Stéfani Concolato Vieira

O algoritmo de Apéry para uma curva plana algebróide com dois ramos

Vitória - Espírito Santo, Brasil

dezembro de 2015

Stéfani Concolato Vieira

O algoritmo de Apéry para uma curva plana algebróide com dois ramos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo PPGMAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática. Orientador: Prof^{o} Valmecir Antonio dos Santos Bayer.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer

Vitória - Espírito Santo, Brasil

dezembro de 2015

Stéfani Concolato Vieira
O algoritmo de Apéry para uma curva plana algebróide com dois ramos/ Stéfani Concolato Vieira. – Vitória - Espírito Santo, Brasil, dezembro de 2015-
76 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Valmecir Antonio dos Santos Bayer

Dissertação(Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática, dezembro de 2015.

I. Valmecir Antonio dos Santos Bayer. II. Universidade Federal do Espírito Santo.
III. Departamento de Matemática.

Para Maria e José.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me amparado em todos os momentos. Agradeço a minha família, ao meu namorado Gilberto e amigos pela compreensão e apoio. Agradeço em especial ao professor Valmecir pela orientação e paciência. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Humilhai-vos, portanto, sob a poderosa mão de Deus, para que Ele, em tempo oportuno, vos exalte, lançando sobre Ele toda a vossa ansiedade, porque Ele tem cuidado de vós.

(Bíblia Sagrada. I Pedro 5:6-7)

Resumo

Apéry mostrou que se (f) é uma curva plana algebróide irredutível e $(f^{(1)})$ é sua explosão, então os semigrupos $S(f)$ e $S(f^{(1)})$ associados a (f) e a $(f^{(1)})$, respectivamente, podem ser relacionados. O Apéry-conjunto é um conjunto especial de geradores de um semigrupo com condutor. Existe uma fórmula para obter o Apéry-conjunto para $S(f^{(1)})$ a partir de $S(f)$ e vice e versa. Isto geralmente não acontece para curvas algebróides não planas. Através deste resultado de Apéry, é possível verificar que podemos obter o semigrupo a partir da sequência de multiplicidades e o processo inverso.

O principal resultado aqui é uma espécie de generalização desses resultados para o caso de uma curva plana algebróide com dois ramos, isto é, os trabalhos de Barucci, Fröberg e D'Anna. Vamos mostrar como os semigrupos $S(f)$ e $S(f^{(1)})$ estão estritamente relacionados no caso em que (f) tem dois ramos através do Apéry-conjunto, o qual neste caso, não é mais finito, mas é a união finita de suas componentes. Além disso, vamos caracterizar a árvore de multiplicidades de uma curva plana com dois ramos de forma puramente numérica.

Abstract

Apery showed, if (f) is a irreductible algebroid plane curve and $(f^{(1)})$ is its blowup, then the semigroups $S(f)$ e $S(f^{(1)})$ associated the curves (f) and $(f^{(1)})$ respectively, they can be related. The Apery set is a special generating set of a semigroup with conductor. There is a formula to get the Apery set for $S(f^{(1)})$ from that of $S(f)$ and vice versa. This does not happen in general for non plane algebroid curves. Through that result of Apery, is possible to show how one can get the semigroup from the multiplicity sequence and vice versa.

The main result here is a specie of generalization of results to the case of a plane algebroid curve with two branches, this is, the results of Barucci, Fröberg e D'Anna. We will show how the semigroups $S(f)$ and $S(f^{(1)})$ are strictly related in the case that (f) has two branches through of Apery set, which it is not finite, but it is a finite union of its components. Furthermore, we will characterize a multiplicity tree of a plane algebroid curve with two branches of purely numerical form.

Sumário

1 Definições Básicas e Resultados Preliminares . . . 17

1.1 O anel das séries formais de potências e o anel local . . . 17

1.2 Parametrizações de Newton-Puiseux . . . 21

1.3 Anéis de Valorização . . . 23

1.4 Fecho Inteiro . . . 25

1.5 Multiplicidade de Interseção . . . 26

1.6 Semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível . . . 28

1.7 As valorizações e o semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível . . . 30

1.8 Explosões . . . 31

2 Apéry-conjuntos para semigrupos de curvas planas algebróides irredutíveis . 35

2.1 Apéry-conjuntos . . . 35

2.2 $k[[x]]-$bases de $\mathcal{O}_f$ e Apéry-sequências . . . 38

2.2.1 O menor sistema de geradores e explosão . . . 41

2.2.2 Sequências de multiplicidades . . . 42

3 O semigrupo de curvas planas algebróides com dois ramos . . . 45

3.1 Pontos Maximais . . . 47

3.2 Simetria dos pontos maximais . . . 50

3.3 Pontos maximais irredutíveis . . . 52

3.4 Determinação dos pontos maximais do semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos . . . 54

3.4.1 Exemplos . . . 54

4 Componentes de Apéry-conjuntos e Multiplicidades . . . 57

4.1 Semigrupos Bons . . . 57

4.2 Semigrupos Locais e Apéry-conjuntos . . . 58

4.3 Componentes de Apéry-conjuntos . . . 60

4.4 A árvore de multiplicidades . . . 65

4.4.1 Obtendo o semigrupo a partir da árvore de multiplicidades . . . 67

4.4.2 A árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide com dois ramos . . . 68

Introdução

Seja $f \in k[X,Y]$ um polinômio irredutível em $k[X,Y]$ onde k é um corpo algebricamente fechado e considere a curva plana

$$C_f := \{(x,y) \in k^2 : f(x,y) = 0\}.$$

O estudo local da curva C_f na vizinhança do ponto $P = (a,b)$ se torna interessante quando a curva é singular em P, isto é, quando as derivadas parciais f_X e f_Y são ambas nulas em P. Fazendo uma mudança de coordenadas se necessário, podemos supor que P seja a origem de um sistema afim de coordenadas, ou seja, $P = (0,0)$. Quando k é o conjunto dos números complexos, o Teorema da Função Implícita afirma que, numa vizinhança de P, podemos explicitar Y na relação $f(X,Y) = 0$ como uma série de potências em X na vizinhança de 0, quando C_f é regular em P, isto é, quando as derivadas parciais f_X e f_Y não são simultaneamente nulas em P (neste caso, quando $f_Y(P) \neq 0$).

Podemos analisar f em $k[[X,Y]]$, onde f pode se decompor em vários fatores irredutíveis. Primeiramente, vamos definir uma relação de equivalência no anel das séries formais $k[[X,Y]]$. Dizemos que $f, g \in k[[X,Y]]$ são equivalentes, denotamos $f \sim g$, se existir $u \in k[[X,Y]]$ invertível tal que $f = u \cdot g$. Cada classe desta relação obtida chamamos de uma curva plana algebróide e denotaremos a classe de f por (f). Dizemos que esta curva possui um ramo quando f é irredutível em $k[[X,Y]]$. Dizemos que (f) é redutível, se $f = f_1 ... f_n$ com $(f_i) \neq (f_j)$, isto é, quando f_i e f_j não são associados se $i \neq j$ e chamamos cada (f_j) de um ramo. Observamos que há um resultado em [16] que garante não haver fatores múltiplos na decomposição em $k[[X,Y]]$ de um dado polinômio irredutível em $k[X,Y]$.

Para nossos propósitos, vamos estudar as propriedades aritméticas do completamento do anel local

$$\mathcal{O}_f := \frac{k[[X,Y]]}{(f)}$$

em $(0,0)$ associado a uma curva plana algebróide irredutível (f) utilizando o seu semigrupo de valores $S(f)$, os quais são invariantes via equivalências de curvas planas algebróides. Em seguida, definiremos o semigrupo de valores associado a uma curva plana algebróide com dois ramos e o relacionaremos com os semigrupos de valores associado a cada ramo.

Um dos objetivos desta dissertação é apresentar o algoritmo de Apéry para curvas planas algebróides com dois ramos e estudar o comportamento de sua árvore de multiplicidades, para isto estudaremos mais profundamente algumas propriedades do semigrupo de valores de uma curva plana algebróide com dois ramos e seus pontos maximais.

No primeiro capítulo fazemos uma introdução a resultados preliminares e definições básicas que são necessárias para os demais capítulos. É neste capítulo que motivamos o estudo do semigrupo de valores de uma curva plana algebróide irredutível e apresentamos alguns invariantes via equivalência de curvas planas algebróides, como o anel local, o índice de interseção e o número de Milnor.

No segundo capítulo, introduzimos o Apéry-conjunto de um semigrupo no caso de um ramo e sua Apéry-sequência. Mostramos que o Apéry-conjunto nos dá informações mais gerais de um semigrupo do que um conjunto arbitrário de geradores do mesmo. Resultados de Apéry permitem calcular a Apéry-sequência do semigrupo associado a explosão de uma curva plana algebróide irredutível através do conhecimento da Apéry-sequência do semigrupo de tal curva. Além disso, resultados de Angermüller mostram como determinar quais semigrupos de $\mathbb{N}$ são associados a uma curva plana algebróide irredutível. Neste capítulo também definimos a sequência de multiplicidades de um ramo.

No capítulo três definimos o semigrupo de valores de uma curva plana algebróide com dois ramos e o relacionamos com os semigrupos de valores de cada ramo e o índice de interseção dos dois ramos. Listaremos propriedades importantes deste tipo de semigrupo que foram caracterizadas por Garcia. A determinação dos pontos maximais e seu comportamento simétrico são partes cruciais no estudo de semigrupos de curvas planas algebróides com dois ramos. Exibiremos o resultado de Garcia na determinação de tais pontos no caso em que as tangentes dos ramos são distintas utilizando certas Apéry-sequências. Os demais casos foram analisados por Bayer em [6]. Ressaltamos que alguns exemplos neste capítulo foram construídos através de recursos computacionais, em rotinas implementadas no software Maple criadas pelo professor Marcelo Escudeiro Hernandes.

No capítulo quatro, caracterizamos os bons semigrupos. Tais semigrupos permitem um melhor estudo no caso de uma curva plana algebróide com vários ramos, pois os semigrupos de valores de uma curva plana algebróide são bons semigrupos, entretanto, nem todo bom semigrupo é semigrupo de valores de algum anel de valorização. Resultados sobre semigrupos associados a curvas planas algebróides com vários ramos podem ser encontrados em [7]. Para desenvolvermos o algoritmo de Apéry para um semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos, generalizamos o Apéry-conjunto para tal semigrupo. Diferentemente do caso de um ramo, este conjunto não é finito. Entretanto, resultados de Barucci, D'Anna e Fröberg, que exibiremos aqui, mostram que neste caso o Apéry-conjunto é igual a uma união finita de subconjuntos especiais, os quais definiremos como sendo as componentes do Apéry-conjunto. Outro resultado bastante relevante sobre tais componentes é o fato delas gerarem o semigrupo em que se esteja trabalhando. Também estudamos as sequências de multiplicidades neste capítulo, as quais formam uma árvore de multiplicidades. Através destas podemos determinar o semigrupo, e vice e versa. Em outras palavras, o conhecimento da árvore de multiplicidade é equivalente ao conheci-

mento do semigrupo. Para um melhor estudo da árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide com dois ramos faremos uso do número de restrição, o qual com certas hipóteses dá uma condição necessária e suficiente para divisão de nós num determinado nível da árvore.

1 Definições Básicas e Resultados Preliminares

Neste capítulo estão as definições básicas e resultados que são pré-requisitos para os próximos capítulos expostos. Estes resultados podem ser encontrados detalhadamente em [12].

Vamos denotar por k um corpo algebricamente fechado.

1.1 O anel das séries formais de potências e o anel local

Vamos completar o anel de polinômios permitindo ter infinitos termos de maneira formal.

Definição 1.1. *Seja*

$$f(X,Y) := f_0(X,Y) + f_1(X,Y) + \dots$$

uma série formal, onde cada $f_i(X,Y)$ é um polinômio homogêneo de grau i. Chamamos $k[[X,Y]]$, formado por todos os elementos $f(X,Y)$, de conjunto das séries de potências nas indeterminadas X e Y com coeficientes em k.

Observe que $k[X,Y] \subset k[[X,Y]]$.

Sejam $f = f_0 + f_1 + \dots$ e $g = g_0 + g_1 + \dots \in k[[X,Y]]$ então

$$f = g \Longleftrightarrow f_i = g_i, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Podemos definir a soma e o produto de séries formais de tal modo que $k[[X,Y]]$ seja um anel comutativo com unidade. Chamamos $k[[X,Y]]$ de anel das séries de potências formais.

O anel $k[[X,Y]]$ é um domínio de fatoração única. A prova disto pode ser encontrada em [12], Teorema 2.12, página 25.

Definição 1.2. *Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série, onde $f = \sum_{i \geq 0} f_i$ com f_i polinômio homogêneo de grau i. A multiplicidade de f é*

$$mult(f) := min\{i : f_i \neq 0\}.$$

Definimos $mult(0) = \infty$.

É fácil determinar os elementos invertíveis de $k[[X,Y]]$. Um elemento $f \in k[[X,Y]]$ é invertível se, e somente se, $mult(f) = 0$, isto é, $f_0 \neq 0$. Algumas propriedades da multiplicidade:

- $mult(f \cdot g) = mult(f) + mult(g)$, $\forall f, g \in k[[X,Y]]$.
- $mult(f \pm g) \geq min\{mult(f), mult(g)\}$, valendo a igualdade quando $mult(f) \neq mult(g)$.

Definição 1.3. *Uma série $f \in k[[X,Y]]$ é dita regular de ordem m em Y se Y^m é a maior potência de Y que divide $f(0,Y)$.*

O anel $k[[X,Y]]$ não é um domínio euclidiano, mas existe uma "versão fraca" para a divisão euclidiana.

Teorema 1.4 (Teorema de Divisão de Weierstrass)**.** *Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série regular em Y de ordem m. Dada uma série $g \in k[[X,Y]]$, existem séries $q \in k[[X,Y]]$ e $r \in k[[X]][Y]$ com $r(X,Y) = 0$ ou $grau_Y(r) < m$ tais que*

$$g = f \cdot q + r.$$

Além disso, q e r são unicamente determinados nestas condições.

Demonstração: Ver [12], Teorema 2.3 página 20.

O teorema a seguir garante que toda série não nula e não inversível, a menos de multiplicação por inversível, é um polinômio em uma das variáveis.

Teorema 1.5 (Teorema de Preparação de Weierstrass)**.** *Seja $f(X,Y) \in k[[X,Y]]$ regular em Y de ordem m então existem $u \in k[[X,Y]]$ inversível e $a_0, a_1, ..., a_m \in k[[X]]$ tais que*

$$f(X,Y) = u[Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + ... + a_m(X)]$$

com $mult(a_i) \geq i$ para $i = 1, ..., m$.

Demonstração: Ver [12], Teorema 2.4, página 22.

A série $g(X,Y) := Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + ... + a_m(X)$, que aparece neste contexto, é chamada de polinômio de Weierstrass. De fato, é um polinômio com coeficientes em $k[[X]]$.

Agora vamos estudar o anel local associado a uma curva plana. Um anel local é aquele que possui um único ideal maximal. Estamos interessados em estudar o anel de uma curva plana irredutível em $(0,0)$. Relembramos que podemos sempre fazer uma mudança de coordenadas para estudar neste ponto.

Definição 1.6. *Seja $f \in k[[X,Y]]$. O anel local de (f) em $(0,0)$ é definido pelo anel quociente*

$$\frac{k[[X,Y]]}{(f)} = k[[x,y]],$$

onde $x := X + (f) \cdot k[[X,Y]]$ e $y := Y + (f) \cdot k[[X,Y]]$ são as classes respectivas.

Realmente $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$ é um anel local pois seu único ideal maximal é a projeção $\overline{\mathcal{M}}$ onde $\mathcal{M} =< X, Y >$, isto é, o ideal maximal gerado por X e Y. Quando f é irredutível, o anel local de f é um domínio. Vamos trabalhar com o completamento do anel local de uma dada $f \in k[[X,Y]]$ e denotaremos por $\mathcal{O}_f$. Este completamento é formado a partir da noção de sequências de Cauchy. Uma sequência de Cauchy em $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$ é uma sequência de elementos (z_λ) em $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$, tal que para toda vizinhança U de 0, existe um inteiro $s(U)$ com a propriedade:

$$z_\mu - z_\lambda \in U, \ \forall \mu, \lambda \geq s(U).$$

Formamos o completamento $\mathcal{O}_f$ através de todas as classes de equivalência entre tais sequências de Cauchy. Duas sequências de Cauchy são ditas equivalentes quando a diferença de ambas tende a zero na topologia $\mathcal{M}-$ádica. Este completamento pode ser expresso através de limites inversos. Resultados em [2] mostram que o completamento $\mathcal{O}_f$ também é um anel local, cujo ideal maximal é o completamento de $\mathcal{M}$. Além disso, a dimensão do completamento $\mathcal{O}_f$ é a mesma de $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$.

Segue do teorema de Chevalley em [16], que o completamento $\mathcal{O}_f$, quando (f) é irredutível em $k[X,Y]$, não possui elementos nilpotentes. Isto equivale a dizer que f não possui fatores múltiplos em $k[[X,Y]]$. Este resultado será usado ao longo do texto para definição de curva plana algebróide com d ramos.

Observe que usando o teorema de Preparação de Weierstrass, temos que

$$\mathcal{O}_f = \frac{k[[X,Y]]}{(g)} = \mathcal{O}_g$$

onde g é o polinômio de Weierstrass associado a f.

Vamos obter uma relação de equivalência em $k[[X,Y]]$, motivados por este resultado. Dizemos que duas séries $f, g \in k[[X,Y]]$ são equivalentes, denotamos $f \sim g$, quando existirem um $k-$automorfismo de $k-$álgebras $\Psi : k[[X,Y]] \longrightarrow k[[X,Y]]$ e um elemento $u \in k[[X,Y]]$ inversível tais que

$$\Psi(g) = u \cdot f.$$

Definição 1.7. *Uma curva plana algebróide é uma classe de equivalência em $k[[X,Y]]$, dada pela relação de equivalência acima.*

Seja $f \in k[[X,Y]]$ uma série irredutível de multiplicidade $m \geq 1$. Após uma mudança de variável podemos tornar f regular, digamos em Y. Pelo Teorema de Divisão de Weierstrass temos

$$\mathcal{O}_f = \frac{k[[X,Y]]}{(f)} \cong \frac{k[[X]][Y]}{(f)} \cong k[[x]][y].$$

Segue que,

$$\mathcal{O}_f \cong k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus .... \oplus k[[x]]y^{m-1}.$$

De fato, dado $h \in k[[X,Y]]$, o Teorema de Divisão de Weierstrass afirma que existem $q(X,Y) \in k[[X,Y]]$ e $r(X,Y) \in k[[X]][Y]$ tais que

$$h = qf + r$$

com $r = 0$ ou $grau_Y(r) \leq m-1$. Assim,

$$r(X,Y) = r_0(X) + r_1(X)Y + ... + r_{m-1}(X)Y^{m-1}$$

logo

$$\begin{aligned} h(x,y) &= \overline{h(X,Y)} = \overline{q(X,Y)f(X,Y) + r(X,Y)} = \overline{q(X,Y)f(X,Y)} + \overline{r(X,Y)} = r(x,y) \\ &= r_0(x) + r_1(x)y + ... + r_{m-1}y^{m-1}. \end{aligned}$$

A soma é direta, pois $\{1, y, ..., y^{m-1}\}$ é linearmente independente sobre $k[[x]]$. Isto prova o que desejávamos.

Vamos denotar K como o corpo de frações de $\mathcal{O}_f$ e $\tilde{\mathcal{O}}_f$ o fecho inteiro de $\mathcal{O}_f$ em K. Logo, podemos escrever

$$K = k((x,y)) = k((x))(y) = k((x))[y] = k((x)) \oplus k((x))y \oplus .... \oplus k((x))y^{m-1},$$

pois y é algébrico sobre $k((x))$ de grau m.

Podemos estender a definição para uma curva plana algebróide não irredutível em $k[[X,Y]]$.

Definição 1.8. *Seja k um corpo algebricamente fechado de característica zero. Seja $f \in k[[X,Y]]$ tal que $f = f_1...f_d$ onde f_i e f_j são fatores irredutíveis não associados para $i \neq j$. Dizemos que (f) é uma curva plana algebróide com d ramos.*

Nosso interesse é sobre as curvas planas algebróides com dois ramos. Mas primeiramente, vamos analisar as curvas planas algebróides com um ramo, isto é, as curvas planas algebróides irredutíveis, em busca de alguns invariantes para determinar quando estas são equivalentes. Motivados por esta busca, podemos classificar as curvas planas algebróides em duas classes: as regulares e as singulares.

Definição 1.9. *Uma curva plana algebróide é suave ou regular se sua multiplicidade é igual a um. Caso sua multiplicidade seja maior que um, diremos que a curva é singular.*

Um resultado inicial para equivalência é obtido.

