UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

CLARICE SEGANTINI

PROBLEMAS RECREATIVOS NA OBRA *O HOMEM QUE CALCULAVA,* DE MALBA TAHAN, E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

SÃO MATEUS
2015

CLARICE SEGANTINI

PROBLEMAS RECREATIVOS NA OBRA *O HOMEM QUE CALCULAVA,* DE MALBA TAHAN, E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica do Centro Universitário Norte do Espírito Santo - Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica, na área de concentração em Ensino de Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho

SÃO MATEUS

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Divisão de Biblioteca Setorial do CEUNES - BC, ES, Brasil)

Segantini, Clarice, 1982-

S454p Problemas Recreativos na obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas / Clarice Segantini. – 2015.

131 f. : il.

Orientador: Moysés Gonçalves Siqueira Filho.

Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Matemática Recreativa. 2. Resolução de Problemas. 3. Malba Tahan. I. Siqueira Filho, Moysés Gonçalves. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 63

"Problemas Recreativos na obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas"

Clarice Segantini

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 24/11/2015.

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Profª. Drª. Lígia Arantes Sad
Instituto Federal do Espírito Santo
Membro Externo

Profª. Drª. Andressa Cesana
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Externo

A Matheus e a Felipe, meus filhos queridos.

A Carmelita Venturini Segantini, minha mãe amada.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, minha gratidão a Deus, por ter protegido e guiado os meus passos.

À minha mãe, guerreira, por ter cuidado dos meus filhos. Aos meus filhos, Matheus e Felipe, pela compreensão nos momentos de ausência. Aos familiares pelo incentivo.

Ao meu querido orientador, Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho, que foi a base para o meu crescimento acadêmico, ao instruir, corrigir e amparar cada momento da pesquisa. Agradeço pela colaboração nas disciplinas ofertadas. Obrigada por tudo!

À Banca Examinadora da Qualificação: Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella, Prof.ª Dr.ª Ligia Arantes Sad, Prof.ª Dr.ª Andressa Cesana, Prof.ª Dr.ª Circe Mary Silva da Silva DynniKov pelas ricas contribuições oferecidas ao meu trabalho.

Aos professores do Programa, principalmente, aqueles que tive o prazer de cursar disciplinas: Prof. Dr. Franklin Noel dos Santos, Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella e Prof.ª Dr.ª Andréa Brandão Locatelli. Aos colegas do Mestrado, especialmente, à Ana Cláudia Pezzin, André Tessaro, Jonas José Chequetto, José Aparecido da Silva Fernandes, Carlos Alberto Afonso de Almeida Júnior, Mirian Gelli da Costa Andrade, pelas proveitosas discussões. Às secretárias da Pós-Graduação Danielle Andrade de Lucena de Carvalho, Josiane Baldo e Lorena Neves Nobre, sempre prestativas e atenciosas. Aos funcionários da biblioteca, pela solicitude.

À direção de cada escola, quais sejam, Centro Educacional Infantil Municipal “Mundo do Saber” e Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Nestor Gomes” que reorganizou o meu horário de trabalho, contribuindo para que eu cursasse as disciplinas do Mestrado. A equipe de funcionários pelo estímulo oferecido. À professora Vanessa Bayerl Cesana pelo apoio e aos alunos do 1º ano do Ensino Médio que se dispuseram em participar das Oficinas, bem como a direção escolar que permitiu a realização da pesquisa em sua instituição.

À Ivonicleia Gonçalves Boroto, amiga nessa caminhada. A Olívia Gutler, pelo carinho com meus filhos. Enfim, a todos amigos que depositaram palavras de confiança e segurança, e que de alguma forma contribuíram para esta etapa em minha vida.

Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel.

Ary Quintela

RESUMO

Visa a investigar e analisar as apropriações e representações de um grupo de alunos do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Nestor Gomes” diante dos problemas extraídos do livro *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, em um ambiente de resolução de problemas, bem como analisar os registros elaborados pelos alunos nas soluções dos problemas. Apresenta um breve histórico sobre a resolução de problemas, ora abordada como conteúdo, ora como prática, ou ainda como metodologia. Exibe importantes matemáticos como divulgadores da matemática recreativa. Trata-se de um estudo de caso de natureza qualitativa. Utiliza a triangulação para análise dos dados da pesquisa. Adota como referencial teórico a história cultural, posta por Roger Chartier, para os conceitos de *representação*, *apropriação* e *prática*. Descreve as produções dos alunos nas oficinas de resolução de problemas e aponta que os *problemas recreativos* despertam o interesse, a criatividade, a imaginação e o uso de estratégias próprias para resolução, promovem questionamentos, discussões e o trabalho em grupo entre os alunos. Evidencia as dificuldades dos alunos em interpretação e nos cálculos matemáticos. Relata que os problemas selecionados abrangem aspectos culturais e sociais, para além dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Matemática Recreativa. Malba Tahan. O Homem que Calculava.

ABSTRACT

This research aims at investigating and analysing the appropriations and representations of a particular group of high school students from “Nestor Gomes” Elementary and High School faced with problems from the book *The Man who Counted*, by Malba Tahan, in a problem-solving environment, as well as analysing the records kept by the students as they solved the problems. It presents a brief history of problem-solving, sometimes approached as content, others as practice, or yet seen as methodology. It shows important mathematicians as disseminators of recreational mathematics. It is a qualitative nature case study. It uses triangulation for data analysis. Roger Chartier's cultural history concepts of *representation*, *appropriation* and *practice* offers its theoretical framework. It describes students' output in the problem-solving workshops and indicates that *recreational problems* not only stimulate interest, creativity, imagination and the use of particular strategies for resolution but also encourage questioning, discussions and teamwork among students. It demonstrates students' difficulties with comprehension and mathematical calculations. It reports that the selected problems include cultural and social aspects, going beyond mathematical concepts.

Keywords: Problem Solving. Recreational Mathematics. Malbe Tahan. The Man who Counted.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIA

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELA

LISTA DE SIGLAS

CBC - Conteúdos Básicos Comuns

CBEE - Currículo Básico Escola Estadual

CEUNES - Centro Universitário do Norte do Espirito Santo

EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

EJA - Educação de Jovens e Adultos

ES - Espírito Santo

GTERP - Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas

NCTM - National Council for Teachers of Mathematics

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

RP - Resolução de Problemas

SERP - Seminário em Resolução de Problemas

SINTEC - Seminário Internacional de Educação em Ciências

UFES - Universidade Federal do Espírito Santo

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Meu primeiro contato com a escola se deu aos três anos de idade, na Educação Infantil. Oitava filha, a mais nova, sempre tive o apoio dos meus pais em prosseguir nos estudos. A escolha por ser professora se iniciou quanto optei pelo curso Habilitação para o Exercício do Magistério em 1º Grau, em nível médio. Após a conclusão, ingressei no magistério como professora do Ensino Fundamental, na modalidade Educação de Jovens e Adultos, em 2001.

Graduei-me em Licenciatura Plena em Matemática em 2006, pelo Polo Universitário de São Mateus[1]/Universidade Federal do Espírito Santo (UFES) e prossegui com uma especialização em Matemática por outra instituição. Em paralelo à graduação continuei atuando como professora, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Essas habilitações me proporcionaram assumir dois concursos públicos. O primeiro concurso, em 2007, como professora da Educação Infantil, pela rede municipal de São Mateus, estado do Espírito Santo (ES) e o segundo, em 2009, como professora do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, pela rede estadual do ES[2].

Várias formações continuadas aconteceram durante meu percurso profissional. Em especial, o programa de formação continuada – Multicurso Ensino Médio - Matemática[3], fase II, realizado em 2010, propiciou-me conhecer algumas das atuais tendências em Educação Matemática. Nos encontros presenciais foram abordados conteúdos programáticos com ênfase na Modelagem Matemática, Resolução de

---

[1] Atualmente recebe a nomenclatura Centro Universitário Norte do Espirito Santo (CEUNES).
[2] Cada cadeira como efetiva, tanto na rede municipal quanto na rede estadual, corresponde a uma carga horária de 25h semanais, sendo permitido assumir duas cadeiras, não designando com isso acúmulo de cargo.
[3] Programa de formação em serviço, elaborado nas modalidades presencial e virtual, designado aos professores da rede estadual de ensino do Espirito Santo, com encontros quinzenais entre o grupo de professores e assessoria concedida pelos tutores em Ambiente Virtual específico-www.multicursomatematica.org.br (PINTO, 2010). Esse programa foi desenvolvido pela Fundação Roberto Marinho em parceria com a Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo.

Problemas, Etnomatemática, História da Matemática, Jogos e Materiais Manipulativos.

A partir dessa formação comecei a rever minha prática profissional. Aos poucos, minha atuação em sala de aula foi se modificando, mas os problemas propostos aos alunos ainda se pautavam na aplicação dos conceitos ensinados. A Resolução de Problemas, como uma metodologia, não estava bem definida em minha prática pedagógica, seria necessário adquirir mais conhecimentos a respeito.

Na busca por aprimoramento profissional, continuei participando do Multicurso Matemática, realizando assim a fase III, em 2010. Nessa fase, atuei também como mediadora de atividades na Rede Social de Aprendizagem, na própria plataforma do programa. Em 2013, fiz a última fase, com o módulo III, desse programa, na qual a formação foi concluída.

Sempre busquei requintar meus conhecimentos. Nesse mesmo ano, 2013, fui convidada pela professora Vanessa Bayerl Cesana a participar da Semana de Matemática, no Centro Universitário Norte do Espirito Santo (CEUNES), onde uma das palestras tinha por tema *O Ensino de Matemática segundo Malba Tahan*, ministrada pelo Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho. Conversávamos juntas sobre essa palestra, ao voltarmos para nossas casas, quando a professora mencionou o livro *O Homem que Calculava,* de Malba Tahan. Ao relatar que não o conhecia, emprestou-me nessa mesma semana.

Em janeiro de 2014, algo a mais estava por vir. Foi aberto o processo seletivo para o ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, no CEUNES. Fiquei ansiosa em pleitear uma dessas vagas, pois sabia que novos horizontes se abririam para continuar meu aprimoramento profissional.

Um dos requisitos para a inscrição no Mestrado, fora a apresentação de um anteprojeto de pesquisa. Então pensei que essa era a oportunidade de conhecer melhor a Resolução de Problemas. Lembrei-me da palestra ministrada na Semana de Matemática e do livro *O Homem que Calculava,* que havia lido. Organizei essas informações e propus o tema Resolução de Problemas e o livro como apoio ao trabalho.

Como aluna regular do Mestrado estava na hora de aprender um pouco mais. Segundo Sad & Silva (2008, p. 27) é necessário que se "tenha clareza sobre o que exatamente se deseja investigar, porque se deseja investigar esse tema, porque é relevante tal investigação, o que já se sabe a respeito, que objetivos se pretende alcançar e como realizar essa pesquisa". Então, logo fui orientada a ler o que os pesquisadores falavam sobre a Resolução de Problemas, e também, a participar do III Seminário em Resolução de Problemas – SERP, organizado pelo grupo GTERP[4] em Rio Claro – SP, do Seminário Internacional de Educação em Ciências – SINTEC, pela Universidade Federal de Rio Grande – FURG e do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática – EBRAPEM, pela Universidade de Pernambuco.

Com o objetivo de conhecer e, posteriormente, dialogar com alguns trabalhos que remetam aos disparadores *Malba Tahan*, *Recreação Matemática*, *O Homem que Calculava*, *Resolução de Problemas*, nos propusemos fazer uma breve revisão de alguns trabalhos, como artigos, dissertações e teses.

Dalcin (2002. p.10) em sua pesquisa fez uma investigação sobre os livros paradidáticos de Matemática brasileiros destinados às séries finais do Ensino Fundamental. No primeiro capítulo de sua dissertação, abordou duas obras: *O Homem que Calculava,* de Malba Tahan e a *Aritmética de Emília*, de Monteiro Lobato. Considerou que essas obras são precursoras, e suas características principais são o "desejo de seus autores em romper com as concepções tradicionais de ensino, acreditando na possibilidade do gênero literário como um importante veículo para a aprendizagem prazerosa e significativa". Concluiu que os paradidáticos são recursos que podem auxiliar tanto os professores em suas aulas de Matemática quanto ser um meio para a divulgação de pesquisas em Educação Matemática, de relatos de experiências e aperfeiçoamento docente.

Costa (2011) traz uma experiência realizada nas aulas de matemática com alunos de seis turmas da terceira série do Ensino Médio do curso de formação de professores

---

[4] Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas com atividades desenvolvidas na UNESP – Rio Claro.

no ano de 2006. Conforme o pesquisador, a leitura do livro *O Homem que Calculava* era apenas uma proposta de enriquecimento curricular, em paralelo a suas aulas, mas como os alunos demonstraram dificuldades no uso de algoritmos e na interpretação de problemas, o projeto transformou-se em conteúdo programático para ser desenvolvido em suas aulas. Além da leitura do livro, os alunos teatralizaram alguns episódios e consideraram como uma atividade lúdica.

A leitura do livro, *O Homem que Calculava*, também, foi proposta por Paez (2014) com o objetivo de analisar a produção de sentidos e significados que foram explicitados por estudantes das séries finais do Ensino Fundamental, enquanto liam esse livro. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi realizada com 12 alunos da 8ª série e 2 alunos da 7ª série, em contra turno, em uma escola pública da rede Estadual de Ensino, localizada na cidade de São Carlos - São Paulo. Houve 10 encontros, sendo todos filmados. Como aporte teórico, a pesquisadora baseou-se nos estudos de 1] Lev Vygotsky para o estudo sobre a produção de sentido e significado a partir da palavra e 2] Bento de Jesus Caraça & George Ifrah para a produção de sentidos e significados aos conteúdos matemáticos por meio da História da Matemática. A autora concluiu que a leitura de textos literários em aulas de matemática pode ultrapassar a produção de sentidos para a matemática, suscitando sentidos para práticas cotidianas por meio das relações feitas entre os conteúdos escolares e a vida. Ela observou muitas dificuldades dos alunos em relação às representações simbólicas matemáticas, principalmente em situações que requeriam o uso de representações fracionárias.

Balladares (2014) utilizou os contos do livro *O Homem que Calculava* para a exploração de conceitos matemáticos e a produção de histórias em quadrinhos adaptadas ás características sócioculturais da região - uma Colônia de Pescadores. As atividades envolviam Literatura, Artes e Matemática. A pesquisa foi realizada na Escola Municipal de Ensino Fundamental Almirante Raphael Brusque, em Pelotas, Rio Grande do Sul, em 20 encontros com uma turma da oitava série do Ensino Fundamental, constituída por 13 alunos. A pesquisadora propôs a leitura dos contos narrados por Beremiz, bem como a interpretação dos problemas matemáticos. A autora concluiu que os alunos se mostraram estimulados, mobilizados e dispostos a aprender; praticaram a leitura, identificaram conceitos matemáticos envolvidos nos contos, construíram os personagens e as histórias em quadrinhos.

Uma análise literária nas obras *O Homem que Calculava*; *Minha vida querida*; *Romance do filho pródigo*; *Amigos maravilhosos* e o *Mistério do Mackenzista*, foi desenvolvida por Valentin (2010, p. 90), que considerou o personagem, o enredo, o espaço, o tempo, o narrador e a linguagem. Apresentou Júlio Cesar de Melo e Souza, mais conhecido por seu pseudônimo Malba Tahan, como autor e escritor ao mundo acadêmico. Concluiu que como autor e professor, Júlio Cesar “[...] criou e aplicou o que acreditava em suas aulas nos deixando não somente uma imensa obra de apoio, mas a ideia de que é possível ter a literatura como aliada na formação de uma educação matemática”.

Outros estudiosos se debruçaram sobre a obra *O Homem que Calculava*, como Roberto Filho (2013). Adotando a metodologia histórico-bibliográfica, apresentou como objetivo geral investigar quem foi Mello e Souza e quais foram suas influências no ensino da Matemática. Analisou várias histórias, dentre elas, *O Jogo de Xadrez*, *O Problema da Divisão dos 35 Camelos*, as *Perolas de Rajá*, *Quadrados Mágicos,* e concluiu que os pilares que sustentavam a prática pedagógica no ensino de Matemática por Malba Tahan foi a tríade Recreações Matemáticas, Histórias (História da Matemática, Contos e Lendas), Problemas e Curiosidades.

Bispo (2014) apontou como temática analisar os fatores positivos da aplicação das atividades lúdicas em aulas de Matemática do Ensino Médio. Sua pesquisa foi realizada com duas turmas de primeiro ano, três do segundo e duas do terceiro ano do Ensino Médio no Centro Educacional 123 de Samambaia, Brasília. Além da observação participante, o autor aplicou um questionário antes e outro após o desenvolvimento do projeto. Utilizou o problema dos Quatro Quatros e concluiu que as atividades foram bem aceitas, trouxeram benefícios à prática pedagógica, e se mostraram como um método eficiente para melhorar o rendimento escolar.

Menezes & Souza (2010) destacaram as conexões entre *Recreações Matemáticas*, *Conhecimento Matemático* e *Educação Matemática* ao longo da história por meio de problemas recreativos. Mostraram várias recreações antigas, dentre elas, o problema da partilha dos 35 camelos.

Romanatto (2012) apresentou, em seu artigo, a partir da discussão do problema *da divisão dos 35 camelos,* a Resolução de Problemas como metodologia de ensino, e considerou-a importante para os estudantes compreenderem conceitos, princípios e procedimentos matemáticos.

Nessa mesma direção, outras pesquisas versam, ora na formação inicial de professores, como Nunes (2010), Redling (2011), Azevedo (2014), ora relacionada com um tema especifico, como Souza (2010), no estudo da Análise Combinatória; Ribeiro (2010) no ensino do conceito de integral; Puti (2011) no estudo de significados de equações polinomiais; Menino (2013) no estudo de Problemas no cenário da Matemática Discreta.

Várias literaturas foram sondadas, a fim de chegar a uma definição clara do objeto de estudo. Por um momento, pensamos ser conveniente retratar as *estratégias* dos alunos, por outro momento o *diálogo*. Entretanto, com as disciplinas do Mestrado; as muitas leituras; a participação em eventos; ampliamos e redirecionamos nossos estudos, o que nos fez admitir como fundamentação teórica de nosso trabalho características, princípios, elementos da História Cultural, a partir dos conceitos de *representação, apropriação e prática*, desenvolvidos por Roger Chartier.

Assim posto, nossa questão norteadora se delimitou em: **Como alguns problemas, extraídos do livro *O Homem que Calculava,* de Malba Tahan, são apropriados e representados, em um ambiente de Resolução de Problemas, por um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual?**

Para respondê-la fez-se necessário traçarmos nosso objetivo geral, qual seja: Investigar e analisar as apropriações e representações de um grupo de alunos do Ensino Médio da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Nestor Gomes” diante dos problemas extraídos do livro *O Homem que Calculava,* de Malba Tahan, em um ambiente de Resolução de Problemas. Posterior a ele, os específicos: Analisar os registros elaborados pelos alunos nas soluções dos problemas; identificar em obras estrangeiras problemas semelhantes aos escolhidos para nossa pesquisa, com o intuito de observar a autenticidade ou não dos problemas recreativos propostos por Malba Tahan.

Retomando as ideias centrais dos trabalhos visitados podemos dizer que Menezes & Souza (2010) e Roberto Filho (2013) ampliaram nossa compreensão acerca das recreações matemáticas; Nunes (2010), Souza (2010), Ribeiro (2010), Redling (2001), Puti (2011), Menino (2013), Azevedo (2014), acerca da Resolução de Problemas, porém, não era do nosso interesse retratar a formação de professores nem abordar um conteúdo matemático específico, entretanto, queríamos, como fez Romanatto (2012), explorar conceitos matemáticos. Também, não foi nossa pretensão utilizar *O Homem que Calculava*, cuja percepção de ter em mãos um paradidático é devida à Dalcin (2002), em um projeto pedagógico, como fez Costa (2011), nem tão pouco, fazer uma análise literária da obra, como Valentin (2010). Por outro lado, fora nosso objetivo extrair dos enredos, alguns problemas e trabalhá-los em sala, como fizeram Paez (2014) e Balladares (2014), mas sem o propósito de procurar sentidos e significados ou obter histórias em quadrinhos. Aprendemos com Bispo (2014), identificar a face positiva da aplicação de atividades lúdicas.

Diante do todo exposto estruturamos nosso trabalho em mais cinco capítulos. No capítulo 2, relatamos a natureza da pesquisa, seus sujeitos, os procedimentos para a coleta dos dados e a análise e discussão dos resultados.

No capítulo 3, discorremos sobre a Resolução de Problemas a partir de um breve histórico, destacando algumas concepções a seu respeito, ora entendida como conteúdo ou prática, ora como uma metodologia.

No capítulo 4, expomos a Matemática Recreativa e elencamos obras e matemáticos que contribuiram para a sua disseminação, entre elas a obra *O Homem que Calculava* de Malba Tahan.

No capítulo 5, ampliamos as discussões advindas da aplicação das *Oficinas de Resolução de Problemas* e analisamos as produções dos sujeitos da pesquisa. Sintetizamos as principais ideias desenvolvidas ao longo da trajetória da investigação nas Considerações finais.

2 PERCURSOS DA PESQUISA

2.1 NATUREZA DO ESTUDO

Delineamos nossa pesquisa à luz da abordagem qualitativa. Conforme Bogdan & Biklen (1994, p.47-50), a investigação qualitativa possui cinco características:

> - [...] a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> - [...] é descritiva;
> - Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> - Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> - O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Nesse sentido, torna-se nosso interesse realizar um estudo de caso etnográfico, haja vista, suas principais características, isto é, observação participante, entrevista e análise de documentos (ANDRÉ, 1995).

Segundo Fiorentini & Lorenzato (2012, p.108),

> A ‘observação participante’ é uma estratégia que envolve não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas (incluindo entrevistas, consulta a materiais etc.), pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada.

As entrevistas conforme André (1995, p.28) “[...] têm a finalidade de aprofundar as questões e esclarecer os problemas observados”. Segundo Triviños (1987, p.146) parte, normalmente, de certos questionamentos básicos, fundamentado em teorias e hipóteses concernente à pesquisa, e que seguidamente “[...] oferecem amplo campo de interrogativas, fruto de novas hipóteses que vão surgindo à medida que se recebem as respostas do informante”.

Ainda, relata-nos Lüdke & André (1986), que os documentos incluem uma série de materiais escritos, como diários pessoais, leis, discursos, arquivos escolares, entre outros, que servem como fonte de informação para explicar um fenômeno que fundamenta afirmações e declarações do pesquisador.

O estudo de caso etnográfico pode ser apontado como a aplicação da abordagem etnográfica ao estudo de um caso, como por exemplo, o estudo descritivo de uma escola, um professor, um aluno ou uma sala de aula (ANDRÉ, 1995). Nessa pesquisa valorizamos algumas características do estudo etnográfico, quais sejam

> - [...] os dados são mediados pelo instrumento humano, o pesquisador;
> - [...] ênfase no processo, naquilo que está ocorrendo e não no produto ou nos resultados finais;
> - [...] preocupação com o significado, com a maneira própria com que as pessoas veem a si mesmas, as suas experiências e o mundo que as cerca;
> - [...] envolve um trabalho de campo (ANDRÉ, 1995, p.28-29).

Consideramos a própria sala de aula dos sujeitos da pesquisa, um grupo de alunos de Ensino Médio, seu ambiente natural, com o propósito de investigarmos as resoluções e interpretações dadas aos problemas propostos, selecionados do livro *O Homem que Calculava*, a partir do que denominamos de *Oficinas de Resolução de Problemas*.

2.2 CAMPO DE PESQUISA

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Nestor Gomes”, situada na Rua Camilo Silva, distrito de Nestor Gomes, município de São Mateus, norte do Estado do Espírito Santo.

A escola atende ao Ensino Fundamental, desde a alfabetização, iniciada aos seis anos de idade, ao 9º ano; Ensino Médio regular e na modalidade de Educação de Jovens e Adultos (EJA); Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio. Recebe alunos das regiões adjacentes e a maioria dos alunos mora na zona rural, necessitando de transporte escolar.

Os horários de funcionamento estão assim distribuídos:

- Matutino: das 7h às 12h, com 5 aulas de 55 minutos cada e um recreio de 25 minutos.

- Vespertino: das 12h40 às 17h40, com 5 aulas de 55 minutos cada e um recreio de 25 minutos.

- Noturno: das 18h30 às 22h30, com 4 aulas de 55 minutos cada e um recreio de 20 minutos.

O número de alunos, em 2015, que compõem essa escola totaliza 1165, sendo 510 alunos distribuídos em 18 turmas no turno matutino; 425 em 16 turmas no turno vespertino e 230 em 9 turmas no turno noturno.

Atualmente, a escola funciona em um espaço constituído por 16 salas que atendem ao ensino regular e/ou modalidade EJA, 1 sala de recurso multifuncional, 1 sala de informática, 1 biblioteca, 1 secretaria, 1 sala de direção, 1 sala de coordenação/recursos didáticos, 1 sala dos professores com 2 banheiros (masculino e feminino), 1 cozinha, 1 pátio externo e 1 interno, 1 quadra sem cobertura, 1 refeitório, 1 área de serviço para atendimento dos auxiliares de serviços gerais, 2 banheiros (masculino e feminino) para uso dos alunos, 1 almoxarifado, 1 sala para guardar os livros didáticos.

Devido ao quantitativo de salas, as turmas do Ensino Técnico Integrado ao Ensino Médio funcionam em anexo na Escola Família Agrícola, situada na mesma localidade.

A Escola "Nestor Gomes" não possui laboratórios de Física e Química, nem sala de auditório. A quadra escolar está em péssimas condições e não há bibliotecário. O espaço para os alunos ficarem no recreio é muito limitado, devido à área escolar ser pequena. Há uma proposta do governo do Espírito Santo em construir uma nova escola nessa região para atender a demanda dos alunos e oferecer melhores condições de trabalho, mas enquanto não acontecem, os professores dessa instituição vão trabalhando como podem.

Em 2015, a escola implantou para o corrente ano letivo, um sistema informatizado de pautas eletrônicas denominado SisGestão[5], em substituição ao diário escolar, o qual auxilia tanto professores quanto gestores na administração escolar. Esse sistema é particular, e foi adquirido pelos próprios funcionários dessa instituição. Vale ressaltar que a escola em voga faz parte da trajetória acadêmico-profissional da pesquisadora, razões da sua escolha para campo de investigação.

---

[5] Disponível em <http://www.nestorgomes.sisgestao.com>

2.3 SUJEITOS DA PESQUISA

A proposta de desenvolvimento da pesquisa foi apresentada ao diretor Prof. Mauro Lúcio de Oliveira, com a finalidade de obter a permissão para a realização do trabalho de Mestrado e às duas professoras de Matemática, optando por uma delas por ter mais afinidade profissional. Posteriormente, contatamos a turma da referida professora - 1º ano do Ensino Médio, turno matutino (1ºM1) – em 05 de maio de 2015, e lhe apresentamos os objetivos de nosso trabalho, como também assuntos a ele relacionados, tais como: o que é um curso de Pós-graduação (Mestrado); como é realizado o ingresso; a localização da UFES; a importância da seriedade em uma pesquisa; a liberdade em aceitar ou não a proposta, entre outros questionamentos.

A turma era composta por 26 alunos - 12 meninas e 14 meninos - e todos aceitaram participar das *Oficinas de Resolução de Problemas*. Como tivemos acesso à ficha de matrícula, obtivemos algumas informações a respeito deles:

Quadro 1 - Informações relacionadas aos alunos da pesquisa

Aluno	Idade	Endereço	Profissão da mãe	Profissão do pai	Utiliza transporte escolar
A1	16	Nova Aymorés	Lavradora	Lavrador	Sim
A2	14	Km 41	Lavradora	Lavrador	Sim
A3	16	Córrego Mata Sede	Lavradora	Lavrador	Sim
A4	14	Córrego Seco	Lavradora	Lavrador	Sim
A5	15	Km 23	Lavradora	Lavrador	Sim
A6	15	Córrego do 18	Aux. de Serviços Gerais	-------------	Sim
A7	16	Córrego da Cerejeira	Lavradora	Lavrador	Sim
A8	15	Km 29	Lavradora	Lavrador	Sim
A9	15	Nova Aymorés	Domestica	Lavrador	Sim
A10	16	Nestor Gomes	Lavradora	Lavrador	Sim
A11	14	Nestor Gomes	Auxiliar de Escritório	Contador	Não
A12	15	Km 37	Lavradora	Lavrador	Sim
A13	15	Córrego da Juerana	Lavradora	Lavrador	Sim
A14	15	Nestor Gomes	Lavradora	Lavrador	Sim
A15	16	Nestor Gomes	Lavradora	Lavrador	Não
A16	14	Córrego da Juerana II	Lavradora	Lavrador	Sim
A17	15	Km 32	Lavradora	Lavrador	Sim
A18	16	Km 44	Lavradora	-------------	Sim
A19	16	Nestor Gomes	Lavradora	Lavrador	Não
A20	16	Nestor Gomes	Lavradora	Lavrador	Não
A21	15	Km 28	Lavradora	Lavrador	Sim
A22	16	Km 35	Lavradora	Lavrador	Sim
A23	15	Km 35	Comerciante	Lavrador	Sim
A24	15	Km 28	Lavradora	Lavrador	Sim
A25	15	Santa Leocádia	Lavradora	Lavrador	Sim
A26	15	Km 13	Lavradora	Lavrador	Sim

Fonte: Ficha de matrícula disponível na secretaria da EEEFM “Nestor Gomes”

Tais informações nos ajudaram a compreender melhor os resultados no momento da análise e discussão dos resultados.

Com relação à professora, formou-se em Licenciatura Plena em Matemática, pelo Polo Universitário de São Mateus/ Universidade Federal do Espírito Santo, no ano de 2008. Atua no magistério desde 2008. Como o Estado permite ao professor trabalhar 50 horas semanais e os concursos se limitam a 25 horas, a professora realizou dois concursos, e por isso, possui duas cadeiras efetivas, as quais, à época da pesquisa, estavam concentradas nessa instituição, uma desde 2009 e a outra desde 2013, quando, também, regia 5 aulas para cada uma das duas turmas de 1º ano e 4 aulas para cada uma das duas de 3º ano, contando, ainda com 7 horas de planejamento, o que totaliza carga horária semanal de 25h no turno matutino. Nas outras 25h atua, na parte da tarde, como coordenadora de turno.

2.4 PROCEDIMENTOS PARA COLETA DE DADOS

Os dados foram coletados de acordo com a opção metodológica adotada em nossa pesquisa e, portanto, com técnicas e instrumentos a ela característicos, tais como:

- Diário de bordo;
- Observação participante,
- Oficina de Resolução de Problemas Matemáticos,
- Entrevista com a professora regente.

Com o intuito de nos familiarizarmos com o ambiente onde iríamos desenvolver nossas atividades, observamos duas aulas geminadas da professora regente. Nessas aulas pudemos perceber o espaço físico da sala que é constituído por seis luminárias, um quadro branco, quatro ventiladores de teto e as carteiras dispostas em 5 filas. Em relação as aulas, a professora fez a chamada, constando 22 alunos presentes e 4 ausentes, em seguida levou os alunos ao laboratório de informática e passou o vídeo

Ilha das Flores[6], com o intuito de explorá-lo em um trabalho que seria desenvolvido pelos alunos. Posteriormente, os alunos voltaram para sala e a professora deu visto na tarefa de casa, seguindo com a correção dessa tarefa no quadro, e conforme explicava, perguntava aos alunos se estavam entendendo os cálculos. Na sequência, passou no quadro uma atividade, e notamos que os alunos A17, A19 e A22 só começaram a copiar a atividade quando a professora chamou a atenção. Os alunos que estavam com dúvidas se dirigiam à mesa da professora para esclarecimento e os alunos A21, A23 e A24 mostraram interesse em ajudar os colegas que estavam próximo deles.

As *Oficinas de Resolução de Problemas* foram aplicadas durante o horário das aulas da professora, e dessa forma, não foi preciso retirar os alunos de sua sala de estudo. Nas Oficinas, os alunos resolveram os problemas por nós propostos e ao fim de cada encontro as resoluções foram recolhidas, bem como, suas representações acerca dos problemas trabalhados.

O diário de bordo acompanhou toda a trajetória da pesquisa. Segundo Fiorentini & Lorenzato (2012, p. 118) é "um dos instrumentos mais ricos na coleta de informações durante o trabalho de campo", pois nele o pesquisador retrata diálogos; episódios; descreve ambientes; faz descrições de pessoas, entre outros.

Por fim, realizamos uma entrevista com a professora regente, com o interesse de conhecermos melhor os alunos envolvidos na pesquisa e, posteriormente, consultamos o Projeto Político Pedagógico da escola, o Sistema SisGestão e a ficha de matrícula dos alunos, com os quais subsidiamos a descrição do espaço escolar e o perfil dos sujeitos da pesquisa.

2.5 ANÁLISES DOS DADOS E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Terminada a etapa de coleta de dados, realizamos a organização e leitura do material e fizemos a análise e interpretação dos dados de acordo com o referencial teórico à luz da História Cultural.

---

[6]Disponível em < https://www.youtube.com/watch?v=e7sD6mdXUyg>

Fiorentini & Lorenzato (2012, p. 133) admitem que a etapa de análise configura-se como a fase fundamental da pesquisa, pois “dela depende a obtenção de resultados consistentes e de respostas convincentes às questões formuladas no início da investigação”.

A tarefa de análise, conforme Lüdke & André (1986, p.45) implica

> [...] num primeiro momento, a organização de todo o material, dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes. Num segundo momento essas tendências e padrões são reavaliados, buscando-se relações e inferências num nível de abstração mais elevado.

Para a organização e interpretação dos dados, recorremos à algumas técnicas, tais como a análise de conteúdo, categorização e triangulação. A análise de conteúdo é retratada por Fiorentini & Lorenzato (2012, p.137) como

> [...] uma técnica que tem como principal função descobrir o que está por trás de uma mensagem, de uma comunicação, de uma fala, de um texto, de uma prática etc.
>
> [...] exige a utilização de critérios claramente definidos sobre registros fornecidos pelas pessoas interrogadas; tais critérios consideram as *palavras utilizadas nas respostas*, as *ideias* ou *opiniões expressas* e as *interpretações* e *justificativas apresentadas*.

Nesse processo de análise, categorizamos os dados em: 1] Registros dos alunos nas resoluções dos problemas; 2] Representação/apropriação dos problemas pelos alunos. As categorias, conforme Fiorentini & Lorenzato (2012, p.134), correspondem a um “processo de classificação ou organização de informações [...], isto é, em classes ou conjuntos que contenham elementos ou características comuns”. Para os autores, existem alguns princípios que devem ser observados pelo pesquisador:

> - [...] o conjunto das categorias deve estar relacionado a uma ideia ou conceito central capaz de abranger todas as categorias;
> - [...] é altamente desejável que essas categorias sejam disjuntas, isto é, mutualmente exclusivas, de modo que cada elemento esteja relacionado com apenas uma categoria;
> - [...] as categorias estabelecidas devem abranger todas as informações obtidas (p. 134).

Definidas as categorias de análise, utilizamos a técnica da triangulação com o intuito de

> […] abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do foco em estudo. Parte de princípios que sustentam que é impossível conceber a existência isolada de um fenômeno social sem raízes históricas,

> sem significados culturais e sem vinculações estreitas e essenciais com uma macrorealidade social (TRIVIÑOS, 1987, p. 138).

