGUEIREDO, Luiz Gustavo de. **O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas**. Dissertação – Programa de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, Campinas, 2008.
- GUIMARÃES, Solange. **Sobre o Método dos Elementos de Contorno aplicado à Mecânica da Fratura**. Tese – Programa de Pós Graduação em engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1992.
- KIRKUP, Stéphen. **The Boundary Element Method in Acoustics**. Livro em formato digital, disponível em <<http://www.kirkup.info/papers/>>. 2007.
- LOEFFLER, C. F. **A recursive application of the integral equation in the boundary element method**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 35-1. 2011. pp. 77-84.
- LOEFFLER, C. F.; FREITAS, A. B. **Performance Evaluation of the Boundary Element Recursive Procedure in Elastic Problems**. Journal of Engineering Mathematics, Julho de 2015.
- LOEFFLER, C. F.; MATOS, M. V. **Aplicação do Procedimento Recursivo do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Poisson**. Trabalho aceito e apresentado no CNMAC, Lindóia, 2012.

LOEFFLER, C. F.; FREITAS, A. B; VALOTO, L. **Desempenho do Esquema Recursivo em Problemas de Elasticidade Modelados pelo Método dos Elementos de Contorno**. Trabalho aceito, publicado e apresentado no SIMMEC, Juiz de Fora, 2014. Trabalho 62 – 14 p.

LOEFFLER, C. F.; FREITAS, A. B; VALOTO, L. **Performance of the Recursive Procedure in Elastic Problems Modeled by the Boundary Element Method**. Aprovado e apresentado no BETECH 2013 International Conference on Boundary Element and Meshless Techniques, Paris, 2013a.

LOEFFLER, C. F.; FREITAS, A. B; VALOTO, L. **Esquema Recursivo do Método dos Elementos de Contorno em Problemas Elásticos**. Aprovado e apresentado no CMAC SUDESTE, Bauru, 2013b.

MANSUR, W. J.; FLEURY, Jr. P.; AZEVEDO, J. P. S. **A vector approach to the hyper-singular BEM formulation for Laplace's equations in 2D**. International Journal of BEM Communications, vol. 8. 1997. pp. 239-250.

MENIN, Olavo Henrique. **Método dos Elementos de Contorno para Tomografia de Impedância Elétrica**. Dissertação – Programa de Pós Graduação em Física Aplicada à Medicina e biologia, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2009.

MOROVATI, V.; MALEK, A. **Solving inhomogeneous magnetohydrodynamic flow equations in an infinite region using boundary element method**. Engineering Analysis with Boundary Elements, 58. 2015. pp. 202-221.

OLIVEIRA, M. F. **O Método dos Elementos de Contorno para a análise de fluxo de calor unidimensional**. Dissertação – Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2011.

SILVA, Stéfano Charles Martins da. **Métodos numéricos para resolução de estruturas – estado da arte e aplicações**. Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2011.

TAGUTI, Yzumi. **Método dos Elementos de Contorno na resolução do problema de segunda ordem em placas delgadas finas**. Tese – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2010.

VALOTO, Leandro. **Aplicação do Esquema Recursivo do Método dos Elementos de Contorno em Problemas de Elasticidade**. Dissertação – Programa de Pós

Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2011.

ZHANG, A. M.; LIU, Y. L. **Improved three-dimensional bubble dynamics model based on boundary element method.** Journal of Computational Physics, 294. 2015. pp. 208-223.

APÊNDICE A

Este apêndice apresenta o desenvolvimento da solução analítica do problema da seção 5.1. O problema governado pela equação de Poisson a seguir:

$$\nabla^2 u(x, y) = P \quad (\text{A.1})$$

As condições de contorno são:

$$u(0, y) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$u(L, y) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{du}{dy}(x, 0) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{du}{dy}(x, L) = 0 \quad (\text{A.5})$$

A solução exata pode ser calculada facilmente. A simetria do problema e a carga unidirecional em x levam a uma solução unidimensional, nesta coordenada. Desta forma:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = P \quad (\text{A.6})$$

Integrando duas vezes em x :

$$\frac{du}{dx} = Px + C_1 \quad (\text{A.7})$$

$$u = \frac{Px^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (\text{A.8})$$

Combinando as Eqs. (A.2) e (A.8):

$$C_2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

Combinando as Eqs. (A.3), (A.8) e (A.9):

$$C_1 = -PL \quad (\text{A.10})$$

Então, a solução e sua derivada são:

$$u(x) = P \left[\frac{x^2}{2} - Lx \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{du}{dx} = P[x - L] \quad (\text{A.12})$$