Proposição 1.10. *Sejam (f) e (g) duas curvas planas algebróides regulares. Então $(f) \sim (g)$.*

Demonstração: Como $mult(f) = 1$, segue que $f(X,Y) = aX + bY + ...$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se $a \neq 0$, considere o $k-$automorfismo $\psi : k[[X,Y]] \longrightarrow k[[X,Y]]$ definido por $\psi(X) = f$ e $\psi(Y) = Y$. Assim, $(f) \sim (X)$. Se $b \neq 0$ então analogamente teríamos $(f) \sim (Y)$. O mesmo sendo verdadeiro para (g). Como $(X) \sim (Y)$, obtemos que $(f) \sim (g)$. $\square$.

Portanto, um dos objetivos será analisar quando as curvas planas algebróides singulares são equivalentes nesta relação de equivalência que foi definida.

O resultado a seguir mostra que o anel local é um invariante via equivalência de curvas planas algebróides.

Proposição 1.11. *Sejam (f) e (g) duas curvas planas algebróides. Então $f \sim g$ se, e somente se, $\mathcal{O}_f \cong \mathcal{O}_g$.*

Demonstração: Ver [12], Teorema 4.1, página 53.

Um resultado que segue da demonstração da proposição anterior.

Corolário 1.12. *Sejam (f) e (g) duas curvas planas algebróides. Se $\mathcal{O}_f \cong \mathcal{O}_g$, então $mult(f) = mult(g)$.*

Definição 1.13. *Seja $f(X,Y) = f_m(X,Y) + f_{m+1}(X,Y) + ...$ onde $f_m \neq 0$ um polinômio homogêneo de grau m. Os fatores lineares de $f_m(X,Y)$ são ditas tangentes de f. Duas curvas planas algebróides (f) e (g) são transversais se $mult(f) = mult(g) = 1$ e possuem tangentes distintas.*

1.2 Parametrizações de Newton-Puiseux

Seja k um corpo de característica zero.

Sabemos que a extensão $k((X^{\frac{1}{n}})) \mid k((X))$ é finita e galoisiana com grupo de Galois isomorfo ao grupo multiplicativo das raízes $n-$ésimas da unidade em k. (Ver tais resultados em [12], Seção 3.2.)

Sejam ρ um elemento do grupo das raízes $n-$ésimas da unidade e $\alpha \in k((X^{\frac{1}{n}}))$. Assim, α pode ser escrito como $\alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i (X^{\frac{1}{n}})^i$. Como o grupo de Galois da extensão $k((X^{\frac{1}{n}})) \mid k((X))$ é isomorfo a U_n, temos que a ação de ρ em α é

$$\rho * \alpha = \sum_{i \geq i_0} b_i (\rho X^{\frac{1}{n}})^i = \sum_{i \geq i_0} b_i \rho^i X^{\frac{i}{n}}.$$

Agora vamos utilizar resultados sobre as extensões do tipo $k((X))[\alpha] \mid k((X))$, onde $\alpha = \varphi(X^{\frac{1}{n}})$ e $n = min\{q \in \mathbb{N} : \alpha \in k((X^{\frac{1}{q}}))\}$ com φ automorfismo de $k[[X^{\frac{1}{n}}]]$, para dar uma condição necessária para irredutibilidade de séries de potências.

Lema 1.14 (Unitangência)**.** *Seja $f = F_n + F_{n+1} + ... \in k[[X, Y]]$ uma série irredutível de multiplicidade n tal que $f(0, 0) = 0$. Então*

$$F_n = (aX + bY)^n$$

onde $a, b \in k$ não são nulos simultaneamente, isto é, f só tem uma tangente na origem. Chamamos F_n de cone tangente de (f).

Demonstração: Ver [12], Lema 3.15, página 43.

Seja $f = F_n + F_{n+1} + ... \in k[[X, Y]]$ uma série de potências irredutível de multiplicidade n. Pelo Lema de Unitangência temos que $F_n = (aX + bY)^n$ para certos $a, b \in k$. Assim, f é regular em Y se $b \neq 0$ ou f é regular em X se $a \neq 0$.

Se f é regular em Y, então podemos escrever

$$f = a_0(x)Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + ... + a_n(X) + Y^{n+1}h(X, Y)$$

com $a_i(X) \in k[[X]]$, $mult(a_i(X)) \geq i$ para $i = 1, ..., n$, $a_0(0) \neq 0$ e $h(X, Y) \in k[[X, Y]]$. Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe $u \in k[[X, Y]]$ unidade e $A_1, ..., A_n \in k[[X]]$ com $A_i(0) = 0$ tais que

$$u \cdot f = p(X, Y) = Y^n + A_1 Y^{n-1} + \cdots + A_n.$$

Seja $\alpha \in k[[X^{\frac{1}{n}}]]$, onde $n = min\{q \in \mathbb{N} : \alpha \in k((X^{\frac{1}{q}}))\}$, tal que $p(X, \alpha) = p(X, \varphi(X^{\frac{1}{n}})) = 0$ (Ver Teorema da Função Implícita em [12], Seção 3.3). Se colocarmos $t = X^{\frac{1}{n}}$, então temos $\varphi(t) \in k[[t]]$ e $f(t, \varphi(t)) = 0$. Nesta situação, o Teorema de Newton-Puiseux afirma que uma curva plana irredutível $f(X, Y) \in k[[X, Y]]$ admite uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^n \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

chamada uma parametrização de Newton-Puiseux. Após uma mudança de coordenadas se necessário, temos

$$(f) : \begin{cases} x = t^n \\ y = \sum_{i \geq m} a_i t^i \end{cases}$$

onde $a_m \neq 0$ e $m \geq n$. Existem várias possibilidades de parametrizações de Newton-Puiseux de (f) por séries em $k[[t]]$ e existe um algoritmo em característica zero, graças a Newton, para determinar uma tal parametrização. Por exemplo, no pacote Maple, este algoritmo pode ser implementado.

Seja $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ um par de elementos em $k[[t]]$ que não são inversíveis. Dizemos que este par é uma parametrização de (f) se

$$f(\psi_1(t), \psi_2(t)) = 0.$$

Uma parametrização $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ de (f) é chamada primitiva se existe um automorfismo ρ de $k[[t]]$ tal que

$$(\rho(\psi_1(t)), \rho(\psi_2(t))) = (t^n, \varphi(t))$$

onde $(t^n, \varphi(t))$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de (f). Definimos

- $e_0 := \beta_0 = n$,
- $\beta_i := min\{j : a_j \neq 0 \ e \ e_{i-1} \ não \ divide \ j\}$ para todo $i \geq 1$, se $e_{i-1} \neq 1$,
- $e_i := mdc(\beta_i, e_{i-1})$.

Observamos que se $e_{i-1} \neq 1$, então β_i está bem definido, pois o conjunto $\{j : a_j \neq 0 \ e \ e_{i-1} \ não \ divide \ j\}$ é não vazio quando a parametrização é primitiva. Além disso, existe $g > 0$ tal que $e_g = 1$.

Definição 1.15. *Chamamos o menor número g, que satisfaz a propriedade acima, de gênero de (f). Dizemos que os números $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_g$ são os expoentes característicos de (f).*

Exemplo 1.16. *Seja* $(f) : \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + ... \end{cases}$

Então, os expoentes característicos são $(8, 12, 22, 23)$ e o gênero de (f) é 3.

Futuramente, mostraremos resultados onde o conhecimento de tais expoentes característicos de uma curva plana algebróide irredutível (f) pode explicitar os geradores minimais do semigrupo associado a (f), isto é, nos dá o conhecimento do próprio semigrupo.

1.3 Anéis de Valorização

Outro importante conceito que estudaremos é o de anéis de valorização. Este conceito nos permitirá estudar o semigrupo de valores de uma curva plana algebróide que é

outro invariante via classe de equivalência de tais curvas. Detalhes podem ser encontrados em [16].

Um corpo de funções algébricas de r variáveis $F|k$ sobre k é a extensão finitamente gerada F de k com grau de transcendência $r \geq 1$.

Por exemplo, seja $f(X,Y) = X^3 - Y^2 + 1 \in k[[X,Y]]$ e consideramos $F := \dfrac{k[[X,Y]]}{(f(X,Y))}$. Daí $F = k(x,y)$ onde $x^3 = y^2 - 1$ e $x = X mod(f(X,Y))$, $y = Y mod(f(X,Y))$. Logo $F|k$ é um corpo de funções de uma variável.

Definição 1.17. *Um anel de valorização do corpo de funções $F|k$ é um subanel $\vartheta \subset F$ com as propriedades:*

(a) $k \subset \vartheta \subset F$ *mas* $k \neq \vartheta \neq F$*;*

(b) para todo $z \in F$, $z \in \vartheta$ *ou* $z^{-1} \in \vartheta$.

Definição 1.18. *Seja $F|k$ um corpo de funções. Uma valorização discreta normalizada de $F|k$ é uma função $v : F \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ que goza das seguintes propriedades:*

(a) $v(x) = \infty$ *se, e somente se,* $x = 0$*;*

(b) $v(x \cdot y) = v(x) + v(y)$ *para todo* $x, y \in F$*;*

(c) $v(x + y) \geq min\{v(x), v(y)\}$ *para todo* $x, y \in F$*;*

(d) existe $t \in F$ *tal que* $v(t) = 1$*. Chamamos um tal elemento* t *de uniformizante local em* v*;*

(e) se $a \in k$ *é não nulo, então* $v(a) = 0$.

O conjunto $\vartheta := \{x \in F : v(x) \geq 0\}$ é um anel de valorização de k e é dito o anel de valorização de v.

Listamos algumas propriedades de valorizações.

Proposição 1.19. *Seja v uma valorização discreta normalizada de $F|k$. Então:*

(a) ϑ *é um anel local cujo ideal maximal é o conjunto* $\mathcal{M}$ *dos elementos não inversíveis de* ϑ*;*

(b) ϑ *é um domínio principal. Mais precisamente, se* $\mathcal{M} = t\vartheta$ *e* I *é um ideal não nulo de* ϑ *então* $I = t^n\vartheta$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

(a) Ver [9], Teorema 3, página 6.

(b) Ver [9], Teorema 4, página 8.

Seja $F|k$ um corpo de funções algébricas em duas variáveis. Seja v uma valorização de $F|k$ e t um uniformizante local em v. Então, para cada $f \in F$, consideramos a série

$$\sum_{n=m_f}^{\infty} c_n t^n,$$

chamada de série formal de Laurent, onde $m_f = v(f)$ e $c_{m_f} \neq 0$. O conjunto formado por todas tais séries é um corpo e é chamado de corpo das séries formais de Laurent em t sobre k. Então podemos ver, através de resultados em [8], F imerso no corpo das séries formais de Laurent em t sobre k, isto é, $F \subset k((t))$.

Portanto, as valorizações v de $F|k$ se estendem naturalmente para $k((t))$. Podemos defini-las como

$$v(f) = ord_t(f) := \textit{menor expoente da série de Laurent em } t$$

para cada $f \in k((t))$.

Note que se s é outro uniformizante local em v, além de t, então $v(s) = 1$, logo

$$s = a_1 t + a_2 t^2 + ...$$

com $a_i \in k$ para $i \geq 1$ e $a_1 \neq 0$. Assim, $k((t)) = k((s))$, isto é, a imersão $F \subset k((t))$ e a definição da valorização v acima não dependem do uniformizante local em v.

Podemos considerar o corpo $k((t))$ como um completamento de F, com a norma

$$|f|_v := 2^{-v(f)}.$$

1.4 Fecho Inteiro

Vamos trabalhar com domínios integralmente fechados.

Seja A um domínio e B um subanel de A. Um elemento $a \in A$ é dito elemento inteiro sobre B se existem $n \in \mathbb{N}$ e $b_1, ..., b_n \in B$ tais que

$$a^n + b_{n-1}a^{n-1} + ... + b_1 a^1 + b_0 = 0.$$

O conjunto de elementos de A que são inteiros sobre B é chamado o fecho inteiro de A sobre B.

Definição 1.20. *Um domínio A é dito integralmente fechado se ele é igual ao seu fecho inteiro sobre o seu corpo de frações.*

Um resultado bastante interessante sobre o fecho inteiro do anel local de uma curva plana algebróide irredutível é o seguinte:

Proposição 1.21. *Seja $f \in k[[X,Y]]$ irredutível então o fecho inteiro de seu anel local $\tilde{\mathcal{O}}_f$ é igual a $k[[t]]$.*

Demonstração: Como

$$\mathcal{O}_f \cong k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus k[[x]]y^2 \oplus .... \oplus k[[x]]y^{m-1}$$

sabemos que a extensão $k[[t]]|k[[x]]$ é inteira e $\tilde{\mathcal{O}}_f$ contém todos elementos que são inteiros sobre $k[[x]]$ então $k[[t]] \subset \tilde{\mathcal{O}}_f$. Por outro lado, se $g \in \tilde{\mathcal{O}}_f$, então g é inteiro sobre $k[[x]]$, logo existem $a_0(x), a_1(x), ..., a_{s-1}(x) \in k[[x]]$ tais que

$$g^s + a_{s-1}(x)g^{s-1} + ... + a_1(x)g + a_0(x) = 0.$$

Daí

$$g^s = -(a_{s-1}(x)g^{s-1} + ... + a_1(x)g + a_0(x)),$$

logo

$$v(g^s) = v(a_{s-1}(x)g^{s-1} + ... + a_1(x)g + a_0(x)).$$

Assim como $v(a_i(x)) \geq 0$ para todo $i = 1, ..., s-1$ temos

$$s \cdot v(g) \geq min\{v(a_{s-1}(x)) + (s-1) \cdot v(g), ..., v(a_1(x)) + v(g), v(a_0(x))\}$$

$$\geq min\{(s-1) \cdot v(g), ..., v(g), 0\} \geq 0.$$

Portanto, $g \in k[[t]]$. Concluímos que $\tilde{\mathcal{O}}_f = k[[t]]$. $\square$

Como $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$ não é um domínio quando (f) não é irredutível, usamos o resultado do teorema de Zariski em [16], página 320, o qual afirma que, quando $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f)}$ é integralmente fechado, então o completamento $\mathcal{O}_f$ é um domínio e é integralmente fechado.

1.5 Multiplicidade de Interseção

Nesta seção estamos interessados em expressar de maneira numérica a ordem do grau de contado de duas curvas planas algebróides. Futuramente este número será relacionado com o semigrupo de uma curva plana algebróide.

Dadas duas séries $f, g \in k[[X,Y]]$ não nulas, a multiplicidade de interseção ou índice de interseção de f e g é definido como

$$I(f,g) := dim_k \frac{k[[X,Y]]}{< f, g >}.$$

Podemos verificar que a dimensão de $\dfrac{k[[X,Y]]}{< f,g >}$ como um k espaço vetorial é finita quando f e g são relativamente primos.

Teorema 1.22. *Sejam $f,g,h \in k[[X,Y]]$ não nulas, $\phi : k[[X,Y]] \longrightarrow k[[X,Y]]$ um $k-$automorfismo e $u,v \in k[[X,Y]]$ inversíveis. Temos as seguintes propriedades:*

(a) $I(f,g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $k[[X,Y]]$.

(b) $I(f,g) = I(g,f)$.

(c) $I(\phi(f),\phi(g)) = I(uf,ug) = I(f,g)$.

(d) $I(f,gh) = I(f,g) + I(f,h)$.

(e) $I(f,g) = 1$ se, e somente se, (f) e (g) são transversais.

(f) $I(f,g-hf) = I(f,g)$.

Demonstração: Ver [12], Teorema 4.14, página 62.

É possível mostrar que as propriedades deste teorema caracterizam de forma axiomática o índice de interseção.

Definição 1.23. *Um pseudopolinômio em Y é uma série em $k[[X,Y]]$ da forma*

$$P(X,Y) = Y^n + A_1Y^{n-1} + \cdots + A_n \in k[[X]][Y]$$

tal que $n \geq 1$ e $mult(A_i) \geq 1$ para $i = 1,...,n$.

Sejam $f,g \in k[[X]][Y]$ pseudo-polinômios em Y. A multiplicidade de interseção de (f) e (g) pode também ser dada pela multiplicidade da resultante na indeterminada Y com coeficientes em $k[[X]]$:

$$I(f,g) = mult(R_Y(f,g)).$$

Detalhes podem ser vistos em [12], Teorema 4.17, página 65. Este resultado nos permite realizar facilmente o cálculo do índice de interseção de duas curvas planas algebróides quando possuem ordem relativamente pequena.

Exemplo 1.24. *Sejam $f(X,Y) = Y^2 - X^3$ e $g(X,Y) = Y^3 - X^4$. Podemos calcular a multiplicidade de interseção atráves do cálculo do determinante da resultante a seguir.*

$$Res_Y(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -X^3 \\ 1 & 0 & 0 & -X^4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -X^4 \end{pmatrix}$$

Assim, $I(f,g) = mult_X\ det(Res_Y(f,g)) = mult(X^8 - X^9)$. Logo, $I(f,g) = 8$.

1.6 Semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível

Lembramos que $S \subset \mathbb{N}$ é um semigrupo se S for não vazio, $0 \in S$ e se S for fechado via a adição. Nesta seção primeiramente vamos recordar um tipo de semigrupo dos naturais o qual vamos trabalhar nos próximos capítulos.

Definição 1.25. *Um semigrupo $S \subset \mathbb{N}$ é dito semigrupo com condutor quando existe $c \in S$, chamado condutor de S, tal que:*

(a) $c - 1 \notin S$;

(b) se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $n \geq c$ então $n \in S$.

Observamos que o conjunto $\mathbb{N}$ é um semigrupo com condutor 0. Já o conjunto dos números pares em $\mathbb{N}$ não é um semigrupo com condutor.

O semigrupo que definiremos a seguir é o principal objeto de estudo deste texto.

Definição 1.26. *O semigrupo associado a uma curva plana algebróide irredutível (f) é o sub-semigrupo de $\mathbb{N}$:*

$$S(f) := \{\ I(f,g) : g \in k[[X,Y]] - < f > \}.$$

Note que $S(f)$ é de fato um semigrupo de $\mathbb{N}$. Também estamos interessados em curvas que tenham o mesmo semigrupo associado.

Definição 1.27. *Duas curvas planas algebróides irredutíveis (f) e (g) são ditas equisingulares se $S(f) = S(g)$.*

Assim, se (f) e (g) são equivalentes então elas são equisingulares. Portanto, o semigrupo é um invariante via equisingularidade. Nosso objetivo a partir de agora será estudar os semigrupos associados a curvas planas algebróides irredutíveis e generalizá-los no caso de dois ramos.

Podemos calcular o semigrupo no caso de um ramo de diversas formas, inclusive computacionalmente para alguns casos. Iremos calculá-lo primeiramente usando a resultante.

Exemplo 1.28. *Se $f = Y^2 - X^n$ com $n \geq 5$ ímpar, então*

$$S(f) = \{0, 2, 4, ..., n-1, n, n+1, ...\},$$

o condutor de $S(f)$ é $n - 1$.

De fato, seja $g \in k[[X,Y]] - < f >$. Pelo teorema de divisão de Weierstrass existem $q, h \in k[[X,Y]]$ tais que

$$g = q \cdot (Y^2 - X^n) + h$$

onde $grau_Y(h) \leq 1$. *Como* $g \notin < f >$ *então* $h \neq 0$. *Assim,* $h = a(X)Y + b(X)$ *com* $a(X), b(X) \in k[[X]]$. *Note que*

$$\begin{aligned} I(f,g) &= I(f, q \cdot f + h) = I(f,h) = I(Y^2 - X^n, a(X)Y + b(X)) \\ &= ord_X det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X^n \\ a & b & 0 \\ 0 & a & b \end{pmatrix} \\ &= ord_X[b^2(X) - X^n a^2(X)]. \end{aligned}$$

Escreva $a(X) = X^\alpha u(X)$ *e* $b(X) = X^\beta v(X)$, *com* $u(0) \neq 0$ *ou* $v(0) \neq 0$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. *Assim*

$$I(f,g) = ord_X[X^{2\beta} v^2(X) - X^{2\alpha+n} u^2(X)] = min\{2\beta, 2\alpha + n\}.$$

Assim, como g *é arbitrário, segue que* α *e* β *também são. Logo*

$$S(f) = \{0, 2, 4, ..., n-1, n, n+1, ...\},$$

isto é, o condutor de $S(f)$ *é* $n - 1$.

Seja (f) uma curva plana algebróide irredutível, então é fácil checar que

$$mult(f) = min(S(f) - \{0\}).$$

De fato, temos que $I(f,g) \geq mult(f) \cdot mult(g)$ e $I(f,g) = mult(f) \cdot mult(g)$ se, e somente se, f e g não tem tangentes comuns. Pelo lema da unitangência 1.14, f tem uma única tangente. Seja g uma reta pela origem distinta da tangente de f, assim, $mult(g) = 1$ e

$$I(f,g) = mult(f) \cdot mult(g) = mult(f).$$

Podemos também calcular o semigrupo associado a (f) através da parametrização de Newton-Puiseux.