Para isso, aportamo-nos dos dados obtidos nas *Oficinas de Resolução de Problemas*, com o diário de bordo, na entrevista com a professora regente e nos documentos oficiais da escola.

A discussão dos resultados pautou-se, sobretudo, em três conceitos trabalhados pelo teórico Roger Chartier: *representação, apropriação* e *prática*, a partir da História Cultural, que, de acordo com Chartier (2002, p.16) “tem por principal objecto identificar o modo como em diferentes lugares e momentos uma determinada realidade social é construída, pensada, dada a ler”.

A noção de *representação*, conforme Chartier (2002) é entendida como o relacionamento de uma imagem presente e de um objeto ausente. Em nosso entendimento, está vinculada com o modo como vemos um objeto, uma situação ou uma circunstância e está relacionada com nossas apropriações.

A *apropriação*, segundo Chartier (2002, p. 26), reporta uma “história social das interpretações, remetidas para as suas determinações fundamentais (que são sociais, institucionais, culturais) e inscritas nas práticas específicas que as produzem”. Podemos dizer que as apropriações são as interpretações que fazemos de todas as situações ou objetos.

As *práticas* “visam fazer reconhecer uma identidade social, exibir uma maneira própria de estar no mundo, significar simbolicamente um estatuto, uma posição” (CHARTIER, 2002, p.23). Ainda segundo o autor, as práticas de apropriação cultural são as formas diferenciadas de interpretação, consideradas como o modo de convivência, os costumes, os “modos de fazer”.

Assim, os conceitos de representação, apropriação e prática viabilizaram compreendermos a visão dos alunos e da professora regente a respeito dos problemas explorados em nossa pesquisa.

3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: DE CONTEÚDO A SE ENSINAR À METODOLOGIA DE ENSINO

Poderemos conceituar a resolução de problemas como uma prática ou ação na qual nos propomos dar solução a situações, as mais variadas, como também, poderemos conceber a Resolução de Problemas como uma metodologia possível para o processo ensinoaprendizagem da Matemática[7]. De qualquer forma, ao falarmos sobre essa temática, devemos, sobretudo, nos perguntar: afinal, o que é um problema?

Para Dante (1989, p.10) um problema é "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la". Muito próxima à sua concepção está a dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p.44), para os quais "demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado".

Segundo Echeverria & Pozo (1998), uma situação só pode ser considerada como um problema, quando a pessoa não possui de imediato, procedimentos para resolvê-lo e, ainda, essa situação pode não ser um problema para outra pessoa.

Aquilo que não sabemos, mas temos interesse em resolver é a definição dada por Onuchic (1999). Para Japiassú & Marcondes (2006, p.226) "[...] é toda questão crítica, de natureza especulativa ou prática, examinando o fundamento, a justificativa e o valor de um determinado tipo de conhecimento em forma de ação".

Adotaremos a definição dada por Porto da Silveira (2001) para o desenvolvimento de nossa pesquisa, para o qual "um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo, e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado", uma vez que o resolvedor precisa inventar estratégias e criar ideias para solucioná-

[7] A expressão Resolução de Problemas - RP com "R" e "P" maiúsculos será sempre utilizada quando se tratar de uma metodologia de ensino e com "r" e "p" minúsculos, quando se tratar de conteúdo ou o desenvolvimento de uma atividade matemática.

lo. Para Porto da Silveira (2001), pode ocorrer que a pessoa conheça o objetivo que se quer chegar, “mas só estará enfrentando um problema se ele ainda não tem meios para atingir tal objetivo”.

Considerando a natureza dos problemas, a literatura tem-nos apontado diferentes classificações, como por exemplo, exercícios de reconhecimento, exercícios de algoritmos, problemas-padrão, problemas-processo ou heurísticos, problemas de aplicação e problemas quebra-cabeça[8] (DANTE, 1989); ou ainda, problemas rotineiros, problemas não-rotineiros, problemas reais e problemas recreativos (VARIZO, 1993). Ambos os autores em muito se aproximam, entretanto, vamos nos ater, em função de nosso objeto de pesquisa, na definição dada por Varizo (1993, p.9) para problemas recreativos, quais sejam, “aqueles que envolvem aspectos históricos curiosos, lendas, jogos (principalmente naqueles onde se procura descobrir a estratégia que leva a vitória) do tipo quebra-cabeça”, que favorecem o desenvolvimento de mecanismos mentais para a produção de conhecimento.

Nesse sentido, categorizamos os problemas aplicados nas oficinas desenvolvidas como recreativos, por apresentarem aspectos históricos, aguçarem a curiosidade do leitor, instigarem a imaginação e, como nas demais tipificações, proporcionarem o uso do raciocínio ao serem resolvidos.

Ao longo dos últimos anos temos acompanhado algumas discussões em torno da utilização de metodologias que propiciem o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos de forma contextualizada, seja em eventos científicos, seja em documentos oficiais. Na década de 1990 no Brasil foi elaborado os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1º a 4º série do Ensino Fundamental, um conjunto de documentos com o objetivo de auxiliar aos professores na execução de seu trabalho, apontando metas de qualidade com o propósito de ajudar aos alunos a “enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres” (BRASIL, 1997, p.5).

---

[8] São problemas que envolvem e desafiam grande parte dos alunos. Geralmente constituem a chamada Matemática recreativa, e sua solução depende, quase sempre, de um golpe de sorte ou da facilidade em perceber algum *truque*, que é a chave da solução (DANTE, 1989, p.21).

Posteriormente, foram elaborados os PCN - 5ª a 8ª séries, considerando a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Esses documentos denotam os resultados de um longo trabalho que contou com a participação de muitos professores brasileiros, considerando suas experiências e seus estudos (BRASIL, 1998).

Conforme os PCN a proposta de ensino com o foco na resolução de problemas é resumida nos princípios:

> - O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema.
> - O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório.
> - Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema [...].
> - O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas.
> - A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 1997, p.43).

Subsequentes a esses documentos, o Ministério da Educação publicou os PCN - Ensino Médio. Em um trabalho conjunto com educadores de todo o País, chegou-se a um novo perfil para o currículo do Ensino Médio, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta (BRASIL, 2000a). Esse documento afirma que

> Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, buscamos dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.
> Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios da reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias (BRASIL, 2000a, p.4).

Nessa reforma curricular, a aquisição de conhecimentos matemáticos está vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar Matemática. Assim, os PCN Ensino Médio, Matemática, propõem que

> Os alunos, confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a

> sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação (BRASIL, 2000b, p.52).

Além desses documentos nacionais, no estado do Espírito Santo, após terem sido realizados seminários nos anos de 2003 a 2006, foi priorizado em 2007 e 2008, a elaboração do Currículo Básico Escola Estadual (CBEE), contendo os Conteúdos Básicos Comuns (CBC). Participaram da elaboração deste currículo especialistas de cada disciplina, técnicos das Superintendências Regionais de Educação do Espírito Santo, consultores, professores, pedagogos e representantes de movimentos sociais organizados. “Todos foram mobilizados a pensar e propor alternativas político-pedagógicas com vistas à promoção do educando e, consequentemente, da educação pública” (ESPIRITO SANTO, 2010, p.22).

O CBEE apresenta a Resolução de Problemas como uma alternativa metodológica. Nele, essa metodologia “tem a proposta de romper com o currículo linear e avançar num ensino que integre conteúdos e articule conhecimentos, propiciando o desenvolvimeno de uma atitude de investigação frente às situações-problema”, além do desenvolvimento da capacidade de se comunicar matematicamente e “utilizar processos de pensamento mais elevados” (ESPIRITO SANTO, 2010, p.112).

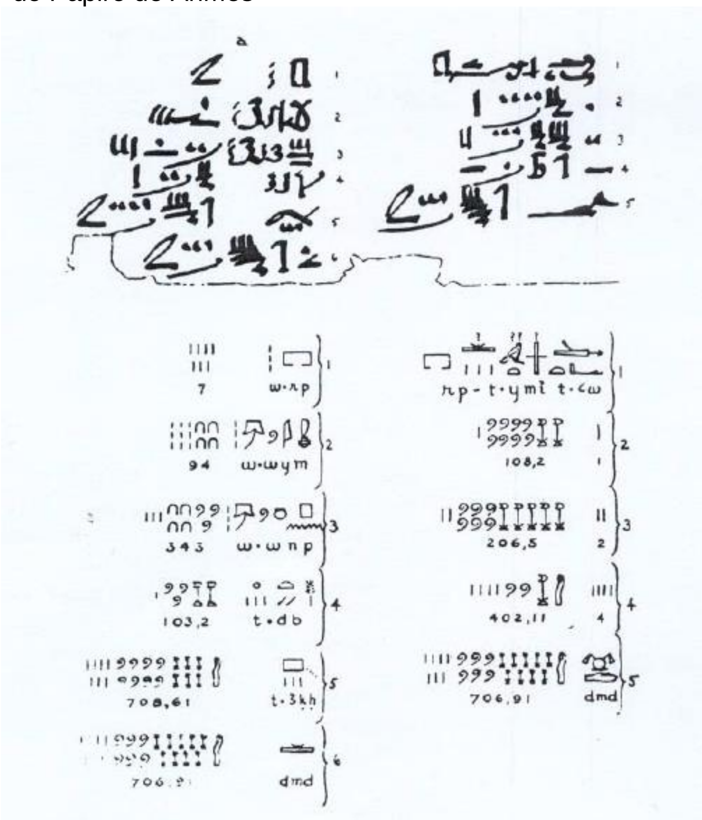
Segundo as orientações do CBEE, trabalhar por meio da Resolução de Problemas requer uma nova postura e organização da prática de sala de aula. A organização desse trabalho exige uma ação direta do professor, contribuindo para que o aluno avance na construção do conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais apresentam a Resolução de Problemas como uma “tendência” em Educação Matemática e preconizam recorrer também à História da Matemática como um recurso que pode, em diversas situações, esclarecer como determinadas ideias matemáticas foram construídas. Nesse sentido, optamos também, para entendermos um pouco mais acerca de alguns princípios que norteiam o ensino da Matemática, fazer um breve percurso histórico sobre a Resolução de Problemas.

3.1. BREVE HISTÓRICO SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Resolver problemas, talvez seja um dos objetivos mais explícitos do processo ensinoaprendizagem em Matemática, uma vez que, desde as civilizações mais antigas, como a egípcia, a chinesa e a grega, lá estavam eles como entretenimento ou tarefas a realizar. Stanic e Kilpatrick (1989), referindo-se a Chase (1979), citam o Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes de um documento antigo, por volta de 1650 a.C., como um manuscrito matemático egípcio que consistia numa coleção de problemas. Em um dos problemas, era necessário que se efetuasse a soma de cinco termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo e a razão são iguais a 7. O Papiro apresenta uma forma abreviada do problema, cuja resposta é dada por meio de dois métodos de resolução (Figura 1).

Figura 1 - Um problema com progressões geométricas do Papiro de Ahmes



Fonte: Chase (1979, p.17) apud Stanic e Kilpatrick (1989).

Stanic e Kilpatrick (1989, p.2) citam outros dois problemas antigos, extraídos de Stanford (1927). Um deles vem de *Nine Sections*, um documento chinês, cerca de 1000 a.C. e o outro vem do grego como uma versão primitiva do problema da cisterna:

> 1) De duas ervas daninhas de água, uma cresce três “pés” e a outra um “pé”, no primeiro dia. O crescimento da primeira é, todos os dias, metade do dia anterior, enquanto a outra cresce 2 vezes o que cresceu no dia anterior. Em quantos dias terão as duas atingido a mesma altura?
>
> 2) Eu sou um leão de bronze; as minhas goteiras são os meus dois olhos, a minha boca e a parte lisa da minha pata direita. O meu olho direito debita um jarro em dois dias, o meu olho esquerdo em três, e o meu pé em quatro. A minha boca é capaz de o encher em seis horas. Diga-me quanto tempo, os quatro juntos, levarão para enchê-lo.

Segundo os autores, problemas semelhantes são encontrados em livros de matemática dos séculos XIX e XX, e as discussões, principalmente no último século, permearam sobre ensino da resolução de problemas, que então, significava apresentar problemas e mostrar uma solução técnica específica. Stanic & Kilpatrick (1989, p.7) consideram que

> O papel da resolução de problemas na Matemática escolar é o resultado do conflito entre forças ligadas a ideias antigas e persistentes acerca das vantagens do estudo da Matemática e uma variedade de acontecimentos que se influenciaram uns aos outros e que ocorreram no princípio do séc. XX.

Eles afirmam que a razão para a grande ênfase dada à resolução de problemas por educadores matemáticos é que até o século XX o estudo de matemática contribuiria para a melhoria do pensamento das pessoas, para o desenvolvimento do poder de raciocinar.

Durante o século XIX, a *Teoria da Disciplina Mental* vigorava como teoria psicológica baseando-se na ideia de que era tarefa da escola ajudar aos alunos a desenvolverem as faculdades de percepção, memória, intuição, imaginação e compreensão, e que altos níveis matemáticos seriam um excelente veículo para o desenvolvimento dessas faculdades (STANIC; KILPATRICK, 1989).

O trabalho de Edward L. Thorndike[9] é, geralmente, reconhecido como contestador das noções básicas da *Teoria da Disciplina Mental*, pois segundo Morais & Onuchic (2014, p.19), ele buscou desenvolver uma teoria psicológica, conhecida como *Conexionismo* na qual “toda aprendizagem consiste de adição, eliminação e de organização de conexões”, e o processo de ensino nos seguintes passos: 1. Lei do

[9] Biografia disponível em: http://www.uniriotec.br/~pimentel/disciplinas/ie2/infoeduc/teothorndike.html>

feito[10]; 2. Lei da prontidão ou da maturidade específica[11]; 3. Lei do exercício ou repetição[12].

Thorndike escreveu, em 1921, o livro *The New Methods in Arithmetic*, publicado no Brasil, em 1936, com o título *A Nova Metodologia da Aritmética*. Há nesse livro algumas orientações metodológicas sobre a resolução de problemas, como veremos a seguir:

> 1] Se tem a certeza de que sabe resolver o problema, resolva-o imediatamente. 2] Se não tem, considere a questão, os dados e o que poderá fazer com êles, perguntando a si mesmo: Que é que se quer saber neste problema? Que tenho de procurar? De que dados disponho para achar a solução? Que sei a respeito dêles? Que dêvo fazer com eles? Que poderei fazer com os números e com o que sei a respeito deles? 3] Pense no que vai fazer e porquê vai fazê-lo assim e indique as operações de modo a saber o que fez. 4] Tire a prova dos resultados: veja se são razoáveis, e se estão de acordo com o que diz o problema (THORNDIKE,1936, p.167).

Conforme Thorndike (1936), essas técnicas só poderiam ser ensinadas, à época, aos alunos no 5º ou 6º ano, pois antes dessa fase escolar, aconselhava-se direcionar a atenção do aluno na obtenção da resposta e só, excepcionalmente, levá-lo a pensar com tais questionamentos.

O ensino de matemática no início do século XX, segundo Onuchic (1999), baseava-se na rotina e memorização de fatos e algoritmos, o professor explicava o conteúdo e o aluno recebia a informação, repetindo os procedimentos e treinando com muitos exercícios, tanto em sala quanto em casa. Apesar do bom desempenho de alguns alunos, a maioria logo esquecia o que tinha memorizado.

Posteriormente, outra orientação para o ensino contrapor-se-ia a esse tipo de práticas; conforme Onuchic & Allevato (2004) os alunos deviam aprender com compreensão e entender o que faziam. Verificamos no texto intitulado *Os problemas,* escrito por Casasanta (1933), publicado na *Revista do Ensino*, que a elaboração dos problemas

---

[10]Esta lei traz consigo uma concepção de que a aprendizagem na qual uma conexão é fortalecida quando seguida de uma consequência satisfatória (é mais provável que a mesma resposta seja dada outra vez ao mesmo estímulo) e, inversamente, se a conexão é seguida de um "estado irritante" ela é enfraquecida (é provavelmente que a resposta não seja repetida) (OSTERMANN & CAVALCANTI, 2010, p.11).
[11]Se o professor demonstrar ao aluno que sua resposta é culturalmente aceita mais predisposto ele estará para responder de uma certa maneira (OSTERMANN & CAVALCANTI, 2010, p.11).
[12] É preciso praticar para melhorar o desempenho (OSTERMANN & CAVALCANTI, 2010, p.11).

teria sempre que possível emergir da realidade que os alunos estavam vivendo, além disso, para o autor um bom problema precisava obedecer a pelo menos uma das características:

> a) o problema deve inspirar-se de uma idéia atraente; b) o problema deve oferecer alguma utilidade; c) o problema deve reproduzir uma situação verossimil e que se verifique comumente na realidade; d) o problema deve ser enunciado claramente; e) o problema não deve ser mais difícil do que comumente se apresenta na realidade; f) o problema deve conter, mais ou menos, aquele grau de interesse que os problemas reais contêm para os alunos; g) o problema deve ser formulado com bom senso (CASASANTA, 1933, p.4).

Porém, segundo Casasanta (1933, p.3), no início da década de 30, os manuais continuavam "a fazer problemas à antiga", sem a preocupação com o conjunto de condições estabelecidas para a formulação de um bom problema.

Entre meados da década de 1930 e fins da década de 1940, nos Estados Unidos, segundo Morais & Onuchic (2014), tanto publicações quanto o trabalho docente estavam voltados para os processos de aprendizagem e não somente para o produto final, sustentado pela corrente psicológica da *Teoria Significativa* de Willian Brownell. Segundo as autoras, foi nesse cenário que o matemático George Polya[13] tratou a Resolução de Problemas como teoria, e em seu livro, *How to Solve it,* publicado em 1945, posteriormente, traduzido para o português, na década de 1970, como *A Arte de Resolver Problemas,* que descreve quatro fases, interdependentes, para se resolver um problema matemático, conforme segue:

Quadro 2 - Fases do processo de resolução de problemas propostos por Polya.

COMO RESOLVER UM PROBLEMA	
1ª Fase COMPREENSÃO DO PROBLEMA	*Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?* É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
2ª Fase ESTABELECIMENTO DE UM PLANO	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob forma ligeiramente diferente? *Conhece um problema correlato?*

[13] George Polya nasceu na Hungria, mas sua pesquisa sobre Resolução de Problemas (RP) ganhou forças nos Estados Unidos quando assumiu uma vaga como professor titular na Universidade de Stanford (MORAIS & ONUCHIC, 2014, p.22).

	Conhece um problema que lhe poderia ser útil? *Considere a incógnita!* E procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. *Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo?* É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte as definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como ela pode variar? É possível obter dos dados alguma coisa útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
3ª Fase **EXECUÇÃO DO PLANO**	Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
4ª Fase **RETROSPECTO**	É possível *verificar o resultado?* É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006, p. XX).

Segundo Polya (2006), primeiramente, faz-se necessário que o aluno compreenda o problema, ou seja, nessa fase inicial o problema é investigado de modo que as informações, como a incógnita e os dados, fiquem claros para o resolvedor. Na segunda fase, com as informações do problema evidentes, o aluno busca traçar o plano de resolução, onde estabelece a conexão entre os dados e a incógnita. Após, o aluno recorre as seus conhecimentos e executa o plano traçado. Na quarta fase, os resultados são testados e validados. Há nessa etapa final a possibilidade de verificar se há outros caminhos para se chegar a mesma resposta.

Subsequente, nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de matemática passaria por “novas” mudanças em função do *Movimento da Matemática Moderna*. Kline (1976, p. 108) afirma que “o desenvolvimento lógico como a estrada para a compreensão, o rigor, a precisão através da terminologia e do simbolismo e a ênfase na matemática, pelo que ela representa” compunham o ensino nessa abordagem.

Tanto os professores quanto os pais de alunos, relatam-nos Onuchic & Allevato (2011), não estavam preparados para este tipo de trabalho direcionado a preocupações exageradas com as abstrações e estruturações algébricas o que, consequentemente, provocou o fracasso desse movimento. Segundo as autoras, nos Estados Unidos houve uma tentativa de retorno à *Teoria Conexionista* proposta por Thorndike na década de 1920, intitulado de *Volta as Bases,* porém não conseguiu adeptos em outros países e nem força suficiente para prosseguir.

A partir do reconhecimento da ineficácia das propostas anteriores, pois testes internacionais mostraram que as crianças norte-americanas obtiveram, ao resolver problemas, um rendimento insatisfatório, os americanos constataram que o ensino de matemática precisava de mudanças. Eles perceberam que era necessário retomar o ensino por compreensão, de modo que os estudantes pudessem, além de resolver, entender os princípios e operações matemáticas do problema, ampliando os conhecimentos adquiridos para outros contextos. Nesse cenário a Resolução de Problemas adquiriu espaço nos currículos escolares dos Estados Unidos e sucessivamente, em vários países do mundo (MORAIS & ONUCHIC, 2014).

Assim, em 1980, foi editado um documento intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980’ s* publicado pelo National Council for Teachers of Mathematics (NCTM), que consoante Diniz (2001) a Resolução de Problemas foi indicada como o centro do ensino e das pesquisas da década de 1980.

Esse documento - *An Agenda for Action,* recomendava várias ações, tais como:

- o currículo matemático deveria ser organizado ao redor de resolução de problemas;
- a definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveria ser desenvolvida e expandida de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;
- os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
- materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;

> - os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver os estudantes com resolução de problemas, apresentando aplicações em todos os níveis;
> - pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em resolução de problema (ONUCHIC, 1999, p.205).

Nesse mesmo ano, Krulik & Reys (1997) organizaram o livro *Problem Solving in School Mathematics*, cuja tradução, *A Resolução de Problemas na Matemática Escolar*, para o português, coube a Hygino H. Domingues e Olga Corbo. Essa obra fora constituída por 22 artigos escritos por especialistas em educação matemática, sob influência das ideias de George Polya.

Em um dos artigos, intitulado *Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica,* o autor Nicholas A. Branca (1997, p.4) defende a *resolução de problemas* como uma expressão mais abrangente, isto é, para ele “[...] pode significar diferentes coisas para diferentes pessoas ao mesmo tempo e diferentes coisas para as mesmas pessoas em diferentes ocasiões”.

Schroeder & Lester (1989), dispõem em três categorias o ensino de Matemática e a resolução de problemas, quais sejam:

[1] O ensino sobre resolução de problemas

Nessa concepção de ensino a resolução de problemas é vista como um novo conteúdo. É dada uma atenção especial às heurísticas em sala com o objetivo de melhorar as habilidades dos alunos em resolver problemas, com ênfase nas etapas propostas por George Polya (2006), descritas anteriormente no quadro 2.

Santos-Wagner (2008) nos diz que, nessa abordagem, o professor apresenta, durante a resolução de problemas, algumas heurísticas e estratégias do tipo: procurar regularidades, resolver um problema mais simples, resolver o problema de trás para frente; organizar os dados em uma tabela e fazer um desenho ou um diagrama.

[2] O ensino para resolução de problemas

Nessa categoria muitos conceitos matemáticos ensinados aos alunos com o intuito exclusivo para se resolver os problemas, ora rotineiros, ora não-rotineiros. A dinâmica requer que o professor explique a matéria e a finalize com problemas. Allevato (2014) ressalta ser essa concepção a que mais se faz presente nas aulas e nos livros texto de matemática, uma vez que uma atividade de resolução de problemas só pode se realizar após a introdução de um novo conceito.

[3] O ensino via resolução de problemas

O ensino via resolução de problemas considera que a aprendizagem ocorre durante o processo da tentativa de resolver os problemas. O ambiente de aprendizagem oferece um cenário natural para que os alunos apresentem várias soluções para o mesmo problema e aprendam matemática por meio das interações sociais (CAI & LESTER, 2012).

Os problemas são vistos não somente como objetivo para a aprendizagem de matemática, mas como um meio de fazê-lo. Discorre Allevato (2014) que essa perspectiva se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, a partir da década de 90, cujas finalidades eram auxiliar aos professores e destacar aspectos essenciais ao ensino de matemática. Entre as publicações, merecem destaque os *Standards 2000*, nos quais são indicados cinco *Padrões de Procedimentos para a Matemática Escolar*, entre eles, o primeiro é a Resolução de Problemas (NCTM, 2000).

Parece-nos haver, assim posto, diferentes interpretações, ou melhor, apropriações, que promovem representações que geram práticas e vice–versa, com relação ao ensino da Matemática. Vejamos, a seguir, o que estudiosos vem debatendo sobre a Resolução de Problemas após a década de 1990.

3.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: OLHARES EM TORNO DE UMA METODOLOGIA

Van de Walle (2009) expõe algumas razões para prosseguir com o esforço de ensinar por meio da Resolução de Problemas, ou seja, concebê-la como uma metodologia de ensino. Segundo o autor, a RP concentra a atenção dos alunos sobre as ideias; desenvolve a convicção de que são capazes de fazer matemática e dar sentido a ela. Sugere, ainda, um formato de aula aos professores que se constituem em uma estrutura simples de três fases para ensinar por meio da Resolução de Problemas: fase antes, durante e depois (Quadro 3).

Quadro 3 - Estrutura proposta por Van de Walle (2009), para se ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas

Fase ANTES	**Preparando os alunos** • Verifique se o problema foi compreendido. • Ative os conhecimentos prévios úteis. • Estabeleça expectativas claras para os produtos.
Fase DURANTE	**Alunos trabalhando** • Deixe os alunos construírem seus conhecimentos. Evite antecipações desnecessárias. • Escute cuidadosamente. • Forneça sugestões adequadas. • Observe e avalie.
Fase DEPOIS	**Alunos debatendo** • Encoraje a formação de uma comunidade de Estudantes. • Escute/aceite soluções dos estudantes sem julgá-las. • Sintetize as principais ideias e identifique futuros problemas.

Fonte: Van de Walle (2009, p.62).

Essas fases são construídas ao redor de um problema ou tarefa proposta aos alunos. Na fase *antes* o professor se certifica que os alunos compreenderam o problema; na fase *durante* os alunos exploram o problema, encorajados pelos questionamentos do professor que propõe dicas e sugestões quando preciso; na fase *depois*, os alunos discutem e justificam as soluções encontradas, trabalhando segundo Van de Walle (2009) como uma *comunidade de aprendizes*.

Allevato & Onuchic (2014), também, tratam a RP como metodologia, entretanto, dão a ela outra nomenclatura qual seja, *Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas*[14]. Essa metodologia vem sendo discutida pelo grupo GTERP[15], desde 1992, na UNESP de Rio Claro e foi organizada em uma sequência de 10 passos, que funcionam como um roteiro para os professores, quais sejam: (1) Proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca do consenso, (9) formalização do conteúdo, (10) proposição e resolução de novos problemas. O trabalho em sala de aula direcionado por essa metodologia coloca o aluno no centro das atividades de sala de aula, sem destituir o fundamental papel do professor, qual seja, organizador e mediador do processo de ensino (ALLEVATO & ONUCHIC, 2014).

---

[14] Para saber mais ver: Onuchic & Allevato (2011, p.83-4; Allevato & Onuchic (2014, p.45).

[15] Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas, coordenado pela Prof.ª Dr.ª Lourdes de La Rosa Onuchic.

O Grupo de estudos MATHEMA, dirigido pelas pesquisadoras Smole & Diniz (2001) vem promovendo publicações, materiais e recursos pedagógicos que contribuem para o processo educativo. Diniz (2001) enfatiza que a Resolução de Problemas dispõe de situações que não possuem uma solução visível e que exigem que o resolvedor articule seus conhecimentos adquiridos na busca pela solução do problema.

Para Menino (2013), a metodologia de Resolução de Problemas não valoriza processos mecânicos do conhecimento, pois faz com que os alunos se tornem investigadores diante de uma situação desafiadora, de forma a compreender e questionar os conceitos que necessitam para resolver os problemas.

A Resolução de Problemas, na visão de Silva & Siqueira Filho (2011, p.145), "[...] aguça processos cognitivos, uma vez que dá ao aluno possibilidades de reflexão, análise dos procedimentos efetivados, descobertas de caminhos diferenciados para a conclusão do problema em pauta, releitura do resultado encontrado, dentre outras". Siqueira Filho (2015, p.20), ainda, afirma que quando o professor adota o trabalho à luz da Metodologia de Resolução de Problemas almeja-se que ele procure

> 1] definir o que seja um problema; 2] diferenciar "exercícios" e "problemas" 3] explorar problemas dos tipos Rotineiros, Não-rotineiros, Reais ou Recreativos; 4] fazer perguntas que ajudem o aluno raciocinar e resolver problemas com mais confiança; 5] elaborar e/ou selecionar, em livros didáticos, boas atividades; 6] avaliar as atividades que promoveu.

O mesmo autor elenca que esses encaminhamentos funcionam não como um roteiro, mas sim como suporte que contribui para melhor conduzir o processo de ensino e aprendizagem; fazendo do professor um elo entre o aluno e o saber científico, ou seja, mediador do processo educacional.

Perpassados diferentes tempos e épocas e em função das oficinas realizadas com problemas, como dito anteriormente, do tipo recreativos, cabe-nos discorrer a respeito da *Matemática Recreativa*, elencando obras e matemáticos que contribuiram para a sua disseninação.

4 A MATEMÁTICA RECREATIVA

4.1 TRILHANDO PELA MATEMÁTICA RECREATIVA

A *Matemática Recreativa*, conforme Lopes (2012), é uma Matemática que as pessoas fazem por satisfação e prazer, para desenvolver a mente, para pensar, para se divertir, para jogar; e ainda, interessa aos matemáticos puros, pois o que hoje é recreativo sem aplicação poderá ser um importante instrumento para a Matemática pura.

Costa (2014) enfatiza que a *Matemática Recreativa* envolve não apenas jogos ou puzzles[16] matemáticos, mas toda atividade com caráter lúdico e pedagógico, cuja pretensão é dar soluções a certo problema. O artigo de Trigg (1978), intitulado *What is Recreational Mathematics?* apresenta várias respostas de matemáticos à temática discutida, concluindo que muitos temas não são classificados como recreativos para assim ter uma aceitação universal.

Vários campos da Matemática, segundo Gallagher (1997), iniciaram-se como atividades, meramente, recreativas e que hoje são fortemente desenvolvidas, como é o caso da Análise Combinatória, Teoria dos Jogos, Teoria dos Números e a Topologia. Segundo Tahan (1962), matemáticos de elevada notabilidade na história, tiveram uma atenção especial para o estudo das recreações e curiosidades matemáticas, como o célebre Leonhard Euler[17] (1707 - 1788), Pierre de Fermat[18] (1601 - 1665), William Rowan Hamilton [19] (1805 – 1865).

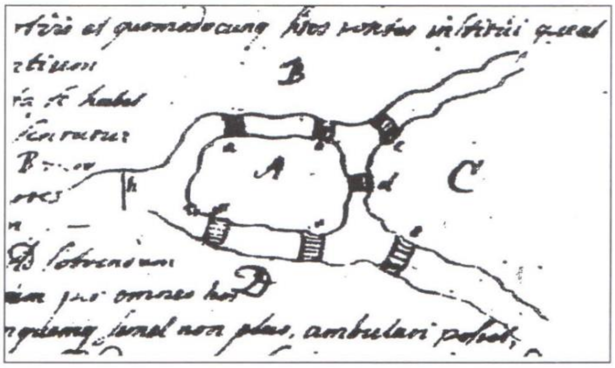
Leonhard Euler (1707 - 1788), por exemplo, deu início a *Teoria dos Grafos* ao resolver o problema recreativo conhecido como *problema das pontes de Königsberg,* em 1735 (SILVA, 2004). Segundo Flood & Wilson (2013), a cidade de Königsberg (Figura 2), localizada na Prússia Oriental, consistia de quatro regiões unidas por sete pontes, e os seus habitantes tentavam atravessar cada ponte apenas uma vez e questionavam

---

[16]Qualquer jogo ou problema que ofereça sérias dificuldades. Adivinhação, enigma, charada, quebra-cabeça. Disponível em< http://www.dicio.com.br/puzzle/>
[17] Biografia disponível em Eves (2004, p. 472).
[18] Biografia disponível em Eves (2004, p. 390).
[19] Biografia disponível em Eves (2004, p. 553).

essa possibilidade. Conforme os autores, Euler provou que esse passeio é impossível usando um argumento de contagem que envolvia o número de pontes de cada região.

Figura 2 - Desenho das sete pontes de Euler



Fonte: Flood & Wilson (2013)

William Rowan Hamilton (1805 – 1865) segundo Eves (2004, p.580) foi o inventor do *jogo hamiltoriano,* qual seja, uma recreação matemática que “consiste em determinar um caminho ao longo das arestas de um dodecaedro regular passando uma, e uma só, vez em cada um dos vértices do poliedro”. Esse jogo também foi chamado *Viagem pelo Mundo*[20], porque cada vértice possuía um pequeno eixo e o nome de uma cidade: Dublin, Roma, Paris, Madri, ..., onde o jogador executaria um itinerário passando por cada cidade uma única vez (GUZMÁN, 1991). Para facilitar, o jogo pode ser adaptado a um grafo, como mostra a figura 3.

Figura 3 - Grafo equivalente ao Jogo Hamiltoriano

Fonte: Guzmán (1991).

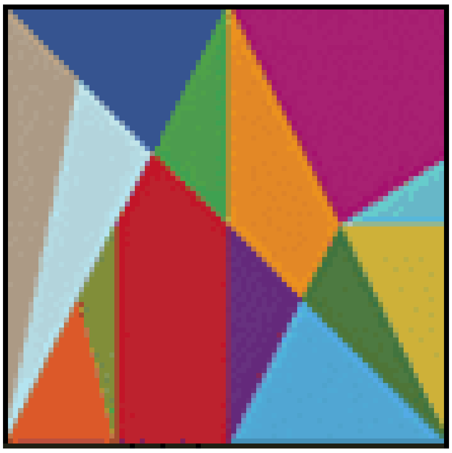
[20] Disponível <http://www.prof2000.pt/users/miguel/grafos/joghami.htm>

Outra recreação matemática merece destaque. Conforme Eves (2004) a correspondência de cartas entre Pierre de Fermat (1601 - 1665) e Blaise Pascal (1623 - 1662)[21], ao tentar resolver o *problema dos pontos*[22], levou a *Teoria das Probabilidades*. O autor menciona que esse problema já havia sido discutido por outros matemáticos,

> [...] Paccioli, em *Suma*, de 1494, foi um dos primeiros autores a introduzir o problema dos pontos num trabalho de matemática. O problema foi também discutido por Cardano e Tartaglia. Mas só se verificou um avanço efetivo quando, em 1654, o Chevalier de Méré, um hábil e experiente jogador, cujo raciocínio teórico sobre o problema não coincidia com suas observações, o propôs a Pascal. Este interessou-se pelo problema e o levou ao conhecimento de Fermat. Seguiu-se uma notável correspondência entre os dois matemáticos, na qual o problema foi resolvido correta mas diferentemente por cada um deles. Pascal resolveu o caso geral, obtendo muitos resultados através do triangulo aritmético. Essa correspondência lançou os fundamentos da moderna teoria das probabilidades (EVES, 2004, p.365).

Conforme Lopes (2012) dentre muitos matemáticos de destaque, Arquimedes (287a.C – 212a.C), natural de Siracusa, é considerado como o um importante matemático recreativo. Segundo Eves (2004, p.196), o *Loculus Archimedius*[23], um quebra-cabeça instigante constituído por um quadrado particionado em 14 peças poligonais, foi planejado por Arquimedes, e "é provável que seu nome seja uma maneira de expressar que ele é difícil e inteligente" (Figura 4).

