UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL

PAULO CÉLIO AGUIAR

DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

VITÓRIA

2015

PAULO CÉLIO AGUIAR

DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Florêncio F. Guimarães Filho

VITÓRIA

2015

PAULO CÉLIO AGUIAR

DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Resultado:____________________, em xx de xxxxxxxxx de 201x.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr.Florêncio F. Guimarâes Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

____

Prof..Dr. Xxxxxxx Xxxxxxxxxx Xxxx
Universidade Federal do Espírito Santo

____

Prof.ª Dr. Xxxxxxxxx Xxxxxxxxx xx Xxxxx
Universidade Federal do Espírito Santo

Dedico este trabalho a meu filho Isaac, pela inspiração e por ter sempre acreditado que alcançaria meu objetivo e aos colegas professores que se dedicam a ensinar essa maravilhosa ciência.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS pela vida, pela força e sabedoria. À minha esposa Claudinéia pelo carinho, apoio e compreensão. À minha mãe e ao meu saudoso pai que sempre me incentivaram e aos meus irmãos Ricardo e Amanda pelo apoio e auxílio. Aos professores do Profmat da UFES, principalmente a meu orientador Prof. Dr. Florêncio F. Guimarães Filho, pela amizade, disposição e pelo auxílio concedido nos momentos mais difíceis. Agradeço ainda, aos amigos e familiares que acompanharam a minha luta e torceram pelo meu sucesso. Em fim, agradeço aos órgãos governamentais que criaram o Profmat, possibilitando a realização do sonho de me tornar Mestre.

“O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico em transmitir esse conhecimento. Portanto se interessa pelas dificuldades dos alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los.” Elon Lages Lima

AGUIAR, Paulo Célio. **DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.** 2015. Quarenta e cinco (45) folhas. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, 2015.

RESUMO

O presente estudo se inicia com um breve relato de minha experiência profissional e de uma observação feita ao apropriar dos dados estatísticos de uma escola estadual do Espírito Santo, a qual me encontro vinculado. Foi constatado que a mesma apresenta um índice considerável de reprovação em Matemática, além de um desempenho regular nessa disciplina nas avaliações externas. Na tentativa de identificar as causas fez-se uma observação das aulas, entrevistas com alunos e professores, onde percebemos que caberia apresentar uma proposta de diversificação do ensino dessa disciplina, a fim de melhorar a aprendizagem dos alunos e consequentemente o seu desempenho nas avaliações.

Essa discussão se estende no segundo capítulo, onde brevemente é questionada a forma que essa disciplina vem sendo ensinada na maioria das escolas. É apresentado também um relato de uma experiência bem sucedida.

No terceiro capítulo, baseando-se na minha visão de professor e ex-gestor, apresento uma proposta de ensino enfatizando a motivação e a diversificação.

A partir do quarto capítulo, a resolução de problemas assume o papel de tema principal dessa dissertação e passa a ser vista sobre vários aspectos. Primeiro, recorremos à História da Matemática para entender o grau de interesse dos antigos matemáticos por esse tema.

Em seguida, ela passa a ser tratada como uma estratégia didática para o ensino da Matemática.

No capítulo final, é apresentada uma sequência de problemas resolvidos, escolhidos com bastante critério, visando explorar diversas técnicas e estratégias de resolução. Encerramos, sugerindo aos leitores, uma lista de problemas contendo algumas dicas e respostas.

Palavras-chave: Matemática, proposta, diversificação, ensino, aprendizagem, resolução de problemas, estratégias,

AGUIAR, Paulo Célio. **DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.** 2015. Quarenta cinco (45) folhas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional (PROFMAT), do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo, 2015.

Abstract

This study begins with a brief account of my professional experience and a remark made to appropriate the statistical data of a state school, which I linked meeting. It has been found that it has a considerable rate of failure in Mathematics, and a regular performance in this discipline in external evaluations. In an attempt to identify the causes, was made an observation of lessons, interviews with students and teachers, where we realized that fit present a proposal to diversify the teaching of this discipline in order to improve student learning and hence their performance in evaluations.

This discussion extends in the second chapter, which briefly questioned is the way this course has been taught in most schools. É also presented an account of a successful experience.

In the third chapter, based on my vision teacher and former manager, I present an educational proposal emphasizing motivation and diversification.

From the fourth chapter, problem solving takes the role of main theme of this dissertation and is seen on various aspects. First, we used the mathematics of history to understand the degree of interest of the ancient mathematicians in this theme.

In then it is treated as a teaching strategy for teaching mathematics.

In the final chapter, we present a series of problems solved, well chosen criterion, which explores various techniques and solving strategies. We ended by suggesting to readers, a list of problems containing some tips and answers.

Keywords: Mathematics, proposal, diversification, teaching, learning, problem-solving strategies.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A escolha do tema para essa dissertação baseia-se principalmente no objetivo geral do PROFMAT, que é “Estimular a melhoria do ensino da Matemática em todos os níveis.” Nesse programa os professores têm a oportunidade de aprimorar sua formação profissional, aprofundar seus conhecimentos e consequentemente melhorar a prática docente.

As sugestões aqui apresentadas, além da bibliografia utilizada, é fruto de minha experiência profissional ao longo de mais de vinte anos atuando como professor efetivo da Rede Pública Estadual do Espírito Santo, ministrando aulas de Matemática para todos os níveis e em todas as modalidades da Educação Básica. Além da graduação em Matemática (1992-1995) e da Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática (1998-1999), tive a oportunidade de participar de várias capacitações para professores oferecidas pela Secretaria Estadual de Educação (SEDU). Uma das mais importantes foi o Programa de Aceleração da Aprendizagem (PAA II). Por se tratar de um curso voltado para jovens e adultos, possuía um material didático específico, que estimulava bastante o cálculo mental priorizando a resolução de problemas. Os tópicos matemáticos eram apresentados aos alunos de forma contextualizada, valorizando o seu conhecimento informal. O resultado foi excelente, pois a maioria dos alunos concluiu o Ensino Fundamental e Médio e alguns até Curso Superior.

A presente pesquisa será realizada na Escola Estadual Padre Afonso Braz, situada no distrito de Pequiá, município de Iúna, microrregião do Caparaó, na divisa entre os estados do ES-MG. A escolha dessa unidade escolar justifica-se pelo fato do autor ter uma grande identificação com a mesma, pois nela cursou toda Educação Básica e atua como professor titular na disciplina de Matemática desde 1994 até os dias atuais. No período de 2006-2013, esteve gestor dessa escola, onde pode conhecê-la por todos os ângulos.

Apropriando dos seus dados estatísticos, constatou-se que nos últimos anos, vem apresentando um índice considerável de reprovação em Matemática, um desempenho regular no Programa de Avaliação Básica do Espírito Santo (PAEBES) e um fraco desempenho nas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Um fato que chamou bastante a atenção é que os alunos que possuem as melhores médias trimestrais não repetem o mesmo desempenho nas avaliações externas.

Observando as aulas de Matemática ministrada pelos professores, principalmente nas turmas do 6º ao 9º ano, constatou-se que eles seguem rigorosamente o roteiro do livro didático adotado em aulas expositivas, pouco se utiliza os recursos didáticos destinados à disciplina, dão pouca ênfase à geometria e pouco se trabalham a resolução de problemas. Sua preocupação é ensinar o conteúdo para as avaliações locais (provas). A aula consiste em: explicar um exemplo na lousa, passar uma lista de exercícios e depois de algum tempo corrigi-los. Observa-se também que muitos alunos não gostam de Matemática, tampouco veem importância em estudá-la e apresentam dificuldades em associar o tópico matemático às situações do cotidiano.