APÊNDICE B

Este apêndice apresenta o desenvolvimento da solução analítica do problema da seção 5.2. O problema governado pela equação de Poisson a seguir:

$$\nabla^2 u(x, y) = P(x) \quad (\text{B.1})$$

Onde:

$$P(x) = \frac{\rho_0}{E} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (\text{B.2})$$

As condições de contorno são as mesmas do problema do apêndice A. Então:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{\rho_0}{E} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (\text{B.3})$$

Integrando duas vezes:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho_0}{E} \left(x - \frac{x^2}{2L} + C_1\right) \quad (\text{B.4})$$

$$u = \frac{\rho_0}{E} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6L} + C_1 x + C_2\right) \quad (\text{B.5})$$

Combinando as Eqs. (A.2) e (B.5):

$$C_2 = 0 \quad (\text{B.6})$$

Combinando as Eqs. (A.2), (B.5) e (B.6):

$$C_1 = -\frac{L}{2} \quad (\text{B.7})$$

E a solução do problema e sua derivada são:

$$u(x) = \frac{\rho_0}{E} \left(-\frac{x^3}{6L} + \frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2}\right) \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho_0}{E} \left(-\frac{x^2}{2L} + x - \frac{L}{2}\right) \quad (\text{B.9})$$

APÊNDICE C

Este apêndice apresenta o desenvolvimento da solução analítica do problema da seção 5.3. O problema governado pela equação de Poisson a seguir:

$$\nabla^2 u(x_1, x_2) = P(x_1, x_2) \quad (\text{C.1})$$

Onde:

$$P(x_1, x_2) = \text{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \cdot \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{C.2})$$

As condições de contorno são:

$$u(0, x_2) = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$u(L, x_2) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, L) = 0 \quad (\text{C.6})$$

Pelo método de separação de variáveis, vamos supor que a solução para este problema é do tipo

$$u(x_1, x_2) = X_{1n}(x_1) \cdot X_{2n}(x_2) \quad (\text{C.7})$$

Dada a carga de domínio em x_1 ser harmônica, esperamos que a solução nesta variável também o seja, portanto, suponhamos uma combinação de senos e cossenos:

$$u(x_1, x_2) = \left[A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) + B_n \text{cos}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \right] \cdot X_{2n}(x_2) \quad (\text{C.8})$$

Onde A_n e B_n são coeficientes a serem determinados. Aplicando a Eq. (C.3) na (C.8):

$$u(0, x_2) = [A_n \text{sen}(0) + B_n \text{cos}(0)] \cdot X_{2n}(x_2) = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$B_n = 0 \quad (\text{C.10})$$

Pela condição de contorno da Eq. (C.4):

$$u(L, x_2) = [A_n \text{sen}(n\pi)] \cdot X_{2n}(x_2) = 0 \quad (\text{C.11})$$

Esta equação se satisfaz para todo n inteiro. A solução, a este momento, tem a seguinte forma:

$$u(x_1, x_2) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \cdot X_{2n}(x_2) \quad (\text{C.12})$$

Aplicaremos esta solução na equação de governo. Para isto, precisamos das derivadas parciais:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) = -A_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \cdot X_{2n}(x_2) \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \cdot X_{2n}''(x_2) \quad (\text{C.14})$$

Substituindo as Eqs. (C.13) e (C.14) na Eq. (C.1):

$$A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \left[X_{2n}''(x_2) - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \cdot X_{2n}(x_2) \right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right) \cdot \operatorname{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{C.15})$$

Caso tenhamos $n \neq 1$ haverá dificuldades para representar a solução, visto haver apenas $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)$ no lado direito da equação. Então, para melhor coerência da parte harmônica da equação, utilizaremos $n = 1$ somente, e deixaremos de escrever a equação com índices n . Desta forma, os termos $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x_1}{L}\right)$ se anulam na Eq. (C.15), e temos:

$$A \left[X_2''(x_2) - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot X_2(x_2) \right] = \operatorname{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{C.16})$$

A solução para esta equação se compõem da soma de uma solução homogênea e uma solução particular.

$$X_2 = X_2^H + X_2^P \quad (\text{C.17})$$

Para a solução homogênea precisamos:

$$X_2^{H''} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot X_2^H = 0 \quad (\text{C.18})$$

Supondo uma solução exponencial:

$$X_2^H = C e^{\alpha x_2} + D e^{-\alpha x_2} \quad (\text{C.19})$$

$$X_2^{H''} = \alpha^2 [C e^{\alpha x_2} + D e^{-\alpha x_2}] \quad (\text{C.20})$$