Figura 4 - Stomachion



Fonte: Lopes (2012)

[21] Biografia disponível em Eves (2004, p. 361).
[22] Esse problema pede que se determine a divisão das apostas de um jogo de azar interrompido, entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecida a contagem no momento da interrupção e o número de pontos necessários para se ganhar o jogo (EVES, 2004, p.365).
[23] Também chamado de Stomachion.

O italiano Leon Battista Alberti (1404 - 1472), segundo Cesana (2013), escreveu a obra *Matemática Lúdica* (ou, na versão em latim, *Ludi rerum mathematicarum*) e dedicou seu trabalho ao príncipe Meliaduse, denominando o texto de "páginas de entretenimentos matemáticos". Esta obra é "questionada por D'Amore (2005), no início de seu artigo, se - dentro da produção multifacetada de Alberti -, ela fora um mero divertimento intelectual ou um trabalho a ser contado entre os textos mais representativos da época" (CESANA, 2013, p.91).

Matemáticos franceses do século XVII, segundo Eves (2004) deixaram suas contribuições para a matemática recreativa. O autor cita Claude-Gaspar Bachet, Sieur de Méziriac (1581-1638), um matemático, filósofo, teólogo, poeta e escritor, também conhecido como Bachet de Méziriac que publicou o clássico *Problémes Plaisants et Délectables,* em 1612. Eves (2004) diz que essa obra foi republicada em 1624, com ampliações, a qual contém muitas questões e truques aritméticos, que tornariam a aparecer em várias coleções subsequentes de recreações e quebra-cabeças matemáticos.

Claude Mydorge (1585 - 1647), geômetra e físico parisiense e amigo íntimo de Descartes "deixou um importante manuscrito com os enunciados e soluções de mais de mil problemas de geometria e editou a popular *Récréations Mathématiques* de Leurechon" (EVES, 2004, p.400).

Outros matemáticos tiveram suma importância na divulgação da *Matemática Recreativa*. O americano Sam Loyd (1841 – 1911), conforme O'Connor & Robertson (2003), foi criador de enigmas e recreações matemáticas com grande destaque nos Estados Unidos. Segundo o autor, Sam Loyd aprendeu a jogar xadrez aos 10 anos e aos 14 anos teve o seu primeiro problema de xadrez publicado na *New York Saturday Courier*; foi colunista, compondo problemas de xadrez para a revista *Scientific American Supplement.* Além dos problemas de xadrez, Loyd teve grande fascínio por enigmas matemáticos, tanto que escreveu mais de dez mil quebra-cabeças com ideias matemáticas sofisticadas, como exemplos, *14-15 Puzzle* e *Get Off the Earth*. Até a sua morte, foi colunista de vários jornais e revistas editando enigmas matemáticos. A *Cyclopaedia de 5000 Quebra-cabeças, truques e enigmas de Sam Loyd*, foi publicada em 1914, pelo filho após a sua morte (O'CONNOR & ROBERTSON, 2003).

Yakov Perelman (1882 - 1942), autor russo, publicou em 1913 o livro *Física Recreativa*, e posteriormente, *Álgebra Recreativa*, *Aritmética Recreativa*, *Geometria Recreativa*, *Astronomia Recreativa*, *Matemáticas Recreativas*, entre outros. Aproximadamente, na Rússia, desde 1913, os livros de Perelman alcançaram mais de 300 edições, com tiragem de 15 milhões de exemplares, traduzidos por várias línguas, dentre o espanhol, alemão, francês, inglês, italiano, português, checo, búlgaro, finlandês entre outras línguas (BARROS, 2001).

Martin Gardner (1914 - 2010), autor americano, é umas das personalidades de destaque na área da Matemática Recreativa. Segundo O'Connor & Robertson (2010), durante 25 anos Gardner escreveu para a revista *Scientific American*, com uma coluna intitulada *Mathematical Games,* sendo esse conteúdo editado posteriormente em livros. Dentre suas publicações destacamos algumas de suas obras que apresentam um caráter lúdico: *Aha! Insight* (1978), *Aha! Gotcha :Paradoxes to Puzzle and Delight* (1982), *Mathematics, Magic and Mystery*(1956), *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (1959), *More Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (1960), *Entertaining Mathematical Puzzles* (1986), *Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers* (1988), *Puzzles from Other Worlds* (1984).

Considerando alguns estudos de pesquisadores brasileiros, Lopes (2012) apresenta Malba Tahan - pseudônimo de Júlio Cesar de Mello e Souza (1895-1974) como o principal nome da *Matemática Recreativa* no Brasil. Julgamos Malba Tahan um dos divulgadores da *Matemática Recreativa* mundial, ao lado dos norte-americanos Sam Loyd (1841-1911) e Martin Gardner (1914-2010) e do russo Yakov Perelman (1882 – 1942). Malba Tahan publicou mais de uma centena livros, dentre os quais, muitos são referentes à *Matemática Recreativa*. Além de livros, Brolezzi (2013) afirma que Melo e Souza foi divulgador das diversões matemáticas por meio de palestras que ministrava.

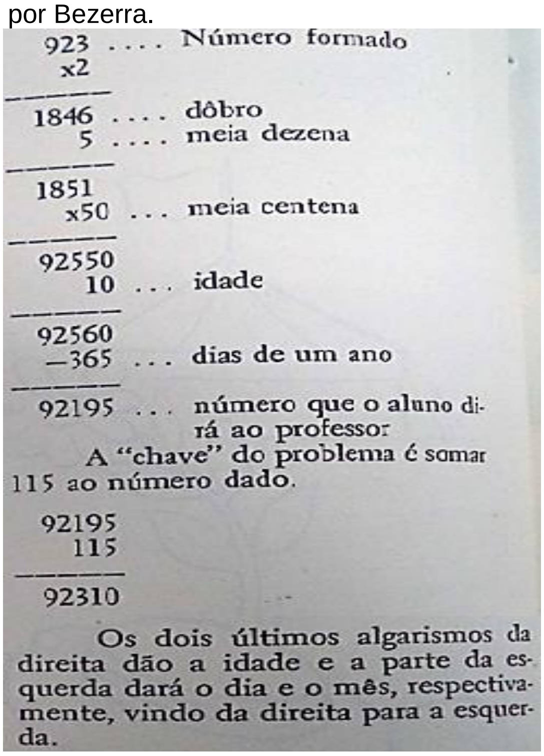
Conterrâneos de Malba Tahan, os educadores Jairo Bezerra e Irene de Albuquerque também deram enfoque a Matemática Recreativa. Segundo Maciel (2010), a partir da década de 60, Manoel Jairo Bezerra participou do *Movimento da Matemática Moderna* com a visão de que o objetivo dessa renovação educacional era facilitar o ensino e a aprendizagem de Matemática, publicando em 1962, a obra *Recreações e Material Didático de Matemática.*

Nesse mesmo ano (1962), Jairo Manoel Bezerra escreveu um artigo intitulado *Aproveitamento de Curiosidades Matemáticas no Ensino* publicado na *Revista do Ensino* relatando que existem quebra-cabeças, números e problemas, em matemática, que podem ser julgados como engraçados, curiosos e interessantes, podendo servir de estímulo/incentivo aos alunos, para em sala, calcular, raciocinar. Nesse artigo, Bezerra (1962, p.48) apresenta uma curiosidade destinada às segundas ou terceiras séries do Curso Primário, qual seja:

> Assim o professor poderia dizer:
> Vamos hoje saber a idade e o dia do aniversário de cada um dos meus alunos sem que vocês me digam.
> Assim, cada um de vocês escreva em uma folha de papel o número do mês em que nasceu e, à sua direita, o dia dêsse mês. Ficará formado um número de, “no mínimo, dois algarismos e no máximo quatro”. Não é verdade?
> “Achem o dôbro do número obtido”.
> “Somem meia dezena ao resultado”.
> “E multipliquem a soma obtida por meia centena”.
> “Somem ao produto encontrado a idade de vocês”.
> “E dêsse último resultado subtraiam o número de dias de um ano”. Não esqueçam: o ano tem 365 dias.
> “Vou agora perguntar o total que cada um encontrou e, a seguir, direi sua idade e a sua data natalícia.”
> E o mestre assim o faz.

Vejamos um exemplo para um aluno de 10 anos e nascido em 23 de setembro:

Figura 5 - Resolução da curiosidade proposta por Bezerra.



923 .... Número formado
x2
1846 .... dôbro
5 .... meia dezena
1851
x50 ... meia centena
92550
10 ... idade
92560
−365 ... dias de um ano
92195 ... número que o aluno dirá ao professor

A “chave” do problema é somar 115 ao número dado.

92195
115
92310

Os dois últimos algarismos da direita dão a idade e a parte da esquerda dará o dia e o mês, respectivamente, vindo da direita para a esquerda.

Fonte: Bezerra (1962)

Para o autor torna-se um desejo seu que os professores utilizem-se das recreações e que aproveitem outras curiosidades matemáticas para um bom aproveitamento de suas turmas.

A professora e autora Irene Albuquerque, catedrática de prática de Ensino do Instituto de Educação do Distrito Federal, escreveu como colaboradora de Malba Tahan as obras *Tudo é Fácil* (1937) e *Matemática Fácil e Atraente* (1938). Publicou pela editora Conquista as obras *Jogos e Recreações Matemáticas* – 1ª e 2º séries, primeiro volume e 3ª, 4ª e 5ª série em um segundo volume (SIQUEIRA FILHO, 2013a).

Albuquerque (1955) apoia a utilização de jogos matemáticos, destacando que a participação na competição de equipes é importante para a formação educativa, permitindo a variedade do trabalho escolar, dando condição à duração da atenção do aluno, e ainda, salienta que com o jogo, é possível fixar conteúdos de maneira atrativa.

Sugestões de jogos de Matemática são apresentadas por Maria Helena Câmera Schmitt, professora do 2º ano primário do colégio Nossa Senhora do Bom Conselho, na *Revista do Ensino*. Segundo Schmitt (1955), as atividades apresentadas aos alunos devem ter aspecto atraente, e dentre os materiais educativos, o trabalho com o jogo pode criar para os alunos um estado de aprendizagem efetiva, onde, a aquisição de conhecimentos não será um simples dever escolar. A professora, nessa visão, apoia a utilização da matemática recreativa, considerando o jogo como um meio do aluno adquirir conhecimentos pelas próprias realizações.

Seguiremos mostrando algumas produções de Malba Tahan relacionadas a Matemática Recreativa no Brasil.

4.2 MATEMÁTICA RECREATIVA: UM DOS DISCURSOS DE MALBA TAHAN

Segundo Siqueira Filho (2013b, p.10) Malba Tahan “acompanhou as modificações dos saberes ditados por reformas educacionais ou emergenciais e a elas adaptou as suas obras e a sua prática [...]”, sendo para intervir na formação de novas gerações difundindo métodos de ensino “moderno”, ou para divulgar uma Matemática recreativa por meio de obras não didáticas.

Nas décadas em que Júlio Cesar de Mello e Souza viveu, o ensinoaprendizagem de matemática estava marcado pelo uso de memorizações, fórmulas, algebrismo, exercícios com extensos cálculos. Conforme Lacaz & Oliveira (2003), ele praticava muito mais do que o ensino teórico e expositivo da época, era ousado e criativo professor, um pioneiro no uso didático da História da Matemática, num ensino baseado na resolução de problemas não mecânicos, na exploração das atividades recreativas e material concreto para o ensino de matemática.

Afirma Francisco Antunes, em um artigo intitulado *Logicidade*[24], publicado na *Revista de Educação*, ano de 1934, que nessa época o professor primário tinha grande dificuldade para conseguir problemas de acordo com o desenvolvimento de sua classe. Os materiais que eram consultados apresentavam raros problemas curiosos comparados com a grande quantidade de questões áridas que não despertavam interesse aos seus alunos. Antunes (1934) apresenta 100 problemas de logicidade, dentre os quais, o problema da partilha da herança - na versão original trazia 17 *carneiros*; na de Malba Tahan, 35 *camelos*.

A proposta oferecida por Malba Tahan evidencia um combate ao formalismo e rigor exagerado, bem como ao algebrismo da época. Na visão de Souza e Fossa (2014, p.593) “ele queria contrapor metodologias baseadas em atividades lúdicas que reportavam a situações que teriam mais significado para o aluno.” Lorenzato (2009) destaca que os problemas irreais, absurdos, e sem a menor utilidade eram condenados radicalmente Malba Tahan.

Identificamos, conforme quadro a seguir, alguns trabalhos de Malba Tahan direcionados para o ensino de Matemática, por meio dos quais ele divulgava a *História da Matemática e* a *Matemática Recreativa* pelo Brasil:

[24] Essência ou característica daquilo que pode ser determinado e conhecido a partir do conhecimento lógico ou através de utilização da lógica. Disponível em < http://www.dicio.com.br/logicidade/>

Quadro 4 - Relação das obras de Malba Tahan – 1934-1965

Obras	Ano	Editora
Matemática Divertida e Curiosa	1934	Calvino Filho
O Homem que Calculava (2º edição)	1938	ABC
Histórias e Fantasias da Matemática	1939	Getúlio Costa
Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática	1940	Getúlio Costa
Matemática Divertida e Pitoresca	1941	Getúlio Costa
Matemática Divertida e Fabulosa	1942	Getúlio Costa
Matemática Divertida e Diferente	1943	Getúlio Costa
Diabruras da Matemática	1943	Getúlio Costa
As Grandes Fantasias da Matemática	1945	Getúlio Costa
Revista Al-Karizmi, nº 1 e 2	1946	Getúlio Costa
Revista Al-Karizmi, nº 3 e 4	1946	Aurora
Revista Al-Karizmi, nº 6,7 e 8	1947	Aurora
Matemática Suave e Divertida	1951	Aurora
Matemática Recreativa	1960	Saraiva
Matemática Divertida e Delirante	1962	Saraiva
Didática da Matemática. Vol.2	1962	Saraiva
As Maravilhas da Matemática	1964	Saraiva
Matemática Recreativa- Vol. 1 e 2	1965	Saraiva
Os números Governam o Mundo	1965	Edições de Ouro
O Problema das Definições em Matemática	1965	Saraiva

Fonte: Extraído e adaptado de Siqueira Filho (2008).

Segundo Siqueira Filho (2013a) com o livro *Contos de Malba Tahan,* primeiro de uma série de publicações que estavam por vir, Malba Tahan inicia sua carreira literária. Siqueira Filho (2013b) referindo-se a Oliveira (2001) relata que nesse livro se encontra um dos contos que deu origem a obra *O Homem que Calculava*, na qual, Malba Tahan dissemina com suas historietas árabes o lado lúdico e recreativo da matemática, cujas situações-problemas aguçam a imaginação do leitor.

A união proposta por Malba Tahan entre ciência e lúdico, continuava a se propagar. Em setembro de 1940, de acordo com Siqueira Filho (2011, p.6), "Malba Tahan iniciou uma página destinada às recreações matemáticas, cujo título da secção era Matemática Divertida e Curiosa, na revista *Vamos Ler".*

Além de professor e autor de livros, Malba Tahan atuou como diretor responsável da revista *Al Karizmi,* entre as décadas de 40 e 50. Essa revista, segundo Siqueira Filho (2013a, p.41) abordava "recreações matemáticas, jogos, curiosidades, histórias, problemas, artigos de colaboradores e uma vasta promoção de livros de sua autoria e de seus colegas".

Outra revista, *Lilaváti*, com caráter recreativo e dirigida por Malba Tahan abordava, conforme Oliveira (2014), temas de matemática, didática da matemática, recreações matemáticas, problemas curiosos, jogos aritméticos, lendas e histórias, astronomia pitoresca, desenho e didática do desenho.

Em consulta ao site oficial de Malba Tahan (www.malbatahan.com.br), identificamos a descrição de três obras, com características bem comuns, de divulgar o lado lúdico da Matemática:

- *Matemática Divertida e Pitoresca* (1941): Problemas curiosos. Sofismas algébricos. Recreações geométricas, etc.

- *Matemática Divertida e Fabulosa* (1942): Problemas curiosos. Recreações geométricas. Frases célebres. Erros e disparates.

- *Matemática Divertida e Diferente* (1943): Curiosidades numéricas. Erros e disparates. Anedotas. Problemas curiosos. Números cabalísticos. Epigramas geométricas. Paradoxos, etc.

Em 1962, Malba Tahan publica a obra *Didática da Matemática* e, em um dos capítulos, intitulado *Recreações Matemáticas*, defende a importância didática desse tipo de atividade para o ensino de Matemática.

“Uma anedota histórica, uma curiosidade geométrica, uma disposição numérica imprevista [...]”, afirma Tahan (1962, p.209), se for exposta pelo professor de Matemática em um momento apropriado, “[...] tornam o ensino gracioso e leve; atraem, para a Ciência, a simpatia do estudante”.

Tahan (1962) complementa sobre a importância de o professor conhecer recreações matemáticas, uma vez que, em oportunidade aproveitará para motivar seus alunos, tornando agradável e interessante o ensino. Vejamos algumas curiosidades matemáticas sugeridas por Malba Tahan (Quadro 5):

Quadro 5 - Curiosidades matemáticas propostas por Tahan (1962)

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS		
Conceitos	**Exemplos**	**Finalidades didáticas propostas por Malba Tahan**
Produtos Curiosos	12345679 x 9 = 111111111 12345679 x 18 = 222222222 12345679 x 27 = 333333333 12345679 x 36 = 444444444	Despertar o interesse dos alunos para o cálculo numérico (p. 210).
Números e Expressões Palíndromas	➢ 1551 ➢ 42024 ➢ 16 + 61 = 77 ➢ 14 x 82 = 28 x 41	Relacionar o ensino da Matemática com o ensino da Linguagem (p. 211).
Número por Extenso	➢ Qual é o número que exprime o seu próprio número de letras? *Resposta: Cinco* ➢ Qual é o número, entre zero e mil que se escreve com o menor número de letras? *Resposta: Um* ➢ Qual é o número, entre zero e mil que se escreve com o maior número de letras? *Resposta: Quatrocentos e cinquenta e quatro*	Chamar a atenção dos alunos para a grafia de certos números (escritos por extenso). Despertar, nos alunos, interesse por questões da linguagem diretamente relacionadas com a Matemática (p. 213).
Somando Algarismos	➢ O quadrado de 9 é o número 81 cuja soma dos algarismos é igual a 9. ➢ A quinta potência de 28 é o número 172 103 608 cuja soma dos algarismos é 28.	Fixar noção de potência de um número (p. 215).
Malabarismos Numéricos	Escreva um número qualquer de três algarismos que seja divisível por três; à esquerda desse número escreva a sua terça parte. O novo número formado será divisível por 17.	Interessar o aluno em problemas relacionados com a Aritmética Teórica (p. 2016).
Adivinhação	Peça a pessoa (cuja idade desejou conhecer) que escreva o número de ordem do mês em que nasceu, e a seguir efetue com esse número as seguintes operações: multiplique por 2, some 5, multiplique por 50, some a idade atual, tire 360, e some 110. O número resultante dará o mês em que a pessoa nasceu, e a idade que tem; a idade é indicada pelos dois algarismos à direita e a ordem do mês pela parte restante à esquerda.	Apresentar aos alunos uma recreação numérica (p. 218).
Cubos Singulares	Observe os cubos: $17^3 = 4913$ $18^3 = 5832$ $26^3 = 17576$ Temos que a soma dos algarismos de 4913 é 17; a soma dos algarismos de 5832 é 18 e do número 17576 é 26.	Fixar noção de cubo de um número (p.219).
Problema dos Pés e Cabeças	O Sr. R. Bruno embarcou no último navio levando para o Jardim Zoológico de Lisboa uma partida de cisnes, cobras e girafas, sendo um total de 28 animais e 52 pés. Em viagem, vendeu a metade dos cisnes e uma girafa morreu. Ao chegar ao destino verificou que o total de pés estava reduzido a 40. Pergunta-se: Quantos cisnes, cobras e girafas levava o Sr. Bruno quando embarcou? *Resposta: 9 girafas, 8 cisnes e 11 cobras.*	Exercício de raciocínio (p.221)

Fonte: Extraído e adaptado de Tahan (1962)

O caráter lúdico aliava-se às formalidades dos conceitos matemáticos. No posfácio da obra *Maravilhas da Matemática de* Tahan (1973), Jesse Montello relata que este livro, destinado ao professor brasileiro e aos cultores da ciência de Lagrange, apresenta características didáticas e recreativas que superam outros livros já publicados desse gênero. São apresentadas algumas descobertas de Malba Tahan sobre cinco recreações geométricas e pesquisas curiosas. Vejamos: 1] uma equação, com módulo da variável, cuja pintura geométrica é uma circunferência C com um ponto isolado no centro; 2] uma equação, também modulada, cuja pintura geométrica é um quadrado com um ponto isolado no centro; 3] uma parábola com ponto isolado; 4] equação algébrica modulada definindo duas circunferências concêntricas; 5] equação algébrica modulada definindo dois quadrados concêntricos de lados paralelos.

Siqueira Filho (2015, p.14) sinaliza que, a partir de 18 de março de 1972, o jornal *Última Hora* passaria a divulgar, em sua seção "Malba Tahan – ao alcance de todos – Matemática Recreativa", um concurso com “uma série de problemas que tratavam de variados conteúdos matemáticos, os quais, se resolvidos corretamente, premiavam o solucionador com livros de Malba Tahan.” Dava-se prestígio as melhores soluções, com preferência para aritméticas em detrimento das algébricas, já que Malba Tahan contestava o algebrismo. Os leitores, também eram convidados a enviar problemas curiosos e inéditos para, possivelmente, serem lançados em outros concursos.

Muitas de suas obras continuam sendo publicadas e, como afirma Lorenzato (2009), continuam transmitindo mensagens que superam os limites da curiosidade e da diversão, indo além do científico e do pedagógico. Essas obras podem servir de recursos didáticos no processo de ensinoaprendizagem da Educação Básica. Dentre essas obras, teceremos a seguir comentários sobre o livro *O Homem que Calculava*.

4.3 A OBRA *O HOMEM QUE CALCULAVA*

As obras escritas por Malba Tahan, com ou sem parcerias apresentam, segundo Siqueira Filho (2011) uma extensa bibliografia, registrada em nota de rodapé ou no final no volume, com predomínio de títulos franceses relacionados à matemática.

Dentre suas obras, destacamos *O Homem que Calculava*, publicada em 2ª edição em 1938, cujas narrativas trazem problemas recreativos inseridos em contos árabes, estando em 2013, na sua 84º edição (SIQUEIRA FILHO, 2015). Essa publicação, proporcionou a Malba Tahan, em 1939, uma condecoração pela Academia Brasileira de Letras, com o prêmio menção honrosa (SIQUEIRA FILHO, 2013a).

Essa obra foi traduzida para mais de 12 idiomas, segundo a editora Record[25]. Em 2015, foi lançada uma edição especial, em capa dura, em homenagem aos 120 anos do nascimento do autor.

Identificamos algumas obras contendo problemas similares aos abordados no livro *O Homem que Calculava*, que são: *Récréations Arithmétiques de E. Fourrey (*1899), *Récréations mathématiques: Problèmes des temps anciens et modernes*, de Rouse W. Ball (1907); *Curiosités & Récréations Mathemátiques*, de Gaston Boucheny (1939) e *Recreations in Mathematics and Natural Philosophy***,** de Jacques Ozanam e outros (1840). Inferimos, com isso, que Malba Tahan, provavelmente, tenha se baseado nesses problemas para compor os seus enredos e, portanto, sua obra não apresenta tanta originalidade como se supunha.

Em Fourrey (1899) e Boucheny (1939), o famoso problema da partilha da herança traz, em seu contexto, 17 camelos, substituídos, na obra de Tahan (2008) por 35 e Ball (1907), apresenta-o com 17 ovelhas. O problema da divisão dos 8 pães do livro de Tahan (2008) é apresentado em Fourrey (1899) com o mesmo sentido, Boucheny (1939) refere-se a 8 refeições e em Ball (1907), é exposto no problema 8 pequenos queijos, no qual dois pastores encontram um caçador faminto, e após a partilha entre eles, o caçador dispõe uma recompensa de 8 francos. Fourrey (1899), Boucheny (1939), Ozanam (1840) trazem a divisão dos 21 vasos de vinho e o jogo de xadrez em um contexto bastante parecido com o de Tahan (2008), assim posto:

---

[25] Disponível em < http://www.record.com.br/autor_sobre.asp?id_autor=874>.

Quadro 6 - Comparação dos enredos de Tahan (2008) com os problemas de obras estrangeiras.

PROBLEMA DA HERANÇA	
[...] - Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça parte e a nona parte de 35 também não são exatas? (TAHAN, 2008, p.22).	*Un Arabe en mourant avait laissé 17 chameaux à ses 3 fils. Le premier devait en avoir la moitié; le second, le tiers; et le troisième, le neuvième. Comment put-on effectuer le partage* (FOURREY, 1899, p.159)? *Un héritage difficile à partager. – Un arabe, en mourant, laisse, par testament, as fortune à ses trois neveux, à condition que l'ainé en prendra la moitié, le second le tiers et le troisième le neuvième. Or, cette fortune se compose de 17 chameaux. Comment doit-on faire le partage? Exercice d'origine arabe* (BOUCHENY, 1939, p. 143). *Un marchand possède 17 moutons qu'il veut donner à ses trois fils dans la proportion suivante: la moitié à l'ainé, le tiers au second, et le neuvieme au troisiême. On demande combien il revient de moutons à chacun (*BALL, 1907, p.110).
PROBLEMA DA PARTILHA DOS 8 PÃES	
Três dias depois, aproximávamos das ruínas de pequena aldeia – denominada Sippar – quando encontramos, caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido. Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura. [...] E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa: -Trazeis, por acaso, ó mulçumanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome! - Tenho, de resto, três pães – respondi. - Trago ainda cinco! – afirmou, a meu lado, o Homem que Calculava. - Pois bem – sugeriu o xeque –, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer! (TAHAN, 2008, p.24-5).	*Deux Arabes, l'un portant 5 pains, l'autre 3 pains, rencontrent dans la campagne un voyageur riche et affamè. Ils dèjeunent ensemble, puis le voyageur, pour prix de son repas, leur donne 8 pièces d'or. Comment faire le partage?* (FOURREY, 1899, p.160). *Chacun son écot. – Trois personnes dinent ensemble, la première fournit 5 plats, la deuxième 3 plats, la troisième ne fournit rién. Les frais étant communs, la troisième donne 8 francs pour payer sa part. Que revient-il à chacune des deux autres, si l'on suppose que les plats fournis coûtent le même prix? Problème d'origine arabe* (BOUCHENY, 1939, p.62). *Un chasseur a affamé rencontre deux bergers qui consentent à partager avec lui des petits fromages qu'ils allaient manger. L'un avait 5 fromages el l'autre 3. En partant, le chasseur leur laisse 8 francs pour payer les fromages. Comment doil être partagée cette somme* (BALL, 1907, p.111)*?*
PROBLEMA DA DIVISÃO DOS 21 VASOS	
Disse o xeque, apontando para os três mulçumanos: - Aqui estão, ó Calculista, os três amigos. São criadores de carneiros em Damasco. Enfrentam agora um dos problemas mais curiosos que tenho visto. E esse problema é o seguinte: - Como pagamento de pequeno lote de carneiros, receberam aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composto de 21 vasos iguais, sendo: 7 cheios 7 meio cheios	*Un vigneron laisse en mourant à ses trois enfants 21 tonneaux de même capacité dont 7 pleins de vin, 7 demi-pleins et 7 vides. Ne possédant aucune mesure, comment devront-ils s'y prendre pour que chacun d'eux ait la même quantité de liquide et le même nombre de tonneaux* (FOURREY, 1899, p.160)? *Le partage du vin et des tonneaux. – Distribuer entre 3 personnes vingt et un tonneaux, dont sept pleins, sept vides et sept à moitié pleins, em sorte que chacune ait la même quantité de vin et de tonneaux* (BOUCHENY, 1939, p.57).

7 vazios. Querem, agora, dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Repartir os vasos é fácil. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. A dificuldade, a meu ver, está em repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão. Será possível, ó Calculista, obter uma solução para este problema (TAHAN, 2008, p.56)?	*To distribute among 3 persons, 21 casks of wine, 7 of them full, 7 of them empty, and 7 half full, so that each shall have same quantity of wine, and the same number of casks* (OZANAN, 1840, p. 81).
PROBLEMA DO JOGO DE XADREZ	
[...]Vou, pois aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo. - Grãos de trigo? – estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. – Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda? - Nada mais simples – elucidou Sessa. – Dar-me-eis um grão pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última do tabuleiro. Peço-vos, ó Rei, de acordo com a vossa magnâmica oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei (TAHAN, 2008, p.120-1)!	*Un auteur arabe, Al Sephadi, rapporte que le roi des Perses ayant demandé à Sessa, l'inventeur du jeu des échecs, quelle récompense il souhaitait, Sessa répondit qu'il désirait un grain de blé pour la 1º case de l'échiquier, 2 pour la 2º, 4 pour la 3º et ainsi de suite, en doublant toujours jusqu'à la 64º case. Le roi, parait-il, sourit à cette demande et grand fut son éton-nement quand il apprit qu'elle ne pouvait être satisfaite* (FOURREY, 1899, p.158). *Les grains de blé et le jeu d'échecs. - Um auteur árabe, Al-Sephadi, raconte que Sessa ayant inventé le jeu d'echecs fut présenté à son maître, roí de Perse. Pour le récompenser, celui-ei promit de lui accorder ce qu'il désirerait. Le mathématicien demanda qu'il lui fût donné un grain de blé pour la première case du jeu, 2 pour la seconde, 4 pour la troisième, 8 pour la quatrième et ainsi de suíte jusqu'à la dernière case (on sait que le jeu d'échecs en renferme 64). Le prince s'indigna d'une demande qu'il jugeait indigne de sa libéralité et fut bien étonné lorsqu'il apprit qu'il lui serait impossible de la satisfaire. –Ozanam* (BOUCHENY, 1939, p.94). *A courtier having performed some very important service to his sovereign, the latter, wishing to confer on him a suitable record, desired him to ask whatever he thought proper, promising that it should be granted. The courtier, who too well acquainted with the Science of numbers, only requested that the monarch would give him a quantity of wheat equal to that which would arise from one grain doubled sixty three times successively. What was the value of the reward (OZANAN, 1840, p. 37)?*

Fonte: Ozanam (1840); Fourrey (1899); Ball (1907); Boucheny (1939); Tahan (2008).

Verificamos um problema com as mesmas características da divisão dos vasos, escrito por Alcuíno de Yorque (735 - 804) em *Propositiones ad acuendos iuvenes*

(Problemas para exercitar os jovens). Nesse problema, os 21 vasos de vinho são substituídos por 30 vasilhas de óleo[26]:

> Um certo pai morreu e deixou como herança para os seus três filhos 30 vasilhas de vidro, das quais 10 estavam cheias de óleo; outras 10 meias cheias, enquanto que outras 10 estavam vazias. Deixe-o dividir, ao que pode, o óleo e os frascos de tal forma que cada um dos três filhos receba uma parte igual dos bens, tanto do óleo como das vasilhas.

Outro problema bastante discutido por matemáticos e pesquisadores é o problema dos Quatro Quatros. Malba Tahan apresenta-o novamente no concurso nº 9, em 13/05/1972, do jornal *Última Hora,* buscando encontrar novas soluções feitas por seus leitores (SIQUEIRA FILHO, 2015). Nos Estados Unidos, sua popularização é atribuída a Martin Gardner, importante recreacionista e divulgador da matemática, segundo José Luiz Pastore Mello (2005), para o qual, também, muito provavelmente, sua criação tenha sido realizada por soldados americanos como forma de passatempo nas horas de folga.

Todos os problemas que apresentamos são tratados como recreativos no Brasil, como em outros países, pois são carregados de história e cultura, além de possuírem uma característica bastante comum: despertam a curiosidade e imaginação de quem os lê.

---

[26] Disponível em < http://jnsilva.ludicum.org/HMR14_15/Alcuin.pdf>.

5 AS OFICINAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: EM BUSCA POR APROPRIAÇÕES E REPRESENTAÇÕES

Para esta etapa da pesquisa trabalhamos com cinco problemas extraídos do livro *O Homem que Calculava* (2008, 72º edição), como mencionado anteriormente, cujas historietas que contextualizam os enunciados, por uma questão didática, foram sintetizadas, sem comprometê-los. Vale lembrar que categorizamos tais problemas como “recreativos”, tanto pelo seu valor pedagógico, quanto pela escolha de estratégias que oportunizam aguçar a imaginação do leitor.

5.1 PROBLEMA DOS 35 CAMELOS

5.1.1 Descrição do 1º encontro

Iniciamos o primeiro encontro com a turma, reforçando o objetivo da pesquisa e expondo que os registros feitos por eles seriam recolhidos ao final das atividades. A turma era composta por 26 alunos, entretanto, estavam presentes 24, sendo 13 do sexo masculino e 11 do sexo feminino. O encontro teve duração de duas aulas, no período compreendido das 7h00 às 8h50, em 14 de maio de 2015. Os alunos foram divididos em seis grupos (A, B, C, D, E, F) com quatro componentes cada, ficando livre à escolha da sua composição.

Entregamos uma cópia do problema para cada aluno e pedimos a eles, inicialmente, que lessem o enunciado individualmente, com o intuito de compreendê-lo, sinalizando palavras ou expressões desconhecidas.

> ***Problema dos 35 camelos***[27]
>
> *Beremiz – o homem que calculava – e seu colega de jornada encontraram três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos. O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava. O mais velho esclareceu que eram irmãos e que haviam recebido como herança 35*

[27] Extraído e adaptado de Tahan (2008, capítulo 3, p. 21 - 23).

> *camelos. Segundo a vontade do pai, a divisão seria a seguinte: o mais velho receberia a metade, o irmão Hamed uma terça parte e o mais moço, Harin, receberia apenas a nona parte do lote de camelos. Como fazer a partilha se a metade, a terça parte e a nona parte também não são exatas?*
>
> *O sábio Beremiz resolveu o problema, repartindo a herança da seguinte maneira: o mais velho recebeu 18 camelos, o irmão Hamed recebeu 12 e o mais novo 4, e ainda coube um camelo para ele como recompensa.*
>
> ***Pergunta-se[28]:***
>
> *1. Que artifício Beremiz utilizou para fazer a partilha?*
> *2. Onde está o erro na divisão da herança proposta pelo pai de Hamed?*
> *3. Quais suas interpretações quanto ao problema proposto?*
> *4. E se a herança fosse 17 camelos, como poderia ser feita a partilha?*

Os alunos não esboçaram nenhum tipo de reação com relação ao enunciado e, mesmo assim, relemos o enunciado para eles, pois se, ainda, houvesse dúvidas, por exemplo, no significado das palavras, esse seria o momento de esclarecer. Explicamos-lhes que não havia uma fórmula que respondesse de imediato às questões propostas, e sugerimos, então, que trabalhassem em grupo, por ora, apenas as questões 1 e 2, utilizando estratégias próprias e os conhecimentos adquiridos ao longo de sua trajetória escolar.