O objetivo principal dessa pesquisa é analisar esses contextos e buscar soluções. Especificamente, pretende-se discutir sobre o ensino-aprendizagem dessa disciplina e apresentar à equipe pedagógica da escola e aos demais professores uma proposta de diversificação da metodologia, onde os tópicos matemáticos seriam apresentados aos alunos de forma mais lúdica e contextualizada. Com isso pretende-se despertar neles mais interesse pela disciplina, desenvolver o seu raciocínio lógico, melhorar a aprendizagem e consequentemente o seu desempenho nas avaliações internas e externas.

Embora a referida escola possua suas peculiaridades, ela apresenta muita semelhança com as demais escolas que integram a Rede Estadual de Ensino, pois compartilham o mesmo Calendário Escolar e a mesma Organização Curricular. Portanto, a proposta aqui apresentada poderá ser extensiva às demais unidades escolares.

2- UMA BREVE DISCUSSÃO SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA

Seguimos essa dissertação com uma breve discussão sobre o Ensino da Matemática. Como disciplina do Currículo Básico ela tem por objetivo desenvolver o raciocínio lógico e intuitivo, contribuindo na formação do cidadão. A Comunidade de Educação Matemática Internacional tem se preocupado em renovar o ensino-aprendizagem dessa disciplina, pois tem sido desenvolvida nas escolas de maneira muito abstrata e formal. O professor pouco diversifica sua forma de ensinar.

> "*Sabe-se que uma aula típica de matemática em Nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno, por sua vez copia da lousa para o caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor."(* D'AMBRÓSIO,1989*)*

Nesse contexto, ela destaca que o aluno tem um papel extremamente passivo, pois em nenhum momento eles têm a oportunidade de expor suas idéias ou até mesmo propor uma solução diferente. Dessa forma ele passa a acreditar que a aprendizagem matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, muitos alunos acreditam que estudar Matemática é simplesmente aplicar as regras transmitidas pelo professor. Muitas vezes, eles desistem de resolver um problema, por não lembrar de um modelo ou algoritmo que o conduza à solução. Assim, eles enxergam a Matemática como um corpo de conceitos verdadeiro e estático do qual não se contesta. E que tais conceitos foram descobertos ou criados por gênios num passe de mágica. Muitos professores ainda acreditam que é possível ensinar Matemática apenas com transmissão do conhecimento e que quanto maior for a quantidade de exercícios, melhor os alunos aprendem. Daí vem a pergunta: será que a resolução de exercícios repetidos de um mesmo algoritmo, geram o aprendizado?

A meu ver, expor o conteúdo na lousa ainda é importante, assim como promover a fixação da aprendizagem através de exercícios, mas o aspecto qualitativo deve prevalecer sobre o quantitativo. O professor não deve oferecer aos alunos apenas exercícios rotineiros, também deve propor problemas intrigantes e desafiadores. Não podemos limitar a aprendizagem matemática apenas na sala de aula, devemos lembrar que os alunos diariamente tem acesso a vários tipos de tecnologia que podem ser utilizadas a favor da educação.

A fim de melhor compreender o fenômeno do fracasso escolar no Brasil, (CARRAHER,1988, pag. 81 e 82), relatou um estudo exploratório realizado com alunos pobres de uma periferia do país, para verificar o seu desempenho matemático em situações naturais do cotidiano (informais) e em situações do tipo escolar (formais). O objetivo era entender a relação entre esses conhecimentos, pois muitos alunos dessa classe social ajudam os pais em algum tipo de comércio, onde realizam muitas operações mentais. Por exemplo: um aluno que ajuda o pai numa feira é induzido a responder diariamente perguntas do tipo:

- Se um coco custa , quanto custam quatro cocos?
- Quanto custa uma dúzia de limões?
- Se eu comprar quatro cocos e duas dúzias de limões, quanto pagarei?
- Se eu der uma nota de cinquenta reias, quanto receberei de troco?
- Se um quilo de batata custa dois reais, quanto eu pagarei por quilos de batata?

Com essas indagações dos fregueses, eles realizam mentalmente todas as operações fundamentais.

O referido estudo foi realizado por amostragem com alunos com idade de a anos, cujo nível de escolaridade variava entre a e séries do Ensino Fundamental. Foram propostas questões em um teste informal e questões num teste formal envolvendo as mesmas situações. Por motivos didáticos, o teste informal foi aplicado primeiro. O número de questões em ambos os testes diferem, porque algumas foram desmembradas. O teor das questões simulavam o dia a dia de uma feira. No teste informal, o entrevistador se colocava no papel do freguês, fazia várias indagações e o aluno deveria responder oralmente, sem poder recorrer a lápis e papel. Também não era questionado a forma que se obtinha o resultado. O teste formal foi aplicado de duas formas: questões aritméticas a serem resolvidas sem qualquer contexto e problemas convencionais do tipo escolar. Um fato que chamou bastante a atenção foi o seguinte:

Durante o teste informal, foi proposto ao aluno *M*, um vendedor de cocos de anos da série, o seguinte problema:

- P: Quanto é um coco?
- R: .
- P: Quero dez cocos. Quanto são dez cocos?
- R: (Pausa) Três cocos são com mais três são . (Pausa). Tá faltando . É... (pausa). Quatro cocos são ... Já sei, dez cocos são .

Observe que para chegar a resposta correta, ele dividiu o problema em vários sub-problemas envolvendo inúmeras operações mentais.

O aluno M mostrou competência em encontrar o resultado da multiplicação de , passando por outras vias que tradicionalmente não é explorada na escola, onde muitas vezes é ensinado para os alunos fora de qualquer contexto que multiplicar um número decimal por dez, basta deslocar a vírgula uma casa para a direita. Com isso, perde-se todo o raciocínio lógico construído durante a resolução.

O resultado da pesquisa estão destacados nas tabelas abaixo:

TESTE INFORMAL

Criança	Certo	Errado	Total
M	18	0	18
P	17	2	19
Pi	12	0	12
MD	7	0	7
S	7	0	7
Total	61	2	63

TESTE FORMAL

Criança	Operações Aritméticas			Problemas Escolares		
	Certo	Errado	Total	Certo	Errado	Total
M	2	6	8	11	0	11
P	3	5	8	11	5	16
Pi	3	3	6	11	0	11
MD	1	9	10	4	8	12
S	5	1	6	8	3	11
Total	14	24	38	45	16	61

Analisando a tabela, percebe-se que:

- Os alunos apresentaram melhor resultado no teste informal;

- No teste informal das questões foram respondidas corretamente

-No teste formal apenas responderam corretamente as operações aritméticas e responderam corretamente os problemas convencionais.

O resultado desse estudo exploratório leva-nos a seguinte conclusão:

- Não se deve trabalhar nenhum tópico matemático descontextualizado.

- Devemos propor aos alunos problemas reais ao invés de problemas fictícios.

-O professor precisa aproveitar e valorizar o conhecimento informal dos alunos.

3- UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Diversificar o ensino da Matemática não é nenhuma mágica, é simplesmente buscar outras formas de ensinar, tornando as aulas mais atrativas e prazerosas. O professor precisa "contagiar" sua turma com a Matemática, mostrando- lhes que está ensinando algo importante. Uma boa sugestão é destacar o quanto ela é útil no nosso dia-a-dia e também a sua relação direta com outras ciências, como a Física, a Química, a Arquitetura, a Engenharia, a Astronomia, etc.Também é importante ressaltar que toda tecnologia que utilizamos hoje em dia como celular, televisão, computador, vídeo games, se desenvolveu graças a Matemática.

Para alcançar os objetivos propostos, um passo importante é a dismistificação, ou seja, quebrar o paradigma que "Matemática é bicho de sete cabeças", que apenas alguns iluminados conseguem compreendê-la. Os alunos precisam entender que tudo na vida se aprende com interesse e dedicação, no caso da aprendizagem matemática não é diferente.

> "Algumas pessoas gostam de dançar, outras não. Há quem vibre ao dirigir automóveis e quem sinta sono na direção. Como tudo na vida, há quem goste de Matemática e quem não a veja com bons olhos. Mas para gostar de alguma coisa, é preciso conhecê-la, experimentá-la e ter prazer nesse contato." (IMENES,1994)

Nesse contexto, o papel do professor é contribuir para que esse contato se transforme num romance.