Teorema 1.29. *Seja* (f) *uma curva plana algebróide irredutível com parametrização de Newton-Puiseux*

$$\begin{cases} x = t^{\beta_0} \\ y = t^{\beta_1} + \sum_{i > \beta_1} a_i t^i \end{cases}$$

e sejam $\beta_0, ..., \beta_g$ *os expoentes caraterísticos de* (f). *Então* $S(f)$ *é gerado por* $[v_0, ..., v_g]$ *onde* $v_0 = \beta_0$, $v_1 = \beta_1$ *e* $v_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{e_{k-1} - e_k}{e_{j-1}} \beta_k + \beta_j$ *para* $j = 2, ..., g$, *onde* $e_i = mdc(\beta_i, e_{i-1})$.

Demonstração: Teorema 6.12 em [12], página 85.

Calcularemos o semigrupo no exemplo seguinte através do teorema anterior.

Exemplo 1.30. *Seja* $(f) : \begin{cases} X = t^8 \\ Y = t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + ... \end{cases}$

Os expoentes característicos de (f) *são* $(8, 12, 22, 23)$*. Assim, pelo teorema anterior,* $S(f) = [8, 12, 34, 69]$.

O semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível (f) possui condutor e é dado por

$$\mu_f = dim_k \frac{k[[X, Y]]}{< f_X, f_Y >}.$$

Este número é chamado de número de Milnor. Este resultado pode ser encontrado em [12], Teorema 7.18, página 109.

Portanto, o número de Milnor é um invariante sobre relação de equivalência de equisingularidade de curvas, em particular, é invariante sobre equivalência de curvas planas algebróides.

Existe uma classe de semigrupos com condutor muito importante conhecida como semigrupos simétricos.

Definição 1.31. *Um semigrupo* $S \subset \mathbb{N}$ *com condutor* c *é dito simétrico se para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tem-se*

$$n \in S \Longleftrightarrow c - 1 - n \notin S.$$

Futuramente mostraremos que o semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível é simétrico.

1.7 As valorizações e o semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível

Agora interligaremos as valorizações e os semigrupos de uma curva plana algebróide irredutível.

Teorema 1.32. *Seja* (f) *uma curva algebróide irredutível e* $\tilde{\mathcal{O}}_f$ *fecho inteiro do anel local de* (f)*. Dada uma série* $g \in k[[X, Y]]$ *não nula e* v *a valorização discreta normalizada de* $\tilde{\mathcal{O}}_f$*, então*

$$I(g, f) = v(\overline{g})$$

onde $\overline{g} = g + (f)$ *é a classe residual de* g *em* $\mathcal{O}_f$*.*

Demonstração: Como $\overline{g} \in \mathcal{O} \subset \tilde{\mathcal{O}} = k[[t]]$, podemos escrever $\overline{g} = a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \dots$ com $a_j \in k$ e $a_n \neq 0$. Assim $v(\overline{g}) = v(a_n t^n + a_{n-1} t^{n+1} + \dots) = n$, pois $v(t) = 1$. Logo,

$\overline{g} = t^n \cdot u$ com u inversível em $k[[t]]$, já que $a_n \neq 0$. Assim

$$dim_k\left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}_f}{\overline{g}\tilde{\mathcal{O}}_f}\right) = dim_k\left(\frac{k[[t]]}{\overline{g}\cdot k[[t]]}\right) = dim_k\left(\frac{k[[t]]}{t^n\cdot k[[t]]}\right) = n = v(\overline{g}).$$

Da definição $I(f,g) = dim_k\dfrac{k[[X,Y]]}{< f,g >}$, logo $I(f,g) = dim_k\dfrac{\mathcal{O}_f}{\overline{g}\mathcal{O}_f}$. Observe que $I(f,g) = v(\overline{g})$, pois

$$dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_f}{\overline{g}\mathcal{O}_f}\right) = dim_k\left(\frac{\tilde{\mathcal{O}}_f}{\overline{g}\tilde{\mathcal{O}}_f}\right).$$

□

Assim, temos outra forma de calcular o semigrupo de uma curva plana algebróide irredutível (f):

$$S(f) = v(\mathcal{O}_f - \{0\}),$$

onde v é a valorização discreta normalizada de $\tilde{\mathcal{O}}_f$.

1.8 Explosões

Vamos introduzir um processo para remover as singularidades de uma curva algebróide irredutível.

Definição 1.33. *Seja (f) uma curva algebróide plana de multiplicidade m. Suponha que (f) tenha uma tangente única em $(0,0)$, digamos (Y), e que f seja um polinômio de Weierstrass, após uma mudança linear de coordenadas. O blowing-up ou a explosão de (f) é a curva algebróide definida pela série*

$$f^{(1)}(X,Z) := \frac{1}{X^m}f(X,XZ)$$

em $k[[X,Z]]$.

Proposição 1.34. *Se (f) é irredutível, então $(f^{(1)})$ também é.*

Demonstração: Suponha que $f^{(1)}(X,Z)$ seja redutível, logo existem $g(X,Z), h(X,Z) \in k[[X,Z]]$ não inversíveis tais que

$$f^{(1)}(X,Z) = g(X,Z)\cdot h(X,Z) = \frac{1}{X^m}f(X,XZ).$$

Assim $f(X,XZ) = X^m g(X,Z)h(X,Z)$ e portanto

$$f(X,Y) = X^m\cdot g\Big(X,\frac{Y}{X}\Big)\cdot h\Big(X,\frac{Y}{X}\Big) := [X^r\cdot g\Big(X,\frac{Y}{X}\Big)][X^s\cdot h\Big(X,\frac{Y}{X}\Big)],$$

onde $r+s=m$, $r = grau_Y(g)$ e $s = grau_Y(h)$, isto é, f redutível. □

Vamos denotar o anel local da curva algebróide $(f^{(1)})$ por $\mathcal{O}_f^{(1)}$.

Temos a inclusão dos anéis locais

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_f = \dfrac{k[[X,Y]]}{(f)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_f^{(1)} = \dfrac{k[[X,Z]}{(f^{(1)})} \\ h(X,Y) + f \cdot k[[X,Y]] & \mapsto & h(X,XZ) + f^{(1)} \cdot k[[X,Z] \end{array}$$

Assim, $\mathcal{O}_f^{(1)}$ está contido em K o corpo de frações de $\mathcal{O}_f$:

$$\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_f^{(1)} \subset K.$$

Observação 1.35. *Sejam (f) uma curva irredutível plana, $S := v(\mathcal{O}_f - \{0\})$ o semigrupo associado e $S^{(1)}$ o semigrupo associado a $(f^{(1)})$, então $S^{(1)} = v(\mathcal{O}_f^{(1)} - \{0\})$ e $S \subset S^{(1)}$. Assim, se c é o condutor de S, m é a multiplicidade de f, $c^{(1)}$ o condutor de $S^{(1)}$ e $m^{(1)}$ a multiplicidade de $f^{(1)}$ então temos a relação:*

$$c^{(1)} \leq c \text{ e } m^{(1)} \leq m.$$

Sejam (f) uma curva irredutível plana e $(f^{(1)})$ sua explosão. Denote por $x := X + f^{(1)} \cdot k[[X,Y]]$ e $y := Y + f^{(1)} \cdot k[[X,Y]]$. Assim

$$k[[x,y]] \subset k\Big[\Big[x, \frac{y}{x}\Big]\Big] \subset k((x,y)) = k((x))[y].$$

Seja

$$\begin{array}{rcl} \phi : k[[X,Z]] & \longrightarrow & k\Big[\Big[x, \dfrac{y}{x}\Big]\Big] \\ h(X,Z) & \mapsto & h\Big(x, \dfrac{y}{x}\Big) \end{array}$$

o homomorfismo sobrejetor. Vamos mostrar que $Ker\phi = f^{(1)} \cdot k[[X,Z]]$. Seja $d = grau(h(X,Z))$ e $h\Big(x, \dfrac{y}{x}\Big) = 0$ então

$$x^d h\Big(x, \frac{y}{x}\Big) \subset k[[x]][y] = \mathcal{O}_f,$$

isto é, $x^d h\Big(x, \dfrac{y}{x}\Big) = 0$ em $\mathcal{O}_f \subset \mathcal{O}_f^{(1)}$, ou seja, $x^d h(x,z) = 0$ em $\mathcal{O}_f^{(1)}$. Logo existe $g(X,Z) \in k[[X,Z]]$ tal que

$$X^d h(X,Z) = g(X,Z) \cdot f^{(1)}(X,Z).$$

Como $f^{(1)}(X,Z)$ não é divisor de X^d, então $h(X,Z)$ é um múltiplo de $f^{(1)}(X,Z)$, portanto $h(x,z) = 0$ em $\mathcal{O}_f^{(1)}$. Assim, $h(X,Z) \in f^{(1)} \cdot k[[X,Z]]$. Portanto,

$$k\Big[\Big[x, \frac{y}{x}\Big]\Big] \cong \frac{k[[X,Z]}{(f^{(1)})} = \mathcal{O}_f^{(1)}.$$

Podemos relacionar os índices de interseção a cada passo da explosão de duas curvas.

Teorema 1.36. *Sejam (f) e (g) curvas planas algebróides irredutíveis com multiplicidades m e n, respectivamente. Sejam $f^{(1)}$ a explosão de f e $g^{(1)}$ a explosão de g, então*

$$I(f^{(1)}, g^{(1)}) = I(f,g) - m \cdot n.$$

Demonstração: Ver [10], Teorema na página 63.

Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.37. *Sejam* $f(X,Y) = Y^3 - X^4$ *e* $g(X,Y) = Y^2 - X^3$. *Então*

- $f^{(1)}(X,Y) = \dfrac{1}{X^3}[X^3Y^3 - X^4] = Y^3 - X$ *e*
- $g^{(1)}(X,Y) = \dfrac{1}{X^2}[X^2Y^2 - X^3] = Y^2 - X$.

Assim, $I(f,g) = I(Y^3 - X, Y^2 - X) + 3 \cdot 2$. *Vamos mostrar que* $I(Y^3 - X, Y^2 - X) = 2$. *Faça* $f^{(1)}(X,Y) = X - Y^3$ *e* $g^{(1)}(X,Y) = X - Y^2$. *Temos daí que:*

- $f^{(2)}(X,Y) = \dfrac{1}{Y}[XY - Y^3] = X - Y^2$ *e*
- $g^{(2)}(X,Y) = \dfrac{1}{Y}[XY - Y^2] = X - Y$.

Logo $I(Y^3 - X, Y^2 - X) = I(X - Y^2, X - Y) + 1$. *Mas*

- $f^{(3)}(X,Y) = \dfrac{1}{Y}[XY - Y^2] = X - Y$ *e*
- $g^{(3)}(X,Y) = \dfrac{1}{Y}[XY - Y] = X - 1$. *Daí* $I(X - Y^2, X - Y) = I(X - Y, X - 1) + 1 = 1$. *Portanto,* $I(Y^3 - X, Y^2 - X) = 2$, *isto é,* $I(f,g) = 8$.

2 Apéry-conjuntos para semigrupos de curvas planas algebróides irredutíveis

Neste capítulo vamos introduzir os Apéry-conjuntos de um semigrupo S com condutor e sua importância na determinação de S. Obteremos que o Apéry-conjunto de S contém mais informações do que um conjunto arbitrário de geradores de S. Além disso, definiremos as Apéry-sequências de um semigrupo e mostraremos suas relações com as explosões deste semigrupo. Conceitos como curvas formalmente equivalentes e semigrupos que crescem fortemente também serão vistos aqui.

2.1 Apéry-conjuntos

Definição 2.1. *Sejam $S \subset \mathbb{N}$ semigrupo com condutor e $p \in S - \{0\}$. O Apéry-conjunto de S em relação a p é o conjunto*

$$\Omega_p := \{\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1}\}$$

onde $\alpha_0 = 0$, ..., $\alpha_j = min(\ S - \bigcup_{i=0}^{j-1}(\alpha_i + p\mathbb{N})\ )$,..., $\alpha_{p-1} = min(\ S - \bigcup_{i=0}^{p-2}(\alpha_i + p\mathbb{N})\ )$.

Definição 2.2. *A Apéry-sequência é a sequência dos elementos do Apéry-conjunto ordenado. Vamos denotar por*

$$a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{p-1}.$$

Se em particular, $p = min(S - \{0\})$ vamos dizer simplesmente que esta é a Apéry-sequência de S.

Exemplo 2.3. *Seja $S = [4, 15]$. Assim, o Apéry-conjunto $\Omega_4 = \{0, 15, 30, 45\}$. Portanto a Apéry-sequência de S é $0, 15, 30, 45$.*

Sejam S um semigrupo, $p \in S - \{0\}$ e $0 < a_1 < a_2 < ... < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de S em relação a p. É conveniente, às vezes, pensar que cada elemento a_i da Apéry-sequência, por definição, sendo o menor elemento de S em sua classe módulo p.

Assim:

(a) $a_i \neq a_j \ mod\ p$ para $i \neq j$;

(b) $S = \bigcup_{j=0}^{p-1}(a_j + p\mathbb{N})$;

(c) o condutor de S é $c = a_{p-1} - p + 1$.

Proposição 2.4. *Seja $S = [m, n]$ onde $m < n$ e m e n são primos entre si. Seja $p = m$ ou $p = n$. Então, neste caso temos as afirmações equivalentes:*

(a) S é gerado por dois elementos;

(b) $a_j = ja_1$ para cada $j = 0, 1, 2, ..., p - 1$;

(c) $S = \bigcup_{i=0}^{p-1} (ia_1 + p\mathbb{N})$.

Demonstração: Vamos mostrar que $(a) \Rightarrow (b)$. Suponha que $p = m$. Assim, $a_1 = min(S - m\mathbb{N}) = n$. Sabemos que os números $0, n, 2n, ..., (m-1)n$ são distintos módulo m e jn é o menor elemento de S em sua classe módulo m, para todo $j = 0, 1, ..., m - 1$. Logo, esta é a Apéry-sequência de S em relação a m. Análogo para $p = n$. $\square$

Podemos verificar a simetria de um semigrupo numérico através de suas Apéry-sequências.

Proposição 2.5. *Sejam S um semigrupo de $\mathbb{N}$ com condutor, $p \in S - \{0\}$ e $a_0 < a_1 < ... < a_{p-1}$ a Apéry-sequência de S em relação a p. Então S é simétrico se, e somente se,*

$$a_i + a_{p-1-i} = a_{p-1}$$

para todo $i = 0, 1, 2, ..., p - 1$.

Demonstração: Sabemos que o condutor de S é dado por $c = a_{p-1} - p + 1$. Da definição S é simétrico se, e somente se, para cada $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\alpha \in S \Longleftrightarrow a_{p-1} - p - \alpha \notin S.$$

$(\Rightarrow)$: Suponha que S é simétrico. Seja $\alpha \in S$. Tome $\alpha = a_i$ para algum $i \in \{1, ..., p - 1\}$. Assim, pela definição $a_{p-1} - p - a_i \notin S$. Assim existe $j_i \in \{0, 1, ..., p - 1\}$ tal que $a_{p-1} - p - a_i = a_{j_i} + t_i p$ para algum $t_i < 0$ inteiro. Nosso objetivo é mostrar que $t_i = -1$. Suponha por contradição que $t_i < -1$. Então

$$c + p - 1 - a_i = a_{p-1} - a_i = a_{j_i} + t_i p + p = a_{j_i} + (t_i + 1)p \notin S.$$

Portanto, $c - 1 - (a_i - p) \notin S$. Como S é simétrico, $(a_i - p) \in S$. Logo,

$$a_{p-1} - p - a_i = a_{p-1} - (a_i - p) - 2p \in S,$$

o que é uma contradição. Portanto, $t = -1$. Assim, $a_{p-1} - p - a_i = a_{j_i} - p$, isto é, $a_{p-1} - a_i = a_{j_i}$ para cada $i = 0, 1, ..., p - 1$. Logo

$$a_{p-1} - a_{j_0} = a_0 < a_1 = a_{p-1} - a_{j_1} < a_{p-1} - a_{j_2} < ... < a_{p-1} - a_{j_{p-1}}.$$

Daí $a_{j_0} > a_{j_1} > ... > a_{j_{p-1}}$. Portanto, $j_i = p - 1 - i$. Logo, $a_{p-1} = a_i + a_{p-1-i}$.

($\Leftarrow$) : Reciprocamente, suponha que $a_i + a_{p-1-i} = a_{p-1}$ para todo $i = 0, 1, 2, ..., p-1$. Seja $\alpha \in \mathbb{Z}$. Podemos escrever $\alpha = a_i + tp$ para algum $t \in \mathbb{Z}$ e algum $i \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Então,

$$\begin{aligned} c - 1 - \alpha &= a_{p-1} - p - a_i - tp = a_{p-1} - a_i - (t+1)p \\ &= a_{p-1-i} - (t+1)p. \end{aligned}$$

Assim, $\alpha \in S \iff a_i + tp \in S \iff t \geq 0 \iff t + 1 > 0 \iff -(t+1) < 0 \iff a_{p-1-i} - (t+1)p \notin S \iff c - 1 - \alpha \notin S$. Portanto, S é simétrico. $\square$

Podemos determinar o Apéry-conjunto Ω_p como o conjunto

$$\{x \in S : x - p \notin S\}.$$

De fato, seja $\Omega_p := \{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$ o Apéry-conjunto de S com relação a p.

- Seja $x \in S$ tal que $x - p \notin S$. Vamos mostrar que $x \in \Omega_p$. Como $S = \bigcup_{i=0}^{p-1}(a_i + p\mathbb{N})$, existem $n \in \{0, 1, ..., p-1\}$ e $\lambda \in \mathbb{N}$ tais que $x = a_n + p\lambda$. Assim,

  $$a_n + p(\lambda - 1) = x - p \notin S.$$

  Logo, $\lambda - 1 < 0$ e assim, $\lambda = 0$. Portanto, $x = a_n \in \Omega_p$.

- Vamos mostrar que $a_i - p \notin S$ para cada $i \in \{0, 1, ..., p-1\}$. Suponha que exista $i \in \{0, 1, ..., p-1\}$ tal que $a_i - p \in S$. Logo existem $j \in \{0, 1, ..., p-1\}$ e $\beta \in \mathbb{N}$ tais que

  $$a_i - p = a_j + p\beta.$$

  Logo,

  $$a_i = a_j + p(\beta + 1).$$

  Observe que se $i = j$ temos $\beta = -1$, absurdo. Caso $i \neq j$, temos que $a_i \equiv a_j \; mod \; p$, o que é absurdo.

O Apéry-conjunto Ω_p contém em geral mais informações do que um conjunto arbitrário de geradores de S semigrupo com condutor. Por exemplo, seja $s \in S$ então existe um único $k \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega_p$ tais que

$$s = kp + \omega.$$

De fato, seja $s \in S$. Se $s \in \Omega_p$ então $s = 0 \cdot p + s$. Se $s \notin \Omega_p$ então $s_1 := s - p \in S$. Claramente existe k tal que $\omega := s - kp \in \Omega_p$. Podemos escrever $s = k \cdot p + \omega$. Suponha que $s = k_1 \cdot p + \omega - 1$ com $k_1 \in \mathbb{N}$, $\omega_1 \in \Omega_p$ com $k \neq k_1$. Assim

$$(k - k_1) \cdot p + (\omega - \omega_1) = 0.$$

Em particular, $\omega \equiv \omega_1 \; mod \; p$. O que é uma contradição. Logo, $k = k_1$.

2.2 $k[[x]]-$bases de $\mathcal{O}_f$ e Apéry-sequências

Existe uma versão para uma $k[[x]]-$base de $\mathcal{O}_f$ onde (f) é uma curva plana algebróide irredutível a partir de $\{1, y, ..., y^{m-1}\}$ que permite obter a Apéry-sequência de $S(f)$.

Teorema 2.6 (Angermüller e Azevedo)**.** *Sejam (f) uma curva plana algebróide irredutível, $\mathcal{O}_f = k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus ... \oplus k[[x]]y^{m-1}$ o seu anel local, $m = v(x)$ e*

$$0 = a_0 < a_1 < ... < a_{m-1}$$

a Apéry-sequência de $S(f)$ em relação a m. Considere a cadeia de submódulos de $\mathcal{O}_f$

$$M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_{m-1}$$

definida por

$$M_i := k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus ... \oplus k[[x]]y^i.$$

Assim

(a) para cada $i = 1, ..., m-1$ existe $z_i \in y^i + M_{i-1}$ tal que $v(z_i) \notin v(M_{i-1})$;

(b) definindo $z_0 = 1$ temos que

$$\mathcal{O}_f = k[[x]]z_0 \oplus k[[x]]z_1 \oplus ... \oplus k[[x]]z_{m-1};$$

(c) $v(z_i) + v(z_{j-i}) \leq v(z_j)$ para todo i, j tais que $0 \leq i \leq j \leq m-1$. Em particular,

$$0 = v(z_0) < v(z_1) < ... < v(z_{m-1});$$

(d) $v(z_i) = a_i$, isto é, $v(z_0) < v(z_1) < ... < v(z_{m-1})$ é a Apéry-sequência de $S(f)$ em relação a m.