Observamos que eles, mesmo em grupos, estavam respondendo individualmente as questões e não dialogavam com seus pares. Muito provavelmente, essa prática tenha sido gerada a partir de representações construídas desde os primeiros anos da vida escolar. Assim sendo, solicitamos que trocassem suas informações com os componentes do seu grupo, buscando ampliar as discussões quanto ao problema proposto. Entregamos uma folha de papel A4 para cada grupo e orientamos que ao chegar a um consenso, deveriam registrar nessa folha a resposta do grupo.

Durante a oficina, a professora regente e a pesquisadora agiram como mediadoras do processo, uma vez que, de acordo com Allevato & Onuchic (2014, p. 46), não forneceram “respostas prontas, demonstrando confiança nas condições dos alunos”.

Os alunos demoraram muito para compreenderem as duas questões, no entanto, todos usaram alguma estratégia para respondê-las. Vejamos as soluções apresentadas pelos grupos:

---

[28] Questões elaboradas pela pesquisadora.

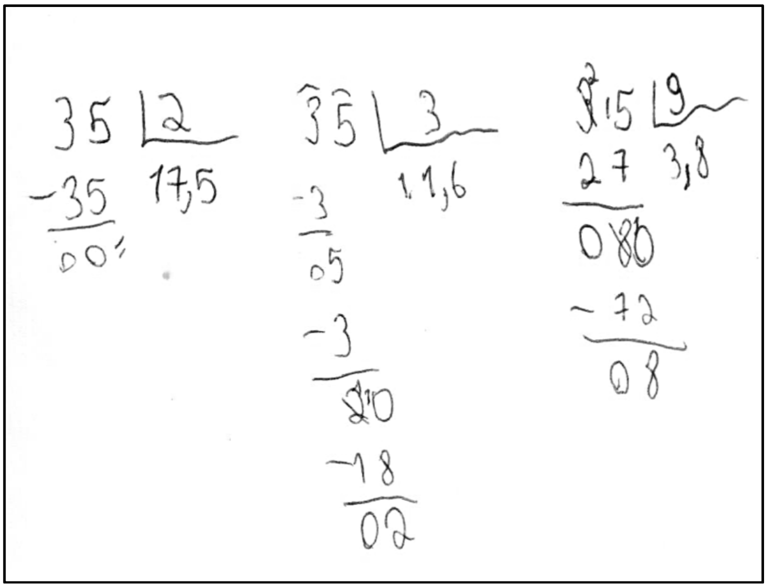
- **Grupo A**

Os componentes registraram, separadamente, suas soluções em folhas à parte, deixando a que distribuímos em branco, e acabaram por não formularem uma única resposta. Percebemos que eles apresentavam dificuldades em dialogar entre eles, fato esse, acreditamos, ser devido à prática de pouco trabalho em grupo durante as aulas e a organização da sala sempre em filas.

Apesar de serem estudantes do Ensino Médio, verificamos que eles não tinham noção do que seria terça parte e nona parte e precisamos intervir, questionando-lhes o significado desses conceitos.

Observamos que o aluno A8 não escreveu em forma de fração os valores mencionados no problema e recorreu ao algoritmo da divisão, para tentar responder as duas questões, como segue:

Figura 6 - Registro elaborado pelo aluno A8



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Ao efetuar a divisão 35 por 2, há indícios, no primeiro registro, de que o aluno utilizou-se do cálculo mental. No segundo e terceiro registros, ele resolveu a divisão pelo processo longo e admitiu apenas uma casa decimal e chegou à conclusão de que

> *O artifício que Beremiz utilizou foi a divisão de forma que sobrasse 1 para ele vender;*

> *Que de acordo, a herança deveria ser dividida igualmente para todos, só que foi feito a divisão e sobrou um camelo, o camelo que sobrou não deveria sobrar.*

Parece-nos que, para esse aluno, o artifício esteja, tão somente, operar o algoritmo da divisão para que reste, a Beremiz, um camelo.

Os outros componentes expuseram suas respostas tomando como parâmetro a divisão feita pelo aluno A8, como descrito anteriormente. Vejamos:

> *O artifício utilizado na partilha seria a divisão (A12).*
>
> *Ficou um que recebeu um camelo a mais. Deixou uma quantidade inadequada para a divisão (A12).*
>
> *Ele utilizou a divisão, porém não deu certo aí ele aumenta mais 1 para cada e recebeu 1 ainda por causa da divisão [pela] ajuda (A10);*
>
> *Ele colocou um camelo a mais, assim não ficando correta a divisão (A10);*
>
> *Ele vendeu um camelo pra ele (A1);*
>
> *Ele não deixou uma quantidade de camelos exatas para os filhos fazerem a divisão (A10).*
>
> .

Os alunos desse grupo usaram a estimativa para responder as questões e não mostraram que a metade de um todo, mais a terça parte, mais um nono não corresponde ao todo, ou seja, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$, faltam ainda $\frac{1}{18}$ desse todo. No caso da herança, $\frac{1}{18}$ de 35 corresponde a $\frac{35}{18}$. Essa fração é igual a $1\frac{17}{18}$, que corresponde a sobra da herança. Beremiz com o artifício empregado - acréscimo de um camelo à herança do xeque, distribuiu os $\frac{17}{18}$ pelos três herdeiros (aumentando a parte de cada um) e ficou com a parte inteira da fração excedente (TAHAN, 2008).

- **Grupo B**

Os componentes desse grupo chegaram a uma conclusão para a questão 1: “Doou um camelo”*.* E para a questão 2: “Deixou um número de camelos que não dá divisão exata”*.* Permaneceram no senso comum e não procuraram o erro na escrita do testamento. Observamos, também, na folha de um dos componentes, o algoritmo da divisão para os registros referentes a terça e nona parte, provavelmente, o recurso usado para concluir essa questão, como segue:

Figura 7 - Registro elaborado pelo aluno A2

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

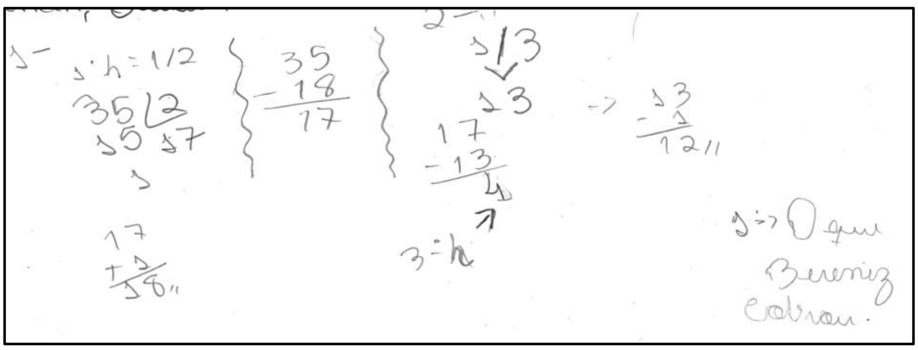
Note-se que no, primeiro registro, o aluno não assinala corretamente a parte decimal do quociente e no segundo, não mostra o resto da divisão, obtido pela subtração $80-72$.

Verificamos que esse grupo não compreendeu com clareza o problema e suas respostas não satisfazem ao solicitado nas questões 1 e 2.

- **Grupo C:**

Esse grupo trabalhou com os algoritmos da divisão e subtração como estratégias para chegar a resposta. Um dos primeiros procedimentos, foi considerar o resto da operação 35 por 2, ou seja, 1, o qual foi adicionado ao quociente 17, obtendo com isso, 18, quantidade esta, cabida ao filho mais velho. Posteriormente, o grupo admite existirem 36 camelos, cuja terça parte é 12, cabida a Hamed, que acrescida de mais 1 camelo resulta em 13, que subtraídos dos 17, totalizam 4 camelos, destinado a Harin, o filho mais novo.

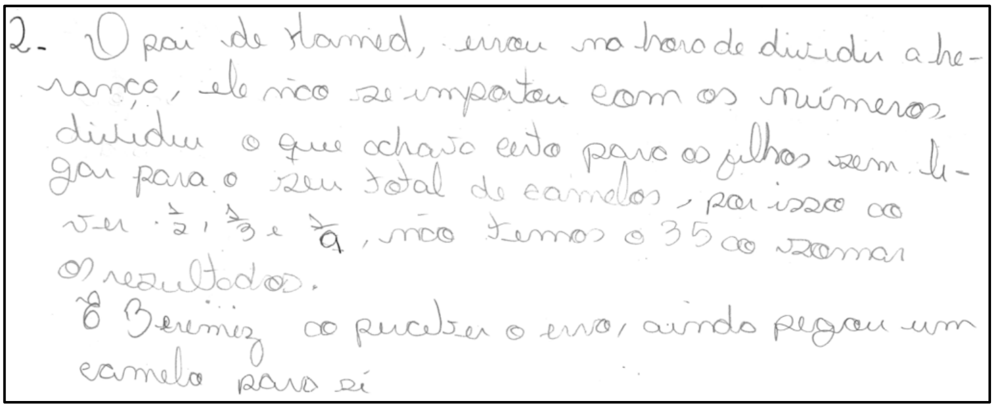
Figura 8 - Registro elaborado pelo grupo C



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Com relação à questão 2, o grupo justificou que a soma dos resultados encontrados não correspondiam a 35, porém, não os associaram às frações para mostrar o erro na partilha. Segue a resposta desse grupo:

Figura 9 - Registro elaborado pelo grupo C

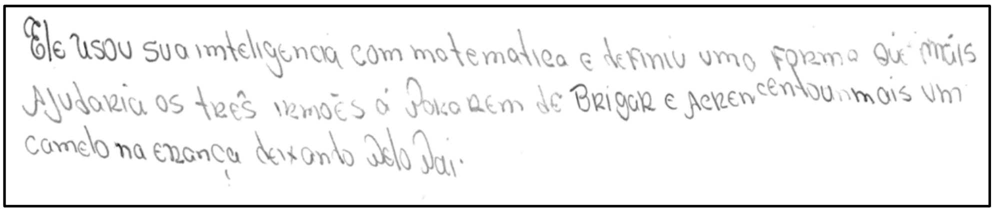

2. O pai de Hamed, errou na hora de dividir a herança, ele não se importou com os números dividiu o que achava certo para os filhos sem ligar para o seu total de camelos, por isso ao ver $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, não temos o 35 ao somar os resultados.
E Beremiz ao perceber o erro, ainda pegou um camelo para si

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo D**

Esse grupo trabalhou com o cálculo mental. Os alunos perceberam que Beremiz acrescentou um camelo à partilha e responderam a questão por extenso (Figura 10).

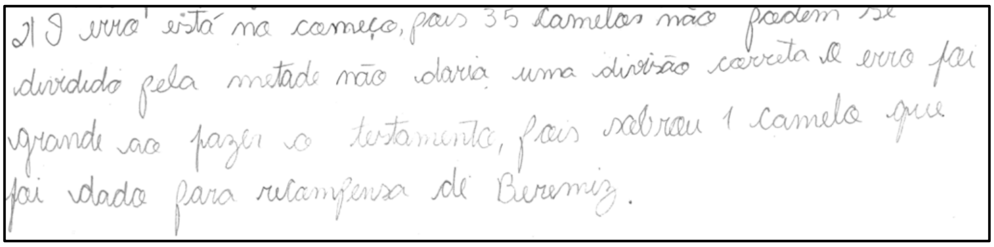
Figura 10 - Registro elaborado pelo grupo D


Ele usou sua inteligencia com matematica e definiu uma forma que mais Ajudaria os três irmões á pararem de Brigar e acrecentou mais um camelo na erança deixanto pelo pai.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os alunos concluíram a segunda questão, descrito na figura 11, mas não justificaram, matematicamente, a sobra de camelos na partilha da herança.

Figura 11 - Registro elaborado pelo grupo D

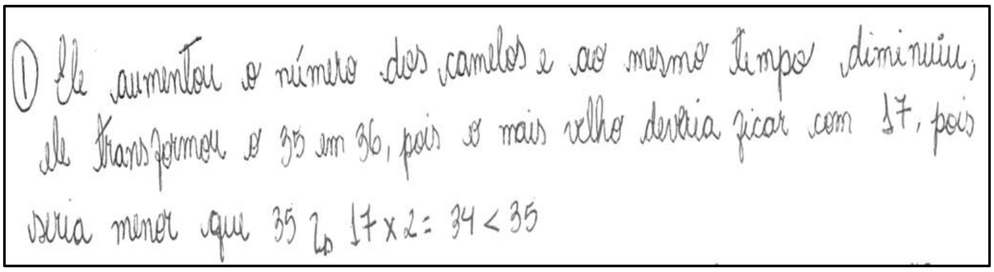

2) O erro está no começo, pois 35 camelos não podem se dividido pela metade não daria uma divisão correta o erro foi grande ao fazer o testamento, pois sobrou 1 camelo que foi dado para recompensa de Beremiz.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo E**

O grupo não conseguiu expressar com clareza o artifício usado por Beremiz para fazer a partilha, mesmo compreendendo que foi acrescentado um camelo. Os alunos consideraram ainda que o mais velho receberia 17 camelos, em função da divisão não ser exata. Vejamos:

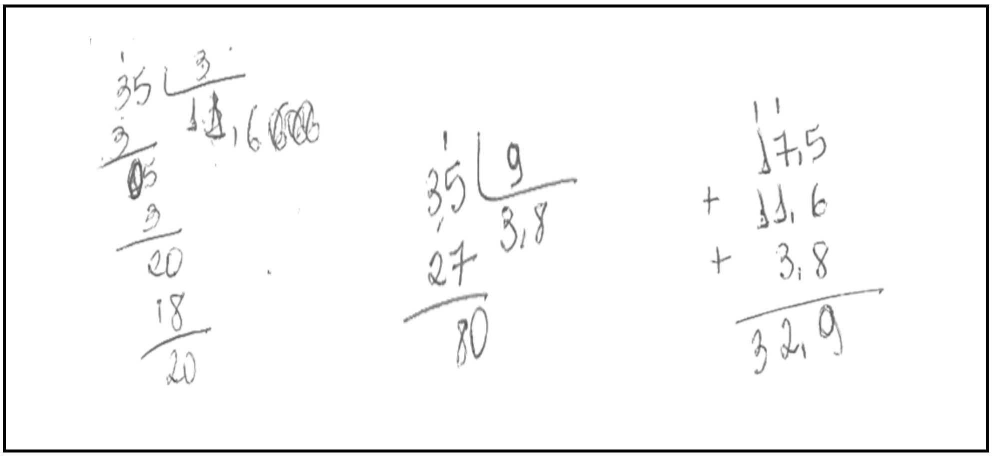
Figura 12 - Registro elaborado pelo grupo E



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Para responder a questão 2, o grupo utilizou os algoritmos da divisão e a adição desses quocientes, como descritos na figura 13.

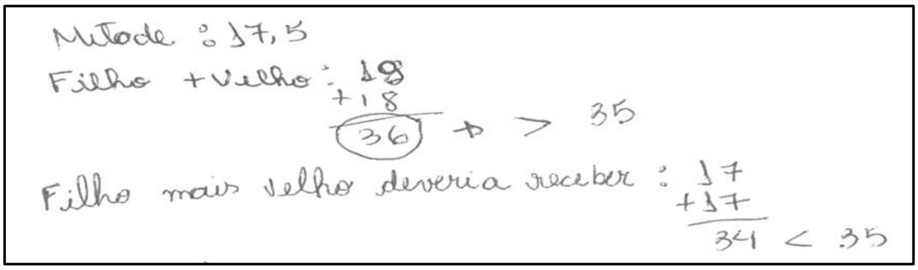
Figura 13 - Registro elaborado pelo grupo E



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Verificamos nos registros dos componentes uma soma equivocada de 19 mais 18, provavelmente por falta de atenção, pois deveria ser registrado 37 no lugar de 36. Usaram as desigualdades para comparar os valores 34, 35 e 36, com o objetivo de responder a questão, como assinalados na figura 14.

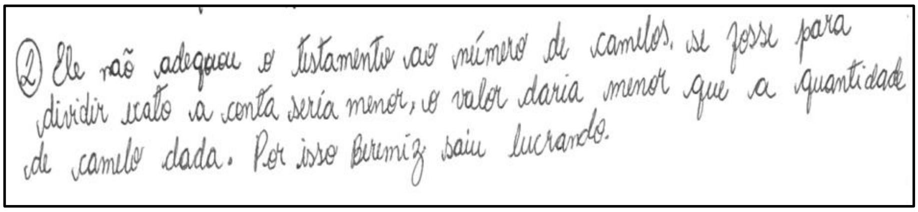
Figura 14 - Registro elaborado pelo grupo E



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

O grupo compreendeu o problema, mas não mostrou a fração que faltava para totalizar 35.

Figura 15 - Registro elaborado pelo grupo E

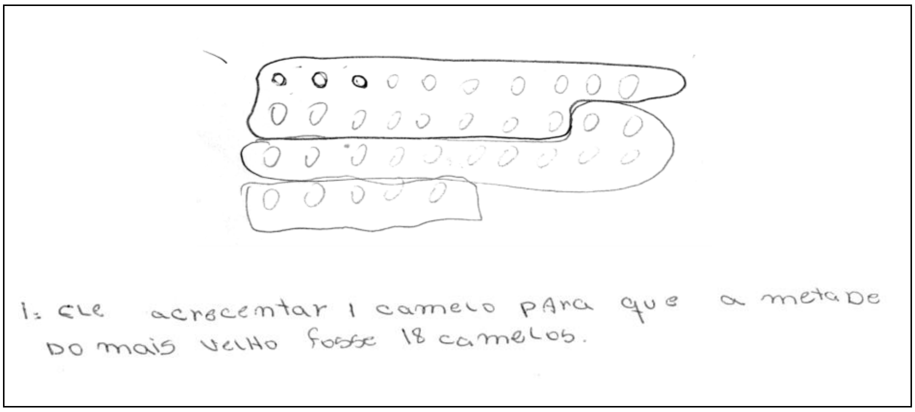


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo F**

Os componentes desse grupo recorreram primeiramente à representação pictórica[29] como estratégia para responder a questão 1.

Figura 16 - Registro elaborado pelo grupo F



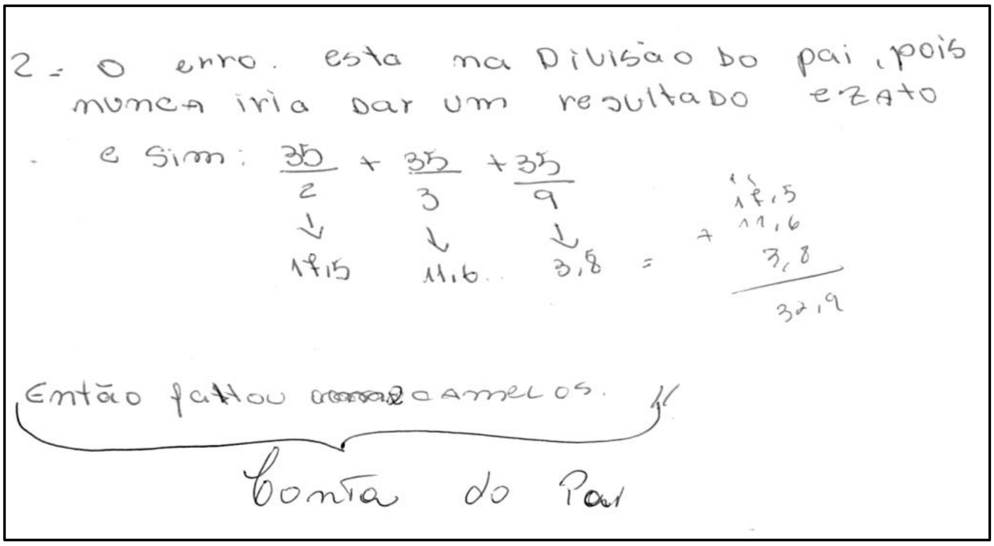
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

[29] Esquemas que auxiliam a compreensão de alguns conceitos e operações, como retângulos quadriculados para dar suporte à ideia de multiplicação, ou círculos e outras formas para apoiar o significado das frações (CÂNDIDO, 2001).

Observamos que essa representação seria a partilha feita por Beremiz, porém, no último agrupamento realizado, os alunos juntaram os quatro camelos do irmão mais novo com o camelo doado a Beremiz.

Para responder a questão 2, os alunos usaram frações correspondentes à herança, mas não souberam operar com essas frações, então, recorreram à divisão e, após, adicionaram os resultados encontrados, admitindo apenas uma casa decimal sem arredondamentos, como descritos a seguir:

Figura 17 - Registro elaborado pelo grupo F



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Verificamos que o grupo não considerou o resto de cada divisão e ainda aproximou 32,9 para o total 33 camelos, concluindo que faltavam 2 camelos para totalizar a herança de 35 camelos após ser feita a partilha segundo o testamento do pai.

Após os grupos concluírem as questões, discutimos as respostas e a noção de divisão, exemplificando com grandezas que faziam sentido representar com números decimais, como: dinheiro, terras, entre outros. Nesse momento, um aluno citou matar o camelo e partilhar a carne, o que vários alunos questionaram, pois não é nossa cultura comer carne de camelo e se fosse uma novilha, a herança seria dividida facilmente, pois, o animal que estava sobrando serviria de alimento para eles.

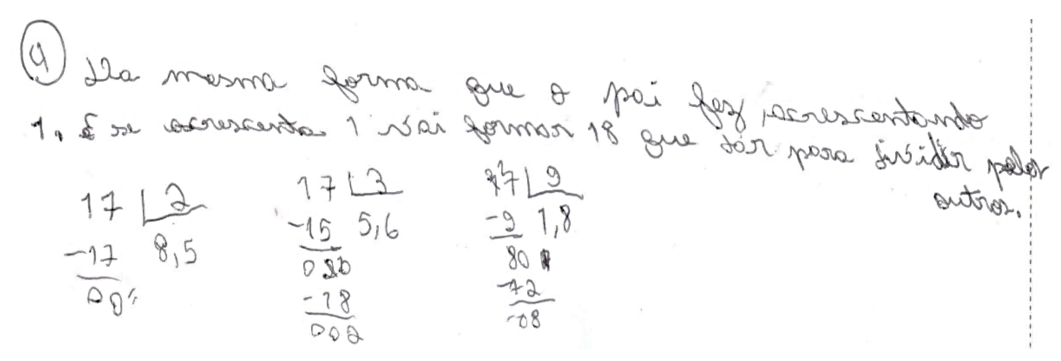
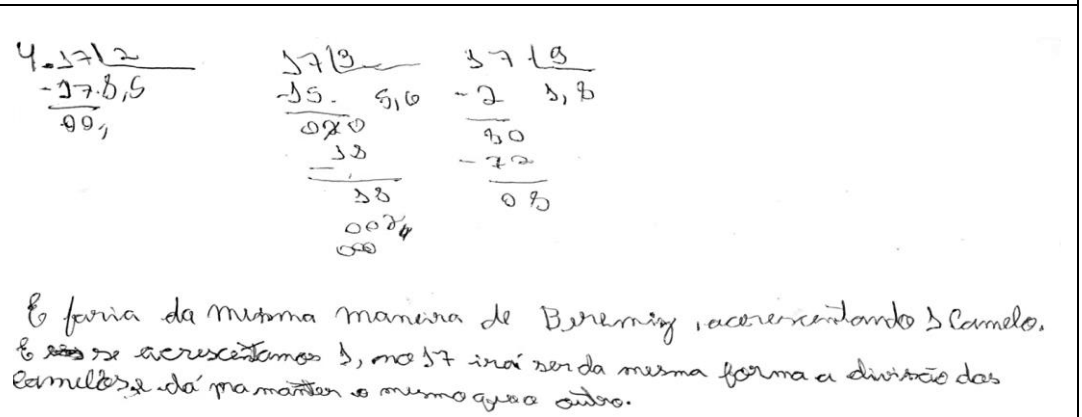
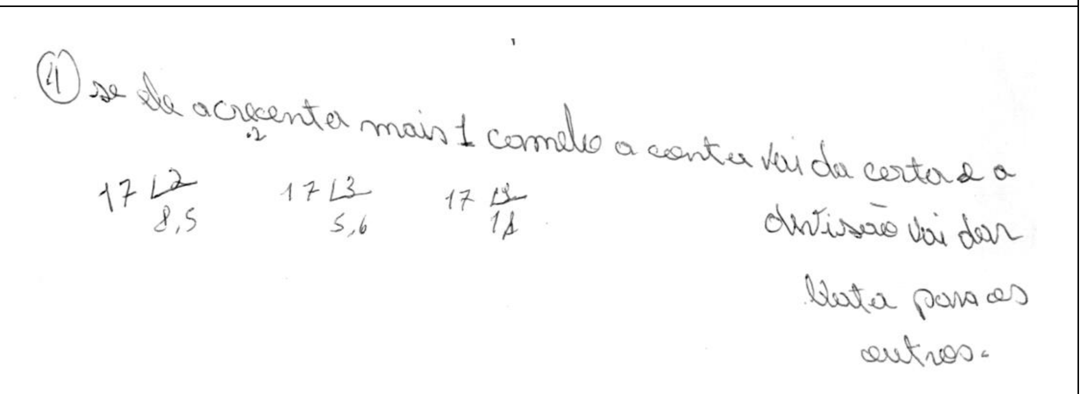
Vários comentários foram observados como divisão injusta do Pai, o erro no testamento, aproveitamento da situação por Beremiz. Notamos que os alunos se colocavam no lugar dos irmãos ao responderem.

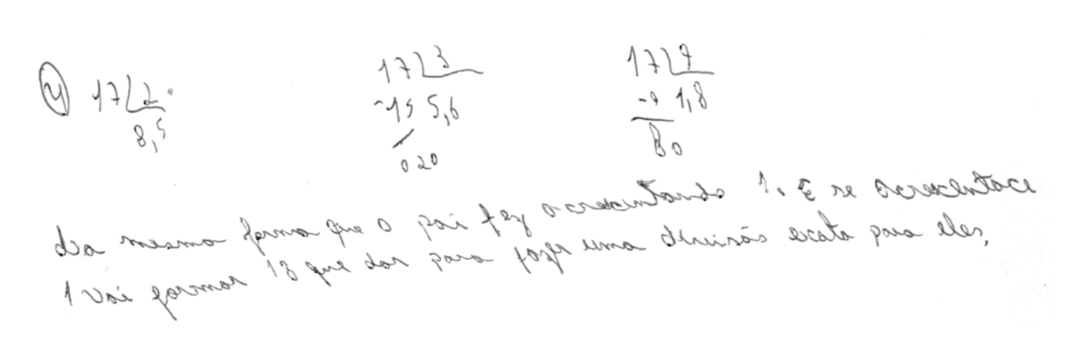
Identificamos que a questão 4 deveria anteceder a 3, e, assim, pedimos a eles para respondê-la primeiro, com o objetivo de perceber qual a apropriação feita com relação ao problema com 35 camelos. Vejamos:

- **Grupo A**

A divisão serviu para comprovar que a metade, a terça parte e a nona parte de 17 não são exatas. Mas não distribuíram a partilha com o valor 18, apesar de afirmarem ter acrescentado 1 camelo como na situação anterior. Confundiram quem acrescentou o camelo, referindo-se ao pai. Seguem os registros:

Quadro 7 - Registros elaborados pelos alunos do grupo A

Aluno	**Registros**
A8	 4) Da mesma forma que o pai fez acrescentando 1, e se acrescenta 1 vai formar 18 que dar para dividir pelos outros. 17 ÷ 2 = 8,5; 17 ÷ 3 = 5,6; 17 ÷ 9 = 1,8
A12	 4. 17 ÷ 2 = 8,5; 17 ÷ 3 = 5,6; 17 ÷ 9 = 1,8 E faria da mesma maneira de Beremiz, acrescentando 1 camelo. E se acrescentamos 1, no 17 irá ser da mesma forma a divisão dos camelos e dá pra manter o mesmo que o outro.
A1	 4) se lhe acrescenta mais 1 camelo a conta vai da certo e a divisão vai dar exata para os outros. 17 ÷ 2 = 8,5; 17 ÷ 3 = 5,6; 17 ÷ 9 = 1,1

Aluno	Registros
A10	

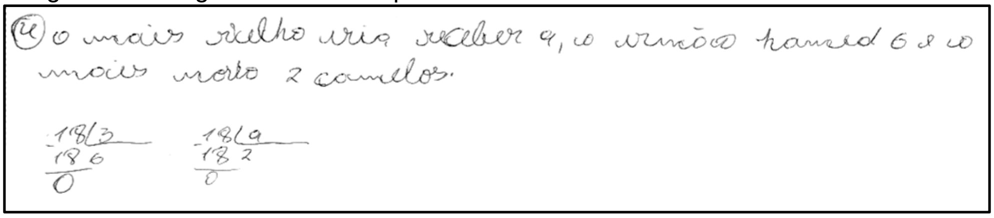
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Observamos que o aluno A8 resolveu o algoritmo e considerou o quociente apenas com uma casa decimal. Notamos, enquanto passávamos pelo grupo, que os outros componentes olhavam às contas do aluno A8 para eles redigirem suas respostas.

- **Grupo B**

O grupo não formulou uma única resposta, mas todos os componentes acrescentaram um camelo antes da divisão. Observamos três registros muito parecidos, optamos, então, apresentar um deles, como segue:

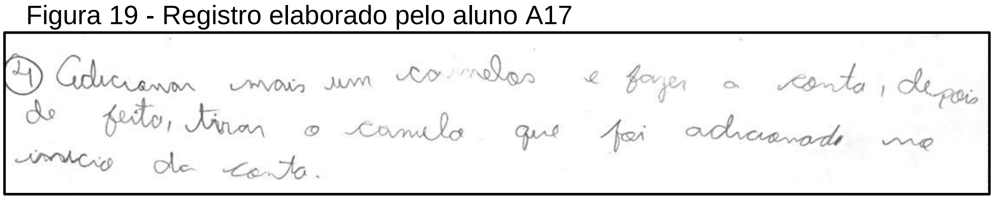
Figura 18 - Registro elaborado pelo aluno A26



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

O aluno A17 referiu-se ao camelo que foi acrescentado:

Figura 19 - Registro elaborado pelo aluno A17

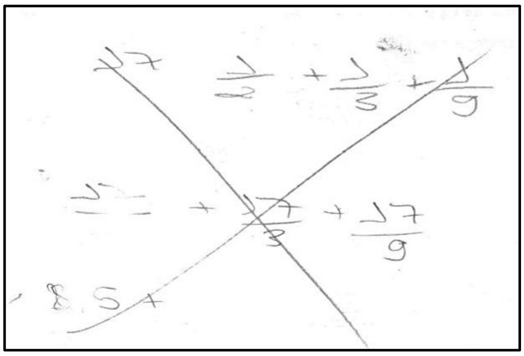


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo C**

Os alunos fizeram em um rascunho a partilha com 17 camelos e verificaram que o resultado $17/2 = 8{,}5$ não é inteiro. Ao perceberem, não prosseguiram com as outras divisões.

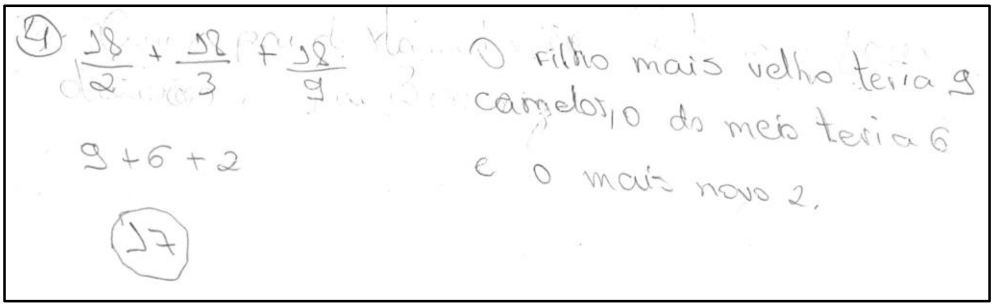
Figura 20 - Registro elaborado pelo grupo C



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os alunos usaram então o acréscimo de um camelo para a partilha ser exata, assim como Beremiz propôs com 35 camelos. Eles responderam a questão, mas não comentaram sobre o camelo que foi acrescentado.

Figura 21 - Registro elaborado pelo grupo C

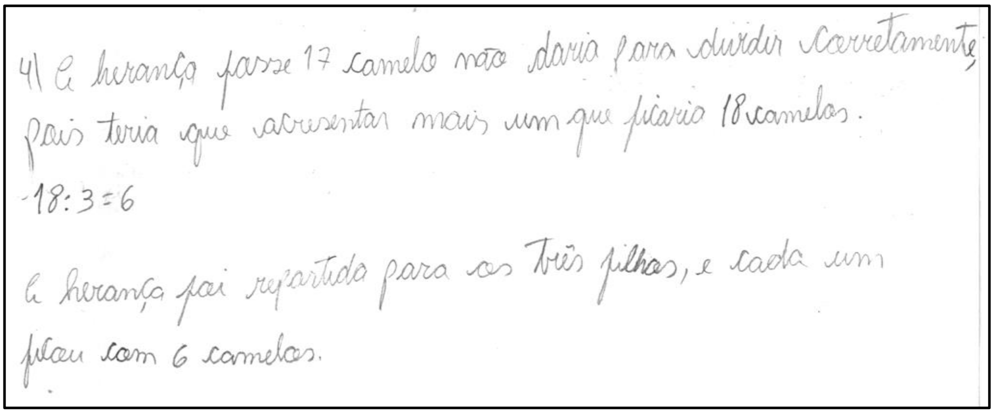


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo D:**

O grupo concebe que dividir corretamente significa realizar uma operação exata. Acrescentou um camelo a partilha, mas ao finalizar concluiu que todos os irmãos receberiam 6 cada um:

Figura 22 - Registro elaborado pelo grupo D

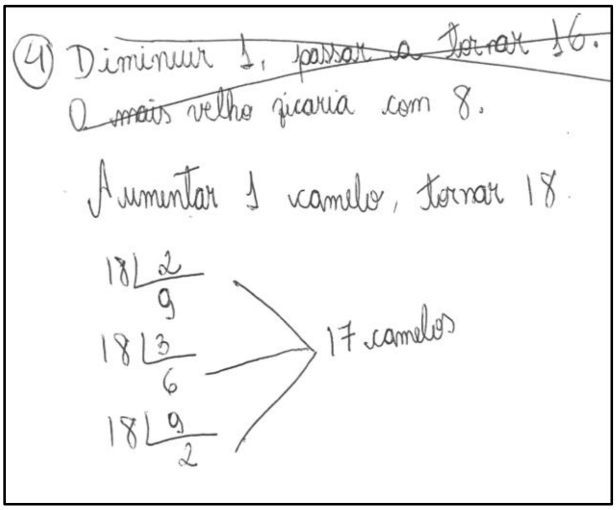


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo E**

O grupo em um primeiro momento diminuiu 1 do numeral 17, mas observou que esse caminho não estava correto. Então, utilizou o mesmo recurso que Beremiz e fez a partilha, acrescentando 1 a 18. Não houve questionamento sobre o camelo que foi acrescentado:

Figura 23 - Registro elaborado pelo grupo E

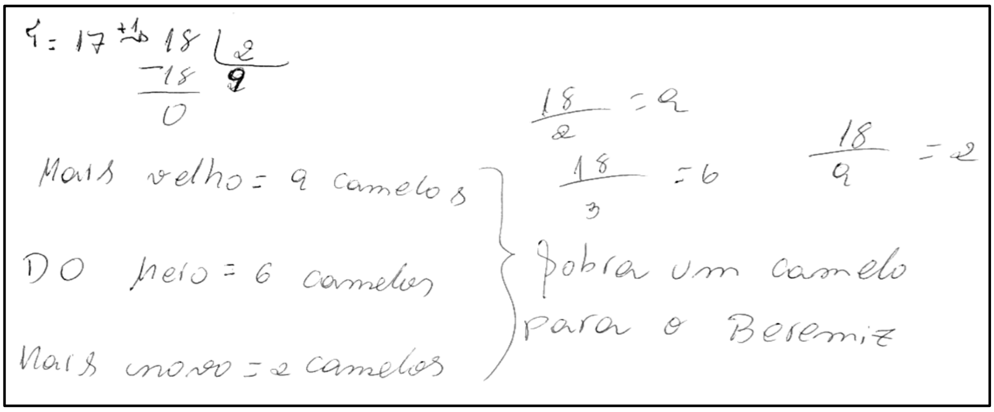


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo F**

O grupo acrescentou um camelo, assim como Beremiz fez para os 35. Os alunos finalizaram dizendo que esse camelo seria para Beremiz.