Outro fator importante nessa nova proposta, é a mudança de postura do professor, principalmente no quesito planejamento das aulas. Atualmente, nas escolas da rede estadual, um terço de sua carga horária é destinada a esse fim. Esse tempo deve ser utilizado de forma produtiva e o professor deve escolher com bastante critério as atividades que serão propostas aos alunos. Embora seja importante no aspecto norteador, é inadimissível que o professor utilize apenas o livro didático adotado no planejamento. Deve incluir a vasta bibliografia existente na escola, como: Revista do Professor de Matemática, Banco de Questões da OBMEP, Matriz Referência do PAEBES e principalmente os livros paradidáticos. Esse último, traz uma abordagem dos tópicos matemáticos de forma lúdica, faz menção a parte histórica e se preocupa muitas vezes em explicar os "porquês". Ver Imenes, (1994) e Guelii, (1992). Dessa forma, os alunos estarão melhor preparado para as avaliações externas citadas, que em geral apresentam questões contextualizadas.

Uma boa sugestão é que os professores formulem alguns problemas de acordo com a faixa etária e realidade do aluno. No caso dessa unidade escolar, devido à fatores econômicos e geográficos, seria conveniente propor problemas relacionados ao cultivo e comercialização do café.

Nas aulas, o professor também deve usar com frequência os diversos materiais didáticos destinados à disciplina, como: tangran, jogos matemáticos, círculos fracionários, dourado, sólidos geométricos, entre outros, pois os mesmos facilitam a compreensão por parte dos alunos.

Sempre que possível, o professor deve realizar sua aula num ambiente diferente. Por exemplo, ao abordar os conceitos de área e perímetro de figuras planas, ele pode utilizar as dimensões da quadra de esporte ou até mesmo da própia escola. Além de mostrar uma aplicação prática do tópico ensinado, sairá da rotina da sala de aula.

Durante o ano letivo, a escola deve promover eventos relacionados à Matemática. Também aderir aos eventos externos, como a OBMEP e aos Jogos escolares do ES na modalidade xadrez. Esse fascinante jogo desenvolve a concentração, a percepção e a elaboração de estratégias, requisitos fundamentais para aprendizagem Matemática. Em suas aulas, o professor pode inovar e realizar com os alunos da classe uma oficina de problemas. Essa dinâmica consiste em dividi-los em grupos de quatro ou cinco. Em seguida o professor apresenta uma lista de problemas que num primeiro momento e resolvido nos grupos e num segundo momento, cada grupo expõe na lousa a sua solução. Essa atividade é muito produtiva, pois eles acabam descobrindo outras formas de resolvê-los. A troca de experiência, favorece o aprofundamento do conhecimento, o desenvolvimento de novas técnicas e estimula a criatividade. Por ser a atividade matemática que melhor aglutina os objetivos dessa proposta, a resolução de problemas tornou-se o tema principal dessa dissertação.

4- A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A resolução de problemas está intimamente ligada à História da Matemática. Essa maravilhosa ciência se desenvolveu graças a curiosidade e a persistência de alguns notáveis em propor e resolver problemas do cotidiano. Aliás, resolver problemas sempre foi o combustível para as grandes descobertas científicas. Para entender melhor o fascínio dos matemáticos por esse tema, vamos viajar pela História.

Segundo Guelli (1992), uma das mais antigas obras de Matemática é o Papiro de Ahmes**,** encontrado no Egito cerca de anos a.c. Trata-se um documento de de comprimento por de largura que se encontra num Museu Britânico. Ele contém oitenta problemas, todos resolvidos. A maior parte se refere a assuntos do dia a dia dos egípcios. Alguns, no entanto eram do tipo: "Determinar um número tal que..." Nesses problemas, o número procurado era chamado de "montão". Veja um exemplo:

"Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos dão. Digam- me: Quanto vale o montão?"

Os egípcios embora tivessem seu próprio sistema de numeração, não usavam a álgebra. Problemas como esse, eram resolvidos de um modo muito engenhoso: a regra do falso.

Inicialmente era atribuído, de forma conveniente, um valor falso ao "montão". Nesse exemplo, como o enunciado menciona "metade" e "terça parte", o valor falso escolhido deve ser múltiplo de dois e três simultaneamente, ou seja, múltiplo de seis. Escolhendo arbitrariamente o, teríamos:

Os valores falsos e eram usados para montar uma regra de três simples com os elementos do problema.

Valor Falso	Valor Verdadeiro
18	montão
39	26

Como se trata de grandezas diretamente proporcionais, segue-se que:

Verificando o resultado no enunciado, segue-se que o número satisfaz o problema. Vale lembrar que, nesse método, muitas vezes na tentativa de obter um valor falso eles encontravam diretamente o valor verdadeiro.

Segundo Boyer (1974), na Grécia Antiga, a Matemática se concentrava nas escolas jônia e pitagórica e no representante principal de cada uma delas,Tales e Pitágoras, respectivamente. No mundo grego, a Matemática estava mais relacionada com as questões filosóficas e nem tanto à situações do cotiano, conforme era vista pelos egípcios e babilônios. Nessa época, conhecida como Idade Heróica, foram propostos os três problemas mais famosos (ou clássicos) da antiguidade:

) Quadratura do círculo.

"Dado um círculo, construir só com régua e compasso, um quadrado que tenha a mesma área do círculo."

) Duplicação do cubo.

"Dada a aresta de um cubo, construir só com régua e compasso, a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro."

) Trissecção do ângulo.

"Dado um ângulo arbitrário, construir por meio de régua e compasso, apenas um ângulo igual a um terço do ângulo dado."

Mais de anos depois, seria provado que todos os três problemas são impossíveis de resolver só com régua e compasso. Mesmo assim, a Matemática grega muito se desenvolveu na tentativa de resolver tais problemas.

Dentre os diversos matemáticos gregos importantes da antiguidade, dois deles merecem destaque nessa dissertação: Euclides e Pappus, ambos de Alexandria.

Euclides, (aprox a.c.), era conhecido por sua capacidade de ensinar. Durante mais de vinte séculos os homens do mundo inteiro estudavam geometria de acordo com os ensinamentos de Euclides. Sua grande obra "Os Elementos", é composto por treze livros, dos quais os seis primeiros são sobre Geometria Plana, os três seguintes sobre Teoria dos Números, o livro X sobre Incomensuráveis e os três últimos sobre Geometria Espacial. Somente a Bíblia teve mais edições que "Os Elementos". Euclides resolvia problemas utilizando Álgebra Geométrica, onde ele representava as quantidades desconhecidas por segmento de retas, quadrados, retângulos, triângulos, enfim, figuras geométricas. Ele usava uma régua sem nenhuma marcação e compasso. Para ele, o mais importante não era os cálculos, mais sim as relações que se podia obter entre as formas geométricas. Ver Guelli, (1992).

Pappus (d.c.), foi um grande defensor da Geometria Clássica. Em sua principal obra “Coleção”, composta por oito volumes, ele fornece registros matemáticos históricos, apresenta novas provas e lemas suplementares das obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio de Perga e Ptolomeu. No livro VII da referida obra, ele descreve um ramo de estudo que ele o chamou de “Tesouro da Análise” ou “Heurística”. Para resolver problemas matemáticos, ele utilizava os procedimentos da análise e da síntese. Na análise, ele realizava um raciocínio regressivo, supondo que: “O que deve ser feito já o foi, o que se procura já foi encontrado, o que se tem a demonstrar é verdadeiro”. Ele prosseguia até alcançar algo que conhecia e aceitava como verdadeiro. Na síntese, utilizava o raciocínio progressivo, partindo do último passo deduzido pela análise, realizava passo a passo os cálculos por ela indicados. Desta forma iniciava a resolução pela análise e concluía com a síntese. Ver Boyer, (1974).