Demonstração:(a) Suponha por contradição que para algum $i \in \{1, ..., m-1\}$ e todo $\alpha \in y^i + M_{i-1}$ tem-se $v(\alpha) \in v(M_{i-1})$. Nosso objetivo é construir uma sequência x_n em M_{i-1} tal que $v(y^i - x_n) \geq n$. Seja $x_0 = 0$, então $x_0 \in M_{i-1}$. Suponha que exista $x_n \in M_{i-1}$ tal que $v(y^i - x_n) \geq n$. Como $y^i - x_n \in M_{i-1}$ então temos $v(y^i - x_n) \in v(M_{i-1})$. Logo existe $\tilde{x}_n \in M_{i-1}$ tal que

$$v(y^i - x_n) = v(\tilde{x}_n) \geq n.$$

Seja $s_n := v(\tilde{x}_n)$. Assim, $s_n \geq n$. Escrevendo

$$y^i - x_n = c_n t^{s_n} + c_{n+1} t^{s_n+1} + ...$$

e

$$\tilde{x}_n = d_n t^{s_n} + d_{n+1} t^{s_n+1} + ...$$

com $c_r, d_r \in k$ para todo $r \geq n$, $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

Temos

$$y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n}\tilde{x}_n = \Big(c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n}d_{n+1}\Big)t^{s_n+1} + ...$$

Logo

$$v\Big(y^i - x_n - \frac{c_n}{d_n}\tilde{x}_n\Big) = v\Big(\Big(c_{n+1} - \frac{c_n}{d_n}d_{n+1}\Big)t^{s_n+1} + ...\Big) \geq s_n + 1 \geq n + 1.$$

Seja $x_{n+1} := x_n + \dfrac{c_n}{d_n} \cdot \tilde{x}_n$. Note que

$$|x_{n+1} - y^i|_v = 2^{-v(x_{n+1}-y^i)} \leq 2^{-(n+1)}.$$

Logo x_n converge a y^i na norma induzida pela valorização. Como $x_n \in M_{i-1}$ e M_{i-1} é completo, segue que $y^i \in M_{i-1}$. Isto contradiz o fato de que M_{i-1} só contém potências de y de 1 a $i-1$. Assim, concluímos a demonstração do item (a).

(b) Vamos mostrar que

$$M_i = k[[x]]z_0 \oplus ... \oplus k[[x]]z_i.$$

por indução em i. Para $i = 0$ o resultado é óbvio, tomando $z_0 = 1$. Pelo item (a) temos que $z_i \in y^i + M_{i-1}$ então existe $m_{i-1} \in M_{i-1}$ tal que $z^i = y^i + m_{i-1}$. Suponha por indução que exista $i > 0$ tal que

$$M_{i-1} = k[[x]]z_0 \oplus ... \oplus k[[x]]z_{i-1}.$$

Assim, por hipótese

$$M_i = M_{i-1} \oplus k[[x]]y^i.$$

Logo

$$M_i = k[[x]]z_0 \oplus ... \oplus k[[x]]z_{i-1} \oplus k[[x]](z_i - m_{i-1}) = k[[x]]z_0 \oplus ... \oplus k[[x]]z_{i-1} \oplus k[[x]]z_i.$$

(c) Pelo item (a), existem $\xi_1, ..., \xi_s \in M_{i-1}$ tais que $z_i = y^i + \xi_i$. Assim $z_i \cdot z_{j-i} = \xi + z_j$ onde $\xi = z_i \cdot z_{j-i} - z_j$. Assim, $v(\xi) \geq min\{v(z_i \cdot z_{j-i}), v(z_j)\}$. Logo temos dois casos:

- Se $min\{v(z_i \cdot z_{j-i}), v(z_j)\} = v(z_i \cdot z_{j-i})$ então

$$v(z_i z_{j-i}) = v(z_i) + v(z_{j-i}) \leq v(z_j).$$

- Se $min\{v(z_i \cdot z_{j-i}), v(z_j)\} = v(z_j)$ então $v(z_j) \leq v(z_i \cdot z_{j-i})$ e $v(\xi) \geq v(z_j)$. Vamos mostrar que $v(\xi) \neq v(z_j)$, assim, teremos $v(z_j) = v(z_i \cdot z_{j-i})$. Pelo item (a) temos $z_j \in y^j + M_{j-1}$ e $v(z_j) \notin v(M_{j-1})$ mas $\xi \in M_{j-1}$, assim $v(\xi) \neq v(z_j)$. Portanto

$$v(z_i \cdot z_{j-i}) = v(z_i) + v(z_{j-i}) = v(z_j).$$

Isto prova o item (c).

(d) Vamos mostrar primeiramente que $v(z_i)$ não é congruente a $v(z_j)$ mod m se $i \neq j$. Suponha por contradição que sejam congruentes para algum $i < j$. Assim, existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que $v(z_j) = v(z_i) + \lambda m$. Pelo item (c), $\lambda \geq 0$. Assim

$$v(z_j) = v(z_i) + \lambda v(x) = v(z_i) + v(x^\lambda) = v(z_i \cdot x^\lambda) \in v(M_{j-1}).$$

O que contradiz o fato de $v(z_j) \notin v(M_{j-1})$.

Agora vamos mostrar que

$$v(\mathcal{O}_f - \{0\}) = \bigcup_{j=0}^{m-1} (v(z_j) + m\mathbb{N}).$$

A primeira inclusão já temos $\bigcup_{j=0}^{m-1} (v(z_j) + m\mathbb{N}) \subset v(\mathcal{O}_f - \{0\})$. A segunda inclusão, segue do fato que se $n \in v(\mathcal{O}_f - \{0\})$ então existem $a_i(x) \in k[[x]]$ tais que

$$\begin{aligned} n &= v(a_0(x) + a_1(x)z_1 + \cdots + a_{m-1}(x)z_{m-1}) \\ &\geq min\{v(a_i(x)) + v(z_i)\}. \end{aligned}$$

Daí como $v(a_i(x))+v(z_i)$ são distintos para $i = 0, 1, ..., m-1$ então $n = min_{0 \leq i \leq m-1}\{v(a_i(x))+ v(z_i)\}$. Logo $n \in v(z_j + m\mathbb{N})$ para algum $j \in \{0, 1, ..., m-1\}$.

Portanto, $0 < v(z_1) < v(z_2) < ... < v(z_{m-1})$ é a Apéry-sequência de $S(f)$ em relação a m. $\square$

Teorema 2.7 (Apéry)**.** *Sejam (f) uma curva plana algebróide irredutível de multiplicidade m,*

$$a_0 < a_1 < ... < a_{m-1}$$

a Apéry-sequência do semigrupo $S = S(f)$ e

$$a_0^{(1)} < a_1^{(1)} < ... < a_{m-1}^{(1)}$$

a Apéry-sequência do semigrupo $S^{(1)} = S(f^1)$ em relação a m (Note que m pode não ser a multiplicidade de $f^{(1)}$). Então

$$a_i^{(1)} = a_i - im \text{ para todo } i \in \{0, 1, ..., m-1\}.$$

Demonstração: Ver [14], Teorema 7, página 43.

Corolário 2.8. *Sejam (f) uma curva plana algebróide irredutível de multiplicidade m, $S = S(f)$ o semigrupo associado com condutor c e $S^{(1)} = S(f^{(1)})$ com condutor $c^{(1)}$. Então*

$$c^{(1)} = c - m(m-1).$$

Demonstração: Pela definição

$$\begin{aligned} c^{(1)} &= a_{m-1}^{(1)} - m + 1 \\ &= a_{m-1} - (m-1)m - m + 1 \\ &= (a_{m-1} - m + 1) - m(m-1) \\ &= c - m(m-1). \square \end{aligned}$$

Corolário 2.9. *Seja (f) uma curva plana algebróide irredutível. Então o semigrupo $S(f)$ é simétrico.*

Nem todo semigrupo simétrico é um semigrupo associado a uma cuva plana algebróide irredutível. Seja $S = [4, 5, 6]$. Temos que S é simétrico e a Apéry-sequência com relação a 4 é $0 < 5 < 6 < 11$. Se S fosse um semigrupo associado a uma cuva plana algebróide irredutível, então o Apéry-conjunto de sua explosão seria $\{0, 1 = 5 - 4, -2 = 6 - 8, -1 = 11 - 12\}$, o que é obviamente impossível.

Podemos caracterizar todos semigrupos de $\mathbb{N}$ que são associados a curvas planas algebróides irredutíveis. Dizemos que um semigrupo G cresce fortemente se sua Apéry-sequência $a_0 < a_1 < ... < a_{m-1}$ em relação a $m = min(G - \{0\})$ satisfaz:

$$a_i + a_j \leq a_{i+j}$$

sempre que $0 \leq i, j, i + j \leq m - 1$.

Azevedo provou que quando (f) é uma curva plana algebróide irredutível, então $S(f)$ cresce fortemente, no caso de um corpo de característica positiva. Argermüller generalizou este resultado para corpos com característica qualquer. Tais detalhes podem ser encontrados em [1].

A recíproca deste resultado foi provada também por Angermüller. Portanto, um semigrupo de $\mathbb{N}$ é associado a uma curva plana algebróide irredutível se, e somente se, sua Apéry-sequência cresce fortemente.

2.2.1 O menor sistema de geradores e explosão

Vamos definir um sistema de geradores que sempre está contido em qualquer sistema de geradores de um semigrupo.

Seja G um semigrupo de $\mathbb{N}$ com condutor. O menor sistema de geradores de G é a sequência de elementos

$$v_0 < v_1 < ... < v_r$$

tais que $v_0 := min(G - \{0\})$ e

$$v_j := min(G - \sum_{i=0}^{j-1} \mathbb{N} v_i)$$

para $1 \leq j \leq r$.

Se $a_0 < a_1 < ... < a_{m-1}$ é a Apéry-sequência de um semigrupo G em relação a $m := min(G - \{0\})$ então $v_0 = m$, $v_1 = a_1$ e para $j \geq 2$ temos

$$v_j = a_{\lambda_j}$$

para algum $\lambda_j \geq 2$, isto é, a Apéry-sequência de G determina os menores geradores de G.

Proposição 2.10 (Angermüller)**.** *Seja S um semigrupo associado a uma curva plana algebróide irredutível (f) gerado minimamente por $v_0 < v_1 < ... < v_r$ e $S^{(1)}$ sua explosão. Seja*

$$v'_j := v_j - n_0 n_1 ... n_{j-1} v_0$$

onde para cada $j \in \{1, ..., r\}$ tem-se $n_j := \dfrac{MDC(v_0, v_1, ..., v_{j-1})}{MDC(v_0, v_1, ..., v_j)}$ e $n_0 := 1$. Então o menor sistema de geradores de $S^{(1)}$ é

(a) $v_0 < v'_1 < ... < v'_r$ se $v_0 < v'_1$;

(b) $v'_1 < v_0 < v'_2 < ... < v'_r$ se $v_0 > v'_1$ e $v'_1 \nmid v_0$;

(c) $v'_1 < v'_2 < ... < v'_r$ se $v_0 > v'_1$ e $v'_1 \mid v_0$.

Demonstração: Ver [1], Lema II.2.1, Corolário I.3.3.

2.2.2 Sequências de multiplicidades

Seja (f) uma curva plana algebróide irredutível.

Definição 2.11. *Definimos a multiplicidade $m(\mathcal{O})$ de $\mathcal{O}_f$ como sendo o menor valor não nulo em $S(f)$.*

Definição 2.12. *Seja $\mathcal{O}_f, \mathcal{O}_f^{(1)}, \mathcal{O}_f^{(2)}, ...$ uma sequência de consecutivas explosões de $\mathcal{O}_f$ e $m_0, m_1, ...$ suas respectivas multiplicidades. A sequência*

$$m_0, m_1, m_2, ...$$

é chamada sequência de multiplicidades de $\mathcal{O}_f$.

Vamos dar um exemplo em que a sequência de multiplicidades determina a sequência de explosões ou respectiva sequência de semigrupos.

Exemplo 2.13. *Seja $S = [4, 6, 13]$. Então a multiplicidade de $\mathcal{O}$ é $m(\mathcal{O}) = 4$. O Apéry-conjunto de S é $\Omega_4 = \{0, 6, 13, 19\}$. Note que S cresce fortemente. Pelo teorema de Apéry, o Apéry-conjunto de $S^{(1)}$ com relação a 4 é $\{0, 2, 5, 7\}$, logo $S^{(1)} = [2, 5]$ e $m(\mathcal{O}^{(1)}) = 2$.*

Assim o Apéry-conjunto de $S^{(2)}$ com relação a 2 é $\{0,3\}$, logo $S^{(2)} = [2,3]$ e $m(\mathcal{O}^{(2)}) = 2$. Novamente, pelo teorema de Apéry o Apéry-conjunto de $S^{(3)}$ com relação a 2 é $\{0,1\}$, logo $S^{(3)} = \mathbb{N}$ e $m(\mathcal{O}^{(3)}) = 1$. Portanto, obtemos uma sequência de multiplicidades

$$4, 2, 2, 1, ...$$

Agora podemos fazer o processo inverso, começando da sequência de multiplicidades $4, 2, 2, 1, ...$ para obter a sequência de explosões. Temos que $m(\mathcal{O}^{(3)}) = 1$, então $S^{(3)} = \mathbb{N}$. Como $m(\mathcal{O}^{(2)}) = 2$, determinamos o Apéry-conjunto de $\mathbb{N}$ com relação a 2 que é $\{0,1\}$. Logo $S^{(2)} = [2,3]$. Como $m(\mathcal{O}^{(1)}) = 2$, obtemos que o Apéry-conjunto de $S^{(1)}$ com relação a 2 é $\{0,5\}$. Assim, $S^{(1)} = [2,5]$. E por fim, como $m(\mathcal{O}) = 4$, o Apéry-conjunto de $S^{(1)}$ com relação a 4 é $\{0,2,5,7\}$. Então o Apéry-conjunto de S com relação a 4 é $\{0,6,13,19\}$ e obtemos

$$S = [4,6,13,19] = [4,6,13].$$

3 O semigrupo de curvas planas algebróides com dois ramos

Motivados pela construção de um semigrupo associado a uma curva plana algebróide irredutível, vamos construir com a mesma ideia para o caso de uma curva redutível, em especial no caso de dois ramos. Podemos determinar tal semigrupo através de suas projeções e do índice de interseção dos ramos. Em sua tese, Garcia [10] determinou fórmulas explícitas para o semigrupo associado a uma curva plana algebróide com dois ramos no caso em que os ramos tem tangentes distintas. Os demais casos foram abordados por Bayer [6] em sua tese. Para fórmulas explícitas de determinação dos pontos maximais ver resultados em [6]. Alguns cálculos aqui exibidos foram realizados em rotina implementada no software Maple.

Sejam (f) uma curva plana algebróide com dois ramos f_1 e f_2 não associados e $I := I(f_1, f_2)$ o índice de interseção entre as curvas (f_1) e (f_2).

Definição 3.1. *O semigrupo associado a f é o conjunto*

$$S(f) := \{(I(f_1, h), I(f_2, h)) \in \mathbb{N}^2 : \ h \in k[[X, Y]] - < f_1 > \cup < f_2 >\}.$$

Sejam $S_1 := S(f_1)$ e $S_2 := S(f_2)$ os semigrupos associados a f_1 e f_2, respectivamente. Podemos verificar que $\pi_1(S(f)) = S_1$ e $\pi_2(S(f)) = S_2$, isto é, as projeções em relação à primeira e à segunda coordenada. Podemos relacionar o semigrupo $S = S(f)$ com S_1, S_2 e $I(f_1, f_2)$, o que será feito aqui.

Podemos transladar $S_1 \times S_2$ de tal forma que esteja contido em S. Observe o lema a seguir.

Lema 3.2. *Para todo $(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ temos $(I + x_1, I + x_2) \in S$, isto é,*

$$(I, I) + S_1 \times S_2 \subset S.$$

Demonstração: Seja $(x_1, x_2) \in S_1 \times S_2$ então existem $h_1, h_2 \in k[[X, Y]]$ tais que $I(f_1, h_1) = x_1$ e $I(f_2, h_2) = x_2$. Seja $h := f_1 h_2 + f_2 h_1$. Assim,

$$\begin{aligned} I(f_1, h) &= I(f_1, f_1 h_2 + f_2 h_1) = I(f_1, f_2 h_1) = I(f_1, f_2) + I(f_1, h_1) = I + x_1 \ e \\ I(f_2, h) &= I(f_2, f_1 h_2 + f_2 h_1) = I(f_2, f_1 h_2) = I(f_2, f_1) + I(f_2, h_2) = I + x_2. \end{aligned}$$

Então $(I + x_1, I + x_2) = (I(f_1, h), I(f_2, h)) \in S$.$\square$

Vamos denotar por $\mathcal{O}_i$ o anel local do ramo (f_i) para cada $i = 1, 2$.

Além disso, denotamos $\overline{h}$ a classe residual em $\mathcal{O}_1$ e $\overline{\overline{h}}$ a classe residual em $\mathcal{O}_2$, onde $h \in k[[X,Y]] - < f >$.

Sejam c_1 o condutor de S_1 e c_2 o condutor de S_2.

Teorema 3.3. *Seja $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $P := (I + x_1, I + x_2) \in \mathbb{N}^2$. Assim:*

(a) se $x_1 \geq c_1$, então $P \in S$ se, e somente se, $x_2 \in S_2$;

(b) se $x_2 \geq c_2$, então $P \in S$ se, e somente se, $x_1 \in S_1$.

Demonstração: Vamos provar o item (a), o item (b) segue de forma análoga.
$(\Leftarrow)$: Por hipótese temos $x_2 \in S_2$. Vamos mostrar que $P := (I + x_1, I + x_2) \in S$. Temos que $x_1 \in S_1$, já que $x_1 \geq c_1$. Assim, pelo lema 3.2, temos $(I + x_1, I + x_2) \in S$.

$(\Rightarrow)$: Suponha que $P := (I + x_1, I + x_2) \in S$. Sejam v_1 e v_2 as valorizações de $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$, respectivamente. Então existe $g \in k[[X,Y]]$ tal que $v_1(\overline{g}) = I(f_1, g) = I + x_1$ e $v_2(\overline{\overline{g}}) = I(f_2, g) = I + x_2$. Assim em K_1 temos que

$$v_1\left(\frac{\overline{g}}{\overline{f}_2}\right) = v_1(\overline{g}) - v_1(\overline{f}_2) = I + x_1 - I = x_1 \geq c_1.$$

Logo, $\dfrac{\overline{g}}{\overline{f}_2} \in \mathcal{O}_1$ e existe $\overline{h} \in \mathcal{O}_1$ tal que $\overline{g} = \overline{f}_2\overline{h}$. Portanto, existe $s \in k[[X,Y]]$ tal que $g = f_2 h + f_1 s$. Assim

$$\begin{aligned} I + x_2 &= v_2(\overline{\overline{g}}) = v_2(\overline{\overline{f_2 h + f_1 s}}) = v_2(\overline{\overline{f_1}} \cdot \overline{\overline{s}}) \\ &= I(f_2, f_1) + I(f_2, s) = I + I(f_2, s). \end{aligned}$$

Então, $x_2 = I(f_2, s) \in S_2$. $\square$

O efeito desse teorema é determinar o semigrupo fora do retângulo limitado pelos eixos coordenados e pelas retas $x = I + c_1$ e $y = I + c_2$, pelos semigrupos projeções S_1 e S_2 e por I.

Corolário 3.4. *Sejam $(I + x_1, y_2), (y_1, I + x_2) \in \mathbb{N}^2$. Assim:*

(a) se $y_2 < I$ e $x_1 \geq c_1$, então $(I + x_1, y_2) \notin S$;

(b) se $y_1 < I$ e $x_2 \geq c_2$, então $(y_1, I + x_2) \notin S$.

Demonstração:

(a) Se $(I + x_1, I + y_2 - I) = (I + x_1, y_2) \in S$ e $x_1 \geq c_1$, temos pelo teorema 3.3 que $y_2 - I \in S_2$, mas $y_2 - I < 0$, portanto temos um absurdo.

(b) Análogo ao (a). $\square$

A fibra vertical em S, com abscissa x_0, é o conjunto

$$FV(x_0) := \{(x_0, y) \in \mathbb{N}^2 : (x_0, y) \in S\}.$$

Analogamente, a fibra horizontal em S, com ordenada y_0, é o conjunto

$$FH(y_0) := \{(x, y_0) \in \mathbb{N}^2 : (x, y_0) \in S\}.$$

Proposição 3.5. *Temos que:*

(a) $FV(x) = \emptyset$ *(respectivamente* $FH(y) = \emptyset$*)* $\Longleftrightarrow x \notin S_1$ *(respectivamente,* $y \notin S_2$*).*

(b) $FV(x)$ *é infinito (respectivamente* $FH(y)$ *é infinito)* $\Longleftrightarrow x - I \in S_1$ *(respectivamente* $y - I \in S_2$*).*

Demonstração:

(a) $(\Rightarrow)$: Suponha $FV(x) = \emptyset$. Segue da definição que $\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : (x, y) \in S\} = \emptyset$, logo $x \notin S_1$.