Figura 24 - Registro elaborado pelo grupo F



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Constatamos, durante a realização das atividades, que esses alunos apresentavam muitas dificuldades em trabalhar com os conteúdos do ensino fundamental, especialmente, as divisões e frações. Verificamos, também, muitas dificuldades para interpretar o problema e insegurança em registrar as respostas, tanto que, eles queriam que falássemos quais os procedimentos necessários para a obtenção da resposta das questões.

Conforme a professora regente, os alunos apresentam um bom comportamento e são bastante respeitosos com ela, mas chegam ao primeiro ano com níveis bem diferentes de aprendizagem entre eles, dos conteúdos estudados até o 9º ano (8ª série). Destaca, ainda, que todo início de ano é realizado um diagnóstico, para verificar os conteúdos que eles conhecem para dar prosseguimento aos conteúdos do ensino do 1º ano do Ensino Médio.

Os grupos se empenharam bastante para resolver as questões propostas, colaborando com o nosso trabalho. Entregamos no final do encontro uma cópia com o capítulo do livro que continha esse problema para ser lido por eles em casa, com mais consideração.

Esse problema serviu como piloto para um melhor direcionamento das outras oficinas. Percebemos que devíamos rever a questão das cópias, e entregar apenas uma folha contendo o problema para o grupo.

Com relação à terceira questão, ela foi respondida, individualmente, pois pretendíamos identificar as opiniões quanto ao problema e como estavam se apropriando daquela situação. Faremos alguns comentários no tópico a seguir.

5.1.2 Apropriações dos sujeitos com relação ao problema dos 35 camelos

Ao emitirem suas opiniões quanto ao problema proposto, os alunos expressaram seus sentimentos, tanto em relação à situação abordada na historieta, quanto em relação às facilidades ou dificuldades encontradas para resolvê-la.

A maioria dos alunos manifestou seus anseios quanto à partilha da herança, se colocando no lugar dos irmãos, considerando **injusto o testamento** deixado pelo pai e a recompensa de um camelo para Beremiz, assim se expondo:

> *[...] eu não achei bom o que o pai dos irmãos fez isso[...] (A15).*

> *[...] cheguei a conclusão que Beremiz saiu lucrando e que o pai não soube escrever seu testamento corretamente. E foi injusta essa divisão, pois o filho mais velho saiu ganhando mais que a metade (A21).*
>
> *Eu achei errado da parte de Beremiz, porque ele foi ajudar e no fim saiu no lucro (A25).*
>
> *[...] eu não concordo com a divisão pois o mais velho ficou com mais camelos (A7).*
>
> *[...] deveria ter dividido corretamente independente da idade dos seus filhos (A12).*
>
> *Eu acho que o pai deveria ter feito a divisão igual para todos os filhos (A8).*

Houve alunos que, durante a resolução do problema, discutiram a inocência dos irmãos, salientando que **Beremiz se aproveitou da situação com esperteza:**

> *[...] Beremiz foi esperto, pois saiu lucrando, o pai fez a divisão errada sem pensar na quantidade de camelo que tinha. Os irmãos, pensaram que sairam no lucro mais Beremiz foi mais esperto (A5).*
>
> *[...] Beremiz foi esperto, o pai não fez a divisão corretamente e os irmãos foram bobos em acreditar em Beremiz (A4).*
>
> *O pai não fez a divisão correta, assim Beremiz se aproveitou da situação e os irmãos acharam que sairam ganhando. O pai não pensou que teria 35 camelos para dividir em 3 pessoas (A23).*
>
> *[...] Beremiz se aproveitou do erro do pai, para sair lucrando no fim (A24)*

Outros alunos se apropriaram da situação de forma diferente, houve aqueles que concordaram com a atitude do Calculista **Beremiz**, considerando-o **honesto e justo**:

> *[...] Beremiz foi honesto no que fez, mesmo saindo lucrando com isso, foi legal o gesto dele, de ajudar os irmãos a partilhar a herança, porém o mais velho saiu com mais nessa história e é injusto (A11).*
>
> *[...] e foi bom pois ele ajudou a família a resolver o problema dos camelos (A16).*
>
> *Foi justo mesmo ele não sendo da família ele queria ajudar e foi recompensado (A26).*
>
> *Foi certa porque ele ajudou a família e cada um ganhou a mais (A17).*

Os alunos expressaram suas apropriações considerando que a herança deve ser “igualitária”, repartida de modo igual entre os membros da família, mas muitas vezes, em nossa própria cultura isso não acontece, onde é comum aos filhos homens receberem mais que as mulheres, ou como na cultura árabe em que a maior parte da herança cabe ao filho mais velho.

Chartier (2009, p.34) define cultura como “práticas comuns através das quais uma sociedade ou um indivíduo vivem e refletem sobre sua relação com o mundo, com os outros e com eles mesmos”. Percebemos que a falta de conhecimento da cultura árabe levou os alunos a uma interpretação equivocada com relação a injustiça do pai quanto a partilha da herança, pois na cultura árabe, o irmão mais velho recebe mais atenção e tem mais privilégios que os irmãos mais jovens, sendo uma prática comum entre eles.

Acreditamos que a cultura proveniente da família desses alunos, em sua maioria filhos de lavradores, interferiu em suas opiniões quanto as atitudes de Beremiz como uma pessoa esperta ou um homem justo/honesto. Chartier (2009, p.49) faz entendermos que as representações permitem “vincular estreitamente as posições e as relações sociais com a maneira como os indivíduos se percebem e percebem os demais”,

Nesse sentido, observamos que as discussões sobre injustiça, honestidade, esperteza são resultados do convívio social desses alunos, e que a partir da leitura do problema produziram significados para aquela situação. Para Chartier (1999, p.70) “a leitura é sempre apropriação, invenção, produção de significados”.

Além disso, com relação à resolução do problema, as apropriações, segundo Chartier (2002, p.26) são “inscritas nas práticas específicas que as produzem”, ou ou seja, a forma como os alunos expressaram suas opiniões estão relacionadas a prática com que resolveram o problema. Nesse sentido, durante a realização da atividade, alguns alunos demonstraram que a dificuldade em resolver o problema estava relacionado a interpretação, representando-o como **fácil, difícil** ou **complicado**.

> *Basta saber interpretar. As vezes o problema é tão fácil, mas nós não conseguimos. Eu achei um pouco difícil, entre divisões, frações, porém conseguimos entender (A11).*
>
> *Foi meio complicado para interpretar o problema, mas não foi muito difícil (A13).*
>
> *Achei um pouco difícil, pois no testamento o pai escreveu errado, fazendo as contas daria menos. Por um lado foi complicado, mas quando descobrimos vimos que era fácil (A14).*
>
> *Achei um pouco complicada, pois precisou de interpretar muito, e os cálculos não dão exato [...] (A21).*

Verificamos durante a oficina que esses alunos apresentaram muita dificuldade em interpretação, fazendo muitas leituras para um bom entendimento do problema. A todo momento a professora e a pesquisadora eram solicitadas, pois eles sentiam necessidade de expor suas respostas, demonstravam insegurança em seus registros. Os alunos se envolveram na situação estudada e todos opinaram com relação à história que compunha o problema. Mesmo que as soluções encontradas pelos grupos não respondessem, com clareza, ao que fora proposto, ficamos satisfeitos com a disposição deles em realizar a atividade.

5.2 O PROBLEMA DOS 8 PÃES

5.2.1 Descrição do 2º encontro

Participaram desse encontro 20 alunos, sendo 12 do sexo masculino e 8 do sexo feminino. Vale ressaltar que os dois alunos ausentes na aula anterior compuseram o Grupo G e, portanto, todos os seis faltantes neste dia, pertenciam a algum dos grupos formados no 1º encontro. Assim foram constituídos: três grupos com quatro componentes cada, um grupo com três, dois grupos com dois e apenas um grupo com um componente. O encontro teve duração de uma aula e 25 minutos da outra, no período compreendido das 10h10 às 11h30, em 08 de Junho de 2015.

> ***O Problema dos 8 Pães***[30]
>
> *Beremiz e seu amigo mercador aproximavam-se das ruínas da pequena aldeia denominada Sippar, a caminho de Bagdá. Eles encontraram, caído na estrada, um viajante ferido, socorreram o infeliz e tomaram conhecimento de sua aventura. Seu nome era Salém Nasair, um dos mais ricos mercadores de Bagdá, onde viajava numa caravana que tinha sido atacada por nômades Persas do deserto. Segundo Nasair, os seus companheiros tinham perecido, mas ele milagrosamente tinha conseguido escapar oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos. Após concluir a narrativa, o viajante pediu alguma coisa para comer, pois estava quase a morrer de fome. Beremiz tinha 5 pães e seu companheiro, 3 pães. O xeque Nasair fez a proposta de compartilhar esses pães entre eles e que, quando chegasse a Bagdá, pagaria 8 moedas de ouro pelo pão que comesse. Durante a viagem foram partindo os pães em pedaços e dividindo entre eles. Quando chegaram, o xeque foi*

[30] Extraído e adaptado de Tahan (2008, capítulo 4, p. 24 - 28).

pagar 5 moedas a Beremiz e 3 ao mercador. Segundo o calculista Beremiz essa divisão não era a justa, deveria receber 7 moedas pelos 5 pães e seu amigo 1 moeda pelos 3 pães.

Justifique o raciocínio feito por Beremiz para receber 7 moedas e seu amigo apenas 1 moeda.

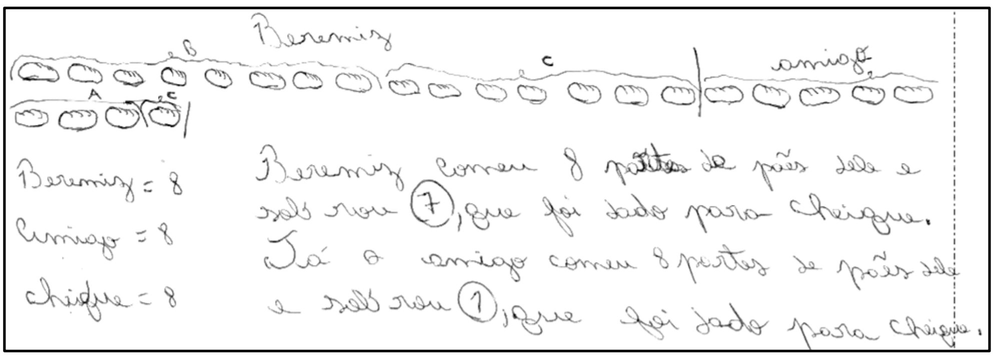
O procedimento adotado para esse problema foi o mesmo utilizado no anterior, ou seja, leitura individual, leitura feita por nós, a resolução do problema pelos alunos e a mediação da professora regente e da pesquisadora.

Todos os grupos usaram a representação pictórica, como suporte para a compreensão do problema e não perguntaram que fórmulas deveriam aplicar. Vejamos as resoluções de cada grupo:

- **Grupo A**

Os desenhos dos pedaços de pães, para retratar a situação, e algumas operações aritméticas auxiliaram na interpretação da situação abordada. Os alunos partiram os 8 pães, cada um em três partes, e verificaram que ficaria 8 partes para cada um dos três. Eles fizeram, então, a distribuição dos 8 pedaços de pães para Beremiz e o que sobrou da parte dele seria para o xeque. Do mesmo modo, distribuíram as 8 partes para o amigo e o que sobrou era do xeque Nasair. Ao contarem, perceberam que Beremiz havia cedido ao xeque Nasair 7 pedaços e o amigo apenas 1 pedaço. Verificamos que a resposta do grupo ficou incompleta, mas o raciocínio estava correto, apenas deveria ter justificado melhor a situação, dizendo que cada moeda recebida correspondia a cada parte de pão que foi comido pelo xeque Nasair. Observamos o capricho desse grupo ao retratar a situação dos pães; a estratégia própria de resolução, a imaginação e o raciocínio lógico matemático, sem a pretensão da utilização de fórmulas (Figura 25).

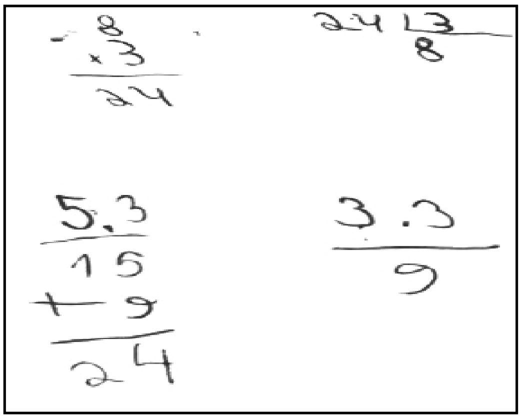
Figura 25 - Registro elaborado pelo grupo A



Fonte: Arquivo da pesquisadora

Note-se que na figura 26, os alunos não seguiram as normas matemáticas ao expressar os registros correspondentes às operações, mas compreendemos o que quiseram retratar.

Figura 26 - Registro elaborado pelo grupo A

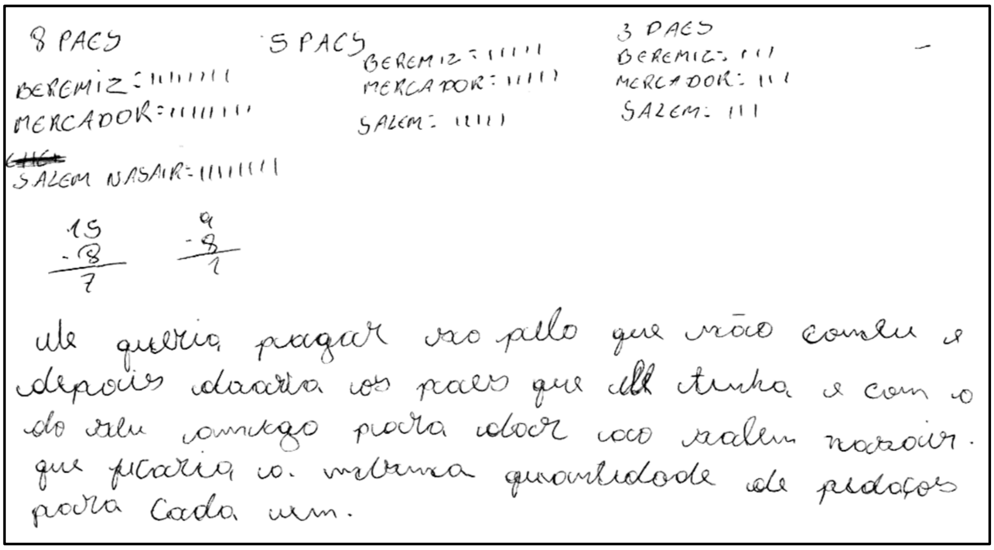


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo B**

Observamos que o registro pictórico usado pelo grupo não corresponde à solução do problema, mas o algoritmo da subtração indica que os pães foram partilhados, obtendo 15 e 8 pedaços. Os alunos buscaram desenvolver uma estratégia própria para a resolução e apesar de não haver clareza na resposta dada, acreditamos que eles perceberam que os resultados encontrados nas subtrações seriam os pedaços de pães doados ao xeque Nasair, como consta na figura 27:

Figura 27 - Registro elaborado pelo grupo B

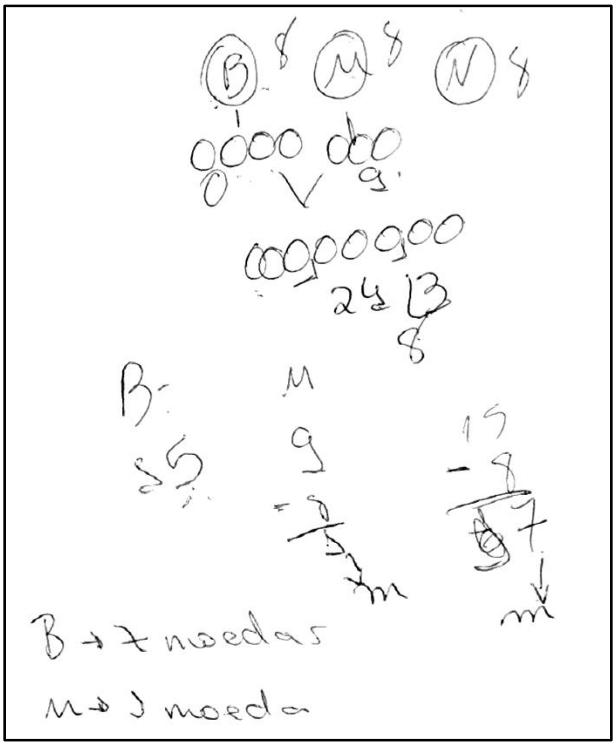


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo C:**

O grupo se apoiou no cálculo mental e nas operações aritméticas de divisão e subtração, assim postos:

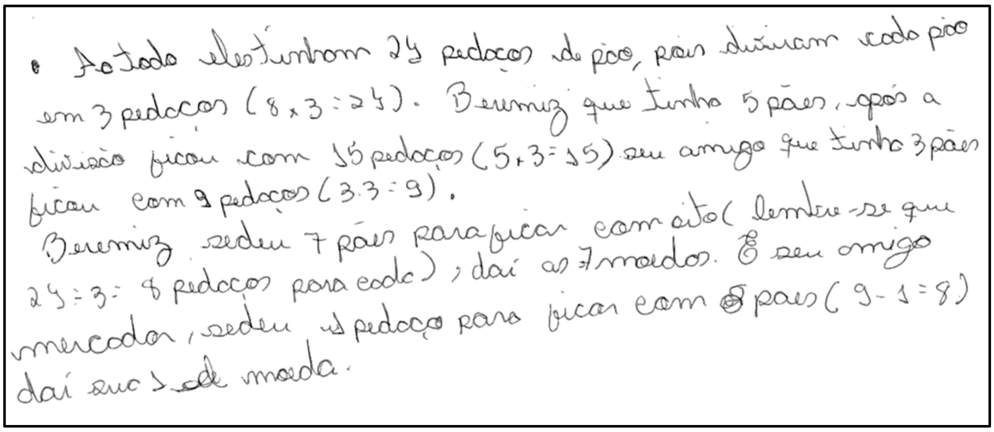
Figura 28 - Registro elaborado pelo grupo C



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Com base no registro acima, o grupo compreendeu o problema proposto sem dificuldades e justificou conforme a figura 29 o procedimento realizado na divisão dos pães.

Figura 29 - Registro elaborado pelo grupo C



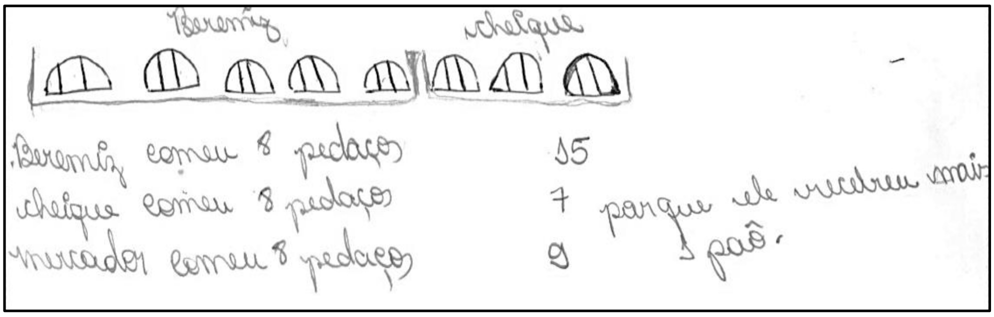
• Ao todo eles tinham 24 pedaços de pão, pois dividiam cada pão em 3 pedaços (8 x 3 = 24). Beremiz que tinha 5 pães, após a divisão ficou com 15 pedaços (5.3 = 15) seu amigo que tinha 3 pães ficou com 9 pedaços (3.3 = 9).
Beremiz cedeu 7 pães para ficar com oito (lembre-se que 24 : 3 = 8 pedaços para cada); daí os 7 moedas. E seu amigo mercador, cedeu 1 pedaço para ficar com 8 pães (9 - 1 = 8) daí sua 1 de moeda.

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo D**

O grupo fez a contagem dos pedaços de pães para cada um, porém, não fez o que foi solicitado no problema. Apesar da falta de uma conclusão final, acreditamos que o grupo tenha compreendido bem o enunciado, pois demonstrou criatividade, ao desenhar os pães com as divisões correspondentes a cada pedaço, raciocínio e imaginação, sem a necessidade de fórmulas.

Figura 30 - Registro elaborado pelo grupo D

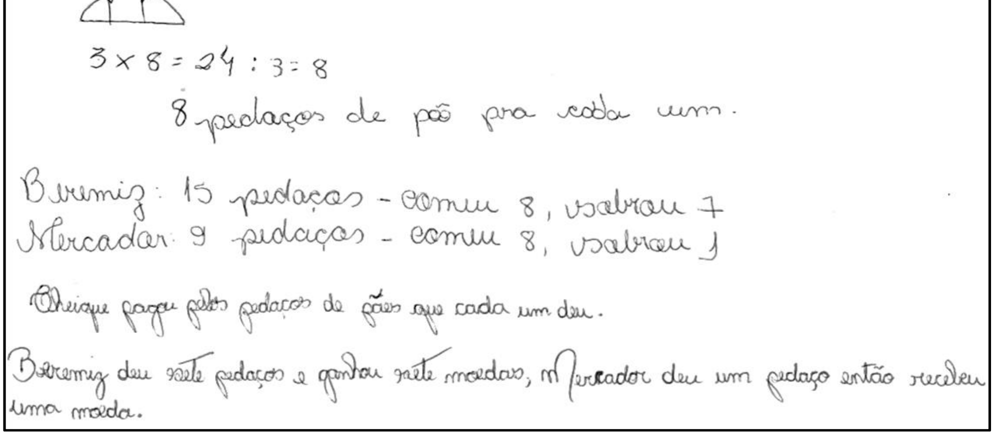


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo E**

Utilizou-se da das operações aritméticas, de estratégias próprias e do desenho, para auxiliar na interpretação do problema. Desenharam apenas um pão, com as marcações dos possíveis pedaços, imaginando serem os outros pães iguais. Para determinarem em quantos pedaços aqueles 8 pães seriam cortados, se valeram da multiplicação. Apesar de não ser a melhor maneira de escrever a expressão $3.8 = 24 : 3 = 8$, entendemos o que o grupo quis expor. Os alunos responderam ao que foi proposto, como descrito na figura 31.

Figura 31 - Registro elaborado pelo grupo E

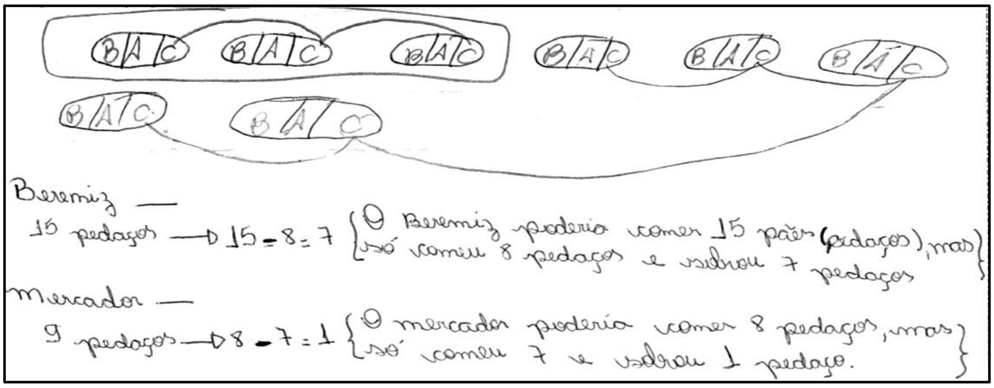


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo F**

O grupo utilizou as operações aritméticas básicas para responder ao problema e, também, do desenho para interpretar e contar os pedaços de pães que Beremiz e seu amigo possuíam. O registro $15-8=7$ mostra a quantidade de pedaços que Beremiz deu ao xeque Nasair e $8-7=1$ uma pequena confusão, acreditamos, por falta de atenção, pois o correto seria $9-8=1$. Os alunos justificaram a quantidade de pedaços de pães que cada um comeu, mas nada disseram com relação a quantidade de moedas, mesmo assim, reconhecemos que eles entenderam a situação-problema. Observamos o capricho com que fizeram a resolução do problema.

Figura 32 - Registro elaborado pelo grupo F

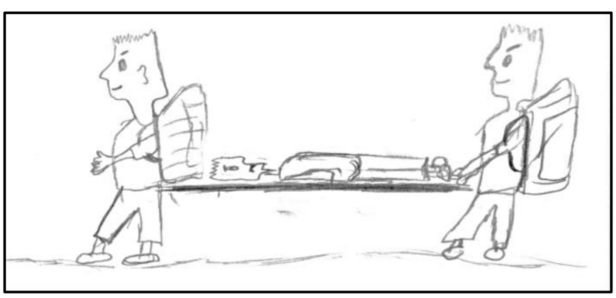


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo G**

Um dos componentes (A22), antes de tentar atender ao que fora solicitado, esboçou os personagens Beremiz, seu amigo mercador e Salém Nasair, o viajante ferido caído na estrada, caracterizando-os com elementos bastante atuais, tais como calças, mochilas e cortes de cabelo. O que nos indica o processamento de sua imaginação ante uma releitura do enredo apresentado.

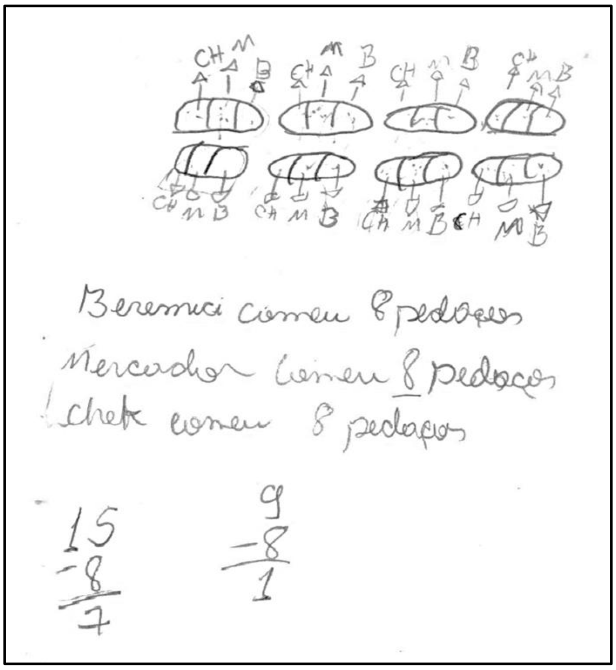
Figura 33 - Registro elaborado pelo aluno A22



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

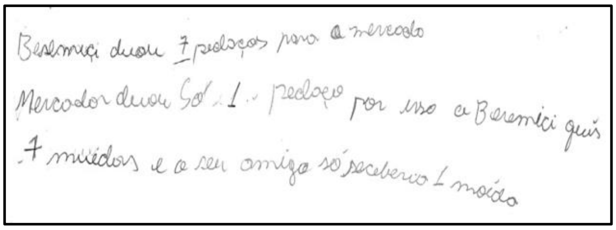
Posteriormente, de acordo com as figuras 34 e 35, o grupo fez os desenhos, os quais auxiliaram na resolução e finalização do problema

Figura 34 - Registro elaborado pelo grupo G



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Figura 35 - Registro elaborado pelo grupo G



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

“Deixar que os alunos criem suas próprias estratégias para resolver problemas favorece um envolvimento maior deles com a situação dada”, enfatiza Cavalcante (2001, p.125). Nesse sentido, além de não ser necessário o uso de fórmulas, o problema favoreceu a criatividade, o raciocínio, a imaginação e foi-nos bastante perceptível o empenho dos alunos, fazendo-os se sentirem responsáveis pelas resoluções.

Após a conclusão de todos os grupos, discutimos as respostas coletivamente e conversamos sobre a possibilidade de haver alguma semelhança com o problema dos 35 camelos. Eles disseram que para esta situação fazia sentido partir os pães em pedaços e representar com decimais ou fração cada parte do pão, o que não era possível com os camelos, pois se tratava de uma grandeza inteira.

Recolhemos as respostas e fizemos uma leitura do capítulo para que os alunos entendessem o que Beremiz fez com as moedas. Para surpresa da turma, depois de tanto raciocínio, o Calculista resolveu dividir as moedas de modo igual.

As quatro operações aritméticas fundamentais foram os conceitos matemáticos usados pelos alunos nesse problema e ao término da oficina, os alunos relataram, por escrito, suas opiniões acerca da atividade proposta, como descreveremos a seguir.

5.2.2 Apropriações dos sujeitos com relação ao problema dos 8 pães

Durante a resolução do problema, os alunos conseguiram entender a divisão das moedas proposta por Beremiz. Essa situação-problema estimulou o raciocínio e a fantasia dos alunos, comprovando uma das definições dadas aos problemas recreativos.

Na opinião de alguns alunos o Calculista fora **justo** em suas atitudes, como é possível observar nas falas a seguir:

> *O Beremiz queria mostrar a forma justa de repartir o dinheiro corretamente; então eu acho que tudo o que foi proposto está correto, pois ele mostrou uma forma de muita lógica para fazer a divisão [...](A9).*
>
> *Achei que Beremiz foi justo, pois dos três ninguém saiu prejudicado (A26).*
>
> *Eu achei que Beremiz resolve as coisas do jeito correto ele procura formas muito legais e um pouco difícil de resolver os problemas encontrados durante a viagem (A1).*
>
> *[...] no caso do Beremiz eu achei que ele está certo pois ele deu sua maior parte de pães já o amigo só deu um pedaço (A10).*

Quando os alunos consideraram Beremiz como justo, eles remeteram, provavelmente, às suas situações cotidianas, ou melhor, às suas praticas culturais, correlacionando-as com a amizade, o respeito e o companherismo, conforme descritas por Chartier (2009).

Apesar de termos realizado a leitura do final do capítulo, onde o dinheiro é repartido igualmente, dois alunos continuaram com a hipótese de que a partilha sugerida por Beremiz fora **injusta.** Vejamos:

> *[...] o Beremiz agiu de uma forma errada pois ele se deu bem e o amigo não (A18).*
>
> *[...] Beremiz foi injusto, porque ele dividiu de forma que não dava igual para todos (A7).*

Observamos, ainda, que a resolução do problema foi considerada pelos alunos como **legal/fácil/interessante**, muito provavelmente, em função do significado que o enredo lhes trazia e pela leitura, um tanto mais atenciosa, feita por eles.

> *Eu achei bem legal, no começo achei um pouco difícil, mas após percebi que era fácil... Enfim achei muito interessante (A14).*
>
> *O problema proposto estava fácil só tinha que prestar um pouco mais de atenção para chegar ao resultado (A26).*
>
> *O problema foi bem legal e não foi difícil [...] (A5).*
>
> *Eu gostei do problema [...] e o cálculo foi fácil (A4).*

Outros alunos consideraram a atividade como uma questão que **envolve o raciocínio e a interpretação** para resolver. Vejamos:

> *[...] mas não foi fácil e também não foi difícil, foi uma operação de raciocínio (A9).*
>
> *Essa conta não é difícil de saber apenas tem que pensar sobre o assunto (A16).*
>
> *[...] um pouco fácil, basta fazer a interpretação e ter uma lógica de fazer a divisão (A6).*
>
> *O problema não estava difícil tinha que prestar a atenção, que ele só queria que pagasse o que não foi conssumido (A2).*

Alguns alunos compararam com o problema dos 35 camelos, para justificar a **facilidade** nesta resolução:

> *Foi interessante, referente ao problema anterior do camelo, esse foi bem mais fácil.... Eu gostei dos problemas, quebra um pouco a cabeça, mas nada do que interpretar para entender melhor o que quer passar (A11).*
>
> *Achei bem mais fácil do que o probema do camelo, no inicio achei injusta a divisão de Beremiz, mas fazendo algumas contas percebe o ponto de vista dele (A13).*

Apesar de todos os alunos terem resolvido o problema, quatro deles interpretaram-no como **meio ou pouco difícil, confuso:**

> *Eu gostei, foi meio difícil mas eu consegui [...] (A22).*
>
> *O problema resolvido foi um pouco difícil [...] (A7).*
>
> *Bom esse problema para mim foi meio confuso mas conseguimos fazer (A10).*
>
> *Eu achei o problema um pouco difícil, pois tem que pensar bem e muito para chegar a resposta correta (A8).*

Um aluno relatou que **gostou** do problema pelo fato do Calculista ter compartilhado igualmente as moedas com o amigo:

> *Eu gostei porque no final da história ele não achou justo aquela divisão e decide dividir as moedas justamente com seu colega que distribuiu pães junto com ele. Foi meio complicado fazer mas fazendo todos os processos achei o resultado (A17).*

Segundo Chartier (1999, p.152) “o texto implica significações que cada leitor constrói a partir de seus próprios códigos de leitura, quando ele recebe ou se apropria desse texto de forma determinada”. Percebemos que a leitura da historieta contida no problema dos 8 pães ofereceram aos alunos a oportunidade de reflexão sobre suas próprias condutas perande a sociedade. A ajuda ao próximo, ao necessitado, a boa conduta, a honestidade, a fraternidade são temas que, provalmelmente, fluíram ao lerem o problema em questão.

O problema, como ressaltado, não necessitou de fórmulas, o que oportunizou a criatividade posta nas estratégias próprias. Por esse motivo, a prática da resolução do problema foi satisfatória para cada grupo e aguçou sua imaginação e gerou representações expressas como legal, fácil e/ou interessante.

5.3 O PROBLEMA DOS 21 VASOS

5.3.1 Descrição do 3º encontro

Participaram desse encontro 24 alunos, sendo 14 do sexo masculino e 10 do sexo feminino. Ao invés de reorganizarmos os presentes em seis grupos com quatro alunos, optamos manter o Grupo G. Assim sendo, formamos quatro grupos com quatro alunos, dois grupos com três e um com dois. O encontro teve duração de uma aula, no período compreendido das 11h05 às 12h00, em 09 de Junho de 2015.