Na Índia antiga, a resolução de problemas era objeto de disputa entre os matemáticos hindus, onde um competidor propunha um problema para o outro resolver. Nos livos: “Lilavati” e “Vija-Ganita”, publicado por Báskara Akaria, muitos desses problemas eram resolvidos pela regra da inversão, veja um exemplo:

“Digam-me: Qual é o número que multiplicado por , aumenta depois , se divide por , se multiplica por si mesmo, se acrescenta a , depois de extraída a raiz quadrada, diminui , se divide por e dá ?”

Aplicando a regra da inversão, temos:

- se divide por dá
- diminui
- depois de extraída a raiz quadrada
- se acrescenta a
- se multiplica por si mesmo
- se divide por

- aumenta depois

- que, multiplicado por

Fazendo um retrospecto, verifica-se que o número satisfaz o problema.

Um matemático brasileiro que merece destaque nessa atividade é o professor carioca Júlio César de Mello Souza, mais conhecido pelo seu psedônimo “Malba Tanhan” . Em suas diversas publicações sobre a Matemática, ele apresenta aos leitores os tópicos elementares de forma clara, simples, agradável e muitas vezes pitoresca, enfatizando a História da Matemática. Sua grande obra “O Homem Que Calculava”, vem encantando gerações de estudantes e professores a várias décadas. A meu ver, este livro contribuiu de forma significativa para despertar nos leitores o gosto pela Matemática, estimulando inclusive o interrese em resolver problemas. No referido livro, o protagonista é um hábil calculista persa, chamado Beremiz Samir, que resolvia de forma engenhosa, sutil e elegante, os diversos problemas que lhe eram propostos. Os mais intrigantes são: a herança de camelos, a partilha de pães no deserto e a cor dos olhos das escravas. Ver Tahan. M,(1996).

5- A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO ESTRATÉGIA DIDÁTICA

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), a resolução de problemas pode ser considerada o ponto de partida para o ensino-aprendizagem da Matemática. Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que a resolução de problemas e a construção de estratégias tornem um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula.

Nesse cenário, a resolução de problemas, como Metodologia de Ensino da Matemática, pode contribuir para que as definições, os princípios, as proposições e os teoremas, fiquem mais compreensíveis para os alunos, uma vez que serão apresentados vinculados a situações do cotidiano.

George Polya (1887-1995), educador e matemático húngaro foi um grande incentivador dessa atividade. Segundo ele, a resolução de problemas foi e continua sendo a coluna vertebral da Matemática, desde o Papiro de Ahmes.

Ele destaca que um professor de Matemática está diante de um dilema: ele pode aproveitar o tempo da aula para exercitar seus alunos com operações rotineiras que aniquilam o seu interesse e desenvolvimento intelectual ou aproveitar para desafiá-los, propondo-lhes problemas interessantes, a fim de despertar-lhes o gosto pela disciplina.

Em sua grande obra: “A Arte de Resolver Problemas”, ele apresenta as quatro etapas essenciais para a resolução, além de uma lista de indagações e sugestões metodológicas. Vale lembrar que o seu objetivo não é fornecer uma receita, mas sim um caminho, para que os professores possam cumprir seu importante papel, auxiliando os alunos na busca da solução.

Segundo ele, o estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. Portanto, o professor precisa encontrar um equilíbrio no seu auxílio.

A experiência mostra que os alunos tendem a imitar os professores. Portanto, se pretendemos despertar em nossos alunos o gosto e a capacidade de resolver problemas, nós mesmos precisamos demonstrar isso perante a turma durante as aulas.

Eis as etapas propostas por Polya:

Compreensão do Problema. As primeiras indagações feitas aos alunos devem ser: Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? Eles precisam analisar esses elementos atentamente a fim de estabelecer conexões entre eles. Se houver uma figura relacionada ao problema, deve traçar uma figura auxiliar e nela indicar todos os dados e a incógnita e verificar se é possível satisfazer a condicionante.

Estabelecimento de Um Plano. Podemos dizer que temos um plano quando sabemos quais os desenhos e cálculos precisam executar para obter a incógnita. Nessa fase, é recomendável que os professores façam várias indagações aos alunos, do tipo: Conhece um problema correlato? É possível utilizar o seu resultado? É possível reformular o problema? Se essas indagações forem bem compreendidas, poderão despertar uma operação mental e contribuir de maneira significativa para uma sequência de ideias que o conduza à solução. A experiência nos mostra que enquanto não utilizarmos todas as informações do enunciado de um problema, não estaremos próximo da solução.

Execução do Plano. Essa tarefa é teoricamente a mais fácil, pois basta colocar em prática a ideia elaborada, mas requer paciência e concentração.

Retrospecto. Esta fase, embora muitos a consideram desnecessária é importantíssima. Ao fazer um retrospecto completo da resolução, examinando os caminhos que conduziram ao resultado, os alunos consolidam a aprendizagem e aperfeiçoam sua capacidade de resolver problemas. Além disso, sempre pode acrescentar algo a um problema ou descobrir outra forma de resolvê-lo.

6- RESOLVENDO PROBLEMAS

Para destacar alguns métodos e estratégias utilizadas na resolução, selecionamos de forma criteriosa uma sequência de problemas matemáticos, relacionados a tópicos estudados nas séries finais do Ensino Fundamental. Vale lembrar que o objetivo não é abordar dificuldades, mas sim diversidade.

6.1 Proporcionalidade e Porcentagem

1) (OBMEP) Um florista colheu de flores no campo. Elas podem ser vendidas de forma natural, imediatamente após a colheita, ao quilo, ou desidratadas a a mais no quilo. O processo de desidratação faz as flores perderem de seu peso. Considerando que as flores devem ser vendidas de uma só forma, qual tipo de venda é mais lucrativa para o florista?

Reduzindo-o a um problema mais simples, vamos dividir os de flores naturais em sete lotes de. Cada lote pode ser vendido imediatamente a. Desidratado, cada lote de de flores naturais reduz-se a, que pode ser vendido a. Portanto, em cada lote, a desidratação das flores traz um prejuízo de. Logo a venda das flores na forma natural é mais lucrativa para o florista.

2) (OBMEP) Num armazém, ovos e maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos caiu e o preço das maçãs subiu. Qual percentual se gastará a mais para comprar ovos e maçãs?
Suponha queovos custam. Nesse casomaçãs também custam. Com a queda de 2%, os ovos passaram a custar e com o aumento de as maçãs. Assim, antes gastávamos para comprar os dois itens e agora passamos a gastar, ou seja, a mais.
Como. logo o percentual que se gastará a mais na compra dos dois itens é.

3) Uma torneira *A* enche sozinha um tanque em horas. Uma torneira *B* enche sozinho esse mesmo tanque em horas. Em quanto tempo as torneiras juntas enchem esse tanque?
Podemos interpretar esse problema da seguinte maneira:

- A torneira *A* enche do tanque em hora.
- A torneira *B* enche do tanque em hora.
- Ambas as torneiras enchem: do tanque em hora.

Logo, emhoras as torneiras juntas enchem esse tanque.

4) (Temas e Problemas) Uma caravana com sete pessoas deve atravessar o Sahara em dias. Seu suprimento de água permite que cada pessoa consumalitros de água por dia. Apósdias, a caravana resgata três beduínos sedentos. Pergunta-se:

a) Se a caravana prosseguir sua rota como planejado, quantos litros de água caberão diariamente a cada pessoa?
b) Se o consumo continuasse inalterado após o resgate, em quantos dias no máximo, seria necessário encontrar um oásis?