$(\Leftarrow)$: Se $x \notin S_1$ então segue da definição que $FV(x) = \emptyset$.

(b) $(\Rightarrow)$: Suponha que $FV(x)$ é infinito, logo segue que dado $I + c_2$, existe $x_2 \geq c_2$ tal que $(x, I + x_2) \in S$. Logo, $(I + (x - I), I + x_2) = (x, I + x_2) \in S$. Pelo teorema 3.3, $x - I \in S_1$.

$(\Leftarrow)$: Suponha que $x - I \in S_1$, então pelo lema 3.2, temos

$$(x, I + x_2) = (I + (x - I), I + x_2) \in S, \ \forall x_2 \geq c_2.$$

Portanto, concluímos que $FV(x)$ é infinito. $\square$

Corolário 3.6. *Temos que:*

(a) $FV(x)$ *é finito e não vazio se, e somente se,* $x \in S_1$ *e* $x - I \notin S_1$*.*

(b) $FH(y)$ *é finito e não vazio se, e somente se,* $y \in S_2$ *e* $y - I \notin S_2$*.*

3.1 Pontos Maximais

Vamos classificar pontos especiais de S para uma forma de determinação do semigrupo S.

A definição de tais pontos vem da motivação geométrica primeiramente das fibras. Um ponto $(x, y) \in S$ onde $FV(x)$ é finito e não vazio, e y é máximo, é dito ponto

maximal de $FV(x)$. Similarmente, um ponto $(x, y) \in S$ onde $FH(y)$ é finito e não vazio, e x é máximo, é dito ponto maximal de $FH(y)$.

As proposições 3.7 e 3.9 a seguir são propriedades importantes do semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos.

Proposição 3.7. *Se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S$ com $x_1 < x_2$ e $y_2 < y_1$, então $(x_1, y_2) \in S$.*

Demonstração: Por hipótese, existem $h_1, h_2 \in k[[X, Y]]$ tais que

$$\begin{aligned} v_1(\overline{h_1}) &= I(f_1, h_1) = x_1 \text{ e } v_2(\overline{\overline{h_1}}) = I(f_2, h_1) = y_1 \\ v_1(\overline{h_2}) &= I(f_1, h_2) = x_2 \text{ e } v_2(\overline{\overline{h_2}}) = I(f_2, h_2) = y_2. \end{aligned}$$

Como $x_1 < x_2$ temos que

$$v_1(\overline{h_1 + h_2}) = min\{v_1(\overline{h_1}), v_1(\overline{h_2})\} = x_1.$$

Note também que $y_2 < y_1$ logo

$$v_2(\overline{\overline{h_1 + h_2}}) = min\{v_2(\overline{\overline{h_1}}), v_2(\overline{\overline{h_2}})\} = y_2.$$

Seja $h := h_1 + h_2$. Assim temos

$$(x_1, y_2) = (v_1(\overline{h}), v_2(\overline{\overline{h}}) = (I(f_1, h), I(f_2, h)) \in S. \square$$

Fazemos uma observação que será usada ao longo do texto.

Observação 3.8. *Dados $f, g, h \in k[[X, Y]]$ onde $I(f, g) = I(f, h)$. Então existe $\alpha \in k - \{0\}$ tal que*

$$I(f, g + \alpha h) > I(f, g) = I(f, h).$$

Proposição 3.9. *Seja $(x, y) \in S$. Existe $y' > y$ tal que $(x, y') \in S$ se, e somente se, existe $x' > x$ tal que $(x', y) \in S$.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$: Suponha que $(x', y) \in S$ com $x' > x$. Então, existe $g \in k[[X, Y]]$ tal que

$$v_1(\overline{g}) = I(f_1, g) = x' \text{ e } v_2(\overline{\overline{g}}) = I(f_2, g) = y.$$

Pela observação 3.8, existe $\alpha \in k - \{0\}$ tal que $I(f_2, g + \alpha h) > y$, onde h satisfaz $(x, y) = (I(f_1, h), I(f_2, h))$. Note que

$$\begin{aligned} I(f_1, g + \alpha h) = v_1(\overline{g + \alpha h}) &= min\{v_1(\overline{g}), v_1(\overline{\alpha h})\} \\ &= min\{v_1(\overline{g}), v_1(\overline{h}) \\ &= min\{x', x\} \\ &= x. \end{aligned}$$

Seja $y' := I(f_2, g + \alpha h)$. Assim, temos que $(x, y') \in S$, com $y' > y$.

$(\Rightarrow)$: Segue análogo. $\square$

Corolário 3.10. *Um ponto $(x, y) \in S$ é ponto maximal de $FV(x)$ se, e somente se, ele é ponto maximal de $FH(y)$.*

Portanto, podemos definir pontos maximais de S motivados por este corolário. Os pontos maximais de $FV(x)$ e consequentemente, os de $FH(y)$, são ditos os pontos maximais de S.

Exemplo 3.11. *O ponto $(0, 0)$ é ponto maximal de S. Note que se $h \in k[[X, Y]]$ é tal que $I(f_1, h) = 0$, então h é invertível e, assim, $I(f_2, h) = 0$. Suponha que $(f_1), (f_2)$ possuem a mesma tangente. Se $m(f_i)$ a multiplicidade de f_i, então $(m(f_1), m(f_2))$ é ponto maximal de $S(f)$.*

Note que se temos $I(f_1, h) = m(f_1)$ para algum h, então (h) tem multiplicidade 1, isto é, (h) é regular. Além disso, (h) tem tangente distinta da tangente de (f_1), logo também distinta da tangente de (f_2). Logo, $I(f_2, h) = m(f_2)$.

Os pontos maximais de S possuem abscissa no Apéry-conjunto de S_1 com relação a I e ordenada no Apéry-conjunto de S_2 com relação a I. Logo, os pontos maximais de S estão localizados em

$$[0, I + c_1 - 1] \times [0, I + c_2 - 1].$$

Disto decorre que o número de pontos maximais de S é igual a I, pois é igual ao número de elementos do Apéry-conjunto com relação a I. Além disso, se $P_i = (x_i, y_i)$ onde $i = 1, ..., I$ é um ponto maximal de S, então $\{x_1, ..., x_I\}$ é o Apéry-conjunto de S_1 com relação a I e $\{y_1, ..., y_I\}$ é o Apéry-conjunto de S_2 com relação a I.

Teorema 3.12.

$$\begin{aligned} S = \{(x, y) \in S_1 \times S_2 : \quad & y \leq y' \quad \textit{se } (x, y') \textit{ é ponto maximal de } S \textit{ e} \\ & x \leq x' \quad \textit{se } (x', y) \textit{ é ponto maximal de } S\}. \end{aligned}$$

Demonstração: $(\subset)$: Imediata.

$(\supset)$: Seja $(x, y) \in S_1 \times S_2$ tal que $y \leq y'$ se (x, y') é ponto maximal de S e $x \leq x'$ se (x', y) é ponto maximal de S.

- Se (x, y) é ponto maximal de S, não há o que provar.
- Se (x, y) não for ponto maximal de S, pela proposição 3.5, temos que $FV(x)$ e $FH(y)$ são não vazios.

1º Caso: As fibras $FV(x)$ e $FH(y)$ são infinitas.
Temos que existem $(x, y') \in FV(x)$ e $(x', y) \in FH(y)$ com $y' > y$ e $x' > x$. Pela proposição 3.5, item (a), tem-se $(x, y) \in S$.

2º Caso: A fibra $FV(x)$ é finita e $FH(y)$ é infinita (ou vice-versa).
Seja (x, y') o ponto maximal de $FV(x)$, mas como (x, y) não é ponto maximal de S e $y' \geq y$, então $y < y'$. Note que, como $FH(y)$ é infinito, existe $x' > x$ tal que $(x', y) \in FH(y)$. Assim, pela proposição 3.5, item (a), $(x, y) \in S$.

3º Caso: As fibras $FV(x)$ e $FH(y)$ são finitas.
Sejam (x, y') o ponto maximal de $FV(x)$ e (x', y) o ponto maximal de $FH(y)$. Como neste caso (x, y) não é ponto maximal de S, temos $y < y'$ e $x < x'$. Portanto, pela proposição 3.5, novamente usando o item (a), temos $(x, y) \in S$. $\square$

Definiremos um conjunto bastante conveniente quando se trata de pontos maximais de S.

Definição 3.13. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Sejam os conjuntos*

$$\Delta_1(\alpha) := \{(n, \alpha_2) : n > \alpha_1\} \text{ e } \Delta_2(\alpha) := \{(\alpha_1, m) : m > \alpha_2\}.$$

Também definimos $\Delta(\alpha) := \Delta_1(\alpha) \cup \Delta_2(\alpha)$. Se $S \subset \mathbb{N}^2$ é um semigrupo, definimos $\Delta^S(\alpha) := \Delta(\alpha) \cap S$.

Assim:

$$S = S_1 \times S_2 - \bigcup_{(x,y) \in M_S} \Delta^{S_1 \times S_2}(x, y)$$

onde M_S é o conjunto dos pontos maximais de S.

3.2 Simetria dos pontos maximais

Existe uma simetria entre os pontos maximais do semigrupo S de uma curva plana algebróide com dois ramos a qual abordaremos aqui.

Lema 3.14. *Seja $y \in \mathbb{N}$ tal que $y < I + c_2 - 1$. Então, se $y - I \notin S_2$ temos $(I + c_1 - 1, y) \notin S$.*

Demonstração: Suponha que exista $y \in \mathbb{N}$ tal que $y < I + c_2 - 1$ mas $y - I \notin S_2$ e $(I + c_1 - 1, y) \in S$. Seja

$$y_1 := I + c_2 - 1 - y = c_2 - 1 - (y - I).$$

Assim, y_1 não negativo, já que $y < I + c_2 - 1$. Como S_2 é simétrico e $y - I \notin S_2$, então $y_1 \in S_2$. Logo, existe $h \in k[[X, Y]]$ tal que $y_1 = I(f_2, h)$. Seja $x_1 := I(f_1, h) \geq 0$, temos assim que $(x_1, y_1) \in S$. Logo

$$(I + c_1 - 1, y) + (x_1, y_1) = (I + c_1 - 1 + x_1, I + c_2 - 1) \in S.$$

Mas como $c_1 - 1 + x_1 \geq c_1$, segue do teorema 3.3, item (a), que $c_2 - 1 \in S_2$. Logo, temos uma contradição. $\square$

Exibimos um ponto maximal e especial de S.

Proposição 3.15. *O ponto* $Q := (I + c_1 - 1, I + c_2 - 1)$ *é maximal de* S.

Demonstração: Temos que $I + c_1 - 1 \in S_1$ e $I + c_1 - 1 - I = c_1 - 1 \notin S_1$. Logo pelo corolário 3.6, $FV(I + c_1 - 1)$ é finito e não vazio.

Seja $(I + c_1 - 1, y')$ o ponto maximal de $FV(I + c_1 - 1)$. Assim, sabemos que y' pertence a Apéry-sequência de S_2 com relação a I. Logo, $y' \leq I + c_2 - 1$. Observe que se y' pertence à Apéry-sequência de S_2 com relação a I e $y' < I + c_2 - 2$, então $(I + c_1 - 1, y) \notin S$. Portanto, $y' = I + c_2 - 1$. □

Seja $P = (x, y) \in \mathbb{N}^2$. O ponto

$$P_s := (x_s, y_s) = (I + c_1 - 1 - x, I + c_2 - 1 - y)$$

é dito o ponto simétrico de P. Observe que $P + P_s = Q$, $Q_s = (0, 0)$ e $(P_s)_s = P$.

Lema 3.16. *Sejam* $x, y \in \mathbb{N}$. *Então:*

(a) $FV(x)$ *é finito e não vazio se, e somente se,* $FV(x_s)$ *é finito e não vazio.*

(b) $FH(y)$ *é finito e não vazio se, e somente se,* $FH(y_s)$ *é finito e não vazio.*

Demonstração:

(a) $(\Rightarrow)$: Seja $x \in \mathbb{N}$. Suponha que $FV(x)$ é finito e não vazio. Pelo corolário 3.6, temos que $x \in S_1$ e $x - I \notin S_1$. Mas como S_1 é simétrico, então $x_s \in S_1$ e $x_s - I \notin S_1$. Pelo corolário 3.6, $FV(x_s)$ é finito e não vazio.

$(\Leftarrow)$: Pela implicação anterior, basta usar o fato que $(x_s)_s = x$.

(b) Segue de maneira análoga. □

Lema 3.17. *Se* $P, P_s \in S$, *então* P_s *é ponto maximal de* S.

Demonstração: Seja $P \in S$. Vamos mostrar que P_s é ponto maximal de S. Suponha que exista $P' := (x_s, y') \in S$ com $y' > y_s$. Assim

$$P + P' = (x, y) + (x_s, y') = (I + c_1 - 1, y + y') \in S$$

e $y + y' > y + y_s = I + c_2 - 1$. Mas pela proposição 3.15, sabemos que Q é ponto maximal de S. Logo, $P + P' \in S$ é um absurdo. □

Corolário 3.18. *Se* $P, P_s \in S$, *então* P *e* P_s *são pontos maximais de* S.

Podemos verificar em [10] que há uma simetria dos pontos maximais: um ponto P é ponto maximal de S se, e somente se, P_s é ponto maximal de S.

Podemos estender a ideia de simetria para semigrupo de $\mathbb{N}^2$. Um semigrupo $S \subset \mathbb{N}^2$ é dito simétrico se,

$$\textit{para todo } P \in \mathbb{Z}^2, P \in S \Longleftrightarrow \Delta^S(P_s) = \emptyset.$$

Delgado deduziu a propriedade de simetria de $S(f)$, onde (f) é uma curva plana algebróide com dois ramos f_1 e f_2, este resultado pode ser encontrado em [15]. Isto generaliza a propriedade obtida de um semigrupo associado a uma curva plana algebróide irredutível.

3.3 Pontos maximais irredutíveis

Seja S um semigrupo associado a uma curva plana algebróide (f) com dois ramos, f_1 e f_2. Podemos determinar um conjunto de pontos especiais que determinam todos os pontos maximais de S. Este conceito será definido aqui.

Definição 3.19. *Um ponto $P \in S$ é irredutível se $P = P_1 + P_2$, com $P_1, P_2 \in S$ tem-se $P = P_1$ ou $P = P_2$.*

Observamos que $(0,0) \in S$ é sempre um ponto irredutível de um semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos.

Dado $h \in k[[X,Y]]$ com $P := (I(f_1,h), I(f_2,h))$ irredutível, tem-se h irredutível em $k[[X,Y]]$.

De fato, se h for não irredutível, então existem $h_1, h_2 \in k[[X,Y]]$ não invertíveis tais que $h = h_1 \cdot h_2$. Assim, basta definir $P_i := (I(f_1,h_i), I(f_2,h_i))$ para $i = 1,2$, então temos $P = P_1 + P_2$. Logo P não é irredutível.

Proposição 3.20. *Os pontos de S são gerados pelos pontos irredutíveis em S.*

Demonstração: Seja $P \in S$. Vamos mostrar que P é gerado por pontos irredutíveis em S. Se P for irredutível, não há o que provar.

Suponha que P não seja irredutível. Logo existem $P_1, P_2 \in S$ tais que sejam distintos de P e $P = P_1 + P_2$. Se P_1 e P_2 são irredutíveis, acabou. Se caso P_1 ou P_2 seja irredutível, repetimos o processo anterior. O processo termina após um número finito de iterações, já que em cada etapa obtemos pontos de coordenadas positivas que vão decrescendo em relação à etapa anterior. □

Proposição 3.21. *Seja $P \in S$ ponto maximal tal que $P = P_1 + P_2$. Então P_1 e P_2 são pontos maximais também.*

Demonstração: Seja $P_i := (x_i, y_i)$ para $i = 1, 2$. Vamos supor que P_1 não seja ponto maximal de S. Então existe $P_3 := (x_1, y) \in S$ tal que $y > y_1$. Logo, obtemos

$$P_3 + P_2 = (x_1 + x_2, y + y_2) \in S$$

com $y + y_2 > y_1 + y_2$. Isto implica que $P = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ não é ponto maximal de S, o que é uma contradição. Análogo, se supormos P_2 não for maximal. $\square$

Corolário 3.22. *Os pontos maximais irredutíveis de S geram todos os demais pontos maximais em S.*

Vamos agora interligar os conceitos de menor sistema de geradores com os de pontos irredutíveis.

Proposição 3.23. *Sejam $P := (x, y) \in S$, $\{v_0, .., v_r\}$ o sistema mínimo de geradores de S_1 e $\{w_0, ..., w_s\}$ o sistema mínimo de geradores de S_2. Se $x \in \{v_0, .., v_r\}$ ou $y \in \{w_0, ..., w_s\}$, então P é irredutível.*

Demonstração: Suponha que $x \in \{v_0, .., v_r\}$. Vamos mostrar que P é irredutível. Suponha que possamos escrever $P = P_1 + P_2$ com $P_i = (x_i, y_i) \in S$ com $i = 1, 2$. Então $x = x_1 + x_2$. Como x pertence ao sistema mínimo de geradores de S_1, temos que $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Mas pelo exemplo 3.11, temos $P = P_2$ ou $P = P_1$. $\square$

Nosso objetivo, será mostrar que a recíproca desta proposição é verdadeira.

Com toda a teoria estudada, agora podemos calcular explicitamente $S(f)$ em certos casos.

Exemplo 3.24. *Seja $f(X, Y) = Y^4 - X^2$, então $f_1(X, Y) = Y^2 - X$ e $f_2(X, Y) = Y^2 + X$ seus ramos. Vamos calcular o semigrupo $S(f)$.*

Temos que $I(f_1, f_2) = ord_X \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \\ 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X \end{pmatrix} = ord_X[4X^2] = 2$. *Portanto, S tem dois pontos maximais.*

Seja $g \notin < f_1 >$ então existem $q, r \in k[[X, Y]]$ tais que $g = q \cdot f_1 + r$ com $r(X, Y) = a(X)Y + b(X)$ não nulo. Assim,

$$I(g, f_1) = I(r, f_1) = I(a(X)Y + b(X), Y^2 - X) = ord_X \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -X \\ a(X) & b(X) & 0 & 0 \\ 0 & a(X) & b(X) & 0 \end{pmatrix} = ord_X[-b^2(X)$$

Assim, $S_1 = \mathbb{N}$. *Analogamente, obtemos que* $S_2 = \mathbb{N}$. *Portanto, os pontos* $P_1 = (0,0)$ *e* $P_2 = (I + c_1 - 1, I + c_2 - 1) = (1,1)$ *são os pontos maximais de* S. *Logo,*

$$S = \mathbb{N} \times \mathbb{N} - \bigcup_{i=1}^{2} \Delta(P_i)$$

onde $\Delta(P_1) = \Delta_1(0,0) \cup \Delta_2(0,0) = \{(0,n) : n > 0\} \cup \{(m,0) : m > 0\}$ *e* $\Delta(P_2) = \Delta_1(1,1) \cup \Delta_2(1,1) = \{(1,y) : y > 1\} \cup \{(x,1) : x > 1\}$. *Assim,*

$$S = \{(0,0),(1,1)\} \cup \{(2,2) + (n,m) : m > 1 \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

3.4 Determinação dos pontos maximais do semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos

Agora nos falta determinar os pontos maximais de $S(f)$, onde (f) é uma curva plana algebróide com dois ramos, a saber f_1 e f_2.

Sejam m_1 a multiplicidade de f_1 e m_2 a multiplicidade de f_2. Sejam $a_0 < a_1 < ... < a_{m_1-1}$ a Apéry-sequência de S_1 com relação a m_1 e $b_0 < b_1 < ... < b_{m_2-1}$ a Apéry-sequência de S_2 com relação a m_2.

Garcia em [10] provou o seguinte resultado:

Teorema 3.25 (Garcia). *Sejam* (f_1) *e* (f_2) *com tangentes distintas. Então os pontos maximais de* $S(f)$ *são*

$$(a_j + im_1, b_i + jm_2)$$

para cada $i \in \{0,1,...,m_2 - 1\}$ *e* $j \in \{0,1,...,m_1 - 1\}$.

3.4.1 Exemplos

Nesta subseção vamos exibir alguns exemplos calculados por uma rotina implementada no Maple. A rotina foi criada pelo professor Marcelo Escudeiro Hernandes, da Universidade Estadual de Maringá, no estado do Paraná.

Exemplo 3.26. *Seja* $f(X,Y) = f_1(X,Y)f_2(X,Y)$, *onde*

$$(f_1) : \begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^6 + t^8 + t^9 \end{cases} \text{ e } (f_2) : \begin{cases} X = t^2 \\ Y = t^4 + t^3 \end{cases}.$$

Assim, os condutores de $S(f_1)$ *é* 18 *e de* $S(f_2)$ *é* 2. *Podemos calcular a multiplicidade da interseção e verificar que* $I(f_1, f_2) = 15$. *Logo temos* 15 *pontos maximais, que são:* $(0,0)$, $(4,2)$,$(6,3)$,$(8,4)$,$(10,5)$,$(12,6)$,$(14,7)$,$(16,8)$,$(18,9)$,$(20,10)$,$(22,11)$,$(24,12)$,$(26,13)$,$(28,14)$ *e* $(32,16)$.

