

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

Avaliação do desempenho do  
procedimento recursivo do método dos  
elementos de contorno aplicado em  
problemas da elasticidade

VITÓRIA

2015

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

Avaliação do desempenho do procedimento recursivo do  
método dos elementos de contorno aplicado em  
problemas da elasticidade

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da  
Universidade Federal do Espírito Santo co-  
mo requisito parcial necessário para a ob-  
tenção do grau de Mestre em Ciências em  
Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D. Sc. Carlos Friedrich  
Loeffler Neto

VITÓRIA

2015

ANDRÉ BARBOSA FREITAS

**Avaliação do desempenho do procedimento recursivo do método dos elementos de contorno aplicados em problemas da elasticidade.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial necessário para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Aprovado em \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2015.

COMISSÃO EXAMINADORA

---

Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientador

---

Prof. Luciano de Castro Lara , D.Sc.  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador

---

Prof. Webe João Mansur, D.Sc.  
Universidade Federal do Rio de Janeiro  
Examinador

Agradeço a minha família e amigos pelo apoio emocional. Essa contribuição fez grande diferença e me motivou a continuar a elaboração desse trabalho.

Também agradeço a Carlos Friedrich Loeffler Neto, Bruno Ramos Gonzaga e Victor Luiz Gripa por me auxiliarem em várias tomadas de decisão.

“Sem teoria não há conhecimento.”

William Edwards Deming

## RESUMO

Com o intuito de se obter resultados mais precisos com menor custo computacional, novos procedimentos e técnicas vem sendo avaliadas e testadas exaustivamente no contexto dos mais importantes métodos numéricos. O procedimento recursivo se insere como uma dessas iniciativas que têm sido estudado para melhorar o desempenho do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Basicamente, o processo consiste na introdução, a posteriori, de novos pontos fonte sobre o contorno, com localização distinta dos pontos nodais originais, para neles se calcular valores da variável básica como se faz para determinar valores em pontos internos.

O procedimento se baseia nos princípios do Método dos Resíduos Ponderados, de modo que a reaplicação da equação integral para pontos de contorno equivaleria a uma nova minimização de resíduos.

A técnica foi testada anteriormente com êxito em problemas de campo escalar, e no presente trabalho é implementada junto aos problemas elásticos governados pela Equação de Navier, destacando particularmente sua aplicação ao recálculo das forças de superfície, pois nesse caso uma análise da formulação hipersingular do MEC precisou ser realizada, observando suas peculiaridades e cuidados.

Vários problemas de elasticidade foram utilizados para que o procedimento pudesse ser comparado com o método direto e também com as soluções analíticas disponíveis, para assim melhor avaliar a precisão da técnica proposta e concluir que o procedimento é eficaz em certas situações.

## ABSTRACT

In order to obtain more accurate results with lower computational cost, various procedures and techniques have been evaluated and tested thoroughly. Among them, the recursive procedure is being studied for the boundary element method (BEM). The process consists of introducing a posteriori new source points on the contour, with distinct location of the original nodal points, in order to calculate values of the basic variable as is done to determine values at internal points.

The procedure is based on the principles of Weighted Residual Method, so that re-application of the integral equation in the contour points is equivalent to a new residual minimization.

The technique was previously tested successfully in scalar field problems, and in this work is implemented with the elastic problems governed by the Navier equation.

To use the recursive procedure, an analysis of the BEM hypersingular formulation was performed, noting their peculiarities and cautions. Several problems of elasticity were used so that the procedure could be compared with the direct method. We sought to evaluate the accuracy of the recursive procedure for the displacements and surface forces, showing that the procedure is effective in certain situations.

## Lista de figuras

Figura 1-1: Método dos Elementos Finitos versus o Método dos Elementos de Contorno.....	2
Figura 2-1: Paralelepípedo infinitesimal no plano x-y.....	9
Figura 2-2: Elemento diferencial submetido a deslocamentos de translação.....	11
Figura 2-3: Elemento de análise submetido a rotação sem mudança de área.....	13
Figura 2-4: Elemento submetido a tração horizontal.....	14
Figura 3-1: (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção $x_1$ ), (b) Componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção $x_2$ ) (VALOTO, 2011).....	27
Figura 3-2: Integração não singular: ponto fonte $\xi$ externo ao elemento integrado (VALOTO, 2011). .....	32
Figura 3-3: Sistema de coordenadas adimensional (VALOTO, 2011).....	33
Figura 3-4: Posicionamento do ponto fonte nos nós geométricos (VALOTO, 2011). .....	34
Figura 3-5: Função logaritmo natural de r. ....	34
Figura 3-6: Comportamento das Funções Interpolação (VALOTO, 2011). .....	35
Figura 3-7: Varredura da Integração (VALOTO, 2011). .....	37
Figura 3-8: Composição do vetor n. ....	39
Figura 3-9: Observação dos elementos adjacentes ao ponto fonte, para esquerda e para a direita. ....	40
Figura 3-10: Comportamento das funções de interpolação lineares .....	41
Figura 3-11: Geometria do Elemento (VALOTO, 2011). .....	42
Figura 3-12: Geometria retilínea - elemento diferencial .....	43
Figura 3-13: Ponto do contorno limitado por um semicírculo hipotético (VALOTO, 2011). .....	46
Figura 3-14: Contorno não suave (VALOTO, 2011). .....	47
Figura 4-1: Ponto fonte localizado no limite do contorno.....	50
Figura 5-1: Localização dos novos pontos fonte utilizados no procedimento recursivo (VALOTO, 2011). .....	55
Figura 5-2: Comportamento das funções de interpolação (VALOTO, 2011). .....	56
Figura 5-3: Composição da função $\phi_i$ (VALOTO, 2011). .....	58



Figura 5-4: Composição das funções singulares (VALOTO, 2011).....	60
Figura 5-5: Comportamento da função $P_{ij}^*$ combinado com $\phi_i$ . .....	65
Figura 5-6: Contorno dividido segundo singularidade. ....	65
Figura 6-1: Barra biapoiada com carregamento constante na face superior e cisalhantes nas laterais. ....	69
Figura 6-2: Malha aplicada ao problema. ....	71
Figura 6-3: Nós do esquema recursivo. ....	71
Figura 6-4: Barra biapoiada com carregamento senoidal na face superior e cisalhantes nas laterais. ....	80
Figura 6-5: Barra carregada com esforço compressivo de perfil triangular. ....	90
Figura 6-6: Sistema utilizado como referência na análise de precisão.....	91
Figura 6-7: Barra carregada com esforço concentrado de perfil triangular agudo.....	99
Figura 6-8: Sistema utilizado como referência na análise de precisão.....	100
Figura 6-9: Barra carregada com esforço compressivo de perfil triangular e fixação completa na extremidade inferior. ....	110

## Lista de gráficos

Gráfico 6-1: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.0. ....	71
Gráfico 6-2: : Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.3. ....	71
Gráfico 6-3: Erro relativo com Poisson=0.0, com os nós duplos. ....	72
Gráfico 6-4: Erro relativo com Poisson=0.0, sem os nós duplos. ....	72
Gráfico 6-5: Erro relativo com Poisson=0.3, com os nós duplos. ....	73
Gráfico 6-6: Erro relativo com Poisson=0.3, sem os nós duplos. ....	73
Gráfico 6-7: Erro relativo com Poisson=0.5, com os nós duplos. ....	73
Gráfico 6-8: Erro relativo com Poisson=0.5, sem os nós duplos. ....	73
Gráfico 6-9: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5. ....	75
Gráfico 6-10: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3. ....	75
Gráfico 6-11: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0. ....	75
Gráfico 6-12: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5. ....	76
Gráfico 6-13: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3. ....	76
Gráfico 6-14: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0. ....	76
Gráfico 6-15: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5. ....	77
Gráfico 6-16: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3. ....	77
Gráfico 6-17: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0. ....	77
Gráfico 6-18: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5. ....	78

Gráfico 6-19: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.....	78
Gráfico 6-20: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.....	78
Gráfico 6-21: Ajuste de uma função linear na distribuição de tensões obtidas. ....	79
Gráfico 6-22: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.0. ....	82
Gráfico 6-23: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.3. ....	82
Gráfico 6-24: Erro relativo com Poisson=0.0, com os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-25: Erro relativo com Poisson=0.0, sem os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-26: Erro relativo com Poisson=0.3, com os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-27: Erro relativo com Poisson=0.3, sem os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-28: Erro relativo com Poisson=0.5, com os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-29: Erro relativo com Poisson=0.5, sem os nós duplos. ....	83
Gráfico 6-30: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.....	85
Gráfico 6-31: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.....	85
Gráfico 6-32: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.....	86
Gráfico 6-33: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.....	86
Gráfico 6-34: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.....	86
Gráfico 6-35: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.....	87
Gráfico 6-36: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.....	87
Gráfico 6-37: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.....	87
Gráfico 6-38: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.....	88

Gráfico 6-39: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.....	88
Gráfico 6-40: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.....	88
Gráfico 6-41: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.....	89
Gráfico 6-42: Ajuste de uma função linear na distribuição de tensões obtidas. ....	89
Gráfico 6-43: Perfil de carregamento vertical na face inferior.....	92
Gráfico 6-44: Erro relativo com Poisson=0.0.....	92
Gráfico 6-45: Erro relativo com Poisson=0.3.....	93
Gráfico 6-46: Erro relativo com Poisson=0.5.....	93
Gráfico 6-47: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	94
Gráfico 6-48: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	94
Gráfico 6-49: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	95
Gráfico 6-50: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	95
Gráfico 6-51: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	95
Gráfico 6-52: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	96
Gráfico 6-53: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	96
Gráfico 6-54: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	96
Gráfico 6-55: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	97
Gráfico 6-56: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	97
Gráfico 6-57: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	97

Gráfico 6-58: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	98
Gráfico 6-59: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.0.....	101
Gráfico 6-60: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.3.....	101
Gráfico 6-61: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.5.....	102
Gráfico 6-62: Erro relativo com Poisson=0.0.....	103
Gráfico 6-63: Erro relativo com Poisson=0.3.....	103
Gráfico 6-64: Erro relativo com Poisson=0.5.....	104
Gráfico 6-65: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	105
Gráfico 6-66: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	105
Gráfico 6-67: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	105
Gráfico 6-68: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	106
Gráfico 6-69: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	106
Gráfico 6-70: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	106
Gráfico 6-71: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	107
Gráfico 6-72: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	107
Gráfico 6-73: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	107
Gráfico 6-74: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	108
Gráfico 6-75: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	108

Gráfico 6-76: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	108
Gráfico 6-77: Perfil de carregamento vertical na face inferior.....	111
Gráfico 6-78: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.0.....	112
Gráfico 6-79: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.3.....	112
Gráfico 6-80: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.5.....	113
Gráfico 6-81: Erro relativo com Poisson=0.0.....	113
Gráfico 6-82: Erro relativo com Poisson=0.3.....	114
Gráfico 6-83: Erro relativo com Poisson=0.5.....	114
Gráfico 6-84: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	115
Gráfico 6-85: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	115
Gráfico 6-86: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	116
Gráfico 6-87: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	116
Gráfico 6-88: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	116
Gráfico 6-89: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	117
Gráfico 6-90: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	117
Gráfico 6-91: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	117
Gráfico 6-92: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	118
Gráfico 6-93: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5. ....	118
Gráfico 6-94: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo	

da face inferior para Poisson igual a 0.3. ....	118
Gráfico 6-95: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0. ....	119

## Lista de tabelas

Tabela 6-1: Configuração das malhas utilizadas no programa.....	70
Tabela 6-2: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0.....	73
Tabela 6-3: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3.....	74
Tabela 6-4: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5.....	74
Tabela 6-5: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0.....	84
Tabela 6-6: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3.....	84
Tabela 6-7: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5.....	84
Tabela 6-8: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0.....	93
Tabela 6-9: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3.....	93
Tabela 6-10: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5.....	94
Tabela 6-11: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0.....	104
Tabela 6-12: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3.....	104
Tabela 6-13: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5.....	104
Tabela 6-14: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0.....	114
Tabela 6-15: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3.....	114
Tabela 6-16: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5.....	115



# SUMÁRIO

Capítulo 1- Introdução .....	1
1.1. O contexto de aplicação .....	1
1.2. Motivação geral da pesquisa na área dos métodos numéricos .....	3
1.3. Objetivo.....	4
1.4. Metodologia .....	5
1.5. Estado da arte do procedimento recursivo .....	5
1.6. Estrutura do trabalho .....	6
Capítulo 2- A Teoria da Elasticidade .....	8
2.1. Introdução.....	8
2.2. Equações diferenciais do equilíbrio .....	9
2.3. Equações diferenciais de compatibilidade geométrica .....	10
2.3.1. Deformações normais ou alongamentos.....	11
2.3.2. Deformações cisalhantes ou distorções.....	12
2.4. Equações constitutivas .....	13
2.4.1. Relação entre tensões e deformações normais.....	14
2.4.2. Relação entre tensões e deformações cisalhantes .....	15
2.5. A equação de compatibilidade.....	16
2.6. Equação de Navier-Cauchy.....	17
Capítulo 3- O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	19
3.1. Introdução.....	19
3.2. A formulação do MEC para elasticidade linear .....	20
3.3. A solução fundamental para o problema elástico .....	25
3.4. Procedimento de determinação das tensões para os pontos internos .....	27
3.5. Procedimento numérico geral.....	28
3.5.1. Aproximação do campo de variáveis.....	29
3.5.2. Integrações não singulares .....	32

3.5.3. Integrações singulares .....	33
3.5.4. Aproximação da geometria do elemento .....	42
3.5.5. Montagem do sistema matricial.....	44
3.5.6. Determinação do termo $C_{ij}(\zeta)$ .....	45
Capítulo 4- formulação hipersingular do mec para elastostática .....	49
4.1. Introdução.....	49
4.2. Regularização da hipersingularidade.....	50
Capítulo 5- PROCEDIMENTO RECURSIVO .....	54
5.1. Introdução.....	54
5.2. Aplicação do procedimento recursivo para obtenção dos valores de deslocamento .....	55
5.3. Aplicação do procedimento recursivo para obtenção dos valores de força de superfície. ....	61
Capítulo 6- Simulações Numéricas .....	68
6.1. Introdução.....	68
6.2. Viga biapoiada com carregamento uniforme .....	69
6.2.1. Apresentação do problema e solução analítica.....	69
6.2.2. Análise de deslocamentos .....	70
6.2.3. Avaliação das forças de superfície.....	72
6.3. Viga biapoiada com carregamento senoidal.....	79
6.3.1. Apresentação do problema e solução analítica.....	79
6.3.2. Análise dos deslocamentos.....	81
6.3.3. Avaliação das forças de superfície.....	82
6.4. Barra carregada com compressão de distribuição triangular isósceles .....	90
6.4.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado.....	90
6.4.2. Análise das forças de superfície .....	91
6.5. Barra carregada com força de superfície concentrada .....	99

6.5.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado.....	99
6.5.2. Análise das forças de superfície .....	102
6.6. Barra carregada com compressão linear e fixação rígida.....	109
6.6.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado.....	109
6.6.2. Análise das forças de superfície .....	110
Capítulo 7- Conclusão .....	120
Esborço Bibliográfico .....	122
Apêndice A Análise da translação de corpo rígido para a equação hipersingular	
124	

# **CAPÍTULO 1- INTRODUÇÃO**

## **1.1. O contexto de aplicação**

O entendimento dos fenômenos físicos mostra-se importante na busca do desenvolvimento tecnológico da indústria. Mais do que isso, ser capaz de estimar valores confiáveis que indiquem capacidade de aplicação, eficiência e eficácia de um certo elemento dentro de um sistema é um conhecimento fundamental para boas práticas na engenharia. No que tange esse conhecimento, encontra-se o uso de equações diferenciais parciais, que conseguem descrever de maneira consistente e universal o domínio físico e os fenômenos que lhe são inerentes, observadas uma série de hipóteses simplificadoras.

Normalmente, as soluções dessas equações são difíceis de serem obtidas analiticamente. Algumas das causas são: configurações geométricas complexas do meio, propriedades físicas não homogêneas, condições de contorno e condições iniciais dadas por funções não elementares. Somam-se a esses desafios as crescentes necessidades da sociedade moderna, que impõe condições de extremo arrojado, complexidade, versatilidade e multifuncionalidade em todos os segmentos da engenharia.

Frente a essa demanda, a aplicação dos métodos numéricos com o uso de computadores vem gerando a capacidade operacional necessária de atender com flexibilidade e versatilidade os diversos anseios gerados na sociedade. Esses métodos buscam a solução das equações diferenciais parciais sob diversas condições impostas através de técnicas de aproximação numérica, usualmente empregando a ideia de discretização. Entre os vários métodos utilizados, destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O Método das Diferenças Finitas é um método que parte de um conceito bem intuitivo na engenharia. A técnica aproxima os operadores diferenciais nas equações do problema, utilizando expansões locais para as variáveis, na maioria dos casos, as séries de Taylor truncadas. Uma série de melhorias tem sido empreendida na con-

cepção original visando atender situações específicas de maneira a gerar soluções rápidas com baixo custo computacional. Por exemplo, na área de Termofluidos, são muito aplicados atualmente uma classe de métodos conhecidos como Método dos Volumes Finitos (MVF). O êxito desta técnica tem feito que seu uso hoje se estenda a diversos problemas de engenharia, conforme observado em diversos segmentos da indústria (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico muito aplicado na engenharia de dimensionamento de elementos mecânicos. É uma técnica numérica baseada nos princípios variacionais, ou mais genericamente, em expressões de resíduos ponderados (REDDY, 2006). Consiste na divisão do volume ou domínio do sólido em um número finito de regiões chamadas elementos finitos, interconectados através de um número finito de pontos nodais chamados nós (Figura 1-1). Na maioria das vezes, o MEF é eficiente na análise de problemas com geometrias complexas e com diferentes características dos materiais, apesar das dificuldades na modelagem de problemas envolvendo domínios semi-infinitos ou infinitos.

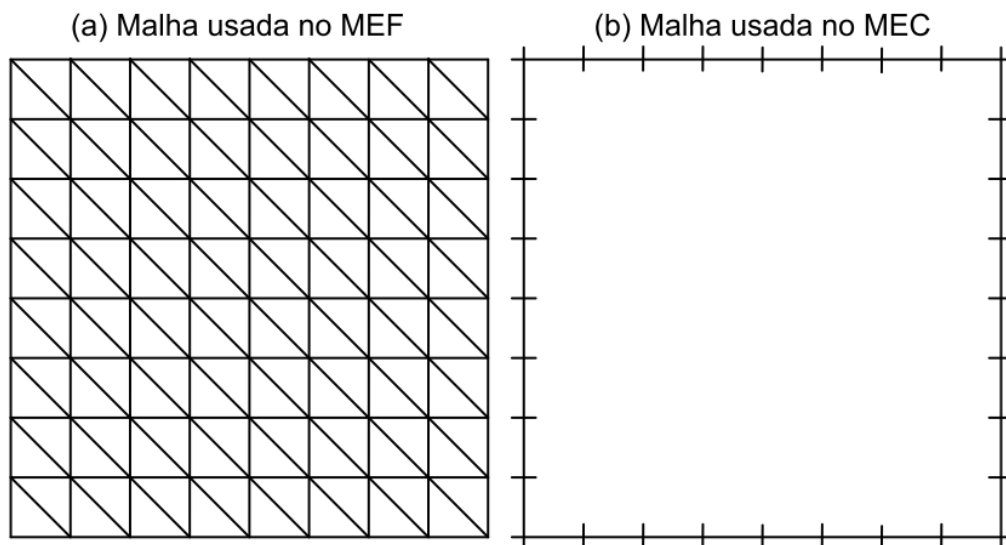


Figura 1-1: Método dos Elementos Finitos versus o Método dos Elementos de Contorno.

O Método dos Elementos de Contorno destaca-se dos demais métodos computacionais por ser uma técnica que discretiza basicamente o contorno e não o domínio como as demais. Essa técnica é possível, porque, na formulação do método, o modelo formulado por equações diferenciais parciais, que descrevem o problema físico num domínio espacial e temporal, é convertido em equações integrais envolvendo

somente valores de contorno ou condições iniciais (BREBBIA, 1984). Desta forma, para aplicação computacional em problemas composto por variáveis espaciais, a divisão do meio em elementos só se faz necessária no contorno. Essa característica peculiar do MEC é uma de suas grandes vantagens, devido ao fato de haver uma menor entrada de dados e com isso facilitar-se a operacionalização numérica, dependendo de algumas condições do problema analisado. Valores presentes no interior do meio são obtidos em operações de pós-processamento.

## **1.2. Motivação geral da pesquisa na área dos métodos numéricos**

A necessidade de respostas mais ágeis ou até mesmo em tempo real, de boa precisão numérica e alcançada com pouco esforço computacional bem como outras melhorias operacionais são observadas nos diversos segmentos tecnológicos inseridos dentro da indústria. Por causa dessa demanda, novos métodos e aprimoramentos dos já utilizados são objetos de pesquisa na atualidade.

Vários procedimentos são utilizados dentro do contexto dos métodos numéricos. O uso de iterações, por exemplo, é amplamente utilizado no Método dos Volumes Finitos para que se observe a minimização dos resíduos oriundos das soluções obtidas. Métodos como o de Newton–Raphson vem sendo aplicados na teoria da plasticidade de metais para o Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ, 2000).

No Método de Elementos de Contorno também vem sido alvo de diversas pesquisas e várias formulações alternativas têm sido propostas, no sentido de aprimorar a precisão, ampliar a versatilidade e torná-lo computacionalmente mais eficiente. Insere-se nesse contexto a o método rápido de multipolos aplicado ao MEC (LIU, 2009).

Nessa dissertação, o uso recursivo da equação integral no contorno é apresentado como um recurso auxiliar para melhorar o desempenho do MEC em aplicações de elasticidade linear. Não é uma técnica iterativa, mas um procedimento simples baseado em um esquema comum para calcular valores internos com o MEC, onde a equação integral de contorno é utilizada após a resolução do problema inicial. O motivo de seu uso está na minimização dos resíduos que esse procedimento demons-

trou-se capaz de realizar, como será descrito mais adiante.

A razão para esse comportamento é explicada pela equivalência entre o procedimento recursivo e a aplicação de uma nova sentença do método dos resíduos ponderados, minimizando os erros cometidos anteriormente. Isto porque o que se faz matematicamente com o MEC no cálculo de valores em pontos internos é reutilizar a equação integral, ou seja, aplicar novamente uma sentença de resíduos ponderados em que os valores nodais estão disponíveis e os valores dos pontos fonte são minimizados.

### **1.3. Objetivo**

O uso recursivo da sentença integral inversa do Método dos Elementos de Contorno consiste em aplicar o mesmo procedimento usado para determinação de valores em pontos no interior do domínio para recalcular novos valores no contorno, considerando que o uso reiterado desta equação equivale a uma nova minimização dos resíduos numéricos do método.

Assim, o procedimento recursivo consiste num processo de pós-processamento. São encontrados os valores nodais das incógnitas, através da tática tradicional de solução do Método dos Elementos de Contorno (MEC), e então esses valores são reintroduzidos na equação integral original, considerando novos pontos fonte localizados novamente no contorno, em posições distintas das posições originais dos pontos nodais.

A eficiência desse procedimento já foi testada em problemas de potencial escalar (CORRÊA, 2009) e em elasticidade linear para valores de deslocamentos (VALOTO, 2011; FREITAS; LOEFFLER; VALOTO, 2013), mostrando bons resultados.

Dando continuidade aos trabalhos citados, esta dissertação busca como objetivo avaliar principalmente a precisão do procedimento recursivo para problemas da elasticidade linear recalculando os valores das forças de superfície, que ainda não haviam sido estudados. Aproveita-se também para resolver um maior número de pro-

blemas elásticos, nos quais se pode disponibilizar uma solução de referência.

#### **1.4. Metodologia**

Nesta dissertação os resultados numéricos são obtidos por simulações computacionais do Método dos Elementos de Contorno, abordando problemas lineares da mecânica dos sólidos, dos quais se dispõem de soluções analíticas ou se adotam valores de referência para poder se avaliar o desempenho do procedimento recursivo.

É comparada a qualidade dos resultados gerados diretamente – a solução clássica usual - com o uso recursivo da formulação integral do MEC para deslocamentos e hipersingular para forças de superfície.

Foram usados elementos lineares no processo de discretização. Para se efetuar as integrações regulares em todos os elementos usa-se a quadratura de Gauss. Os novos pontos fonte no contorno, considerando que os pontos nodais originais se situam nas extremidades, foram posicionados exatamente no meio de cada elemento.

#### **1.5. Estado da arte do procedimento recursivo**

O procedimento recursivo é original. Foi inicialmente proposto por Loeffler & Wrobel (2008), onde a técnica foi aplicada em problemas governados pela Equação de Laplace. Inicialmente o procedimento abordou apenas a formulação singular. Nestas análises, o método foi bem sucedido no aumento da precisão de valores de potencial.

Corrêa (2009) avalia novamente o desempenho do procedimento para problemas regidos pela equação de Laplace, fazendo uma análise detalhada para os valores de potencial e os de fluxo. Nesse cenário, utilizou-se da formulação singular e hipersingular, esta última sendo empregada para cálculo do fluxo recursivo em problemas de potencial. Os seus resultados demonstraram que o procedimento é mais preciso que os valores obtidos da maneira convencional ou direta, tanto para os fluxos quanto



para os potenciais.

Em 2008 foram sintetizadas as diversas experiências empreendidas em problemas de potencial num artigo (Loeffler, 2008) que comprovou a consistência do procedimento recursivo, embora destacando que a técnica é mais eficaz no recálculo do potencial particularmente quando o modelo original emprega malhas pouco refinadas. Com o refinamento da malha, o ganho de precisão com o esquema recursivo se reduz bastante. Entretanto, as mesmas conclusões não puderam ser observadas no recálculo dos fluxos, onde em certos casos o ganho de precisão do esquema recursivo foi muito destacado mesmo em malhas mais refinadas.

A eficiência do procedimento recursivo também foi aplicada para problemas de elasticidade linear, porém apenas foi avaliado seu desempenho nos valores de deslocamento (VALOTO, 2011). A técnica aplicada para deslocamentos foi reavaliada por Freitas et al. (2013) em novos problemas elásticos, obtendo-se igualmente êxito em comprovar o ganho de precisão para deslocamentos em outros problemas não analisados por Valoto.

Recentemente, os principais resultados abordados nesta dissertação foram publicados em periódico internacional (FREITAS; LOEFFLER, 2015), mostrando que o procedimento recursivo também é aplicável a problemas elásticos lineares.

## **1.6. Estrutura do trabalho**

Além do presente capítulo introdutório, a dissertação é composta de mais seis capítulos, totalizando, portanto, sete capítulos.

O Capítulo 2 apresenta as equações utilizadas na elasticidade linear, demonstrando sempre que possível suas deduções e contextos em que se aplicam. As equações são apresentadas, sempre que possível, em notação indicial.

O Capítulo 3 detalha sobre a fundamentação do MEC e sua formulação na elasticidade. São demonstradas, também, as equações para cálculo de deslocamentos e tensões para pontos no contorno e internos ao domínio de estudo. É discutido o mé-

todo e o procedimento de integração numérica e conclui-se o capítulo com a demonstração da determinação do coeficiente relacionado à posição do ponto fonte no contorno.

No Capítulo 4 é detalhada a formulação hipersingular utilizada nessa dissertação, mostrando a sua regularização para que a mesma possa ser aplicada no contorno sem implicar em erros numéricos.

No Capítulo 5 é apresentado o esquema recursivo. Inicialmente, ele é formulado para a equação tradicional do MEC no intuito de se obter os deslocamentos nos contornos. Posteriormente o procedimento recursivo é apresentado para as equações hipersingulares, em que é possível assim se obter as forças de superfície, objeto de análise dessa dissertação.

No Capítulo 6 mostram-se as simulações numéricas com cinco problemas da mecânica dos sólidos em que são avaliados os resultados obtidos. O primeiro problema é uma viga biapoiada com carregamento uniforme, o segundo problema é uma viga biapoiada com carregamento senoidal, o terceiro problema é uma barra carregada com compressão de distribuição triangular isósceles, o quarto problema é uma barra carregada com força de superfície concentrada e o quinto problema é um barra carregada com compressão linear e fixação rígida.

O Capítulo 7, por fim, apresenta uma análise final do trabalho, destacando as conclusões e propondo quaisquer outros trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO 2- A TEORIA DA ELASTICIDADE**

### **2.1. Introdução**

Segundo Timoshenko (1970) todo material sólido se deforma quando alguma solicitação lhe é exercida, mantendo-se o equilíbrio estático. Assim, considerando as pequenas partículas como moléculas, as forças moleculares resistem às mudanças de forma produzidas por esses esforços, de maneira que cada uma delas é deslocada até que se atinja o equilíbrio. Logo, observa-se um esforço interno em cada ligação que pode ser mensurado adequadamente.

No caso de materiais ditos elásticos, as deformações são reversíveis: tão logo o esforço é retirado, o corpo retornará ao seu comprimento inicial. Quando esta proporcionalidade se comporta numa relação linear, tem-se o que é chamado de Elasticidade Linear. Conhecer o comportamento do material é importante para definir seu correto uso e também para avaliar a interação com os outros componentes do conjunto.

Levando em consideração esse comportamento nos materiais, a Teoria da Elasticidade é a disciplina da Mecânica que se ocupa em formular expressões matemáticas rigorosas, que descrevem as relações entre tensões, deformações e deslocamentos, em corpos sólidos elásticos. Apesar dessas relações não serem rigorosamente verossímeis com a realidade, experiências mostram que a teoria matemática baseada nessas hipóteses fornece alta precisão quando o material estudado é o aço estrutural (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970, p. 1).

As expressões em que se é possível obter as equações de governo da teoria da elasticidade serão mostradas mais detalhadamente ao longo deste capítulo. As equações de governo para problemas de elasticidade receberão o tratamento matemático necessário para que o MEC possa ser utilizado, sendo este tratamento descrito em outro capítulo.

## 2.2. Equações diferenciais do equilíbrio

Que seja suposto o equilíbrio de um elemento infinitesimal que engloba um conjunto de moléculas. Admita também que o elemento está submetido ao campo gravitacional, no qual gera forças de corpo. A sua direção não é conhecida, mas sabe-se que esta pode ser traduzida em um ângulo qualquer em relação à horizontal, caso se supuser que está inserida num plano. Também se observa contato do elemento com os seus vizinhos. Para que cada face não se desloque para cima ou para baixo, nem para um lado, nem para o outro, tensões devem ser impostas. Tensões normais impedem que cada face se desloque na direção longitudinal, e tensões cisalhantes impedem que cada face se desloque na direção transversal. Com essas considerações, pode-se estabelecer um equacionamento visando o equilíbrio.

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), considera-se um pequeno elemento de estudo com dimensões  $h$  por  $k$ . Esse elemento está submetido a um carregamento conforme mostra a figura 2-1.

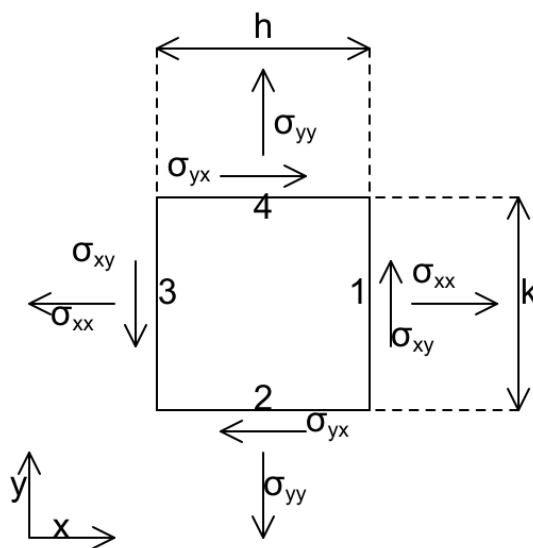


Figura 2-1: Paralelepípedo infinitesimal no plano x-y.

Admite-se que há forças de corpo de valores  $b_x$  (horizontal) e  $b_y$  (vertical). Considere a espessura como sendo uma dimensão comum e unitária. Para que haja equilíbrio na horizontal:

$$(\sigma_{xx})_1 k - (\sigma_{xx})_3 k + (\sigma_{xy})_2 h - (\sigma_{xy})_4 h + b_x h k = 0$$

$$\frac{(\sigma_{xx})_1 - (\sigma_{xx})_3}{h} + \frac{(\sigma_{xy})_2 - (\sigma_{xy})_4}{k} + b_x = 0$$

Fazendo o limite  $h \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow 0$  concluí-se:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + b_x = 0 \quad \text{Equação ( 2-1 )}$$

O equilíbrio na vertical é resolvido de maneira análoga a horizontal, chegando ao seguinte resultado:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + b_y = 0 \quad \text{Equação ( 2-2 )}$$

As equações 2-1 e 2-2 traduzem um equilíbrio infinitesimal. Caso o elemento apresente um acréscimo de tensões normais em x ao longo da direção x, as tensões cisalhantes que estão na direção x receberão um decréscimo ao longo da direção y para manter o equilíbrio, caso não haja forças de corpo  $b_x$  ou caso os seus valores possam ser desprezados. O mesmo também é válido se considerarmos o equilíbrio de forças na direção y.

As equações descritas acima podem ser representadas em notação indicial da seguinte forma (BORESI, 2000):

$$\sigma_{ij} + b_j = 0 \quad \text{Equação ( 2-3 )}$$

Onde  $\sigma_{ij}$  representa o tensor de tensões e  $b_j$  o vetor de forças de volume.

Na teoria da elasticidade também é estabelecido o equilíbrio no contorno, que não será demonstrado:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad \text{Equação ( 2-4 )}$$

Onde  $p_i$  representa as componentes do vetor de força de superfície e  $n_j$  são os cossenos diretores do vetor normal à superfície, apontando para fora do corpo.

### 2.3. Equações cinemáticas

No início dessa seção foi mencionado que as moléculas do material produzem deslocamentos que geram as forças internas necessárias para se preservar o equilíbrio.

Mas, devido aos diferentes esforços que cada conjunto contínuo de moléculas recebe, diferentes deslocamentos são observados. Assim, é preciso estabelecer um modelo matemático capaz de descrever adequadamente o movimento destas moléculas, assim como seus gradientes, de modo a poder associá-los adequadamente aos esforços que os produziram. Resulta daí os modelos cinemáticos ou medidas de deformação, que são arbitrários.

Supõe-se que cada face do elemento pode ser deslocada de uma maneira diferente, observando-se uma variação ao longo da direção escolhida. Também é feita a hipótese de que essas faces podem girar, respeitando a conexão existente em suas extremidades. É feita a análise das deformações sofridas pelo elemento, que serão divididas em normais (seção 2.3.1) e cisalhantes (seção 2.3.2).

### 2.3.1. Deformações normais ou alongamentos

Considera-se um elemento do sistema que recebe deslocamentos com ausência de rotação em suas faces. Esses deslocamentos não precisam ser necessariamente idênticos, sendo observada uma variação ao longo da direção perpendicular dos mesmos. A situação descrita está ilustrada na figura 2-2.

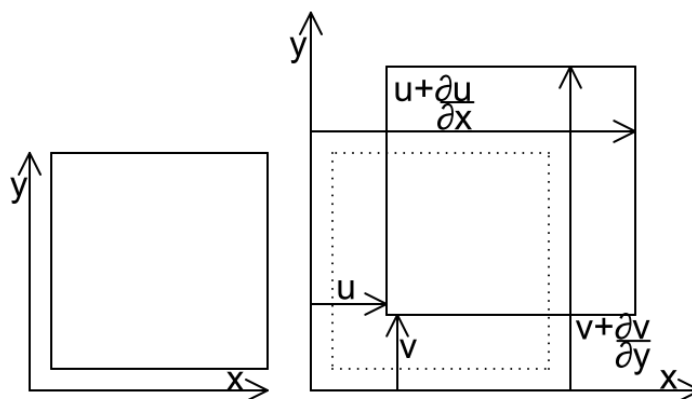


Figura 2-2: Elemento diferencial submetido a deslocamentos de translação

Admitindo-se pequenos deslocamentos, a deformação sofrida pelo elemento será satisfatoriamente expressa como a razão entre o novo valor de comprimento que o elemento possui e o antigo valor de comprimento que o elemento possuía. Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} \partial x - u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Equação ( 2-5 )}$$

O mesmo pode ser realizado na direção y:

$$\varepsilon_y = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial y} \partial y - v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{Equação ( 2-6 )}$$

Logo, para a deformação sofrida pela translação do elemento, basta determinar o quanto que o deslocamento sofrido entre as faces varia com aquela direção.

### 2.3.2. Deformações cisalhantes ou distorções

Além de admitir que as faces de um elemento podem transladar de maneiras distintas entre si, será suposto que essas mesmas faces poderão girar na direção perpendicular ao plano de referência. A descrição de como essas faces gira é feita de uma forma tal que não se considera contração ou expansão significativos da área do elemento de estudo. A essa afirmação adiciona-se a hipótese que as faces que antes estavam na mesma direção passam agora a girar simultaneamente um mesmo ângulo de rotação. Isso garante que nosso retângulo passará a ser um paralelepípedo com área igual ao valor inicial. Também será imposto que as faces paralelas permanecem paralelas após serem giradas. A situação apresentada nesse parágrafo está apresentado na figura 2-3.

Uma das consequências de se impor o elemento retilíneo é observada nas derivadas de ordem superior que poderiam estar presentes nos deslocamentos da faces, mas são desprezadas.

Define-se como deformação cisalhante ( $\gamma$ ) a mudança de ângulo ocorrida entre duas faces originalmente perpendiculares entre si. Para efetuar a análise, os ângulos são medidos no sentido horário e a partir da face que apresenta menor número ( $i < j$ ).

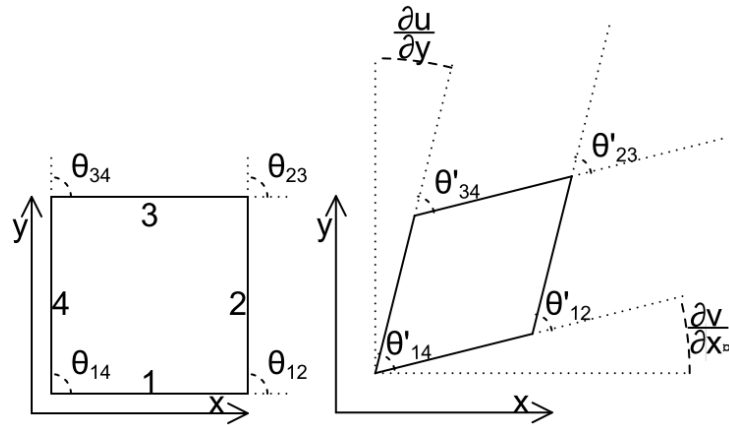


Figura 2-3: Elemento de análise submetido a rotação sem mudança de área.

Logo, para cada interseção de faces é observado:

$$\gamma_{ij} = \theta_{ij} - \theta'_{ij} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Onde i e j representam faces distintas. O que pode ser concluído com isso é que em todas as interseções entre faces observa-se a mesma deformação cisalhante. Logo:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{Equação ( 2-7 )}$$

Na elasticidade linear,  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de Green para pequenas deformações. As equações 2-5, 2-6 e 2-7 podem ser resumida na formulação indicial da seguinte maneira (BORESI, 2000):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{Equação ( 2-8 )}$$

Sendo  $u_i$  as componentes do vetor de deslocamento.

## 2.4. Equações constitutivas

As equações constitutivas são igualdades que relacionam o campo de tensões com o campo de deformações. Na teoria da elasticidade é considerado que o material é linear elástico. Para esse caso, as equações constitutivas se chamam equações de Lamé-Hooke ou mais simplesmente “Lei de Hooke”.

Nessa lei, as relações matemáticas entre tensões e deformações normais são distintas das que se encontram quando se descreve o comportamento observado no ele-



mento infinitesimal entre tensões cisalhantes e as distorções correspondentes. O caso de configuração de carregamento exclusivamente normal é apresentado na seção 2.4.1, enquanto o caso para o qual o elemento de material está submetido a cisalhamento puro será mostrado na seção 2.4.2.

### 2.4.1. Relação entre tensões e deformações normais

Na Lei de Hooke, considerando um material isotrópico, um elemento ao receber tração horizontal deforma-se nessa mesma direção segundo a expressão:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad \text{Equação ( 2-9 )}$$

Mas o mesmo elemento também receberá uma contração na direção perpendicular à tração segundo a fórmula:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad \text{Equação ( 2-10 )}$$

As constantes  $E$  e  $\nu$  representam o módulo de Young e o coeficiente de Poisson, respectivamente. O valor de  $E$  indica o nível de tensão que deve ser causada no elemento para este se deformar um determinado valor enquanto o valor de  $\nu$  determina o quanto de deformação será observada na direção perpendicular a tensão causada. A formulação apresentada nas equações 2-9 e 2-10 está baseada no esquema ilustrado na figura 2-4.

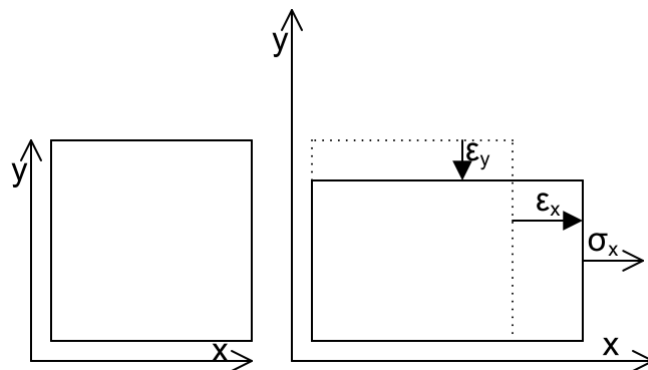


Figura 2-4: Elemento submetido a tração horizontal.

De uma maneira geral, quando o elemento estiver submetido a um carregamento

com apenas tensões normais, ele produzirá deformações segundo as seguintes equações:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) \quad \text{Equação ( 2-11 )}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad \text{Equação ( 2-12 )}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad \text{Equação ( 2-13 )}$$

Onde convencionou-se que os valores são positivos quando essas tensões  $\sigma_{ij}$  são de tração.

#### 2.4.2. Relação entre tensões e deformações cisalhantes

Um exemplo de cisalhamento puro é encontrado em corpos de prova com formato de tubos circulares finos, nos quais é imposta uma carga de torção (HIBBELER, 2003, p. 82). Através desses ensaios, considerando o material isotrópico, observa-se que a deformação cisalhante (definida na seção 2.3.2) e a tensão de cisalhamento (ilustrada na figura 2-1) podem ser relacionadas na Lei de Hooke através da seguinte formulação:

$$\sigma_{xy} = G\gamma_{yx} \quad \text{Equação ( 2-14 )}$$

Onde  $G$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. Percebe-se que, diferentemente da relação estabelecida para as tensões normais, as tensões cisalhantes atuantes nos três diferentes planos não interagem entre si. Note que a definição de  $G$  é feita para um meio contínuo, homogêneo, isotrópico e linearmente elástico.

Demonstra-se que a propriedade do material  $G$  está vinculada ao módulo de Young e ao coeficiente de Poisson através da seguinte formulação (HIBBELER, 2003, p. 403 a 406):

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{Equação ( 2-15 )}$$

As equações 2-11, 2-12, 2-13 e 2-14 podem ser todas representadas de uma maneira generalizada em notação indicial da seguinte forma (BORESI, 2000):

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{Equação ( 2-16 )}$$

Onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.

## 2.5. A equação de compatibilidade

Já foram definidas na seção 2.2 as equações do equilíbrio diferencial. Com apenas essas duas equações (equações 2-1 e 2-2) não é possível determinar as 3 tensões ( $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{xy}$ ) geradas num estado plano de tensão ou deformação.

Para se obter todas as tensões observadas em um elemento infinitesimal, é necessária, portanto, uma terceira equação chamada equação da compatibilidade.

Na seção 2.3, foram desenvolvidas as equações de deformações causadas em um elemento infinitesimal plano. Essas são aqui repetidas por conveniência:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Aplicando duas vezes a diferencial em relação a  $y$  em 2-5, duas vezes a diferencial em relação a  $x$  em 2-6 e uma vez a diferencial em relação a  $y$  e outra em relação a  $x$  em 2-7 se obtém:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \end{aligned}$$

Com base nisso conclui-se que:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{Equação (2-17)}$$

Pela Lei de Hooke (apresentada na seção 2.4.1) simplificada para sistemas bidimensionais, sabe-se que:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad \text{Equação (2-18)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}) \quad \text{Equação (2-19)}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \sigma_{xy} \quad \text{Equação (2-20)}$$

Substituindo as equações 2-18, 2-19 e 2-20 em 2-17 obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})}{\partial x^2} = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{Equação (2-21)}$$

Supõe-se que nas equações 2-1 e 2-2 existe como forças de corpo apenas a força peso. Diferenciando a equação 2-1 em relação a  $x$  e a 2-2 em relação a  $y$  e somando os resultados, encontra-se:

$$2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \quad \text{Equação (2-22)}$$

Substituindo agora a equação 2-22 na equação 2-21, encontra-se:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) * (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad \text{Equação (2-23)}$$

A equação 2-23 corresponde à equação de compatibilidade. Prova-se que esta equação é válida tanto para o estado plano de tensão quanto para o de deformação (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970, p. 25).

## 2.6. Equação de Navier-Cauchy

Substituindo a equação 2-8 na equação 2-16, as tensões são obtidas em função das derivadas de deslocamentos.

Esta equação pode, então, ser substituída em 2-3 e 2-4 para fornecer as Equações

de Equilíbrio de Navier-Cauchy:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} + b_j = 0 \quad , \text{ em } \Omega. \quad \text{Equação ( 2-24 )}$$

E a expressão do vetor tensão no contorno apresenta-se da seguinte forma:

$$\frac{2G\nu}{1-2\nu}u_{k,k}n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i})n_j = p_i \quad , \text{ em } \Gamma. \quad \text{Equação ( 2-25 )}$$

As equações diferenciais vetoriais 2-24 e 2-25 compõem a base para o desenvolvimento matemático do MEC, que se fundamenta na obtenção de equações integrais equivalentes a estas, expressas estritamente em termos de valores de contorno, conforme visto nos próximos capítulos.

## CAPÍTULO 3- O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

### 3.1. Introdução

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos do Método de Elementos de Contorno (MEC) com sua formulação clássica aplicada para a solução de problemas bidimensionais de elasticidade.

Segundo BREBBIA (1984), o Método dos Elementos de Contorno transforma um modelo matemático formulado por equações diferenciais parciais - que descrevem matematicamente o problema físico num domínio espacial e temporal - em equações integrais envolvendo somente valores de contorno ou condições iniciais.

No contexto da Teoria das Equações Integrais, pode-se realizar essa transformação através do emprego dos Teoremas de Divergência e apoio de funções de auxiliares denominadas soluções fundamentais, desde que as características dos operadores diferenciais viabilizem tais procedimentos. Mas também é possível realizar tal transformação através do estabelecimento de uma sentença consistente do Método dos Resíduos Ponderados (BREBBIA, 1984; REDDY, 2006), na qual as soluções fundamentais fazem o papel de funções de ponderação.