Note que o suprimento de água inicial da caravana é de litros de água. Durante dias eles consumiram litros, restando litros.

a) Se a caravana não alterar sua rota, os litros deverão ser divididos entrepessoas durante os próximos dias. Comoo consumo diário será litros por pessoa.
b) Se o consumo não for reduzido as pessoas juntas iriam consumirlitros de água por dia. Como, segue-se que no máximo em dias, após o resgate, eles precisariam encontrar um oásis.

5) Um pedreiro constrói de muro em dias. Quantos dias serão necessários para construir de muro?

Inicialmente, note que a área do muro é diretamente proporcional ao número de dias necessários para construí-lo.

Denotando a incógnita por podemos encontrá-la, utilizando uma regra de três simples.

Dias	Área

Outra representação:

Área Dias

Logo, serão necessários dias para construir de muro.

6.2 Equações e Funções

1) Um teste de múltipla escolha contém questões. Cada acerto vale pontos e cada erro vale ponto. Daniel respondeu todas as questões e marcou pontos. Quantas questões ele acertou?

Denotemos o número de acertos por e o número de erros por. Equacionando o problema, temos o seguinte sistema de equações:

Utilizando o método da adição, segue-se que:

Logo, Daniel acertou 18 questões.

2) (PAEBES) Uma fábrica produz blusas a um custo de por unidade, além de uma taxa fixa de. Cada unidade produzida é comercializada a. A partir de quantas unidades vendidas a fábrica obterá lucro?

Denotemos o número de blusas por e o valor obtido em reais por. Equacionando o problema, temos que:

A fábrica obterá lucro, a partir do momento em que a receita for maior que a despesa, ou seja:

Logo, a fábrica obterá lucro a partir de unidades vendidas.

3) (OBMEP) Um Grêmio Estudantil vai dar uma festa, vendendo ingressos a. Para estimular a venda antecipada, os diretores do Grêmio decidiram que:

- Os ingressos serão numerados a partir do número e vendidos obedecendo à ordem crescente de sua numeração;
- Ao final da festa, cada participante receberá de voltapara cada ingresso vendido que tenha um número maior que o número do seu ingresso. Pergunta-se:

a) Se forem vendidos ingressos, quanto vai receber ao final da festa, a pessoa que comprou o ingresso de número?

b) Qual será o lucro do Grêmio se forem vendidos ingressos?

c) Quantos ingressos o Grêmio deve vender para ter o maior lucro possível?

Resolução:

a) Após o ingresso de número, foram vendidos ingressos. Logo quem o comprou, vai receber.

b) O valor da venda de ingressos é, mas o Grêmio terá que devolver: um centavo para quem comprou oingresso, dois centavos para quem comprou o ingresso, três centavos para quem comprou o ingresso e assim sucessivamente até devolver noventa e nove centavos para quem comprou o ingresso. No total o Grêmio devolverá:

Logo, o lucro do Grêmio será de.

c) Denotemos o número de ingressos vendidos por e o lucro obtido por. Como o preço de cada ingresso é com a venda de ingressos, o Grêmio arrecadará, mas terá que devolver:

O lucro do Grêmio é dado por:

Como é uma função quadrática, com o seu ponto máximo é:

Como a quantidade de ingressos é um número natural, segue-se que o maior lucro possível para o Grêmio, ocorre com a venda de ouingressos. Em ambos os casos o lucro é de**.**

4) Determine os valores de que satisfaçam a equação.
Como se trata de uma equação biquadrada, não tem uma fórmula direta para resolvê-la, precisamos promover uma variação do problema, introduzindo uma variável auxiliar.

Substituindo por na equação original, temos:

, com.

Resolvendo a equação do grau pela relação entre coeficientes e raízes, temos que:

Note que não satisfaz, pois. Como, segue-se que:

Logo, os valores de que satisfazem a equação pertencem ao conjunto S

5) (PAEBES) Arthur e Pedro têm menos de trinta anos de idade, mas suas idades somam mais de trinta anos. A idade de Pedro, que é o mais velho, é igual ao triplo da idade de Arthur somado a. Qual é a soma das idades de Arthur e Pedro?

Vamos inicialmente destacar os principais elementos do problema:

Incógnita: a soma das idades de Arthur e Pedro.

Dados: Pedro é mais velho; Pedro tem o triplo da idade de Arthur somado a.

Condicionante: Pedro e Arthur têm menos de anos; Os dois juntos têm mais de anos.

Denotando a idade de Arthur por, podemos equacionar o problema da seguinte forma:

Arthur:

Pedro:

Por suposição, vamos completar a seguinte tabela:

Idade de Arthur	Idade de Pedro	Soma das idades
1	23	24
2	26	28
3	**29**	**32**
4	32	36

Note que a única opção que satisfaz ambas as condicionantes é a linha da tabela.

Observando as condicionantes pode-se resolver esse problema algebricamente:

Fazendo a intersecção dos intervalos segue-se que o único número natural é Daí, Arthur tem anos e Pedro tem anos. Logo a soma de suas idades é anos.

6) (OBMEP) Antônio tem um papagaio que faz contas fantásticas com números inteiros, mas não conhece números decimais. Quando Antônio sopra um número em seu ouvido, o papagaio multiplica-o por, depois soma, divide o resultado por, finalmente subtrai e grita o resultado. Pergunta-se:

a) Se Antônio soprou o número, qual número o papagaio gritou?

b) Se o papagaio gritou o número, qual número Antônio soprou?

c) Por que o papagaio nunca grita o número?

Resposta:

Denotando o número soprado por Antônio por e o número gritando pelo papagaio por, equacionamos o problema da seguinte forma:

a) Se, segue-se que:

Logo, o papagaio gritou o número.

b) Se, segue-se que:

3

Logo, Antônio soprou o número.

c) Suponha que o papagaio tenha gritado o número. Daí, teríamos:

Absurdo, pois Antônio teria soprado um número decimal, o qual o papagaio não conhece. Logo, o papagaio nunca grita o número.

6.3 Contagem

Problemas de contagem, na maioria das vezes, exigem do solucionador, tomadas de decisões, conforme veremos nos exemplos. Segundo o saudoso professor (Morgado, A.C.), três aspectos são fundamentais: (Ver Lima, E. L.). [5]
) Postura- Devemos sempre nos colocar no papel de “sujeito do problema”.
Divisão- Sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas, em decisões mais simples.
Não adiar dificuldades- Em primeiro lugar devem-se tomar as decisões mais restritas.

1) Quantos são os números pares de três dígitos distintos?
Para formar numerais de três dígitos é preciso tomar três decisões, ou seja, escolher os algarismos que devem ocupar as três ordens. A decisão mais restrita, nesse caso, é a escolha do algarismo das unidades, em seguida, a escolha do algarismo das centenas e por fim o algarismo das dezenas. Uma forma de resolver esse problema é dividi-lo em casos:
Caso: o zero não ocupa a ordem das unidades.
Assim, temos opções para escolher o algarismo das unidades, opções para escolher o algarismo das centenas e opções para algarismo das dezenas.
Pelo Princípio Multiplicativo, temos: números.
Caso: o zero ocupa a ordem das unidades.
Assim, temos opções para escolher o algarismo das centenas e opções para escolher o algarismo das dezenas. Pelo Princípio Multiplicativo, temos: números. Logo, pelo Princípio Aditivo, temos um total de números pares de três dígitos distintos.
2) De quantos modos homens e mulheres podem sentar-se em 5 bancos de lugares, se em cada banco deve haver um homem e uma mulher?

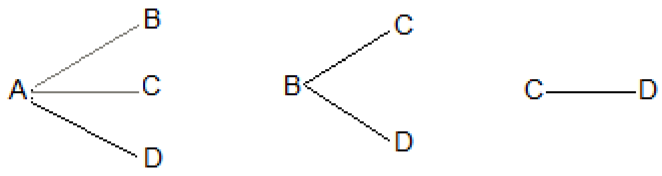
Assumindo o papel de “sujeito do problema” vamos acomodar primeiro todos os homens. Iniciar o problema acomodando as mulheres é análogo.
O homem tem opções de escolher o seu assento. O homem tem opções, o tem opções e assim sucessivamente até que o último homem tenhaopções no último banco. Acomodando as mulheres, atem opções de escolher um dos bancos, a temopções, assim sucessivamente, até que a última tenha uma única opção no último banco. Pelo Princípio Multiplicativo, segue-se que:

Logo, eles podem se sentar de modos distintos.