Substituindo na Eq. (C.18):

$$\left[\alpha^2 - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \right] [C e^{\alpha x_2} + D e^{-\alpha x_2}] = 0 \quad (\text{C.21})$$

Isto implica em:

$$\alpha = \frac{\pi}{L} \quad (\text{C.22})$$

Para a solução particular, consideramos o método dos coeficientes a determinar e o método das famílias, de modo que:

$$X_2^P = Ex_2e^{\alpha x_2} + Fx_2e^{-\alpha x_2} \quad (\text{C.23})$$

$$X_2^{P''} = 2E\alpha e^{\alpha x_2} + E\alpha^2 x_2 e^{\alpha x_2} - 2F\alpha e^{-\alpha x_2} + F\alpha^2 x_2 e^{-\alpha x_2} \quad (\text{C.24})$$

Aplicando as soluções homogêneas e particular na Eq. (C.16):

$$A\{\alpha^2[Ce^{\alpha x_2} + De^{-\alpha x_2}] + 2E\alpha e^{\alpha x_2} + E\alpha^2 x_2 e^{\alpha x_2} - 2F\alpha e^{-\alpha x_2} + F\alpha^2 x_2 e^{-\alpha x_2} - \alpha^2[Ce^{\alpha x_2} + De^{-\alpha x_2} + Ex_2e^{\alpha x_2} + Fx_2e^{-\alpha x_2}]\} = \text{senh}\left(\frac{\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{C.25})$$

Considerando que o coeficiente A multiplica todos os demais coeficientes, ele será incorporado aos demais, de modo que ele pode ser omitido sem prejuízo à solução. Pelo método dos coeficientes a determinar:

$$\{2E\alpha e^{\alpha x_2} - 2F\alpha e^{-\alpha x_2}\} = \frac{e^{\alpha x_2} - e^{-\alpha x_2}}{2} \quad (\text{C.26})$$

De onde se obtém:

$$E = F = \frac{1}{4\alpha} \quad (\text{C.27})$$

Os coeficientes C e D são determinados utilizando-se as condições de contorno. Da Eq. (C.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \text{sen}(\alpha x_1) \cdot \{\alpha[Ce^0 - De^0] + E(e^0) + F(e^0)\} = 0 \quad (\text{C.28})$$

$$C = D - \frac{1}{2\alpha^2} \quad (\text{C.29})$$

Da Eq. (C.6):

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, L) = \text{sen}(\alpha x_1) \cdot \{\alpha[Ce^\pi - De^{-\pi}] + E(\pi e^\pi + e^\pi) + F(e^{-\pi} - \pi e^{-\pi})\} = 0 \quad (\text{C.30})$$

$$\alpha[Ce^\pi - De^{-\pi}] + \frac{1}{4\alpha} [(1 + \pi)e^\pi + (1 - \pi)e^{-\pi}] = 0 \quad (\text{C.31})$$

Substituindo o valor de C :

$$\left[\left(D - \frac{1}{2\alpha^2}\right)e^\pi - De^{-\pi}\right] = -\frac{1}{4\alpha^2} [(1 + \pi)e^\pi + (1 - \pi)e^{-\pi}] \quad (\text{C.32})$$

$$D = -\frac{(\pi - 1)}{4\alpha^2} \quad (\text{C.33})$$

Substituindo na Eq. (C.29):

$$C = -\frac{(\pi - 3)}{4\alpha^2} \quad (\text{C.34})$$

Então, a solução é:

$$u(x_1, x_2) = \text{sen}(\alpha x_1) \cdot [C e^{\alpha x_2} + D e^{-\alpha x_2} + E x_2 e^{\alpha x_2} + F x_2 e^{-\alpha x_2}] \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha \text{sen}(\alpha x_1) \cdot [(C\alpha + E) e^{\alpha x_2} + (F - D\alpha) e^{-\alpha x_2} + E\alpha x_2 e^{\alpha x_2} - F\alpha x_2 e^{-\alpha x_2}] \quad (\text{C.36})$$

APÊNDICE D

Este apêndice apresenta o desenvolvimento da solução analítica do problema da seção 5.4. O problema governado pela equação de Poisson a seguir:

$$\nabla^2 u(x_1, x_2) = P \quad (\text{D.1})$$

Onde P é uma constante. As condições de contorno são:

$$u(0, x_2) = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$u(L, x_2) = 0 \quad (\text{D.3})$$

$$u(x_1, 0) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$u(x_1, L) = 0 \quad (\text{D.5})$$