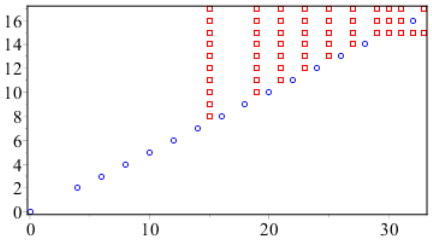

Figura 1: Semigrupo $S(f)$.

Exemplo 3.27. *Seja* $f(X,Y) = f_1(X,Y)f_2(X,Y)$ *com* $f_1(X,Y) = X^3 - Y^4$ *e* $f_2(X,Y) = X^4 - Y^3$.

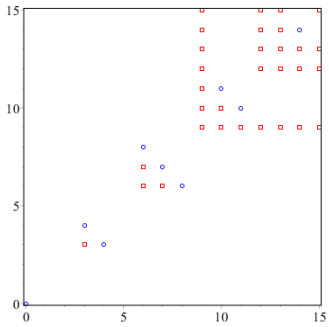

Figura 2: Semigrupo $S(f)$.

Podemos parametrizá-las por

$$(f_1) : \begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^3 \end{cases} \quad e \ (f_2) : \begin{cases} X = t^3 \\ Y = t^4 \end{cases} .$$

Assim, podemos calcular os condutores de $S(f_1)$ *e* $S(f_2)$ *e verificar que ambos são* 6. *Temos que existem* 9 *pontos maximais, pois* $I(f_1, f_2) = 9$, *os quais são:*

$$(0,0), (3,4), (4,3), (6,8), (7,7), (8,6), (10,11), (11,10) \ e \ (14,14).$$

4 Componentes de Apéry-conjuntos e Multiplicidades

Neste capítulo vamos abordar resultados de Barucci, D'Anna e Fröberg que se encontram em [5].

Primeiramente, introduziremos uma breve seção sobre semigrupos bons. Semigrupos de valores associados a curvas planas algebróides são semigrupos bons. Um estudo de semigrupos de valores associado a uma curva plana algebróide de vários ramos pode ser feito usando propriedades de semigrupo bom. Também introduziremos a noção de quando um semigrupo de $\mathbb{N}^d$ é local.

Outro objetivo deste capítulo é generalizar o Apéry-conjunto para um semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos. Neste caso, teremos a necessidade de estudar subconjuntos especiais do Apéry-conjunto, os quais chamaremos de componentes. Uma união finita de tais componentes forma o Apéry-conjunto e podemos determinar quem são tais componentes através de certos conjuntos especiais.

Mostraremos aqui que existe uma correspondência entre as componentes de Apéry-conjunto de um semigrupo e as componentes de Apéry-conjunto da explosão deste semigrupo. Isto permite calcular o semigrupo através do conhecimento das tais componentes. Finalmente, vamos definir a árvore de multiplicidades associada a uma curva plana algebróide e como ela está associada ao seu semigrupo, além de propriedades desta própria, como o número de restrição. Exemplos destes resultados encontram-se neste capítulo.

4.1 Semigrupos Bons

Um estudo mais aprofundado sobre semigrupos bons pode ser feito em [3].

A seguir, iremos definir o que é um semigrupo $S \subset \mathbb{N}^d$, $d > 0$, ser considerado "bom" a partir da proposição abaixo.

Antes, vamos definir uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}^d$.

Definição 4.1. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$. Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $\alpha_i \leq \beta_i$ para $i = 1, 2, ..., d$. Dizemos que $\alpha < \beta$ se $\alpha \leq \beta$ e $\alpha \neq \beta$.*

Exemplo 4.2. $(1, 3) < (2, 5)$.

Proposição 4.3. *Seja $S = \upsilon(R) \subset \mathbb{N}^d$, onde R é um anel semilocal (isto é, anel com um número finito de ideais maximais), υ uma valorização de R com valores em $\mathbb{Z}^d$ e sejam $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_d)$ e $\beta := (\beta_1, ...\beta_d)$.*

(a) *Se* $\alpha, \beta \in S$ *então* $min\{\alpha, \beta\} = (min\{\alpha_1, \beta_1\}, ..., min\{\alpha_d, \beta_d\}) \in S$.

(b) *Se* $\alpha, \beta \in S$, *mas* $\alpha \neq \beta$ *e* $\alpha_i = \beta_i$ *para algum* $i \in \{1, ..., d\}$, *então existe* $\varepsilon \in S$ *tal que* $\varepsilon_i > \alpha_i = \beta_i$ *e* $\varepsilon_j \geq min\{\alpha_j, \beta_j\}$ *para* $j \neq i$. *Obtemos a igualdade, se* $\alpha_j \neq \beta_j$.

(c) *Existe* $\delta \in \mathbb{N}^d$ *tal que*

$$\delta + \mathbb{N}^d \subset S.$$

Definição 4.4. *Um semigrupo* $S \subset \mathbb{N}^d$ *que satisfaz as três condições da proposição anterior é dito bom semigrupo.*

O conjunto de valores de um anel semilocal é um bom semigrupo, porém pode-se mostrar que nem todo bom semigrupo é um conjunto de valores de algum anel.

Exemplo 4.5. *Seja* $S := \{(0,0)\} \cup ((1,1) + \mathbb{N}^2)$. *Assim,* S *é um exemplo de bom semigrupo.*

4.2 Semigrupos Locais e Apéry-conjuntos

Seja $S \subset \mathbb{N}^d$ um semigrupo.

Definição 4.6. *Um bom semigrupo* S *é dito local se* $(0, ..., 0)$ *é o único elemento em* S *que tem alguma coordenada igual a* 0, *isto é,* $\Delta^S(0, ..., 0) = \emptyset$.

Observamos que semigrupos associados às curvas planas algebróides com dois ramos são sempre locais. Nesta seção, vamos exibir propriedades de semigrupos locais que nos ajudarão a obter resultados sobre componentes de Apéry-conjuntos.

Definição 4.7. *Seja* $\alpha \in \mathbb{Z}^d$, *denotamos por*

$$\Delta(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{Z}^d : \beta_i = \alpha_i \text{ para algum } i \in \{1, ..., d\} \text{ e } \beta_j > \alpha_j \text{ se } j \neq i\}.$$

Também definimos $\Delta^S(\alpha) := \Delta(\alpha) \cap S$.

Os semigrupos de uma curva plana algebróide com dois ramos admite uma espécie de condutor, assim como no caso de um ramo.

Proposição 4.8. *Seja* S *o semigrupo de uma curva plana algebróide* (f) *com dois ramos. Então*

(a) *existe um* $\gamma_S \in \mathbb{Z}^2$ *tal que* $\Delta^S(\gamma_S) = \emptyset$ *e* $\alpha \in S$ *se* $\alpha > \gamma_S$.

(b) *temos que* $\alpha \in S$ *se, e somente se,* $\Delta^S(\gamma_S - \alpha) = \emptyset$.

(c) *Seja* e *o elemento minimal não nulo em* S, *então a explosão* $\mathcal{O}'$ *de* $\mathcal{O}$ *é local se, e somente se,* $\Delta^S(e) = \emptyset$ *e se, e somente se, as tangentes dos dois ramos são iguais.*

Demonstração:

(a) Seja o ponto $Q := (I + c_1 - 1, I + c_2 - 1)$, onde $I = I(f_1, f_2)$. Já sabemos que Q é maximal em S, logo $\Delta^S(Q) = \emptyset$. Observe que se $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2) > Q$ tem-se $\alpha_1 > I + c_1 - 1$ e $\alpha_2 > I + c_2 - 1$. Então podemos escrever

$$\alpha_i = I + c_i + x_i$$

com $x_i > 0$ onde $i = 1, 2$. Observe que $c_i + x_i \geq c_i$, logo $c_i + x_i \in S_i$. Pelo teorema 3.3, temos que $\alpha \in S$. Logo, basta tomar $\gamma_S = Q$, portanto, temos $\Delta^S(\gamma_S) = \emptyset$.

(b) Observe que $\gamma_S - \alpha = \alpha_S$. Logo, segue o resultado pelo fato de S ser um semigrupo simétrico, provado no capítulo 3.

(c) $(\Leftarrow)$: Se dois ramos tem a mesma tangente, eles podem ser parametrizados como $(t^k, at^l + ...), l > k$ e $(u^m, bu^n + ...), n > m$, respectivamente, portanto

$$\mathcal{O} = k[[(t^k, u^m), (at^l + ..., bu^n + ...)]] = k[[x, y]],$$

$e = (k, m)$ e $\Delta^S(e) = \emptyset$. Obviamente a explosão $\mathcal{O}' = k[[x, y/x]]$ é local.

$(\Rightarrow)$: Se dois ramos tem distintas tangentes, eles podem ser parametrizados por $(t^k, at^l + ...), l > k$ e $(bu^n + ..., u^m), n > m$, respectivamente; disso segue que

$$\mathcal{O} = k[[(t^k, bu^n + ...), (at^l + ..., u^m)]] = k[[x_1, x_2]].$$

Seja $x = x_1 + cx_2 = (t^k + act^l + ..., cu^m + bu^n + ...)$. Para um adequado $c \neq 0$, temos $v(x) = (k, m)$, o qual é o valor mínimo positivo em $v(\mathcal{O})$. Portanto, $e = (k, m)$, mas $\Delta^S(e) \neq \emptyset$; além disso, obtemos $v(x_1/x) = (0, n - m)$ e $v(x_2/x) = (l - k, 0)$, então $v(\mathcal{O}')$ é não local. Portanto, (c) está provado. $\square$

Já definimos os Apéry-conjuntos de um semigrupo S associado a uma curva plana algebróide irredutível. Agora vamos definir para o caso em que S é o conjunto de valores definido por uma curva (f) plana algebróide com dois ramos, isto é, $S = v_f(\mathcal{O}_f - \{0\})$.

Definição 4.9. *Seja $\alpha \in S$. Definimos o Apéry-conjunto de S com relação a α como o conjunto*

$$\Omega_\alpha := \{\beta \in S : \beta - \alpha \notin S\}.$$

Note que quando $S = v(\mathcal{O}_f - \{0\})$, onde (f) é uma curva plana algebróide com dois ramos, S é um semigrupo bom e é inteiramente descrito pelos elementos de S em

$$\{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq m \leq \gamma_1 + 1 \text{ e } 0 \leq n \leq \gamma_2 + 1\}$$

onde $\gamma_S := (\gamma_1, \gamma_2)$ obtido na Proposição 4.8.

4.3 Componentes de Apéry-conjuntos

Seja $S = S(f)$, onde (f) é uma curva plana algebróide com dois ramos. Embora o Apéry-conjunto Ω_α agora não seja finito, ele é determinado pelo subconjunto finito

$$\Omega_\alpha \cap \{(m,n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq m \leq \gamma_1 + 1 + \alpha_1 \ e \ 0 \leq n \leq \gamma_2 + 1 + \alpha_2\}$$

onde $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ e $\gamma_S := (\gamma_1, \gamma_2)$.

Nosso objetivo é dar uma descrição mais fina do Ω_α, assim vamos definir componentes deste conjunto.

Definição 4.10. *Considere a relação de ordem definida anteriormente. Seja* $\Omega_\alpha^0 := \{\beta \in \Omega_\alpha : \beta$ *maximal em* $\Omega_\alpha\}$. *Assumido que* $\Omega_\alpha^0, ..., \Omega_\alpha^{i-1}$ *estejam definidos, seja*

$$\Omega_\alpha^i := \Big\{\beta \in \Omega_\alpha - \bigcup_{j=0}^{i-1} \Omega_\alpha^j : \beta \ maximal\}.$$

Observe que um elemento $\beta \in \Omega_\alpha^i$ é maximal em $\Omega_\alpha - \bigcup_{j=0}^{i-1} \Omega_\alpha^j$ para um certo i, não necessariamente maximal em Ω_α. Seguem das definições o lema a seguir.

Lema 4.11. *(a) Temos* $\Omega_\alpha^0 = \Delta(\gamma_S + \alpha)$.

(b) Para cada $\beta \in \Omega_\alpha^i$ *existe um* $\delta \in \Omega_\alpha^{i-1}$ *tal que* $\beta < \delta$.

(c) Existe um número finito m *de* Ω_α^i *não vazios.*

(d) $\Omega_\alpha = \Omega_\alpha^0 \cup ... \cup \Omega_\alpha^{m-1}$.

(e) $\Omega_\alpha^{m-1} = \{(0,0)\}$.

(f) Se $\beta, \delta \in \Omega_\alpha^i$, *então não podemos ter* $\beta < \delta$.

Proposição 4.12. *Seja* $\beta \in S$. *Temos* $\beta \in \Omega_\alpha$ *se, e somente se,* $\Delta^S(\gamma_S + \alpha - \beta) \neq \emptyset$. *Além disso, se* $\beta \in \Omega_\alpha$ *então* $\Delta^S(\gamma_S + \alpha - \beta) \subset \Omega_\alpha$.

Demonstração: $(\Leftarrow)$: Suponha $\Delta^S(\gamma_S + \alpha - \beta) \neq \emptyset$. Então $\beta - \alpha \notin S$, pois $\beta - \alpha \in S$ implica $\Delta^S(\gamma_S + \alpha - \beta) = \emptyset$ de acordo com a proposição 4.8 (b). Logo $\beta \in \Omega_\alpha$.

$(\Rightarrow)$: Agora suponha $\beta \in \Omega_\alpha$. Então $\beta \in S$ e $\beta - \alpha \notin S$, então $\Delta^S(\gamma_S - \beta) = \emptyset$ e $\Delta(\gamma_S + \alpha - \beta) \neq \emptyset$ de acordo com a Proposição 4.8 (b).

Note que se $\delta \in \Delta^S(\gamma_S + \alpha - \beta)$, então $\delta - \alpha \in \Delta(\gamma_S - \beta)$, mas como $\Delta^S(\gamma_S - \beta) = \emptyset$ então $\delta - \alpha \notin S$, assim $\delta \in \Omega_\alpha$. $\square$

Seja $\mathcal{O}_f$ o anel dado por $\dfrac{k[[X,Y]]}{(f_1 \cdot f_2)}$, onde $(f_1), (f_2)$ são curvas planas algebróides irredutíveis.

- Se (f_1) e (f_2) tem a mesma tangente, digamos $Y = 0$, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos escrever

$$f_1(X,Y) = Y^{e_1} + \sum_{i=0}^{e_1-1} a_i(X)Y^i \ e \ f_2(X,Y) = Y^{e_2} + \sum_{i=0}^{e_2-1} b_i(X)Y^i$$

  com e_i multiplicidade de f_i, $ord(a_i(X)) > i$ e $ord(b_j(X)) > j$ com $i \in \{0, 1, ..., e_1-1\}$ e $j \in \{0, 1, ..., e_2 - 1\}$. Assim $f_1 \cdot f_2 = Y^E + \sum_{i=0}^{E} c_i(X)Y^i$ onde $E = e_1 + e_2$.

- Se (f_1) e (f_2) não tem a mesma tangente, podemos supor que de (f_1) é $Y = 0$ e a de (f_2) é $Y + aX$ com $a \neq 0$. Assim,

$$f_1(X,Y) = Y^{e_1} + \sum_{i=0}^{e_1-1} a_i(X)Y^i \ e \ f_2(X,Y) = (Y + aX)^{e_2} + \sum_{i=0}^{e_2-1} b_i(X)(Y + aX)^i$$

  com e_i multiplicidades de f_i, $ord(a_i(X)) > i$ e $ord(b_j(X)) > j$ com $i \in \{0, 1, ..., e_1 - 1\}$ e $j \in \{0, 1, ..., e_2 - 1\}$. Com uma mudança de coordenadas, obtemos $f_1 \cdot f_2 = Y^E + \sum_{i=0}^{E} c_i(X)Y^i$ com $E = e_1 + e_2$.

Logo em ambos os casos, podemos expressar $\mathcal{O}_f$ como um $k[[x]]-$módulo gerado minimalmente por $1, y, ..., y^{E-1}$ com $v(x) = (e_1, e_2)$ e $E = e_1 + e_2$.

Sejam $u, z \in \mathcal{O}_f$ tais que $\mathcal{O}_f$ é um $k[[u]]-$módulo minimalmente gerado por $1, z, ..., z^{N-1}$, onde $N := n_1 + n_2$ e $v(u) = (n_1, n_2) := n$. Assim, vamos mostrar que $\mathcal{O}_f \cong \dfrac{k[[U,Z]]}{(f)}$ onde

$$f(U,Z) = Z^N + \sum_{i=0}^{N-1} b_i(U)Z^i.$$

Defina $\phi : k[[U,Z]] \longrightarrow \mathcal{O}_f$ o homomorfismo sobrejetivo natural cujo núcleo contém (f), isto é, dado $g(U,Z) \in k[[U,Z]]$ então $\phi(g(U,Z)) = g(X,Y) + f(X,Y) \cdot k[[X,Y]]$. Como $ker\phi$ é radical, é interseção de todos seus ideais primos minimais, isto é, os dois ideais primos de altura 1, a saber $P_1 = (g)$ e $P_2 = (h)$. Então $ker\phi = (gh)$, assim, gh divide f que deve ser da forma $Z^j + \psi(U,Z)$ com $j \leq N$. Como $\mathcal{O}_f$ é gerado minimalmente por $1, z, ..., z^{N-1}$, então $j = N$ e $(gh) = (f)$.

Observação 4.13. *Observe que as classes $x, y \in \mathcal{O}_f$ satisfazem as condições pedidas por u e z. Logo*

$$\mathcal{O}_f = k[[x]] \oplus k[[x]]y \oplus \cdots \oplus k[[x]]y^{E-1}$$

onde $v(x) = (e_1, e_2) = min(S(f) - \{(0,0)\})$ e $v(y) = (r, s)$ com $r > e_1$ e $s \geq e_2$.

Definição 4.14. *Sejam $u, z \in \mathcal{O}_f$. Sejam os conjuntos*

$$M_i := k[[u]] \oplus k[[u]]z \oplus \cdots \oplus k[[u]]z^i.$$

Também definimos os conjuntos $Y_0 := \{1\}$,

$$Y_i := \{z^i + \phi_{i-1}(u,z) : \phi_{i-1}(u,z) \in M_{i-1}, v(z^i + \phi_{i-1}(u,z)) \notin v(M_{i-1})\}.$$

Seja $v(u) = n = (n_1, n_2)$ e $N = n_1 + n_2$.

Lema 4.15. *Para cada* $i < N-1$ *e cada* $\alpha \in v(Y_i)$ *existe um* $\beta \in v(Y_{i+1})$ *tal que* $\alpha < \beta$.

Demonstração: Seja $\alpha = v(z^i + \phi_{i-1}(u,z))$, onde $z^i + \phi_{i-1}(u,z) \in Y_i$. Considere $z^{i+1} + z\phi_{i-1} \in M_{i+1}$. Se $v(z^{i+1} + z\phi_{i-1}) \in v(M_{i+1}) - v(M_i)$, acabou. Caso contrário, existe um $f_1 \in M_i$ tal que $v(f_1) = v(z^{i+1} + z\phi_{i-1})$. Portanto, existe $c_1 \in k$ tal que $v(z^{i+1}+z\phi_{i-1}-c_1f_1) > v(z^{i+1}+z\phi_{i-1})$. Se $v(z^{i+1}+z\phi_{i-1}-c_1f_1) \in v(M_{i+1})-v(M_i)$ acabou, caso contrário, vamos em frente. Se em algum ponto $v(z^{i+1} + z\phi_{i-1} - c_1f_1 - ... - c_nf_n) \notin v(M_i)$ então acabou. Caso contrário, obtemos duas séries de potências, $z^{i+1} + z\phi_{i-1}$ e $c_1f_1 + ...$ tais que suas diferenças pertencem a qualquer potências do ideal maximal (u,z) em $k[[u,z]]$, portanto elas coincidem, pois $k[[u,z]]$ é completo. Mas isto é uma contradição pois $z^{i+1} + z\phi_{i-1} \in M_{i+1} - M_i$ e $c_1f_1 + ... \in M_i$. □

Segue das definições e do lema anterior, este próximo lema.

Lema 4.16. *(a) Se* $\alpha, \beta \in v(Y_i)$ *não podemos ter* $\alpha < \beta$.

(b) Para todo $\alpha \in v(Y_{i-1})$ *e para todo* $\beta \in v(Y_i)$, *não podemos ter* $\beta < \alpha$.

Demonstração:

(a) Seja $\alpha = v(z_i)$ e $\beta = v(z_i')$, onde $z_i = z^i + \phi_{i-1}(u,z)$ e $z_i' = z^i + \phi_{i-1}'(u,z)$. Se $\alpha < \beta$, então $v(z_i - z_i') = \alpha$. Mas $z_i - z_i' = \phi_{i-1} - \phi_{i-1}' \in M_{i-1}$. Isto contradiz $\alpha \notin v(M_{i-1})$. Portanto, não podemos ter $\alpha < \beta$.