Qualquer que seja o caminho adotado, a aplicação bem sucedida do MEC promove a redução da dimensão do problema em uma unidade. Então, para o caso do domínio ser composto exclusivamente por variáveis espaciais nas três dimensões, somente a superfície de contorno desse domínio precisa ser discretizado.

Em termos das particularidades que normalmente compõem os principais métodos numéricos, a redução de complexidade dimensional é uma característica da qual resultam diversas vantagens operacionais significativas. A mais imediata delas é a simplicidade no manuseio dos dados de entrada, bem menos numerosos; e também pela quantidade de operações matemáticas que são requeridas para construir o modelo computacional, que são bem mais simples por conta da redução da dimensão do problema.

Outras vantagens do MEC que poderiam ser mencionadas são:

- A possibilidade de trabalhar com regiões infinitas devido à peculiaridades da solução fundamental;
- A simulação precisa do efeito da concentração de tensões, também devido ao caráter singular da solução fundamental;
- A operacionalização fácil dos casos de fronteira variável, pois a operação de reestruturação da malha é muito mais acessível;
- A elevada precisão obtida nos muitos problemas, particularmente aqueles em que a equação diferencial de governo é auto-adjunta, por conta também do fato da solução fundamental ser uma função assemelhada com o problema que se deseja resolver.

É claro que existem algumas desvantagens, como a complexidade apresentada pela solução fundamental em alguns casos, assim como a menor flexibilidade no trato de problemas de meios heterogêneos e inadequação na abordagem de problemas com domínios delgados. Também é uma desvantagem importante o fato de que as matrizes do MEC resultantes após a discretização do contorno não serem simétricas e bandeadas.

### **3.2. A formulação do MEC para elasticidade linear**

Os problemas pertinentes à Mecânica dos Sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção, sentido e ponto de referência, como no caso dos deslocamentos.

Estes problemas são estudados por teorias simplificadas nas quais são consideradas algumas idealizações. As hipóteses mais comumente empregadas consideram o meio contínuo, homogêneo, estático, o material é elástico linear, entre outras.

Inicia-se o estudo rerepresentando a Equação de Navier, vista em 2-24 e repetida aqui por conveniência:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)}u_{k,kj} + b_j = 0, \quad em \ \Omega$$

Existe outra forma de escrever esta equação, correspondendo àquela que utiliza as constantes de Lamé. Empregando tais constantes, a Equação de Navier é reescrita como:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu)u_{i,ij} + b_j = 0 \quad \text{Equação ( 3-1 )}$$

De acordo com Vera-Tudela (1999) a formulação tradicional do MEC, via teoria das Equações Integrais, consiste em ponderar a equação 3-1 por uma função vetorial  $u_j^*$ , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, mostrado a seguir, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

É interessante notar que a função  $u_j^*$ , chamada de solução fundamental, é a solução de um problema elástico correlato, cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\mu u_{j,ii}^* + (\lambda + \mu)u_{i,ij}^* + b_j^* = 0 \quad \text{Equação ( 3-2 )}$$

Na equação anterior têm-se as forças de campo no domínio  $b_j^*$  representadas por:

$$b_j^* = \Delta(\zeta, X)P_j, \quad P_j = 1 \quad \text{Equação ( 3-3 )}$$

Na equação 3-3  $\zeta$  representa o ponto fonte de aplicação da carga enquanto  $X$  representa o ponto campo.  $\Delta(\zeta, X)$  é a função Delta de Dirac, para a qual se tem as seguintes propriedades:

$$a) \ \Delta(\zeta, X) = 0, \text{ se } \zeta \neq X \quad \text{Equação ( 3-4 )}$$

$$b) \ \Delta(\zeta, X) = \infty, \text{ se } \zeta = X \quad \text{Equação ( 3-5 )}$$

$$c) \ \int_{\Omega} f(X)\Delta(\zeta, X)d\Omega = f(\zeta), \text{ se } \zeta \in \Omega \quad \text{Equação ( 3-6 )}$$



Então, tomando-se a equação 3-1, ponderando-a e integrando-a no domínio, tem-se a expressão seguinte:

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \quad \text{Equação ( 3-7 )}$$

O procedimento efetuado a seguir utiliza preferencialmente a propriedade da integração por partes, cuja estrutura consiste em:

$$\int u_{j,ii} v_{,j} d\Omega = \int (u_{j,i} v_{,j})_{,i} d\Omega - \int v_{,i} u_{j,i} d\Omega \quad \text{Equação ( 3-8 )}$$

Também faz uso do Teorema da Divergência, no qual:

$$\int_{\Omega} (u_j^* u_{j,i})_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u_j^* u_{j,i} n_i d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-9 )}$$

Desenvolvendo então a primeira parcela da equação 3-7:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_{j,i} u_{j,i}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_j u_{j,i}^*)_{,i} + (u_j u_{j,ii}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{j,i} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_j u_{j,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{j,ii}^*) d\Omega \end{aligned} \quad \text{Equação ( 3-10 )}$$

De modo análogo, desenvolve-se a segunda parcela da equação 3-7:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_{i,i} u_{j,j}^*)] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_i u_{j,j}^*)_{,i} + (u_i u_{j,ji}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_i u_{j,ji}^*) d\Omega \end{aligned} \quad \text{Equação ( 3-11 )}$$

Sabe-se que trocando os índices de apenas a última parcela da equação 3-11 não haverá mudanças no resultado final desta equação.

Logo, trocando os índices da última parcela da equação 3-11:

$$\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{i,ij}^*) d\Omega \quad \text{Equação ( 3-12 )}$$

Substituindo 3-10 e 3-12 em 3-7 e rearranjando:

$$\int_{\Omega} [\mu(u_{j,j}^*) + (\lambda + \mu)(u_{j,i}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_{j,i}^* n_i - u_{j,j}^* n_j)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i,i}^* n_j - u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma = 0 \quad \text{Equação ( 3-13 )}$$

A equação 3-2 apresenta  $u_j^*$  como solução fundamental, a qual deve obedecer à equação de Navier. Desta forma a primeira parcela da equação 3-13 fica:

$$\int_{\Omega} [\mu(u_{j,j}^*) + (\lambda + \mu)(u_{j,i}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\zeta; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\zeta; x) \quad \text{Equação ( 3-14 )}$$

Assim, substituindo 3-14 em 3-13 tem-se:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu(u_{j,i}^* n_i - u_{j,j}^* n_j)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i,i}^* n_j - u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-15 )}$$

Introduzindo na equação 3-15 uma expressão auxiliar da forma seguinte:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_{i,j}^* n_i - u_{j,j}^* n_i) d\Gamma = 0 \quad \text{Equação ( 3-16 )}$$

Procedendo-se ao reagrupamento de termos, obtém-se:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda(u_{i,i}) n_j] u_j^* d\Gamma + \int_{\Gamma} [\mu u_{j,j}^* n_i + \lambda u_{i,i}^* n_j - \mu u_{i,i}^* n_j + \mu u_{i,j}^* n_i + \mu u_{i,j}^* n_i] d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-17 )}$$

Neste ponto é interessante redefinir a Equação de Navier no contorno, equação 2-25, em termos das constantes de Lamé:

$$\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i = p_i \quad \text{Equação ( 3-18 )}$$

Observa-se que a equação 3-18 tem a mesma estrutura da primeira integral da equação 3-17, de tal forma que se pode substituir tal parcela pelo equivalente  $p_i$ . Assim, substituindo e reagrupando os termos chega-se a:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{j,i}^* n_i) + \lambda(u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma + \int_{\Gamma} \mu(u_{i,j}^* n_i - u_{i,i}^* n_j + u_{i,j}^* n_i) d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-19 )}$$

Trocando-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito e introduzindo-se uma nova identidade auxiliar, do mesmo tipo da equação

3-16, tem-se:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_{j,i}^* u_i - u_{j,i}^* u_i) n_j d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-20 )}$$

Reagrupando a expressão da mesma forma que na equação 3-17:

$$P_j u_j(\zeta) = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i - u_{j,i}^* u_i n_j) d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-21 )}$$

A segunda integral da equação 3-21 tem a mesma estrutura da equação 3-18, de tal forma que será substituída por  $p_i^*$ . Assim:

$$\int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-22 )}$$

Da equação 3-21, trabalha-se a última integral:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* + u_{i,j} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_{i,i} u_j^* + u_{j,i}^* u_i) n_j d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_j^*)_{,i} n_j d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \mu(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} d\Omega - \int_{\Omega} \mu(u_i u_j^*)_{,ij} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mu[(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} - (u_i u_j^*)_{,ij}] d\Omega = 0 \quad \text{Equação ( 3-23 )}$$

Finalmente, substituindo 3-23 e 3-22 em 3-21 tem-se, então, a expressão da Equação Integral de Contorno:

$$P_j u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-24 )}$$

De 3-3 sabe-se que o módulo de  $P_j$  é igual à unidade. No entanto, do modo como está escrita a equação 3-24, o somatório em  $j$  no primeiro termo do lado direito da citada equação impede que cada carga concentrada  $P_j$  atue independentemente uma da outra. É necessário, então, reestruturá-la. A maneira mais interessante de fazê-la consiste em adotar uma estrutura diádica para a solução fundamental e sua derivada normal. Desse modo, tais funções, que correspondem aos deslocamentos e forças de superfície fundamentais, ficam escritas na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\zeta; X) P_i = u_{1j}^* P_1 + u_{2j}^* P_2 \quad \text{Equação ( 3-25 )}$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\zeta; X) P_i = p_{1j}^* P_1 + p_{2j}^* P_2 \quad \text{Equação ( 3-26 )}$$

Por adequação às necessidades estritas do modelo bidimensional, os índices variaram apenas até dois. Para ajustar-se à nova ordem, requer-se também que cada componente de  $P_i$  seja considerado separadamente, ou seja:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\zeta; X) P_i, \text{ mas:}$$

$$\text{Se } \begin{cases} j = 1, P_2 = 0 \\ j = 2, P_1 = 0 \end{cases} \quad \text{Equação ( 3-27 )}$$

Sendo o mesmo válido para  $p_j^*$ . Dessa forma  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  no ponto  $X$ , resultado de uma carga unitária agindo na direção  $i$  e aplicada no ponto  $\zeta$ .

Pode-se demonstrar que a equação anterior é um caso particular de uma expressão geral, na qual um coeficiente diádico  $C_{ij}$  é introduzido em função do posicionamento do ponto fonte se situar dentro do domínio, fora dele ou exatamente sobre o contorno. Tal coeficiente também introduz a possibilidade de tratamento de contornos não suaves. O detalhamento matemático deste coeficiente é exposto mais adiante, em outra seção. Desse modo, a equação integral 3-24 transforma-se em:

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \quad \text{Equação ( 3-28 )}$$

### 3.3. A solução fundamental para o problema elástico

A equação 3-28 é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno correspondente à equação diferencial de Navier. Ressalta-se que até o momento não foi feita nenhuma aproximação, de modo que ambas são matematicamente equivalentes, sendo uma integral e outra diferencial. Existem outras formas integrais equivalentes: por exemplo, o Método dos Elementos Finitos usualmente emprega uma forma integral variacional, também denominada de forma integral fraca. O MEC emprega a forma mostrada em 3-28, normalmente chamada de forma integral inversa.

No que concerne às soluções fundamentais, vê-se que, em princípio, qualquer função auxiliar poderia ser empregada no contexto do equacionamento integral; mas as soluções ditas fundamentais são básicas ou, como o nome já diz, fundamentais para o alcance da formulação matemática do MEC, permitindo que a integral de domínio que ainda persistiria na forma inversa seja reduzida a uma função de ponto.

Portanto, pode ser dito que as soluções fundamentais geralmente representam a solução de um corpo infinito ou semi-infinito carregado com uma força concentrada unitária, que para este trabalho será a solução fundamental considerada. Por serem assemelhadas ao problema que se deseja resolver, garantem o bom desempenho numérico do método.

Tais soluções de forças de superfície e deslocamentos para problemas elásticos com as mesmas propriedades do material que o corpo em consideração no caso de domínio infinito são chamadas de Soluções Fundamentais de Kelvin. Aplicando uma carga unitária em um corpo infinito elástico e calculando os deslocamentos e forças de superfície resultantes desse carregamento, obtém-se estas soluções. As soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são apresentadas por BREBBIA, TELLES & WROBEL (1984) em 3-29 e 3-30:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad \text{Equação ( 3-29 )}$$

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,k} r_{,l} \right) - (1-2\nu) (r_{,l} n_k - r_{,k} n_l) \right] \quad \text{Equação ( 3-30 )}$$

Onde  $p_{ik}^*$  e  $u_{ik}^*$  representam as forças de superfície e deslocamentos na direção  $k$  devido a uma força unitária na direção  $l$ ;  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto calculado ( $X$ );  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é módulo de cisalhamento. A figura 3-1 ilustra o ponto de aplicação do carregamento (ponto fonte) e o ponto que se obtêm os resultados de força de superfície e deslocamento (ponto campo) e seus respectivos eixos.

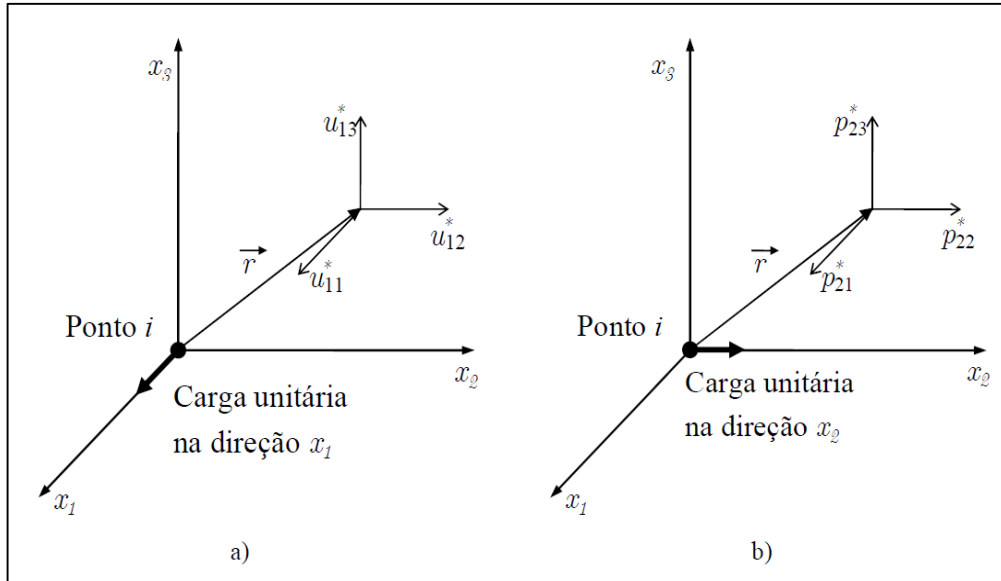


Figura 3-1: (a) Componentes de deslocamento da solução fundamental (carregamento unitário na direção  $x_1$ ), (b) Componentes de força de superfície da solução fundamental (carregamento unitário na direção  $x_2$ ) (VALOTO, 2011).

A variável  $r = r(\zeta; X)$  representa a distância entre o ponto fonte  $\zeta$ , de aplicação da carga e o campo  $X$ . As derivadas são tomadas com relação às coordenadas  $x_i$ .

Podemos definir os componentes das equações 3-29 e 3-30 da seguinte forma:

$$r(\zeta; X) = (r_i r_i)^{1/2} \quad \text{Equação ( 3-31 )}$$

$$r_i(\zeta, X) = x_i(x) - x_i(\zeta) \quad \text{Equação ( 3-32 )}$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r(\zeta, X)}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = -\frac{\partial r(\zeta, X)}{\partial x_i(\zeta)} \quad \text{Equação ( 3-33 )}$$

### 3.4. Procedimento de determinação das tensões para os pontos internos

Segundo Telles & Brebbia (1981), é usual em equações integrais de contorno, na elasticidade, começar assumindo a denominada Identidade de Somigliana, dada em 3-34, que nada mais é do que a equação 3-28 para pontos fonte situados no interior:

$$u_i(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(\zeta) p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-34 )}$$

Derivando a última expressão em relação às coordenadas do ponto  $\zeta$ :

$$\frac{du_i(\zeta)}{dx_k(\zeta)} = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_j(X) p_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 3-35 )}$$

A equação 3-35 fornece as deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Logo, substituindo a última expressão na Lei de Hooke, encontra-se:

$$\sigma_{ij}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_k(X) u_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_k(X) p_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 3-36 )}$$

Onde  $u_{ijk}^*$  e  $p_{ijk}^*$  podem ser definidos para duas dimensões como:

$$u_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad \text{Equação ( 3-37 )}$$

$$p_{ijk}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) + 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - \right. \\ \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad \text{Equação ( 3-38 )}$$

### 3.5. Procedimento numérico geral

A equação integral de contorno para a elasticidade mostrado em 3-28 é repetida aqui por conveniência:

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x)$$

Devido ao fato desta expressão ter um caráter vetorial, para um dado ponto  $\zeta$ , duas equações são geradas:

$$C_{11}(\zeta) u_1(\zeta) + C_{12}(\zeta) u_2(\zeta) + \int_{\Gamma} u_1(x) p_{11}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_2(x) p_{12}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) - \\ - \int_{\Gamma} p_1(x) u_{11}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_2(x) u_{12}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = 0 \quad \text{Equação ( 3-39 )}$$

$$C_{21}(\zeta)u_1(\zeta) + C_{22}(\zeta)u_2(\zeta) + \int_{\Gamma} u_1(x)p_{21}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} u_2(x)p_{22}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) - \\ - \int_{\Gamma} p_1(x)u_{21}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_2(x)u_{22}^*(\zeta;x)d\Gamma(x) = 0 \quad \text{Equação ( 3-40 )}$$

No MEC, depois de obtida a formulação integral, devem ser feitos os seguintes passos:

- Discretização do contorno, em que o mesmo é dividido em um número finito de elementos.
- Aplicar uma hipótese sobre a variação das grandezas do problema ao longo dos mesmos – no caso deslocamentos e forças de superfície.

Assim, somente após a discretização das equações integrais de contorno 3-39 e 3-40 será possível resolvê-las.

É diante da admissão de uma função para representar o comportamento de cada segmento de contorno e outras funções para representar a variação do campo de variáveis que se impõem um modelo aproximado de solução. Muitas vezes, como é o caso no presente trabalho, usam-se funções isoparamétricas, ou seja, as mesmas funções – de ordem linear – aproximam o contorno e o campo de variáveis.

É a discretização que transforma a equação integral em um sistema de equações algébricas, envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

A seguir se apresentam algumas definições importantes no desenvolvimento desta teoria, tanto para a definição da geometria do elemento, quanto para a interpolação do campo de variáveis.

### 3.5.1. Aproximação do campo de variáveis

Dividido o contorno numa série de elementos, é preciso aproximar as grandezas  $u_i$  e  $p_i$  ao longo do elemento, o que é feito, inicialmente, em termos de interpolação com base nos valores nodais:



$$\mathbf{u}_i = \mathbf{N}^e \mathbf{u}_i^e \quad \text{Equação ( 3-41 )}$$

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{N}^e \mathbf{p}_i^e \quad \text{Equação ( 3-42 )}$$

Nas expressões anteriores,  $\mathbf{N}^e$  é o vetor das funções de interpolação,  $\mathbf{u}_i^e$  e  $\mathbf{p}_i^e$  são os vetores deslocamento e força de superfície no ponto nodal X.

O comportamento das funções de forma  $\phi$ , expressas em termos de um sistema de coordenadas situado nas extremidades, nos nós geométricos é mostrado nas equações 3-43 e 3-44.

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{Le} \quad \text{Equação ( 3-43 )}$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{Le} \quad \text{Equação ( 3-44 )}$$

Onde  $Le$  é o comprimento do elemento.

Mais explicitamente, no caso de elementos lineares, para cada contorno o campo de deslocamentos e forças de superfície ficam:

$$u_1^e(x) = u_1^1 \phi_1(x) + u_1^2 \phi_2(x) \quad \text{Equação ( 3-45 )}$$

$$u_2^e(x) = u_2^1 \phi_1(x) + u_2^2 \phi_2(x) \quad \text{Equação ( 3-46 )}$$

$$p_1^e(x) = p_1^1 \phi_1(x) + p_1^2 \phi_2(x) \quad \text{Equação ( 3-47 )}$$

$$p_2^e(x) = p_2^1 \phi_1(x) + p_2^2 \phi_2(x) \quad \text{Equação ( 3-48 )}$$

A equação integral discretizada fica, então, na forma:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e u_1 \\ {}^e u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} p_{11}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & p_{12}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & p_{11}^*(\zeta; x_e) \phi_2 & p_{12}^*(\zeta; x_e) \phi_2 \\ p_{21}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & p_{22}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & p_{21}^*(\zeta; x_e) \phi_2 & p_{22}^*(\zeta; x_e) \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_e \begin{Bmatrix} {}^e u_1^1 \\ {}^e u_2^1 \\ {}^e u_1^2 \\ {}^e u_2^2 \end{Bmatrix} = \text{Equação ( 3-49 )}$$

$$= \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} \begin{bmatrix} u_{11}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & u_{12}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & u_{11}^*(\zeta; x_e) \phi_2 & u_{12}^*(\zeta; x_e) \phi_2 \\ u_{21}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & u_{22}^*(\zeta; x_e) \phi_1 & u_{21}^*(\zeta; x_e) \phi_2 & u_{22}^*(\zeta; x_e) \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma_e \begin{Bmatrix} {}^e p_1^1 \\ {}^e p_2^1 \\ {}^e p_1^2 \\ {}^e p_2^2 \end{Bmatrix}$$

A equação 3-49, também pode ser escrita da seguinte forma, considerando a integração da solução fundamental e de sua derivada:

$$\begin{bmatrix} c_{11}(\zeta) & c_{12}(\zeta) \\ c_{21}(\zeta) & c_{22}(\zeta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e u_1 \\ {}^e u_2 \end{Bmatrix} + \sum_{e=1}^N \begin{bmatrix} {}^e H_{11}^1 & {}^e H_{12}^1 & {}^e H_{11}^2 & {}^e H_{12}^2 \\ {}^e H_{21}^1 & {}^e H_{22}^1 & {}^e H_{21}^2 & {}^e H_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e u_1^1 \\ {}^e u_2^1 \\ {}^e u_1^2 \\ {}^e u_2^2 \end{Bmatrix} = \text{Equação ( 3-50 )}$$

$$= \sum_{e=1}^N \begin{bmatrix} {}^e G_{11}^1 & {}^e G_{12}^1 & {}^e G_{11}^2 & {}^e G_{12}^2 \\ {}^e G_{21}^1 & {}^e G_{22}^1 & {}^e G_{21}^2 & {}^e G_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^e p_1^1 \\ {}^e p_2^1 \\ {}^e p_1^2 \\ {}^e p_2^2 \end{Bmatrix}$$

Tomando como referência a matriz  $H_{ij}$ , obtida da integração de  $p_{ij}^*$  ao longo de um elemento de contorno, verifica-se que cada coeficiente apresenta uma relação com a direção coordenada, com a posição nodal e outras referências:

$${}^e H_{ij}^K$$

Onde  $e$  é o elemento integrado,  $K$  é o ponto nodal no elemento (inicial ou final),  $i$  e  $j$  são as direções do diádico e  $\zeta$  é o ponto fonte. O mesmo ocorre para a matriz  $G_{ij}$ .

### 3.5.2. Integrações não singulares

No MEC, para a obtenção de um sistema matricial resolvível é preciso gerar-se tantas equações quanto incógnitas. Isto é feito comumente pelo posicionamento sucessivo dos pontos fonte em coincidência com os pontos nodais de contorno ou pontos campo.

Em termos de integração, quando os pontos fonte pertencem ao elemento que se integra, as expressões da solução fundamental e do vetor tensão fundamental induzem singularidades, que são resolvidas analiticamente, como será mostrado.

Quando se integram elementos os quais não contem o ponto fonte, as integrais não são singulares e usualmente é feita a integração numérica das mesmas. A figura 3-2 ilustra essa situação.

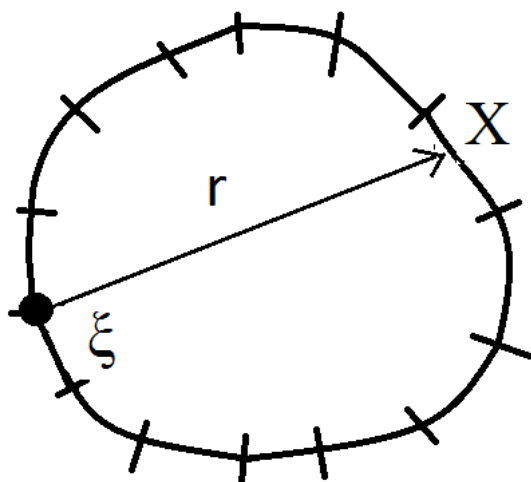


Figura 3-2: Integração não singular: ponto fonte  $\xi$  externo ao elemento integrado (VALOTO, 2011).

Para facilitar a operacionalização das integrais não singulares, procura-se escrever as funções de interpolação espacial ao longo do elemento de integração em termos de um sistema de coordenadas adimensional, conhecido também como sistema de coordenadas natural. Tal coordenada adimensional  $\eta$  tem a vantagem de se ajustar com mais facilidade aos esquemas de integração aproximados (Gauss, por exemplo), que conforme exposto, são empregados na realização das integrais em que o ponto fonte não pertence ao elemento de integração.

Na figura 3-3 mostra-se um elemento adimensional, para o qual é definida a nova

coordenada adimensional  $\eta$ , que é centralizada no elemento.

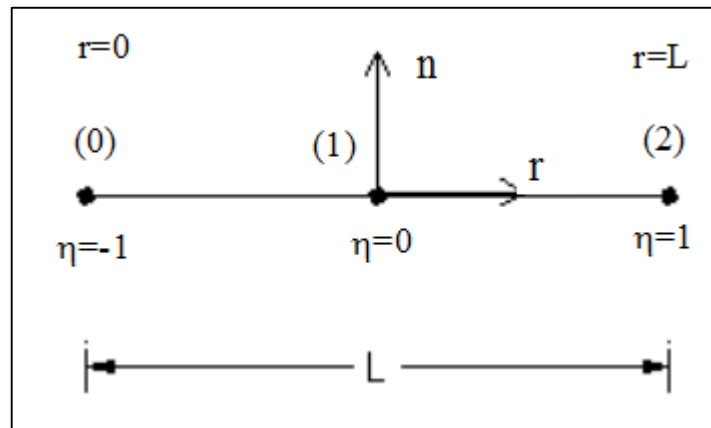


Figura 3-3: Sistema de coordenadas adimensional (VALOTO, 2011).

Da mesma forma, podem ser definidos os valores de  $u$  e  $p$  em qualquer ponto em termos do seu valor nodal e com as funções de interpolação  $\phi_k$  agora dadas em termos da coordenada adimensional. Naturalmente, em se tratando de uma simples mudança de coordenadas, tem-se:

$$u(\eta) = u_1 \phi_1(\eta) + u_2 \phi_2(\eta) = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{Equação ( 3-51 )}$$

$$p(\eta) = p_1 \phi_1(\eta) + p_2 \phi_2(\eta) = [\phi_1 \quad \phi_2] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad \text{Equação ( 3-52 )}$$

Também pela figura 3-3, observa-se que a coordenada adimensional  $\eta$  varia de -1 a +1 e as duas funções de interpolação expressam-se por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad \text{Equação ( 3-53 )}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad \text{Equação ( 3-54 )}$$

### 3.5.3. Integrações singulares

É preciso examinar o comportamento das integrais singulares. O ponto fonte  $\zeta$  é posicionado, em princípio, nos extremos dos elementos, em coincidência com os nós geométricos, conforme figura 3-4.

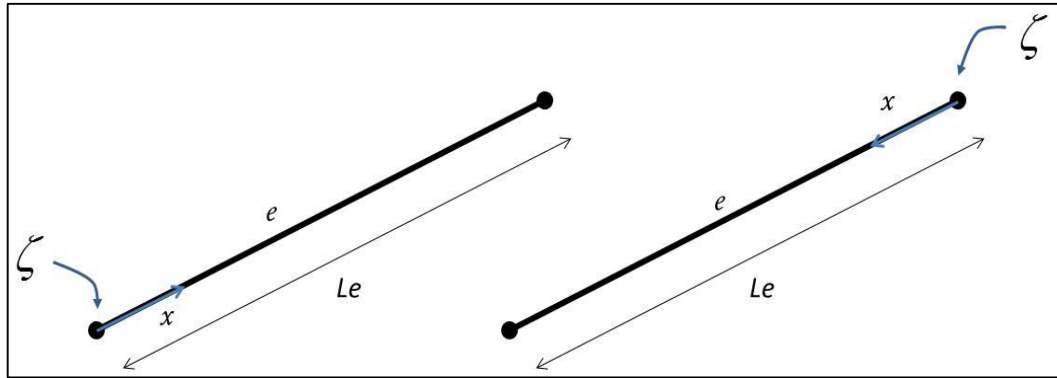


Figura 3-4: Posicionamento do ponto fonte nos nós geométricos (VALOTO, 2011).

O comportamento das funções de forma  $\phi$ , expressas em termos de um sistema de coordenadas situado também nas extremidades é mostrado nas equações 3-43 e 3-44, rerepresentadas a seguir por conveniência:

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{x}{Le}$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{Le}$$

Analisa-se inicialmente o comportamento da matriz  $G_{ij}$ . Vê-se que a solução fundamental  $u_{ij}^*$  é composta de duas partes (vide equação 3-29), uma consistindo de uma função logaritmo e outra que é constante igual aos cossenos do ângulo entre a direção do elemento e as direções coordenadas, no caso de elementos retilíneos.

O comportamento da função logaritmo é ilustrado a seguir na figura 3-5.

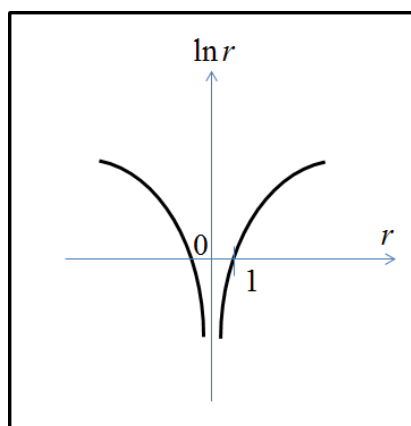


Figura 3-5: Função logaritmo natural de r.

Ressalta-se que  $r$  é um valor sempre positivo (vide equação 3-31). É possível examinar graficamente o comportamento do produto das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  versus  $\ln(r)$  destacando que nesse exame é preciso considerar o comportamento das funções

em sua interação com os elementos no entorno do ponto fonte.

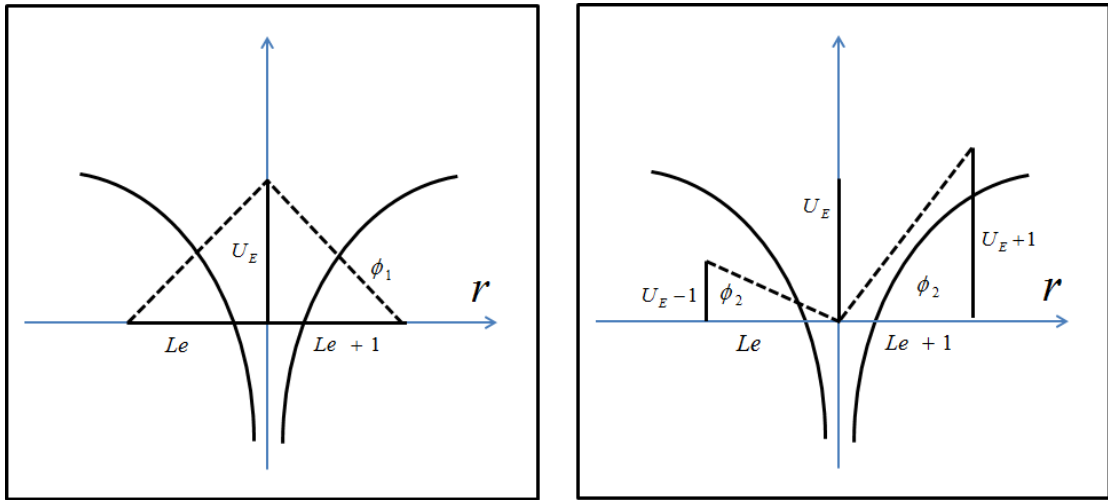


Figura 3-6: Comportamento das Funções Interpolação (VALOTO, 2011).

Sabe-se que a integral de  $\ln(r)$  é imprópria convergente, e desse modo as integrais de  $\phi_1 \ln(r)$  e  $\phi_2 \ln(r)$  não são singulares, mesmo contendo o ponto  $\zeta$ . Para  $\phi_1$  a singularidade é anulada porque a função logaritmo integrada não mais é singular. Para  $\phi_2$  a singularidade é anulada de qualquer modo porque no ponto  $\zeta$  a contribuição de  $\phi_2$  é nula e prepondera sobre a função  $\ln(r)$ , que tende ao infinito (segundo regra de Cauchy). Já o comportamento da outra integral que compõe a solução fundamental ( $\int_{r_i, r_j} dr$ ) é trivial, pois envolve apenas cossenos diretores.

Assim sendo, para cada coeficiente da matriz  $G_{ij}$  (associado a um elemento  $e$ ) a contribuição de outro elemento é calculada separadamente e somada no processo de compatibilidade entre os elementos. Então, a contribuição de  $\phi_1$  para  $i = j$  é dada por:

$$\int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \phi_1 \ln \frac{1}{r} dr = \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \left(1 - \frac{r}{Le}\right) \ln \frac{1}{r} dr = \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \ln \frac{1}{r} dr - \frac{1}{Le} \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} r \ln \frac{1}{r} dr$$

$$= \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \ln r dr + \frac{1}{Le} \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} r \ln r dr = - (r \ln r - r) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} + \frac{1}{Le} \left[ \left( \frac{r^2}{2} \ln r \right) \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} - \frac{r^2}{4} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= -(Le \ln Le - \varepsilon \ln \varepsilon - Le + \varepsilon) + \left( Le^2 \frac{\ln Le}{2} - \varepsilon^2 \ln \varepsilon - \frac{Le^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \frac{1}{Le} = \\
&= -Le \ln Le + Le + \frac{Le}{2} \ln Le - \frac{Le}{4} = -\frac{Le}{2} \ln Le + \frac{3Le}{4} = \\
&= \frac{Le}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln Le \right)
\end{aligned}$$

Equação ( 3-55 )

A outra integral, relacionada à  $\phi_2$ , é dada por:

$$\begin{aligned}
-\int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \frac{r}{Le} \ln r dr &= \frac{-1}{Le} \left( \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} r \ln r dr \right) = \frac{1}{Le} \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2} \ln r \right) \Bigg|_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} = \\
&= \frac{1}{Le} \left( \frac{Le^2}{4} - \frac{Le^2}{2} \ln Le \right) = \\
&= \frac{Le}{2} \left( \frac{1}{2} - \ln Le \right)
\end{aligned}$$

Equação ( 3-56 )

Ainda há outras duas integrais:

$$\begin{aligned}
\int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} [\phi_1^\zeta p_1^K + \phi_2^\zeta p_2^K] \cos \theta dr &= \cos \theta \left\{ \left[ \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \left( 1 - \frac{r}{Le} \right) dr \right]^\zeta p_1^K + \left[ \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \left( \frac{r}{Le} \right) dr \right]^\zeta p_2^K \right\} \\
&= \cos \theta \left\{ \left[ r - \frac{r^2}{2Le} \right]_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} p_1^K + \left[ \frac{r^2}{2Le} \right]_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} p_2^K \right\} = \\
&= \cos \theta \left\{ \left[ Le - \frac{Le}{2} \right]^\zeta p_1^K + \left[ \frac{Le}{2} \right]^\zeta p_2^K \right\} = \\
&= \cos \theta \left\{ \frac{Le}{2} p_1^K + \frac{Le}{2} p_2^K \right\}
\end{aligned}$$

Equação ( 3-57 )

Assim, para cada grau de liberdade de  $K$  e elemento  $\zeta = e$ :

$$\begin{aligned}
{}^D_{\zeta} G_{i1}^K p_1^K + {}^D_{\zeta} G_{i2}^K p_2^K &= \left[ \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} u_{i1}^* \phi_1 dr \right]^\zeta p_1^K + \left[ \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} u_{i2}^* \phi_2 dr \right]^\zeta p_2^K = \\
&= \left[ \frac{Le^D}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln Le^D \right) + K \cos \theta \frac{Le^D}{2} \right]^\zeta p_1^K + \left[ \frac{Le^D}{2} \left( \frac{1}{2} - \ln Le^D \right) + K \cos \theta \frac{Le^D}{2} \right]^\zeta p_2^K
\end{aligned}$$

Equação ( 3-58 )

Onde o sobrescrito  $D$  representa a integração pelo lado direito. Isto porque o mesmo ponto  $\zeta$  interage não apenas com o elemento da direita, conforme foi calculado, mas

também com o elemento da esquerda, conforme mostrado na figura 3-7.

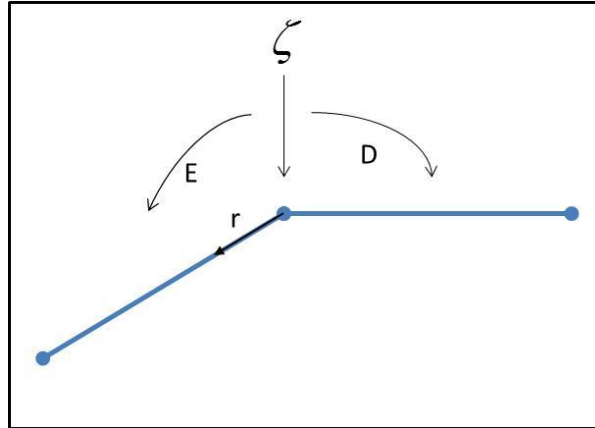


Figura 3-7: Varredura da Integração (VALOTO, 2011).

Na interação com o elemento da esquerda, têm-se:

$$\begin{aligned} {}^E_{\zeta} G_{i1}^K p_1^K + {}^E_{\zeta} G_{i2}^K p_2^K = & \left[ \frac{Le^E}{2} \left( \frac{1}{2} - \ln Le^E \right) + K \cos \theta \frac{Le^E}{2} \right] p_1^K + \\ & + \left[ \frac{Le^E}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln Le^E \right) + K \cos \theta \frac{Le^E}{2} \right] p_2^K \end{aligned} \quad \text{Equação ( 3-59 )}$$

Onde o sobrescrito  $E$  representa a integração pelo lado esquerdo. Observa-se que no caso de não haver nenhuma descontinuidade, o que é resolvido numericamente com o uso de nós duplos ou outros recursos (BREBBIA; TELLES; WROBEL, 1984), tem-se  ${}^E p_2^K = {}^D p_1^K$ . Assim, na condição de continuidade das forças de superfície a soma das duas contribuições dá um coeficiente  ${}^{E,D}_{\zeta} G_{i\zeta}$  para o valor da força de superfície no nó  $\zeta$ :

$${}^{E,D}_{\zeta} G_{i\zeta} = \frac{Le^E}{2} \left( \frac{1}{2} - \ln Le^E \right) + \frac{Le^D}{2} \left( \frac{3}{2} - \ln Le^D \right) + K \left[ \cos \theta \frac{Le^E}{2} + \cos \theta \frac{Le^D}{2} \right] \quad \text{Equação ( 3-60 )}$$

Se os elementos tem mesmo tamanho  $Le$ :

$${}^{E,D}_{\zeta} G_{i\zeta} = \frac{Le}{2} (2 - 2 \ln Le) + KLe \cos \theta = Le(1 - \ln Le) + KLe \cos \theta \quad \text{Equação ( 3-61 )}$$

Resta agora examinar o comportamento dos núcleos da matriz  $H_{ij}$  quando se integra sobre um elemento que contém o ponto fonte. Tradicionalmente, esses termos, que compõem submatrizes diagonais na matriz global, são calculados através da técnica de deslocamentos do corpo rígido. Tal procedimento é mostrado a seguir.



Os termos singulares compõem as submatrizes da diagonal  $H$ . A forma de cálculo através da imposição de translação de corpo rígido correspondente a se admitir um problema hipotético no qual as forças de superfície nulas e identificar a constituição dos termos das submatrizes diagonais através da solução esperada para o campo de deslocamentos, que deve ser totalmente nula (solução trivial).

Desta forma, adotando-se, para o caso bidimensional, duas translações independentes  $u_i = \delta_{i1}$  e  $u_i = \delta_{i2}$ , chega-se a:

$$\sum_{q=1}^t \mathbf{H}_{pq} \mathbf{u}_q = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, t) \quad \text{Equação ( 3-62 )}$$

Onde  $H_{pq}$  representa matrizes 2x2 de  $H_{ij}$  e:

$$\mathbf{u}_q = \mathbf{I} \quad \text{Equação ( 3-63 )}$$

Onde  $I$  é matriz identidade.

Deste modo, podem-se calcular indiretamente as submatrizes da diagonal de  $H$  na forma:

$$\mathbf{H}_{\alpha\alpha} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq \alpha}}^t \mathbf{H}_{\alpha q} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, t) \quad \text{Equação ( 3-64 )}$$

Pela comodidade que oferece, esse processo é geralmente usado. Entretanto, mais a frente, na apresentação do procedimento recursivo, é necessário obter diretamente esses termos o que vale examiná-los detalhadamente, conforme feito a seguir.

A expressão do núcleo das matrizes  $H_{ij}$  é dada pela força de superfície fundamental, mostrado na equação 3-30 e repetido aqui por conveniência.

$$P_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,k}r_{,i}) - (1-2\nu)(r_{,i}r_{,k} - r_{,k}r_{,i}) \right]$$

Onde:

$$r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k(\zeta)} \quad \text{Equação ( 3-65 )}$$

$$n_k = n_k(x) \quad \text{Equação ( 3-66 )}$$

Para elementos retilíneos  $\frac{\partial r}{\partial n}$  é zero, de modo que restam apenas os termos  $r_{,i}n_j - r_{,j}n_i$  para exame na integração.

Para  $i = j$  tem-se:

$$\frac{r_1}{r} n_1 - \frac{r_1}{r} n_1 = 0 = \frac{r_2}{r} n_2 - \frac{r_2}{r} n_2 \quad \text{Equação ( 3-67 )}$$

Quando  $i \neq j$  tem-se:

$$a_{12} = \frac{r_1(\zeta)}{r} n_2 - \frac{r_2(\zeta)}{r} n_1 \quad \text{Equação ( 3-68 )}$$

$$a_{21} = \frac{r_2(\zeta)}{r} n_1 - \frac{r_1(\zeta)}{r} n_2 \quad \text{Equação ( 3-69 )}$$

Naturalmente  $a_{12} = -a_{21}$ . É possível depreender o significado de  $r_{,1}$  e  $r_{,2}$  ao longo de um elemento retilíneo onde  $\zeta = x$  observando-se a figura 3-8:

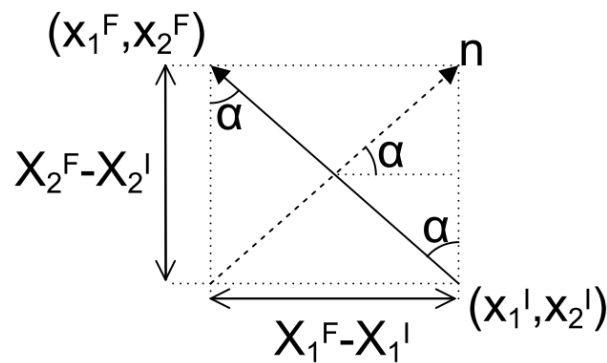


Figura 3-8: Composição do vetor  $n$ .

Desta figura verifica-se que:

$$n_1 = n_{x1} = \cos \alpha |n(x)| = \frac{x_2^F - x_2^I}{Le} \quad \text{Equação ( 3-70 )}$$

$$n_2 = n_{x2} = \sin \alpha |n(x)| = \frac{x_1^I - x_1^F}{Le} \quad \text{Equação ( 3-71 )}$$

Nota-se que nesta figura o vetor está como se o contorno estivesse no sentido anti-horário, que é o convencional. Caso estivesse com o vetor apontado para direita (observe figura 3-9), para que o sentido de  $n_i$  não se altere e assim continue a apontar para fora do contorno, deve-se definir da seguinte maneira:

$$n_1 = n_{x1} = \cos \alpha |n(x)| = \frac{x_2^I - x_2^F}{Le} \quad \text{Equação ( 3-72 )}$$

$$n_2 = n_{x2} = \sin \alpha |n(x)| = \frac{x_1^F - x_1^I}{Le} \quad \text{Equação ( 3-73 )}$$

Para as componentes  $r_1(x) = x_1^I - x_1^F$  e  $r_2(x) = x_2^I - x_2^F$  são tomadas com relação ao

eixo de referência. Nota-se que o argumento que denota a referência é importante, pois se as derivadas fossem tomadas com relação a  $\zeta$  ou a  $x$  haveria diferença, pois:

$$r_{,i}(x) = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{1}{2} \left\{ [x_i - x_i(\zeta)]^2 \right\}^{1/2} 2[x_i - x_i(\zeta)](1) = \frac{x_i - x_i(\zeta)}{r} \quad \text{Equação ( 3-74 )}$$

$$r_{,i}(\zeta) = \frac{\partial r}{\partial x_i(\zeta)} = \frac{1}{2} \left\{ [x_i - x_i(\zeta)]^2 \right\}^{1/2} 2[x_i - x_i(\zeta)](-1) = -\frac{x_i - x_i(\zeta)}{r} \quad \text{Equação ( 3-75 )}$$

Embora importante, essa relação não faz diferença no cálculo de  $a_{ij}$ . Para demonstrar isso observa-se a figura 3-9.

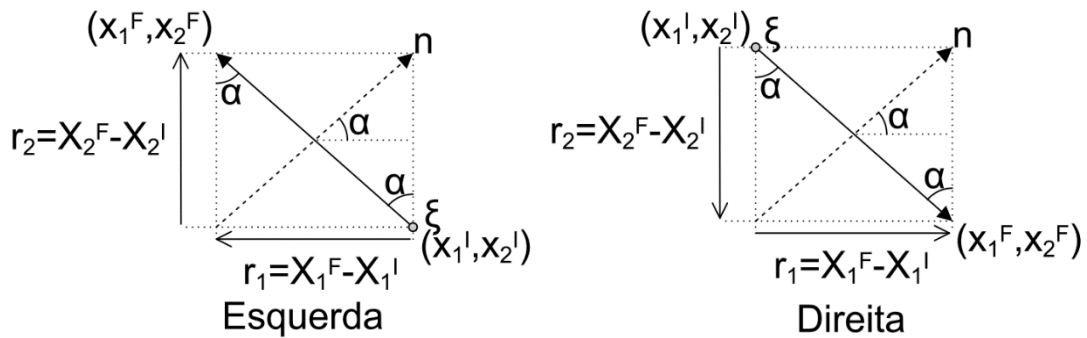


Figura 3-9: Observação dos elementos adjacentes ao ponto fonte, para esquerda e para a direita.