3) Na loja “A Festa do Chá” são vendidos tipos diferentes de xícaras, tipos diferentes de pires e tipos diferentes de colheres. Quantas compras distintas de dois itens com nomes diferentes podem ser feitas?
Nesse problema, são três objetos distintos e compra-se apenas dois itens. Portanto, a decisão a ser tomada consiste em escolher qual dos itens deixará de comprar. Isso pode ser feito de três modos, o que nos sugere dividir a contagem em três casos:
Caso: Compra-se xícara epires. Pelo Princípio Multiplicativo, temos:maneiras.
Caso: Compra-se xícara e colher. Pelo Princípio multiplicativo, temos: maneiras.
Caso: Compra-se colher e pires. Pelo Princípio multiplicativo, temos: maneiras.
Logo, pelo Princípio Aditivo, podem ser feitas compras distintas.

4) De quantos modos podemos escolher dois números naturais de a, sabendo que a soma entre eles é ímpar.
Incógnita: quantidade de modos de escolha de dois números do conjunto.
Dados: o conjunto de números.
Condicionante: a soma entre os dois números escolhidos é ímpar.
Note inicialmente que o referido conjunto possui números pares e números ímpares. Há três possibilidades de escolher esses dois números: um número par e um número ímpar; dois números pares ou dois números ímpares. Somente a possibilidade satisfaz a condicionante. Portanto, o problema original pode ser reformulado da seguinte forma: “Considerando os números naturais de a, de quantos modos podemos escolher um número par e um número ímpar?”
Temospossibilidades de escolher o número par e tambémpossibilidades de escolher o número ímpar. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, temos modos de escolha.

5) Numa reunião, havia certo número de pessoas e no final todos se cumprimentaram com apertos de mão. Sabendo que ao todo foram cumprimentos, quantas pessoas estiveram presentes nessa reunião?
Reduzindo-a um problema mais simples, suponha que tivesse pessoas presentes nessa reunião. Denotando por: *A, B, C* e *D* as pessoas, considere o esquema abaixo:

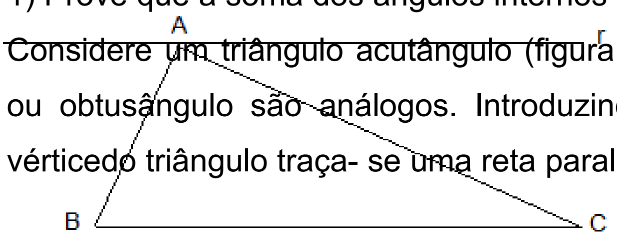


Observa-se que a pessoa *A* cumprimenta as pessoas: *B, C* e *D*. A pessoa *B* cumprimenta *C* e *D* e finalmente a pessoa *C* cumprimenta a pessoa *D*. Temos portanto cumprimentos. Generalizando, cadapessoas presentes na reunião cumprimenta pessoas. Pelo Princípio Multiplicativo teríamos cumprimentos. Mas, apertar a mão é um ato recíproco, pois ao mesmo tempo em que uma pessoa cumprimenta é também cumprimentada. Denotando por o número de cumprimentos, ele pode ser obtido pela relação.
Como, segue-se que:

Resolvendo a equação do grau pela relação entre coeficiente e raízes, temos: e. Pela natureza do problema, deve ser um número natural. Portanto, apenas satisfaz a equação.
Outra solução:
Pela natureza do problemaé um número natural. A função quadrática é crescente para todo. Como, por tentativa, segue-se que é a única raiz natural.
Logo, esteve presente nessa reunião pessoas.

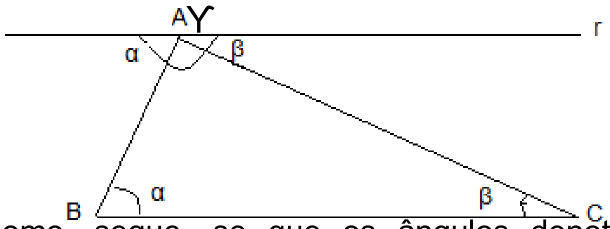
6.4 Geometria

1) Prove que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a.
Considere um triângulo acutângulo (figura I). Os casos em que o triângulo é retângulo ou obtusângulo são análogos. Introduzindo no problema um elemento auxiliar, pelo vérticedo triângulo traça- se uma reta paralela ao lado.



(Figura I)

Denotando por os ângulos internos do triângulo (figura II), queremos demonstrar que.



(Figura II)

Como, segue- se que os ângulos denotados por são alternos internos, portanto congruentes. O mesmo ocorre com os ângulos denotados por.

Como um ângulo raso mede 180°, segue- se que.

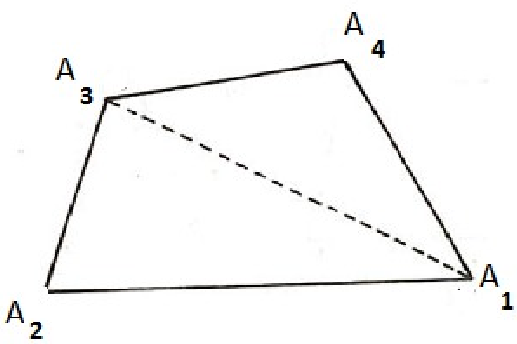
Logo, a soma dos ângulos internos do triângulo é 180°.

2) Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de lados é igual a.

Devemos mostrar que, para todo *n*

Para, o polígono é triângulo, cuja a soma dos ângulos internos é Isso já foi demonstrado. Como, a fórmula é verdadeira.

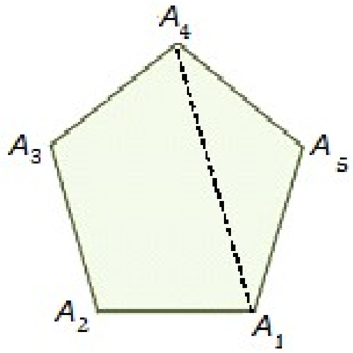
Para, o polígono é um quadrilátero, que pode ser decomposto em dois triângulos. (Figura I)



Daí, Como a fórmula é verdadeira.

Vejamos mais um caso particular

Seja o pentágono. (Figura II).



Note que ele pode ser dividido em dois polígonos:

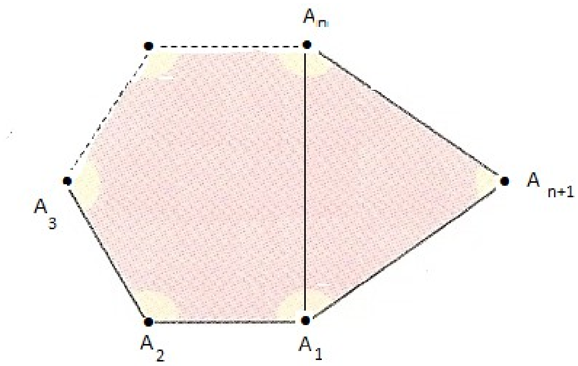
- Um quadrilátero
- Um triângulo

Portanto, a soma dos ângulos internos do pentágono é Como a fórmula também é verdadeira.

Ao invés de continuar examinando os polígonos de um a um, vamos recorrer a uma ferramenta mais eficaz: a Indução Matemática. Nosso objetivo é mostrar que: se a fórmula é verdadeira para um polígono de lados, então ela é verdadeira para um polígono de lados.

Suponha que é verdadeira para algum polígono convexo de lados, com.