(b) Se $\beta < \alpha$, pelo Lema 4.15, existe $\beta' \in v(Y_i)$, tal que $\alpha < \beta'$, temos uma contradição com o item (a). □

A próxima proposição segue por indução, aplicando o Teorema de Preparação de Weierstrass.

Proposição 4.17. *Seja* $n = (n_1, n_2)$ *e* $N = n_1 + n_2$. *Para todo* $i = 1, ..., N-1$, *o conjunto* $v(M_i)$ *é um* $\mathbb{N}-$*submódulo de* $\mathbb{N}^2$ *gerado por* $0, v(Y_1), ..., v(Y_i)$, *isto é,*

$$v(M_i) = \mathbb{N}n \cup (v(Y_1) + \mathbb{N}n) \cup ... \cup (v(Y_i) + \mathbb{N}n),$$

onde as uniões são disjuntas em pares.

Demonstração: Seja $g(u,z) = g_0(u) + g_1(u)z + ... + g_i(u)z^i \in M_i$ e seja $g(U,Z) = g_0(U) + g_1(U)Z + ... + g_i(U)Z^i$. Se todo $g_i(U)$ contém um fator U^k, obtemos

$$v(g(u,z)) = kn + v(g'(u,z)),$$

portanto podemos assumir que existe um mínimo $j \leq i$ tal que $g_j(U)$ é uma unidade em $k[[U]]$. Multiplicando com seu inverso, podemos assumir que

$$g(U,Z) = g_0(U) + \cdots + Z^j + g_{j+1}(U)Z^{j+1} + \cdots + g_i(U)Z^i.$$

O Teorema de Preparação de Weierstrass afirma que existe uma unidade $u(U,Z) \in k[[U,Z]]$ tal que

$$g(U,Z) = u(U,Z)(Z^j + h_{j-1}(U)Z^{j-1} + ... + h_0(U)) = u(U,Z)h(U,Z).$$

Assim $v(g(u,z)) = v(h(u,z))$. Suponha por indução que a hipótese valha para $k = 1, ..., i-1$. Se $j < i$, então $v(h(u,z)) \in v(M_j)$ e o resultado segue por indução. Se $j = i$ temos duas possibilidades: ou $h(u,z) \in Y_i$ ou $h(u,z) \notin Y_i$. Se $h(u,z) \in Y_i$ então $v(h(u,z)) \in v(Y_i)$. Se $h(u,z) \notin Y_i$ então $v(h(u,z)) \in v(M_{i-1})$ e segue por indução.

Pelo Lema 4.16 (b), segue que, para todo $\beta \in v(Y_j)$ e para todo $\alpha \in v(M_{j-1})$, temos $\beta \not\equiv \alpha \pmod{n}$. Portanto $\beta = v(z^i + \phi_{i-1}(u,z)) \notin v(M_{j-1})$ se, e somente se, $\beta \not\equiv \alpha \pmod{n}$. Disto segue que as uniões são disjuntas em pares. □

Lema 4.18. *Se $g(u,z) \in Y_i$, então $v(g(u,z)) \in \Omega_n$.*

Demonstração: Seja $g(u,z) = z^i + \phi_{i-1}(u,z) \in Y_i$, onde $\phi_{i-1} \in M_{i-1}$. Se $v(g) \notin \Omega_n$, então $v(g) - n \in v(\mathcal{O}) = S$. Portanto, $v(g) \in v(\mathcal{O}) + n$, então $v(g) = v(h) + n$ para algum $h \in \mathcal{O}$.

Se $v(h) \in v(M_{i-1})$, então $v(g) = v(h) + n \in v(M_{i-1})$ o qual é uma contradição. Assim podemos supor que $h \in M_l - M_{l-1}$ para algum $l \geq i$. Pela Proposição 4.17, $v(h) = mn + v(z^l + \psi_{l-1}(u,z))$ para algum $z^l + \psi_{l-1} \in Y_l$. Logo

$$v(z^l + \psi_{l-1} - z^{l-i}g) = v(z^l + \psi_{l-1} - z^l - z^{l-i}\phi_{i-1}) = v(\psi_{l-1} - z^{l-i}\phi_{i-1}) \in v(M_{l-1}).$$

Mas $v(z^l + \psi_{l-1}) = v(h) - mn \leq v(h) < v(g) \leq v(z^{l-i}g)$ então $v(z^l + \psi_{l-1} - z^{l-i}g) = v(z^l + \psi_{l-1}) \notin v(M_{l-1})$, o que é uma contradição. □

Lema 4.19. *Temos $\Omega_n = \bigcup_{i=0}^{N-1} v(Y_i)$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.18, temos $v(Y_i) \subset \Omega_n$, em particular vemos que todos os elementos em $\bigcup v(Y_i)$ estão em diferentes classes de congruência $\pmod{n}$. Assim, $\bigcup_{i=0}^{N-1} v(Y_i) \subset \Omega_n$. Seja $\alpha \in \Omega_n$. Então $\alpha \in S$ e $\alpha - n \notin S$. Como, pela Proposição 4.17,

$S = v(\mathcal{O}) = \mathbb{N}n \cup ... \cup (v(Y_{N-1}) + \mathbb{N}n)$, obtemos que $\alpha = v(z^i + \phi_{i-1}(u,z)) + kn$ onde $z^i + \phi_{i-1}(u,z) \in Y_i$ para algum $i \in \{0,1,...,N-1\}$ e para algum $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$v(z^i + \phi_{i-1}(u,z)) + (k-1)n\alpha - n \notin S,$$

isto é, $k = 0$. Portanto, $\alpha = v(z^i + \phi_{i-1}(u,z)) \in v(Y_i) \in \bigcup_{i=0}^{N-1} v(Y_i)$. $\square$

Proposição 4.20. *Temos* $v(Y_{N-1-i}) = \Omega_n^i$.

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que $\Omega_n^0 = v(Y_{N-1})$.
$(\subset)$: Seja $\alpha \in \Omega_n^0$. Se $\alpha \in v(Y_i)$ para algum $i < N-1$, então α não é maximal de acordo com o Lema 4.15, portanto $\alpha \notin \Omega_n^0$, uma contradição.
$(\supset)$: Suponha agora que $\alpha \in v(Y_{N-1})$ e não esteja em Ω_n^0. Então α não é maximal em $\Omega_n = \bigcup_{i=0}^{N-1} v(Y_i)$. Assim, existe um $\beta \in v(Y_j)$ para algum j tal que $\alpha < \beta$. Portanto, se $j = N-1$, contradizemos com o Lema 4.16. Se $j < N-1$, obtemos, pelo Lema 4.15, que existe um $\delta \in v(Y_{N-1})$ tal que $\alpha < \beta < \delta$, o que contradiz novamente o Lema 4.16.

Assuma agora que a afirmação é provada para $j = 0,1,...,i-1$. Então

$$\Omega_n - \bigcup_{j=0}^{i-1} \Omega_n^j = \Omega_n - \bigcup_{j=0}^{i-1} v(Y_{N-1-j}) = \bigcup_{j=i}^{N-1} v(Y_{N-1-j}).$$

Analogamente mostramos que $\Omega_n^i = v(Y_{N-1-i})$. $\square$

Corolário 4.21. *Existe a mesma quantidade de* Ω_n^i*'s como de* Y_i*'s, a saber* N.

Definição 4.22. *Iremos denotar* $v(Y_i)$ *por* Ω_i^n. *Assim,* $\Omega_i^n = \Omega_n^{N-1-i}$. *Chamamos-o de* $i-$*ésima componente do Apéry-conjunto de* S *com relação a* n.

Exemplo 4.23. *Considere o semigrupo* $S(f)$, *onde* $\mathcal{O}_f = \dfrac{k[[X,Y]]}{(f_1)(f_2)}$, *com* $f_1(X,Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7$ *e* $f_2(X,Y) = Y^2 - X^3$. *Podemos parametrizá-las por*

$$(f_1) : \begin{cases} X = t^4 \\ Y = t^6 - t^7 \end{cases} \quad e \ (f_2) : \begin{cases} X = t^2 \\ Y = t^3 \end{cases}.$$

Temos que $I(f_1,f_2) = 13$ *e os pontos maximais são:* $(0,0),(4,2),(6,3),(8,4),(10,5),(12,6),(14,7),(16,8),(18,9),(20,10),(22,11),(24,12)$ *e* $(28,14)$. *Seja* $n = e = (4,2)$. *Na figura 3 a seguir, os elementos de* Ω_e *são marcados com pontos vermelhos. Temos* $\Omega_e = \bigcup_{i=0}^{5} \Omega_i^e$, *onde* $\Omega_0^{(4,2)} = \{(0,0)\}$, $\Omega_1^{(4,2)} = \{(6,3)\}$, $\Omega_2^{(4,2)} = \{(13,n) : n \geq 7\}$, $\Omega_3^{(4,2)} = \{(19,n) : n \geq 10\}$, $\Omega_4^{(4,2)} = \{(n,13) : n \geq 27\} \cup \{(26,n) : n \geq 14\}$ *e* $\Omega_5^{(4,2)} = \{(n,16) : n \geq 33\} \cup \{(32,n) : n \geq 17\}$.

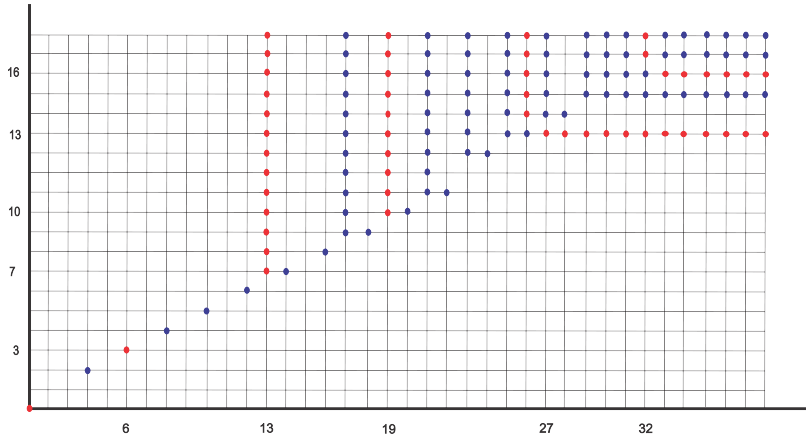

Figura 3: O semigrupo $S(f)$.

Seja (f) uma curva plana irredutível com dois ramos f_1 e f_2 com $v(x) = n = (n_1, n_2)$ o menor valor de $S(f) - \{0\}$. Vamos relacionar as componentes de Apéry-conjunto de um semigrupo e as componentes de Apéry-conjunto da explosão deste semigrupo.

Teorema 4.24. *Suponha que $\mathcal{O}_f$ e $\mathcal{O}_f^{(1)}$ são ambos anéis locais. Sejam Ω_i^n e $(\Omega_i^{(1)})^n$ a $i-$ésima componente do Apéry-conjunto com relação a n de $S(f)$ e $S(f^{(1)})$, respectivamente. Então*

$$\Omega_i^n = (\Omega_i^{(1)})^n + in.$$

Demonstração: Ver em [5], Teorema 4.1, página 9.

4.4 A árvore de multiplicidades

Vamos determinar a árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide (f) com dois ramos a partir de seu semigrupo $S(f)$ e também o contrário, isto é, determinar o semigrupo a partir de sua árvore de multiplicidades.

Definimos a multiplicidade fina do anel local $\mathcal{O}_f$ sendo o menor valor não nulo em $S(f)$.

A definição que assumimos aqui sobre árvore de multiplicidades segue de uma caracterização de árvore de multiplicidades de um semigrupo de Arf, isto é, um semigrupo numérico $G := \{0 = n_0 < n_1 < ... < n_i < ...\}$ tal que $n_i + n_j - n_k \in G$ para todo $i \geq j \geq k > 0$. Tais semigrupos são semigrupos de valores de anéis especiais. Estes resultados podem ser encontrados em [3].

Definição 4.25. *Seja $T = \{e_{(i)}^j\}$, com $j = 1, 2$, conjunto de vetores de $\mathbb{N}^2$. Dizemos que T é uma árvore de multiplicidades de $\mathbb{N}^2$ se satisfazer as seguintes propriedades:*

(a) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$ então $e_{(m)}^1 = (1, 0)$ e $e_{(m)}^2 = (0, 1)$.

(b) *A primeira (respectivamente, segunda) coordenada de* $e^j_{(i)}$ *é nula se, e somente se,* $e^j_{(i)}$ *não está no primeiro (respectivamente, segundo) ramo da árvore. O primeiro (respectivamente, o segundo) ramo da árvore é o único caminho maximal que contém o primeiro (respectivamente, segundo) vetor unitário.*

(c) $e^j_{(i)} = \sum_{e \in T' - e^j_{(i)}}$ *e para alguma sub-árvore* T' *de* T *com raiz em* $e^j_{(i)}$.

Exemplo 4.26. *Vamos começar com um semigrupo* S *associado a uma curva plana com dois ramos como na Figura 3. Este semigrupo* S *é local e por teorema, obtemos para a explosão as componentes dos Apéry-conjuntos:* $(\Omega_0^{(1)})^{(4,2)} = \{(0,0)\}$, $(\Omega_1^{(1)})^{(4,2)} = \{(2,1)\}$, $(\Omega_2^{(1)})^{(4,2)} = \{(5,n) : n \geq 3\}$, $(\Omega_3^{(1)})^{(4,2)} = \{(7,n) : n \geq 4\}$, $(\Omega_4^{(1)})^{(4,2)} = \{(n,5) : n \geq 11\} \cup \{(10,n) : n \geq 6\}$ *e* $(\Omega_5^{(1)})^{(4,2)} = \{(n,6) : n \geq 13\} \cup \{(12,n) : n \geq 7\}$. *Isso nos*

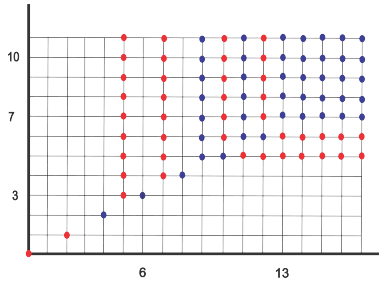

Figura 4: O semigrupo $S^{(1)}$ da primeira explosão.

dá o semigrupo da explosão $S^{(1)}$, *pois ele é um* $(4,2)-$*módulo livre neste conjunto, pela Proposição 4.17. O semigrupo* $S^{(1)}$ *é mostrado na figura 4. O semigrupo* $S^{(2)}$ *é ainda local com multiplicidade fina* $(2,1)$. *De fato, temos que suas componentes de Apéry-conjunto são:* $\Omega_0^{(2,1)} = \{(0,0)\}$, $\Omega_1^{(2,1)} = \{(3,n) : n \geq 2\}$, $\Omega_2^{(2,1)} = \{(n,3) : n \geq 7\} \cup \{(6,n) : n \geq 4\}$.

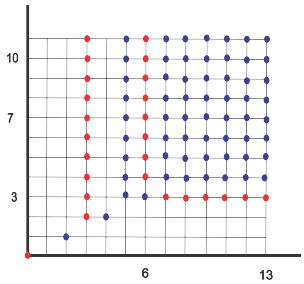

Figura 5: O semigrupo $S^{(2)}$ da segunda explosão.

Na próxima explosão, obtemos o semigrupo $S^{(3)}$ *na Figura 6, o qual é ainda local com a multiplicidade fina* $(1,1)$. *Os ramos tem diferentes tangentes agora, pois* $\Delta^{S^{(3)}}((1,1)) \neq \emptyset$, *pela Proposição 4.8, item* (c). *Ambas projeções do semigrupo são* $\mathbb{N}$, *portanto a próxima explosão tem semigrupo* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. *Assim, obtemos a árvore de multiplicidade na Figura 7.*

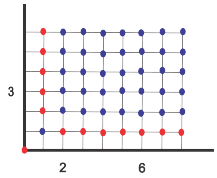

Figura 6: O semigrupo $S^{(3)}$ da terceira explosão.

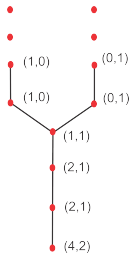

Figura 7: Árvore de Multiplicidades.

4.4.1 Obtendo o semigrupo a partir da árvore de multiplicidades

Agora vamos supor que temos uma árvore de multiplicidade associada a uma curva plana algebróide com dois ramos. Em algum estágio, temos multiplicidades finas $(1,0)$ e $(0,1)$ nos dois ramos. Se no estágio a seguir ainda tivermos dois ideais maximais, podemos implodir cada ramo e o semigrupo será o produto direto de dois semigrupos. Continuamos assim até um nível j, onde $j-1$ temos um anel local. Podemos, no mesmo caminho como anteriormente, obter as projeções S_1 e S_2 de $S = v(\mathcal{O}^{(j-1)})$ no eixo coordenado e aplicar a Proposição 3.25. Depois disso, podemos continuar com o Teorema 4.24. Finalmente obtemos o semigrupo de $\mathcal{O}_f$.

Vamos dar um exemplo.

Exemplo 4.27. *Vamos começar com a árvore de multiplicidades na Figura 8. O semi-*

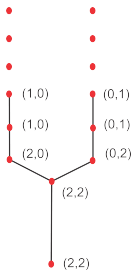

Figura 8: Árvore de multiplicidades.

grupo $S^{(3)}$ no nível 3 é $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, pois as multiplicidades finas são $(1,0)$ e $(0,1)$, respectivamente. No nível anterior o anel ainda tem dois ideais maximais, ambos com multiplicidade 2. O Apéry-conjunto de $\mathbb{N}$ com relação a 2 é $\{0,1\}$, então no nível anterior o Apéry-conjunto com respeito a 2 é $\{0,3\}$, o qual obtemos o semigrupo $[2,3]$. Assim, o semigrupo $S^{(2)}$ da curva no nível dois é $[2,3] \times [2,3]$. Pela proposição 3.25 ob-

temos o semigrupo local $S^{(1)}$*, mostrado na Figura 9, no nível* 1 *com a multiplicidade fina* $(2,2)$ *e Apéry-conjuntos com respeito a* $(2,2)$ *igual a:* $\Omega_0^{(2,2)} = \{(0,0)\}$, $\Omega_1^{(2,2)} = \{(4,2),(5,2),(2,4),(2,5)\}$, $\Omega_2^{(2,2)} = \{(n,4) : n \geq 8\} \cup \{(4,n) : n \geq 8\} \cup \{(6,7),(7,6),(7,7)\}$ *e* $\Omega_3^{(2,2)} = \{(n,9) : n \geq 10\} \cup \{(9,n) : n \geq 10\}$.

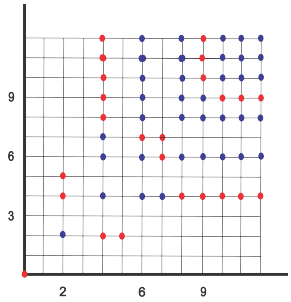

Figura 9: Semigrupo $S^{(1)}$.

Então usamos o Teorema 4.24 para obter o semigrupo S *no nível* 0*. Temos a multiplicidade fina* $(2,2)$ *e para Apéry-conjuntos obtemos* $\Omega_0^{(2,2)} = \{(0,0)\}$, $\Omega_1^{(2,2)} = \{(6,4),(7,4),(4,6),(4,7)\}$, $\Omega_2^{(2,2)} = \{(n,8) : n \geq 12\} \cup \{(8,n) : n \geq 12\} \cup \{(12,13),(13,12)\}$ *e* $\Omega_3^{(2,2)} = \{(n,19) : n \geq 20\} \cup \{(19,n) : n \geq 20\}$. *Isto temos o semigrupo* S *na Figura 10.*

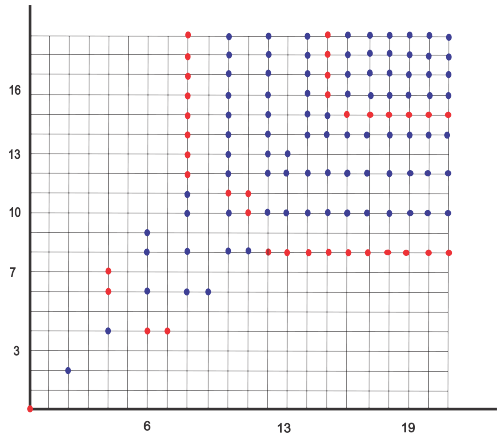

Figura 10: Semigrupo S.

4.4.2 A árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide com dois ramos

As possíveis sequências de multiplicidades de uma curva plana algebróide irredutível e, portanto, também os semigrupos, foram caracterizados. A fim de ampliar também estes resultados para curvas planas algebróides com dois ramos, iremos obter uma caracterização explícita da árvore de multiplicidade de uma curva plana algebróide com dois ramos. Com os resultados da seção anterior damos também uma caracterização do semigrupo de uma curva plana algebróide com dois ramos.

O próximo teorema segue da caracterização de uma árvore de multiplicidades.

Teorema 4.28. *Seja (f) uma curva plana algebróide irredutível com a sequência de multiplicidade*

$$e_0, e_1, ...$$

Então para cada $i \geq 0$, $e_i = \sum_{h=1}^{k} e_{i+h}$, para algum $k \geq 1$. Em particular, a sequência não aumenta.