Observando o elemento do lado esquerdo ao ponto fonte, pode-se escrever:

$$a_{12} = (r_{,1})(n_2) - (r_{,2})(n_1) = \frac{(x_1^I - x_1^F)}{Le}(r_{,1}) - \frac{(x_2^F - x_2^I)}{Le}(r_{,2}) = \quad \text{Equação ( 3-76 )}$$

$$-\frac{(x_1^F - x_1^I)}{Le} \frac{(x_1^F - x_1^I)}{Le} - \frac{(x_2^F - x_2^I)}{Le} \frac{(x_2^F - x_2^I)}{Le} = -(r_{,1})^2 - (r_{,2})^2 \neq 0$$

Quando se observa o elemento do lado direito ao ponto fonte, escreve-se:

$$a_{12} = (r_{,1})(n_2) - (r_{,2})(n_1) = \frac{(x_1^F - x_1^I)}{Le}(r_{,1}) - \frac{(x_2^I - x_2^F)}{Le}(r_{,2}) = \quad \text{Equação ( 3-77 )}$$

$$\frac{(x_1^F - x_1^I)}{Le} \frac{(x_1^F - x_1^I)}{Le} + \frac{(x_2^F - x_2^I)}{Le} \frac{(x_2^F - x_2^I)}{Le} = (r_{,1})^2 + (r_{,2})^2 \neq 0$$

Nota-se graças as equações 3-76 e 3-77 que os sinais de  $a_{12}$  alternam de um lado

para o outro, sendo o mesmo valido para  $a_{21}$  (que pode ser demonstrado de maneira análoga). Também é possível concluir que as componentes da submatriz diagonal de  $H_{ij}$  geradas a partir da integração de  $p_{ij}^*$  não são todas nulas. E também os termos originados de  $c_{ij}^*$  não são, conforme será mostrado mais à diante.

Essas integrais impróprias geradas por  $a_{ij}$ ,  $i \neq j$  devem ser tomadas no sentido das “integrais por partes finitas”, considerando que:

- $a_{ij}$  à esquerda e à direita tem sinais diferentes;
- É preciso assim considerar o que ocorre nos elementos de contorno anterior e posterior ao ponto  $\zeta$ , conforme figura 3-9;
- Que o comportamento das funções de interpolação lineares são tais que  $\phi_1$  é unitário em  $\zeta$  e  $\phi_2$  é nula, conforme figura 3-10, onde, por simplicidade, foram tomados dois elementos de contorno alinhados.

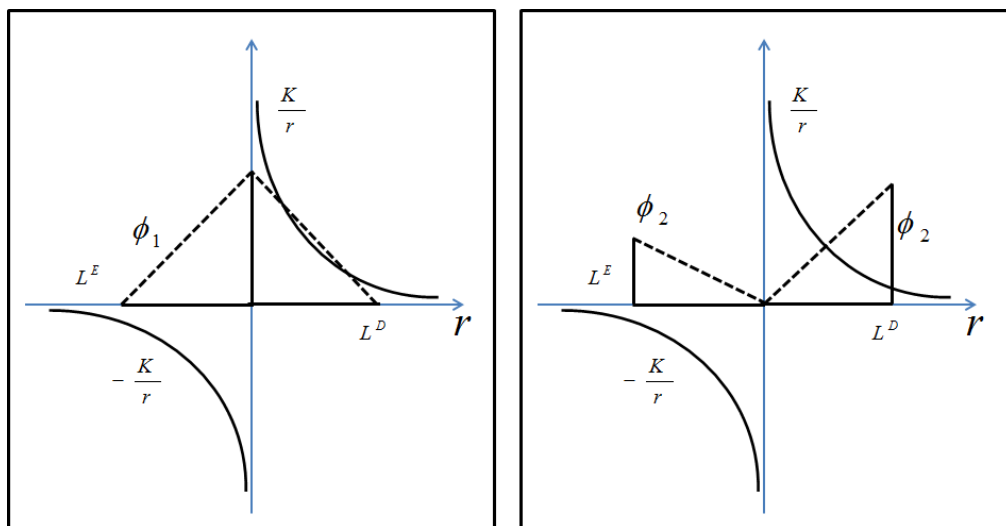


Figura 3-10: Comportamento das funções de interpolação lineares

Como o comportamento da função interpolada por  $\phi_1$  é simétrico e as funções hiperbólicas multiplicadas por  $K(r_i n_j - r_j n_i)$  tem sinais opostos à direita e à esquerda de  $\zeta$ , essa integral é completamente nula. Mas a integral relacionada a  $\phi_2$  é diferente, pois o produto antes e depois  $\zeta$  têm módulos distintos; entretanto, a singularidade presente na integral é cancelada porque em  $\zeta$  o valor de  $\phi_2$  é nulo. Logo, em  $i \neq j$ :

$$\int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} p_{ij}^* \left[ {}^\zeta U_1^K \phi_1 + {}^\zeta U_2^K \phi_2 \right] d\Gamma = - \frac{\nu(1-2\nu)^\zeta U_2^K}{4\pi(1-\nu)} (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \frac{\phi_2}{r} d\Gamma -$$

Equação ( 3-78 )

$$- K_3^\zeta U_2^K \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le} \frac{r}{Le} \frac{1}{r} d\Gamma = \frac{K_3^\zeta U_2^K}{Le} r = K_3^\zeta U_2^K$$

### 3.5.4. Aproximação da geometria do elemento

A geometria de cada elemento é definida em termos de uma função interpolante de forma, que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas (KATSIKADELIS, 2002). As coordenadas cartesianas  $x_i$  dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como mostrado a seguir:

$$x_i = \mathbf{M}^e \mathbf{x}_i^e \quad \text{Equação ( 3-79 )}$$

Onde  $M^e$  é a matriz contendo as funções de interpolação da geometria e  $x_i^e$  é o vetor de coordenadas nodais do elemento. Essas coordenadas de posição nodal também podem ser expressas em termos de coordenadas adimensionais, se necessário.

Na figura 3-11 observa-se o exemplo de um elemento de contorno com geometria retilínea. Nele observa-se a coordenada natural  $\Gamma(\eta)$ , que é definida como:

$$\Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 = x_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + x_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad \text{Equação ( 3-80 )}$$

$$\Gamma_y^e(\eta) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 = y_1^e \frac{1}{2}(1-\eta) + y_2^e \frac{1}{2}(1+\eta) \quad \text{Equação ( 3-81 )}$$

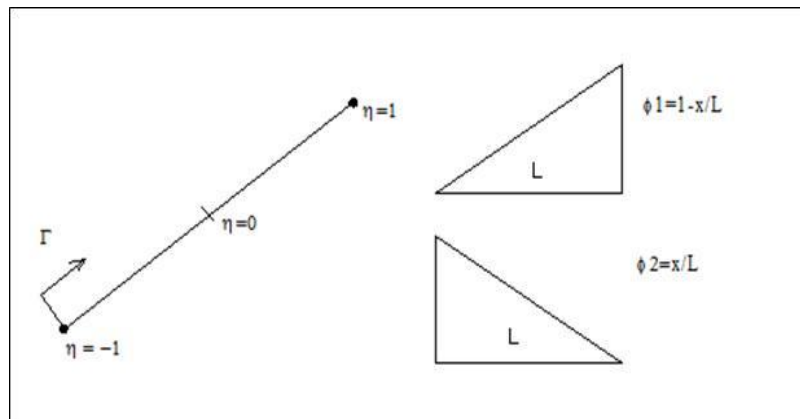


Figura 3-11: Geometria do Elemento (VALOTO, 2011).

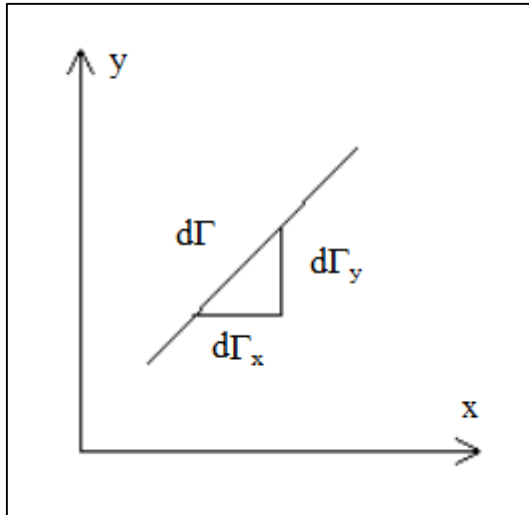


Figura 3-12: Geometria retilínea - elemento diferencial

Com base nos princípios da geometria diferencial e observando, a figura 3-12 pode-se escrever:

$$d\Gamma^2 = d\Gamma_x^2 + d\Gamma_y^2$$

$$\left(\frac{d\Gamma^e}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2$$

$$\frac{d\Gamma^e}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2} \quad \text{Equação ( 3-82 )}$$

Finalmente:

$$d\Gamma^e = |J^e| d\eta \quad \text{Equação ( 3-83 )}$$

Nesta última expressão,  $|J^e|$  é o jacobiano da transformação, que para a geometria linear e em 2D tem o valor constante em cada elemento de:

$$|J^e| = \frac{L_e}{2} \quad \text{Equação ( 3-84 )}$$

Percebe-se que uma vez que os elementos de contorno adotados são retilíneos, qualquer conformação geométrica curva é gerado com significativo erro, que deve ser reduzido através do refinamento da malha de elementos.

### 3.5.5. Montagem do sistema matricial

Substituindo 3-41 e 3-42 em 3-28 tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{C}(\zeta_i)\mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{u}^{(e)} = \sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma \right) \mathbf{p}^{(e)} \quad \text{Equação ( 3-85 )}$$

Onde  $Ne$  é o número de elementos da discretização.

Durante a montagem do sistema de equações indicado em 3-85, cada uma das integrais será calculada numericamente.

Este cálculo se dá através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^P f(\eta_i) w_i \quad \text{Equação ( 3-86 )}$$

Onde  $\eta_i$  é a coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração,  $w_i$  é o fator de peso associado ao ponto  $i$ , e  $P$  é o número total de pontos de integração utilizado.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da equação 3-85 como segue:

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k w_k \mathbf{N}_k \mathbf{p}_k^* \quad \text{Equação ( 3-87 )}$$

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma = \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |\mathbf{J}|_k w_k \mathbf{N}_k \mathbf{u}_k^* \quad \text{Equação ( 3-88 )}$$

Onde  $NPI$  são o número de pontos de integração de Gauss.

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente, considerando o ponto  $\zeta$  situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de equações algébricas é gerado e envolve os valores nodais de deslocamento e força de superfície.

Ainda é interessante levar este sistema para uma forma matricial e para isso coloca-se da forma mostrada a seguir.

Da segunda parcela de 3-85 tem-se:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e \quad \text{Equação ( 3-89 )}$$

Similarmente:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \mathbf{N} d\Gamma_e \right) \mathbf{p}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad \text{Equação ( 3-90 )}$$

O sistema fica reduzido na forma mostrada a seguir:

$$\mathbf{C}(\zeta_i) \mathbf{u}(\zeta_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{h}^e \mathbf{u}^e = \sum_{j=1}^{Ne} \mathbf{g}^e \mathbf{p}^e \quad \text{Equação ( 3-91 )}$$

Resulta, então, um sistema de equações matriciais na forma:

$$(\mathbf{C} + \hat{\mathbf{H}}) \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad \text{Equação ( 3-92 )}$$

Na expressão anterior, os vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$  contêm os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz  $\mathbf{C}$  é quase diagonal (banda pequena), e pode ser incorporada à  $\hat{\mathbf{H}}$  para formar:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{p} \quad \text{Equação ( 3-93 )}$$

### 3.5.6. Determinação do termo $\mathbf{C}_{ij}(\zeta)$

París & Cañas (1997) mostram que, de acordo com o Segundo Teorema de Betti, tem-se:

$$\int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-94 )}$$

De maneira análoga a anteriormente, considera-se  $b_i = 0$ :

$$\int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad \text{Equação ( 3-95 )}$$

Define-se como sendo  $\Omega_e$  o domínio que resta de  $\Omega$  ao retirar-se um semicírculo de raio  $\varepsilon$  e de contorno  $\Gamma_e$  centrada no ponto  $\zeta$ , conforme figura 3-13 .



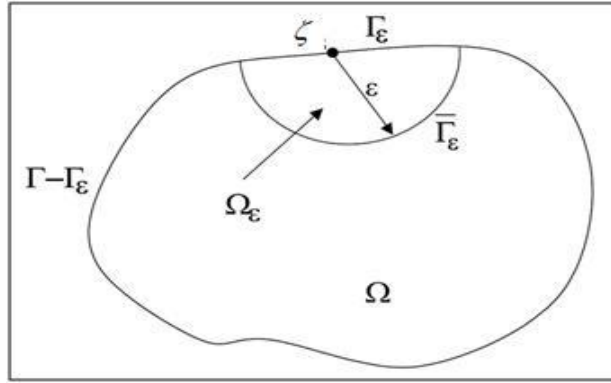


Figura 3-13: Ponto do contorno limitado por um semicírculo hipotético (VALOTO, 2011).

Logo, para o domínio de  $\Omega - \Omega_\epsilon$  de contorno  $\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} p_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} u_{ij}^* p_i d\Gamma + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^* u_i d\Gamma - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^* p_i d\Gamma = 0 \quad \text{Equação ( 3-96 )}$$

Resolvendo a terceira integral de 3-96, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) u_i(X) d\Gamma(X) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) [u_i(X) - u_i(\zeta)] d\Gamma(X) + \\ &+ u_i(\zeta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \end{aligned} \quad \text{Equação ( 3-97 )}$$

Segundo Kane (1994), a primeira integral do lado direito assume o valor de zero, já que  $u_i$  obedecem as condições de continuidade de Hölder. Analisando a figura 3-14 e a segunda integral do lado direito, tem-se:

$$\begin{aligned} r_i &= -n_i \\ r &= \epsilon \\ d\Gamma &= \epsilon d\theta \\ r_{,1} &= \cos(\theta) \\ r_{,2} &= -\text{sen}(\theta) \\ n_j r_{,i} - n_i r_{,j} &= 0 \end{aligned}$$

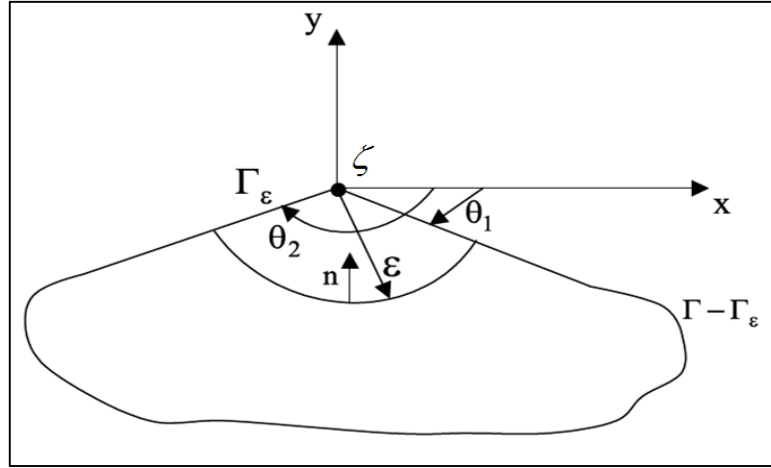


Figura 3-14: Contorno não suave (VALOTO, 2011).

Assim, reescreve-se a equação 3-30, da seguinte forma:

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} \left( (1-2\nu)\delta_{ij} \right) + 2r_{,i}r_{,j} \right] \quad \text{Equação ( 3-98 )}$$

Por conseguinte:

$$u_i(\zeta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] \epsilon d\theta \quad \text{Equação ( 3-99 )}$$

Caso  $i=1$  e  $j=1$ , tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] \epsilon d\theta = \\ & \frac{1}{4\pi(1-\nu)\epsilon} \left[ 2(1-\nu)(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2}(\text{sen}2\theta_2 - \text{sen}2\theta_1) \right] = \\ & \frac{1}{2\pi}(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{8\pi(1-\nu)}(\text{sen}2\theta_2 - \text{sen}2\theta_1) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \gamma}{4\pi(1-\nu)} \end{aligned} \quad \text{Equação ( 3-100 )}$$

Nas expressões anteriores:  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$  e  $\gamma = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$ . Similarmente pode-se calcular

para as outras combinações de  $i$  e  $j$ . Portanto, pode-se definir:

$$u_i(\zeta) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = C_{ij}(\zeta) u_i(\zeta) \quad \text{Equação ( 3-101 )}$$

Onde  $C_{ij}(\zeta)$  é a matriz de coeficientes do termo livre:

$$C_{ij}(\zeta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi} \alpha + \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \gamma}{4\pi(1-\gamma)} & \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \gamma}{4\pi(1-\gamma)} \\ \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \gamma}{4\pi(1-\gamma)} & \frac{1}{2\pi} \alpha - \frac{\text{sen} \alpha \cdot \cos \gamma}{4\pi(1-\gamma)} \end{bmatrix} \quad \text{Equação ( 3-102 )}$$

Assim sendo, para contornos suaves, onde  $\alpha = \pi$ , tem-se:

$$C_{ij}(\zeta) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \text{Equação ( 3-103 )}$$

# CAPÍTULO 4- FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO MEC PARA ELASTOSTÁTICA

## 4.1. Introdução

No capítulo anterior, o método de avaliação das tensões para pontos internos já foi apresentado. Começou assumindo a denominada Identidade de Somigliana, dada em 3-34, deriva-a em relação às coordenadas do ponto  $\zeta$  e por último substitui-a na Lei de Hooke, originando a equação 3-36, que é repetida aqui por conveniência.

$$\sigma_{ij}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_k(X) u_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_k(X) p_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-1 )}$$

Nesta última expressão,  $u_{ijk}^*$  e  $p_{ijk}^*$  são definidos para duas dimensões nas equações 3-37 e 3-38.

Quando as tensões  $\sigma_{ij}$  são conhecidas, as componentes das forças que atuam num plano qualquer, de normal  $m$ , passando por  $\zeta$ , podem ser obtidas pela fórmula de Cauchy:

$$p_i(\zeta) = \sigma_{ij}(\zeta) m_j \quad \text{Equação ( 4-2 )}$$

Fazendo a substituição de 4-2 em 4-1, chega-se a:

$$p_i(\zeta) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta; X) u_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-3 )}$$

Onde:

$$U_{ij}^*(\zeta; X) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu)(m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) - \frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} (2r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}) \right\} \quad \text{Equação ( 4-4 )}$$

$$P_{ij}^*(\zeta; X) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial n} (\nu \delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + 2\nu n_i r_{,j} + 2(1-2\nu)n_j r_{,i} \right] + m_k n_k [2\nu r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] + 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)m_i r_{,j} + \nu m_j r_{,i}] + (1-2\nu)m_j n_i - (1-4\nu)m_i n_j \right\} \quad \text{Equação ( 4-5 )}$$

A equação 4-3 está definida para um ponto no interior, sendo que o interesse aqui

está no contorno. Para se aplicar a equação 4-3 no contorno, deve-se aplicar o procedimento apresentado a seguir.

## 4.2. Regularização da hipersingularidade

Para se ter as forças de superfície no contorno, age-se como se o ponto  $\zeta$  estivesse no interior envolvido por um setor circular de raio  $\varepsilon$  conforme figura 4-1.

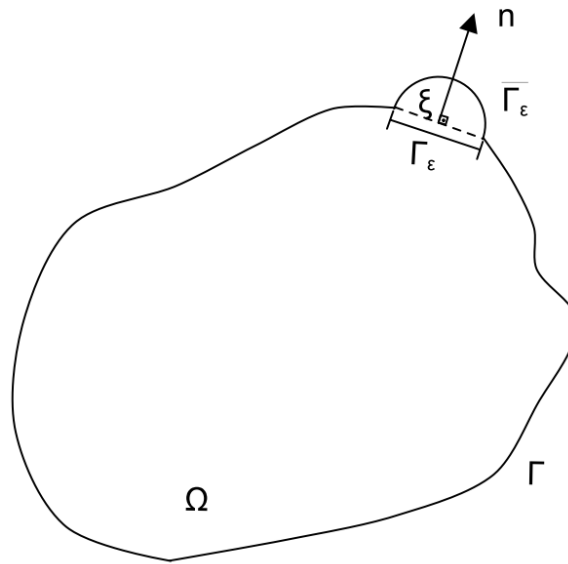


Figura 4-1: Ponto fonte localizado no limite do contorno.

Tomando o limite de  $\varepsilon$  tendendo a zero, a equação 4-3 fica:

$$p_i(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) u_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-6 )}$$

Aplica-se, então uma translação de corpo rígido na equação, notando que o termo  $p$  (derivada de  $u$ ) não é afetado:

$$p_i(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-7 )}$$

Decompõe-se a segunda integral de 4-7 em duas partes:

$$I2 = I2A + I2B \quad \text{Equação ( 4-8 )}$$

Onde:

$$I2A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-9 )}$$

$$I2B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-10 )}$$

Ao longo do arco de círculo  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , conforme figura 4-1, sabe-se que  $r_{,i} = n_i$ .

Portanto, o tensor  $P_{ij}^*$  é simplificado para:

$$P_{ij}^*(\zeta; X) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{\varepsilon^2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] \quad \text{Equação ( 4-11 )}$$

Como deslocamento é contínuo ele pode ser expresso mediante um expansão em série de Taylor em torno de  $\zeta$ :

$$u_j(X) - u_j(\zeta) = \varepsilon u_{j,k}(\zeta) n_k \quad \text{Equação ( 4-12 )}$$

Substituindo 4-11 e 4-12 na integral I2B, tem-se em coordenadas polares que:

$$\begin{aligned} I2B &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{\varepsilon^2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i \\ &\quad + m_i n_j] \varepsilon u_{j,k}(\zeta) n_k \varepsilon d\theta \\ I2B &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{G}{2\pi(1-\nu)} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i \\ &\quad + m_i n_j] u_{j,k}(\zeta) n_k d\theta \end{aligned} \quad \text{Equação ( 4-13 )}$$

Da mesma forma que mostrado em 4-8, a primeira integral de 4-7 é decomposta em duas partes:

$$I1 = I1A + I1B \quad \text{Equação ( 4-14 )}$$

$$I1A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-15 )}$$

$$I1B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 4-16 )}$$

Ao longo do arco de círculo  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ ,  $U_{ij}^*$  é simplificado para:

$$U_{ij}^*(\zeta; X) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ (1-2\nu)(m_j n_i - m_i n_j) + m_k n_k [2n_i n_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right\} \quad \text{Equação ( 4-17 )}$$

Assim, a integral *I1B* fica:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ (1-2\nu)(m_j n_i - m_i n_j) + m_k n_k [2n_i n_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right\} p_j(X) \varepsilon d\theta \quad \text{Equação ( 4-18 )}$$

As integrais *I1A* e *I2A* existem no sentido de Partes Finitas de Hadamard.

Com isto, mais *I1B* e *I2B*, a equação 4-7 resultará em:

$$\begin{aligned} p_i(\zeta) + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{G}{2\pi(1-\nu)} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] u_{j,k}(\zeta) n_k d\theta \\ - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ (1-2\nu)(m_j n_i - m_i n_j) + m_k n_k [2n_i n_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right\} p_j(X) \varepsilon d\theta \\ = PF \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) \\ - PF \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \end{aligned} \quad \text{Equação ( 4-19 )}$$

A equação anterior envolve como incógnita, além de  $u$  e  $p$ , a derivada de  $u$  em relação aos eixos cartesianos. A não ser para contornos suaves, onde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_i(\zeta) = PF \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) \\ - PF \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \end{aligned} \quad \text{Equação ( 4-20 )}$$

Para outros tipos de contorno, as derivadas devem ser eliminadas para que a equação possa ser diretamente implementada. Isto é feito com o auxílio de alguns casos, como estados uni e biaxial de tensão e cisalhamento puro, com os quais pode-se chegar a uma equação onde o termo livre pode ser escrito em função das forças de superfície em pontos imediatamente antes e depois do canto, com cossenos diretores das normais e do ângulo externo encerrado pelas tangentes nestes pontos.

Esta equação, denominada equação integral hipersingular de contorno para elastostática será (PRADO, 1991):

$$\begin{aligned}
 C p_i(\zeta) + C' p_i(\zeta') - PF \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) \\
 = -PF \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X)
 \end{aligned}
 \tag{Equação ( 4-21 )}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-2\nu)(2\pi - \Delta\theta) - \alpha m_y m'_y sg & [-(2-3\nu) + \alpha m_x m'_y] sg \\ [2-3\nu + \alpha m_y m'_x] sg & 2(1-2\nu)(2\pi - \Delta\theta) - \alpha m_x m'_x sg \end{bmatrix} \\
 C' &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} \alpha [4-3\nu - 2m'_x{}^2] & -\beta [-3(1-\nu) + 2m'_y{}^2] - \gamma \\ \beta [-3(1-\nu) + 2m'_x{}^2] - \gamma & \alpha [4-3\nu - 2m'_y{}^2] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sendo:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= m_x m'_y - m_y m'_x \\
 \beta &= m_x m'_x + m_y m'_y \\
 \gamma &= m_x m'_x - m_y m'_y \\
 sg &= \begin{cases} 1, & \text{se } \zeta \text{ está antes do canto} \\ -1, & \text{se } \zeta \text{ está depois do canto} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Conforme subscrito,  $m$  pode estar voltado para a direção  $x$  ( $x_1$ ) ou  $y$  ( $x_2$ ).



## CAPÍTULO 5- PROCEDIMENTO RECURSIVO

### 5.1. Introdução

O procedimento recursivo foi desenvolvido a partir de observações feitas na qualidade dos resultados obtidos em valores internos, quando comparados com os valores nodais de contorno, em problemas de potencial. Um menor erro, tanto no potencial interno, quanto nas derivadas espaciais internas foi observado em diversos exemplos (CORRÊA, 2009).

Assim, foi desenvolvido um procedimento para realocação dos pontos fonte novamente no contorno, após a solução do sistema matricial original. Os novos pontos fonte são posicionados no contorno, em posições distintas das dos pontos nodais originais.

O procedimento é mais efetivo no caso de elementos lineares e, nessa condição, os novos pontos fonte são localizados exatamente no meio dos elementos. Entretanto, o esquema pode ser aplicado em elementos constantes e quadráticos, havendo restrição apenas no cuidado com as condições de continuidade exigidas no primeiro tipo de elemento, caso se deseje calcular as novas forças de superfície.

Uma maior eficiência do processo foi observada para malhas pouco refinadas. Assim se a quantidade de elementos de contorno empregada foi suficiente para uma boa precisão dos resultados, o esquema recursivo perde sua importância, pois seus ganhos passam a ser pouco significativos.

O estudo do procedimento recursivo aplicado em problemas de elasticidade já foi elaborado para se descobrir os deslocamentos nos novos pontos fonte. As análises numéricas mostraram que os deslocamentos obtidos com o procedimento recursivo são mais precisos que a metodologia normal. Porém, esse aumento de precisão se torna pequeno quanto maior o número de elementos empregados (VALOTO, 2011) (FREITAS; LOEFFLER; VALOTO, 2013).

Neste capítulo é apresentada a metodologia da aplicação do procedimento recursivo para problemas de campo vetorial. Será mostrada tanto o procedimento aplicado para deslocamentos (que é singular), quanto o procedimento utilizado para se obter

as forças de superfície (que é hipersingular).

## 5.2. Aplicação do procedimento recursivo para obtenção dos valores de deslocamento

Após a solução do sistema matricial original, todas as variáveis nodais estão calculadas, seja a variável primal  $\mathbf{u}$  quanto a sua derivada normal  $\mathbf{q}$ . Ao se colocar o ponto  $\zeta$  novamente no contorno, todos os elementos devem ser reintegrados, pois os núcleos estão referenciados aos novos pontos fonte. A maior parte das integrais não é singular e podem ser resolvidas numericamente pelo método de Gauss. Mas surgem também outras integrais singulares que devem ser resolvidas, de acordo com a ideia do procedimento recursivo. Essas integrais advêm da integração ao longo do elemento que contém o ponto fonte.

Usando-se elementos de contorno lineares, os novos pontos fonte recursivos são localizados preferentemente no centro dos elementos de contorno, conforme figura 5-1.

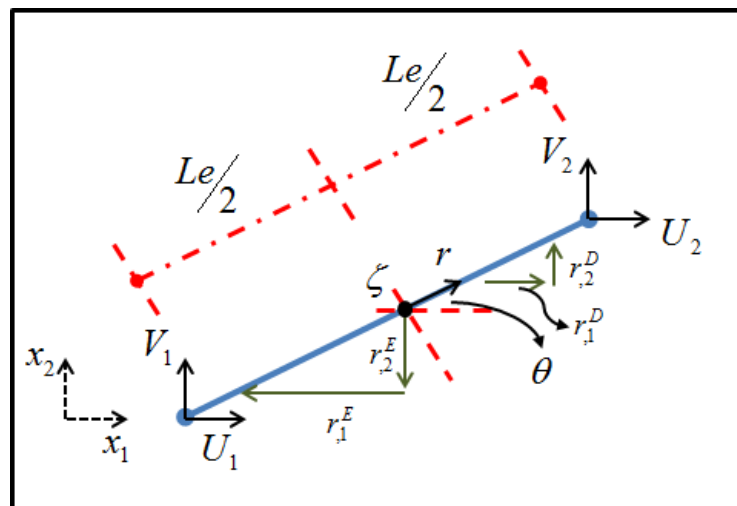


Figura 5-1: Localização dos novos pontos fonte utilizados no procedimento recursivo (VALOTO, 2011).

Observando a figura 5-1, pode-se notar que:

$$r_{,1}^D = -r_{,1}^E$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r}$$

$$r_{,2}^D = -r_{,2}^E$$

Com base nisso é importante ressaltar que:

$$r_{,1}^D r_{,2}^D = r_{,1}^E r_{,2}^E \quad \text{Equação ( 5-1 )}$$

Ao longo do elemento retilíneo, as funções de forma lineares são dadas agora por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2x}{Le} \right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{Le} \quad \text{Equação ( 5-2 )}$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2x}{Le} \right) = \frac{1}{2} + \frac{x}{Le} \quad \text{Equação ( 5-3 )}$$

A figura 5-2 representa o comportamento das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ :

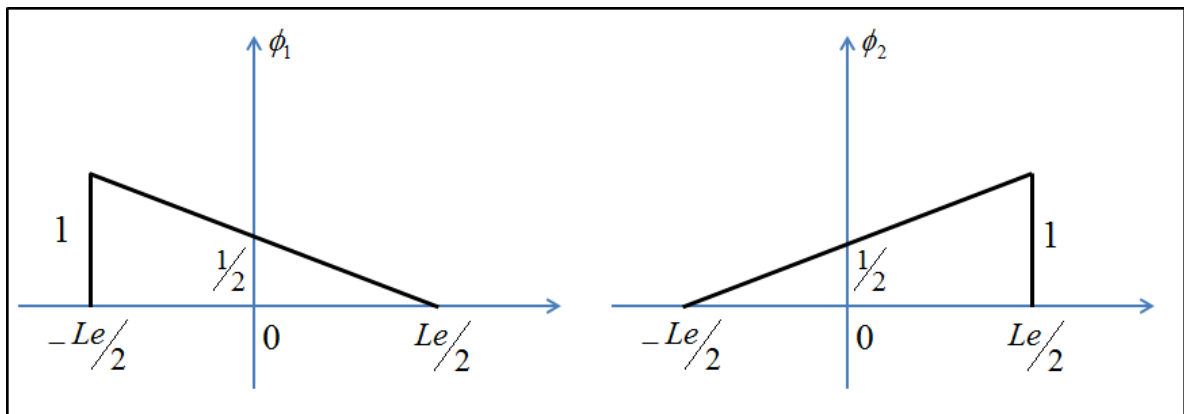


Figura 5-2: Comportamento das funções de interpolação (VALOTO, 2011).

Uma vez que o ponto  $\zeta$  se situa no centro do elemento, inicialmente é feito o exame das integrais relacionadas à  $u_{ij}^*$ , ou seja, os termos da matriz  $G_{ij}$  no que se refere ao ponto fonte situado sobre o próprio elemento de contorno no qual se processa a integração.

$$\begin{aligned} \zeta G_{ij}^K &= \int_{\Gamma_\zeta} Q_p^K \phi_p u_{ij}^* d\Gamma = \int_{-Le/2}^{Le/2} Q_p^K \phi_p u_{ij}^* dr \\ \zeta G_{ij}^K &= \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} \int_{-Le/2}^{Le/2} (Q_1^K \phi_1 + Q_2^K \phi_2) \ln \frac{1}{r} dr + \int_{-Le/2}^{Le/2} (Q_1^K \phi_1 + Q_2^K \phi_2) r_{,i} r_{,j} dr \right] \\ &= K_1 \left[ K_2 \int_{-Le/2}^{Le/2} (Q_1^K \phi_1 + Q_2^K \phi_2) \ln \frac{1}{r} dr + \int_{-Le/2}^{Le/2} (Q_1^K \phi_1 + Q_2^K \phi_2) r_{,i} r_{,j} dr \right] \end{aligned} \quad \text{Equação ( 5-4 )}$$

Examinam-se primeiramente as integrais com logaritmo, que se sabem não serem impróprias. A função  $\phi_1$ , no seu lado direito do ponto fonte resulta:

$$Q_1^K \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_1^K Le}{2} \left[ \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right] \quad \text{Equação ( 5-5 )}$$

Ainda à direita de  $\zeta$ , para  $\phi_2$  tem-se:

$$Q_2^K \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_2^K Le}{2} \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right] \quad \text{Equação ( 5-6 )}$$

A integral à esquerda para  $\phi_1$ , que seria com  $x_1$  negativo fica:

$$Q_1^K \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_1^K Le}{2} \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right] \quad \text{Equação ( 5-7 )}$$

Do mesmo modo para  $\phi_2$ :

$$Q_2^K \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2r}{Le} \right) \ln \frac{1}{r} \right] dr = \frac{Q_2^K Le}{2} \left[ \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right] \quad \text{Equação ( 5-8 )}$$

Assim, a parte logarítmica da integral fornece:

$$\begin{aligned} \zeta G_{ij} &= K_1 \left\{ K_2 \left[ Q_1^K \frac{Le}{2} \left( \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} \right) \right] + \left[ Q_2^K \frac{Le}{2} \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \ln \frac{Le}{2} + \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln \frac{Le}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= K_1 \left\{ K_2 \left[ Q_1^K \frac{Le}{2} \left( 1 + \ln \frac{2}{Le} \right) + Q_2^K \frac{Le}{2} \left( 1 + \ln \frac{2}{Le} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{Equação ( 5-9 )}$$

Com referência ao resultado exposto em 5-9, a média dos valores dos coeficientes de  $Q_1$  e  $Q_2$  corresponde ao valor obtido na integral com elementos constantes.

A outra integral envolve valores de funções trigonométricas que não mudam de valor

ao longo da integração no elemento linear. O quadrado dos valores que compõem o núcleo, para  $i=j$ , certamente são positivos; mas também pode-se verificar que  $r_{,1}^D r_{,2}^D = r_{,1}^E r_{,2}^E$ , ou seja, os sinais dessas funções não se alteram à direita ou à esquerda do ponto fonte.

Assim, uma vez que essas derivadas são funções da inclinação  $\theta$  do elemento com relação ao sistema de coordenadas:

$$\begin{aligned}
 & K_1 \left[ Q_1^K \int_{-Le/2}^{Le/2} f_{ij}(\theta) \phi_1 dr + Q_2^K \int_{-Le/2}^{Le/2} f_{ij}(\theta) \phi_2 dr \right] = \\
 & K_1 \left[ Q_1^K f_{ij}(\theta) \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2r}{Le} \right) dr + Q_1^K f_{ij}(\theta) \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2r}{Le} \right) dr + \right. \\
 & \left. + Q_2^K f_{ij}(\theta) \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2r}{Le} \right) dr + Q_2^K f_{ij}(\theta) \int_{\varepsilon \rightarrow 0}^{Le/2} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2r}{Le} \right) dr \right] = \\
 & = K_1 \left[ Q_1^K f_{ij}(\theta) \frac{Le}{2} + Q_2^K f_{ij}(\theta) \frac{Le}{2} \right] \qquad \text{Equação ( 5-10 )}
 \end{aligned}$$

Onde  $f_{11} = \cos^2 \alpha$ ,  $f_{12} = \cos \alpha \sin \alpha$  e  $f_{22} = \sin^2 \alpha$ .

É possível inferir esses mesmos resultados mais facilmente, a partir de uma análise gráfica do produto das funções. Percebe-se que as funções de forma apresentam uma contraparte constante e outra variável. Assim, sabendo-se que o argumento  $r$  do logaritmo é sempre positivo, vê-se que no caso dessa função tem-se:

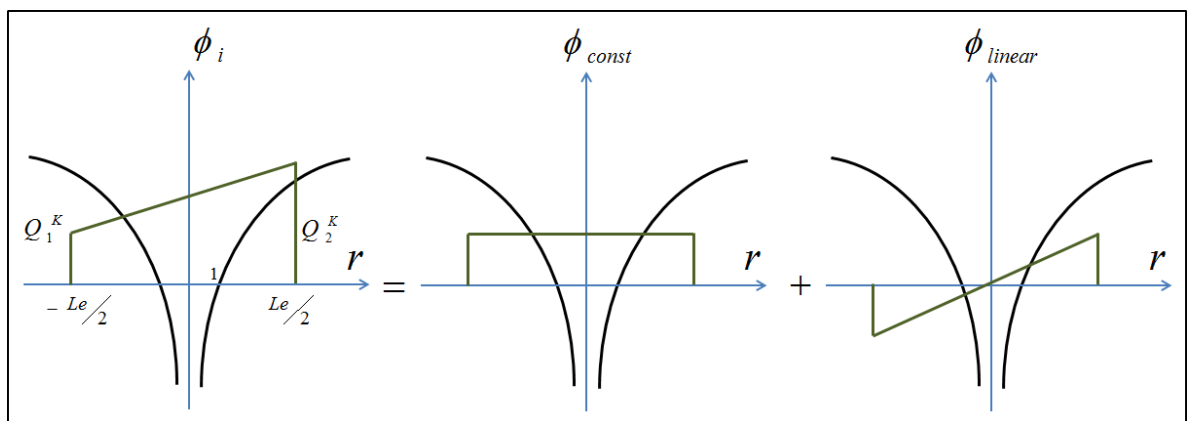


Figura 5-3: Composição da função  $\phi_i$  (VALOTO, 2011).

Pela figura 5-3, vê-se que a parte linear das funções se cancela antes e depois do ponto fonte.

Assim, os resultados previamente obtidos poderiam ser conseguidos simplesmente

fazendo:

$$\begin{aligned}
 & Q_1^K \frac{1}{2} \int_{-Le/2}^{Le/2} \ln \frac{1}{r} dr + Q_2^K \frac{1}{2} \int_{-Le/2}^{Le/2} \ln \frac{1}{r} dr = \\
 & Q_1^K [r - \ln r]_{-Le/2}^{Le/2} + Q_2^K [r - \ln r]_{-Le/2}^{Le/2} = \\
 & Q_1^K \left[ \frac{Le}{2} - \frac{Le}{2} \ln \frac{Le}{2} \right] + Q_2^K \left[ \frac{Le}{2} - \frac{Le}{2} \ln \frac{Le}{2} \right] = \\
 & Q_1^K \frac{Le}{2} \left( 1 - \ln \frac{Le}{2} \right) + Q_2^K \frac{Le}{2} \left( 1 - \ln \frac{Le}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{Equação ( 5-11 )}$$

Esta estratégia vai ser útil no exame das integrais referentes a integral de  $p_{ij}^*$ , ou seja, dos termos de  $H_{ij}$ . Inicialmente, conforme mostrado no procedimento direto, para elementos retilíneos  $\frac{\partial r}{\partial n}$  é nulo e as integrais restantes são referentes apenas a:

$$\int_{\Gamma}^{\zeta} p_{ij}^*(\zeta; x) [U_1^K \phi_1 + U_2^K \phi_2] d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \}
 \tag{Equação ( 5-12 )}$$

Algo fundamental na integração do elemento singular, quando o ponto fonte está centralizado, refere-se ao sinal de  $r_{,i}$ . Quando o ponto  $\zeta$  está na extremidade do elemento se faz uma varredura ao longo da direção escolhida para integração no elemento e o sinal de  $r_{,i}$  não se altera. Mas quando o ponto fonte  $\zeta$  está no centro do elemento, é preciso examinar  $r_{,i}$  à direita e à esquerda de  $\zeta$ . Para isso nota-se que:

$$r_{,i}^D = \frac{x_i(x) - x_i(\zeta)}{r}
 \tag{Equação ( 5-13 )}$$

$$r_{,i}^E = \frac{x_i(x) - x_i(\zeta)}{r}
 \tag{Equação ( 5-14 )}$$

Deve ser lembrado que  $x_i$  é definido em coordenadas cartesianas. Portanto:

$$r_{,i}^D = -r_{,i}^E
 \tag{Equação ( 5-15 )}$$

Quando  $i=j$ , a expressão  $r_{,i}n_j - r_{,j}n_i$  é naturalmente nula. Mas quando  $i \neq j$ , esse termo não é nulo e é preciso estudar a singularidade. Foi mostrado na seção 3.5.3 que as funções  $\frac{1}{r}$  são multiplicadas por  $a_{ij}$ , que quando é não nulo tem sinal invertido para os elementos antes e depois de  $\zeta$ .

Agora o ponto fonte está dentro de apenas um elemento, mas também pode ser verificado que o sinal de  $r_i n_j - r_j n_i$  é oposto, antes e depois de  $\zeta$ , da mesma forma que pode ser notado pelas equações 3-76 e 3-77 para elementos adjacente a  $\zeta$ . Assim, considerando essa situação análoga a observada na seção 3.5.3, pode-se melhor avaliar o comportamento das integrais observando o que está exposto na figura 5-4.

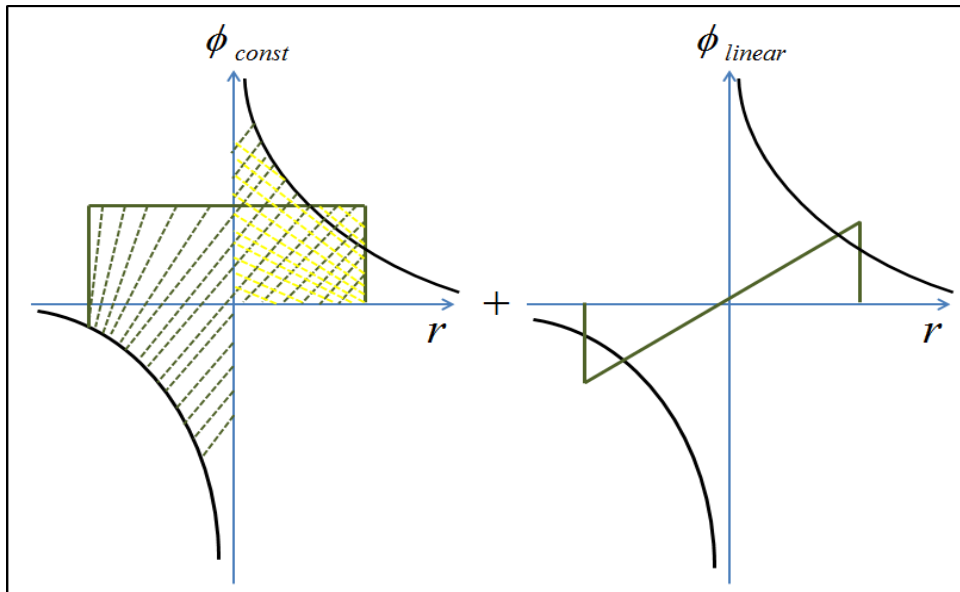


Figura 5-4: Composição das funções singulares (VALOTO, 2011).

Na parte constante, percebe-se que a área correspondente ao produto das duas funções tem valores iguais no intervalo, mas com sinais contrários, anulando-se. O mesmo não acontece com a parte linear multiplicada por  $\frac{1}{r}$  acompanhado de  $r_i$ . O produto de funções tem o mesmo valor e sinal, de modo que a integral no intervalo pode ser duplicada, mas com um importante detalhe: na origem, onde  $\zeta$  é igual a zero, a contribuição da função de forma  $\phi$  cancela a singularidade. Logo:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_2 \left( \frac{r_i n_j - r_j n_i}{r} \right) d\Gamma_\zeta = 2 \int_0^{L/2} K_2 \left( \frac{r_i n_j - r_j n_i}{r} \right) d\Gamma_\zeta \quad \text{Equação ( 5-16 )}$$

Ressalta-se que o sinal de  $n_j$  não se altera. Então:

$$\begin{aligned}
 2\int U_1^K \phi_1 \frac{K_2'}{r} dr + 2\int U_2^K \phi_2 \frac{K_2'}{r} dr &= 2K_2' U_1^K \int \left(\frac{-2r}{2Le}\right) \frac{1}{r} dr + 2K_2' U_2^K \int \left(\frac{2r}{2Le}\right) \frac{1}{r} dr = \\
 &= \frac{2K_2' U_1^K}{Le} \left(-\frac{Le}{2}\right) + \frac{2K_2' U_2^K}{Le} \left(\frac{Le}{2}\right) \\
 &= -K_2' U_1^K + K_2' U_2^K \qquad \qquad \qquad \text{Equação ( 5-17 )}
 \end{aligned}$$

### 5.3. Aplicação do procedimento recursivo para obtenção dos valores de forças de superfície.

O procedimento recursivo neste trabalho será utilizado para se obter os valores da força de superfície. Para isso, será utilizado a equação para forças de superfície (equação 4-3) em pontos selecionados no contorno. O processo é similar ao que já foi exposto acima porém um cuidado adicional deve ser feito para os elementos em que os pontos fonte estão presentes.

Ao contrário do que se observa em 3-28, a formulação utilizada agora é hipersingular, sendo necessário algumas estratégias de análise adicionais daquelas expostas anteriormente.

Para qualquer elemento em que as integrais não apresentam singularidades, o processo se dá numericamente através do método de Gauss. Quando a singularidade existe, eles serão analisados analiticamente a seguir.

Os termos singulares da matriz  $G_{ij}$  são definidos pelas funções  $\phi_i$  e  $U_{ij}^*$ , sendo esta última definida em 4-4, mas será repetida aqui novamente por conveniência:

$$\begin{aligned}
 U_{ij}^*(\zeta; X) &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu)(m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) - \frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} (2r_{,i} r_{,j} \right. \\
 &\quad \left. + (1-2\nu)\delta_{ij}) \right\}
 \end{aligned}$$

Lembrando que:

$$r_{,i}^D = -r_{,i}^E$$



$$r_{,1}^D r_{,2}^D = r_{,1}^E r_{,2}^E$$

E definindo que:

$$\frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} = \frac{\partial r}{\partial x(\zeta)} \frac{\partial x}{\partial m(\zeta)} = -\frac{\partial r}{\partial x(X)} \frac{\partial x}{\partial m(\zeta)} = -r_{,k} m_k \quad \text{Equação ( 5-18 )}$$

O primeiro passo para resolver analiticamente  $U_{ij}^*$  na região singular será efetuar a análise de sinais de cada termo em relação à esquerda e à direita do ponto  $\zeta$ . Para isso define-se.

$$Ku^1 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad \text{Equação ( 5-19 )}$$

$$Ku^2 = (1-2\nu) \quad \text{Equação ( 5-20 )}$$

$$f_{ij}^1(\theta) = (m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) \quad \text{Equação ( 5-21 )}$$

$$f^2(\theta) = -\frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} = -(-r_{,k} m_k) = (r_{,1} m_1 + r_{,2} m_2) \quad \text{Equação ( 5-22 )}$$

$$f_{ij}^3(\theta) = (2r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}) \quad \text{Equação ( 5-23 )}$$

Onde  $\theta$  serve para indicar que as funções são independentes de  $r$ . Com base nessas definições,  $U_{ij}^*$  fica:

$$U_{ij}^*(\zeta; X) = Ku^1 \frac{1}{r} \{Ku^2 f_{ij}^1(\theta) + f^2(\theta) f_{ij}^3(\theta)\} \quad \text{Equação ( 5-24 )}$$

É fácil notar pelas equações 5-19 e 5-20 que  $Ku^1$  e  $Ku^2$  não variam com o sentido à esquerda ou à direita de  $\zeta$ .