> ***O Problema dos 21 vasos***[31]
>
> *Conversando o Xeque com Beremiz, e apontando para os três muçulmanos, fala que eles são amigos e criadores de carneiro em Damasco. Como pagamento de um pequeno lote de carneiros, recebeu aqui, em Bagdá, uma partida de vinho, muito fino, composta de 21vasos iguais, sendo: 7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios. Querem agora dividir os 21 vasos de modo que cada um deles receba o mesmo número de vasos e a mesma porção de vinho. Cada um dos sócios deve ficar com sete vasos. Devem repartir o vinho sem abrir os vasos, isto é, conservando-os exatamente como estão.*
>
> ***Como fazer a partilha?***

Realizamos uma pequena modificação em relação às outras duas oficinas, isto é, os alunos fizeram a leitura individual e silenciosa e, posteriormente, ao invés de lermos para eles, solicitamos que um componente o fizesse para seus pares.

Enquanto os alunos resolviam o problema, passávamos para observá-los. Novamente, uma das estratégias utilizadas, por todos os grupos, foi a representação pictórica. A maioria dos grupos resolveu a atividade por tentativa e erro. Alguns quiseram “abrir” os vasos para distribuir os líquidos, quando, então, pedimos para que relessem o enunciado em questão.

Dois grupos logo chegaram à resposta e, conforme iam terminando, orientávamos para que buscassem outros procedimentos para resolver o mesmo problema, mas apenas um grupo encontrou uma segunda maneira. Segundo Stancanelli (2001, p.109) “o trabalho com duas ou mais soluções faz com que o aluno perceba que resolvê-los é um processo de investigação do qual ele participa como ser pensante e produtor de seu próprio conhecimento”. Vejamos as soluções de cada grupo:

- **Grupo A:**

Ao realizar essa atividade, o grupo considerou que cada sócio receberia 3,5 litros de vinho, mesmo não tendo havido a menção a litros no enunciado. A sociedade a qual esses alunos estão inseridos consideram o litro como uma unidade de medida de

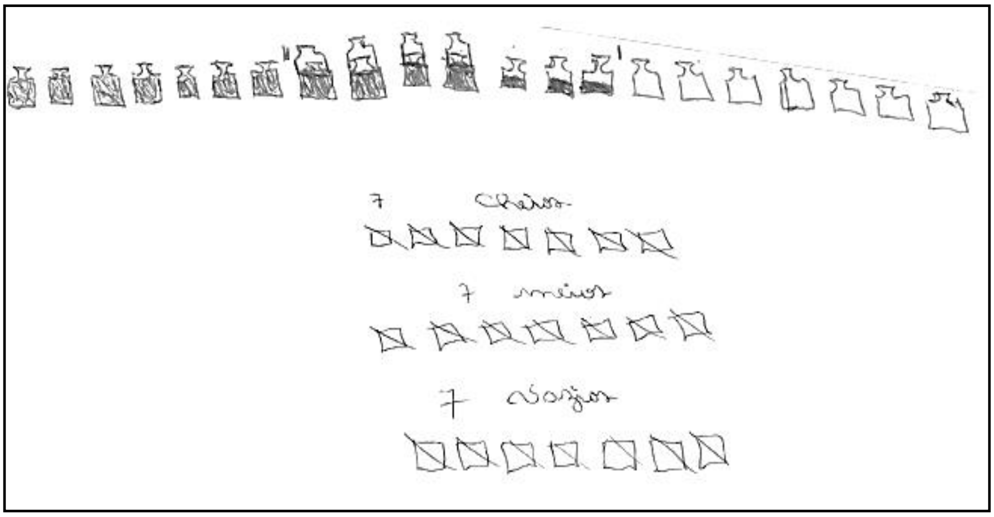
---

[31] Extraído e adaptado de Tahan (2008, capítulo 8, p. 52 - 61).

capacidade bastante usual. Nos supermercardos é muito comum depararmos com muitas bebidas que são vendidas em litros, como exemplos, o leite e o vinho.

Os alunos resolveram esse problema por estimativa. Os desenhos dos vasos de vinho, representados por cheios, meio cheios e vazios, orientaram na distribuição e partilha para cada sócio. Os alunos organizaram os três grupos de vasos, e conforme distribuíam os vasos, eles os riscavam para não perderem a contagem:

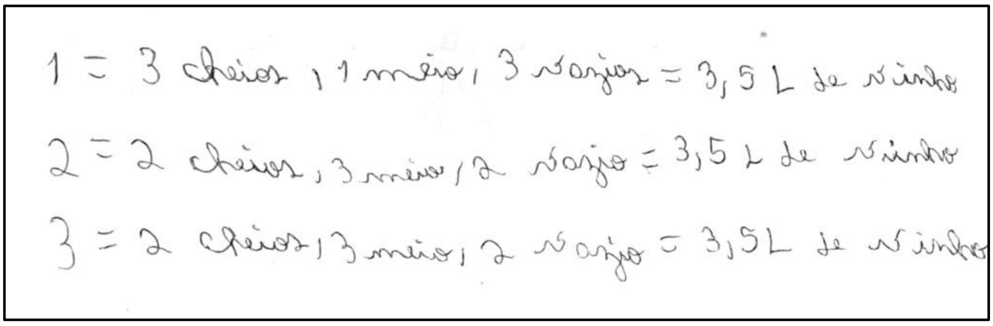
Figura 36 - Registro elaborado pelo grupo A



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

O grupo representou cada solução pelos numerais 1, 2, 3, respectivamente, e, muito provavelmente, o sinal de igualdade como sinônimo de equivalência. Tanto o raciocínio, quanto as estratégias próprias de resolução estavam corretos e, portanto, foram bem sucedidos:

Figura 37 - Registro elaborado pelo grupo A

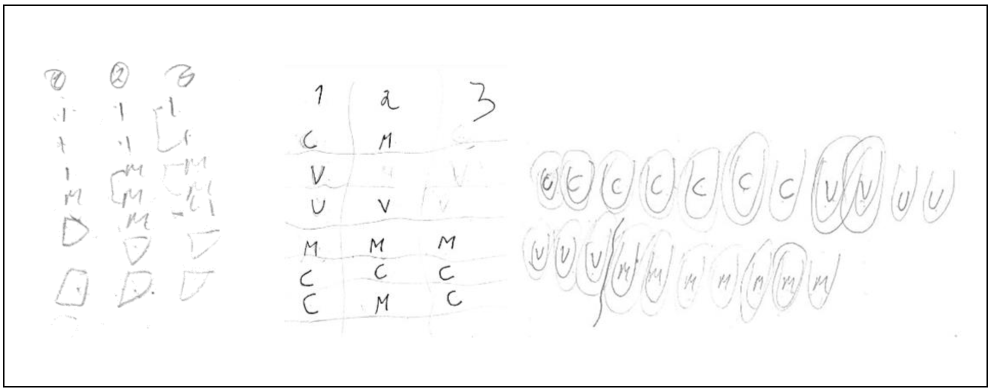


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo B**

Tentativa e erro foi a estratégia utilizada pelo grupo, que, também, admitiu o litro como unidade de medida e representou os vasos por meio de vários símbolos. Observemos as três tentativas realizadas:

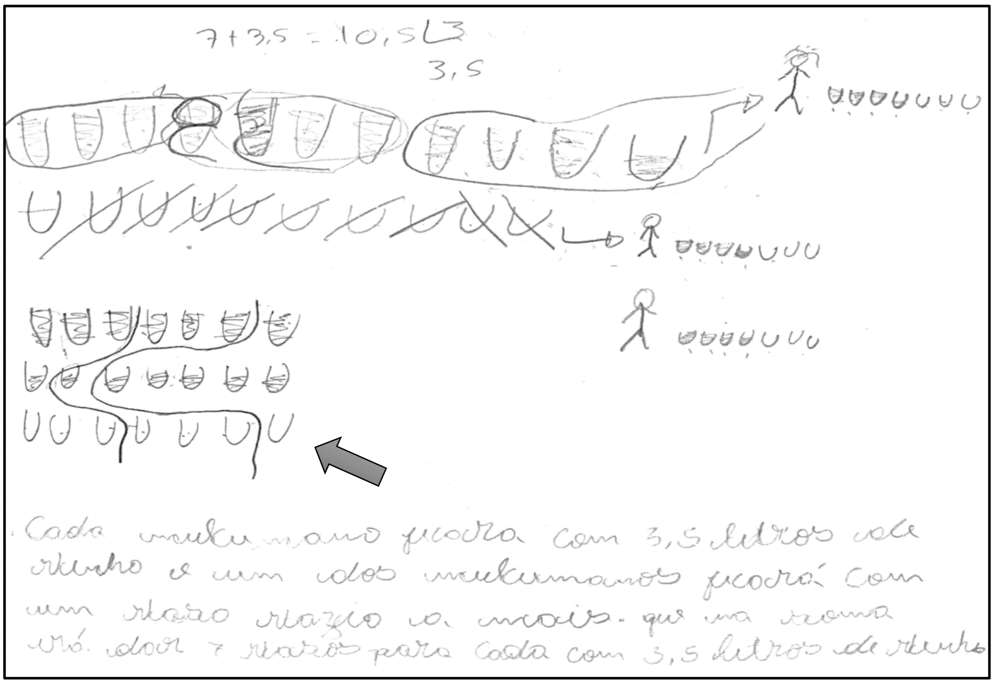
Figura 38 - Registro elaborado pelo grupo B



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Totalizaram 10,5 litros de vinho, ou seja, cada vaso cheio correspondia a dois meio cheios, e distribuíram 3,5 litros de vinho para cada um. Notamos que para os alunos *metade* e *meio cheios tinham o* mesmo sentido. Seu registro final:

Figura 39 - Registro elaborado pelo grupo B



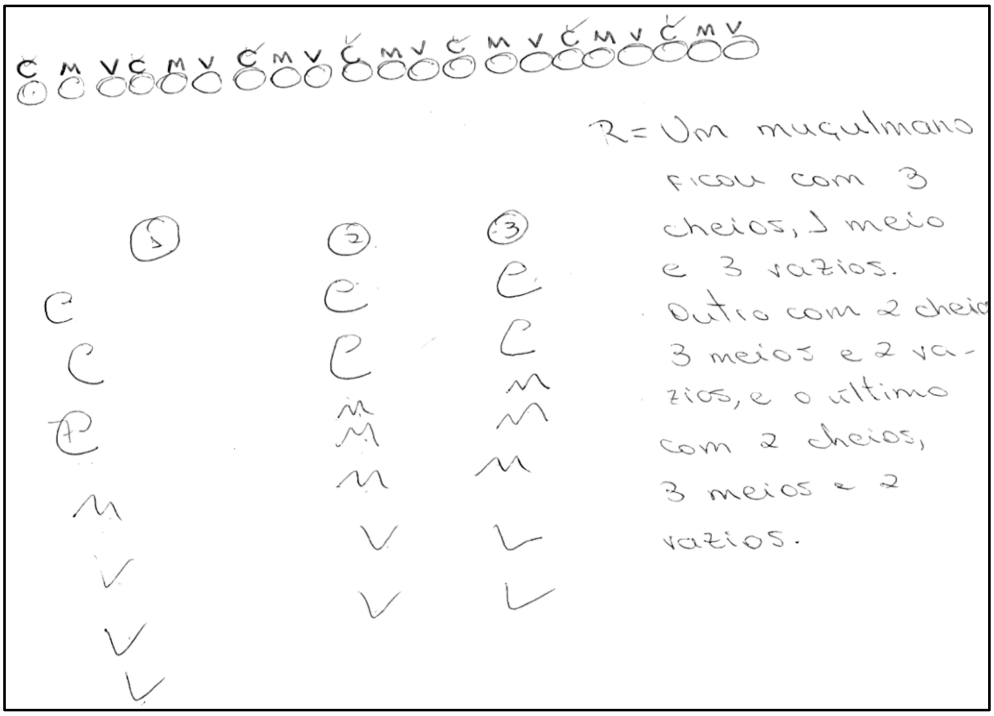
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os alunos demoraram para concluírem essa questão, mas chegaram à solução, mesmo não havendo clareza ao redigirem a resposta final. Consideramos que o raciocínio usado pelo grupo e as estratégias de resolução foram bem proveitosas, os desenhos auxiliaram na distribuição dos vasos favorecendo a investigação, e as tentativas mostraram que o grupo se empenhou em buscar a solução.

- **Grupo C:**

Como podemos ver na figura 40, o grupo, além dos desenhos, que ajudaram na contagem e distribuição dos vasos, recorreram às letras C, M e V para representarem, respectivamente, os vasos cheios, meio cheios e vazios. Os alunos, por meio do cálculo mental, foram bem hábeis ao resolver essa situação-problema e, consequentemente, o primeiro grupo a concluir o problema. Sugerimos ao grupo que encontrasse outra forma de agrupamento dos vasos, mas se sentiu satisfeito com uma única resposta como descrita a seguir:

Figura 40 - Registro elaborado pelo grupo C

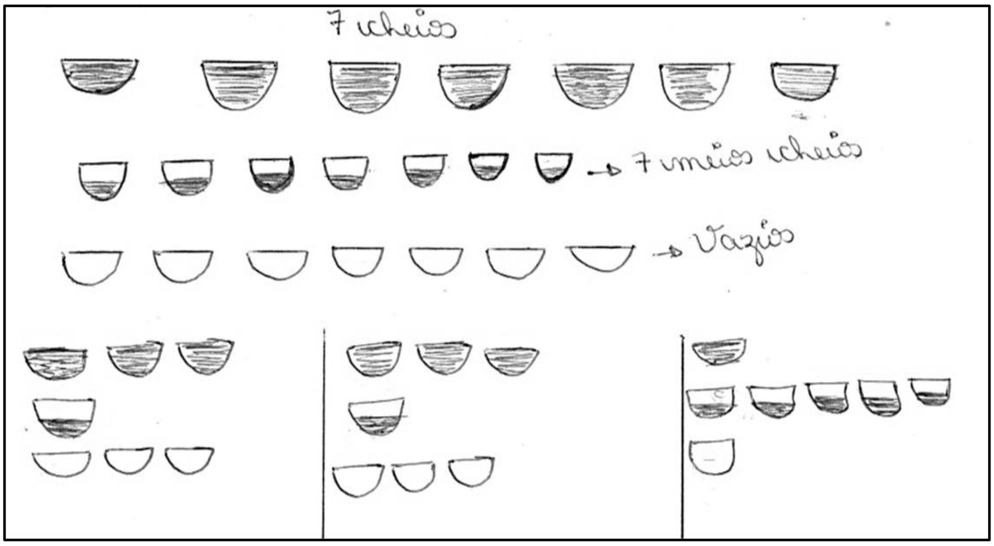


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo D:**

Como o grupo C, o cálculo mental, também foi uma das estratégias observadas nesse grupo. Notamos certo capricho, imaginação e criatividade ao desenhar os vasos de vinho. Os primeiros desenhos serviram para mostrar os grupos de vasos, assim distribuídos em 7 cheios, 7 meio cheios e 7 vazios. Seguidamente, houve os agrupamentos conforme solicitados no enunciado do problema, separados em três colunas, as quais respondem, claramente, a pergunta apenas pelo visual. O grupo não redigiu a resposta por extenso, mas o raciocínio usado por ele foi satisfatório:

Figura 41 - Registro elaborado pelo grupo D



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo E**

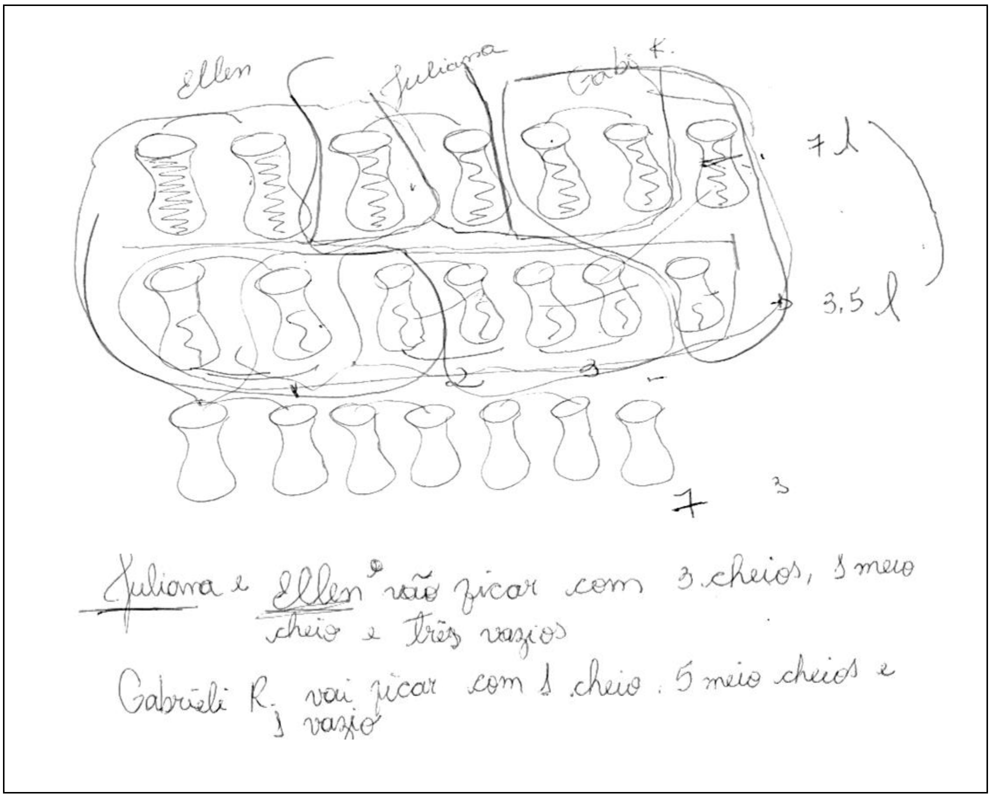
Os alunos nomearam os sócios com o nome de três componentes do grupo, o que nos remete a Chartier (1999, p.70) quando afirma que

> [...] todo leitor diante de uma obra recebe em um momento, uma circunstância, uma forma específica e, mesmo quando não tem consciência disso, o investimento afetivo ou intelectual que ele nela deposita está ligado a este objeto e a esta circunstância.

Consideraremos a obra, descrita por Chartier (1999), como sendo o problema estudado e, com isso, destacar o envolvimento desse grupo durante e após a leitura do enunciado, tanto que ao passarmos por suas mesas, durante a resolução, ouvimos os alunos dialogando e se colocando no lugar dos sócios.

Eles consideraram cada vaso cheio contendo 1 litro de vinho e cada vaso meio cheio como a metade de um cheio, totalizando 3,5 litros para cada sócio. O grupo usou as representações pictóricas como um recurso auxiliar no enfrentamento do problema, e seus desenhos contribuíram para a distribuição dos vasos. Vejamos a solução encontrada pelo grupo na figura 42:

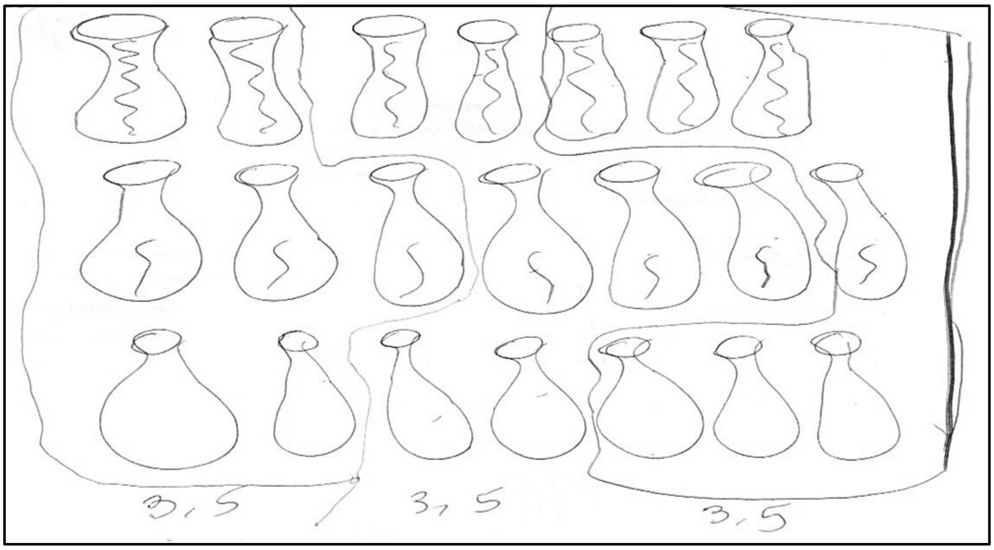
Figura 42 - Registro elaborado pelo grupo E



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

O grupo, após nossa sugestão, encontrou uma segunda solução, mostrada, tão somente, pelo desenho, mas gratificante por ter chegado a ela:

Figura 43 - Registro elaborado pelo grupo E

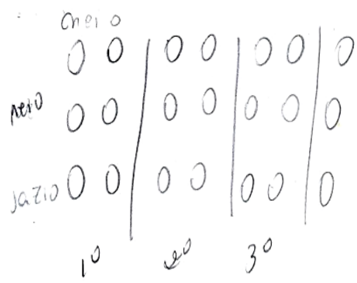
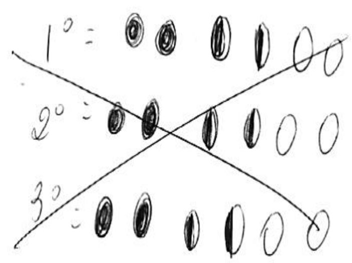
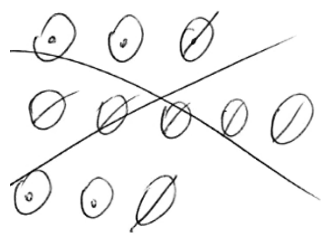
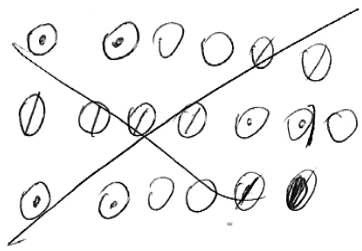
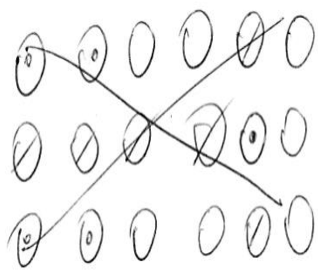
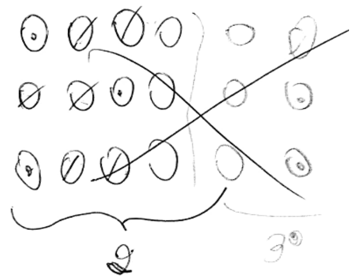


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo F**

Os componentes desse grupo recorreram à representação pictórica e consideraram um total de 10,5 de vinho, isto é, dois vasos meio cheios com a mesma quantidade de vinho que um cheio. Os alunos foram resolvendo por tentativa e erro, como segue o registro:

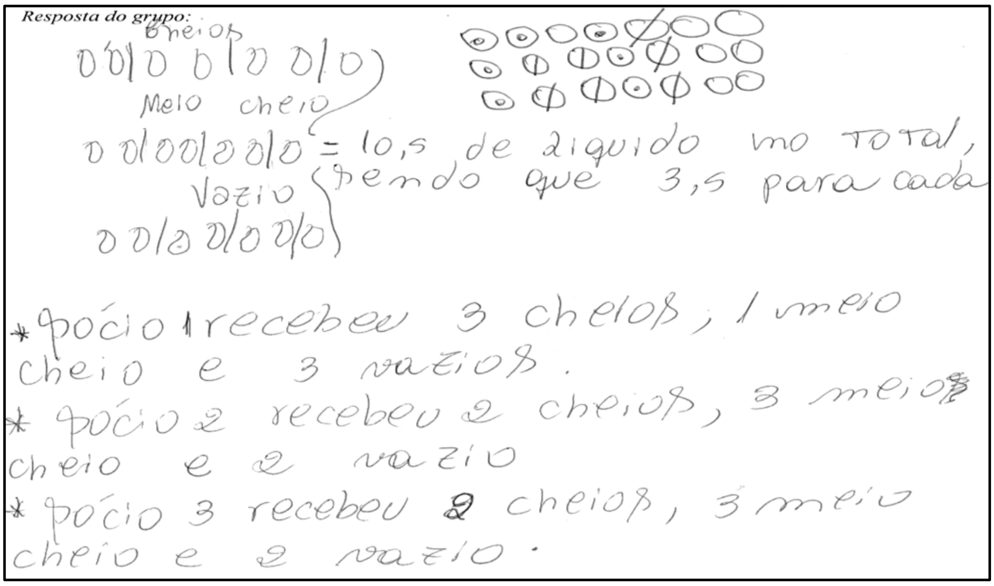
Quadro 8 - Tentativas de resolução elaboradas pelo grupo F

1º tentativa		**2º tentativa**	
3º tentativa		**4º tentativa**	
5º tentativa		**6º tentativa**	

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

As tentativas efetuadas pelos alunos os ajudaram chegar à solução desejada, haja vista, serem persistentes e não desanimaram em busca do objetivo a alcançar. Os componentes releram o enunciado e descreveram a partilha dos vasos para cada sócio do seguinte modo:

Figura 44 - Registro elaborado pelo grupo F

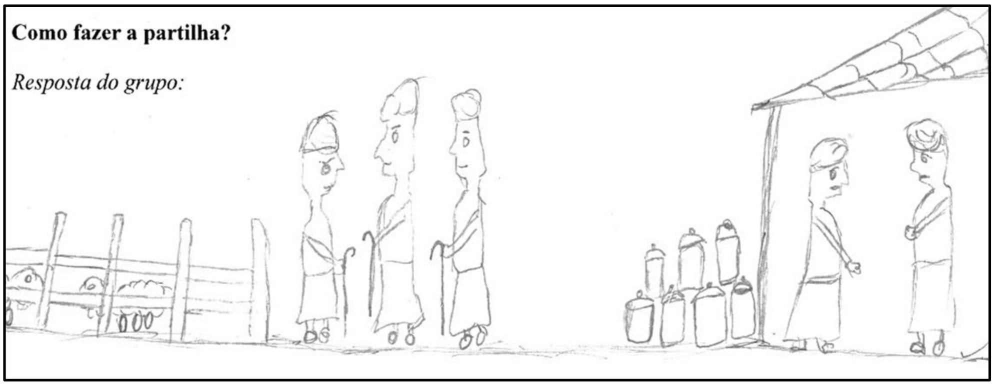


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

- **Grupo G**

Novamente um dos componentes, antes de responder a questão, fez o seguinte desenho:

Figura 45 - Desenho elaborado pelo aluno A22

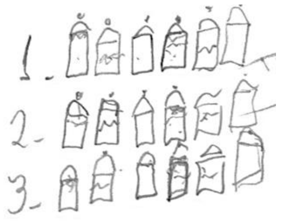


Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Nele, podemos perceber traços da cultura árabe, tais como as roupas e turbantes, os mulçumanos criadores de carneiros, muito provavelmente, Beremiz e seu amigo, além de alguns vasos de vinho. Seria, então, a emersão de sua imaginação guiada pelo enredo da história que acabara de ouvir.

Com o auxílio da tentativa e erro os alunos consideraram que a quantidade total de líquidos equivalia a 10,5, ou seja, cada vaso cheio como dois vasos meio cheios. Eles usaram o algoritmo da divisão para obter a quantidade de 3,5 de líquidos. Vejamos as tentativas de resolução elaboradas pelo grupo:

Quadro 9 - Tentativas de resolução elaboradas pelo grupo G

1º tentativa		**2º tentativa**	
3º tentativa		**4º tentativa**	

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Verificamos que na 4º tentativa o grupo obtém a solução. Ao redigir a resposta do problema, os alunos não expressaram com clareza como seria feita a partilha dos vasos e responderam “porque cada mulçumano vai ficar com um vaso mais vazio”.

Fomos questionar essa resposta. Responderam que o primeiro mulçumano ficaria com um vaso vazio a mais que os outros dois, donde inferimos que os alunos não releram o enunciado do problema para a finalização da questão, mas, por meio dos procedimentos realizados, foi possível notar o envolvimento do grupo.

Após todos os grupos terem concluído a questão, identificamos as duas soluções encontradas por eles e ressaltamos a possibilidade de um mesmo problema ser resolvido de diferentes maneiras:

1º sócio: 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios
2º sócio: 2 vasos cheios, 3 meio cheios e 2 vazios
3º sócio: 2 vasos cheios, 3 meio cheios e 2 vazios

1º sócio: 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios
2º sócio: 3 vasos cheios, 1 meio cheio e 3 vazios
3º sócio: 1 vasos cheios, 5 meio cheios e 1 vazio

Comparamos o problema com os outros dois anteriores - *o problema dos 35 camelos* e *o problema dos 8 pães* - a fim de identificarmos os conceitos matemáticos presentes, tais como, as operações fundamentais, contagem, números decimais e fracionários.

Os grupos A, C, e F acertaram a questão e responderam com clareza à pergunta. Os grupos B e G responderam corretamente a partir dos desenhos e tentaram sistematizar uma resposta, mas não obtiveram êxito. O grupo D respondeu apenas considerando os desenhos e o grupo E apresentou duas soluções corretas, mas se preocuparam em dar uma resposta a apenas uma delas.

O problema proporcionou diferentes estratégias de resolução, como recurso pictórico, tentativa e erro, elaboração de quadros e desenhos, não prendendo os alunos em busca de fórmulas, além de apresentar mais de uma resposta. Cremos ser um problema bastante interessante para os professores trabalharem em suas aulas, com o intuito de aguçar a imaginação dos alunos, propiciar a eles tomada de decisão, discorrer por caminhos próprios. As diferentes formas de resolver o mesmo problema deixa evidente que o processo de resolução é mais importante que, simplesmente, chegar à resposta final, uma vez que, conforme Diniz (2001, p.95) “o aluno, enquanto resolve as situações-problema, aprende matemática, desenvolve procedimentos e modos de pensar, desenvolve habilidades básicas como verbalizar, ler, interpretar [...]”, adquirindo confiança e autonomia ao investigá-las.

Segundo relato da professora regente, “o trabalho realizado na sala mostrou o quanto é relevante para os alunos raciocinarem sobre os problemas que realmente exigem a busca de conhecimentos já adquiridos e que os estimulem a fazer isso”, o que não acontece, em nosso entendimento, com problemas que só exigem repetição.

Ao término da discussão, pedimos aos alunos que relatassem, por escrito, suas considerações, acerca da atividade realizada, comentadas no próximo tópico.

5.3.2 Apropriações dos sujeitos com relação ao problema dos 21 Vasos

Destacamos alguns depoimentos dos alunos, os quais, ora se referindo ao enredo, ora às resoluções, sinalizam ter sido um problema **fácil**, de **lógica**, requendo **interpretação e raciocínio, de muitas leituras** para uma boa compreensão, possível de se resolver **de várias formas,** ou, ainda, **simples**, **interessante**, **diferente**, **legal**, mediano, **difícil, complicado:**

> *O problema é fácil, é praticamente questão de lógica com um pouco de raciocínio e cálculo. No início me atrapalhei um pouco, mas depois reli e vi que era preciso interpretar mais. Há várias formas de interpretar e resolver. Conseguimos duas, mas haveria outras (A21).*
>
> *O problema é fácil, vai pela lógica de cada um, claro que no começo achei difícil, complicado, sem algo para colocar, mas nada do que interpretar e tentar entender o que está passando não resolva (A11).*
>
> *O problema foi bem fácil, e simples por isso encontramos a resposta rápido (A5).*
>
> *Pois eu achei um problema interessante, muito legal, e também um problema resoluvel, gostei muito, e diferente, muito bom (A18).*
>
> *Foi muito fácil eu achei muito legal essa maneira que ele procurou de resolver esse problema [...](A1).*
>
> *Eu achei o problema fácil, porque era só dividir e contar os litros corretamente, só precisei contar os cheios, os meios cheios e os vazios (A8).*
>
> *O problema no começo foi difícil, tive dúvidas, não conseguimos interpretar, até que uma hora, de tanto ficar lendo, tentamos mais uma vez e conseguimos achar o resultado (A6).*
>
> *O Problema proposto no começo deixou dúvidas pois não conseguimos interpretar com apenas uma leitura mas quando lemos novamente sacamos que seria a cada 1 cheio para cada um era 2 vazios para os outros dois, e depois 1 cheio para cada, 1 pela metade para cada dois vazios para cada e outro vazio para o primeiro. Aí que concluimos que o total de líquido era 10,5 para o total e apenas 3,5 para cada e eu acho que Beremiz fez a coisa certa (A9).*
>
> *Eu achei o problema médio porque ele confundia os vasos vazios a mais, mas ei gostei porque a pessoa só consegue raciocinar certo (A2).*
>
> *Bom pelo problema, achei que foi mais ou menos fácil. Depois de ter dividido os vasos para uma pessoa achei que a divisão para os outros dois ficou mais fácil (A10).*
>
> *Achei o problema simples para se encontrar uma resolução, mas, tenho por mim de que há mais formas de se dividir em partes iguais os vasos e o vinho entre os homens. Mas fiquei satisfeita em descobrir no mínino uma forma de dividir (A24).*
>
> *Conseguimos duas fórmulas, teria várias outras, porém ainda não conseguimos, não veio a idéia de como fazer, mas na próxima vamos conseguir mais e cada vez aprofundando nossas experiências (A11).*
>
> *Eu achei um pouco complicado pois para partilha dos vasos, todos teriam que receber o mesmo tanto de líquidos e de vasos, mas depois consegui resolver a partilha (A20).*

> *Foi difícil mas nos conseguimos gostei espero que tenha mais (A22).*
>
> *Eu achei do problema um pouco difícil, porque tivemos que dividir os vasos todos igual, ou seja, o mesmo tanto de líquidos para todos (A7).*
>
> *Esse problema foi difícil, pois a divisão dos vasos cheio, meio e vazio não tava dando certo a divisão correta do líquido mas depois que entendi que ia sobrar um vaso vazio, que ia interar os 7 vasos de um dos irmãos (A17).*
>
> *Foi um pouco complicado pois o que confundia era os vasos vazios. Mas o problema foi bom, só dificultou na hora de saber o quanto de vinho cada um iria receber (A26).*

Cremos que oportunizar-lhes trabalhar em grupo tenha colaborado, e muito, para que esses alunos se sentissem estimulados em resolver o problema proposto. Os depoimentos nos mostram um fator essencial para o enfretamento da atividade: reflexão sobre os atos praticados, a partir da interação com seus pares.

5.4 O PROBLEMA DOS QUATRO QUATROS

Como o tempo que dispusemos para essa oficina não foi suficiente, e com a aquiescência da professora regente, dividimos o 4º encontro em dois momentos.

5.4.1 Descrição do 1º Momento

Participaram desse encontro 24 alunos, sendo 14 do sexo masculino e 10 do sexo feminino. Organizamos cinco grupos com quatro componentes, um com três e um com um aluno (um dos ausentes pertencia ao Grupo G). A atividade proposta teve duração de duas aulas, no período compreendido das 7h00 às 8h50, em 11 de Junho de 2015.

> ***O Problema dos Quatro Quatros***[32]
>
> *Alguns dias depois, encerrados os trabalhos que Beremiz e o mercador faziam no palácio do vizir, foram dar um giro pelo Suque e pelos jardins de Bagdá. A cidade apresentava, naquela tarde, um movimento intenso, febril, fora do comum. É que, pela manhã, haviam chegado duas ricas caravanas de Damasco. [...] Interessou-se Beremiz por um elegante e harmonioso turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali era vendido por 4 dinares. Mas o que impressionava o Calculista era que a tenda era intitulada*

[32] Extraído e adaptado de Tahan (2008, capítulo 7, p.43 – 51).