O número de restrição $r(e_j)$ de e_j é definido sendo o número de vezes em que parece o termo e_j em cada soma da forma $e_i = \sum_{h=1}^{k} e_{i+h}$ para algum $k \geq 1$.

Se (f) é uma curva plana algebróide irredutível e $e_0, e_1, ...$ é sua sequência de multiplicidades, então resultados em [7] garantem que $r(e_j) = 1$ ou $r(e_j) = 2$ para $j \geq 1$.

Assim o número e_j da sequência de multiplicidades de (f) é dito um ponto livre se $r(e_j) = 1$ e se $r(e_j) = 2$, e_j é dito um ponto satélite.

Quando, numa sequência de multiplicidades de uma curva plana algebróide irredutível tivermos $e_i > e_{i+1}$, então pela divisão euclidiana temos que

$$e_i = e_{i+1}q_i + r_i$$

com $0 \leq r_i < e_{i+1}$, teremos na sequência q_i vezes e_{i+1} e então, se $r_i \neq 0$, temos

$$e_i > e_{i+1} = e_{i+2} = ... = e_{i+q_i} > r_i = e_{i+q_i+1}.$$

É claro que os elementos $e_{i+2}, ..., e_{i+q_i}, e_{i+q_i+1}$ tem número de restrição 2. Como $e_{i+q_i} > e_{i+q_i+1}$, nossa sequência de multiplicidades é unicamente determinada com elementos de restrição 2, até $MDC(e_i, e_{i+1}) = e_N$. Depois e_N, terá qualquer número $q \geq 0$ de elementos igual a e_N, antes um elemento $e_{N+q+1} < e_{N+q}$, que começa outro algoritmo euclidiano. Os elementos $e_{N+1}, ..., e_{N+q+1}$ tem número de restrição 1 e correspondem a pontos livres.

Observação 4.29. *Seja (f) uma curva plana algebróide irredutível e $(t^{e_i}, ct^{n_i} + ...)$ a parametrização da i-ésima explosão $(f^{(i)})$ com $e_i < n_i$, $c \neq 0$ e $m(\mathcal{O}^{(i)}) = e_i$, então sua explosão é dada pela parametrização*

$$(t^{e_i}, ct^{n_i - e_i} + ...),$$

com $m(\mathcal{O}^{(i+1)}) = e_{i+1} = min(e_i, n_i - e_i)$.

Se $e_i > e_{i+1}$, como $m(\mathcal{O}^{(i+1)}) = e_{i+1} = min(e_i, n_i - e_i)$, então $e_{i+1} = n_i - e_i$, o expoente n_i é unicamente determinado. Neste caso o par e_i, e_{i+1} (ou e_i, n_i) é suficiente para determinar a sequência de multiplicidades tão longas quanto os números de restrição são 2. Se incluímos o coeficiente c da parametrização de $(f^{(i)})$ como informação, então também as tangentes de $f^{(i)}$, $f^{(i+1)}, ...$ são determinadas tão longas quanto temos pontos satélites.

Exemplo 4.30. *Considere a sequência de multiplicidades* $e_0 = 7, e_1 = 2, e_2 = 2, e_3 = 2, e_4 = 1, e_5 = 1, e_6 = 1, ...$ *que é a sequência de multiplicidades de uma curva plana algebróide irredutível. Temos os seguintes números de restrição:* $r(e_0) = 0$, $r(e_1) = 1$, $r(e_2) = 2$, $r(e_3) = 2$, $r(e_4) = 2$, $r(e_5) = 2$, $r(e_6) = 1$ *e* $r(e_j) = 1$ *para* $j \geq 7$. *Note que, na sequência temos* 7 *seguido do* 2, *logo todos os números dela são determinados tão longos quanto o número de restrição é* 2. *Podemos supor que a curva* $(f) = (f^{(0)})$ *com sequência de multiplicidade*

$$7, 2, 2, 2, 1, 1, ...$$

tem parametrização $(t^7, ct^9 + ...)$ *com* $c \neq 0$. *Portanto, as sucessivas explosões são* $f^{(1)} = (t^7, ct^2 + ...)$, $f^{(2)} = (c^{-1}t^5 + ..., ct^2 + ...)$, $f^{(3)} = (c^{-2}t^3 + ..., ct^2 + ...)$, $f^{(4)} = (c^{-3}t + ..., ct^2 + ...)$ *e* $f^{(5)} = (c^{-3}t + ..., c^4t + ...)$, *onde* e_2, e_3, e_4, e_5 *são pontos satélites.*

Damos outro exemplo.

Exemplo 4.31. *Considere a sequência de multiplicidades* $2, 2, 2, 1, 1, ...$ *Os números de restrição desta sequência são* $0, 1, 1, 1, 2, 1, 1, ...$ *Neste caso, os primeiros dois elementos da sequência de multiplicidades não determinam os próximos. Podemos supor que a parametrização de* (f) *é* $(t^2, ct^n + ...)$ *com* $2 < n$ *e* $c \neq 0$, *mas o exponente* n *não é unicamente determinado neste caso. O semigrupo de valores é* $[2, 7]$, *então os expoentes característicos são* 2 *e* 7, *logo* (f) *tem uma parametrização* $(t^2, at^4 + bt^6 + ct^7 + ...)$, *com* a *e* b *arbitrários mas com* $c \neq 0$.

Denotamos o vetor tangente de (f) *na origem por* $tg\ f$.

Lema 4.32. *Seja* (f) *uma curva plana algebróide irredutível com sequência de multiplicidades* $e_0, e_1, ...$ *Suponha que* $f^{(i)}$ *tem parametrização*

$$(t^{e_i}, ct^{n_i} + ...)$$

com $e_i < n_i$ *e* $c \neq 0$, *tais que* $m(\mathcal{O}^{(i)}) = e_i$ *e* $tg\ f^{(i)} = (1, 0)$, *então:*

- *se* $n_i < 2e_i$ *(equivalentemente* $e_i > e_{i+1}$*), temos* $tg\ f^{(i+1)} = (0, 1)$;
- *se* $n_i \geq 2e_i$ *(equivalentemente* $e_i = e_{i+1}$*), temos para distinguir dois casos:*

  (1) No caso $r(e_{i+1}) = 2$:

  * *se* $r(e_{i+2}) = 2$, *então* $tg\ f^{(i+1)} = (1, 0)$;
  * *se* $r(e_{i+2}) = 1$, *então* $tg\ f^{(i+1)} = (1, c)$, *com* $c \neq 0$.

  Além disso, se temos uma sequência de multiplicidade de uma curva plana irredutível algebróide $e_0, e_1, ...$, *com* $r(e_{i+1}) = 2$ *e* $r(e_{i+2}) = 1$, *então para cada* $c \neq 0$, *existe uma curva plana algebróide irredutível* (f) *tal que* $tg\ f^{(i)} = (1, 0)$ *e* $tg\ f^{(i+1)} = (1, c)$.

(2) No caso $r(e_{i+1}) = 1$, então tg $f^{(i+1)} = (1, c)$.

Além disso, se temos uma sequência de multiplicidade $e_0, e_1, ...$ de uma curva plana irredutível algebróide com $r(e_{i+1}) = 1$ então para cada c, existe uma curva plana algebróide irredutível (f) tal que tg $f^{(i)} = (1, 0)$ e tg $f^{(i+1)} = (1, c)$.

Demonstração:

- Se $n_i < 2e_i$, a afirmação segue imediatamente da parametrização da explosão.
- Suponha que $n_i \geq 2e_i$.

No caso (1), na parametrização $(t^{e_i}, ct^{n_i} + ...)$ de $f^{(i)}$, o expoente n_i é unicamente determinado pela sequência de multiplicidades, assim, se $r(e_{i+2}) = 2$, temos necessariamente $n_i > 2e_i$ e $(t^{e_i}, ct^{n_i - e_i} + ...)$ com $e_i = e_{i+1} < n_i - e_i = n_{i+1}$, é uma parametrização para $f^{(i+1)}$. Portanto $tg\ f^{(i+1)} = (1, 0)$. Se, por outro lado, $r(e_{i+2}) = 1$, temos necessariamente $n_i = 2e_i$ e $f^{(i+1)} = (t^{e_i}, ct^{n_i - e_i} + ...)$, com $e_i = e_{i+1} = n_i - e_i = n_{i+1}$, temos $tg\ f^{(i+1)} = (1, c)$, com $c \neq 0$.

No caso (2), na parametrização $(t^{e_i}, ct^{n_i} + ...)$ de $f^{(i)}$, o expoente n_i não é unicamente determinado pela sequência de multiplicidades (embora o semigrupo de valores de $f^{(i)}$ e os expoentes característicos sejam). Também neste caso é claro que se $n_i > 2e_i$, $tg\ f^{(i+1)} = (1, 0)$ e se $n_i = 2e_i$, $tg\ f^{(i+1)} = (1, c)$, mas as duas possibilidades não são forçadas por qualquer outra condição. □

Relembramos que (f) é uma curva plana algebróide com dois ramos f_1 e f_2, então $\mathcal{O}_f$ é local, logo a árvore não se divide enquanto os ramos tem a mesma tangente, pela Proposição 4.8, item (c). Se i é o primeiro índice tal que $f_1^{(i)}$ e $f_2^{(i)}$ tem tangentes diferentes, então o nível i da árvore de multiplicidade da curva é divido. Com isto em mente, podemos agora dar uma caracterização para a árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide com dois ramos.

Proposição 4.33. *Seja $e_0, e_1, ...$ e $f_0, f_1, ...$ sequência de multiplicidades de duas curvas planas algebróides irredutíveis. Obtemos uma árvore de multiplicidades de uma curva plana algebróide com dois ramos com divisão de nós no nível k se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(1) $e_{i-1} = e_i$ se, e somente se, $f_{i-1} = f_i$, para $i = 1, ..., k - 1$.

(2) $r(e_i) = r(f_i)$ para $i = 0, ..., k$.

(3) se $e_{k-1} > e_k$, então $f_{k-1} = f_k$.

(4) Se $r(e_k) = r(f_k) = r(e_{k+1}) = r(f_{k+1}) = 2$ e se $e_{k-1} = e_k$, então $f_{k-1} > f_k$.

Demonstração:

Denote por (g) e (h) os dois ramos e $g = g^{(0)}, g^{(1)}, ...$ e $h = h^{(0)}, h^{(1)}, ...$ as respectivas explosões do ramo (g) e de (h), respectivamente.

$(\Rightarrow)$: Suponha que (f) tenha divisão de nós no nível k em sua árvore de multiplicidades. Provas das condições necessárias:

(1) Caso $e_{i-1} > e_i$ e $f_{i-1} = f_i$ para algum $i = 1, ..., k-1$, supondo que $tg\ g^{(i-1)} = tg\ h^{(i-1)} = (1, 0)$, temos pelo Lema 4.32 que $tg\ g^{(i)} = (0, 1)$ e $tg\ h^{(i)} = (1, c)$ para alguma constante c. Então o nível i $(i \leq k-1)$ tem necessariamente uma divisão. Contradição.

(2) Suponha $r(e_i) = 1$ e $r(f_i) = 2$ para algum $i \leq k$. Isto significa que e_i aparece somente na soma de e_{i-1} e f_i está na soma de f_{i-1} e de f_{i-j}, para algum $j > 1$. Observe pela caracterização de árvore de multiplicidades que o nó (e_{i-j}, f_{i-j}) é a soma de nós de uma sub-árvore começando em (e_{i-j}, f_{i-j}). Daí temos que é necessário uma soma de número nós desta sub-árvore maior ou igual a $j-1$ para que o nó (e_{i-j}, f_{i-j}) seja formado. Logo, segue que e_{i-j} é a soma com número de termos maior ou igual a $j-1$, isto é, e_i pertence à soma de e_{i-j}. Contradição.

(3) Se $e_{k-1} > e_k$ e $f_{k-1} > f_k$, supondo que $tg\ g^{(k-1)} = tg\ h^{(k-1)} = (1, 0)$, obtemos que $tg\ g^{(k)} = tg\ h^{(k)} = (0, 1)$ e o nível k não tem divisão no nível. Contradição.

(4) Se $r(e_k) = r(f_k) = r(e_{k+1}) = r(f_{k+1}) = 2$, $e_{k-1} = e_k$ e $f_{k-1} = f_k$, então supondo que $tg\ g^{(k-1)} = tg\ h^{(k-1)} = (1, 0)$, obtemos pelo Lema 4.32, $tg\ g^{(k)} = tg\ h^{(k)} = (1, 0)$, impossível para uma divisão no nível.

$(\Leftarrow)$: Temos que provar agora que as condições são suficientes. Suponha que temos duas sequências de multiplicidades com dois ramos planos $e_0, e_1, ...$ e $f_0, f_1, ...$ cumprindo as condições $(1), (2), (3)$ e (4). Queremos mostrar que existe uma curva plana algebróide com a seguinte árvore de multiplicidades da figura 11.

Suponha que temos uma curva plana algebróide (f) com dois ramos (g) e (h) tais que $(g^{(j)})$ tem a mesma tangente que $(h^{(j)})$, para $j = 0, ..., i$ e suponha que $tg\ g^{(i)} = tg\ h^{(i)} = (1, 0)$, onde $i \leq k-2$. Queremos mostrar que existe uma curva plana algebróide com ramos (g) e (h) tal que $tg\ g^{(i+1)} = tg\ h^{(i+1)}$.

Se $e_i > e_{i+1}$, então por (1) também $f_i > f_{i+1}$ e logo $tg\ g^{(i+1)} = tg\ h^{(i+1)} = (0, 1)$. Se $e_i = e_{i+1}$ então por (1) também temos $f_i = f_{i+1}$.

- Se $r(e_{i+1}) = 2$ e $r(e_{i+2}) = 2$ então pela condição (2) temos que $r(f_{i+1}) = 2$ e $r(f_{i+2}) = 2$. Então $tg\ g^{(i+1)} = tg\ h^{(i+1)} = (1, 0)$.

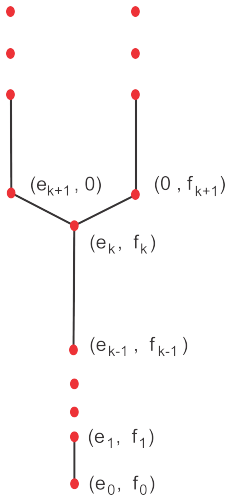

Figura 11

- Se $r(e_{i+1}) = 2$ e $r(e_{i+2}) = 1$ então pela condição (2) temos que $r(f_{i+1}) = 2$ e $r(f_{i+2}) = 1$. Pelo Lema 4.32, podemos escolher os dois ramos com o mesmo coeficiente c nas parametrizações de $g^{(i)}$ e $h^{(i)}$, de modo que $tg\ g^{(i+1)} = tg\ h^{(i+1)} = (1, c)$.

- Se $r(e_{i+1}) = 1$ então pela condição (2) temos que $r(f_{i+1}) = 1$, então, novamente pelo Lema 4.32, podemos escolher uma curva tal que $tg\ g^{(i+1)} = tg\ h^{(i+1)} = (1, c)$.

Agora, se $e_{k-1} > e_k$, pela condição (3) temos $f_{k-1} = f_k$. Então, supondo $tg\ g^{(k-1)} = tg\ h^{(k-1)} = (1, 0)$, obtemos $tg\ g^{(k)} = (0, 1)$ e $tg\ h^{(k)} = (1, c)$. Logo há divisão no nível k. Por outro lado, se temos $e_{k-1} = e_k$ e $f_{k-1} = f_k$, então pela condição (2), $r(e_k) = r(f_k)$. Temos duas possibilidades: $r(e_k) = 1$ ou $r(e_k) = 2$. Se $r(e_k) = 1$ então $r(f_k) = 1$, logo supondo $tg\ g^{(k-1)} = tg\ h^{(k-1)} = (1, 0)$ obtemos pelo Lema 4.32 caso (2) que $tg\ g^{(k)} = (1, c)$ e $tg\ h^{(k)} = (1, d)$ e podemos escolher os ramos tais que $c \neq d$. Se $r(e_k) = r(f_k) = 2$, então pela condição (4), $r(e_{k+1}) \neq 2$ ou $r(f_{k+1}) \neq 2$, de modo que novamente pelo Lema 4.32 podemos sempre realizar diferentes tangentes para $g^{(k)}$ e $h^{(k)}$. Conclusão há divisão no nível k. $\square$

Exemplo 4.34. *Considere a sequência de multiplicidades de dois ramos planos*

$$e_0 = 62, e_1 = 62, e_3 = 18, e_4 = 18, e_5 = 18, e_6 = 8, e_7 = 8, e_8 = 2, e_9 = 2, e_{10} = 2, e_{11} = 2,$$

$e_{12} = 1, \ldots$ *e*

$$f_0 = 30, f_1 = 30, f_2 = 10, f_3 = 10, f_4 = 10, f_5 = 4, f_6 = 4, f_7 = 2, f_8 = 2, f_9 = 2, f_{10} = 2,$$

$f_{11} = 2, f_{12} = 1, \ldots$ *Assim, temos* $r(e_0) = 0$, $r(e_1) = 1$, $r(e_2) = 1$, $r(e_3) = 2$, $r(e_4) = 2$, $r(e_5) = 2$, $r(e_6) = 2$, $r(e_7) = 2$, $r(e_8) = 2$, $r(e_9) = 2$, $r(e_{10}) = 2$, $r(e_{11}) = 1$, $r(e_{12}) = 2$, $r(e_j) = 1$ *para* $j \geq 13$. *Também temos* $r(f_0) = 0$, $r(f_1) = 1$, $r(f_2) = 1$, $r(f_3) = 2$,

$r(f_4) = 2$, $r(f_5) = 1$, $r(f_6) = 2$, $r(f_7) = 2$, $r(f_8) = 2$, $r(f_9) = 1$, $r(f_{10}) = 1$, $r(f_{11}) = 1$, $r(f_{12}) = 2$, $r(f_j) = 1$ *para* $j \geq 13$

De acordo com a Proposição 4.33, a possível divisão de níveis para uma árvore de multiplicidades (de uma curva plana algebróide com dois ramos com suas sequência de multiplicidades para os ramos) são somente $k = 0, 1, 4$.

De fato $k = 2$ *não é possível na condição* (3), $k = 3$ *não é possível na condição* (4) *e* $k \geq 5$ *não é possível na condição* (2).

Referências Bibliográficas

1 Angermüller, G. *Die Wertehalbgroups einer ebenen irreduziblen kurve,* Math. Zeitschrift. **153** (1977), 267-282, .

2 Atiyah, M. F. Macdonald, I. G. *Introduction of Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

3 Barucci, Valentina M. D'Anna, Fröberg, R. *Analytically unramified one-dimensional semilocal rings and their value semigroups,* J. Pure Appl. Algebra **147** (2000), 215-254.

4 Barucci, Valentina M. D'Anna, Fröberg, R. *One plane algebroid curves,* Commutative Ring theory and applications. Lecture Notes in pure and applied mathematics, vol. 231, Marcel Dekker (2002), 37–50.

5 Barucci, Valentina M. D'Anna, R. Fröberg. *The Apery algorithm for a plane singularity with two branches.* Beiträge zur Algebra und Geometrie **46.1**, 1-18, 2005.

6 Bayer, Valmecir. *Semigroup of two irredutible algebroid curves,* Manuscripta Math. **39** (1985), 207-241.

7 Casas-Alvero, E. *Singularities of plane curves,* Cambridge University Press, 2000.

8 Cohn, P. M. *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.* Chapman & Hall Mathematics. 1991.

9 Crivelli, F. *Absolute values, valuations and completion.* Notas de aula, 2008. Disponível em: < https://www.sam.math.ethz.ch/education/bachelor/seminars/fs2008/algebra/Crivelli.pdf>. Acesso em: novembro de 2015.

10 Garcia, Arnaldo *Semigroups asscoiated to singular points of a plane curves,* J. reine angew. Math. **336** (1982), 165-184.

11 Gomes, E. *Semigrupo de valores de curvas planas com vários ramos.* Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2007. Programa de Pós Graduação em Matemática.

12 Hefez, A. *Irreducible Plane Curve Singularities,* Real And Complex Singularities. Lecture Notes in P. and Appl. Math. **232**, Marcel Dekker, 1-120, 2003.

13 Jäger, J. *Lange Rechnungen und kanonische ideale in eindimensionalen ringen.* Arch, Math. **29**, 504-512, 1977.

14 Lannes, André Maria Silva. *Semigrupos e o Teorema de Gorenstein para Singularidades de Curvas Algébricas Planas.* Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, setembro de 2013. Programa de Pós Graduação.

15 Monteiro, Ana Tercia. *Semigrupos de curvas algebróides planas de dois ramos.* Dissertação de Mestrado - Universidade Federal Fluminense. Niterói, julho de 2006. Programa de Pós Graduação.

16 Zariski, Oscar. Samuel, Pierre. *Commutative Algebra.* Volume II. Graduate Texts in Mathematics; v. 28-29. Springer, 1960.