Para  $f_{ij}^1(\theta)$ , com  $i=j$ , tem-se:

$$f_{11}^1(\theta) = 0 = f_{22}^1(\theta) \quad \text{Equação ( 5-25 )}$$

Para  $i \neq j$ :

$$f_{12}^1(\theta)^D = (m_2 r_{,1}^D - m_1 r_{,2}^D) = -f_{12}^1(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-26 )}$$

$$f_{21}^1(\theta)^D = (m_1 r_{,2}^D - m_2 r_{,1}^D) = -f_{21}^1(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-27 )}$$

Agora, analisando  $f^2(\theta)$ :

$$f^2(\theta)^D = (r_{,1}^D m_1 + r_{,2}^D m_2) = -f^2(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-28 )}$$

Por fim,  $f_{ij}^3(\theta)$  é expandido para  $i=j$ :

$$f_{11}^3(\theta) = 2(r_{,1})^2 + (1-2\nu) \quad \text{Equação ( 5-29 )}$$

$$f_{22}^3(\theta) = 2(r_{,2})^2 + (1-2\nu) \quad \text{Equação ( 5-30 )}$$

Para  $i \neq j$ :

$$f_{12}^3(\theta)^D = 2r_{,1}^D r_{,2}^D = f_{12}^3(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-31 )}$$

$$f_{21}^3(\theta)^E = 2r_{,1}^E r_{,2}^E = f_{21}^3(\theta)^D \quad \text{Equação ( 5-32 )}$$

Nota-se que  $f_{12}^3(\theta) = f_{21}^3(\theta)$ . A partir do que foi exposto pelas equações de 5-25 a 5-32, conclui-se que a equação 5-24 como um todo muda de sinal da esquerda para direita. Logo, define-se:

$$Ku_{ij} = Ku^1\{Ku^2 f_{ij}^1(\theta) + f^2(\theta) f_{ij}^3(\theta)\} \quad \text{Equação ( 5-33 )}$$

Pode se concluir a partir de  $Ku_{ij}$  que o fato observado na figura 5-4 para os termos de  $H_{ij}$  da seção anterior também ocorre aqui. Logo, o método de análise será análogo ao que foi exposto anteriormente:

$$\begin{aligned} \int_{-Le/2}^{Le/2} P_i^K Ku_{ij} \phi_i \frac{1}{r} d\Gamma &= 2 \int_0^{Le/2} P_i^K Ku_{ij} \phi_i \frac{1}{r} d\Gamma \\ 2 \int_0^{Le/2} P_1^K Ku_{ij} \phi_1 \frac{1}{r} dr &+ 2 \int_0^{Le/2} P_2^K Ku_{ij} \phi_2 \frac{1}{r} dr \\ 2Ku_{ij} \left[ P_1^K \int_0^{Le/2} \frac{1}{r} \left(-\frac{r}{Le}\right) dr &+ P_2^K \int_0^{Le/2} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{Le}\right) dr \right] \\ 2Ku_{ij} \left[ -P_1^K \frac{1}{2} + P_2^K \frac{1}{2} \right] & \\ -Ku_{ij} P_1^K + Ku_{ij} P_2^K & \end{aligned} \quad \text{Equação ( 5-34 )}$$

Agora, aborda-se a matriz  $H_{ij}$ , particularmente os termos que implicam na hipersingularidade. Da mesma forma que foi realizado para  $U_{ij}^*$ , uma análise de sinal deve ser feita para  $P_{ij}^*$ , que está exposto em 4-5, mas é repetido aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} P_{ij}^*(\zeta; X) &= \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} \left[ 2 \frac{\partial r}{\partial n} (\nu \delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + 2\nu n_i r_{,j} \right. \right. \\ &+ 2(1-2\nu)n_j r_{,i} \left. \right] + m_k n_k [2\nu r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] \\ &+ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)m_i r_{,j} + \nu m_j r_{,i}] + (1-2\nu)m_j n_i \\ &\left. - (1-4\nu)m_i n_j \right\} \end{aligned}$$

A partir desta equação, define-se:

$$Kp^1 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad \text{Equação ( 5-35 )}$$

$$Kp^2 = m_k n_k \quad \text{Equação ( 5-36 )}$$

$$Kp^3 = (1 - 2\nu)m_j n_i - (1 - 4\nu)m_i n_j \quad \text{Equação ( 5-37 )}$$

$$g^1(\theta) = -\frac{\partial r}{\partial m(\zeta)} = -(-r_{,k} m_k) = (r_{,1} m_1 + r_{,2} m_2) \quad \text{Equação ( 5-38 )}$$

$$g_{ij}^2(\theta) = 2\nu n_i r_{,j} + 2(1 - 2\nu)n_j r_{,i} \quad \text{Equação ( 5-39 )}$$

$$g_{ij}^3(\theta) = 2\nu r_{,i} r_{,j} + (1 - 2\nu)\delta_{ij} \quad \text{Equação ( 5-40 )}$$

$$h_{ij}^1(\theta) = 2\frac{\partial r}{\partial n}(v\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \quad \text{Equação ( 5-41 )}$$

$$h_{ij}^2(\theta) = 2\frac{\partial r}{\partial n}[(1 - 2\nu)m_i r_{,j} + \nu m_j r_{,i}] \quad \text{Equação ( 5-42 )}$$

Nota-se que todos os  $Kp^l$  são constantes invariáveis da esquerda para direita. As funções  $h_{ij}^k(\theta)$  são nulas por causa do uso de elementos retilíneos, nos quais sabe-se que  $\partial r / \partial n = 0$ .

Falta agora analisar os termos  $g_{ij}^k$ . Começando com o termo  $g^1(\theta)$ :

$$g^1(\theta)^D = (r_{,1}^D m_1 + r_{,2}^D m_2) = -g^1(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-43 )}$$

O termo  $g_{ij}^2(\theta)$  deve ser analisado para cada valor de  $i$  e  $j$ . Para  $i = j$ :

$$g_{11}^2(\theta)^D = 2\nu n_1 r_{,1}^D + 2(1 - 2\nu)n_1 r_{,1}^D = 2(1 - \nu)n_1 r_{,1}^D = -g_{11}^2(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-44 )}$$

$$g_{22}^2(\theta)^D = 2\nu n_2 r_{,2}^D + 2(1 - 2\nu)n_2 r_{,2}^D = 2(1 - \nu)n_2 r_{,2}^D = -g_{22}^2(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-45 )}$$

Para  $i \neq j$ :

$$g_{12}^2(\theta)^D = 2\nu n_1 r_{,2}^D + 2(1 - 2\nu)n_2 r_{,1}^D = -g_{12}^2(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-46 )}$$

$$g_{21}^2(\theta)^D = 2\nu n_2 r_{,1}^D + 2(1 - 2\nu)n_1 r_{,2}^D = -g_{21}^2(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-47 )}$$

Por último, analisa-se  $g_{ij}^3(\theta)$ . Para  $i = j$ :

$$g_{11}^3(\theta)^D = 2\nu r_{,1}^D r_{,1}^D + (1 - 2\nu) = g_{11}^3(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-48 )}$$

$$g_{22}^3(\theta)^D = 2\nu r_{,2}^D r_{,2}^D + (1 - 2\nu) = g_{22}^3(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-49 )}$$

Para  $i \neq j$ :

$$g_{12}^3(\theta)^D = 2\nu r_{,1}^D r_{,2}^D = g_{12}^3(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-50 )}$$

$$g_{21}^3(\theta)^D = 2\nu r_{,2}^D r_{,1}^D = g_{21}^3(\theta)^E \quad \text{Equação ( 5-51 )}$$

Nota-se que  $g_{12}^3(\theta) = g_{21}^3(\theta)$ . Conforme observado pelas equações 5-43 a 5-51, conclui-se que  $P_{ij}^*(\zeta; X)$  não varia de sinal da esquerda para a direita como um todo (note que  $g^1(\theta)$  multiplica-se com  $g^2(\theta)$ ). Logo, a função de  $P_{ij}^*(\zeta; X)$  comporta-se de acordo com a figura 5-5.

Para o lado  $b)$  da figura 5-5 a função  $\phi_i$  altera o sinal da esquerda para a direita, fa-

zendo com que a função anule-se mutuamente por ser simétrica. Já para o lado mostrado na parte a) da figura 5-5, a parte constante da função  $\phi_i$  soma-se mutuamente, sendo necessária uma análise mais apurada.

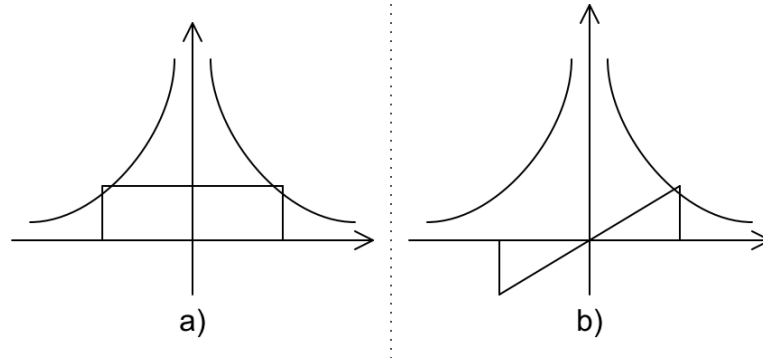


Figura 5-5: Comportamento da função  $P_{ij}^*$  combinado com  $\phi_i$ .

Seja:

$$Kp_{ij}^*(\zeta; X) = Kp^1\{g^1(\theta)[h_{ij}^1(\theta) + g_{ij}^2(\theta)] + Kp^2g_{ij}^3(\theta) + h_{ij}^2(\theta) + Kp^3\} \text{ Equação ( 5-52 )}$$

$$Kp_{ij}(\zeta; X) = Kp^1\{g^1(\theta)g_{ij}^2(\theta) + Kp^2g_{ij}^3(\theta) + Kp^3\} \text{ Equação ( 5-53 )}$$

Então:

$$P_{ij}^*(\zeta; X) = Kp_{ij}^*(\zeta; X) \frac{1}{r^2} \text{ Equação ( 5-54 )}$$

Com base nisso sabe-se que a integral  $H_{ij}$  é:

$$\zeta H_{ij}^K = \int_{\Gamma} Kp_{ij}^*(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [U_l^K \phi_l - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \text{ Equação ( 5-55 )}$$

Divide-se o contorno conforme a figura 5-6:

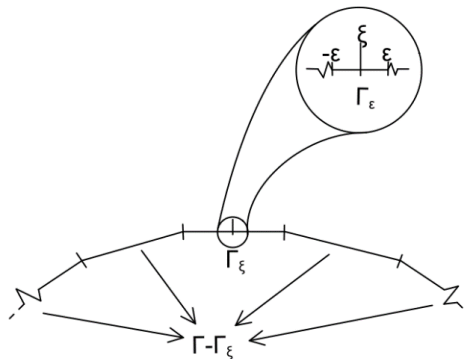


Figura 5-6: Contorno dividido segundo singularidade.

Portanto pode-se dividir a integral da equação 5-55 em três termos:

$$T1 = \int_{\Gamma-\Gamma_\zeta} Kp_{ij}^*(\zeta; X) \frac{1}{r^2} U_l^K \phi_l d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-56 )}$$

$$T2 = \int_{\Gamma-\Gamma_\zeta} Kp_{ij}^*(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [-u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-57 )}$$

$$T3 = \int_{\Gamma_\zeta} Kp_{ij}^*(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [U_l^K \phi_l - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-58 )}$$

Nota-se que  $T1$  pode ser resolvida diretamente pelo método numérico de Gauss sem nenhum cuidado adicional. Avalia-se agora o termo  $T3$ . Sabe-se que apenas a parte constante de  $\phi_l$  não irá anular a função  $P_{ij}^*(\zeta; X)$ . Portanto, define-se:

$$T3.1 = \int_{\Gamma_\zeta} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} U_l^K \phi_l d\Gamma(X) = \int_{\Gamma_\zeta} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} \frac{U_l^K}{2} d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-59 )}$$

$$T3.2 = \int_{\Gamma_\zeta} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [-u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-60 )}$$

Integrando  $T3.1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-Le/2}^{Le/2} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} \frac{U_l^K}{2} dr &= Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{U_l^K}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-Le/2}^{-\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr + \int_{\varepsilon}^{Le/2} \frac{1}{r^2} dr \right] \\ &= Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{U_l^K}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{r} \Big|_{-\varepsilon}^{-Le/2} + \frac{1}{r} \Big|_{Le/2}^{\varepsilon} \right] = Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{U_l^K}{2} \left( -\frac{4}{Le} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad \text{Equação ( 5-61 )}$$

Divide-se  $T3.2$  em:

$$T3.2.1 = \int_{\Gamma_\zeta-\Gamma_\varepsilon} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [-u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-62 )}$$

$$T3.2.2 = \int_{\Gamma_\varepsilon} Kp_{ij}(\zeta; X) \frac{1}{r^2} [-u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( 5-63 )}$$

Demonstra-se que os termos  $T.2$ , e  $T3.2.1$  ao serem somados valem zero (demonstrado no apêndice A). Para o termo  $T3.2.2$  é feita a seguinte integração no sentido de partes finitas:

$$-u_j(\zeta) Kp_{ij}(\zeta; X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{r^2} dr = u_j(\zeta) Kp_{ij}(\zeta; X) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{2}{\varepsilon} \quad \text{Equação ( 5-64 )}$$

O termo da equação 5-64 anula o último termo da equação 5-61.

Logo, a singularidade é compensada quando o ponto fonte está no contorno se:

$$u_j(\zeta) = \frac{U_l^K}{2} \quad \text{Equação ( 5-65 )}$$

Que é facilmente demonstrado:

$$U^K(X) = U_1^K \left( \frac{1}{2} - \frac{X}{Le} \right) + U_2^K \left( \frac{1}{2} + \frac{X}{Le} \right)$$
$$U^K(\zeta) = U^K(0) = U_1^K \frac{1}{2} + U_2^K \frac{1}{2} = \frac{U_l^K}{2} \quad \text{Equação ( 5-66 )}$$

## CAPÍTULO 6- SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

### 6.1. Introdução

São feitas análises detalhadas da precisão que o esquema recursivo promove em relação às forças de superfície. Para isso o procedimento será aplicado em problemas da teoria da elasticidade que possuem solução analítica conhecida, a fim de comparar seus resultados. Caso não houver, será adotada uma solução de referência.

Também são mostrados os erros relativos para os deslocamentos em alguns destes problemas. Porém, não haverá grandes análises a seu respeito, pois o mesmo já foi feito em trabalhos anteriores (FREITAS; LOEFFLER; VALOTO, 2013).

O erro relativo é avaliado segundo a fórmula:

$$Er_{rel} = \frac{f_r(x, y) - f(x, y)}{\max(f_r)} \quad \text{Equação ( 6-1 )}$$

Onde:

$f_r(x,y)$ = valor analítico ou de referência para o ponto (x,y).

$f(x,y)$ = valor gerado no programa para o ponto (x,y).

$\max(f_r)$ = máximo valor analítico ou de referência obtido no problema para a região em análise.

Quanto aos gráficos que serão usados na exposição dos resultados, distinguem-se dois tipos. Um é feito com o erro relativo médio na ordenada em função do número de elementos de contorno usados na malha. Para esses gráficos, uma tabela acompanha os resultados logo em seguida. Outro tipo é montado com o erro relativo de um dado ponto campo obtido pelo procedimento normal em função de sua localização no domínio. Entre um ponto campo e outro traça-se uma reta que representa a interpolação linear entre os valores. Por fim insere-se os erros obtidos pelo procedimento recursivo, que nesse caso são representados por ponto com cor distinta dos resultados obtidos pelo método direto. Outros tipos de gráficos também são utilizados.

## 6.2. Viga biapoiada com carregamento uniforme

### 6.2.1. Apresentação do problema e solução analítica

O primeiro problema analisado consiste numa viga com dois apoios centrados nas faces transversais das extremidades. É prescrito um carregamento constante na face superior. Para que esse problema possua solução analítica, é preciso prescrever uma carga cisalhante nas extremidades, de forma a garantir o equilíbrio de corpo rígido (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970). O problema está ilustrado na figura 6-1.

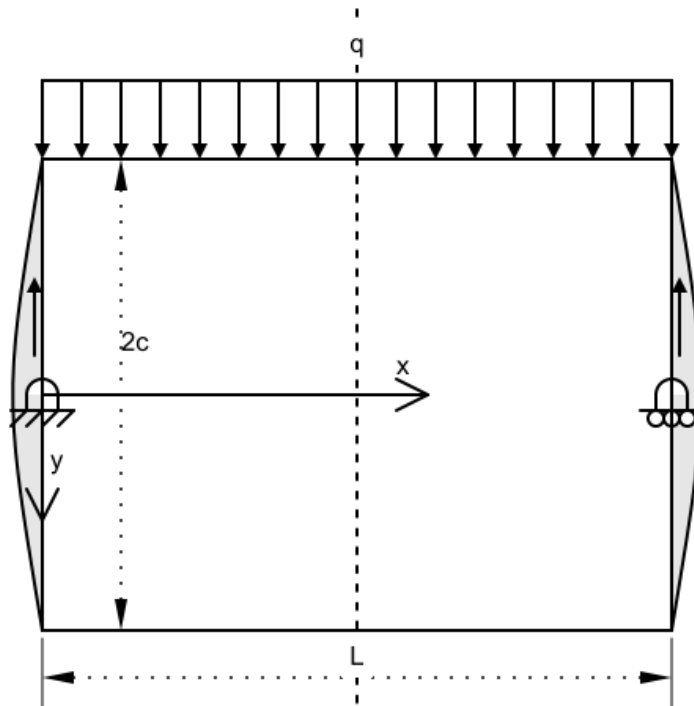


Figura 6-1: Barra biapoiada com carregamento constante na face superior e cisalhantes nas laterais.

Sabe-se que a solução analítica para o deslocamento vertical é dado por:

$$v = -\frac{q}{2IE} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2 y^2}{2} + \frac{2}{3} c^3 y - v \left[ \left( \frac{2}{5} c^2 - L^2 \right) \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} c^2 x^2 + \frac{1}{2} x^2 y^2 - \frac{y^4}{6} \right] \right\} + g(x) \quad \text{Equação ( 6-2 )}$$



Onde:

$$g(x) = -\frac{q}{2IE} \left( \left( \frac{8}{5} c^2 + L^2 \right) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} x^4 \right) + \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI} \left[ 1 + \frac{12}{5} \frac{c^2}{L^2} \left( \frac{4}{5} + \frac{\nu}{2} \right) \right] \quad \text{Equação ( 6-3 )}$$

Já para as tensões normais na direção x tem-se:

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (L^2 - x^2)y + \frac{q}{2I} \left( \frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) \quad \text{Equação ( 6-4 )}$$

### 6.2.2. Análise de deslocamentos

Para a avaliação dos deslocamentos, considerou-se todo o domínio, sendo o mesmo discretizado conforme mostrado na tabela 6-1. As malhas possuem nós duplos nas pontas. As dimensões da viga é de altura e largura unitárias, considerando o estado plano de tensão. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. A ilustração da malha aplicada para 16 e 32 elementos é mostrada na figura 6-2. Os nós do esquema recursivo são apresentados na figura 6-3 através de pequenos triângulos. Todos os elementos de contorno possuem o mesmo comprimento nas malhas utilizadas.

**Tabela 6-1: Configuração das malhas utilizadas no programa.**

Configuração	Número de elementos de contorno	Número de pontos internos
A	16	9
B	32	49
C	40	81
D	80	81

Avalia-se o deslocamento vertical sofrido em ambas as faces superior e inferior para comparar a performance do procedimento normal com o recursivo. Também é inserido os erros relativos observados na linha neutra da viga, que são obtidos com pontos internos.

Nessas condições é possível observar pelos gráficos 6-1 e 6-2 que o procedimento recursivo é mais preciso na estimativa dos deslocamentos verticais para todas as

malhas. Deve-se salientar que para essa análise os nós duplos foram desconsiderados no computo dos erros.

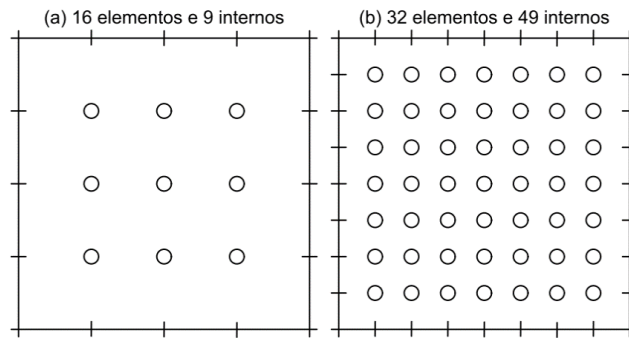


Figura 6-2: Malha aplicada ao problema.

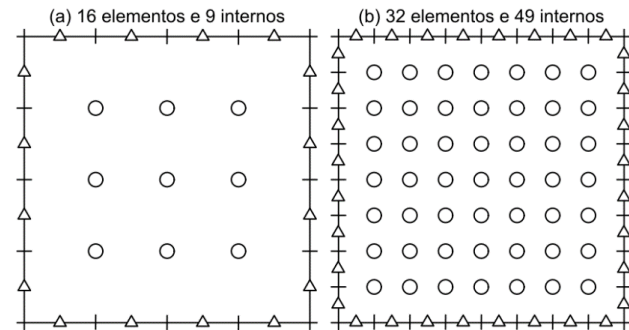
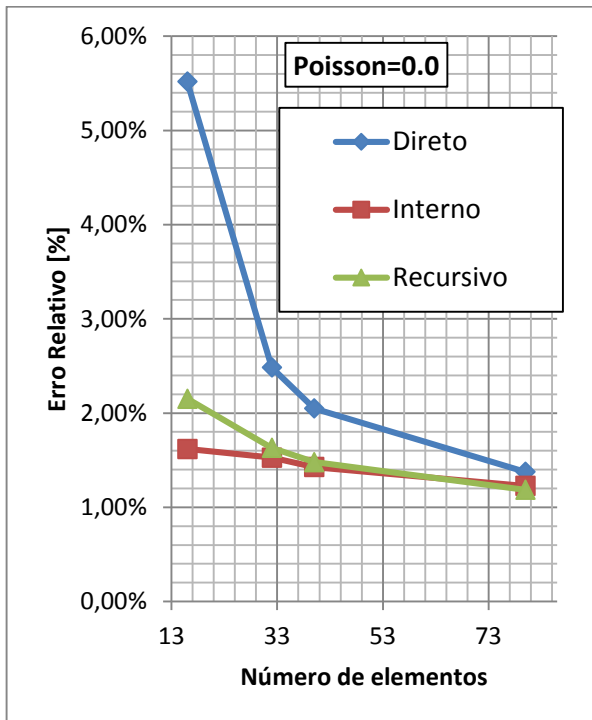
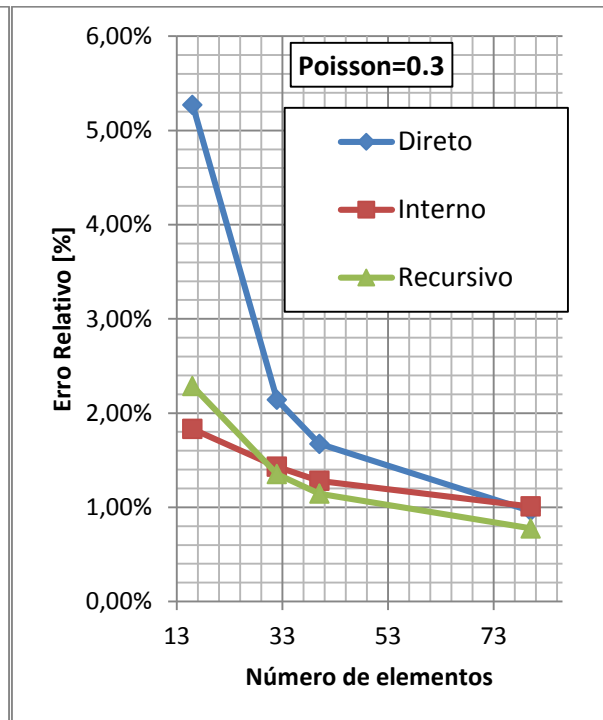


Figura 6-3: Nós do esquema recursivo.

**Gráfico 6-1: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.0.**



**Gráfico 6-2: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.3.**

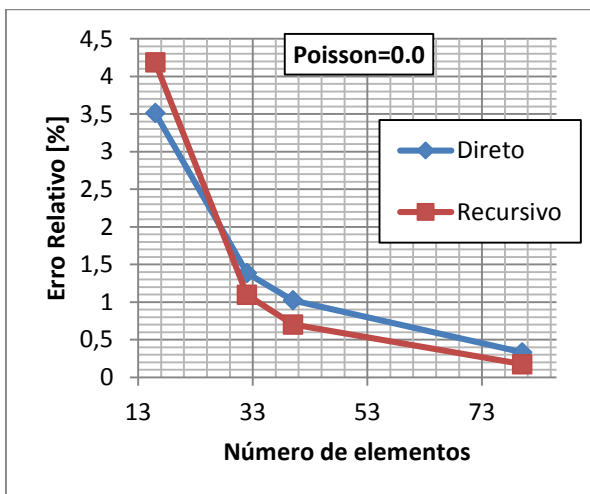


### 6.2.3. Avaliação das forças de superfície

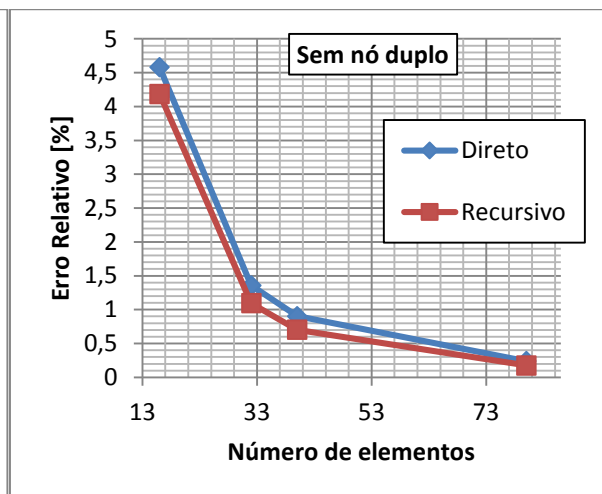
O mesmo problema agora é realizado com a simplificação de simetria na linha pontilhada da figura 6-1. Esse tipo de simplificação não altera os resultados obtidos e permite que o elemento do contorno seja colocado na seção transversal do centro da viga. A superfície de simetria restringe o deslocamento na direção normal a essa superfície.

As malhas utilizadas são iguais as usadas na seção 6.2.2. Suas configurações são mostradas na tabela 6-1. Por causa da simplificação, as dimensões da viga agora é de altura unitária e largura igual a dois, considerando o estado plano de tensões. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias.

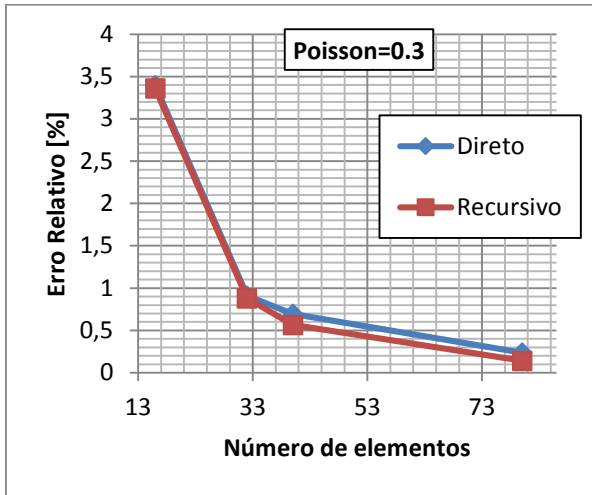
**Gráfico 6-3: Erro relativo com Poisson=0.0, com os nós duplos.**



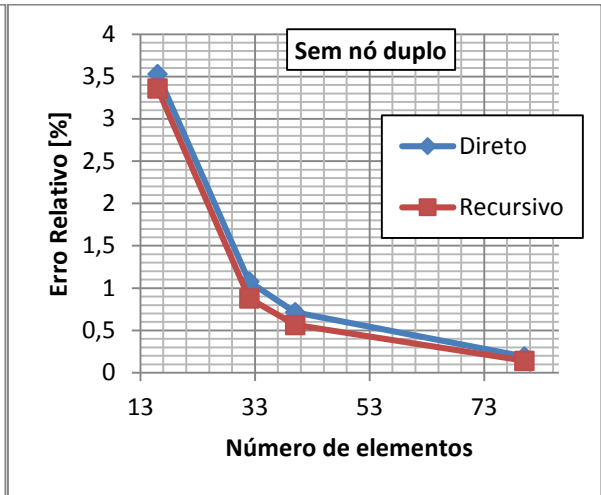
**Gráfico 6-4: Erro relativo com Poisson=0.0, sem os nós duplos.**



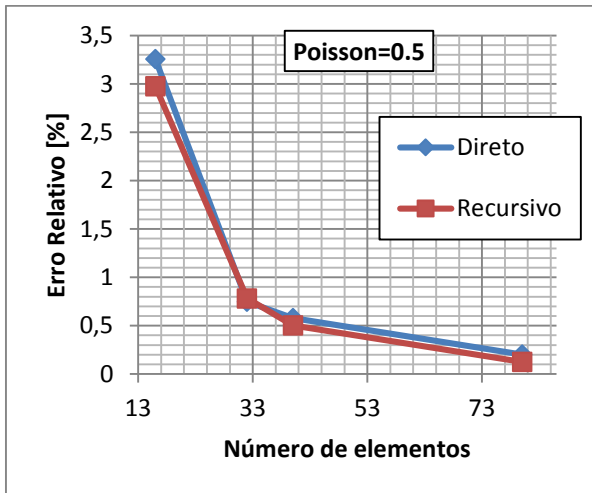
**Gráfico 6-5: Erro relativo com Poisson=0.3, com os nós duplos.**



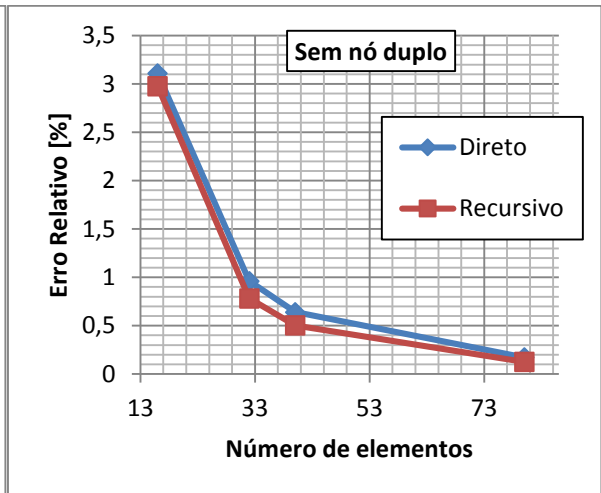
**Gráfico 6-6: Erro relativo com Poisson=0.3, sem os nós duplos.**



**Gráfico 6-7: Erro relativo com Poisson=0.5, com os nós duplos.**



**Gráfico 6-8: Erro relativo com Poisson=0.5, sem os nós duplos.**



**Tabela 6-2: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0**

Número de Elementos	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	3.51	4.18	4.58	4.18
32	1.39	1.10	1.36	1.10
40	1.02	0.70	0.90	0.70
80	0.33	0.18	0.24	0.18

<b>Tabela 6-3: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3</b>				
	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
Número de Elementos	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	3.40	3.36	3.53	3.36
32	0.91	0.88	1.08	0.88
40	0.69	0.57	0.71	0.57
80	0.24	0.14	0.19	0.14

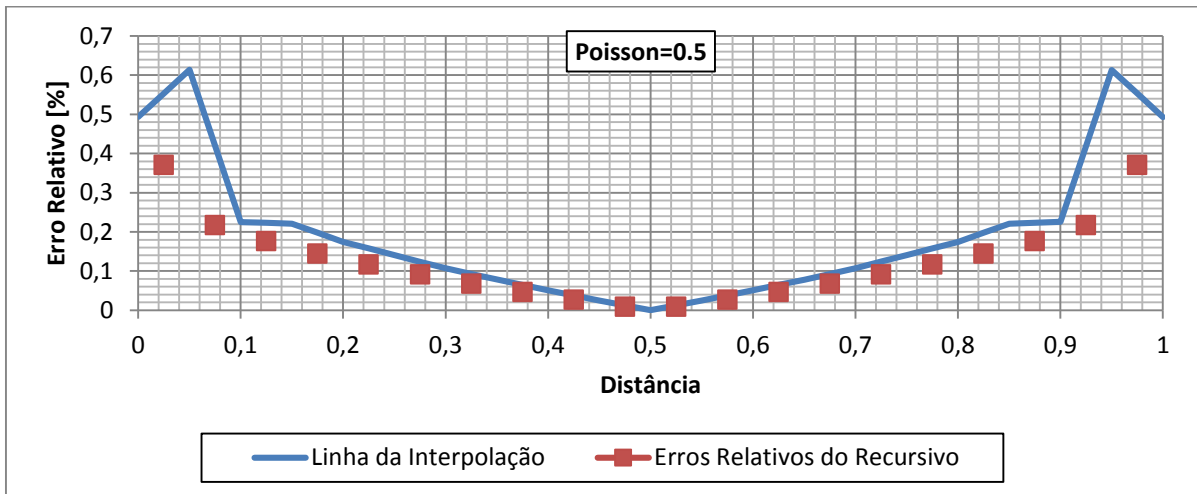
<b>Tabela 6-4: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5</b>				
	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
Número de Elementos	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	3.26	2.98	3.11	2.98
32	0.75	0.78	0.96	0.78
40	0.58	0.50	0.64	0.50
80	0.20	0.13	0.17	0.13

Os gráficos 6-3 a 6-8 foram traçados com a média dos erros relativos calculados com os nós convencionais e os pontos recursivos. Esses valores estão expostos nas tabelas acima.

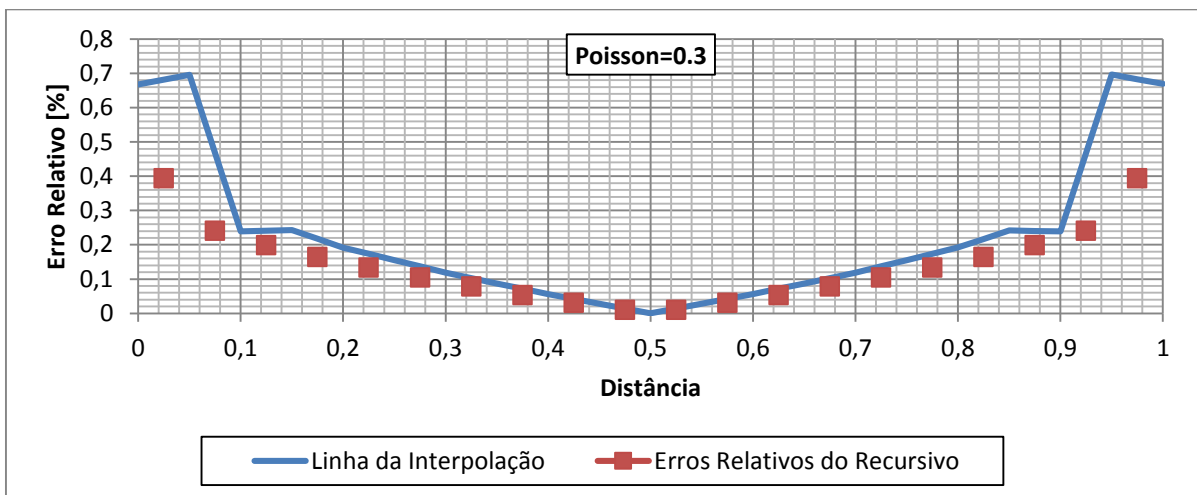
Nessa condição e considerando os nós duplos, pode-se notar a partir dos gráficos 6-3, 6-5 e 6-7 que o procedimento recursivo parece não fazer o efeito desejado em algumas configurações. Um exame mais detalhado é possível a partir dos gráficos abaixo.

Nesses gráficos nota-se que os nós duplos são bastante preciso para todas as configurações, exceto para a da malha mais refinada (80 elementos). Salvo poucas exceções, os erros relativos gerados por cada ponto do esquema recursivo é menor que uma simples interpolação entre os valores obtidos com os nós adjacentes, que foram obtidos pelo processo direto.

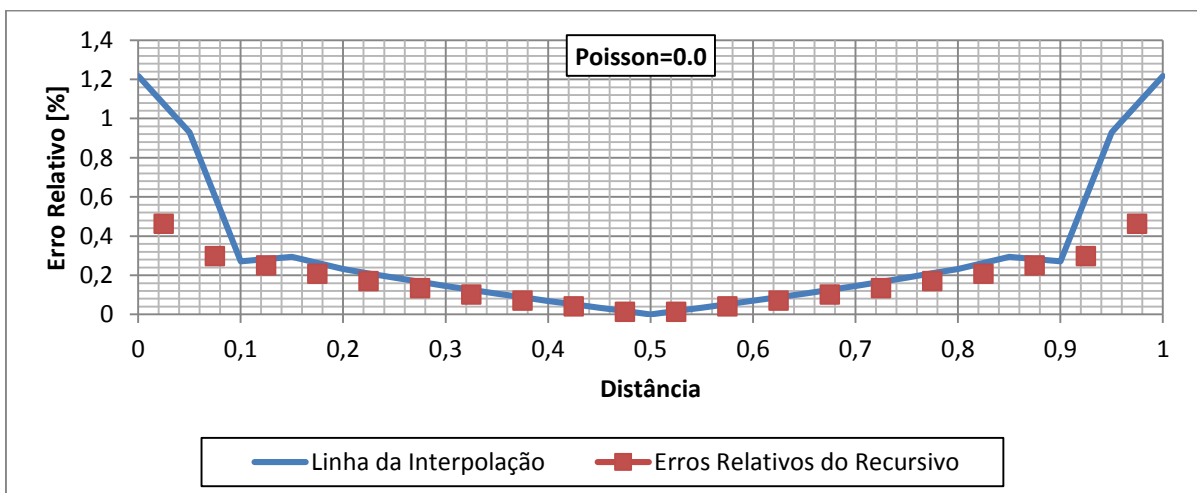
**Gráfico 6-9: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



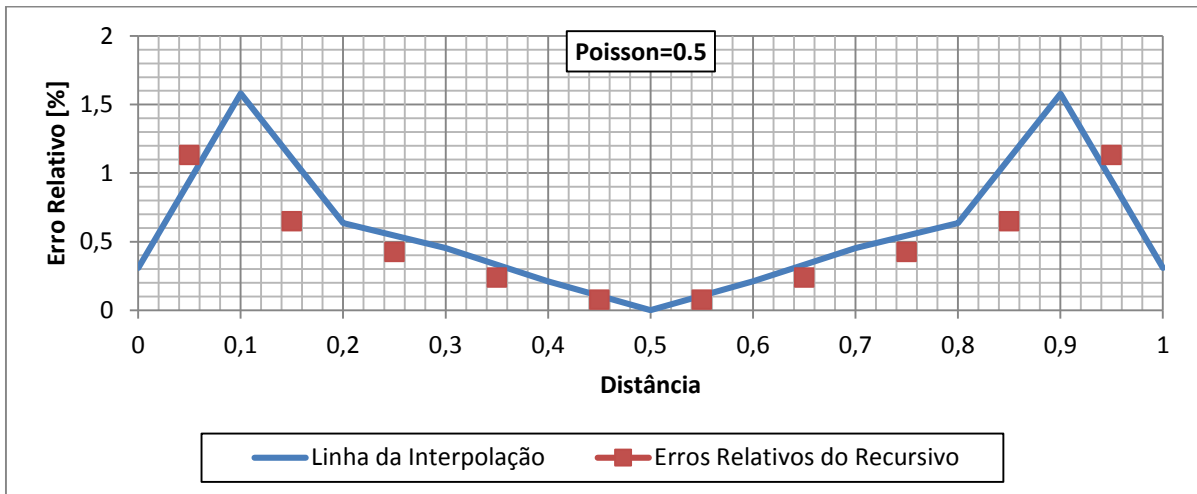
**Gráfico 6-10: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



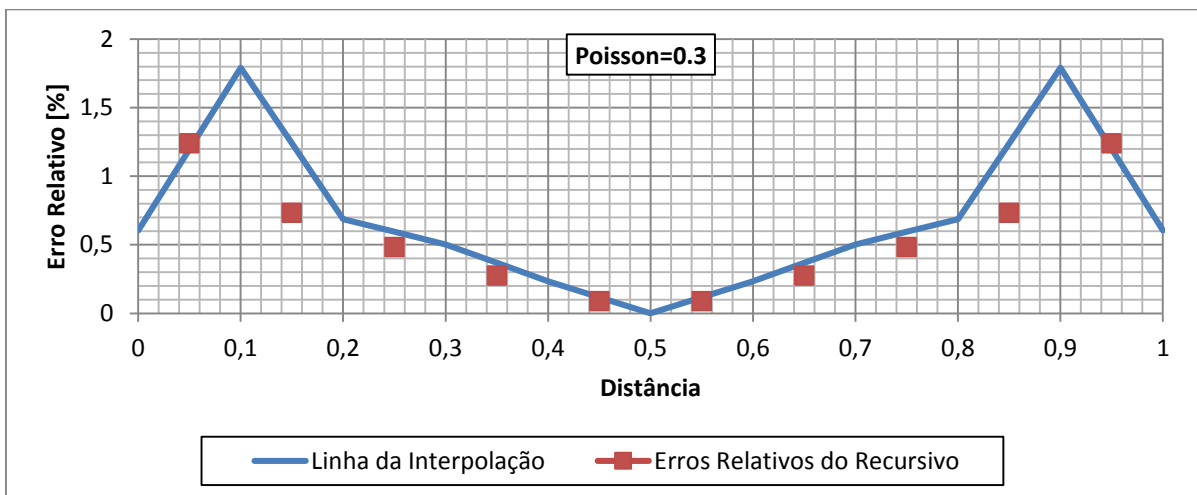
**Gráfico 6-11: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



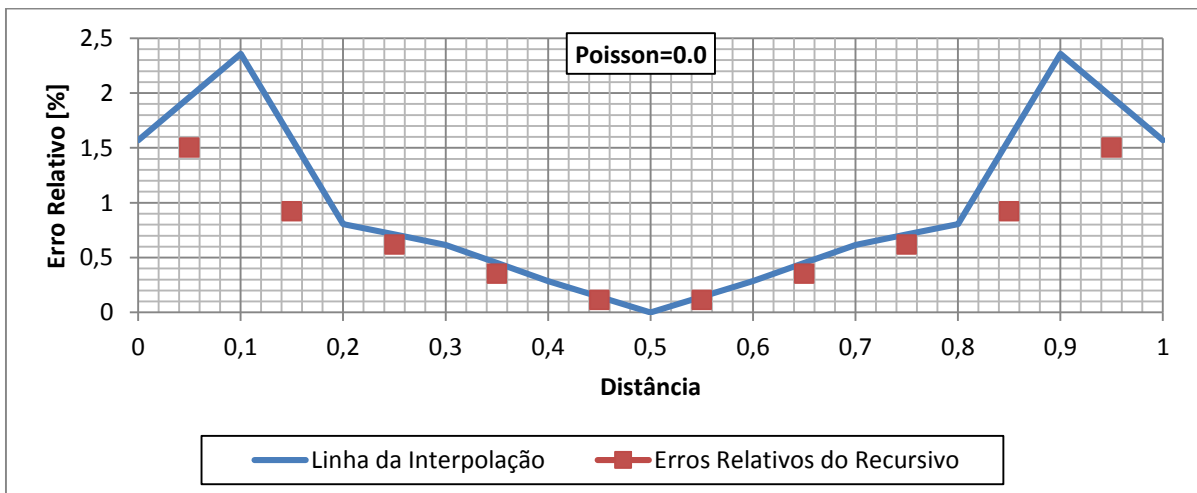
**Gráfico 6-12: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



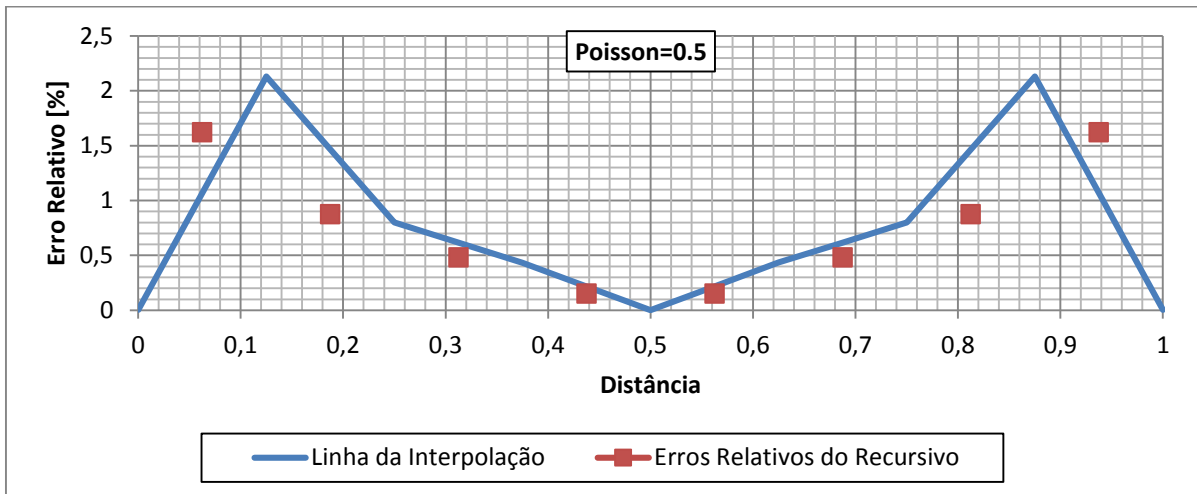
**Gráfico 6-13: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