A técnica de separação de variáveis será novamente utilizada.

$$u(x_1, x_2) = X_{1n}(x_1) \cdot X_{2n}(x_2) \quad (\text{D.6})$$

De modo que podemos escrever:

$$\frac{d^2 u}{dx_1^2} = X_{1n}''(x_1) \cdot X_{2m}(x_2) \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d^2 u}{dx_2^2} = X_{1n}(x_1) \cdot X_{2m}''(x_2) \quad (\text{D.8})$$

Considerando o problema homogêneo correlato, substituímos as expressões acima na equação homogênea, e obtemos:

$$X_{1n}''(x_1) \cdot X_{2m}(x_2) + X_{1n}(x_1) \cdot X_{2m}''(x_2) = 0 \quad (\text{D.9})$$

$$\frac{X_{1n}''(x_1)}{X_{1n}(x_1)} + \frac{X_{2m}''(x_2)}{X_{2m}(x_2)} = 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{X_{1n}''(x_1)}{X_{1n}(x_1)} = -\frac{X_{2m}''(x_2)}{X_{2m}(x_2)} = K \quad (\text{D.11})$$

A Eq. (D.11) sugere que precisamos de uma solução harmônica em x_1 e uma exponencial em x_2 . Mas, as condições de contorno nulas em todo o contorno supõem soluções harmônicas nas duas direções. Então, vamos utilizar séries duplas de Fourier para escrever a solução. Então, vamos supor que:

$$u(x_1, x_2) = \left[A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) + B_n \operatorname{cos}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \right] \left[C_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) + D_m \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \right] \quad (\text{D.12})$$

Aplicamos na Eq. (D.12) as condições de contorno. Pela Eq. (D.2):

$$u(0, x_2) = [A_n \text{sen}(0) + B_n \text{cos}(0)] \left[C_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) + D_m \text{cos}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \right] = 0 \quad (\text{D.13})$$

$$B_n = 0 \quad (\text{D.14})$$

Pela Eq. (D.3):

$$u(L, x_2) = [A_n \text{sen}(n\pi)] \left[C_m \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) + D_m \text{cos}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \right] = 0 \quad (\text{D.15})$$

A solução existe para todo n inteiro e A_n real. Pela Eq. (D.4):

$$u(x_1, 0) = \left[A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \right] [C_m \text{sen}(0) + D_m \text{cos}(0)] = 0 \quad (\text{D.16})$$

$$D_m = 0 \quad (\text{D.17})$$

E da Eq. (D.5):

$$u(x_1, L) = \left[A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \right] [C_m \text{sen}(m\pi)] \quad (\text{D.18})$$

A solução existe para todo m inteiro e C_m real. Desta forma, a solução tem a seguinte forma:

$$u(x_1, x_2) = A_n C_m \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{D.19})$$

$$\frac{d^2 u}{dx_1^2}(x_1, x_2) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A_n C_m \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{D.20})$$

$$\frac{d^2 u}{dx_2^2}(x_1, x_2) = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 A_n C_m \text{sen}\left(\frac{n\pi x_1}{L}\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi x_2}{L}\right) \quad (\text{D.21})$$

Para reduzir a escrita, faremos:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} \quad (\text{D.22})$$

$$\beta_m = \frac{m\pi}{L} \quad (\text{D.23})$$

$$E_{nm} = A_n C_m \quad (\text{D.24})$$

Aplicando as Eqs (D.20) a (D.24) na Eq. (D.1):

$$-(\alpha_n^2 + \beta_m^2) E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) = P \quad (\text{D.25})$$

Pela série dupla de Fourier determinamos o coeficiente E_{nm} :

$$\begin{aligned}
& -(\alpha_n^2 + \beta_m^2)E_{nm} \int_0^L \text{sen}^2(\alpha_n x_1) dx_1 \int_0^L \text{sen}^2(\beta_m x_2) dx_2 \\
& = P \int_0^L \text{sen}(\alpha_n x_1) dx_1 \int_0^L \text{sen}(\beta_m x_2) dx_2
\end{aligned} \tag{D.26}$$

Interessante observar que:

$$\int_0^L \text{sen}(\alpha_n x_1) dx_1 = -\frac{1}{\alpha_n} (\cos(n\pi) - \cos(0)) \tag{D.27}$$