Considere um polígono convexo de lados. (Figura III)



Note que podemos decompô-lo em dois polígonos:

- Um n-ágono
- Um triângulo

Portanto a soma de seus ângulos internos é:

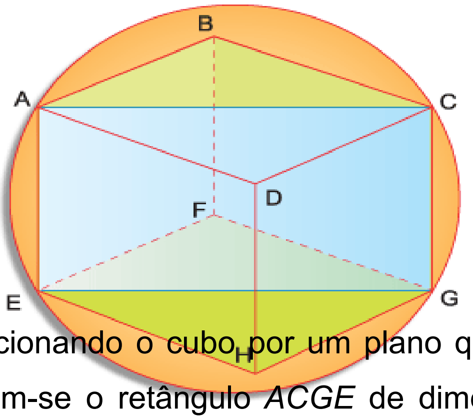
Como a fórmula é verdadeira.

Logo, pelo Princípio da Indução Matemática, é verdadeira para todo.

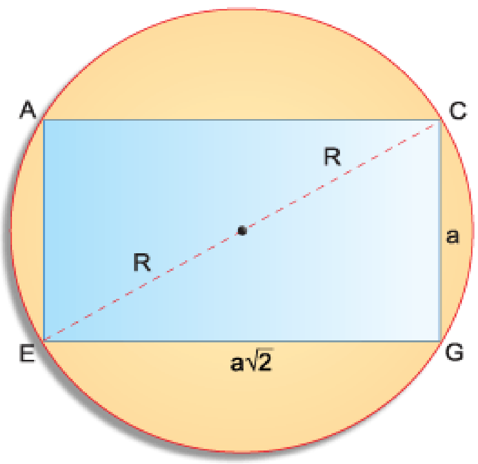
Embora os casos e foram importantes para elucidar o processo de indução, para provar a fórmula bastaria ter feito o caso base e em seguida o passo indutivo.

3) Determine o raio de uma esfera circunscrita a um cubo de aresta.

Seja o raio da esfera circunscrita ao cubo *ABCDEFGH* de aresta . (Figura I)



Seccionando o cubo por um plano que contém os pontos *A*, *C* e o centro da esfera, obtém-se o retângulo *ACGE* de dimensões e, inscritos numa circunferência de raio. (Figura II)

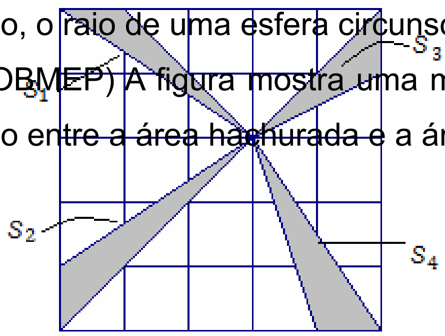


Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *CEG*, segue-se que:

2

Logo, o raio de uma esfera circunscrita ao cubo de aresta é

4) (OBMEP) A figura mostra uma malha formada por quadrados de de lado. Qual é a razão entre a área hachurada e a área total dessa malha quadrada?



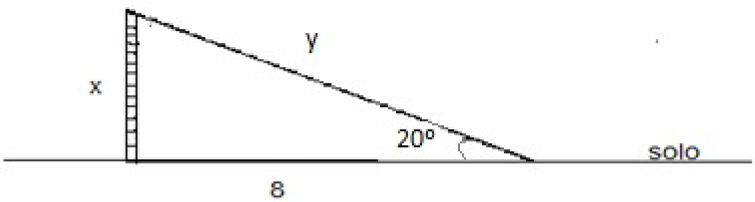
Vamos decompor a área hachurada em quatro triângulos e denotar por suas respectivas áreas. Assim, a área hachurada é

A área de cada triângulo pode ser obtida pela expressão, onde é a medida da base e sua altura. Portanto:

A área hachurada é. Como a área da malha quadrada é, segue-se a razão entre as áreas é:

5) Uma árvore é quebrada por um raio e seu topo atinge o solo a uma distância de de sua base, formando um ângulo de com a horizontal. Qual é o comprimento dessa árvore?

.



Denotando a parte intacta da árvore por e a parte quebrada por, o comprimento da árvore é.

Aplicando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, segue-se que:

Logo, o comprimento dessa árvore é aproximadamente.

6.5 Miscelânea

1) Num grupo de pessoas cada uma calcula a soma das idades das outras nove. As dez somas obtidas foram. Determine a idade da pessoa mais velha.

Observa-se que cada uma das dez somas obtidas, aglomera nove parcelas. Daí, a soma, aglomera noventa parcelas, que representa nove vezes a soma de todas as idades. Como, segue-se que: a soma das idades das dez pessoas é anos. Logicamente, a pessoa mais velha omitiu a sua idade e obteve a menor soma. Portanto, a pessoa mais velha tem anos.

2) João e Maria tem, cada um, um jarro grande contendo litros de água. No dia, João colocalitro de água no jarro de Maria. No dia, Maria coloca litros de água do seu jarro no jarro de João. No dia, João coloca litros de água no jarro de Maria e assim sucessivamente durante dias Pergunta-se: quantos litros de água tem no jarro de Maria?

Inicialmente, note que no período de dias, João sempre coloca água no jarro de Maria nos dias de ordem ímpar e nos dias de ordem par ocorre o contrário.

Observa-se também que a quantidade de água colocada nos jarros está relacionada à ordenação dos dias.

Portanto, nesse período João coloca litros no jarro de Maria. Ela por sua vez, coloca litros no jarro de João. Como, segue-se que nessa alternância Maria colocou litros de água a mais no jarro de João. Como a quantidade inicial em cada jarro eram litros, restam litros de água no jarro de Maria.

3) Prove que: se é par, entãoé par.

Vamos reformular o problema, utilizando a contrapositiva da proposição: Se não é par, então não é par. Como se trata de um problema de demonstração, vamos destacar as partes principais.

Hipótese: não é par.

Tese: não é par.

Assumindo que não é par, logo é ímpar, ou seja, com. Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade, segue-se que:

, com.
Logo não é par.

4) Um pai deixou uma herança para seus filhos: *A, B* e *C*, mas determinou que:
i) O filho *A* desse uma parte a *B* e *C*, de modo que seus legados dobrassem;
ii) Depois disso, o filho *B* desse uma parte a *A* e *C*, de modo que seus legados dobrassem;
iii) Finalmente, o filho *C* desse uma parte para *A* e *B*, de modo que seus legados também dobrassem.
Cumpridas as condições, verificou-se que cada filho ficou com. Qual foi a herança de cada filho?
Vamos resolvê-lo utilizando o raciocínio regressivo.

Filhos	*A*	*B*	*C*
Legado final	160	160	160
Antes de *C* ter doado	80	80	320
Antes de *B* ter doado	40	280	160
Antes de *A* ter doado	260	140	80

Logo, a herança de cada filho é:

5) (OBMEP) Joãozinho sempre mente nas terças feiras, quintas-feiras e sábados, nos demais dias da semana fala sempre a verdade. Um dia, Pedrinho o encontrou e ocorreu o seguinte diálogo?
__ Pedrinho pergunta: Que dia é hoje?
__ Joãozinho responde: Sábado.
__ Pedrinho pergunta: Que dia é amanhã?
__ Joãozinho responde: Quarta- feira.
Em que dia da semana ocorreu o diálogo?
Note claramente, pelo enunciado, que Pedrinho encontrou Joãozinho num dia em que ele mente. O sábado está descartado, pois caso contrário, ele teria falado a verdade ao responder a primeira pergunta.
A terça- feira também está descartada, pois caso contrário, ele teria falado a verdade ao responder a segunda pergunta.

Logo, o diálogo entre eles ocorreu numa quinta-feira.

7- CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para alcançarmos os objetivos propostos nessa dissertação, mudanças serão necessárias no ambiente escolar. É preciso que todos os segmentos da escola: direção, pedagogos, professores assumam sua responsabilidade no processo de ensino-aprendizagem dos educandos . A escola e a família precisam se unir em função de um único objetivo, que é o sucesso escolar dos alunos.