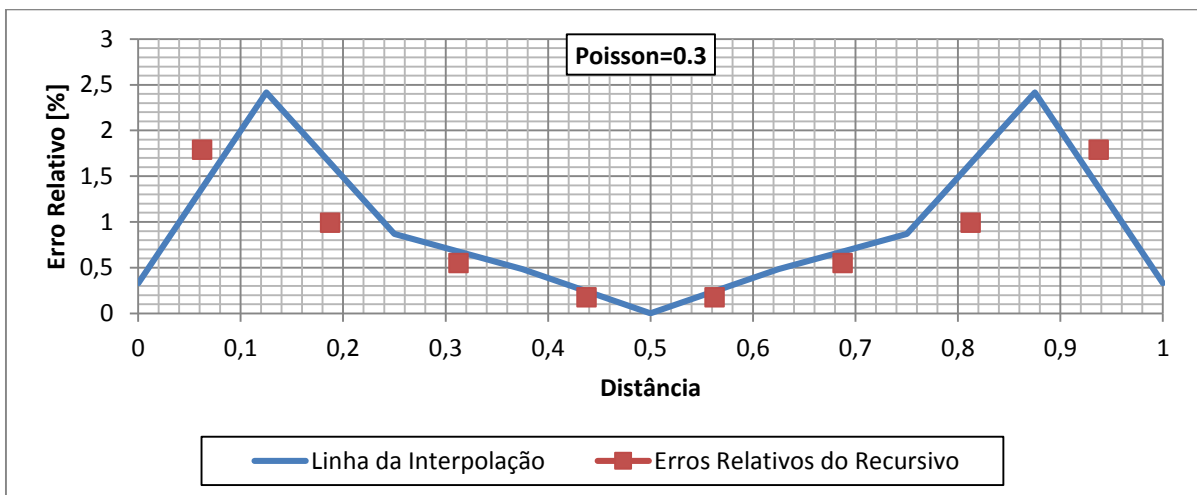
**Gráfico 6-14: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



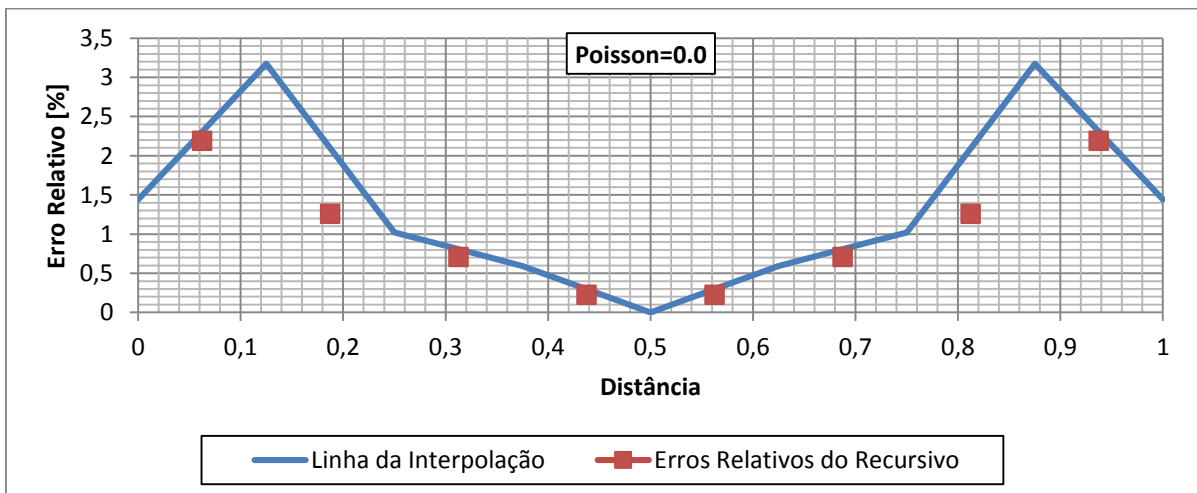
**Gráfico 6-15: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-16: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**

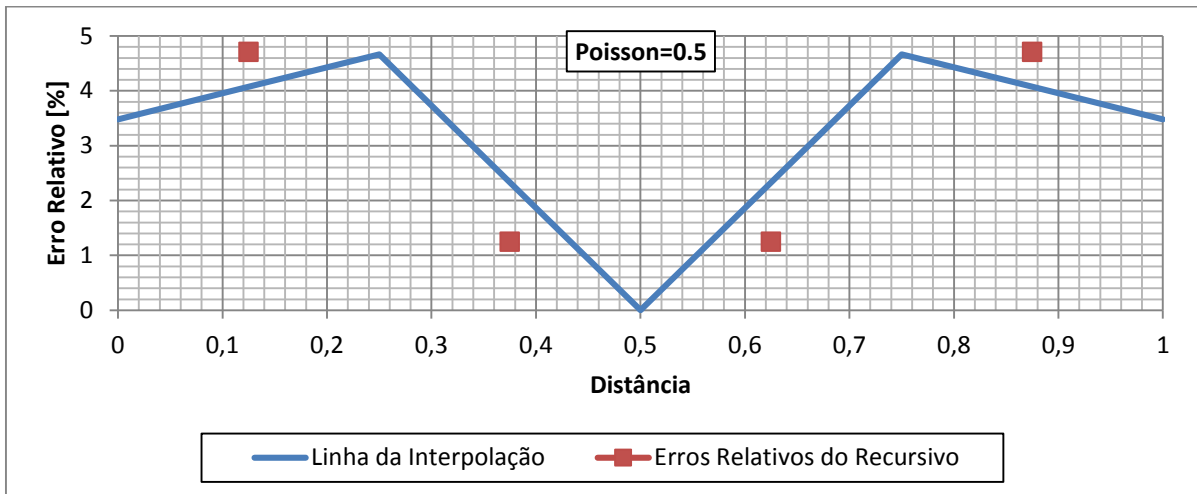


**Gráfico 6-17: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**

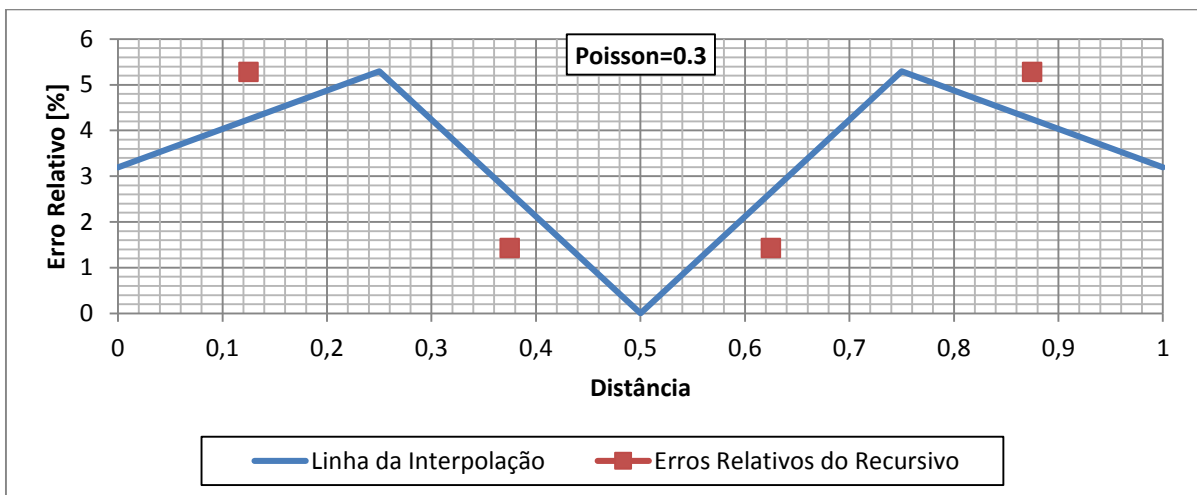




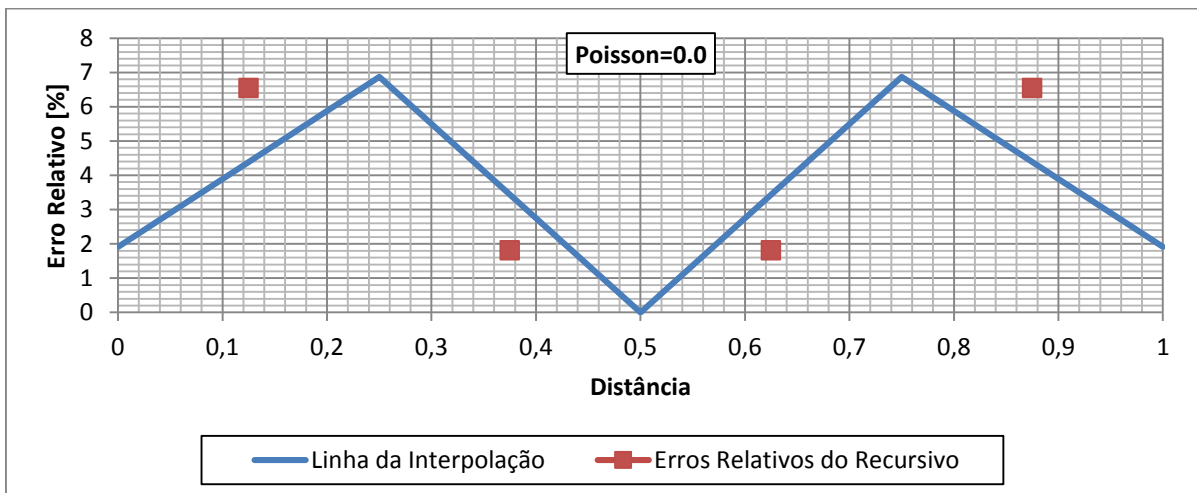
**Gráfico 6-18: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-19: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



**Gráfico 6-20: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



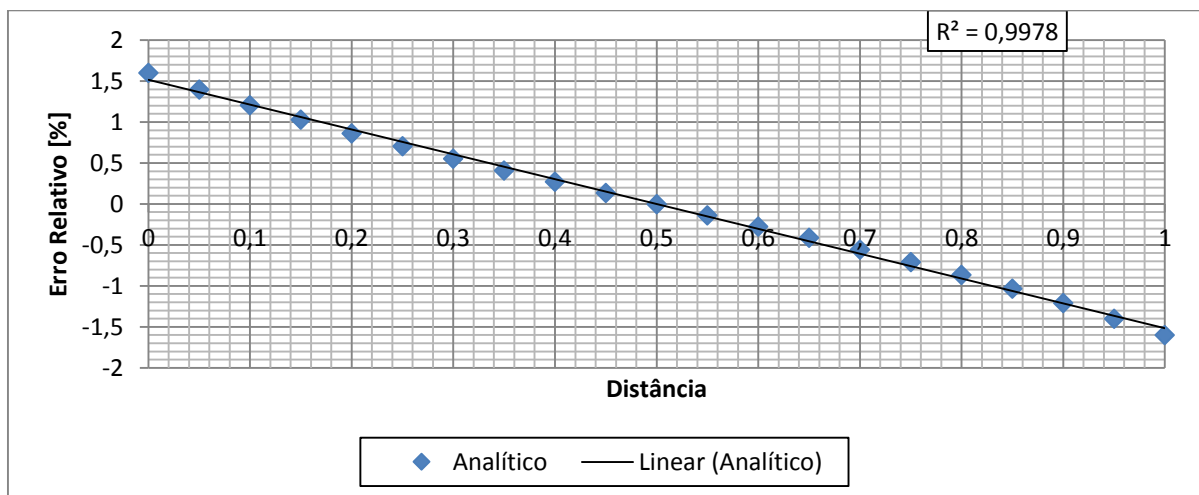
Na abscissa dos gráficos acima, distância se refere à distância em relação à face superior. O valor correspondente a um, então, se refere a um ponto no canto da face inferior propriamente dita.

Portanto, excluindo-se os nós duplos, o procedimento recursivo possui na média um erro relativo menor que no método normal. Porém essa diferença se torna muito pequena quando a malha é refinada.

Conforme se observa no gráfico 6-21, uma equação linear consegue exprimir a distribuição de forças de superfície com fator de correlação de Pearson próximo da unidade. Isso indica uma forte linearidade nessa distribuição de esforços. Portanto uma interpolação linear é capaz de gerar um resultado bem preciso.

O gráfico 6-21 foi plotado com 21 pontos da solução analítica com as condições que o problema analisado apresenta. Gráficos similares podem ser obtidos com mais ou menos pontos.

**Gráfico 6-21: Ajuste de uma função linear na distribuição de tensões obtidas.**



### 6.3. Viga biapoiada com carregamento senoidal

#### 6.3.1. Apresentação do problema e solução analítica

Nesse problema a viga é submetida a um perfil senoidal de esforço, sendo suporta-

da por dois apoios centrados nas faces transversais das extremidades. Novamente é prescrita uma carga cisalhante nas extremidades, de forma a garantir o equilíbrio de corpo rígido (LITTLE, 1973). O problema está ilustrado na figura 6-4.

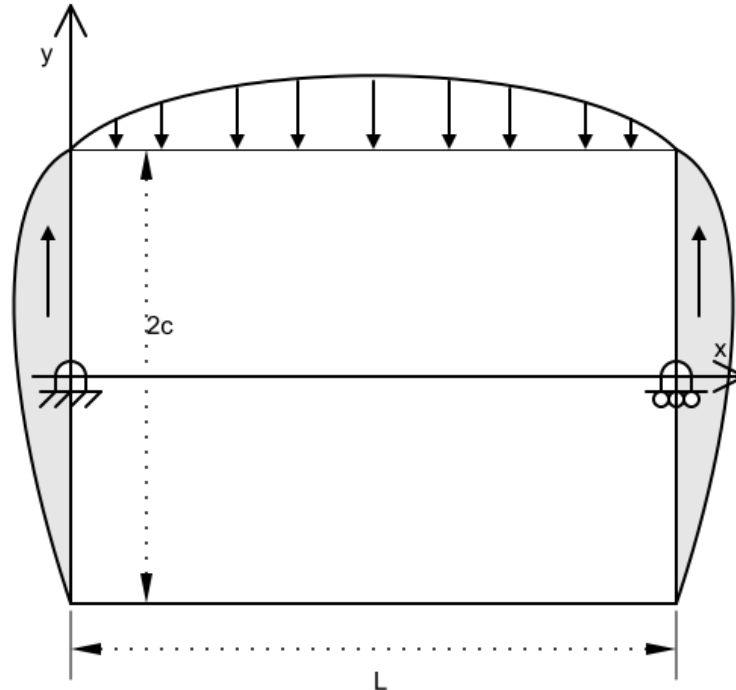


Figura 6-4: Barra biapoiada com carregamento senoidal na face superior e cisalhantes nas laterais.

A solução analítica para os deslocamento vertical é dado por:

$$v = -\frac{1}{E}\beta\text{senh}(\beta x)\{A(1 + \nu)\text{cosh}(\beta y) + B(1 + \nu)\text{senh}(\beta y) + C((1 + \nu)\beta y\text{cosh}(\beta y) - (1 - \nu)\text{senh}(\beta y)) + D((1 + \nu)\beta y\text{senh}(\beta y) - (1 - \nu)\text{cosh}(\beta y))\} \quad \text{Equação ( 6-5 )}$$

Já para as tensões normais na direção x tem-se:

$$\sigma_x = \beta^2\text{sen}(\beta x)[A\text{senh}(\beta y) + B\text{cosh}(\beta y) + C(\beta y\text{senh}(\beta y) + 2\text{cosh}(\beta y)) + D(\beta y\text{cosh}(\beta y) + 2\text{senh}(\beta y))] \quad \text{Equação ( 6-6 )}$$

Onde:

$$A = -D \frac{(\beta h\text{senh}(\beta h) + \text{cosh}(\beta h))}{\text{cosh}(\beta h)} \quad \text{Equação ( 6-7 )}$$

$$B = -C \frac{(\beta h\text{cosh}(\beta h) + \text{senh}(\beta h))}{\text{senh}(\beta h)} \quad \text{Equação ( 6-8 )}$$

$$C = \frac{q\text{senh}(\beta h)}{2\beta^2(\beta h + \text{senh}(\beta h)\text{cosh}(\beta h))} \quad \text{Equação ( 6-9 )}$$

$$D = \frac{qcosh(\beta h)}{2\beta^2(\beta h - sinh(\beta h)cosh(\beta h))} \quad \text{Equação ( 6-10 )}$$

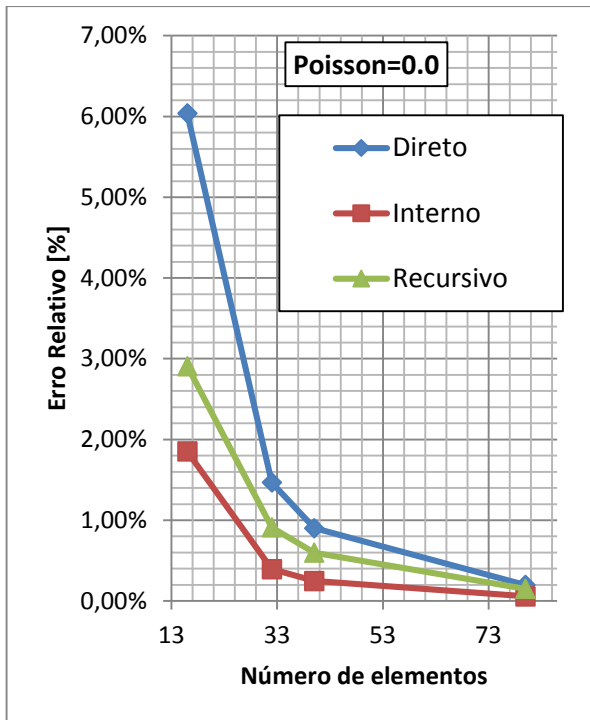
### 6.3.2. Análise dos deslocamentos

Para a avaliação dos deslocamentos, considerou-se todo o domínio, sendo discretizado conforme mostrado na tabela 6-1. As malhas possuem nós duplos nas pontas. As dimensões da viga é de altura e largura unitárias, considerando o estado plano de tensão. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. A ilustração da malha aplicada para 16 e 32 elementos é mostrada na figura 6-2. Os nós do esquema recursivo são apresentados na figura 6-3 através de pequenos triângulos. Todos os elementos de contorno possuem o mesmo comprimento nas malhas utilizadas.

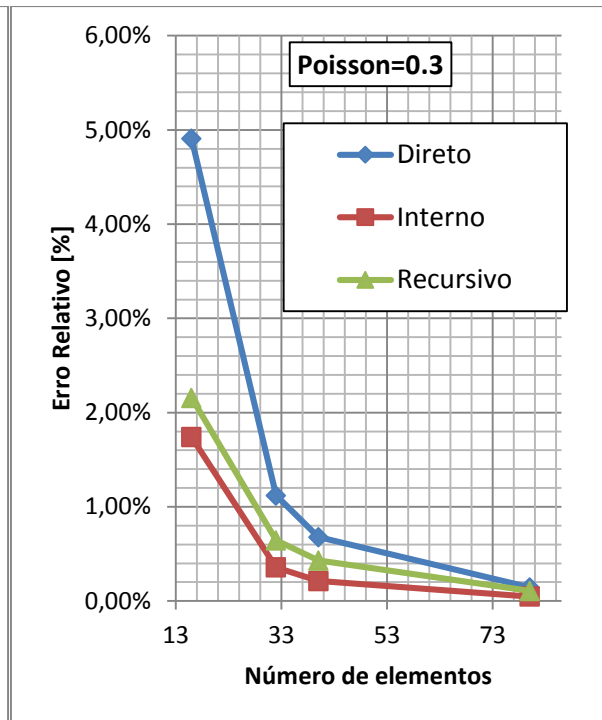
Da mesma forma que o problema da seção anterior, avalia-se o deslocamento vertical sofrido em ambas as faces superior e inferior para comparar a performance do procedimento normal com o recursivo. Também é inserido os erros relativos observados na linha neutra da viga, que são obtidos com pontos internos.

Nessas condições é possível observar pelos gráficos 6-22 e 6-23 que o procedimento recursivo é mais preciso na estimativa dos deslocamentos verticais para todas as malhas.

**Gráfico 6-22: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.0.**



**Gráfico 6-23: Erro relativo em função do número de elementos para Poisson igual a 0.3.**

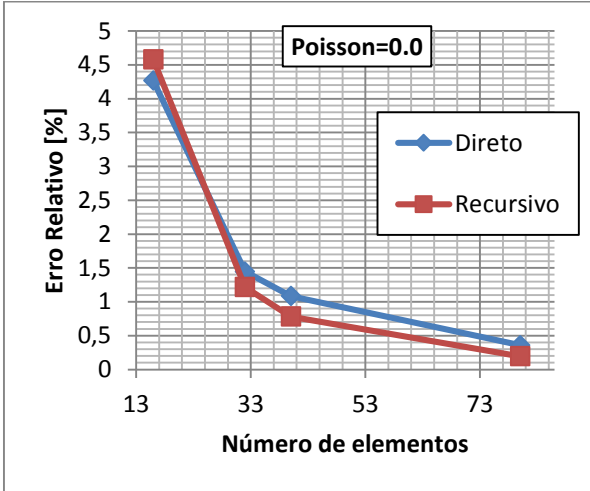


### 6.3.3. Avaliação das forças de superfície

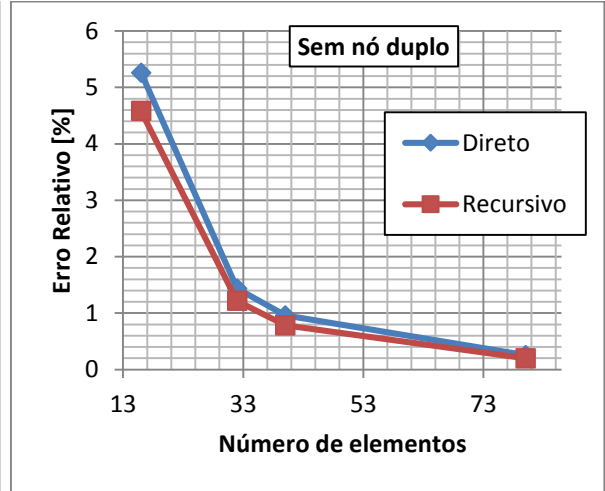
O problema agora é feito dividindo o domínio no meio e realizando a simplificação de simetria na seção transversal livre. Esse tipo de simplificação não altera os resultados obtidos e permite que o elemento do contorno seja colocado na face do centro da viga. A superfície de simetria restringe o deslocamento na direção normal a essa superfície.

As malhas utilizadas são iguais as usadas na seção 6.3.2. Suas configurações são mostradas na tabela 6-1. Por causa da simplificação, as dimensões da viga é de altura unitária e largura igual a dois, considerando o estado plano de tensões. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. Os elementos possuem o mesmo comprimento  $L_e$  uniforme.

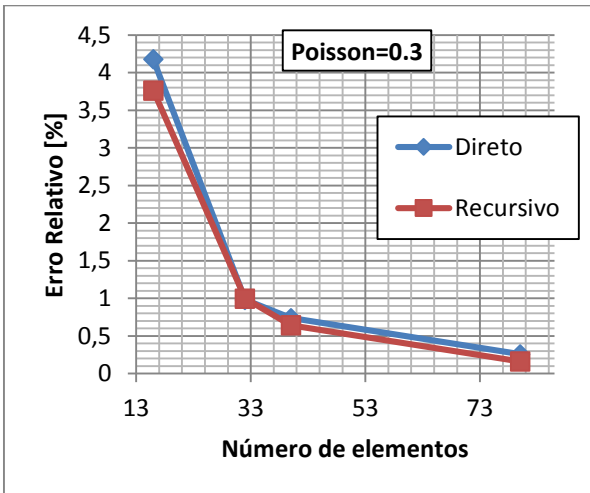
**Gráfico 6-24: Erro relativo com Poisson=0.0, com os nós duplos.**



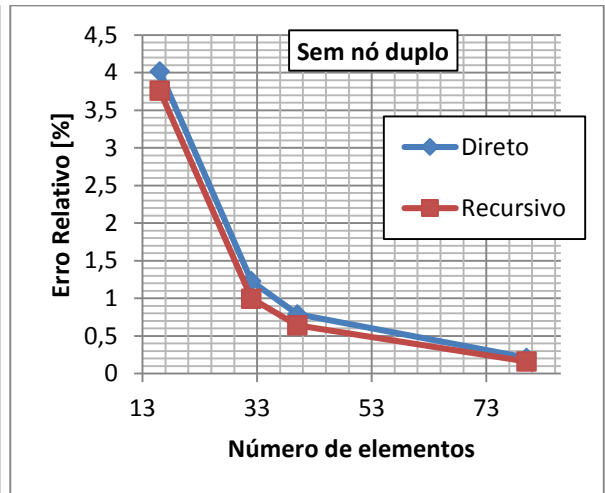
**Gráfico 6-25: Erro relativo com Poisson=0.0, sem os nós duplos.**



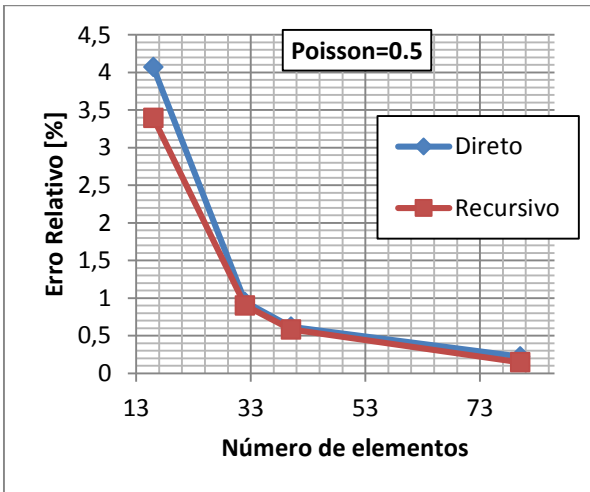
**Gráfico 6-26: Erro relativo com Poisson=0.3, com os nós duplos.**



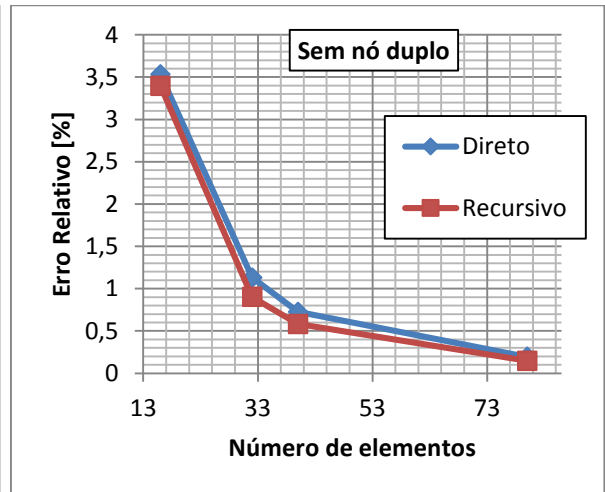
**Gráfico 6-27: Erro relativo com Poisson=0.3, sem os nós duplos.**



**Gráfico 6-28: Erro relativo com Poisson=0.5, com os nós duplos.**



**Gráfico 6-29: Erro relativo com Poisson=0.5, sem os nós duplos.**



<b>Tabela 6-5: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0</b>				
	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
Número de Elementos	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	4.27	4.58	5.26	4.58
32	1.45	1.22	1.44	1.22
40	1.08	0.78	0.96	0.78
80	0.36	0.20	0.25	0.20

<b>Tabela 6-6: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3</b>				
	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
Número de Elementos	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	4.18	3.76	4.02	3.76
32	0.98	1.00	1.23	1.00
40	0.74	0.64	0.79	0.64
80	0.26	0.16	0.21	0.16

<b>Tabela 6-7: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5</b>				
	Com nó duplo [%]		Sem nó duplo [%]	
Número de Elementos	Direto	Recursivo	Direto	Recursivo
16	4.07	3.39	3.53	3.39
32	0.95	0.90	1.13	0.90
40	0.62	0.58	0.73	0.58
80	0.22	0.15	0.20	0.15

Os gráficos 6-24 a 6-29 foram traçados com a média dos erros relativos calculados com os nós convencionais e os pontos recursivos. Esses valores estão expostos nas tabelas acima.

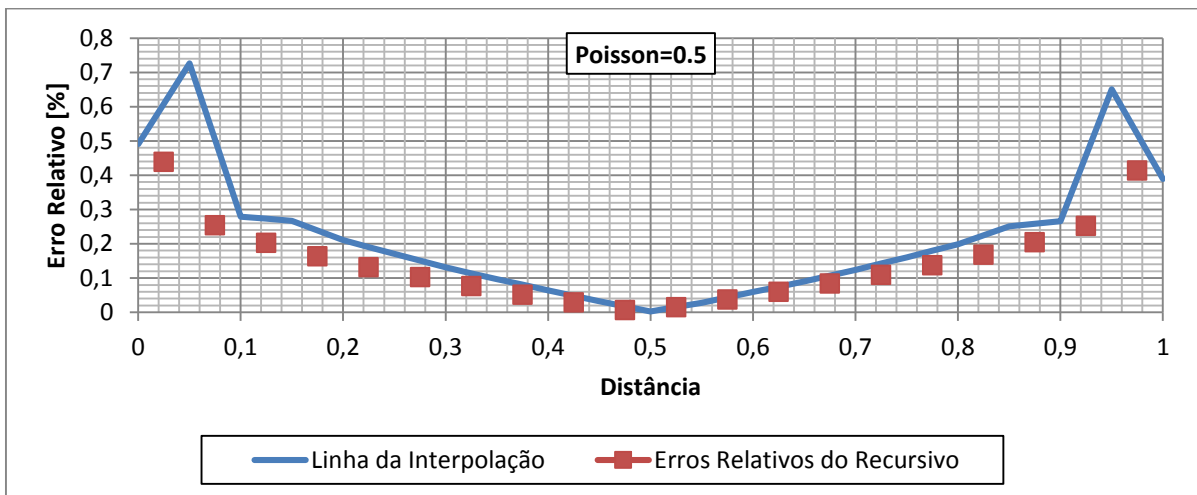
Nessa condição e considerando os nós duplos, pode-se notar a partir dos gráficos 6-24, 6-26 e 6-28 que o procedimento recursivo parece não fazer o efeito desejado em algumas configurações. Um exame mais detalhado é possível a partir dos gráficos abaixo.

Nesses gráficos nota-se que os nós duplos são bastante preciso para todas as configurações, exceto para a da malha mais refinada (80 elementos). Salvo poucas exceções, os erros relativos gerados por cada ponto do esquema recursivo é menor

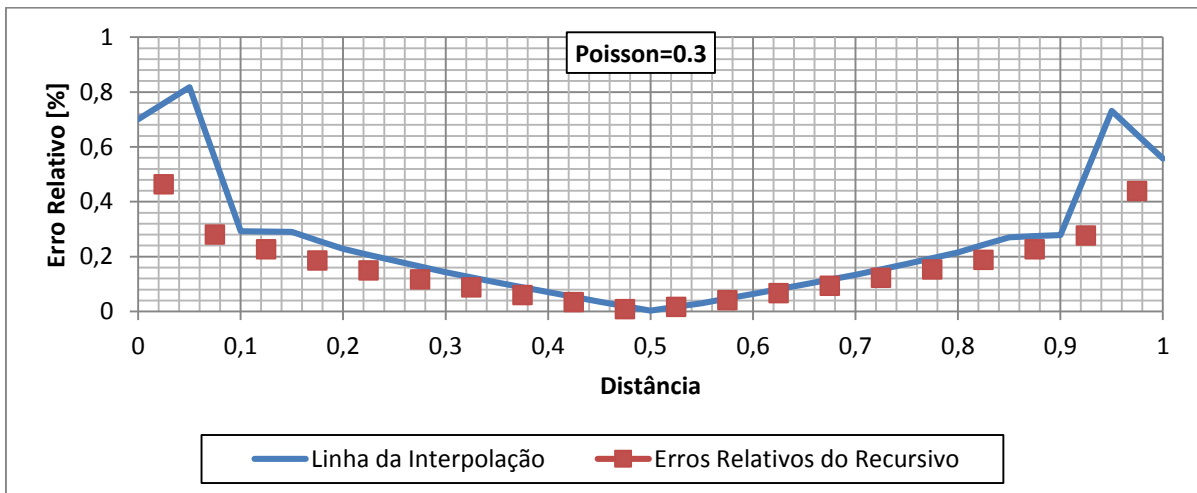
que uma simples interpolação entre os valores obtidos com os nós adjacentes, que foram obtidos pelo processo direto.

Na abscissa dos gráficos abaixo, distância se refere à distância em relação à face superior. O valor correspondente a um, então, se refere a um ponto no canto da face inferior propriamente dita.

**Gráfico 6-30: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**

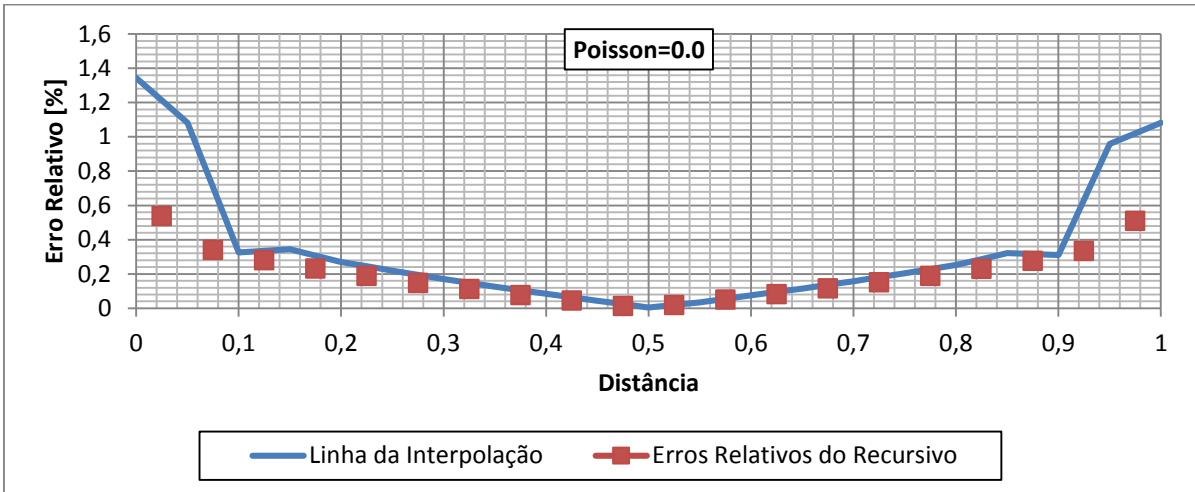


**Gráfico 6-31: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**

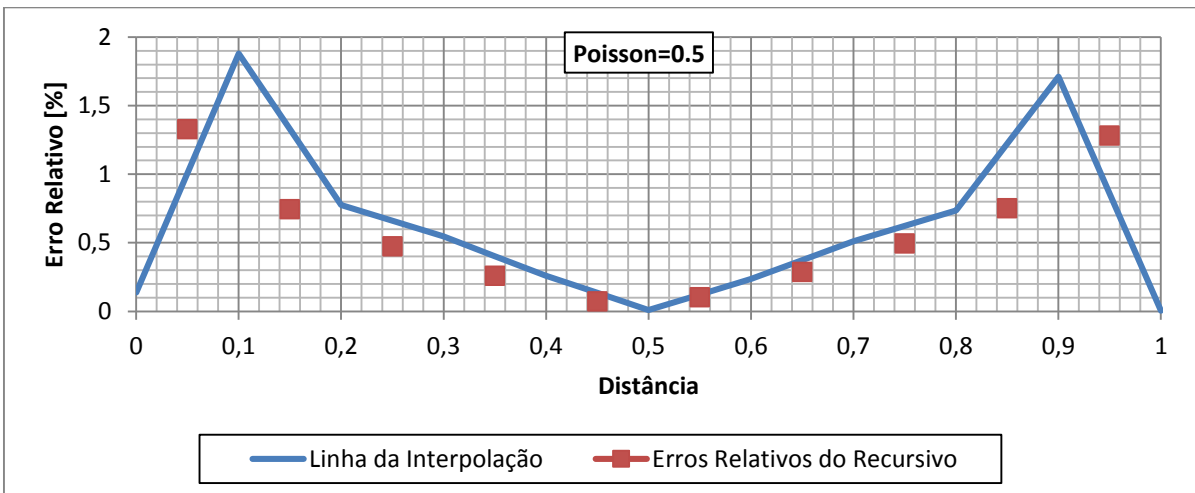




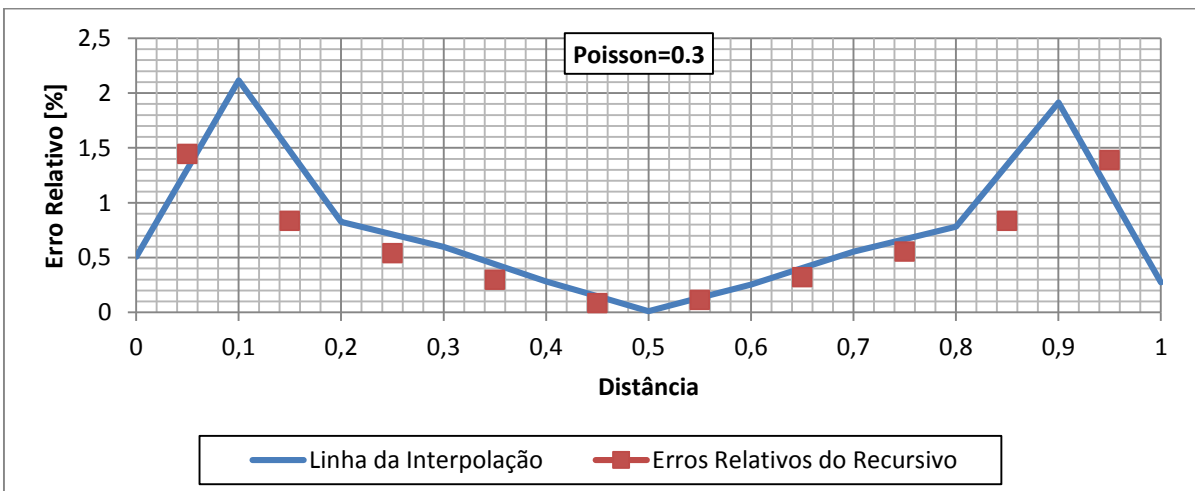
**Gráfico 6-32: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



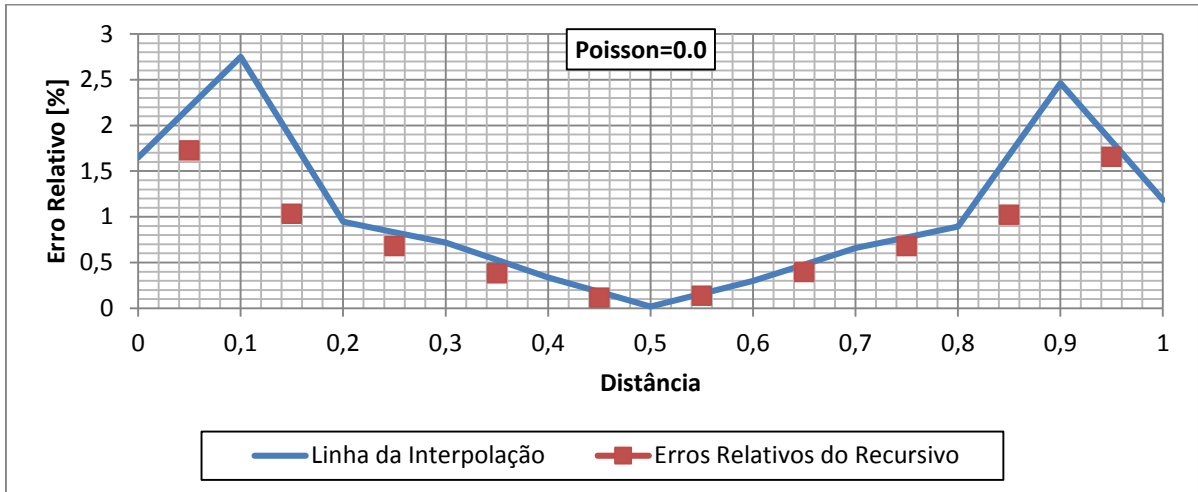
**Gráfico 6-33: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



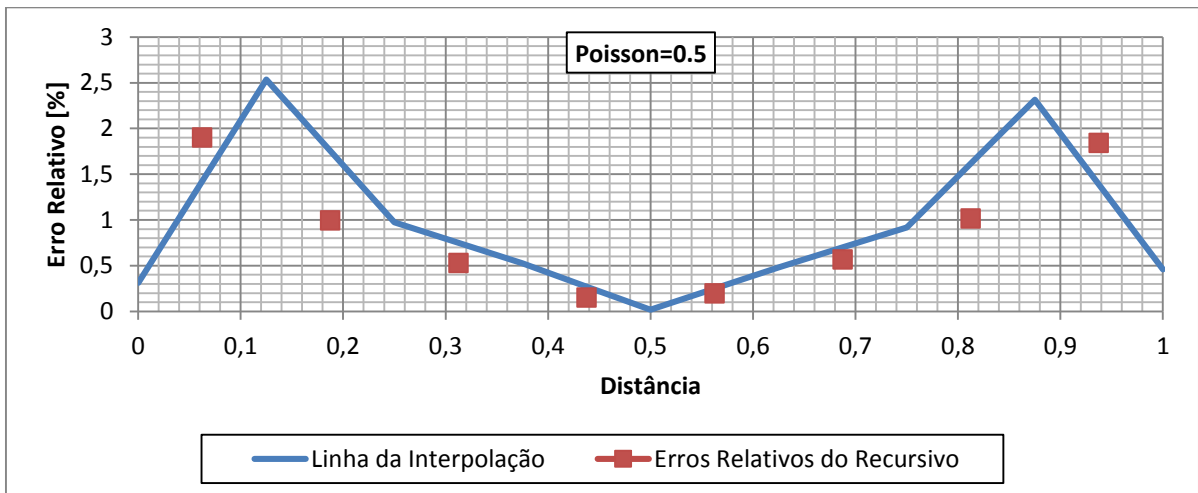
**Gráfico 6-34: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



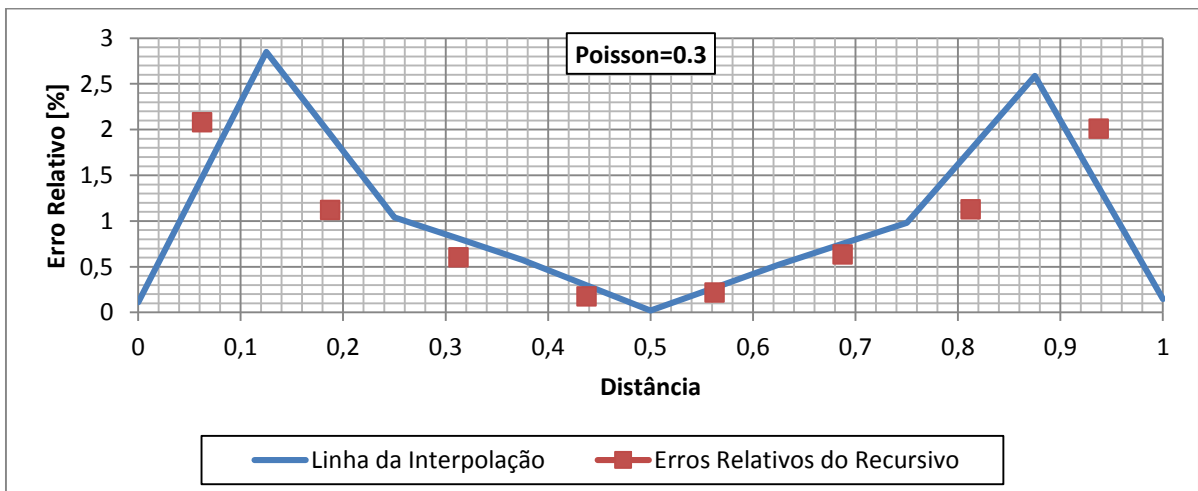
**Gráfico 6-35: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



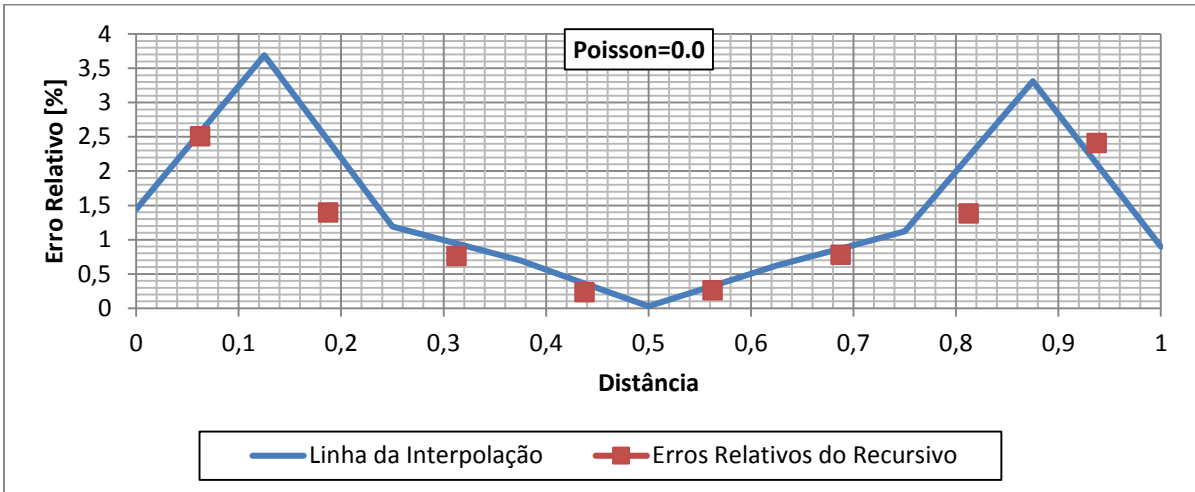
**Gráfico 6-36: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



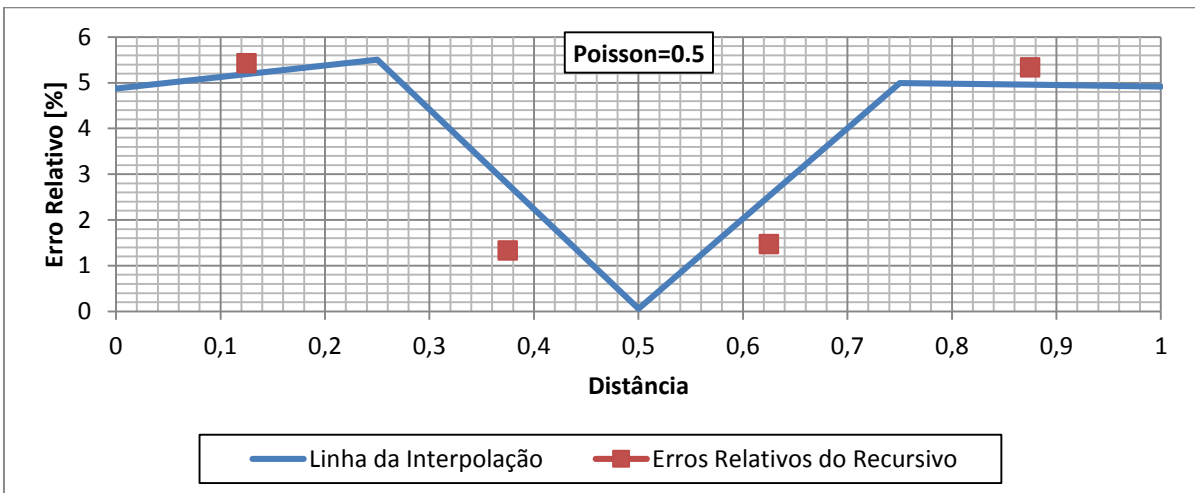
**Gráfico 6-37: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



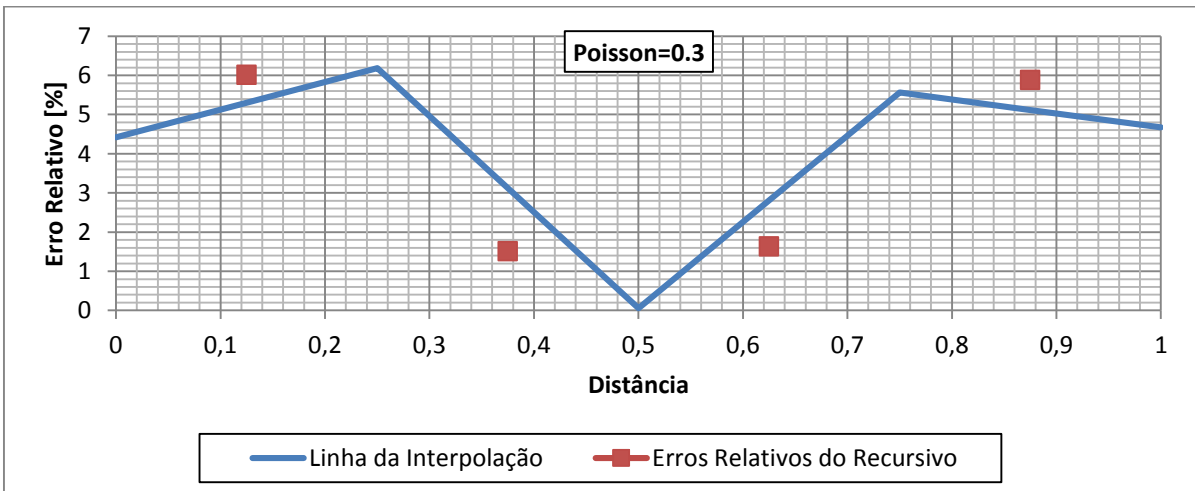
**Gráfico 6-38: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**



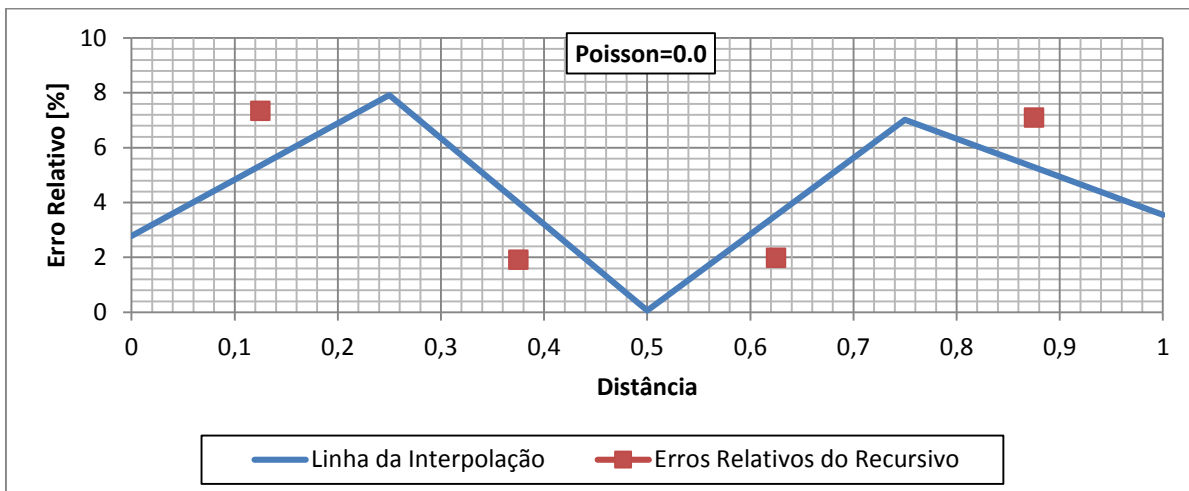
**Gráfico 6-39: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-40: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.3.**



**Gráfico 6-41: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face transversal para Poisson igual a 0.0.**

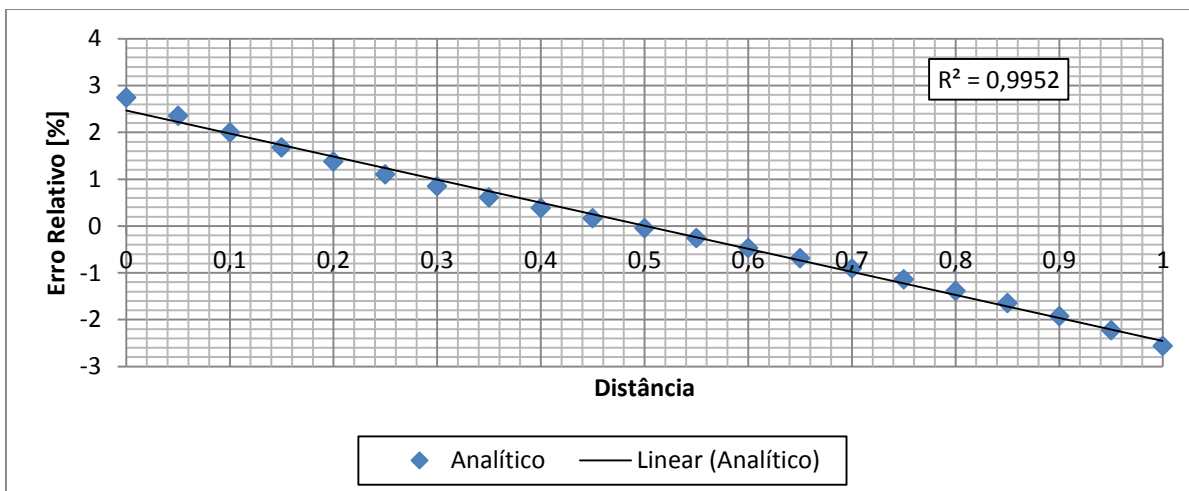


Portanto, excluindo-se os nós duplos, o procedimento recursivo possui na média um erro relativo menor que no método normal. Porém essa diferença se torna muito pequena quando a malha é refinada.