Quando n assume valores pares, o resultado da integral se anula. O mesmo se aplica para m par. Desta forma, apenas valores ímpares de n e m serão admitidos na série de Fourier. A Eq. (D.26) resulta em:

$$-(\alpha_n^2 + \beta_m^2)E_{nm} \left(\frac{L}{2}\right)^2 = P \frac{2L}{n\pi} \frac{2L}{m\pi} \tag{D.28}$$

$$E_{nm} = \frac{-16PL^2}{nm\pi^4(n^2 + m^2)} \tag{D.29}$$

E então, a solução para o problema, é:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL^2}{nm\pi^4(n^2 + m^2)} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \tag{D.30}$$

As derivadas valem:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{m\pi^3(n^2 + m^2)} \cos(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \tag{D.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-16PL}{n\pi^3(n^2 + m^2)} \text{sen}(\alpha_n x_1) \cos(\beta_m x_2) \tag{D.32}$$

Utilizando n e m ímpar nas Eqs. (D.30), (D.31) e (D.32).

APÊNDICE E

Este apêndice apresenta o desenvolvimento da solução analítica do problema da seção 5.5. O problema governado pela equação de Poisson a seguir:

$$\nabla^2 u(x_1, x_2) = x^2 - y^2 \quad (\text{E.1})$$

As condições de contorno são as mesmas do problema do Apêndice D. Também será usada a mesma estratégia de separação de variáveis, e considerando que as condições de contorno são as mesmas do problema anterior, o desenvolvimento levará ao mesmo resultado da Eq. (D.19). Desta forma, podemos escrever:

$$u(x_1, x_2) = E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{d^2 u}{dx_1^2}(x_1, x_2) = -\alpha_n^2 E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{d^2 u}{dx_2^2}(x_1, x_2) = -\beta_m^2 E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (\text{E.4})$$

O coeficiente E_{nm} é determinado pelo uso da série dupla de Fourier. Aplicando as Eqs (E.3) e (E.4) na Eq. (E.1):

$$-(\alpha_n^2 + \beta_m^2) E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) = x^2 - y^2 \quad (\text{E.5})$$

Integrando:

$$\begin{aligned} & -(\alpha_n^2 + \beta_m^2) E_{nm} \int_0^L \text{sen}^2(\alpha_n x_1) dx_1 \int_0^L \text{sen}^2(\beta_m x_2) dx_2 \\ & = \int_0^L \int_0^L (x^2 - y^2) \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned} & -(\alpha_n^2 + \beta_m^2) E_{nm} \frac{L^2}{4} \\ & = -\frac{L}{m\pi} [\cos(m\pi) - 1] \left\{ \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 [\cos(n\pi) - 1] - \frac{L^3}{n\pi} \cos(n\pi) \right\} \\ & \quad + \frac{L}{n\pi} [\cos(n\pi) - 1] \left\{ \left(\frac{L}{m\pi} \right)^3 [\cos(m\pi) - 1] - \frac{L^3}{m\pi} \cos(m\pi) \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

$$\begin{aligned} E_{nm} = & \frac{4L}{\pi^3(n^2 + m^2)} \left\{ \frac{\cos(m\pi) - 1}{m} \left[2 \left(\frac{L}{n\pi} \right)^3 [\cos(n\pi) - 1] - \frac{L^3}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \right. \\ & \left. - \frac{\cos(n\pi) - 1}{n} \left[2 \left(\frac{L}{m\pi} \right)^3 [\cos(m\pi) - 1] - \frac{L^3}{m\pi} \cos(m\pi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Então, a solução exata é:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (\text{E.9})$$

Cujo coeficiente pode ter sua expressão mais enxuta. Considerando que os valores de n e m sejam ímpares, o valor de E_{nm} é dado pela Eq. (E.8). Se n e m são pares, E_{nm} vale zero. Caso tenhamos n par e m ímpar:

$$E_{nm} = \frac{4L}{\pi^3(n^2 + m^2)} \left[\frac{1 - \cos(m\pi)}{m} \frac{L^3}{n\pi} \cos(n\pi) \right] \quad (\text{E.10})$$

E caso tenhamos n ímpar e m par:

$$E_{nm} = \frac{4L}{\pi^3(n^2 + m^2)} \left[\frac{\cos(n\pi) - 1}{n} \frac{L^3}{m\pi} \cos(m\pi) \right] \quad (\text{E.11})$$

E as derivadas valem:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_n E_{nm} \cos(\alpha_n x_1) \text{sen}(\beta_m x_2) \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m E_{nm} \text{sen}(\alpha_n x_1) \cos(\beta_m x_2) \quad (\text{E.13})$$