> ***Os Quatro Quatros**. [...] a legenda que figura nesse quadro recorda uma das maravilhas do Cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros!*
>
> *O problema dos quatro quatros é o seguinte:*
>
> ***"Escrever, com quatro quatros e sinais matemáticos, uma expressão que seja igual a um número inteiro dado. Na expressão não pode figurar (além dos quatro quatros) nenhum algarismo ou letra ou símbolo algébrico que envolva letra, tais com: log, lim etc."***
>
> ***Pede-se[33]:***
>
> *Escreva usando quatro quatros e sinais matemáticos expressões para os números de 0 a 10.*

Iniciamos a atividade com uma leitura silenciosa e em, seguida, fizemos a leitura para eles, quando surgiram duas questões: o que era um turbante, cuja resposta foi dada pela professora regente; e o que era *Suque*[34], para a qual nos baseamos na informação trazida no livro em voga. Muitos alunos não entenderam o que fora proposto, então, escrevemos um exemplo no quadro: 0 = 44 – 44; o que colaborou para o desenvolvimento da tarefa.

Algumas expressões foram encontradas rapidamente, enquanto outras, como por exemplo, as do 7 e 10, precisaram de mais atenção e manipulação das operações aritméticas, muito provavelmente, por imaginarem utilizar o 4, sempre isoladamente, não percebendo 44 como possibilidade para se chegar à solução.

Orientamos-lhes que observassem seus registros, pois, por vezes, não se remetiam às propriedades básicas das expressões aritméticas, por não terem compreendido determinadas regras inculcadas ao longo de sua vida escolar. Por exemplo, somavam e subtraiam antes de efetuarem as operações de multiplicação e divisão. Esta última, quando representada por uma fração, $\frac{4}{4}$, era manipulada sem grandes problemas, entretanto, quanto representada por, $4:4$, eram induzidos ao erro. Vejamos as soluções encontradas em cada grupo:

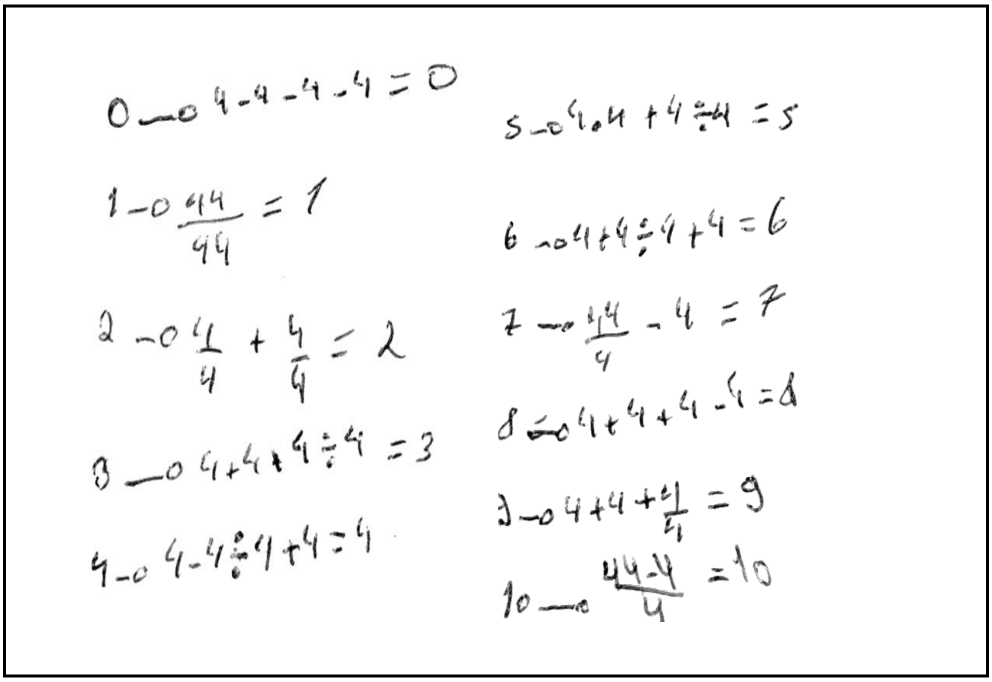
---

[33] Elaborado pala pesquisadora.

[34] De acordo com Breno Alencar Bianco (B.A.B) Suque ou Suk – rua ou praça em que se localizam as tendas, os bazares e as lojas dos mercadores (TAHAM, 2008, p. 45).

- **Grupo A**

Figura 46 - Registro elaborado pelo grupo A



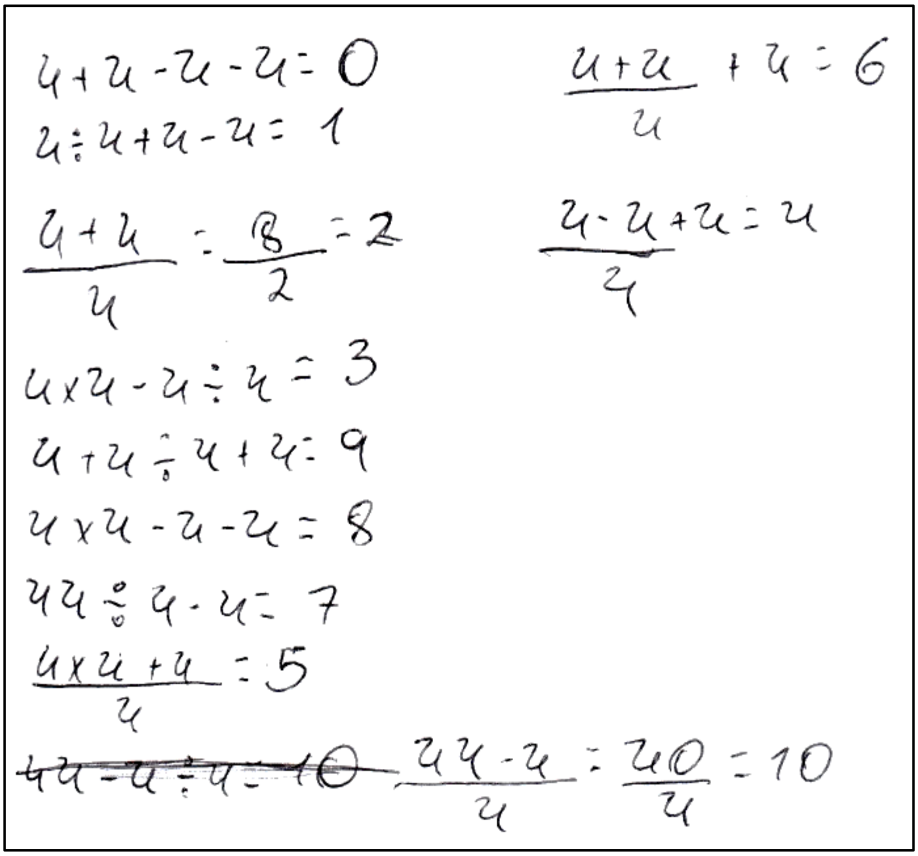
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os alunos apresentaram dificuldades em operar com as expressões aritméticas formadas, resolvendo-as da esquerda para a direita, mas sem obedecer a regra, ou seja, primeiro as multiplicações e divisões, na ordem em que aparecerem, para em seguida, as adições e subtrações. Isso pode ter ocorrido, por não termos enfatizado uma das instruções trazidas no enunciado do problema - "e sinais matemáticos" –. Assim sendo, as representações encontradas para 3, 5 e 6 não causariam dúvidas com a colocação de parênteses, por exemplo: $(4+4+4):4=3$, $(4.4+4):4=5$ e $(4+4):4+4=6$. Tanto a do 3 quanto a do 6, de acordo com a regra, representariam o número 9, bem como, a do 5, o 17. Houve um erro ao representarem o numeral 4, que em nossa visão, seria outro registro para o numeral 7. A representação do zero é um caso típico da necessidade de "sinais matemáticos" para o resultado que se quis mostrar. Da forma que se apresenta, a resposta é - 8.

Contudo, durante todo o processo, os alunos investigaram e se mostraram interessados em solucionar o problema, cumprindo, satisfatoriamente, o proposto pelo enunciado.

- **Grupo B**

Figura 47 - Registro elaborado pelo grupo B



$4+4-4-4=0$

$4\div4+4-4=1$

$\frac{4+4}{4}=\frac{8}{2}=2$

$4\times4-4\div4=3$

$4+4\div4+4=9$

$4\times4-4-4=8$

$44\div4-4=7$

$\frac{4\times4+4}{4}=5$

$\cancel{44-4\div4=10}\ \frac{44-4}{4}=\frac{40}{4}=10$

$\frac{4+4}{4}+4=6$

$\frac{4\cdot4+4}{4}=4$

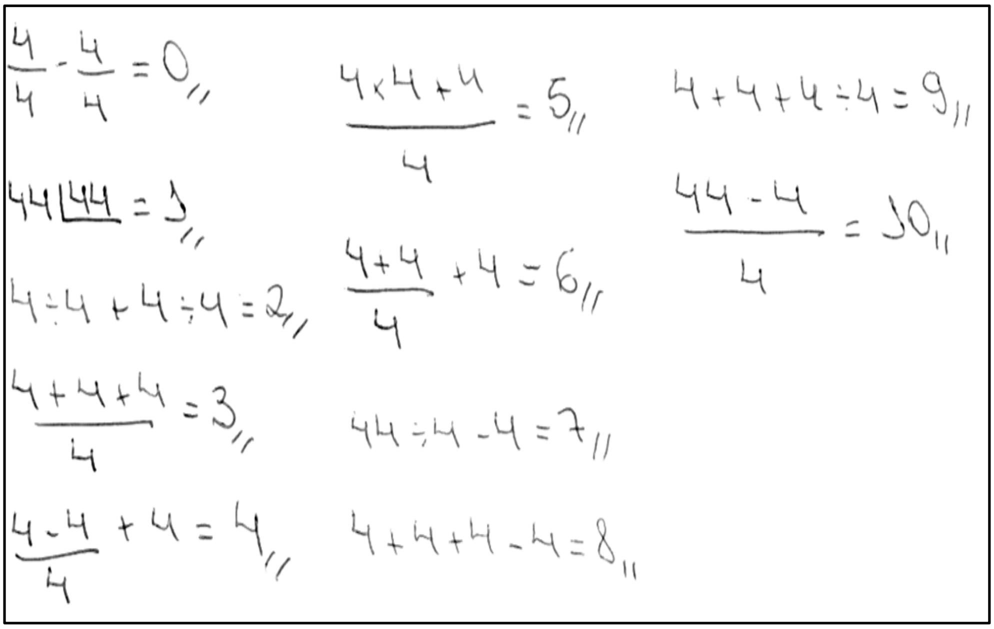
Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Podemos observar que as expressões aritméticas dos numerais 1 e 9, obedeceram a regra, não havendo necessidade em se colocar parênteses para o resultado encontrado, o que não acontece para a do 3, que nos remete a 15. Com a utilização de sinais matemáticos, outras representações poderiam ser construídas, como é o caso, por exemplo, da do 9 = 4+4:4+4, que escrita (4+4):(4+4) = 1, ou ainda, ((4+4):4)+4 = 6. Por falta de atenção, acreditamos, usaram, apenas, três numerais 4 para representar o 2.

Note-se que os alunos refizeram, espontaneamente, a representação do numeral 10, cuja resposta seria 43, em obediência à regra das operações. Tal procedimento é consonante com o quarto passo estabelecido por Polya (2006) no processo de resolução de um problema, qual seja, o retrospecto, momento em que o aluno tem a oportunidade de examinar a solução obtida.

- **Grupo C**

Figura 48 - Registro elaborado pelo grupo C

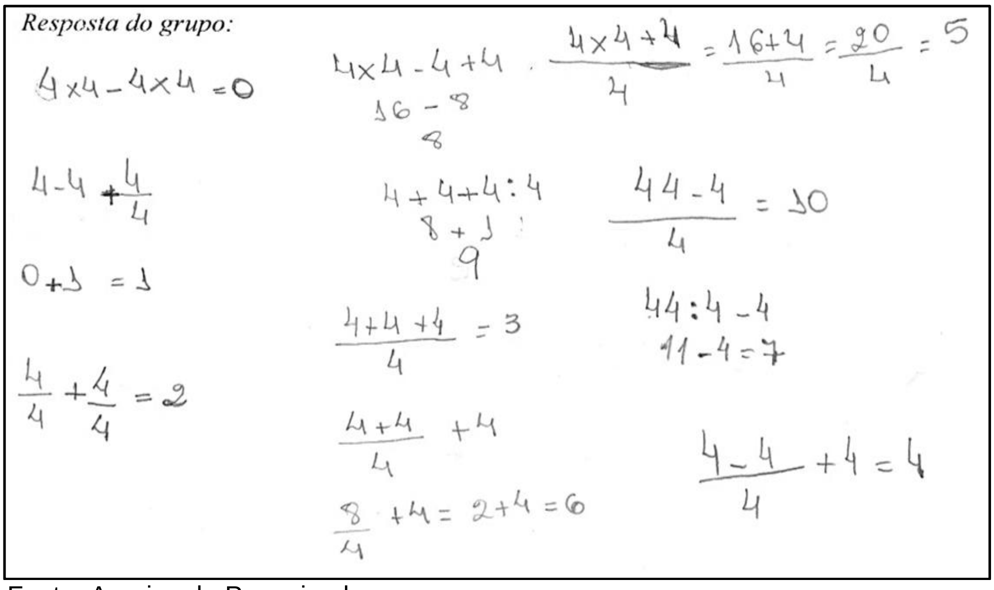


Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

O grupo resolveu a atividade bastante tranquilo. Os componentes mostraram saber utilizar as regras nas expressões aritméticas e, inclusive, colocaram a “chave” em lugar do traço de fração ou dos tradicionais dois pontos para a construção do numeral 1.

- **Grupo D**

Figura 49 - Registro elaborado pelo grupo D



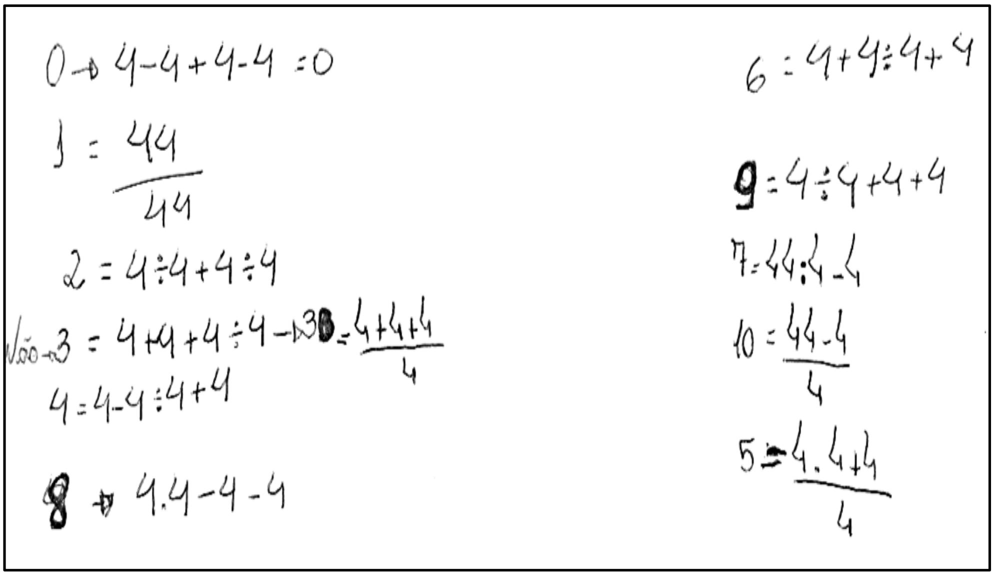
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Note-se que o grupo, mentalmente, inseriu os parentes para o resultado 8, pois, de acordo com a regra, a expressão obtida resulta 16. Pareceu-nos encontrar os resultados, aleatoriamente, sem estar preocupado com uma ordenação rigorosa. Verificamos, também, que o grupo não manteve o mesmo padrão de escrita, ou seja, ora as respostas seguiam uma sequência de igualdades, como a do numeral 5, ora eram descritas linhas abaixo, como registrado nas expressões dos numerais 1; 7; 8; 9, ora uma mistura das duas, como se vê na do 6, ou ainda, um registro direto, como nos dos numerais 0; 2; 3; 4;10.

Ficamos satisfeitos com o empenho dos componentes do grupo, tanto pelo atendimento às exigências do enunciado, quanto à persistência em encontrarem os registros esperadas.

- **Grupo E**

Figura 50 - Registro elaborado pelo grupo E



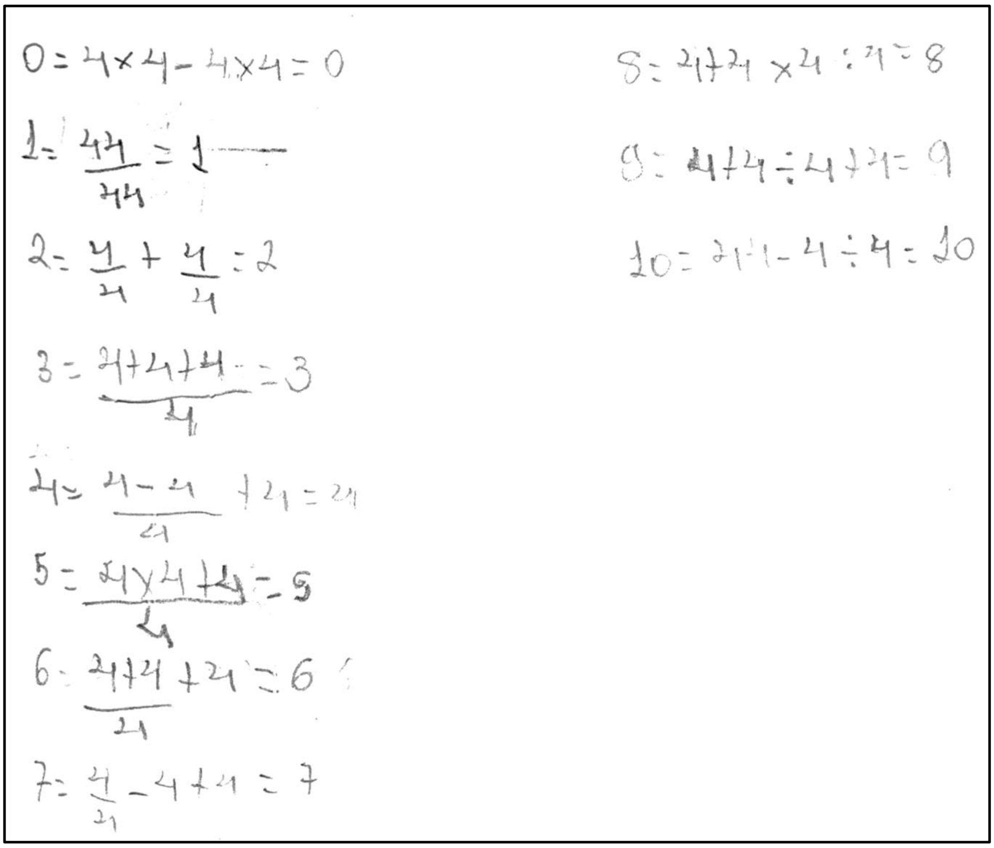
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Os registros feitos para os numerais 3 e 6 são idênticos aos do grupo A, cujas considerações já fizemos. Chamamos a atenção do grupo, por estarmos próximos a ele naquele momento, para verificar a representação do numeral 3, reescrito, posteriormente. A expressão obtida para o numeral 4, para o que se queria, deveria ser ((4 - 4) : 4) + 4. Da forma assinalada resulta em 7. Poderia, ainda, resultar “zero” se escrita: (4 - 4) : (4 + 4). Houve empenho do grupo durante a resolução do problema, mostrando-se interessado na conclusão, satisfatória, da atividade.

- **Grupo F**

O grupo representou o numeral 10 da mesma forma que o Grupo B, que em tempo, realizou sua correção. Como dito anteriormente, pelo fato de não termos explorado melhor o enunciado do problema, o grupo, também, não percebeu a necessidade em utilizar sinais matemáticos ou seguir as regras para a solução de expressões numéricas.

Figura 51 - Registro elaborado pelo grupo F



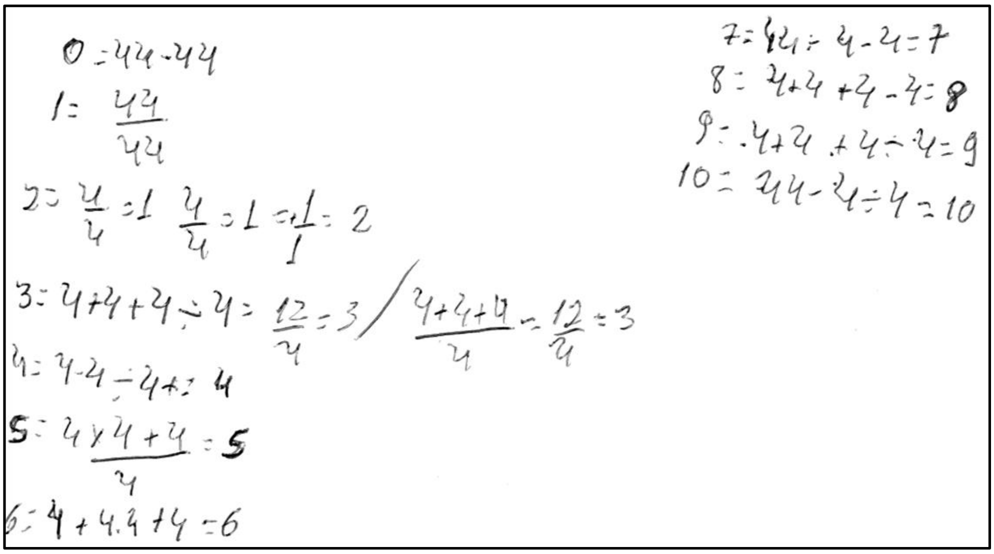
Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Chama-nos a atenção a representação do numeral 7. Outras duas expressões possíveis, com a inserção de sinais matemáticos: $\left(\frac{4}{4}-4\right)+4$; $\frac{4}{4}-(4+4)$ resultariam em, respectivamente, 1 e -7. Não seria possível, em nenhum momento, a obtenção do numeral 7. A regra de sinais, também, foi negligenciada pelo grupo. Não ouvimos dos alunos quererem desistir de encontrar as expressões, pelo contrário, demonstraram interesse em prosseguir até que encontrassem todos os números solicitados.

- **Grupo G**

O grupo fez a representação do zero exatamente como ao exemplo dado por nós na lousa e a do 10 como as do Grupos B e C. A representação do numeral 3 foi revista pelos alunos com a intenção de não deixarem dúvidas sobre o procedimento realizado. Pareceu-nos, também, que na expressão obtida para o numeral 6, sem obediência à regra, o grupo operou com o sinal da divisão, apesar de assinalar o da multiplicação. Entendemos que para esse resultado, os componentes quiseram escrever ((4 + 4) : 4) + 4.

Figura 52 - Registro elaborado pelo grupo G



Fonte: Arquivo da Pesquisadora.

Verificamos dois registros estranhos, quais sejam: [1] para o numeral 2 (apesar dos quatro quatros, o grupo os agregou dois a dois em forma de fração, e depois colocou as respostas encontradas separadamente, também, sob fração e a iguala a dois. Isso nos remete arriscar que o grupo pensou em escrever $\frac{4/4}{4/4}\,ao\;invés\;de\,\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$, parecendo-nos ser, para eles a mesma coisa); e [2] para o numeral 4 (parece ter esquecido o quarto quatro, apesar de ter operado com ele em desobediência à regra, em função da resposta, o que não aconteceu com a representação do numeral 9). Ambos os registros não nos ficaram claros.

5.4.2 Descrição do 2º Momento

Participaram desse encontro 20 alunos, sendo 9 do sexo masculino e 11 do sexo feminino. Seis grupos foram formados, assim constituídos: dois com quatro alunos e quatro com três alunos cada. Vale ressaltar a ausência de todos os componentes do Grupo G. Esse 2º momento teve a duração de uma aula, compreendida das 11h05 às 12h00, em 12 de Junho de 2015.

Iniciamos a oficina devolvendo aos alunos a tarefa do encontro anterior, para compartilharmos as diferentes soluções. Pedimos para que não fizessem mais nenhum tipo de anotação.

Cada grupo expôs a solução encontrada, por exemplo, para o numeral zero, o que nos permitiu a elaborar o seguinte quadro:

Quadro 10 - Expressões para o numeral zero

Grupo A	$0 = 4 - 4 - 4 - 4$
Grupo B	$0 = 4 + 4 - 4 - 4$
Grupo C	$0 = \frac{4}{4} - \frac{4}{4}$
Grupo D	$0 = 4.4 - 4.4$
Grupo E	$0 = 4 - 4 + 4 - 4$
Grupo F	$0 = 4.4 - 4.4$
Grupo G	$0 = 44 - 44$

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Em seguida, tão logo discutimos as soluções encontradas, pedimos ao grupo A que verificasse sua resposta, quando, então, chegaram à conclusão de que deveriam trocar um dos sinais negativos por um positivo, conforme mostrado pelos Grupos B e E. Cremos que uma das ações do professor, cabível a qualquer momento de sua aula é conduzir à classe a reflexão dos atos praticados, com o intuito de investigá-los acerca do que realizaram com sucesso ou insucesso, oportunizando a ela localizar o erro e reorganizar os dados. Conforme Cavalcanti (2001, p.139) "[...] quando os alunos são incentivados a expressar livremente seu modo de pensar, é natural que surjam algumas soluções incorretas”.

Optamos por fazer com os numerais 1 e 2, o que fora feito com o zero. A partir de então, os alunos compreenderam haver outras expressões possíveis para a escrita de um mesmo numeral. Segundo Stancanelli (2001, p.109), o uso de problemas com mais de uma solução “rompe com a crença de que todo problema tem uma única resposta”, ou que há uma única maneira certa de resolvê-lo.

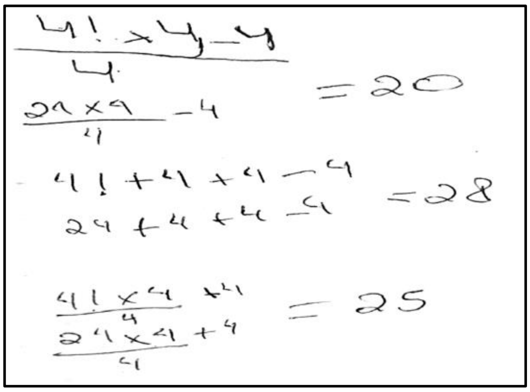
Demos um passo adiante dizendo a eles que era possível escrever, com quatro quatros, todos os numerais inteiros de 0 a 100 (TAHAN, 2008). Mas, para tanto, era necessário entrarmos com a definição de mais um sinal gráfico, o fatorial (!). Alguns alunos ficaram surpresos após a explicação, pois, como relatado por deles:

> *[...] eu não sabia que uma simples “exclamação” na língua portuguesa tivessse outro sentido na matemática [...] (A11).*

Além de mencionarmos a calculadora científica, na qual há uma tecla que permite calcular o fatorial de todos os inteiros (x!) e orientá-los para terem atenção na escrita das expressões, principalmente, com relação à ordem das operações, acrescentamos o símbolo da raiz quadrada $\sqrt{\ }$, e prosseguimos com uma nova questão: *Agora, com auxílio do fatorial e do sinal da raiz quadrada, além dos sinais matemáticos, escreva três números inteiros entre 11 e 30.*

Todos os grupos utilizaram em suas expressões, sem dificuldades, o fatorial, mas a raiz quadrada não apareceu em nenhuma delas. Apresentaremos apenas os registros do Grupo A, pelo fato de alguns equívocos terem nos chamado a atenção:

Figura 53 - Registro elaborado pelo grupo A



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Como se vê, inicialmente, o grupo assinala o denominador como sendo de toda a expressão, o que a faz resultar 23; seguidamente, logo abaixo, a partir desta ideia, mas a desconsiderando, parcialmente, obtém 20. O terceiro registro, também, expressa 28 como resultado, mas o grupo assinala 25. De fato, há duas diferentes expressões para o 28 e uma para o 23, as quais ficaram despercebidas pelo grupo.

Todos os Grupos encontraram três numerais, os quais variaram entre 12 (Grupos E e F); 14 (Grupos B, D); 20 (Grupos A, C, D, E, e F); 23 (Grupos A e B); 24 (Grupo C); 25 (Grupo B); 26 (Grupo C) e 28 (Grupos A, D, E e F). Em síntese:

Tabela 1 - Levantamento dos numerais escolhidos pelos alunos

Grupos	**Numerais**							
A	-	-	20	23	-	-	-	28; 28
B	-	14	-	23	-	25	-	-
C	-	-	20	-	24	-	26	-
D	-	14	20	-	-	-	-	28
E	12	-	20	-	-	-	-	28
F	12	-	20	-	-	-	-	28

Fonte: Arquivo da pesquisadora.

A maior incidência está nos numerais 20 e 28 (5 vezes) e a menor com os numerais 24, 25 e 26 (1 vez).

Queremos, ainda, ressaltar as diferentes expressões assinaladas pelos grupos, como por exemplo: Numeral 12: Grupo E: 4! + 4 – 4 . 4; Grupo F: $\frac{4!x4}{4+4}$; Numeral 14: Grupo B: 4! : 4 + 4 + 4; Grupo D: $\frac{4!}{4}+4+4$; Numeral 20: Grupo A: $\frac{4!x4}{4}-4$; Grupo C; $\frac{4!-4}{4}x4$; Grupos D e F: 4! + 4 – 4 – 4; Grupo E: 4! – 4 – 4 + 4; Numeral 28: Grupo A: $\frac{4!x4}{4}+4$ e 4! + 4 +4 – 4; Grupo E: 4! - 4 + 4 + 4; Grupo F: 4! + 4 - 4 + 4

“Cada momento na resolução dos problemas deve ser de investigação, descoberta, prazer e aprendizagem”, enfatiza Stancanelli (2001, p.120). Atributos, esses, bastante perceptíveis, tanto na oficina quanto no relato da professora regente, que nos diz: “os alunos se sentiram bastante desafiados, além de serem interessantes os problemas, eles não tinham uma cobrança de conteúdos em si”. Para ela, trabalhar com esse tipo de atividade, “estimula desde os alunos aplicados até aqueles desinteressados das aulas de matemática”.

Encerramos a oficina com os relatos escritos dos alunos quanto ao desenvolvimento do problema aplicado no dia anterior e à questão atual, os quais, comentaremos a seguir.

5.4.3 Apropriações dos sujeitos com relação ao problema dos Quatro Quatros.

Apesar das dificuldades encontradas pelos alunos para apresentarem algumas expressões, seja por que chegaram ao Ensino Médio sem uma base mais sólida, seja por que não tenham, ainda, neste nível de escolarização, se apropriado de regras, muitas vezes impostas, sem significados convincentes, consideramos o desenvolvimento das atividades propostas muito rico, em função da disposição, empenho, interesse, espírito investigador dos sujeitos nele envolvidos, demonstrando, segundo Diniz (2001), atitudes que vão, além, da compreensão, aplicação de técnicas e obtenção da resposta correta.

Nesse sentido, os alunos emitiram uma série de atributos que denotam a apropriação feita em meio a atividade desenvolvida. Mais precisamente, podemos destacar alguns depoimentos que relatam o gosto por aprender um conceito novo; a presença de representações engessadas, estabelecidas pelo/no espaço escolar acerca do que seja um "problema", tais como, **complicado; fácil;** como também, a possibilidade em torná-lo **interessante legal; divertido; diferente:**

> *O problema foi interessante e fácil e trouxe o auxílio do fatorial que muitos não conheciam (A26).*
>
> *[...] e quando aprendemos a usar esse fatorial ficou tudo muito fácil, e foi uma experiência muito boa como um* ***quebra cabeça*** *(A9).*
>
> *[...] o problema de hoje, usando o fatorial, achei fácil (A6).*
>
> *E a de hoje de Fatorial achei fácil, não tinha complicação (A15).*
>
> *Eu achei interessante porque deu para ver quantos números dá para achar com quatro 4, e gostei por aprender coisas novas tipo fatorial etc (A17).*
>
> *Achei bem interessante, descobri que dá para descobrir vários números usando quatro quatros. Aprendi o sinal do fatorial (!), ficou bem mais fácil usando ele (A13).*
>
> *Achei muito interessante e fácil, não sabia que um simples ponto de "!" mudaria e ajudaria tanto nesse problema. A* ***história*** *dos 4 quatros é bem interessante também, dá para descobri inúmeros números até "100" (A21).*

> *Eu achei muito **legal** e fácil, e trazia uma **fórmula interessante** que eu não conhecia, e foi bom pra "mim" aprender (A2).*
>
> *Achei **legal** e também fácil, complementando o que fizemos na atividade anterior, usamos os quatro quatros, juntamente com os sinais +, _ , : e x, e o símbolo do fatorial (A23).*
>
> *Achei o trabalho bem fácil e muito **legal**, pois foi interessante saber que podemos resolver os problemas com os números iguais porém com sinais diferentes (A5).*
>
> *O problema foi fácil, e foi **divertido** descobrir novas formas de resolver contas com mesmo números, com sinais diferentes e encontrar resultados diferentes (A4).*
>
> *Em relação ao problema dos quatro quatros achei fácil e **diferente**. Nunca imaginei que pudesse conseguir tantos resultados com os mesmos números alternando apenas os sinais matemáticos. Foi uma espécie de **"desafio"** e me **diverti** realizando-o (A24).*
>
> *Achei bem interessante, mas bem confuso. Percebi que dá para descobrir vários números usando apenas quatro quatros e sinais de (adição, subtração, divisão e multiplicação). E com o problema descobri mais um sinal. O (!) = Fatorial (A14).*
>
> *O problema foi um pouco complicado no começo mais logo depois eu entendi e consegui fazer com o meu grupo <u>era só pensar o número ele</u> **automaticamente** <u>aparecia</u> (A12).*

Podemos observar, ainda, em alguns discursos - (A9), (A4), (A24) - a preservação das características de um problema recreativo, bem como, em outros, certo estímulo em busca de sua solução traduzido por coisa boa [legal] – (A2), (A23), (A5).

Entendemos que, a partir da situação-problema, responsável por despertar o interesse do aluno, aguçar sua imaginação e desafiá-lo ao raciocínio, o papel das representações e das práticas plurais e contraditórias é destacado, de acordo com Chartier (2002), como constituintes da história cultural, vista como uma produção dos sujeitos e um processo de construção de sentido, de interpretação, dando significado ao mundo. Em outras palavras, as apropriações efetivadas pelos alunos se inscrevem em suas "práticas" de investigação produzidas em meio às descobertas de diferentes modos de significar e exibir os resultados do enredo narrado, visto aqui como enunciado.

5.5 O PROBLEMA DO JOGO DE XADREZ

Tínhamos 55 minutos para a realização da oficina, e pensamos ser suficiente, mas não foi, o que implicou pedirmos aos alunos para terminarem a atividade em casa. Assim sendo, o 6º encontro, também, fora dividido em dois momentos.

5.5.1 Descrição do 1º Momento

Participaram 22 alunos, sendo 13 do sexo masculino e 9 do sexo feminino e devido à ausência de alguns alunos, distribuímos a turma em 7 grupos, sendo, quatro grupos com quatro componentes cada, um com três; um com dois e um grupo com um componente. O encontro aconteceu das 10h10 às 11h05, em 15 de Junho de 2015.