Da mesma forma que no problema apresentado anteriormente, conforme se observa no gráfico 6-42, uma equação linear consegue exprimir a distribuição de forças de superfície com fator de correlação de Pearson próximo da unidade. Isso indica uma forte linearidade nessa distribuição de esforços. Portanto uma interpolação linear é capaz de gerar um resultado bem preciso.

O gráfico 6-42 foi plotado com 21 pontos da solução analítica com as condições que o problema analisado apresenta. Gráficos similares podem ser obtidos com mais ou menos pontos.

**Gráfico 6-42: Ajuste de uma função linear na distribuição de tensões obtidas.**



## 6.4. Barra carregada com compressão de distribuição triangular isósceles

### 6.4.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado

O problema analisado nessa sessão consiste de uma barra submetida a um esforço compressivo num formato triangular isósceles no qual possui intensidade máxima unitária. Sua face inferior é fixada completamente apenas na extremidade esquerda, ficando o seu restante com deslocamento vertical prescrito igual a zero. A figura 6-5 ilustra o que foi dito nesse parágrafo.

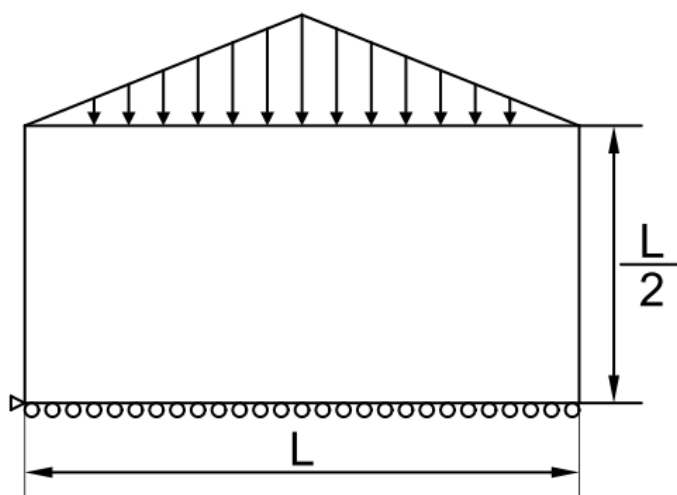


Figura 6-5: Barra carregada com esforço compressivo de perfil triangular.

O problema assim descrito possui uma simetria no meio da barra, situação que será aproveitada na obtenção do valor de referência, conforme será descrito adiante. A altura total será correspondente a metade do comprimento. Será considerado o estado plano de tensões e as propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, serão impostas como unitárias.

Não será utilizada para situação analisada nessa seção uma solução analítica. Ao invés disso, uma saída de elemento de contorno refinada será adotada como referência. A malha utilizada possui 404 nós, com valores de deslocamento horizontais e verticais nulos prescritos nas faces direita e inferior, respectivamente.

A prescrição de deslocamento horizontal nulo na face direita corresponde a uma simplificação de simetria gerada pelas condições do problema analisado. Assim, pode-se ilustrar o sistema estudado como referência na figura 6-6.

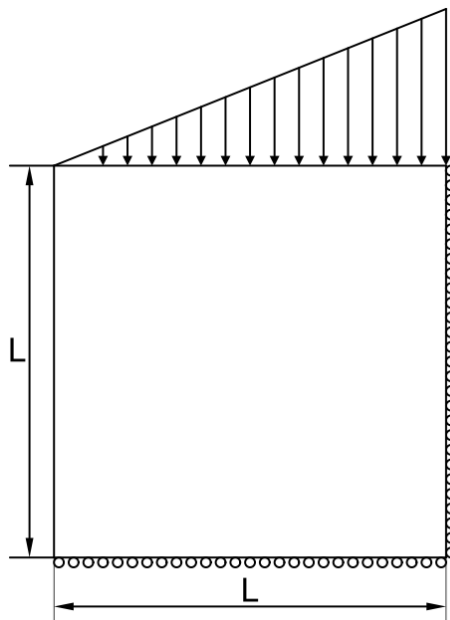


Figura 6-6: Sistema utilizado como referência na análise de precisão.

Os valores obtidos pela malha refinada são replicados para o outro lado do problema estudado e assim utilizados na análise de precisão.

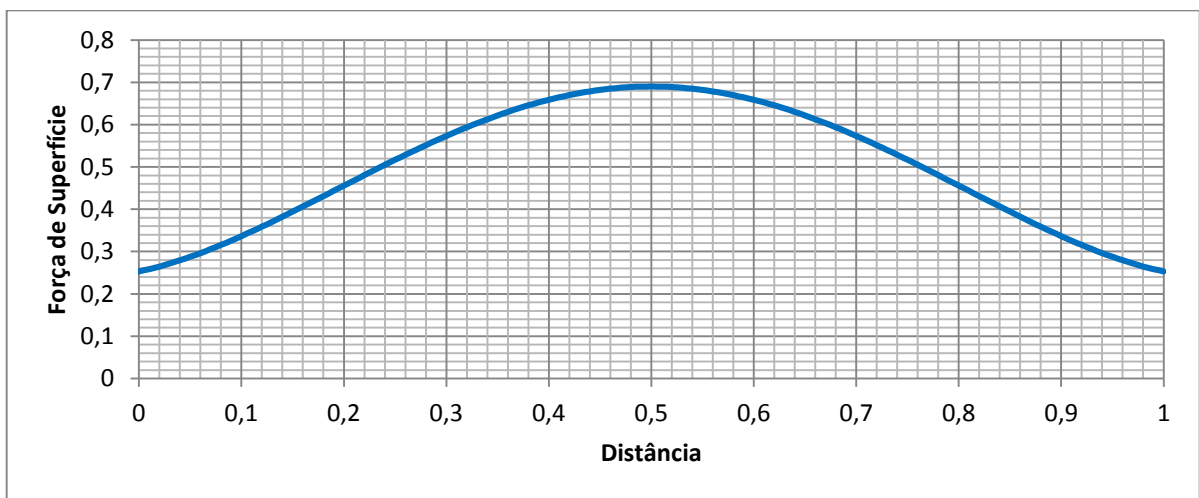
#### 6.4.2. Análise das forças de superfície

Para a avaliação das forças de superfície, considerou-se todo o domínio, sendo discretizado conforme mostrado na tabela 6-1. As malhas possuem nós duplos nas pontas. As dimensões da barra é de comprimento unitário com altura igual a meio, considerando-se o estado plano de tensão. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. Todos os elementos de contorno possuem o mesmo comprimento ao longo das faces das malhas utilizadas. Os elementos das faces da direita e esquerda possuem a metade do comprimento que os elementos da face superior e inferior.

Avalia-se as forças de superfície obtidas na face inferior para comparar a perfor-

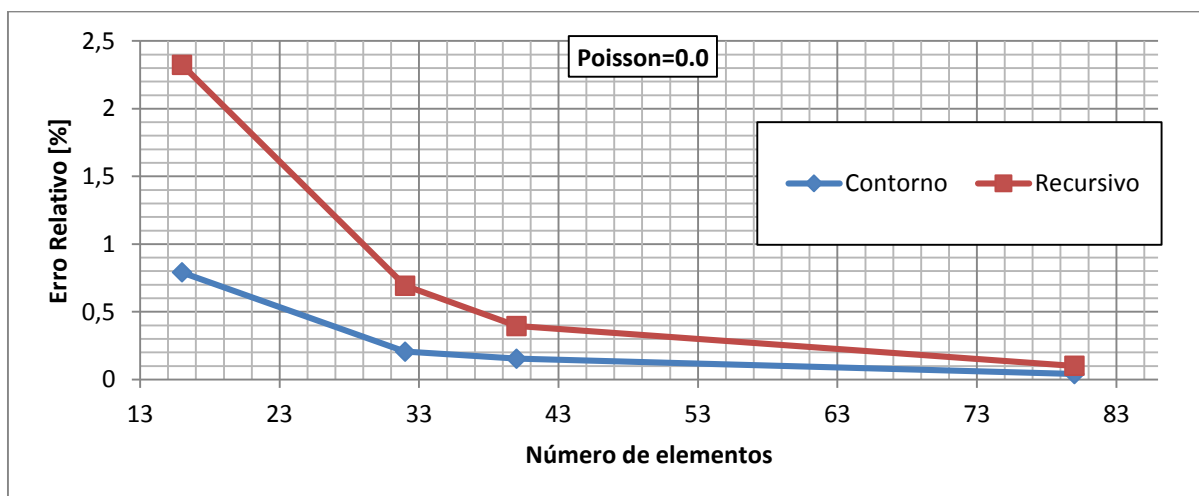
mance do procedimento normal com o recursivo. O erro relativo adotado será avaliado com o valor de referência mostrado na subseção anterior. O perfil de carregamento vertical na face inferior obtido pela malha refinada está mostrado no gráfico 6-43. O valor de Poisson adotado nesse gráfico é de 0.5, porém não se observa diferenças significativas no perfil obtido pelo método numérico. De qualquer forma, as comparações de cada valor de Poisson foram feitas com valores de referências com os valores de Poisson correspondentes. Assim para análises com Poisson igual a zero, o valor de Poisson adotado na referência foi igual a zero e assim por diante.

**Gráfico 6-43: Perfil de carregamento vertical na face inferior.**

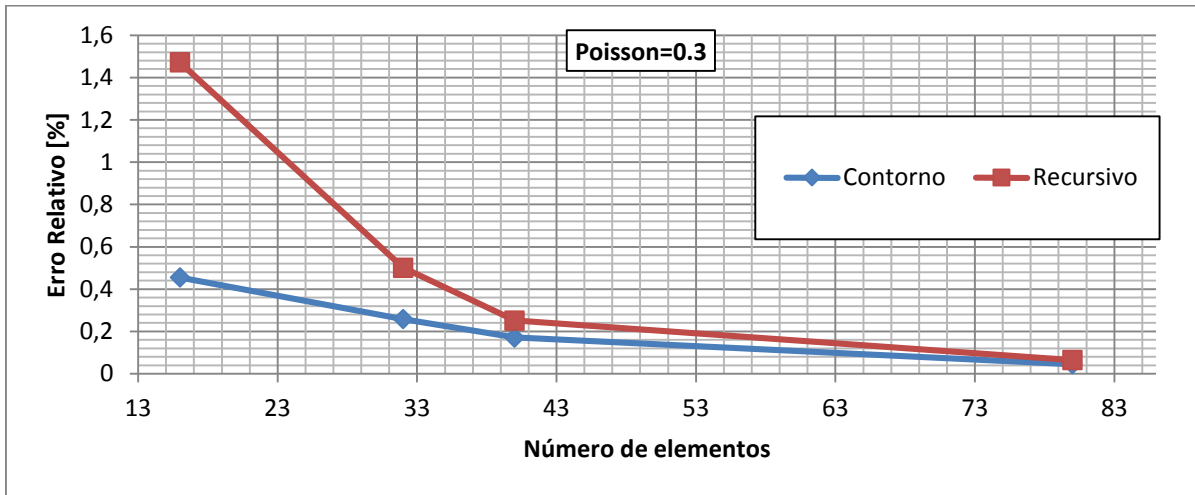


Os gráficos 6-44 a 6-46 foram traçados com a média dos erros relativos calculados com os nós convencionais e os pontos recursivos. Os valores utilizados para esses gráficos estão expostos nas tabelas 6-8 a 6-10.

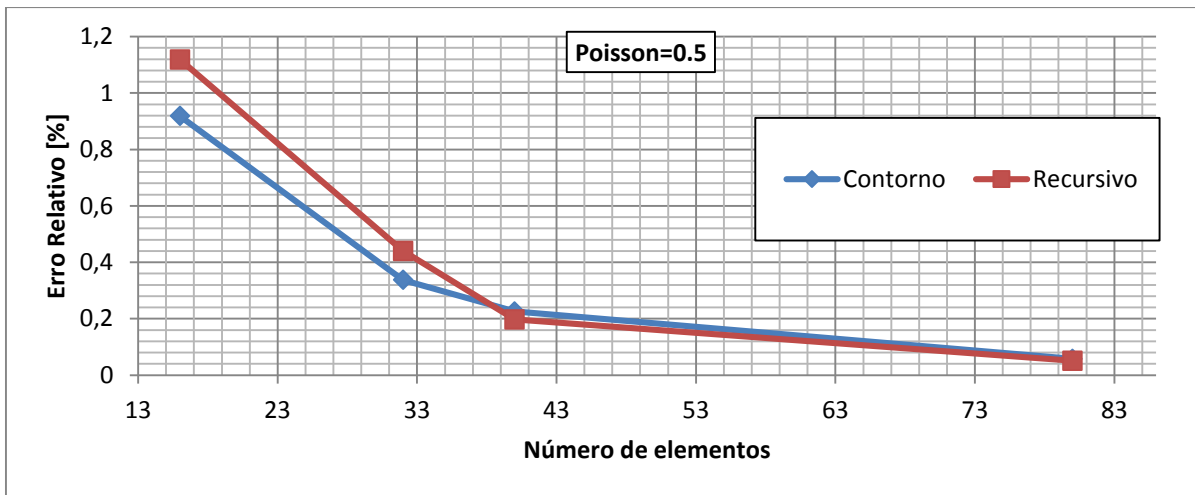
**Gráfico 6-44: Erro relativo com Poisson=0.0**



**Gráfico 6-45: Erro relativo com Poisson=0.3**



**Gráfico 6-46: Erro relativo com Poisson=0.5**



**Tabela 6-8: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0**

Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	0.79	2.32
32	0.21	0.69
40	0.15	0.40
80	0.04	0.10

**Tabela 6-9: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3**

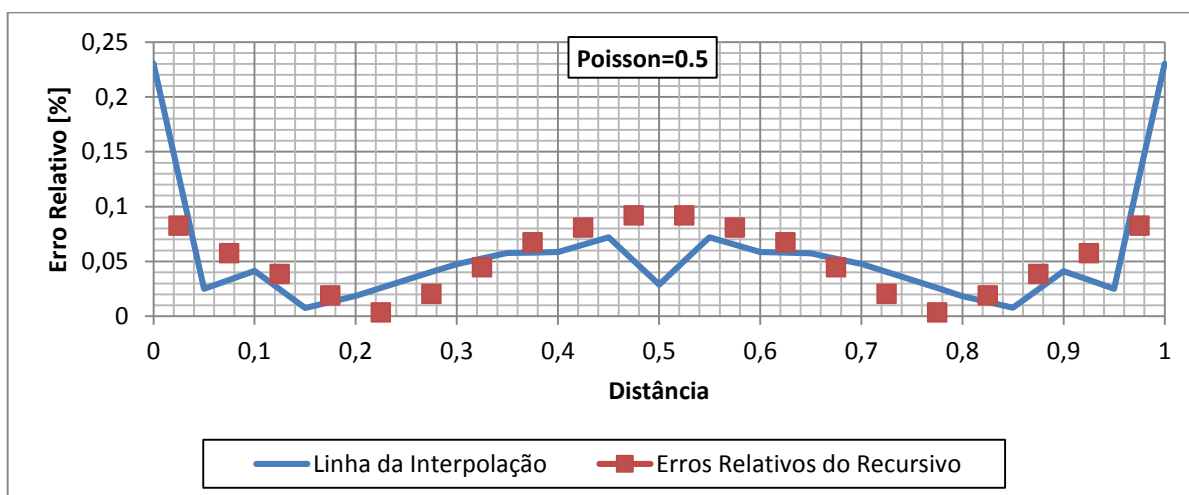
Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	0.46	1.47
32	0.26	0.50
40	0.17	0.25
80	0.04	0.06



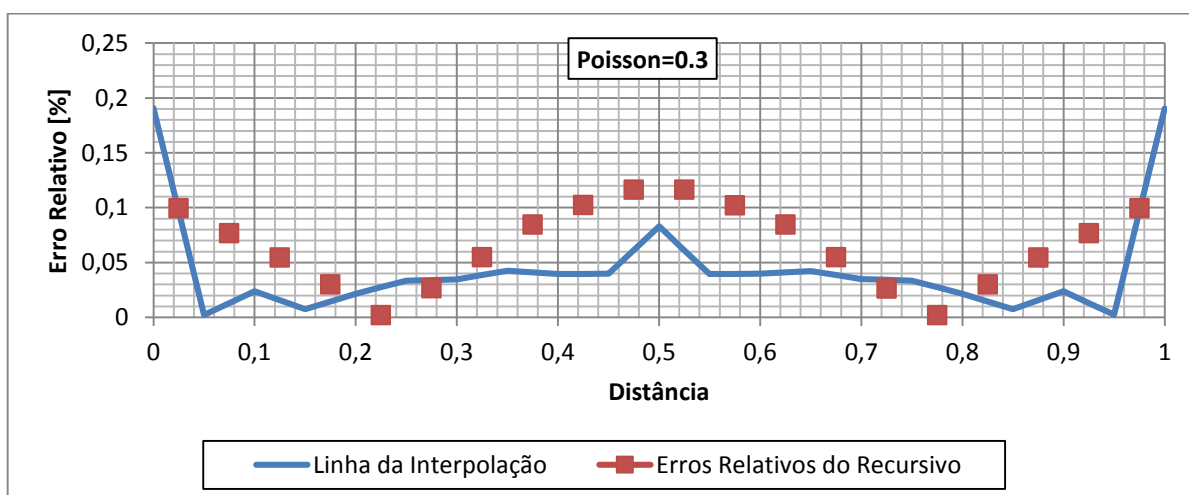
Tabela 6-10: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5		
Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	0.92	1.12
32	0.34	0.44
40	0.22	0.20
80	0.058	0.05

Pode-se notar a partir dos gráficos 6-44 a 6-46 que o erro relativo para o procedimento recursivo é, na média, maior do que no processo normal do método dos elementos de contorno. Um exame mais detalhado é possível através dos gráficos 6-47 a 6-58.

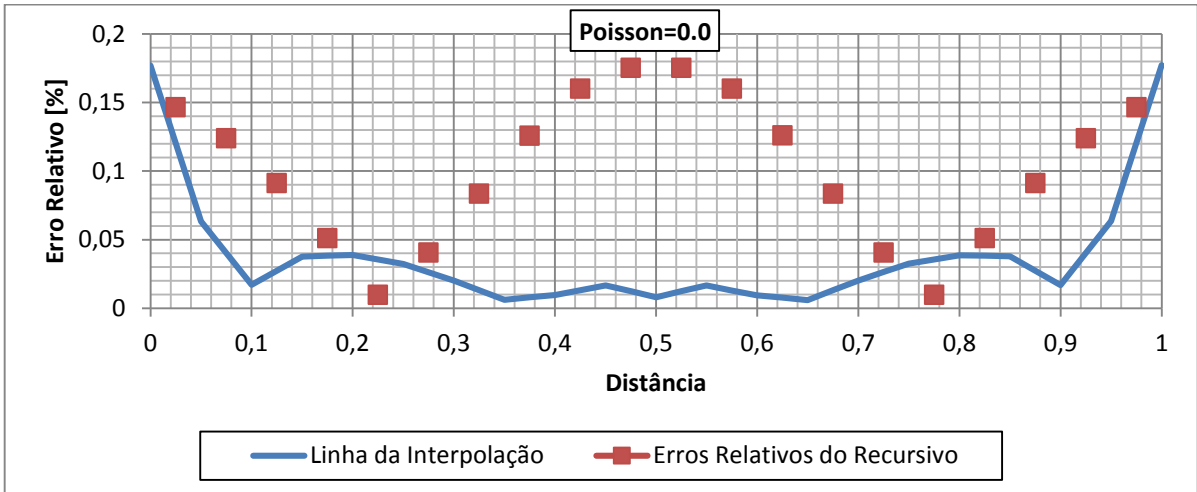
**Gráfico 6-47: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



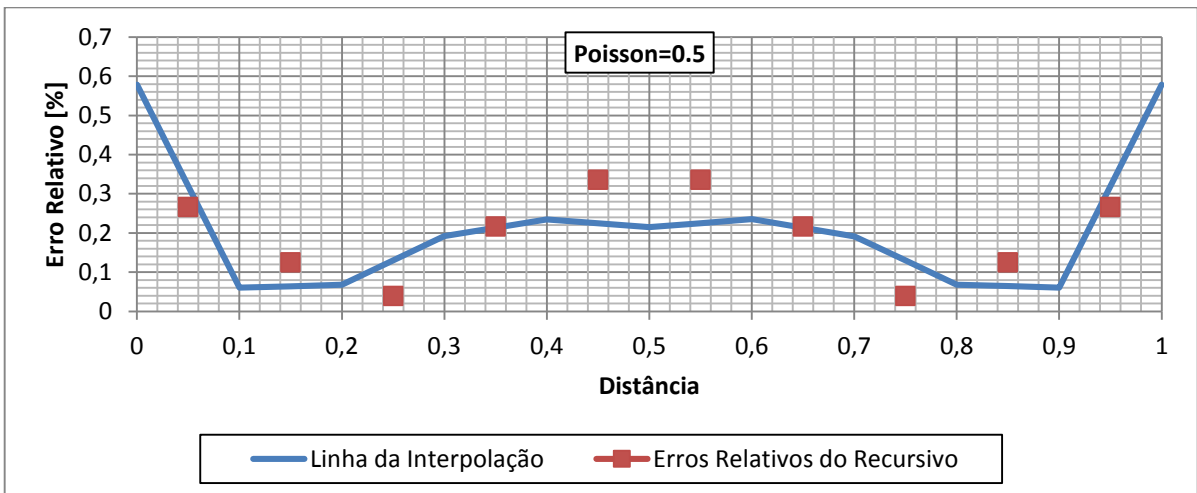
**Gráfico 6-48: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



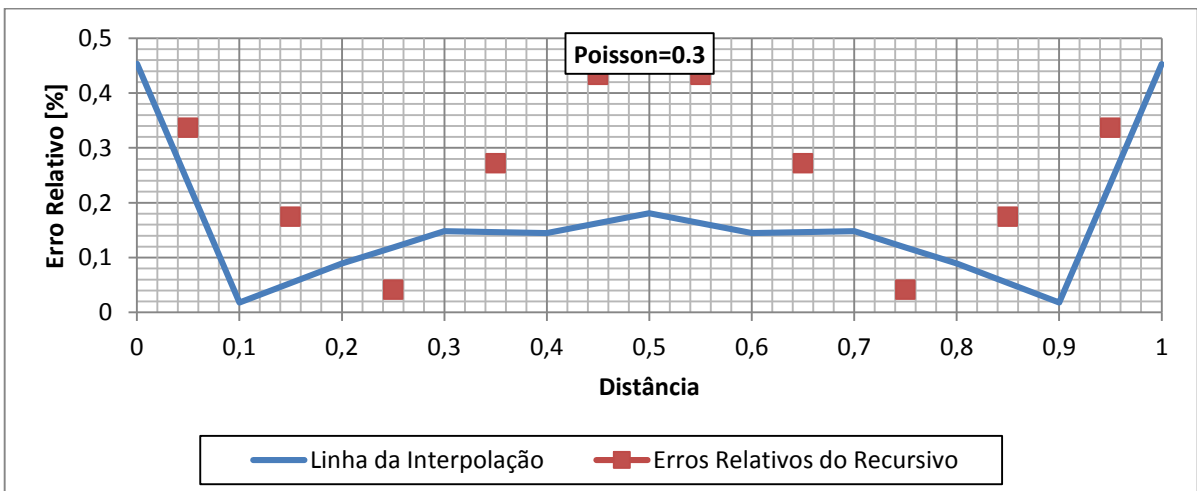
**Gráfico 6-49: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



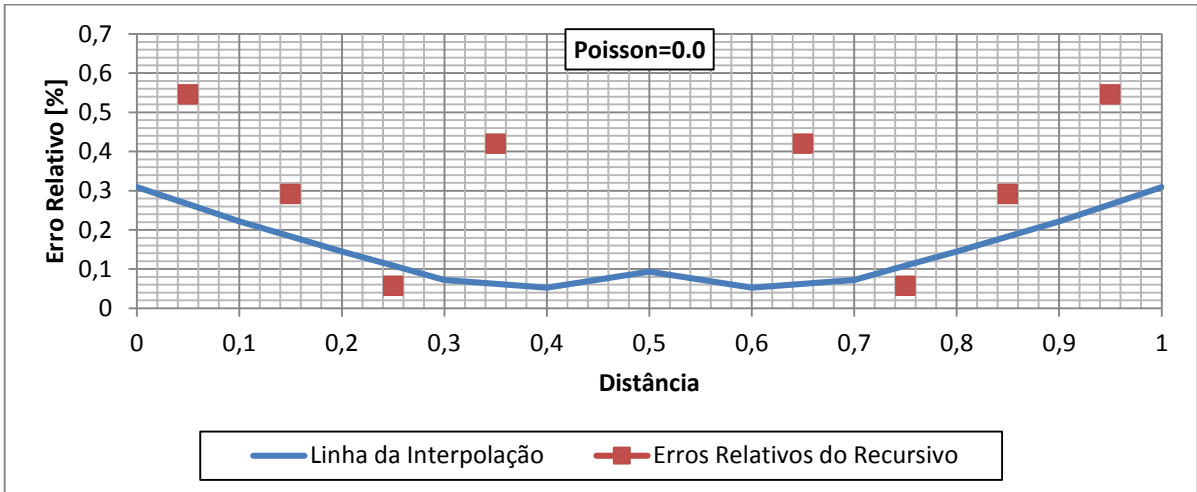
**Gráfico 6-50: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



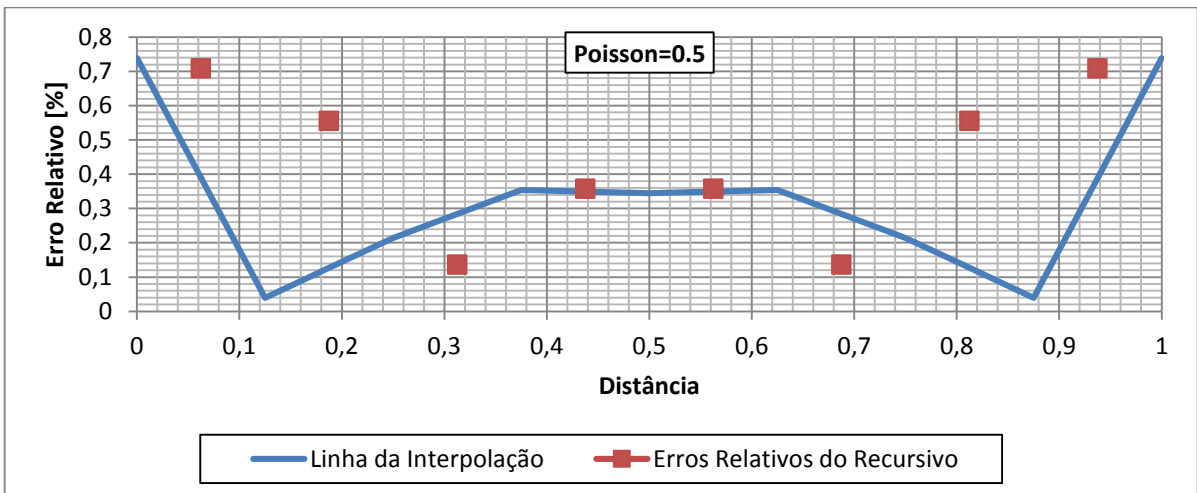
**Gráfico 6-51: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



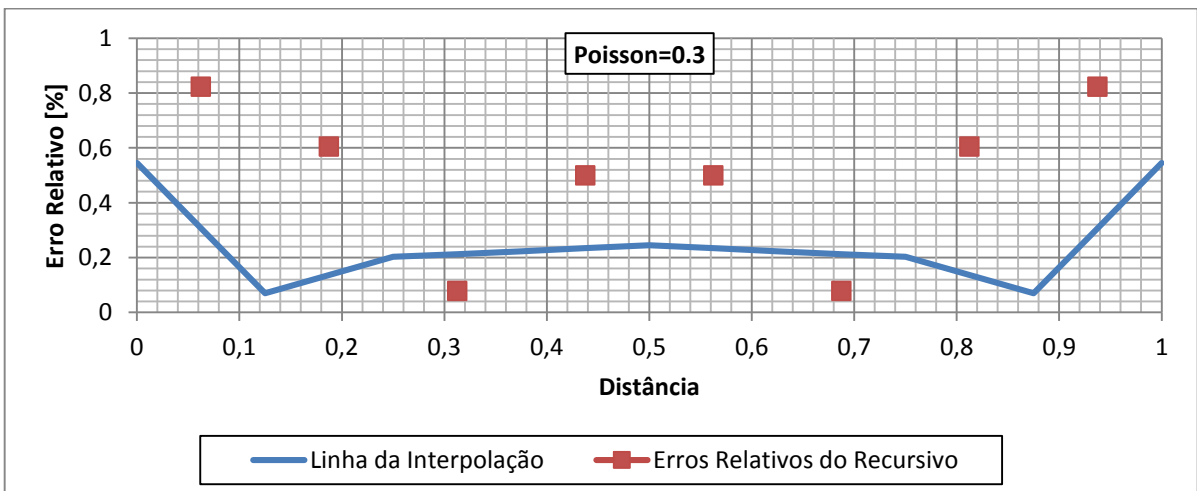
**Gráfico 6-52: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



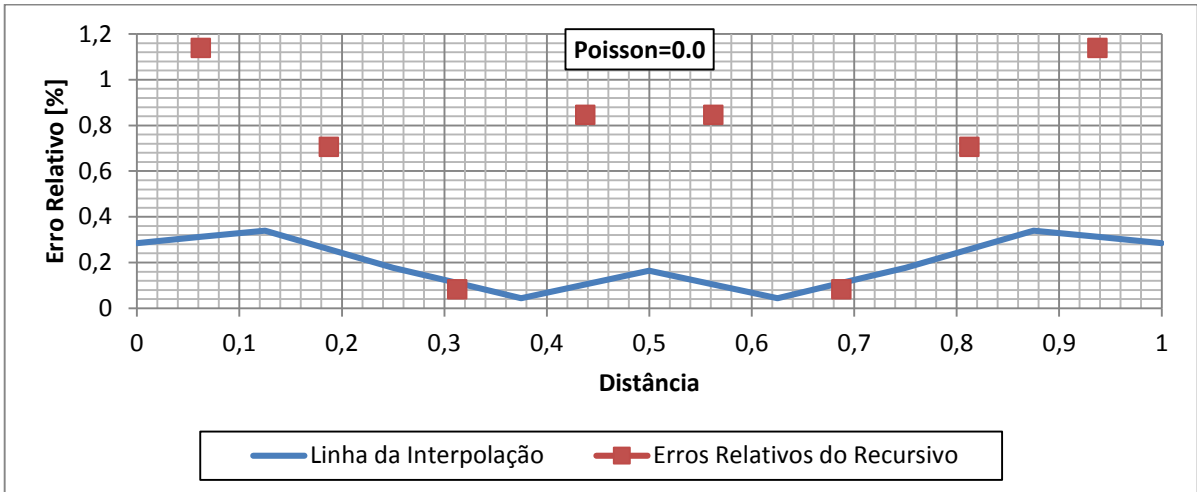
**Gráfico 6-53: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



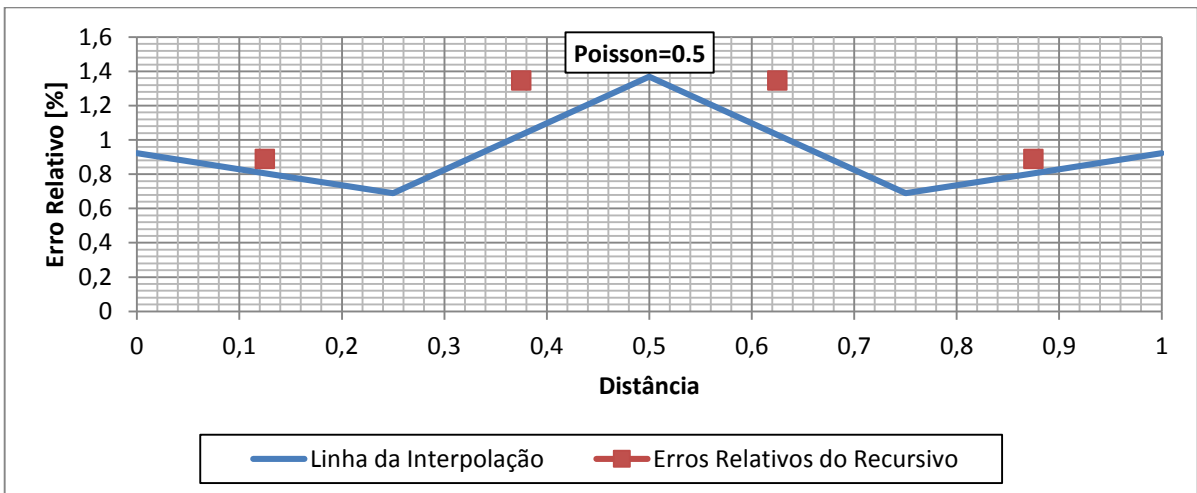
**Gráfico 6-54: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



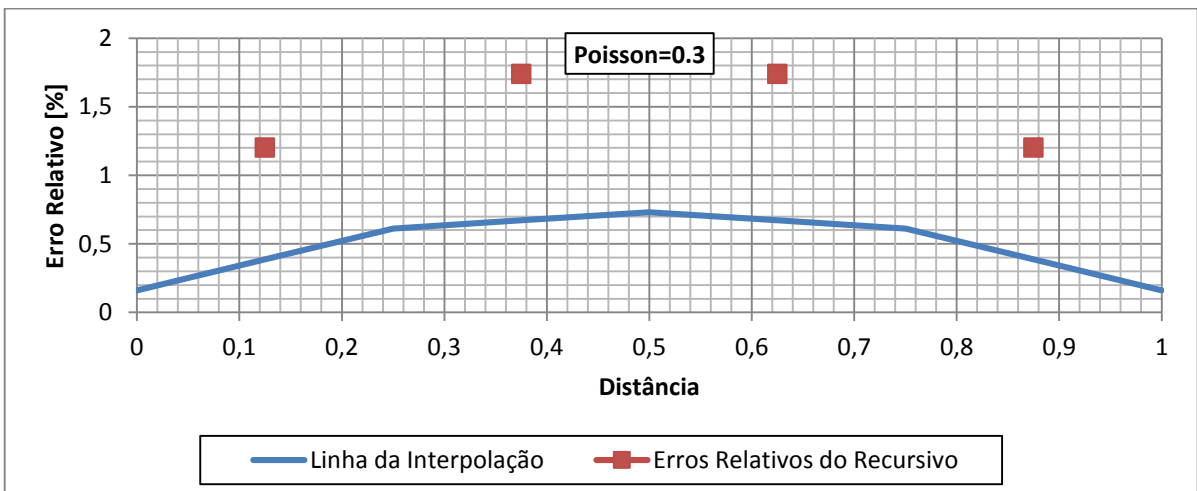
**Gráfico 6-55: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



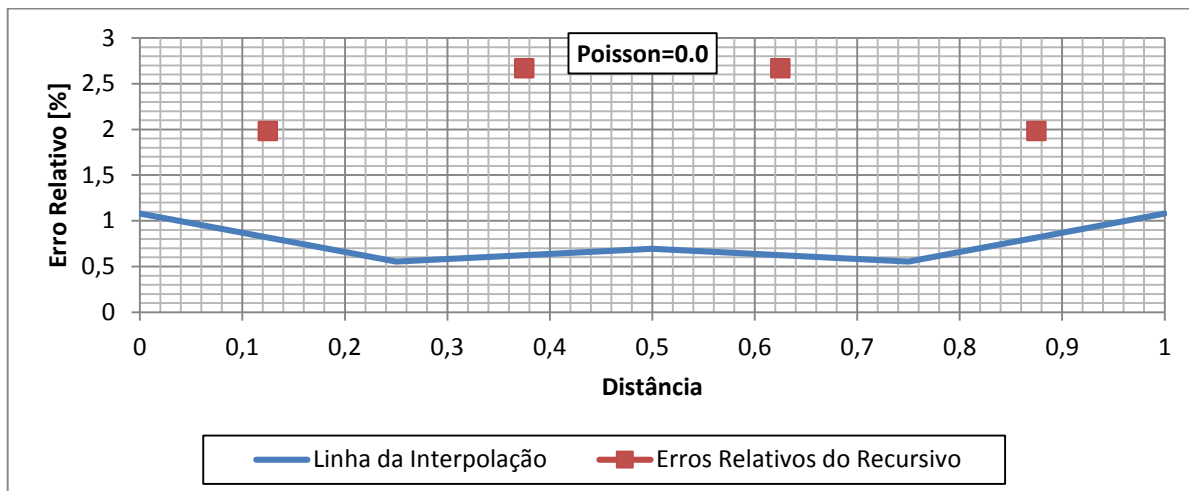
**Gráfico 6-56: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-57: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



**Gráfico 6-58: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



Na abscissa dos gráficos acima, distância se refere à distância em relação à face direita. O valor correspondente a um, então, se refere a um ponto no canto da face esquerda propriamente dita.

Comparando os gráficos 6-47 a 6-58 com os resultados observados no gráfico 6-43 é possível notar que nas regiões de 0,2 a 0,3 e de 0,7 a 0,8 o erro relativo do procedimento recursivo é menor que a interpolação dos erros relativos do procedimento normal. Nessas regiões se observa um maior valor de variação entre uma força de superfície e sua imediata subsequente.

Nas seções 6.2 e 6.3 notou-se que essa variação era constante visto que o padrão de carregamento era fortemente linear, condição comprovada com o fator de correlação de Pearson. No problema atualmente estudado essa variação se altera ao longo da face inferior, sendo possível notar que apenas quando a variação apresenta valores altos que o procedimento recursivo se mostra eficaz quanto ao ganho de precisão.

## 6.5. Barra carregada com força de superfície concentrada

### 6.5.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado

Será analisado nessa sessão uma barra submetida a um esforço concentrado no meio da mesma. De acordo com a concepção do programa, essa força de superfície concentrada terá um perfil triangular agudo. A pressão que essa força exerce possui intensidade unitária, ou seja, sua área sempre apresentara um valor igual a um. A face inferior é fixada completamente apenas na extremidade esquerda, ficando o seu restante com deslocamento vertical prescrito igual a zero. A figura 6-7 ilustra o que foi descrito nesse parágrafo.

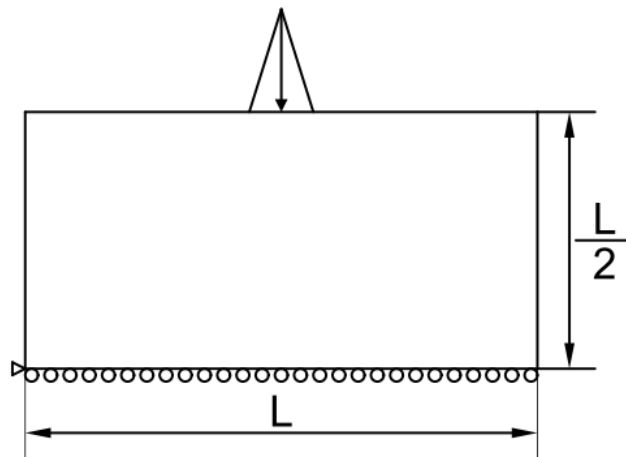


Figura 6-7: Barra carregada com esforço concentrado de perfil triangular agudo.

O problema assim descrito possui uma simetria no meio da barra, situação que será aproveitada na obtenção do valor de referência, conforme será descrito adiante. Para as dimensões da barra, será utilizada uma altura correspondente a metade do comprimento. O estado plano de tensões foi considerado e as propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, serão impostas como unitárias.

Não será utilizada na situação analisada nessa subseção uma solução analítica como referência. Ao invés disso, uma saída de elemento de contorno refinada será adotada como referência. Da mesma forma que na subseção anterior, a malha utilizada possui 404 nós, com valores de deslocamento horizontais e verticais nulos prescritos nas faces direita e inferior, respectivamente.

A prescrição de deslocamento horizontal nulo na face direita corresponde a uma simplificação de simetria gerada pelas condições do problema analisado. Assim, pode-se ilustrar o sistema estudado como referência segundo a figura 6-8.