Nesse contexto, o professor é o personargem principal que precisa se convencer de que o mundo, a sociedade e a escola estão em constante transformações e as vezes torna-se necessário mudar a forma de ensinar, ou seja adequar-se às novas mudanças que são impostas. É preciso saber, o que ensinar? E principalmente, como ensinar?

Mesmo com os problemas que enfrentamos nas escolas públicas o professor, enquanto educador, em hipótese nenhuma pode desistir de ensinar, deve deixar de lado todas as suas frustrações e angústias e focar-se apenas no que foi qualificado para fazer, que é ensinar. Se os alunos não prestam atenção nas aulas de Matemática ou de outra disciplina, é porque algo está errado. É preciso identificar os problemas, as possíveis causas e buscar soluções para que o processo de ensino se faça de maneira eficaz.

Apresentar os tópicos matemáticos de forma mais lúdica e contextualizada, pode sim, despertar nos alunos mais interesse e respeito pela disciplina, que é vista pela maioria como a grande vilâ no meio escolar, mas sabe-se que é uma disciplina de suma importância pois tudo que vemos ao nosso redor faz parte do seu campo de estudo.

Portanto, “DIVERSIFICANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA COM ÊNFASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS”, contribui para esse debate e consequentemente para a melhoria da Educação Básica.

8- REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICA

[1] Boyer, C.B. *História da matemática*. Ed: Edgard Blüche, 1974.

[2] Carraher,T.N. (org). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

[3] D’Ambrósio, Beatriz S. *Como ensinar matemática hoje?* Brasília, SBEM, acesso em 01 de Jul. 2015 disponível em:

http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf

[4] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E; Morgado, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Volumes: 1,2 e 3. Sociedade Brasileira de Matemática. 2004.

[5] Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E; MORGADO, A.C. *Temas e Problemas*. Sociedade Brasileira de Matemática. 2001.

[6] Lima, E.L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E; Morgado, A.C. *Temas e Problemas Elementares*. Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.

[7] Fomin. D; Genkin, S; Itenberg, I. *Círculos Matemáticos*. IMPA, 2012.

[8] Guelli,O. *Contando a História da Matemática*. Vol. 2. Editora Ática, 1992.

[9] Oliveira, K.; Corcho. A, J. *Iniciação à Matemática*. SBM, 2012.

[10] Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Brasília:MEC/SEF,1998.

[11] Polya, G. *A Arte de resolver Problemas*. Rio de Janeiro. Editora Interciência, 1995.

[12] Tahan, M. *O Homem que Calculava.* 43ª Edição. Rio de Janeiro. Editora Record, 1996.

[13] Imenes. L. M. *Coleção Vivendo a Matemática*. Editora Scipione, 1994.

[14] Banco de Questões da OBMEP (2006 a 2015) – IMPA (Vários autores).

ANEXOS:

ANEXO 1:

Sugestões de Problemas

1) (OBMEP) Uma saquinho de leite em pó, pesandocusta. O mesmo produto num saquinho de custa. Desconsiderando o peso das embalagens, qual das duas opções é mais vantajosa para o cliente?

2) Certo dia, Augusto foi ao Shopping e fez compras em lojas. Em cada loja, ele gastou metade do que possuía e na saída ainda pagou de estacionamento, restando-lhe. Qual a quantia que Augusto possuía ao chegar ao Shopping?

3) Duas torneiras juntas enchem um tanque em horas. Uma delas sozinha levaria horas a mais do que a outra para enchê-lo. Quantas horas levariam cada uma das torneiras para encher esse tanque?

4) (Lilavati) Num enxame de abelhas, dirige- se a uma flor de lótus, a uma bananeira. Um número igual a três vezes a diferença entre os dois precedentes, voa em direção a uma árvore e por fim uma única abelha voa desgarrada sem rumo. Diga- me: Quantas abelhas compõem esse enxame?

5) José tem uma fábrica de picolés. Ele vende em média caixas de picolés por dia a cada. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuía no preço da caixa, ele vendia caixas a mais. Quanto ele deve cobrar por caixa de picolés para que a receita seja máxima?

6) (OBMEP) Para comemorar seu aniversário, Ana vai preparar tortas de pera e tortas de maçãs. No mercado, uma maçã pesa e uma pera pesa. Sabendo que a sacola de Ana aguenta um peso máximo de e que ela vai utilizar ambas as frutas, diga-me: Qual é o maior número de frutas que ela pode comprar?

7) (Temas e Problemas) Prove que a soma de um número positivo com seu inverso é sempre maior ou igual a.

8) Duas velas de mesmo comprimento são acesas simultaneamente. Aqueima completamente emhoras e aqueima completamente emhoras. Depois de acesas, em quanto tempo uma delas terá o dobro da outra?

9) De quantas maneiras motorista podem estacionar seus carros numa garagem que possui vagas?

10) (Lilavati) Um pavão está no alto de uma coluna vertical de de altura, ao pé da qual fica a toca de uma cobra. De repente, o pavão vê a cobra, que está a da toca. A cobra também vê o pavão e corre para a toca. Sabendo que o pavão percorre em trajetória retilínea a mesma distância que a cobra, diga-me: A quantos metros da toca a cobra foi alcançada?

11) (OBMEP) Um número é enquadrado quando, ao ser somado com o número obtido invertendo a ordem de seus algarismos, o resultado é um quadrado perfeito. Por exemplo, e são enquadrados, pois. Quantos são os números enquadrados entre e?

12) (OBMEP) Raimundo e Macabea foram a um restaurante que cobra por cada gramas de comida para aqueles que comem atégramas e por cada gramas para aqueles que comem mais de gramas.

a) Quanto paga quem come gramas? E quem come gramas?

b) Raimundo consumiugramas a mais que Macabea, mas ambos pagaram a mesma quantia. Quantos gramas comeram cada um?

c) Quanto pagou cada um?

13) (OBMEP) Em uma festa, o número de mulheres era quatro vezes o número de homens. Após a chegada de cinco casais, a porcentagem de homens na festa passou a ser.

a) Qual era o percentual de homens na festa antes da chegada dos cinco casais?

b) Quantos homens e quantas mulheres a festa passou a ter, após a chegada dos cinco casais?

ANEXO 2:

Dicas e Soluções dos problemas sugeridos

1) Modifique o problema, reduzindo as duas embalagens a um mesmo volume.

R: A opção é mais vantajosa.

2) Utilize o raciocínio regressivo.

R: Augusto chegou ao shopping com.

3) Equacione o problema e observe que a incógnita é expressa por um número racional positivo.

R: Uma torneira levahoras e a outra horas.

4) Escolha uma boa notação e equacione o problema.

R: abelhas

5) R: Ele deve cobrar por caixa de picolé.

6) Separe os principais elementos do problema e equacione-o. A construção de uma tabela ajuda a solucioná-lo.

R: frutas

7) Utilize a desigualdade das médias.

8) Suponha, de forma conveniente, um comprimento inicial para as velas. Organize os dados numa tabela e utilize o raciocínio progressivo até obter a incógnita.

R: horas depois de acesas, a vela terá o dobro do tamanho da vela.

9) Coloque- se no papel dos motoristas e tome as decisões.

R: maneiras.

10) Faça uma figura para ilustrar o problema.

R: A cobra foi alcançada a da toca.

11) Escolha uma notação adequada e explore o valor posicional dos algarismos.

R: Há um total denúmeros enquadrados de a.

12) Escolha uma boa notação e equacione o problema.

R: a) A pessoa que come gramas paga. Por outro lado, quem come gramas paga

b) Macabea comeu gramas e Raimundo comeu gramas.

c) Ambos pagaram.

13) Explore a proporcionalidade entre as quantidades de homens e mulheres.

R: a). b) homens e mulheres