O Problema do Jogo de Xadrez[35]

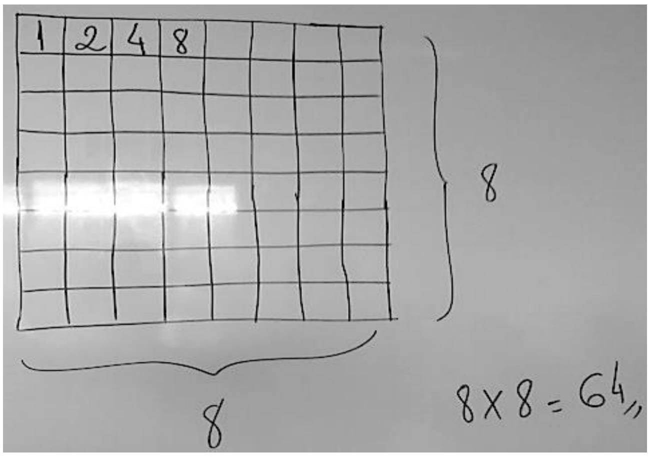
> *A lenda é narrada ao califa de Bagdá, Al-Motacém Bilah, por Beremiz Samir onde se conta a famosa lenda sobre a origem do jogo de xadrez.* ***Lenda:*** *Um dia, afinal, foi o rei informado de que um moço brâmane - pobre e modesto - solicitava uma audiência que vinha pleiteando havia já algum tempo. Veio ele presentear o rei com um jogo, inventado por ele, que pudesse distraí-lo, já que o bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza, amargurado pela ausência de um filho que a guerra viera roubar-lhe. O que Sessa trazia ao rei Iadava consistia no jogo de xadrez. O rei ficou maravilhado, querendo recompensar o inventor do jogo de xadrez. Perguntou qual presente ele gostaria de receber: joias, terras, um palácio... O pedido do jovem inventor deixou o rei perplexo, Sessa disse que como recompensa, queria receber uma quantidade de trigo da seguinte forma: Receberia um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e, assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. O rei achou o pedido muito insignificante e pediu que fosse calculada a quantidade de grãos para atender o desejo do inventor do jogo do jeito que este havia proposto.* ***Problema:*** *Quantos grãos de trigo o rei Iadava deveria pagar a Sessa?*

Não modificamos nenhum dos procedimentos realizados nos encontros anteriores, e, portanto, partirmos da leitura individual do enunciado e, posteriormente, para a coletiva.

[35] Extraído e adaptado de Tahan (2008, capítulo 16, p.144 - 124).

Como muitos alunos não se recordavam da disposição de um tabuleiro do jogo de xadrez, a professora regente esboçou seu desenho no quadro:

Fotografia 1 - Representação do tabuleiro de xadrez



Fonte: Arquivo da pesquisadora.

Os grupos o copiaram e, em seguida, iniciaram o processo de resolução. Seguindo o exemplo dado pela professora, isto é, o registro em cada quadrícula da distribuição da quantidade de grãos, de acordo com o enunciado, os alunos não demorariam a perceber que a escrita dos numerais não caberia nos espaços projetados, em função da quantidade de algarismos representante da quantidade de grãos. Cada grupo procurou a maneira mais adequada para a visualização do que fora pedido, como mostraremos mais adiante.

Antes de finalizarmos o trabalho do dia, verificamos que, após ter feito sucessivas multiplicações por 2, uma componente do grupo C inferiu ser a solução do problema 64 x 2. Mas logo mudou de ideia, pois, identificou, diante de nosso questionamento acerca de sua veracidade, que o valor encontrado era menor que o das contas anteriores e, em seguida, retomou seus cálculos.

5.5.2 Descrição do 2º Momento

Participaram desse encontro 19 alunos, sendo 11 homens e 8 mulheres, em 16 de Junho de 2015. Tivemos outros 55 minutos de aula, das 11h05 às 12h00. Como combinamos com os alunos para terminarem a tarefa em casa, iniciamos a oficina recolhendo as soluções encontradas. Entretanto, apenas 3 grupos procuraram, sem êxito, assinalar uma resposta para a atividade, apesar de não anexaram todos os procedimentos. Efetivamente, nesse dia, trabalhamos com toda a turma sem nos preocuparmos em organizá-los em grupos.

Procuramos investigar o porquê dos outros grupos não terem cumprido o trato. Justificaram dizendo que as contas estavam ficando grande demais e, então, desistiram de chegar ao fim. Perguntamos a eles, como estimavam uma resposta, caso terminassem a tarefa, e vários alunos responderam que era só somar as sucessivas multiplicações, até chegar a 64ª casa do tabuleiro. Além do propósito em verificar se o problema havia sido entendido, nosso interesse estava no processo de resolução e não, apenas, em uma resposta final.

Como no dia anterior, outro componente do grupo C relatou ter utilizado a calculadora para responder ao problema em sua casa, mas não o concluiu, pois,

> *Após as multiplicações, vi que os números eram extremamente grandes; e minha calculadora não realiza operações com algarismos com mais de 15 dígitos, então cheguei a conclusão que: "Desisto!"(A24).*

Um aluno do grupo G, que *"não demonstrava interesse nas aulas e sempre que podia 'matava' as aulas de matemática, realizou o que era proposto nas oficinas, demonstrando todo o seu esforço e empenho para compreender os problemas",* segundo a professora regente. De fato, mesmo que incorreta, o aluno apresentou sua resposta e exibiu todos os procedimentos realizados a partir de sucessivas adições e se posicionou: *"[...] acho que eu, em algum momento das minhas somas, [ficou] muito cheio o [meu] pensamento. Eu errei o resultado, mas gostei. Foi muito bom, me despertou o gosto pela matemática"(A22).*

Verificamos, posteriormente, que para esse problema, deveríamos ter previsto mais tempo, bem como, contar com o auxílio de uma calculadora científica para a conclusão esperada. Faremos algumas análises de forma mais geral, haja vista, os grupos apresentarem cálculos muito longos e se limitarem a multiplicar ou adicionar. Em função disso, optamos por não incluirmos seus longos registros. Não identificamos, em nenhum dos grupos, a procura por padrão ou regularidade para o processo, tão pouco, generalizar com o que obtveram até o momento em que seus componentes "desistiram". Pequenos erros de adição ou multiplicação, pela falta de conferência ou atenção, contribuíram para cálculos desnecessários e que os afastariam do êxito.

Os grupos não simularam uma conclusão, no momento em pararam seus cálculos, exceto o Grupo F, que em busca de uma sistematização, preocupou-se em esclarecer o procedimento realizado, assim se explicando: “o resultado foi encontrado após calcularmos até a metade que é 32 casas, então tentamos somar as outras 32 casas para 2 a cada. Então dará o que multiplicamos por 2.147.381.248 o qual deu o resultado de 137.432.399.872”.

O valor correto calculado pelo grupo até a 32ª casa, não fosse um erro cometido no cálculo da 21ª casa, seria 2.147.483.648. E “somar 32 casas para 2 a cada”, significou multiplicar por 64 a quantidade “após calcularmos até a metade que é 32 casas”.

Percebendo que esse problema não colaborara para o desenvolvimento da criatividade ou do raciocínio, fomos para o quadro e escrevemos os numerais 1, 2 e 4, induzindo a turma a enxergá-los como potências de 2, até por que, eles já haviam estudado potenciação na 8ª série/9º ano. Dessa forma, delineamos, para cada quadrícula, a sequência de números com base 2. No decorrer da resolução, acabamos abrindo espaço para que fizessem perguntas ou esclarecessem dúvidas. Apenas identificaram que os expoentes aumentavam de uma unidade, mas não os relacionaram com a localização da casa no tabuleiro, coube a nós escrever a potência da última quadrícula, fato que não despertou neles nenhum tipo de reação, ou seja, cremos que não tenham entendido os desdobramentos que fizemos.

Esperávamos que esses alunos ao perceberem que as contas estavam ficando exaustivas, procurassem verificar algum tipo de regularidade, relacionando números de termos (*n*), último termo, somas parciais, bases e expoentes, como por exemplo:

1	= 1 = (2-1)	$\longrightarrow$	2^0	$= 2^1 - 1$
1+2	= 3 = (4 - 1)	$\longrightarrow$	$2^0 + 2^1$	$= 2^2 - 1$
1+2+4	= 7 = (8 - 1)	$\longrightarrow$	$2^0 + 2^1 + 2^2$	$= 2^3 - 1$
1+2+4+8	= 15= (16 - 1)	$\longrightarrow$	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$	$= 2^4 - 1$
...	...	...	...	
1+2+4+8+...+ ____ =		$\longrightarrow$	$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$	$= 2^n - 1$

Dissemos a eles que, quando estamos trabalhando com números considerados muito “grandes”, torna-se conveniente, se possível, escrevê-los em forma de potência.

Posteriormente, indicamos haver outro caminho para se chegar à solução do problema, qual seja, por meio da *soma dos termos de uma progressão geométrica finita*, um conteúdo, ainda, desconhecido por eles. Entretanto, introduzimos as noções básicas e resolvemos o problema.

Por se tratar da última oficina, a finalizamos com a entrega de um texto sobre Júlio Cesar de Mello e Souza, o Malba Tahan, por considerarmos importante que os alunos conheçam um pouco da vida do autor que escreveu os enredos com os quais trabalhamos[36].

5.5.3 Apropriações dos sujeitos com relação ao problema do Jogo de Xadrez.

Verificamos nos depoimentos dos alunos, com maior incidência, atributos que desqualificam o problema como recreativo, tais como, trabalhoso, cansativo, difícil, complicado. Apesar de alguns alunos o considerarem fácil, não foi o que constatamos, em função de sua inconclusão, gerada a partir da prática exaustiva durante a resolução.

No desenrolar da oficina, os alunos reclamaram das longas e enfadonhas multiplicações. Ao contrário dos procedimentos criativos e inventivos que realizaram para os outros problemas, não detectamos no do Jogo de Xadrez representações pictóricas, desenhos, quadros ou estimativas para resolvê-lo. Pensávamos, inicialmente, que ele proporcionaria ao aluno, durante sua leitura e resolução, momentos de recreação, mas nos enganamos, o que corrobora com o que no diz Chartier (1999, p.77), ou seja,

> Apreendido pela leitura, o texto não tem de modo algum - ou menos totalmente - o sentido que lhe atribui seu autor, seu editor ou seus comentadores. Toda história da leitura supõe, em seu princípio, esta liberdade do leitor que desloca e subverte aquilo que o livro lhe pretende impor.

[36] Em outra ocasião, em conversa com a professora regente, ela nos relatou ter dinamizado o texto com a turma em uma de suas aulas.

Somos cientes de que esse problema não despertou o interesse do aluno e seu espírito investigativo; nem aguçou sua imaginação. Certamente, não se aperceberam das discussões que poderiam surgir caso persistissem, não na mecanicidade de multiplicar ou adicionar, mas sim na identificação de relações entre expoentes e número de termos, entre sequencias e somas parciais. Por não estarem acostumados à investigar matematicamente padrões e regularidades, faltou-lhes paciência, como relatado por A9, para chegar ao resultado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudar a História Cultural, apresentada por Roger Chartier, direcionou nossa pesquisa para as apropriações, práticas e representações de um grupo de alunos do Ensino Médio. Sinalizamos tais representações como maneiras de perceber e as práticas como maneiras de proceder diante das situações-problema, ora sugeridas. Consequentemente, consideramos as apropriações como interpretações feitas pelos alunos das leituras, concebidas por Chartier (1999) como produção de significados, dos enredos da obra, bem como sua incidência na resolução dos problemas.

Diante do embasamento teórico-metodológico que amparou nossas discussões, identificamos algumas representações enquanto os alunos resolviam as situações-problema. Vale destacar que a *Resolução de Problemas*, dependendo da época ou do interesse de um grupo de pesquisadores, ora fora tratada como conteúdo, ora como prática ou, ainda, como metodologia. Fato esse constatado, apesar de não tomarmos nossa pesquisa como histórica, ao caminharmos pela história, mesmo que em um pequeno percurso, mas que ampliou nossos horizontes sobre a temática em voga.

Abordamos a Resolução de Problemas como um ambiente de trabalho mediante algumas etapas elencadas por Allevato & Onuchic (2014) e sugestões propostas por Silva & Siqueira Filho (2011) e Siqueira Filho (2015) para direcionar nossa pesquisa. Apesar das definições matemáticas serem explicadas no decorrer das oficinas, nosso objetivo pautou em analisar os registros dos alunos e suas apropriações/representações a partir dos problemas trabalhados e com isso nos limitamos em explorar um conteúdo matemático específico.

A partir da opção pela obra O Homem que Calculava, de Malba Tahan, tínhamos em mente trabalhar com problemas que se inserissem no âmbito da Matemática Recreativa. Ler as entrelinhas de seu livro, nos suscitou o desejo de buscar por problemas similares aos dos enredos nele expostos. Para tanto, o apêndice do próprio objeto de estudo e a Tese de Siqueira Filho (2008) colaboraram para que dialogássemos com escritores e matemáticos que se interessavam pelo tema.

Paulatinamente, nossa pesquisa se expandiu e, então, optamos por escolher cinco problemas da referida obra. Percebemos, após a realização do que chamamos de Oficinas de Resolução de Problemas, que se tivéssemos escolhido apenas dois problemas, teríamos explorado melhor cada um deles, como também, trabalhado com o enunciado trazido no enredo sem sintetizá-lo.

Assim posto, vimos que na primeira oficina, ficou-nos claro que as discussões se estenderam para além dos conceitos matemáticos. As práticas culturais dos nossos sujeitos, filhos de lavradores em sua maioria, foram o ponto chave para a execução do problema. Assuntos como honestidade, amizade, distribuição igualitária da herança, solidariedade, mencionados no texto, estiveram presentes nas escritas e nas falas desses alunos. Interpretações equivocadas, com relação ao testamento deixado pelo pai, foram evidentes pela falta de conhecimento da cultura árabe e até mesmo da nossa. Evidenciamos as dificuldades dos alunos em interpretar, operar com os números decimais e manusear as frações como registro da herança que coube a cada filho.

As representações acerca do problema dos 35 camelos, quais sejam, fácil, difícil ou complicado, emergiram por meio das práticas de resolução da tarefa sugerida. Com relação ao enredo, os alunos representaram como injusto o testamento deixado pelo pai e consideraram Beremiz como homem justo/honesto ou esperto. Na oficina do Problema dos 8 Pães os alunos já estavam familiarizados com nossa proposta de trabalho e o desenvolvimento da atividade fluiu com facilidade. Os componentes dos grupos desenvolveram suas estratégias de resolução usando os desenhos pictóricos, o cálculo mental e as operações aritméticas fundamentais. Representaram o problema como legal, fácil, interessante, como uma questão que envolve o raciocínio e interpretação para ser resolvido, entre outras.

De maneira similar, na oficina do Problema dos 21 Vasos, o tempo previsto por nós foi satisfatório. Nos registros dos alunos apareceram a tentativa e erro como estratégia de resolução, além daquelas mencionadas no problema anterior. Continuaram com o trabalho em equipe, encontraram duas soluções para esse problema e suas representações, apropriações e as práticas confirmaram as características do problema como recreativo.

Em meio ao desenvolvimento do nosso trabalho, destacamos um personagem interessante, o aluno A22, pois, caracterizado como um aluno que pouco participava das aulas ou que não se interessava pelas atividades de Matemática, mostrou-nos ser bastante criativo e imaginativo ao fazer uma releitura, com seus desenhos, dos problemas dos 8 pães e dos 21 vasos. Aliás, imaginação e criatividade foram atributos sempre presentes entre os sujeitos participantes.

Uma investigação apreciável foi proporcionada pelo Problema dos Quatro Quatros. A manipulação das operações levaram os alunos a calcular e descobrir as expressões de cada número solicitado no problema, sem com isso perder o interesse. Constatamos que muitos alunos não manipularam as expressões numéricas corretamente, mas o empenho deles nos grupos foi satisfatório. Nos registros, evidenciamos características preservadas de um problema recreativo, quais sejam, as representações do problema como quebra-cabeça, de desafio e divertido.

Contudo, após a oficina do Problema do Jogo de Xadrez, percebemos que nossa mediação para esse problema deveria ter sido diferente. Talvez se tivéssemos feito outros questionamentos, com cada grupo, e ter mostrado as primeiras ideias em trabalhar com potência, o problema seguiria um rumo diferente, sem a presença de enfadonhas contas de multiplicação e adição. O problema foi parcialmente resolvido, e os alunos acabaram não explorando padrões ou regularidades, pois acreditamos não estarem acostumados a lidar com esse tipo de investigação. Esse problema apresentou um grau de dificuldade maior em relação aos problemas anteriores, pois exigia dos alunos mais concentração e domínio de conceitos matemáticos para explorá-lo. Descaracterizaremos o Problema do Jogo de Xadrez como recreativo para esse grupo de alunos, e sugerimos que ele seja trabalhado com as turmas finais do Ensino Médio, pois proporcionará ao professor e aos alunos explorarem melhor os conceitos presentes nesse enredo.

O que nos chamou a atenção no decorrer da realização das Oficinas de Resolução de Problemas, ou seja, as nossas apropriações, foi o fato de constatarmos que os problemas selecionados permitiram aos alunos uma superação de alguns (pré)conceitos existentes na sala de aula, ou melhor, os problemas não foram resolvidos apenas por aqueles alunos que se sobressaem em matemática. Naquele momento, houve equidade entre os grupos na busca de ações, para traçar caminhos, utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver os problemas e relacioná-los com situações cotidianas. Alunos, inseridos na categoria dos que não gostam de matemática, ficaram, o tempo todo, na Oficina participando ativamente. Constatamos, também, que desenhos pictóricos, tentativa e erro, elaboração de tabelas foram algumas das estratégias utilizadas pelos alunos e que os auxiliaram na resolução das situações-problema, substituindo as fórmulas, poucas vezes necessárias.

Alguns conceitos matemáticos, trazidos nos enredos, se mostraram como obstáculos, ou seja, os alunos apresentaram dificuldades em operar com expressões numéricas, trabalhar com frações e interpretar os enunciados dos problemas. Acreditamos que essa defasagem de conteúdos exista, ora porque muitos conceitos foram memorizados e os alunos não lhes dão significados, não compreendem determinadas regras, ora devido ao desinteresse dos alunos por algo que não se apresenta como útil ou aplicável de imediato. Contudo, nosso interesse se pautou no processo de resolução e não na simples resposta final.

Indicamos esses problemas recreativos como suporte ao trabalho pedagógico em sala de aula, pois consideramos tais problemas viáveis para os professores trabalharem em suas aulas de matemática, tanto para introduzir conceitos matemáticos quanto para revisar os conteúdos. Foi perceptível, a partir das representações e práticas dos sujeitos, que esses problemas são ricos em conteúdo matemático, bem como oportuniza ocupar-se de outras temáticas, dentre elas a cultura, e inserir os alunos nas situações abordadas nos enredos proporcionando a discussão entre os pares.

Salientamos que a Resolução de Problemas é uma das alternativas que os professores possuem para dinamizar o processo de ensinoaprendizagem. Ao ser mediador, o professor faz os questionamentos necessários para que os alunos construam a base de conhecimentos durante a resolução dos problemas. Os alunos, como sujeitos ativos, adquirem confiança ao trabalharem em grupos, dialogando com seus pares e trocando as informações que precisam. Os problemas são um meio de formalizar os conceitos matemáticos que se almejam ensinar, além de proporcionar as aplicações dos conteúdos já ensinados.

Como pesquisadores e com base nos problemas trabalhados, entendemos a Matemática Recreativa como um vasto campo de possibilidades, tanto para o aluno quanto para o professor, pois, propicia, ao primeiro, despertar seu interesse, questionar, utilizar suas próprias estratégias, desenvolver formas de raciocínio, usar a criatividade, a imaginação e trabalhar em grupos; e ao segundo, desmitificar a matemática promovendo discussão, reflexão, participação.

Todavia, os obstáculos inerentes à pesquisa nos serviram de aprendizado e ampliação de horizontes. Desejamos prosseguir, por intuirmos haver espaço para novas pesquisas em continuidade a esse trabalho, haja vista, a vasta documentação acerca de Malba Tahan, assim como sobre a Matemática Recreativa e a Resolução de Problemas.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. de. Tabuada e Graduação de Cálculos. **Revista do Ensino**, Porto Alegre, ano IV, n.30, p. 3-11, maio 1955. Disponível em < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/127559>. Acesso em: 22 abr. 2015.

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da Resolução de Problemas: possibilidades em dois diferentes contextos. **Revista VIDYA**, Santa Maria, v.34, n.1, p.209-232, 2014. Disponível em < http://www.periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/article/view/26>. Acesso em: 16 out. 2014.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35 – 52.

ANDRÉ, M. E. D. A. de. **Etnografia da prática escolar**. Campinas: Papirus, 1995.

ANTUNES, F. Logicidades. **Revista de Educação**, São Paulo, v. VI, n.6, p. 171-179, jun. 1934. Disponível em < https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/116755>. Acesso em: 22 abr. 2015.

AZEVEDO, E. Q. de. **O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da formação inicial do professor de Matemática**. 2014. 268f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

BALL, R. W. **Récréations Mathématiques:** Problèmes des temps anciens et modernes. Tradução de J. Fitz-Patrick*.* 10 ed. Paris: Librairie Scientifique Hermann et C.ie, 1907. Disponível em: < http://books.google.com>. Acesso em: 21 mar. 2015.

BALLADARES, B. L. **Malba Tahan, Matemática e Histórias em Quadrinhos**: Produção Discente de HQS em uma Colônia de Pescadores. 2014. 185f. Dissertação (Mestrado Profissional em ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2014.

BARROS, P. **Yakov Isidorovich Perelman. 2001.** Disponível em <http://www.librosmaravillosos.com/biografia/biografia.html >. Acesso em 25 set. 2015.

BEZERRA, M. J. Aproveitamento de Curiosidades Matemáticas no Ensino. **Revista do Ensino.** Rio Grande do Sul, ano XI, n. 81, p.48, mar. 1962. Disponível em < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/127649> Acesso em: 22 abr. 2015.

BRANCA, N. A. Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 4-12.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/1º e 2º ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/3º e 4º ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000a.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Bases Legais/Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000b.

BISPO. L. P. **O Efeito Transformador das Atividades Lúdicas nas Aulas de Matemática**. 2014. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BOUCHENY, G. **Curiosités & Récréations Mathemátiques**. 6. ed. Paris: Larousse, 1939.

BROLLEZI, A. C. **Criatividade e resolução de problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n.60, p. 241 – 254, 2012. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=article&op=view&path%5B%5D=837>. Acesso em: 31 dez. 2014.

CÂNDIDO, P. T. Comunicação em Matemática. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 15-28.

CASASANTA, M. Os problemas. **Revista do Ensino**, Belo Horizonte, ano VII, n. 90-91, p. 3-7, junh. 1933. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/129723>. Acesso em: 22 abr. 2015.

CAVALCANTI. C. T. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 121 – 149.

CESANA, A. **Textos e contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento**. 2013. 233f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

CHARTIER, R. **A aventura do livro**: do leitor ao navegador. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

______. **A História Cultural**: Entre Práticas e Representações. 2. ed. Lisboa: DIFEL, 2002.

______. **A história ou a leitura do tempo**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2009.

COSTA, L. F. Desafios no Ensino de Matemática: A Didática de Malba Tahan e os PCN. In: Congresso Nacional de Educação Matemática – IX Encontro Regional de Educação Matemática. 2., 2011, Rio Grande do Sul. **Anais eletrônicos...** Disponível em:<http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE59.pdf>. Acesso em: 4 mar. 2015.

COSTA, O. da. **A matemática recreativa no ensino básico**. 2014. 98f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores) - Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

DALCIN, A. **Um olhar sobre o paradidático de matemática**. 2002. 162f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1989.

DINIZ, M. I. Resolução de problemas e comunicação. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 87-97.

EEEFM NESTOR GOMES. **Projeto Político Pedagógico**. São Mateus, 2012.

ESPÍRITO SANTO (estado). Secretaria da Educação Ensino Médio. **Currículo Básico Escola Estadual**: Área de Ciências da Natureza. Vitória: SEDU, 2010.

EVES, H. **Introdução a história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLOOD, R; WILSON, R. **A História dos Grandes Matemáticos**: as Descobertas e a Propagação do Conhecimento através das Vidas dos Grandes Matemáticos. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda. 2013.

FOURREY, É. **Récréations Arithmétiques**. Paris: Librairie Vuibert, 1899.

GALLAGHER, K. Resolvendo problemas com o uso da matemática recreativa. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1997. p. 235-246.

GUZMÁN, M. de. **Aventuras Matemáticas**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1991.

JAPIASSÚ, H; MARCONDES, D. **Dicionário Básico de Filosofia**. 4. ed. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2006.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: IBRASA, 1976.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997.

LACAZ, T. M. V. S; OLIVEIRA, J. C. F. **Pesquisa e uso de metodologias propostas por Malba Tahan para a melhoria do ensino**. 2003. Disponível em: <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2003/pesquisa%20e%20uso%20de%20metodologias.pdf>. Acesso em: 28. Dez. 2014.

LOPES, A. J. **Dia da Matemática e a obra didática de Malba Tahan, para além do homem que calculava**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): Boletim n. 13. Brasília, 2012.

LORENZATO, S. Um (re)encontro com Malba Tahan. **Revista Zetetiké**. Campinas: UNICAMP-FE-CEMPEM, ano 3, n. 4, p. 95 – 102, Nov. 1995.

______. Malba Tahan, um precursor. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM, ano 11, n.16, p.63-66, maio 2004.

______. Uma especial página da Educação Matemática Brasileira. **Revista Ciência em Foco**. Campinas, n. 2, vol.1, 2009.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisas em Educação**: abordagens qualitativas. 2. Ed. Rio de Janeiro: E.P.U, 1986.

MACIEL, L. S. K. R. **Vida e obra de Manoel Jairo Bezerra**. 2010. Disponível em: < http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/Centro_de_Memria/VIDA_E_OBRA_DE_MJB_-_POR_LEANDRO.pdf>. Acesso em: 3 abr. 2015.

MELLO, J. L. P. O problema dos quatro quatros**. Folha de São Paulo,** São Paulo, 3 fev. 2005. Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo0302200510.htm>. Acesso em: 3 abr. 2015.

MENEZEZ, J. E.; SOUZA, C. M. **Conexões históricas e desdobramentos entre recreações matemáticas, conhecimento matemático e ensino de matemática.** 2010. Disponível em < http://www.mat.ufpb.br/bienalsbm/arquivos/Mini-Cursos/JOSINALVAESTACIOMENEZES-MiniCurso/Texto-final-Bienal-2010.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2015.

MENINO, F. dos S. **A Resolução de Problemas no cenário da Matemática Discreta**. 2013. 289f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

MORAIS, R. dos S.; ONUCHIC, L. R. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, L. R. et al. (Org.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17 – 34.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NUNES, C. B. **O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas:** perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática**.** 2010. 430f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

O'CONNOR, J; ROBERTSON, E. F. **The MacTutor History of Mathematics archives**: Indexes of Biographies: Sam Loyd. 2003. Disponível em: < http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html>. Acesso em: 12 out. 2015.

O'CONNOR, J; ROBERTSON, E. F. **The MacTutor History of Mathematics archives**: Indexes of Biographies: Martim Gardner. 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gardner.html>. Acesso em: 12 out. 2015.

OLIVEIRA. C. C. de. A Revista Lilaváti (1957) De Malba Tahan: buscando situações de aprendizagem acerca da história da matemática como recurso didático. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2014, Bauru. **Anais...** Bauru: Faculdade de Ciências, 2014. p. 918-928.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199 – 218.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C. (Org.). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213 – 231.

______. Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, UNESP – Rio Claro, v.25, p.73-98, dez. 2011.

OSTERMANN, F; CAVALCANTI, C. J. de H. **Teorias de Aprendizagem:** texto introdutório. 2010. Disponível em: < http://www.ufrgs.br/uab/informacoes/publicacoes/materiais-de-fisica-para-educacao-basica/teorias_de_aprendizagem_fisica.pdf>. Acesso em: 4 maio 2015.

OZANAM, J. **Recreations in Mathematics and Natural Philosophy**. Translated from Montucla's edition: Charles Hutton, LL.D and F.R.S. Revised edition: Edward Riddle. London: Printed for Thomas Tegg, 1840.

PAEZ, G. R. **A produção de sentidos e significados matemáticos por estudantes do último ciclo do ensino fundamental por meio da leitura da obra “O homem que calculava”**. 2014. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós- Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014.

PINTO, A. H. et al. Multicurso Matemática: Uma história feita a muitas mãos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, cultura e diversidade, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Ilhéus: Via Litterarum, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PORTO DA SILVEIRA, J. F. **O que é um Problema Matemático?** 2001. Disponível em <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>. Acesso em: 25 set. 2015.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A Solução de Problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13 - 42.

PUTI, T. da C. **A produção de significados durante o processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Equações Polinomiais**. 2011. 244f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

REDLING, J. P. **A Metodologia de Resolução de Problemas:** concepções e práticas pedagógicas de professores de matemática do ensino fundamental. 2011. 166f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Faculdade de Ciências, Bauru, 2011.

RIBEIRO, M. V. **O ensino do conceito de Integral, em sala de aula, com recursos da História da Matemática e da Resolução de Problemas**. 2010. 324f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

ROBERTO FILHO, M. **Júlio César de Mello e Souza – O Malba Tahan**: O Homem que Calculava, a vida e o legado. 2013. 71f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT, Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, 2013.

ROMANATTO, M. C. Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 299-311, maio 2012. Disponível em <http://www.reveduc.ufscar.br>. Acesso em: 28 dez. 2014.

SAD, L. A; SILVA, C. M. S. da. Reflexões teóricometodológicas para investigações em história da matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), ano 21, n. 30, 2008, p. 27-46.

SANTOS-WAGNER, V. M. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, n.53, p.43-74, jul./dez. 2008. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=issue&op=view&path%5B%5D=25>. Acesso em: 3 jan. 2015.

SCHMITT, M. H. C. Sugestões para Jogos de Matemática no 2º ano. **Revista do Ensino.** Porto Alegre, ano IV, n. 28, mar. 1955. Disponível em < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/127557>. Acesso em: 22 abr. 2015.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K . Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (ed). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SILVA, C. M. da S; SIQUEIRA FILHO, M. G. **Matemática**: Resolução de Problemas. Brasília: Líber Livro, 2011.

SILVA, J. N. **Matemática Recreativa**. 2004. Disponível em < http://ludicum.org/jogos/abstr/amazonas/ludusjogosamazonasmrprimeirojaneiro.pdf>. Acesso em 28 set. 2015.

SIQUEIRA FILHO, M. G. **Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan:** episódios do nascimento e manutenção de um autor-personagem. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

______. Malba Tahan em: da mágia dos contos árabes às recreações matemáticas. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracajú. **Anais eletronicos**... Disponível em <http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Filho_M_G_S_Malba_Tahan.pdf>. Acesso em jul. 2014.

______. **Malba Tahan:** episódios do nascimento e manutenção de um autor-personagem. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013a.

______. Três breves histórias sobre Malba Tahan. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013b, Curitiba. **Anais eletrônicos**... Disponível em < http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3327_2093_ID.pdf >. Acesso em 29 jun. 2014.

______. Resenha. **Revista de História da Matemática para Professores**, Natal, ano 1, n. 0, mar. 2013c.

______. **Os concursos de Malba Tahan veiculados na Última Hora em 1972**. São Paulo: Editora e Livraria de Física, 2015.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUZA. A. C. P. de. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 343f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SOUSA, E. K. V. de; FOSSA, J. A. Júlio César de Mello e Souza e a Educação Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 2., 2014, Bauru. **Anais...** Bauru: Faculdade de Ciências, 2014, p. 588 – 596.

SOUZA, J. C. de. M. e. **Matemática Divertida e Curiosa**. 15. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (eds.) **The teaching and assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston, NCTM, 1989, p.1-23.

STANCANELLI, R. Conhecendo diferentes tipos de problemas. In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 103-120.

TAHAN, M. **Didática da Matemática**. V.2. São Paulo: Saraiva, 1962.

______. **As Maravilhas da Matemática**. 2. ed. Rio Janeiro: BLOCH EDITORES, 1973.

______. **O Homem que Calculava**. 72. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

THORNDIKE, E. L. **The New Methods in Arithmetic.** 1921. Disponível em: **<** https://ia802606.us.archive.org/20/items/newmethodsinari00thorgoog/newmethodsinari00thorgoog.pdf>. Acesso em: 02 ago. 2015.

______. **A nova metodologia da aritmética**. 1936. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/116408/A%20nova%20metodologia%20da%20Aritm%C3%A9tica%20%E2%80%93%201936%2c%20parte%204%2c%20RS.pdf?sequence=1&isAllowed=y >. Acesso em: 02 ago. 2015.

TRIGG, C. W. “Wat Is Recreational Matematics?” **Mathematics Magazine,** n. 51, p. 18-21, Jan. 1978. Disponível em: < www.jstor.org/stable/2689642>. Acesso em 22 abr. 2015.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em Ciências Sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: ATLAS, 1987.

VALENTIM, M. A. **Literatura e Matemática**: O Homem que Calculava de Malba Tahan. 2010. 103f. Dissertação (Mestrado em Letras) - Centro de Ensino Superior de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VARIZO, Z. da C. M. O ensino da Matemática e a resolução de problemas. **Inter-ação**, Revista da Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiás, n. 17, p. 1-20, 1993.

APÊNDICE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Memorando nº 009 – MGSF/2015

São Mateus/ES, 30 de abril de 2015.

Ao
Diretor da EEEFM Nestor Gomes – São Mateus/ES
Prof. Mauro Lúcio de Oliveira

Assunto: Desénvolvimento de Pesquisa Acadêmica

1. Considerando o Curso de Mestrado Acadêmico, em andamento, da Profª Clarice Segantini, matriculada regularmente no Programa de Pós- Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, sob a orientação do Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho;
2. Considerando a elaboração de sua dissertação como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica;
3. Considerando a temática Resolução de Problemas;
4. Considerando a possibilidade em se trabalhar com alunos do Ensino Médio;
5. Considerando a colaboração do Profª Vanessa Bayerl Cesana.

Venho solicitar, a esta Direção, permissão para que a mestranda Clarice Segantini realize uma parte de sua pesquisa, qual seja, a realização de oficinas de Resolução de Problemas, em uma das turmas da EEEFM Nestor Gomes.

Atenciosamente

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
SIAPE: 4175054
DECH/CEUNES/UFES

Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Professor Permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica
Professor do Departamento de Educação e Ciências Humanas

Mauro Lúcio de Oli
Diretor Escolar
Port. nº 043-R/SEDU-ES
D.O. 19/12/2014

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio
"NESTOR GOMES"
Entidade Mantenedora: Governo do Est. do Esp. San
Aprovação: 1ª a 4ª Série - Res. CEE nº 41/75 de 28/11
5ª a 8ª Série - Res. CEE nº 27/86 de 09/05
Ensino Médio - Res. CEE nº 2.292/2010 de 16/06/20
Rua Camilo Silva, s/n - Nestor Gomes
CEP 29942-990 - São Mateus-ES
E-mail: escolanestorgomes@sedu.es.gov
Telefax: (27) 3763-0045