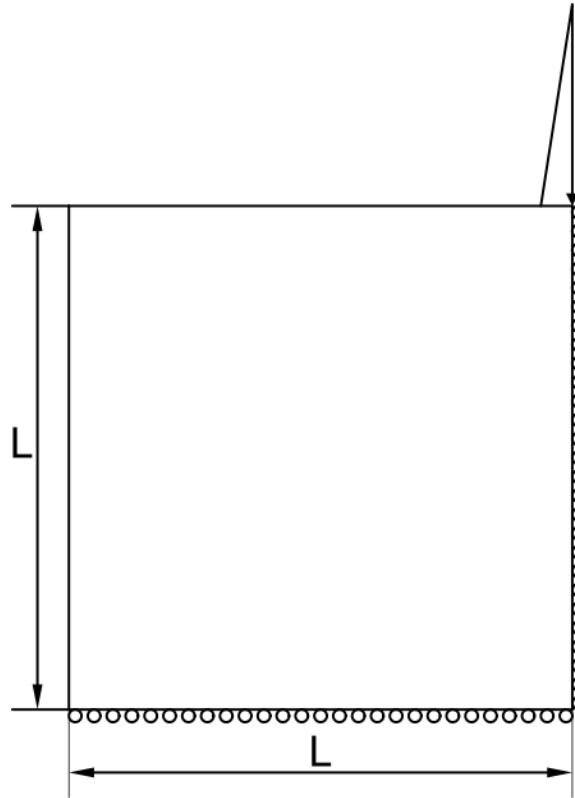


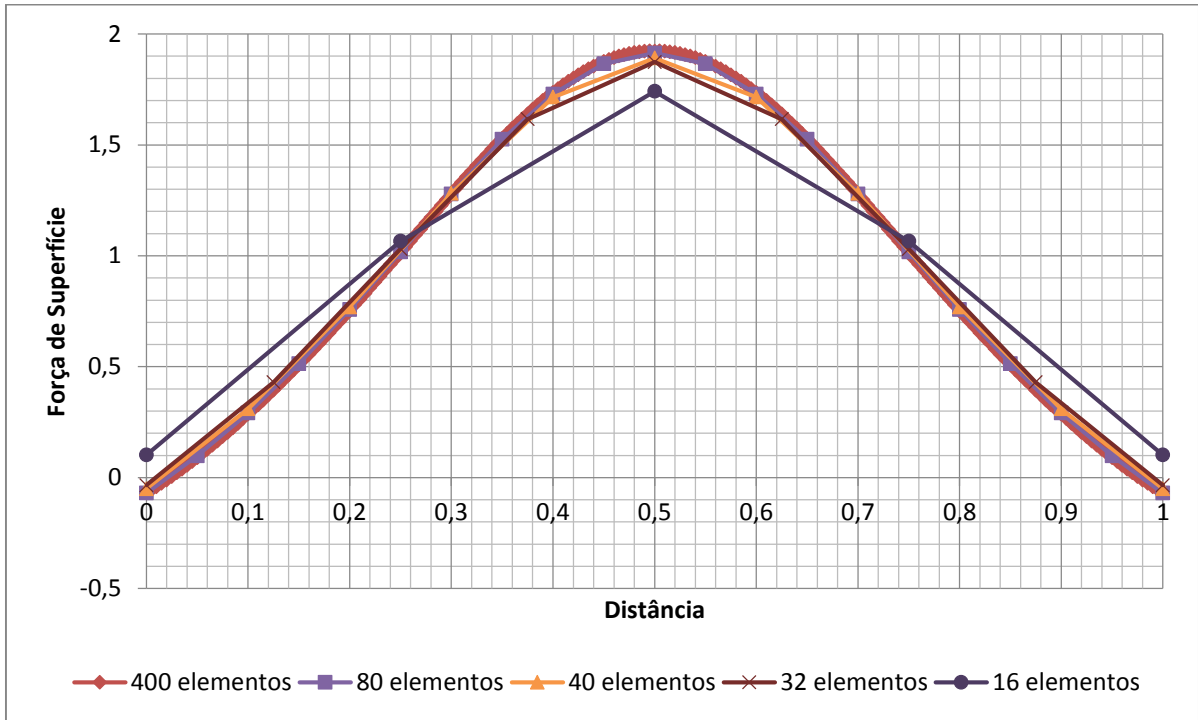
Figura 6-8: Sistema utilizado como referência na análise de precisão.

Os valores obtidos pela malha refinada são replicados para o outro lado do problema estudado e assim utilizados na análise de precisão.

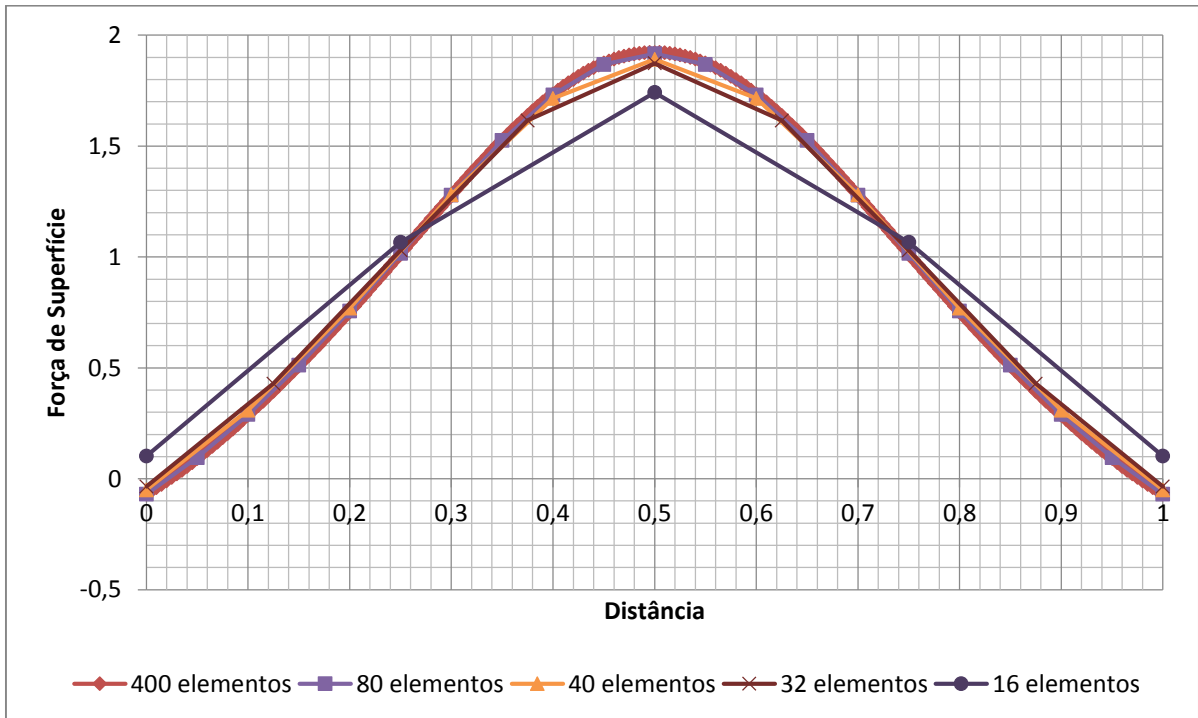
Deve-se destacar que a solução deste problema possui erros relativos ao esforço prescrito. Malhas finas apresentaram um perfil triangular mais agudo que suas versões menos refinadas. Com o intuito de comparar as diferenças dos resultados obtidos na face inferior, os perfis resultantes das malhas foram plotados nos gráficos 6-59, 6-60 e 6-61.

Nota-se que o coeficiente de Poisson não afeta significativamente o perfil apresentado pelos resultados. O refino das malhas aproxima o perfil resultante com os valores que foram utilizados como referência.

**Gráfico 6-59: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.0**

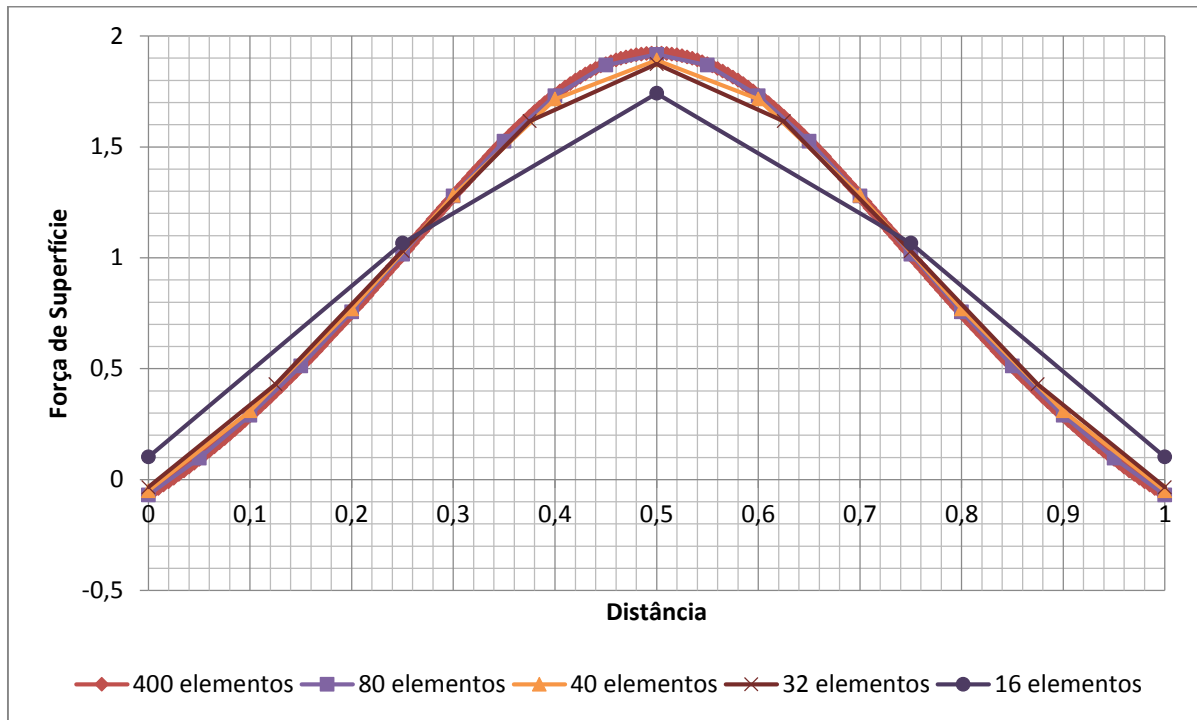


**Gráfico 6-60: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.3**





**Gráfico 6-61: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.5**



### 6.5.2. Análise das forças de superfície

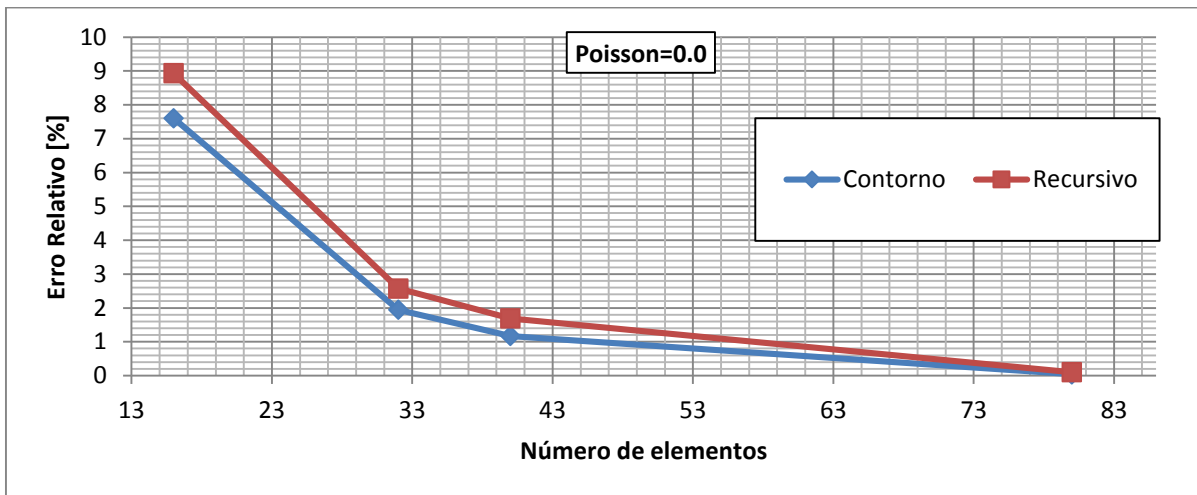
Para a avaliação das forças de superfície, considerou-se todo o domínio sendo discretizado conforme mostrado na tabela 6-1. As malhas possuem nós duplos nas pontas. As dimensões da barra é de comprimento unitário com altura igual a meio. Considera-se o estado plano de tensão. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. Todos os elementos de contorno possuem o mesmo comprimento ao longo das faces das malhas utilizadas. Os elementos das faces da direita e esquerda possuem a metade do comprimento que os elementos da face superior e inferior.

Avalia-se as forças de superfície obtidas na face inferior para comparar o desempenho do procedimento normal com o recursivo. O erro relativo adotado será avaliado com o valor de referência mostrado na subseção anterior. O perfil de carregamento vertical na face inferior obtido pela malha refinada foi mostrado anteriormente nos

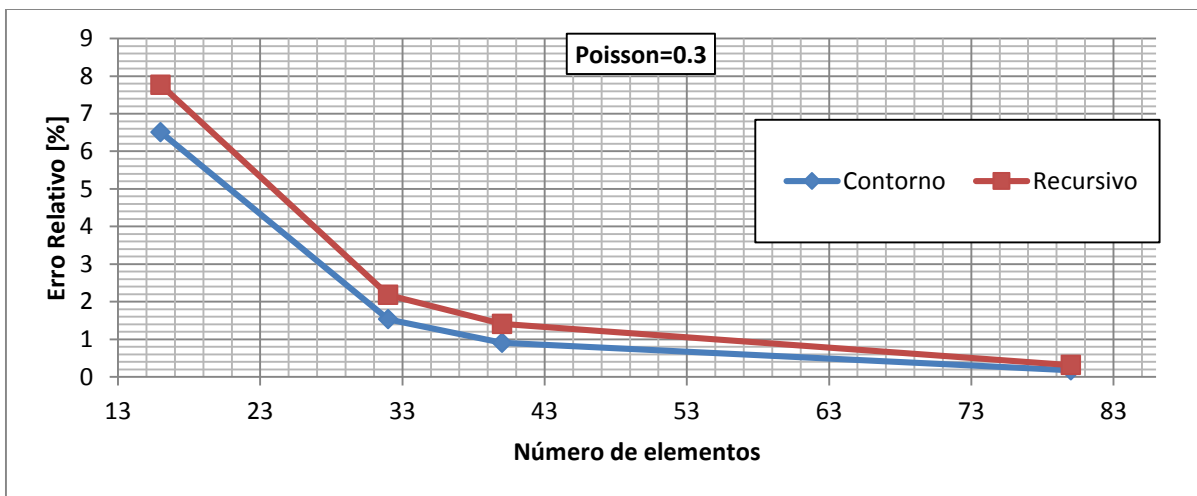
gráficos 6-59, 6-60 e 6-61.

Os gráficos 6-62 a 6-64 foram traçados com a média dos erros relativos calculados com os nós convencionais e os pontos recursivos. Os valores utilizados para esses gráficos estão expostos nas tabelas 6-11 a 6-13.

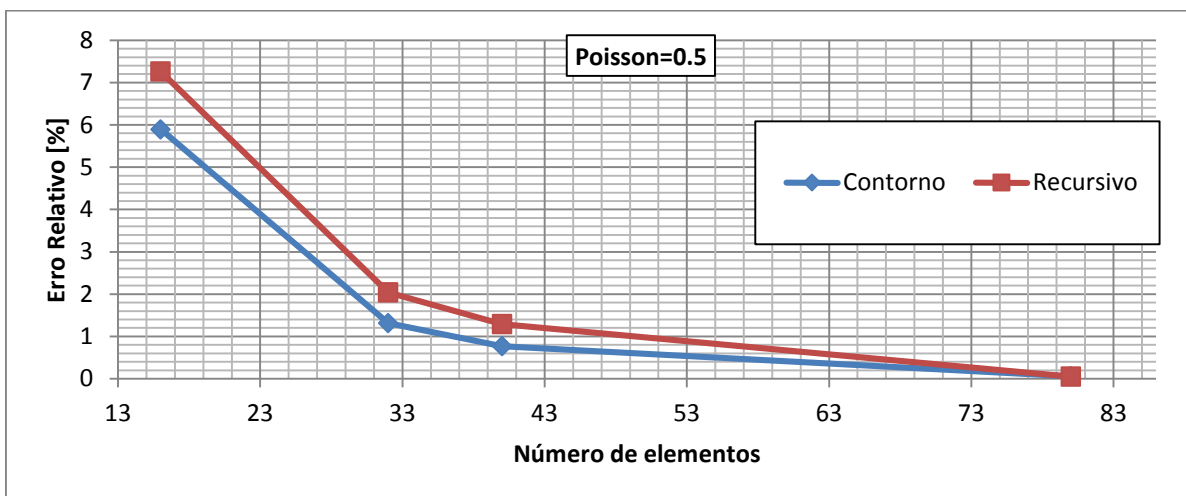
**Gráfico 6-62: Erro relativo com Poisson=0.0**



**Gráfico 6-63: Erro relativo com Poisson=0.3**



**Gráfico 6-64: Erro relativo com Poisson=0.5**



**Tabela 6-11: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0**

Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	7.61	8.94
32	1.95	2.57
40	1.17	1.69
80	0.041	0.10

**Tabela 6-12: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3**

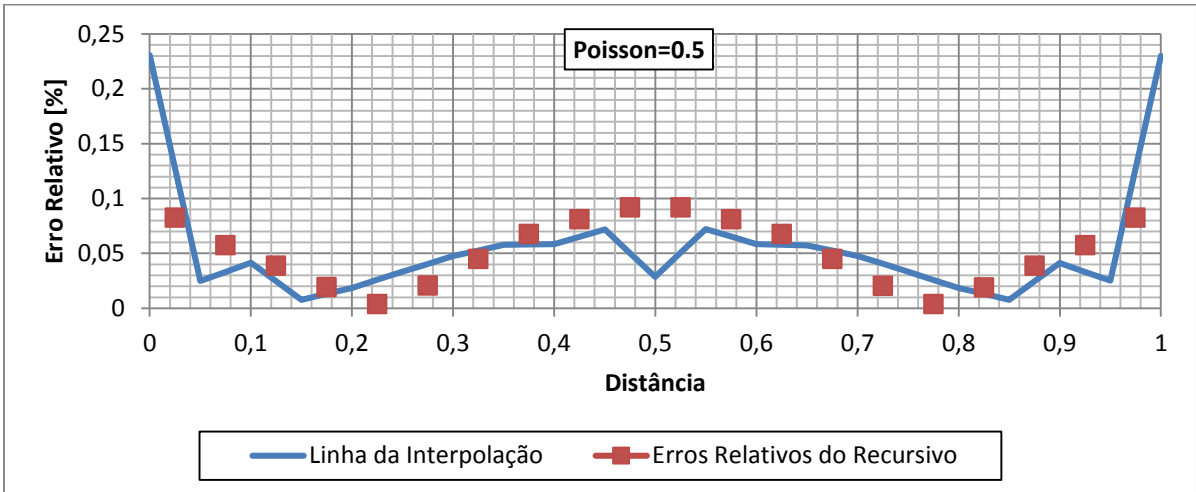
Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	6.51	7.77
32	1.53	2.18
40	0.91	1.41
80	0.17	0.32

**Tabela 6-13: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5**

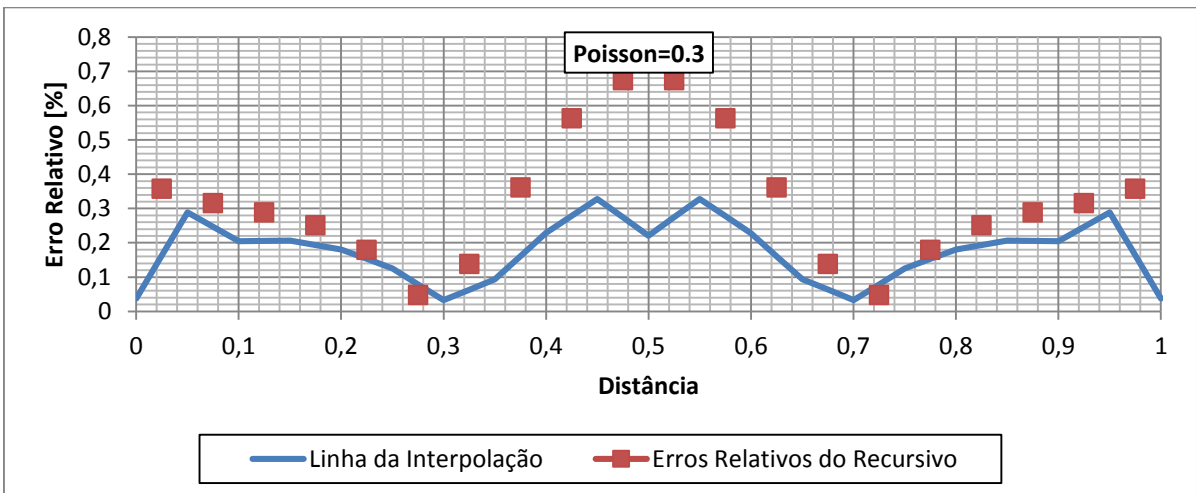
Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	5.90	7.26
32	1.32	2.04
40	0.77	1.29
80	0.06	0.05

Da mesma forma que foi observado na seção 6.4, pode-se notar a partir dos gráficos 6-62 a 6-64 que o erro relativo para o procedimento recursivo é, na média, inferior ao processo normal do método dos elementos de contorno. Um exame mais detalhado é possível através dos gráficos 6-65 a 6-76.

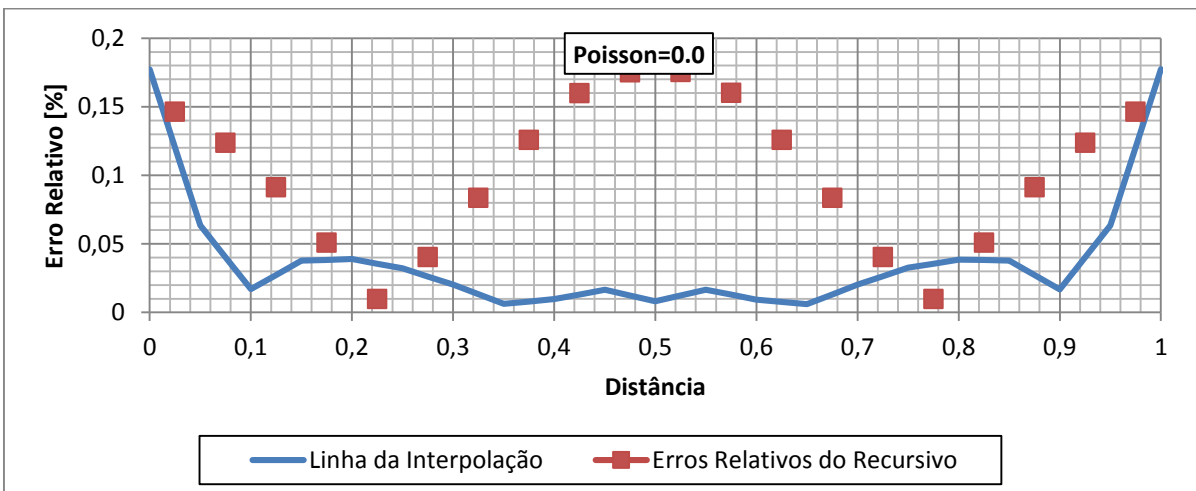
**Gráfico 6-65: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



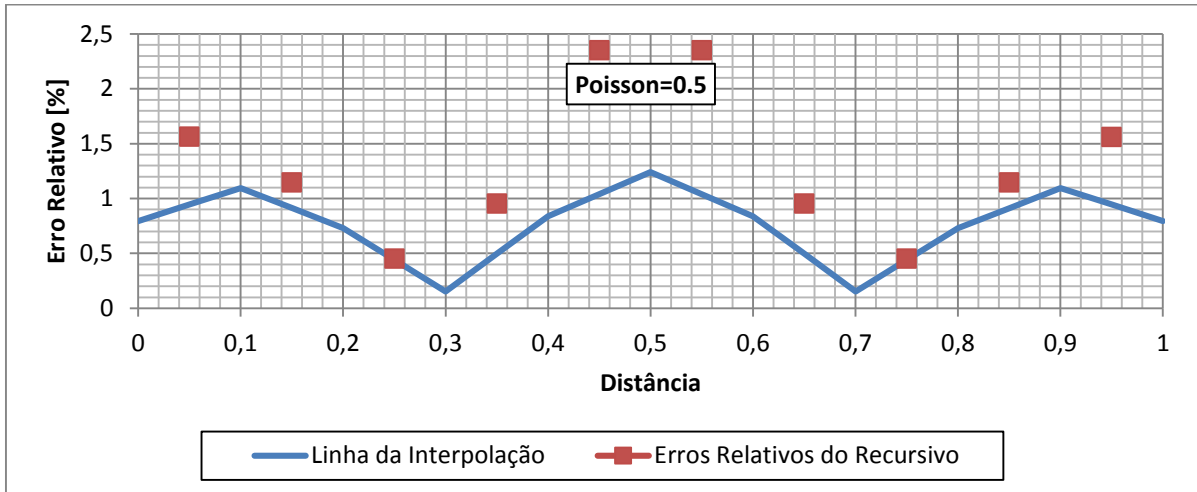
**Gráfico 6-66: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



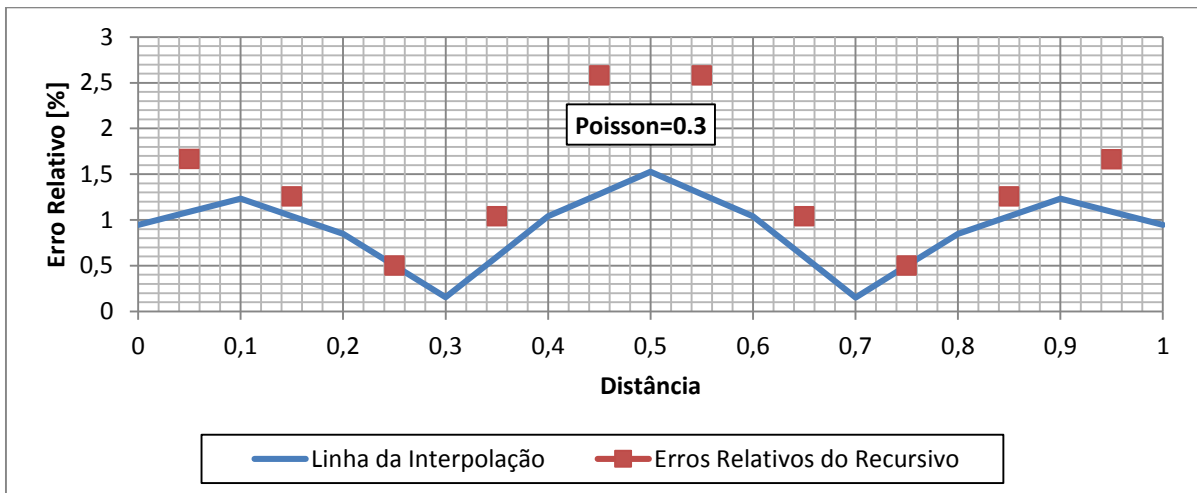
**Gráfico 6-67: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



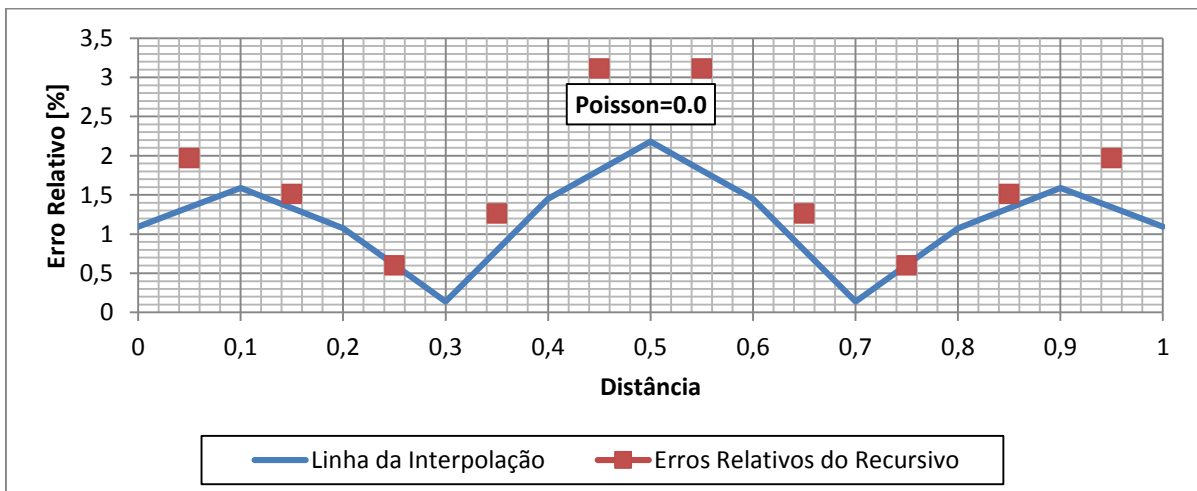
**Gráfico 6-68: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



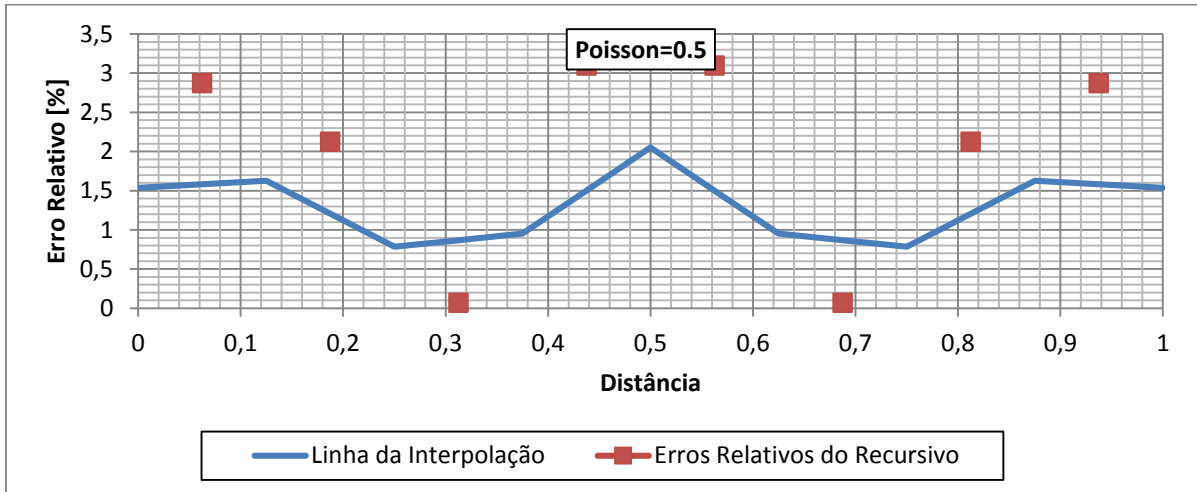
**Gráfico 6-69: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



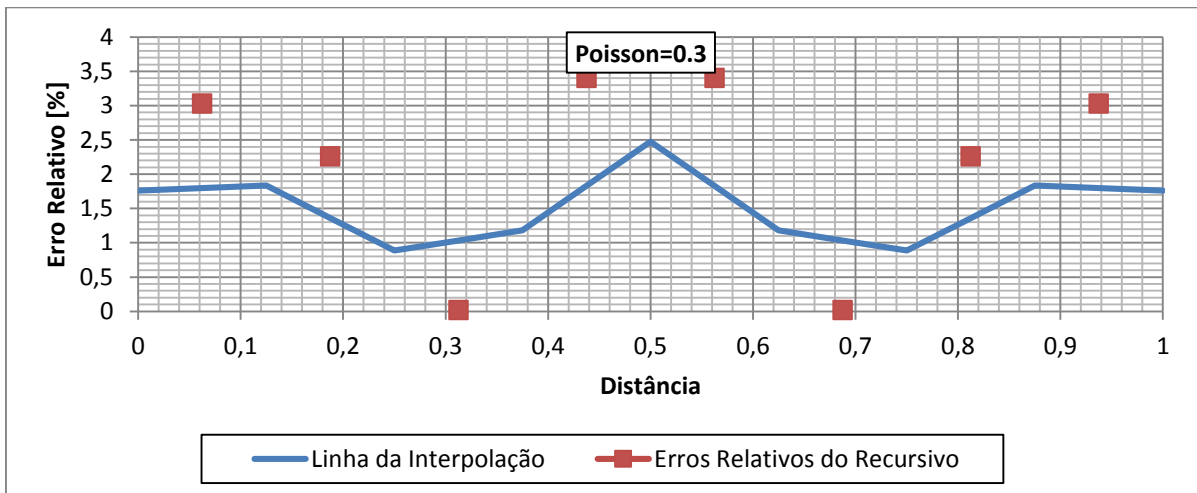
**Gráfico 6-70: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



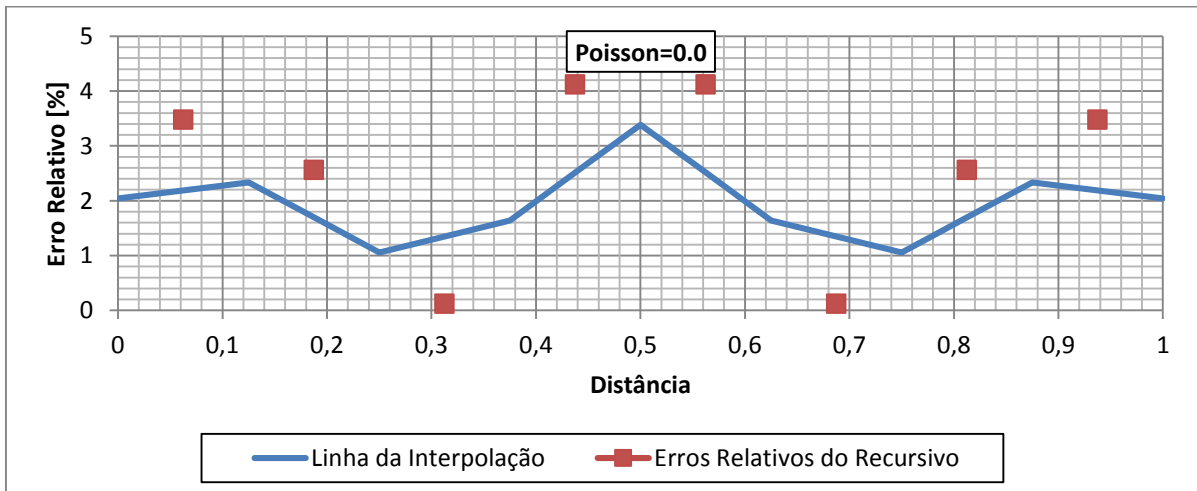
**Gráfico 6-71: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



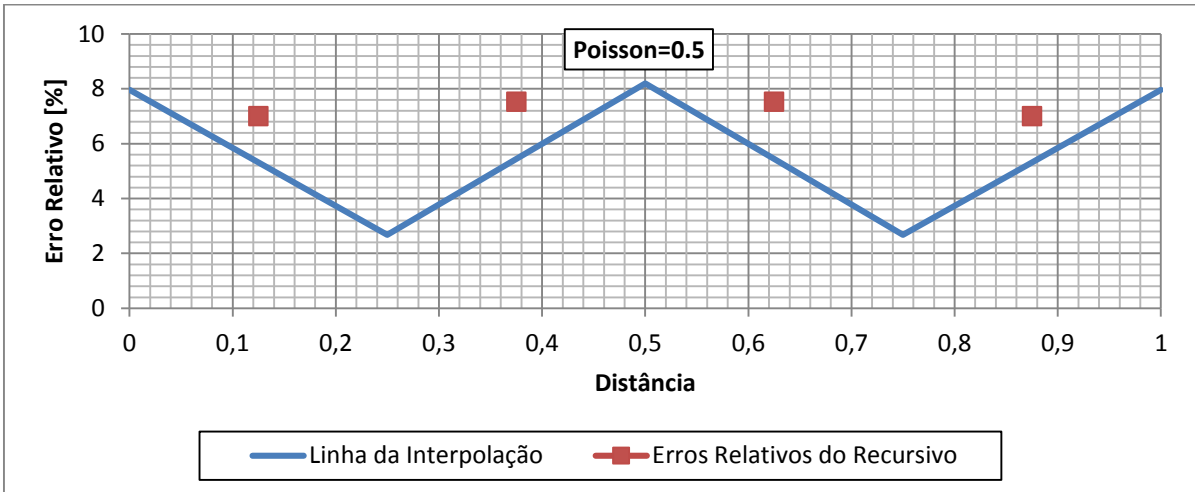
**Gráfico 6-72: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



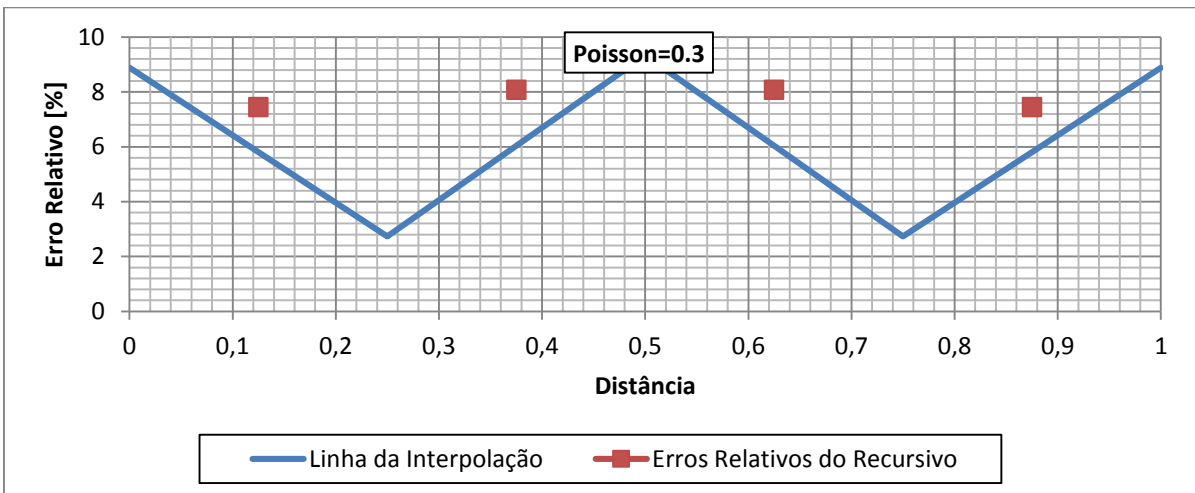
**Gráfico 6-73: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



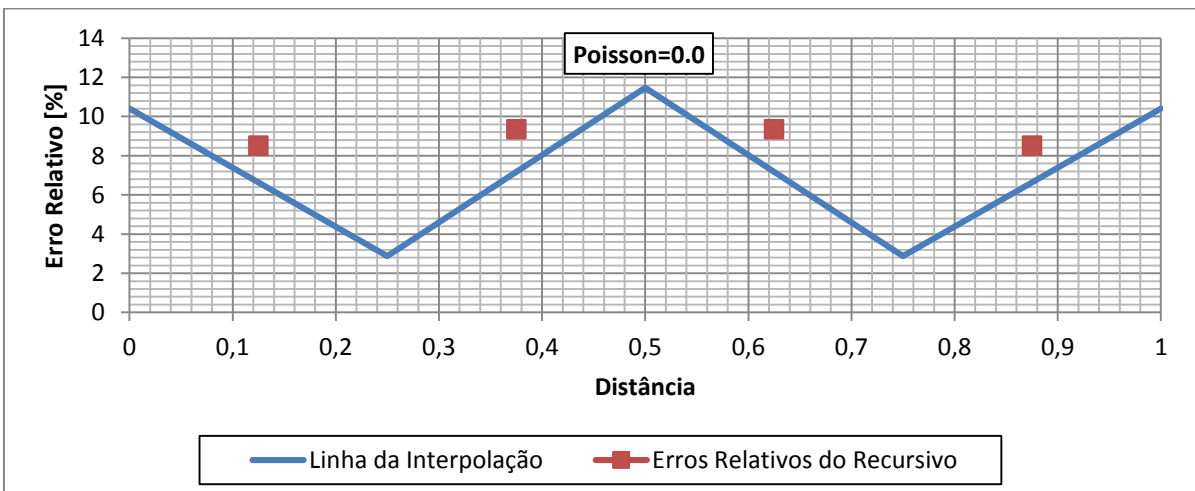
**Gráfico 6-74: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-75: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



**Gráfico 6-76: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



Comparando os gráficos 6-65 a 6-76 com os resultados observados nos gráficos 6-59 a 6-61 é possível notar que há algumas regiões em que o erro relativo do procedimento recursivo é menor que a interpolação dos erros relativos do procedimento normal. Isso também foi observado na seção 6.4. Porém existe uma ligeira diferença entre os resultados obtidos aqui e os obtidos na seção anterior.

Em ambas as extremidades de todos os gráficos acima pode-se notar que os erros relativos do procedimento recursivo estão mais próximos da linha de interpolação. Comparando o gráfico 6-43 com os gráficos 6-59, 6-60 e 6-61 nota-se que a variação dos valores nas extremidades observados na presente seção são maiores que o da seção anterior.

No meio, onde as variações são pequenas e onde também se encontra o valor máximo observado para a face inferior, os erros relativos do método recursivo estão mais distantes da linha de interpolação.

## **6.6. Barra carregada com compressão linear e fixação rígida**

### **6.6.1. Apresentação do problema e valor de referência utilizado**

O problema analisado nessa sessão é semelhante ao estudado na seção 6.4. Ele consiste de uma barra submetida a um esforço compressivo num formato triangular isósceles no qual possui intensidade máxima unitária. Porém, diferentemente do anterior, sua face inferior é fixada completamente em toda sua extensão, tanto na vertical quanto na horizontal. A figura 6-9 ilustra o que foi dito nesse parágrafo.



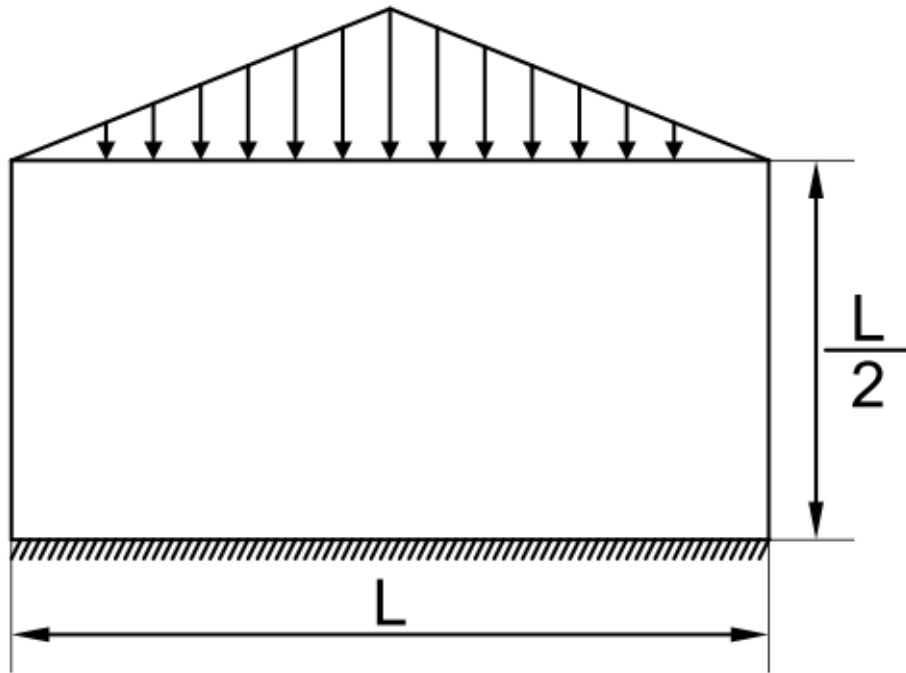


Figura 6-9: Barra carregada com esforço compressivo de perfil triangular e fixação completa na extremidade inferior.

Para a geometria, a altura total será correspondente a metade do comprimento. Será considerado o estado plano de tensões e as propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, serão impostas como unitárias.

Não será utilizada para situação analisada nessa seção uma solução analítica. Ao invés disso, uma saída de elemento de contorno refinada será adotada como referência. A malha utilizada possui 404 nós, com valores de deslocamento horizontais e verticais nulos prescritos na face inferior.

Não é possível aplicar a simplificação de simetria nesse problema por causa da fixação rígida, que possui efeitos que serão detalhados na seção subsequente.

### 6.6.2. Análise das forças de superfície

Para a avaliação das forças de superfície, considerou-se todo o domínio, sendo discretizado conforme mostrado na tabela 6-1. As malhas possuem nós duplos nas pontas. As dimensões da barra é de comprimento unitário com altura igual a meio,

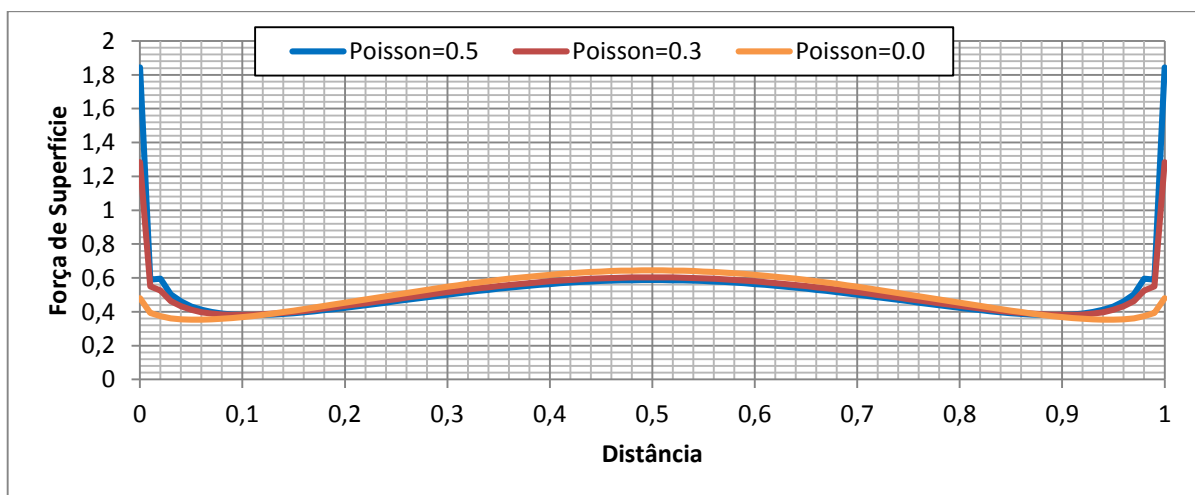
considerando-se o estado plano de tensão. Propriedades materiais, com exceção do coeficiente de Poisson, são prescritas como unitárias. Todos os elementos de contorno possuem o mesmo comprimento ao longo das faces das malhas utilizadas. Os elementos das faces da direita e esquerda possuem a metade do comprimento que os elementos da face superior e inferior.

Avalia-se as forças de superfície obtidas na face inferior para comparar a performance do procedimento normal com o recursivo. O erro relativo adotado será avaliado com o valor de referência obtido conforme subseção anterior.

Quanto ao perfil de carregamento vertical na face inferior obtido pela malha de referência, eles estão mostrados no gráfico 6-77. Nota-se que o coeficiente de Poisson interfere na intensidade do esforços das extremidades. Isso está relacionado ao impedimento do corpo se deformar no sentido perpendicular ao carregamento, o que gera forças nos cantos que crescem o quão mais se aumenta o refinamento.

Quanto menor o coeficiente de Poisson, menor serão os valores obtidos desse fenômeno, porém eles não se anulam quando o valor de Poisson é nulo. Esse fato é justificado pela solução fundamental de Kelvin, que avalia o deslocamento de uma direção causado pelo esforço de outra direção.

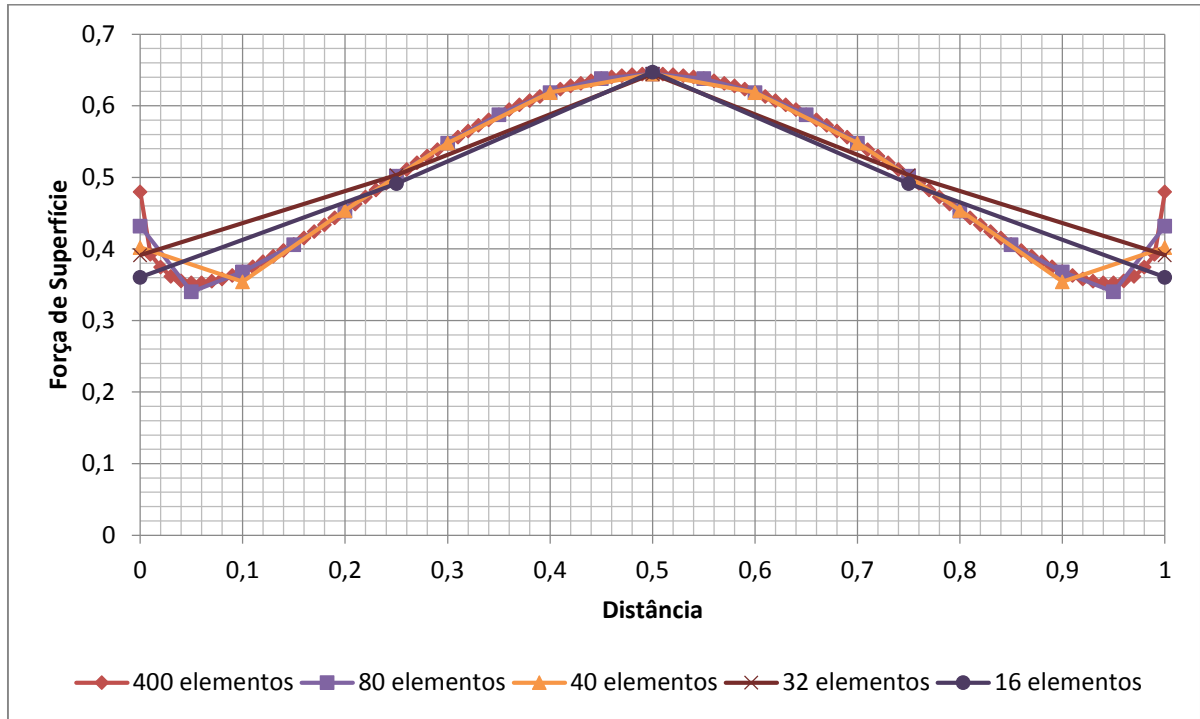
**Gráfico 6-77: Perfil de carregamento vertical na face inferior.**



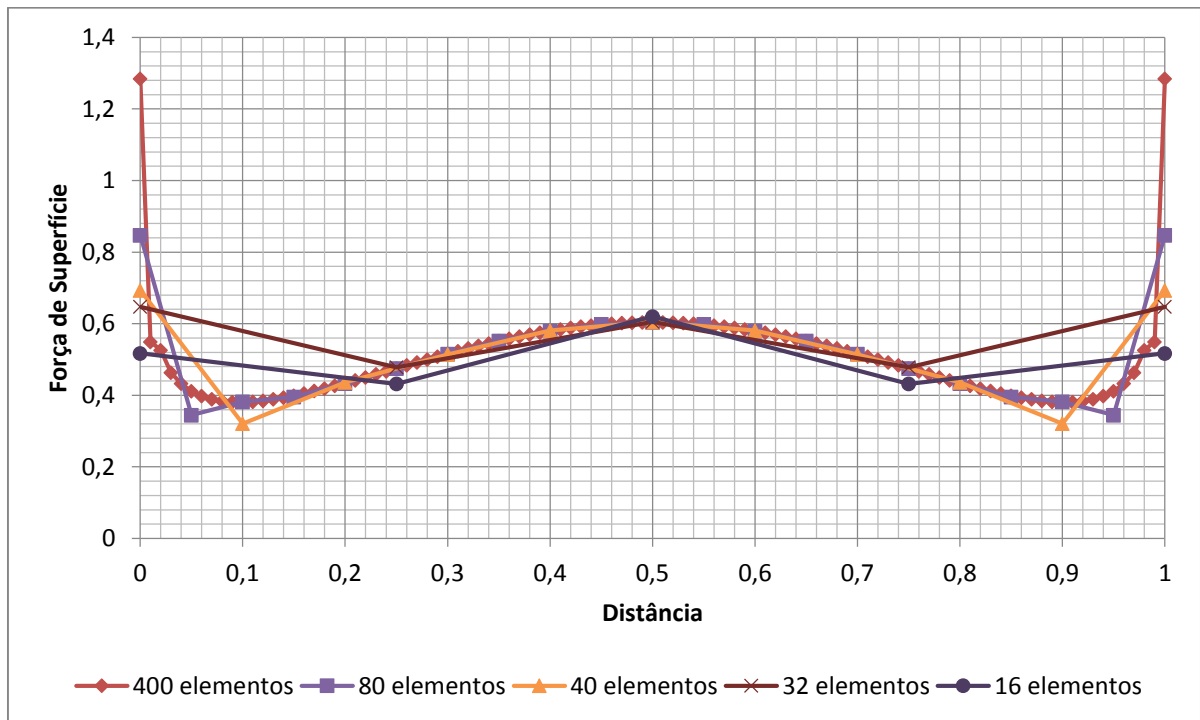
A fim de mostrar com clareza o que foi explicado nos parágrafos anteriores, os gráficos 6-78, 6-79 e 6-80 foram traçados. Nota-se que para o perfil de esforços observado no centro os valores não variam muito com o número de Poisson. Porém nas extremidades acontece um ganho de intensidade com o aumento do coeficiente de

Poisson.

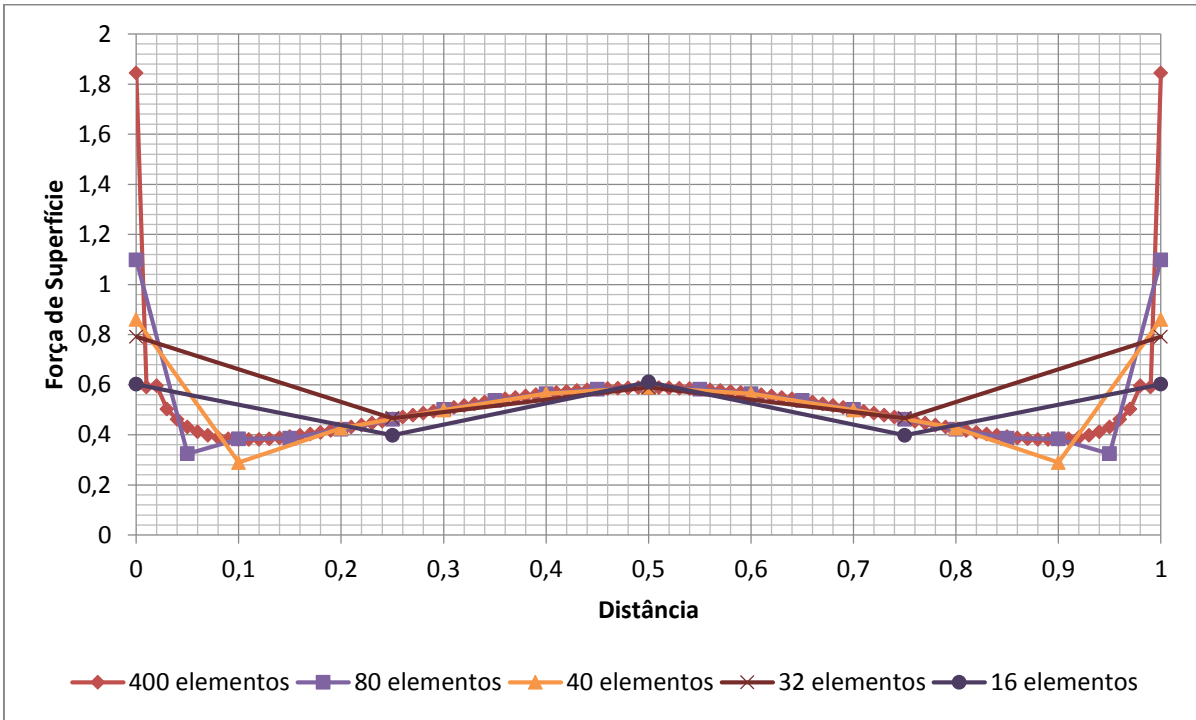
**Gráfico 6-78: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.0**



**Gráfico 6-79: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.3**

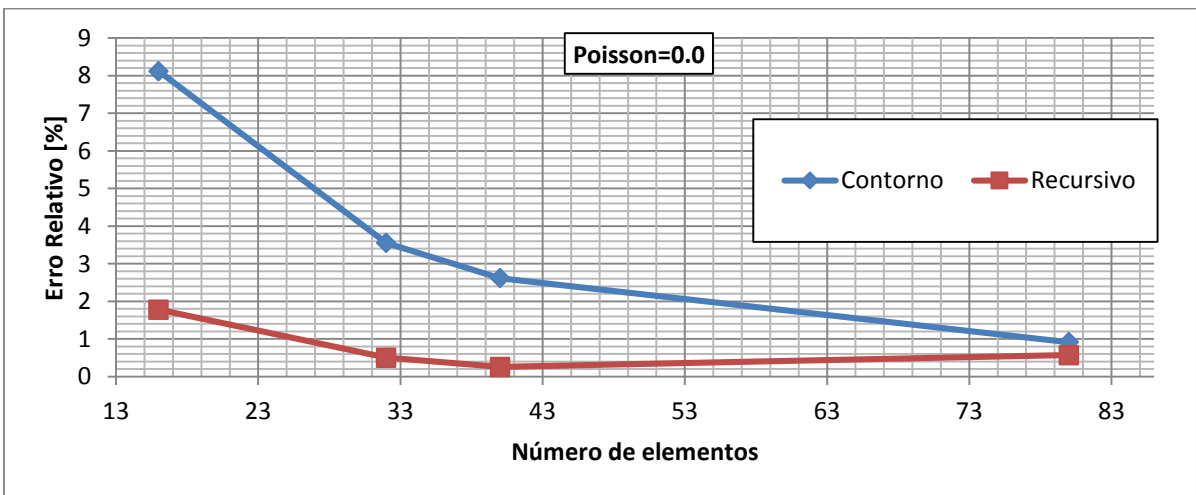


**Gráfico 6-80: Perfis resultantes obtidos com as diversas malhas utilizadas adotando o coeficiente de Poisson como 0.5**

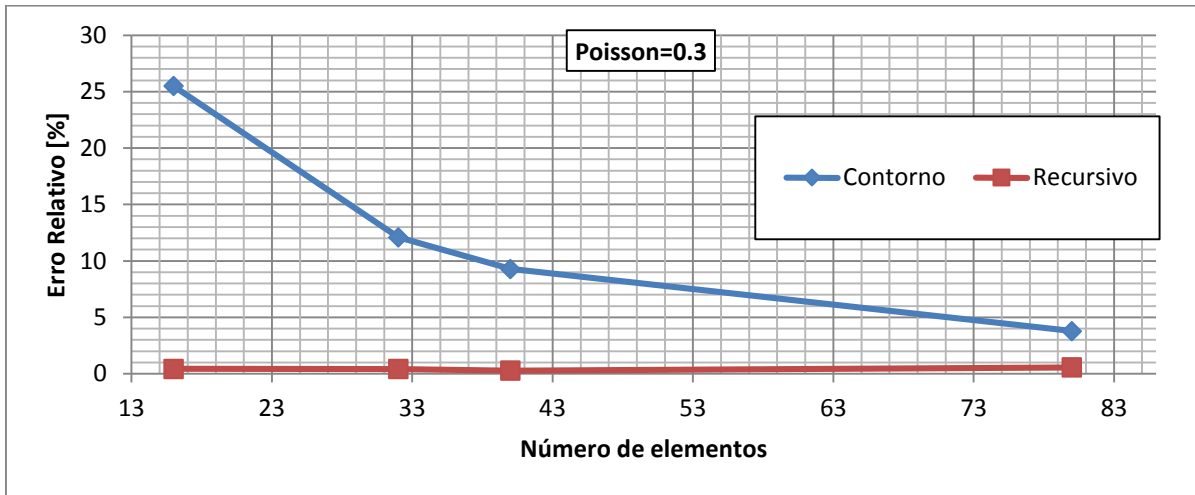


Os gráficos 6-81 a 6-83 foram traçados com a média dos erros relativos calculados com os nós convencionais e os pontos recursivos. Os valores utilizados para esses gráficos estão expostos nas tabelas 6-14 a 6-16.

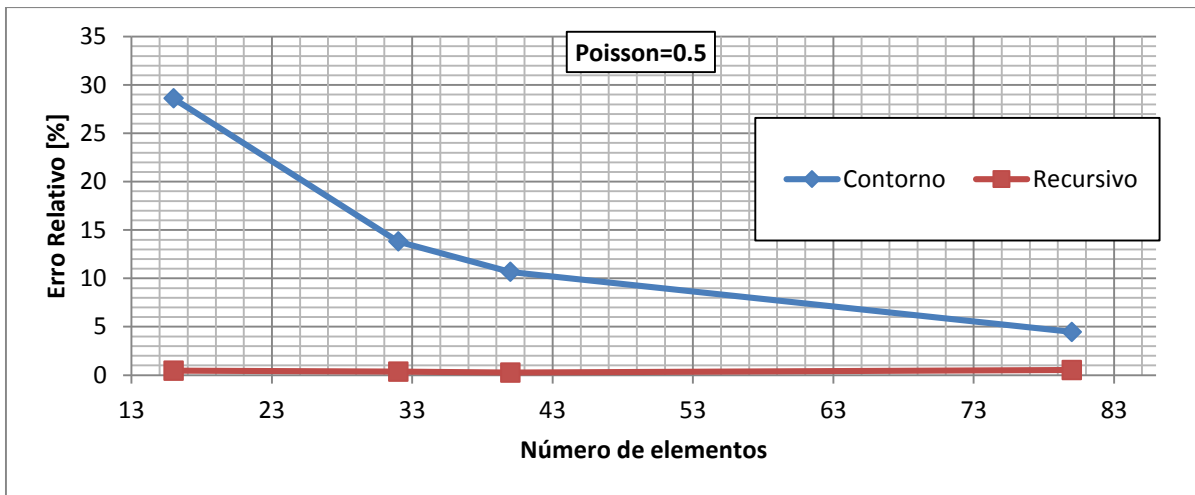
**Gráfico 6-81: Erro relativo com Poisson=0.0**



**Gráfico 6-82: Erro relativo com Poisson=0.3**



**Gráfico 6-83: Erro relativo com Poisson=0.5**



**Tabela 6-14: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.0**

Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	8.12	1.78
32	3.55	0.50
40	2.62	0.26
80	0.91	0.57

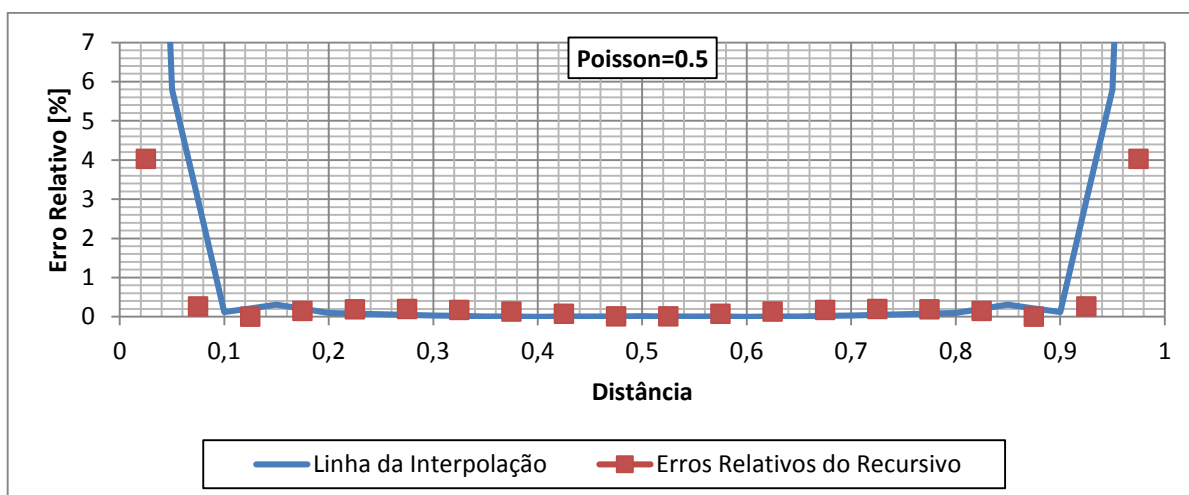
**Tabela 6-15: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.3**

Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	25.50	0.44
32	12.10	0.42
40	9.28	0.27
80	3.79	0.56

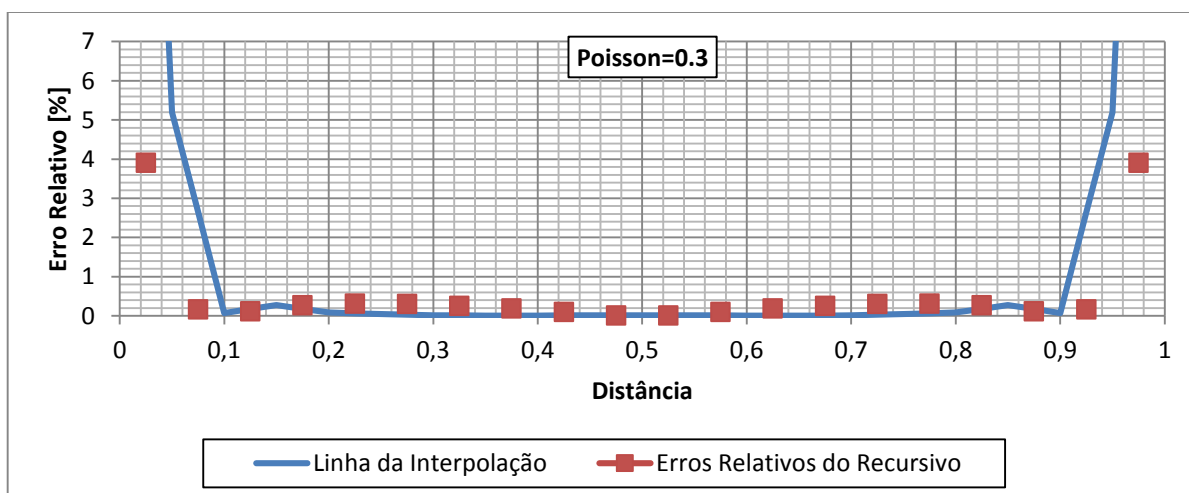
Tabela 6-16: Média dos erros relativos para o problema com Poisson=0.5		
Número de Elementos	Contorno [%]	Recursivo [%]
16	28.60	0.46
32	13.80	0.36
40	10.67	0.26
80	4.47	0.52

Pode-se notar a partir dos gráficos 6-81 a 6-83 que o erro relativo para o procedimento recursivo é, na média, menor que processo normal do método dos elementos de contorno. Um exame mais detalhado é possível através dos gráficos 6-84 a 6-95. A escala dos gráficos vai de 0 a 7% para que ainda se possa observar detalhes. Alguns erros relativos são superiores a 7% nas extremidades.

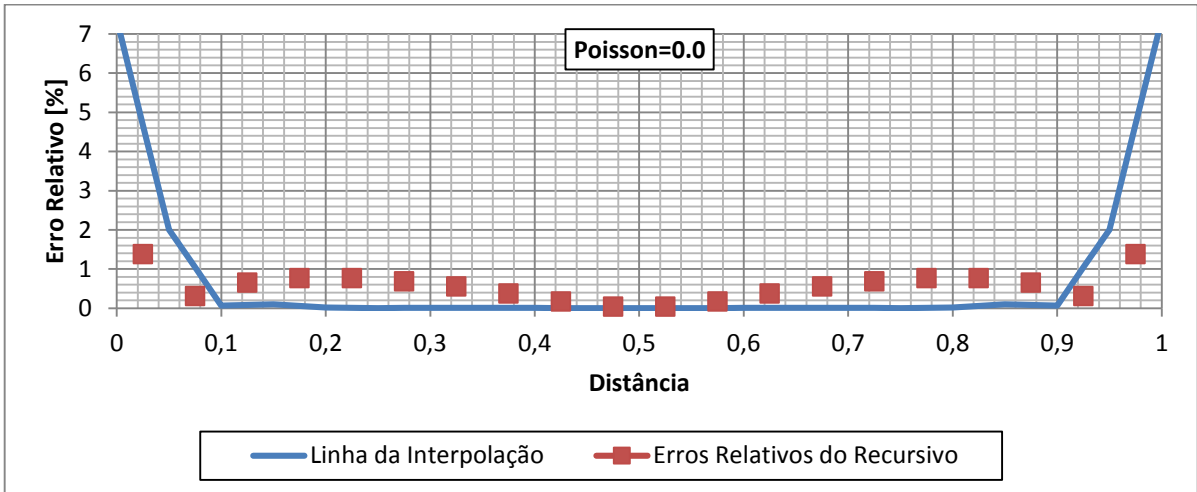
**Gráfico 6-84: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



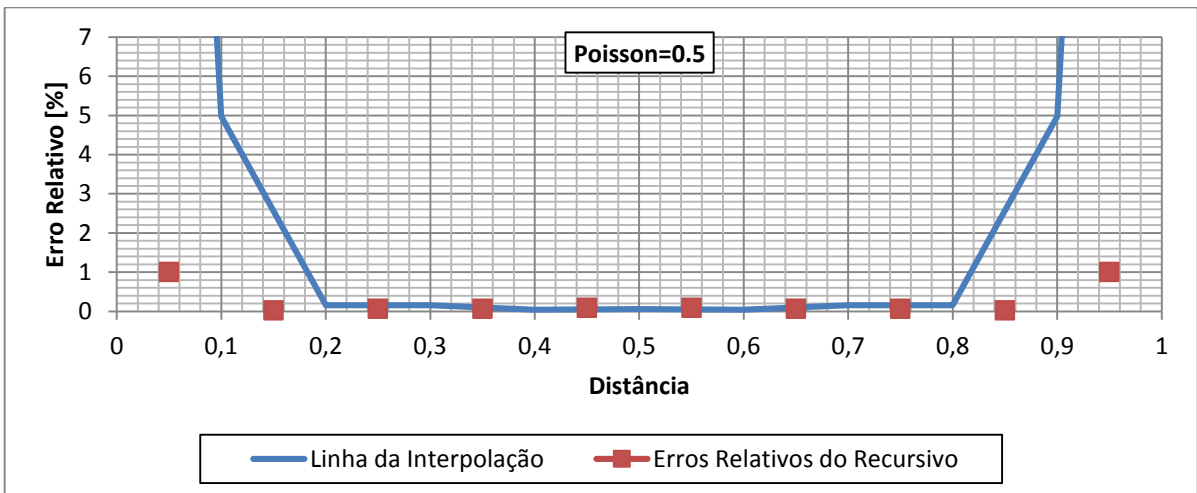
**Gráfico 6-85: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



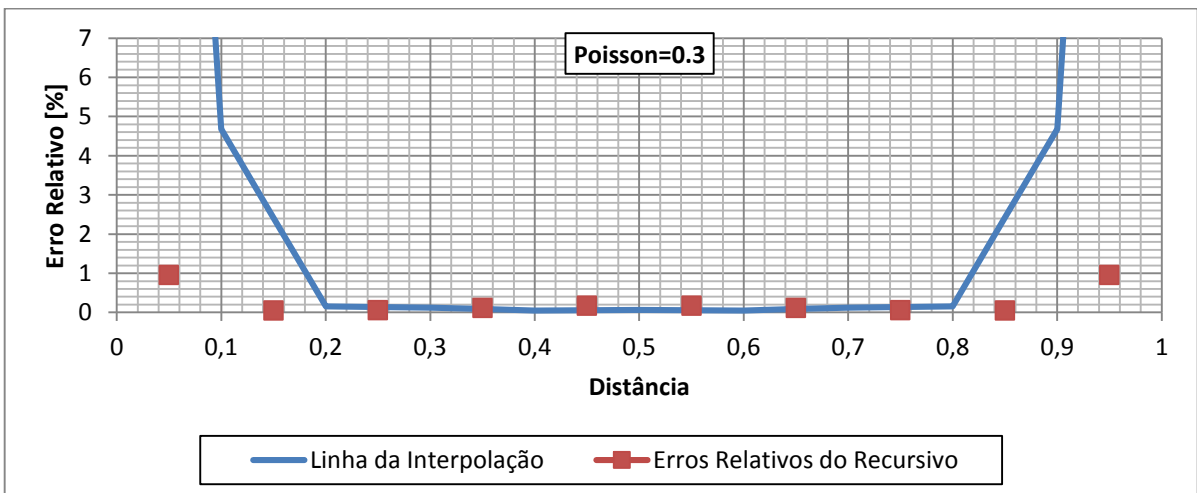
**Gráfico 6-86: Distribuição dos erros relativos para a malha de 80 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



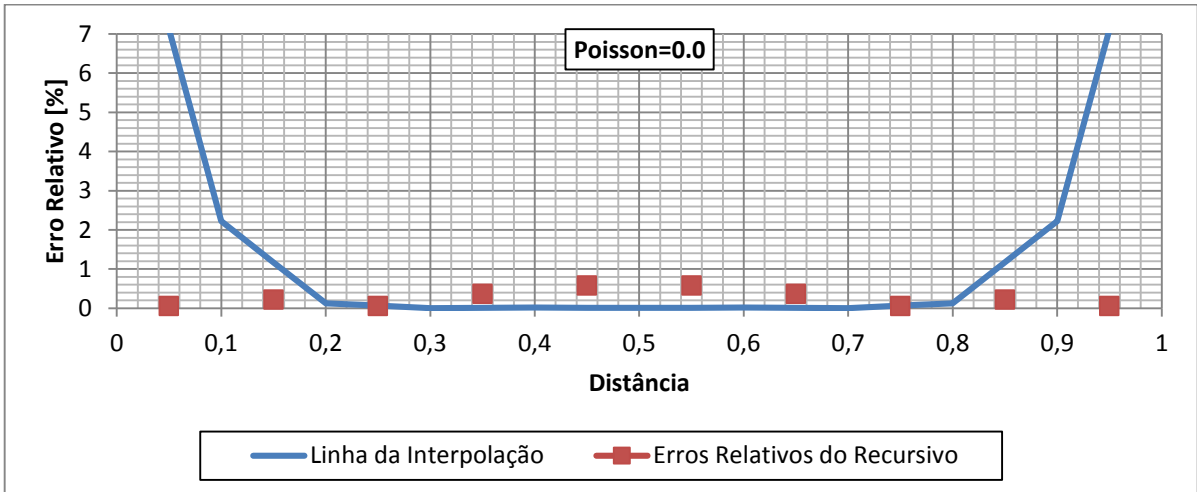
**Gráfico 6-87: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



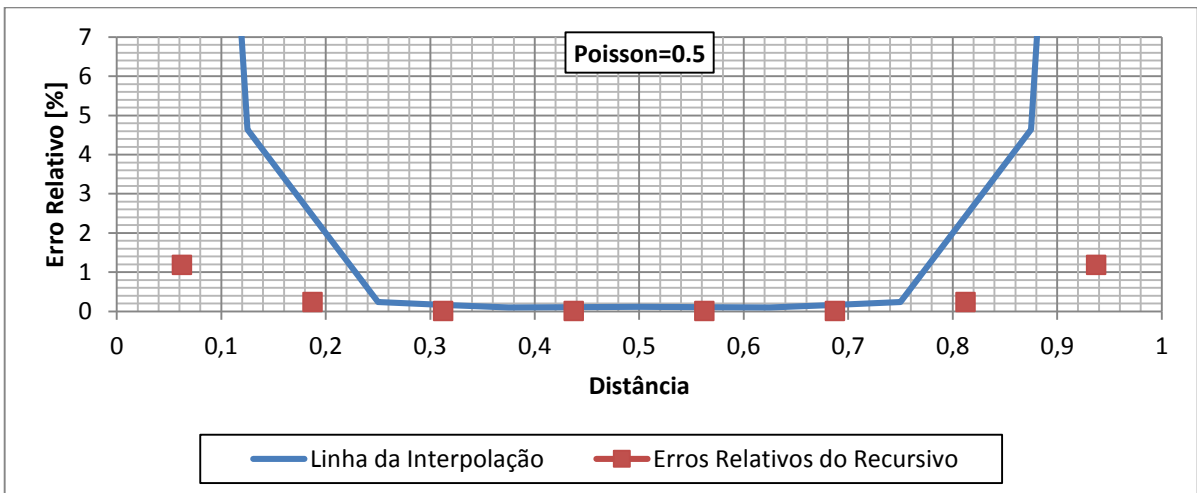
**Gráfico 6-88: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



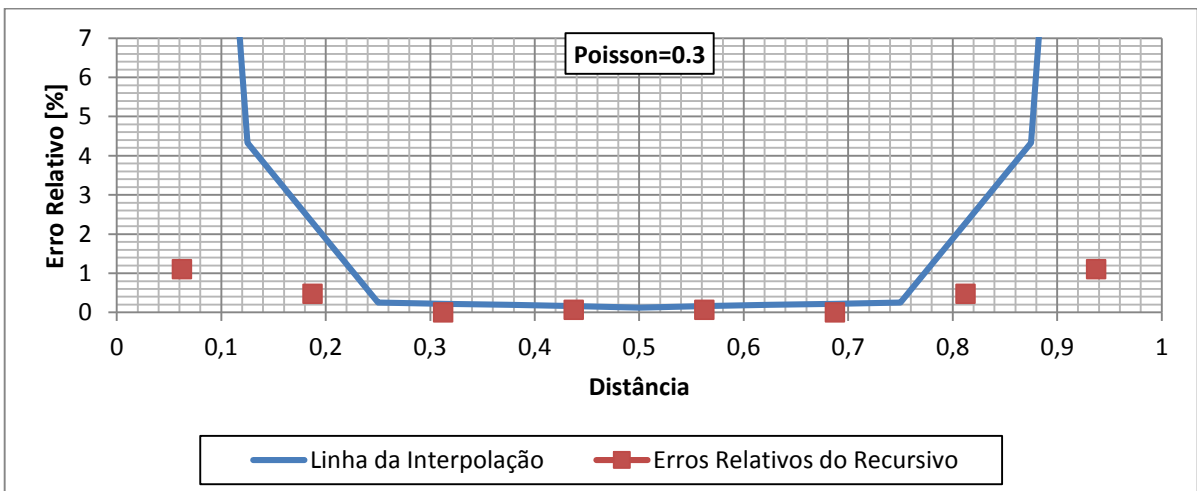
**Gráfico 6-89: Distribuição dos erros relativos para a malha de 40 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



**Gráfico 6-90: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**

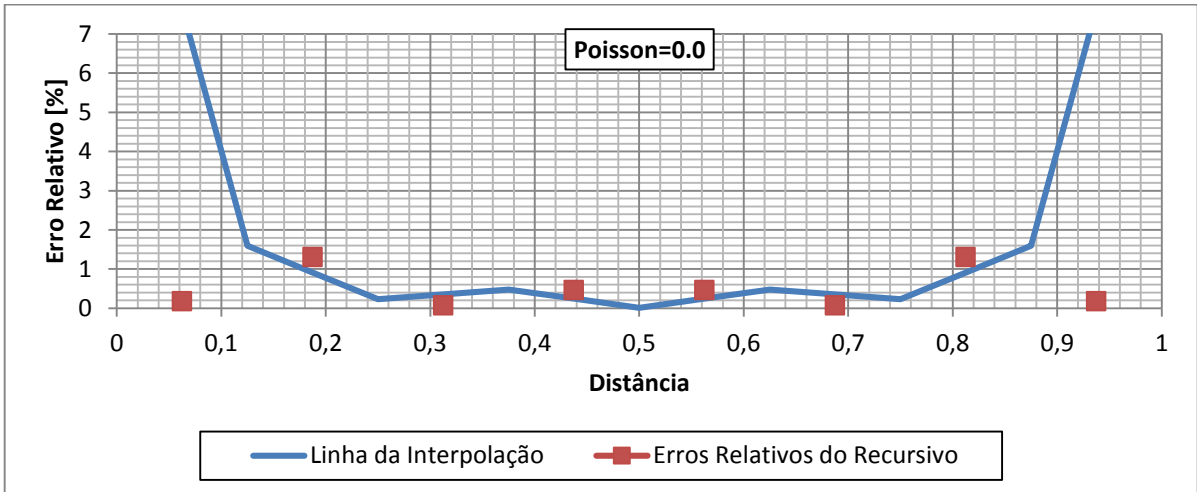


**Gráfico 6-91: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**

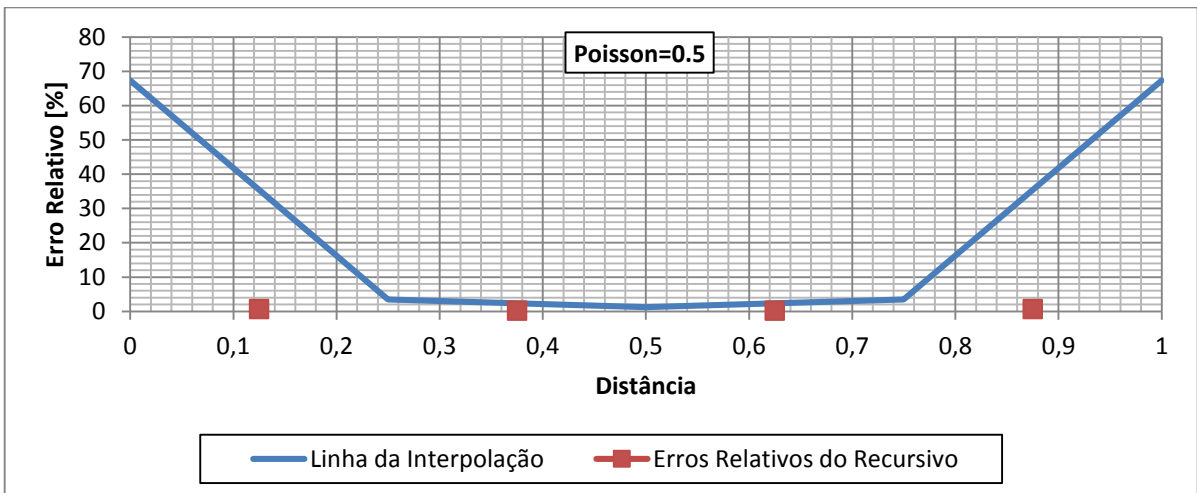




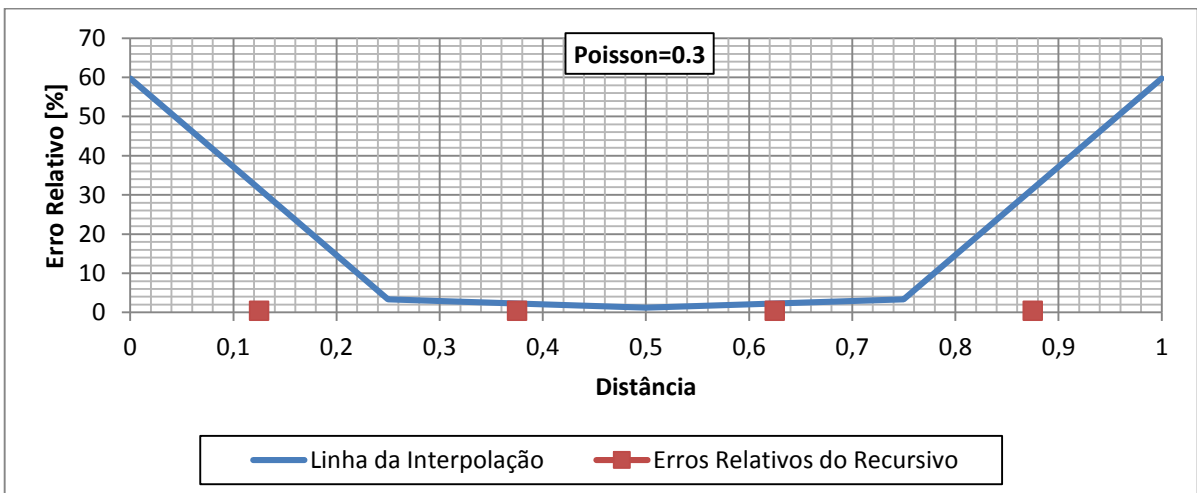
**Gráfico 6-92: Distribuição dos erros relativos para a malha de 32 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



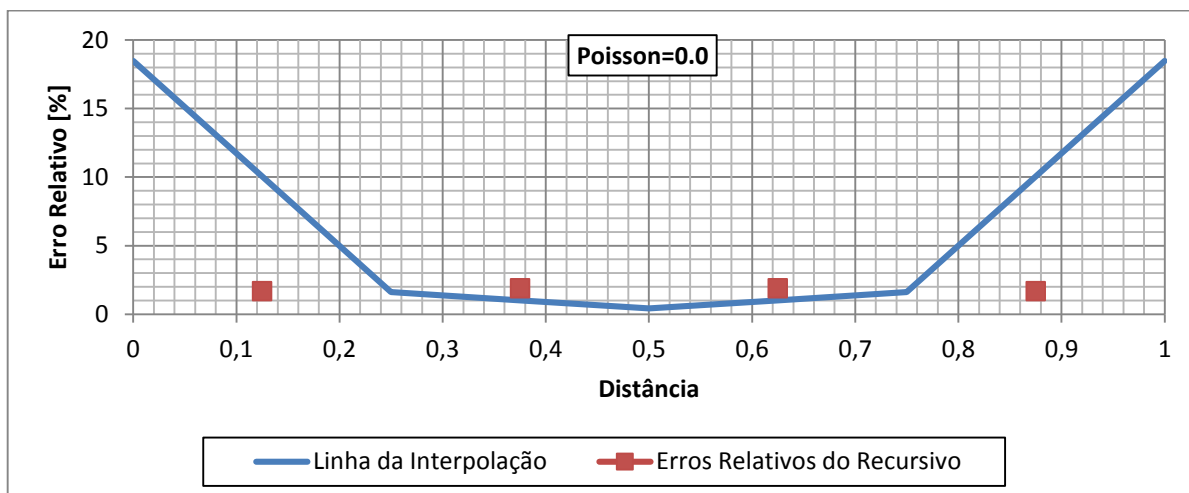
**Gráfico 6-93: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.5.**



**Gráfico 6-94: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.3.**



**Gráfico 6-95: Distribuição dos erros relativos para a malha de 16 elementos ao longo da face inferior para Poisson igual a 0.0.**



Comparando os gráficos 6-84 a 6-95 com os resultados observados nas seções anteriores, não se nota o mesmo padrão do erro relativo com a variação da intensidade da força de superfície. Para valores maiores do coeficiente de Poisson o procedimento recursivo se mostra mais eficaz, mas mesmo para o coeficiente nulo o procedimento ainda é muito superior que o método normal.

De uma maneira geral o erro relativo médio aumenta muito com o aumento do número de Poisson do material. Em parte isso se deve a contribuição dos nós localizados nas extremidades, que possuem valores de erro relativo altíssimos.

## CAPÍTULO 7- CONCLUSÃO

O presente trabalho foi capaz de mostrar com certa clareza todos os passos necessários para que se modele o método dos elementos de contorno a partir das equações de Navier-Cauchy. Também vários cuidados e simplificações foram expostos sobre o processo de discretização utilizando o MEC.

Também foi mostrado a formulação hipersingular do MEC para problemas de elastostática e os cuidados que são necessários para que essa formulação seja aplicada para pontos localizados nos contornos. As equações assim obtidas pelo método hipersingular foram utilizadas para se obter os valores das forças de superfície nos problemas analisados neste trabalho.

Um programa foi construído, sendo nele aplicado toda a formulação clássica do MEC. O programa é capaz de achar tanto forças quanto deslocamentos nos contornos e nos pontos internos, tanto pelo método tradicional do MEC quanto pelo procedimento recursivo, que é o objeto de análise desse trabalho.

Quanto a comparação entre os valores de deslocamentos obtidos pelo processo tradicional e o recursivo, notou-se que o procedimento recursivo apresentava na média erros relativos inferiores que o método direto. Dessa forma, há ganho de precisão em se utilizar o método descrito nesse trabalho. Isso foi mostrado anteriormente em outras publicações (VALOTO, 2011; FREITAS; LOEFFLER; VALOTO, 2013).

Quanto às forças de superfície, o procedimento recursivo se mostrou melhor que o tradicional na maior parte dos casos, exceção feita ao penúltimo exemplo. Nos demais, houve ganho de precisão na média para os casos em que as reações obtidas pelo método eram perpendiculares aos esforços solicitantes. Quando tanto as reações quanto as forças eram paralelas, não se observou ganho significativo de precisão. Nesta situação, o procedimento recursivo só era mais preciso quando se situava entre pontos que possuíam variação de valores entre eles grande o suficiente.

Quando se efetuou uma análise de um problema em que se prescreveu uma rigidez maior em sua face inferior, pode-se observar que o resultado gerado nas pontas crescia ascendentemente quanto mais se refinava a malha utilizada. Essa resposta crescente era independente do coeficiente de Poisson. Avaliando a precisão dos

resultados neste caso, notou-se que o procedimento recursivo era na média mais preciso que o método tradicional do MEC. Percebeu-se que parte deste fato está justificado pelos resultados obtidos nos cantos pelo MEC.

Foi mostrado nesse trabalho que, para problemas elásticos, o procedimento recursivo é capaz de ser mais preciso na obtenção de valores que o método tradicional do MEC. O procedimento recursivo é eficaz em situações nas quais o modelo discreto é incapaz de avaliar com precisão o deslocamento ou a força de superfície. Por exemplo, quando a malha é muito fina ou o perfil de esforços se mostra linear, não se observa vantagens no uso do procedimento recursivo. Isso porque o processo normal já seria capaz de aproximar com bastante precisão o resultado do problema analisado.

Porém, quando o perfil de esforços ou outras condições não são facilmente analisadas apenas com o modelo normal do MEC, o procedimento recursivo se apresenta com uma ferramenta eficaz no ganho de precisão. Isso chega a ser muito nítido em casos onde a solução discreta linear não é capaz de representar com precisão um perfil mais complexo, como se observou no último exemplo.

Ficam recomendados como trabalhos futuros:

- A avaliação de mais problemas com fixação em todos os graus de liberdade.
- O uso do procedimento recursivo para se obter novos valores nos pontos internos.
- O uso de mais de um ponto recursivo entre os nós geométricos dos elementos de contorno.

## ESCORÇO BIBLIOGRÁFICO

1. BORESI, A. P. **Elasticity in engineering mechanics**. 2nd ed ed. New York: Wiley, 2000.
2. BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech, 1984.
3. BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. [S.l.]: Springer, 1984.
4. CORRÊA, H. B. **Procedimento recursivo do método dos elementos de contorno**. 2009. Universidade Federal Do Espírito Santo, Vitória, 2009.
5. FREITAS, A. B.; LOEFFLER, C. F. Performance Evaluation of the Boundary Element Recursive Procedure in Elastic Problems. **Journal of Engineering Mathematics**, 30 jul. 2015. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s10665-015-9807-9>>. Acesso em: 8 ago. 2015.
6. FREITAS, A. B.; LOEFFLER, C. F.; VALOTO, L. Performance of the Recursive Procedure in Elastic Problems Modeled by the Boundary Element Method. n. BETECH, 2013.
7. HIBBELER, R. C. **Mechanics of materials**. 5th ed ed. Upper Saddle River, N.J: Pearson Education, 2003.
8. KANE, J. H. **Boundary element analysis in engineering continuum mechanics**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice Hall, 1994.
9. KATSIKADELIS, J. T. **Boundary elements: theory and applications**. New York: Elsevier, 2002.
10. LITTLE, R. W. **Elasticity**. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall, 1973.
11. LIU, Y. **Fast multipole boundary element method: theory and applications in engineering**. 1. ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2009.
12. LOEFFLER NETO, C. F.; WROBEL, L. C. Um Procedimento Simples para Melhorar a Precisão Numérica da Solução do Método dos Elementos de Contorno. n. XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, p. 1–13, 2008.
13. PARÍS, F.; CAÑAS, J. **Boundary element method: fundamentals and applications**. Oxford ; New York: Oxford University Press, 1997.
14. PRADO, A. A. **Uma formulação hipersingular do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais**. 1991. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991.
15. REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. New York, NY: McGraw-Hill Higher Education, 2006.

16. TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. Elasto-Plastic Boundary Element Analysis. In: WUNDERLICH, W.; STEIN, E.; BATHE, K.-J. (Ed.). **Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. p. 403–434.
17. TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
18. VALOTO, L. **Aplicação do esquema recursivo do método dos elementos de contorno em problemas de elasticidade**. 2011. Universidade Federal Do Espírito Santo, Vitoria, 2011.
19. VERA-TUDELA, C. A. R. **Elastodinâmica bidimensional através do método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade**. 1999. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitoria, 1999.
20. VERSTEEG, H.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method**. 2 edition ed. Harlow, England ; New York: Prentice Hall, 2007.
21. ZIENKIEWICZ, O. C. **The finite element method**. 5th. ed. Oxford ; Boston: Butterworth-Heinemann, 2000. v. 2

## Apêndices

### APÊNDICE A ANÁLISE DA TRANSLAÇÃO DE CORPO RÍGIDO PARA A EQUAÇÃO HIPERSINGULAR

Será mostrado que a utilização de integração por partes finitas pode desprezar o deslocamento devido a translação de corpo rígido  $u_j(\zeta)$ , no cálculo do valor principal da integral em 4-19.

Aplicando a propriedade de integração por partes finitas, tem-se:

$$IA = PF \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - PF \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta; X) [u_j(X) - u_j(\zeta)] d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-1 )}$$

Nosso interesse está apenas na parte constante de deslocamento dessa equação. Assim, a integral acima pode ser desmembrada da seguinte forma:

$$IAa = PF \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - PF \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta; X) u_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-2 )}$$

$$IAb = u_j(\zeta) PF \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-3 )}$$

Por equilíbrio, tem-se que:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) = - \int_{\Gamma} \delta(\zeta; X) \delta_{ij} d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-4 )}$$

Derivando ambos os lados da equação acima em relação a um direção qualquer em  $\zeta$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*(\zeta; X)}{\partial m} d\Gamma(X) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \delta(\zeta; X)}{\partial m} \delta_{ij} d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-5 )}$$

Mas sabe-se da propriedade de delta de Dirac:

$$\int_{\Gamma} f(X) \delta'(\zeta; X) d\Omega(X) = -f'(\zeta) \quad \text{Equação ( A-6 )}$$

Então:

$$\int_{\Gamma} P_{ij}^* (\zeta; X) d\Gamma(X) = \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial m} = 0 \quad \text{Equação ( A-7 )}$$

Portanto a integral IA é:

$$IA = PF \int_{\Gamma} U_{ij}^* (\zeta; X) p_j(X) d\Gamma(X) - PF \int_{\Gamma} P_{ij}^* (\zeta; X) u_j(X) d\Gamma(X) \quad \text{Equação ( A-8 )}$$