

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DENIS CAMPOS RODRIGUES

TEORIAS DE K-ESSÊNCIA EM ESPAÇOS-TEMPOS  
ESTÁTICOS E ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS

VITÓRIA  
2016

DENIS CAMPOS RODRIGUES

TEORIAS DE K-ESSÊNCIA EM ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS E  
ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. JÚLIO CÉSAR FABRIS

VITÓRIA  
2016

[Ficha Catalográfica]

DENIS CAMPOS RODRIGUES

TEORIAS DE K-ESSÊNCIA EM ESPAÇOS-TEMPOS ESTÁTICOS E  
ESFERICAMENTE SIMÉTRICOS

COMISSÃO EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris (Orientador).  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin.  
Universidade Federal do ABC

---

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues.  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella.  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Hermano Endlich Schneider Velten.  
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA  
2016

*À minha mãe e à Caroll*

## Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Áurea, pelo esforço que teve para me proporcionar uma boa educação e à minha namorada e companheira Caroline, por todo o apoio ao longo do curso.

Agradeço em especial ao professor Júlio César Fabris, pela paciência na orientação e pela oportunidade de fazer este trabalho.

Aos professores da Pós-graduação em Física da UFES, Antônio Brasil Batista, José Alexandre Nogueira, Oliver Piattella, Davi C. Rodrigues.

Aos meus amigos de Pós-graduação: Felipe Santos, Tays Miranda, Carla R. Almeida, Pedro Otavio, Edison Cesar, Álefe Freire, Amanda Ziviani, Igor Badke, Mariniel Galvão, Michael F. Gusson, , Alan J. Romanel, Cássio Cecato Favarato, Rafael Perez, Jefferson Morais e Thiago Caramês, pela troca de conhecimento e momentos de descontração.

Agradeço à todos os meus amigos pelo apoio, em especial, ao meu amigo e irmão Bruno.

Agradeço ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq), pelo suporte financeiro.

*”A coisa mais bela que o homem pode experimentar é o mistério. É essa emoção fundamental que está na raiz de toda ciência e toda arte.”*

(Albert Einstein)

## Resumo

O estudo da Relatividade Geral minimamente acoplada a um campo escalar em um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico mostra que soluções de buraco negro são possíveis mediante a existência de um campo escalar fantasma. Estes buracos negros, considerados exóticos, possuem horizonte de área infinita e temperatura de Hawking igual a zero, por isso são denominados de "buracos negros frios". Nosso objetivo neste trabalho é propor um estudo de espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos em teorias de  $k$ -essência. Tais teorias são amplamente aplicadas no contexto de expansão acelerada do universo, energia escura e modelos inflacionários, entretanto, há uma lacuna no estudo de objetos locais, como estrelas, buracos negros e buracos de minhoca. Em nosso estudo de teorias de  $k$ -essência em configurações estáticas e esfericamente simétricas resultou em duas soluções distintas: uma primeira solução com características semelhantes às encontradas em buracos negros frios, mas com dois horizontes de eventos (de natureza cosmológica) e não assintoticamente plana; e, uma segunda solução com apenas um horizonte de eventos, semelhante à solução de Schwarzschild imersa em espaço-tempo assintoticamente singular.

**Palavras chave:** Relatividade Geral, Teorias Escalares-Tensoriais, Teorias de  $K$ -essência, Espaços-tempos esfericamente simétricos

## Abstract

The study of general relativity minimally coupled to a scalar field in a static and spherically symmetric space-time shows that black hole solutions are possible with the existence of a scalar phantom field. These black holes, considered exotic, have infinite area horizon and zero Hawking temperature, hence they are called "cold black holes". Our objective is to propose a study of statics and spherically symmetric space-times in theories of k-essence. Such theories are widely applied in the context of accelerated expansion of the universe, dark energy and inflationary models, however there is a gap in the study of local objects such as stars, black holes and wormholes. In our study of k-essence theories in static and spherically symmetric settings resulted in two different solutions: a first solution with features similars to those found in cold black holes, but with two event horizons (of cosmological nature) and non-asymptotically flat; and a second solution with only one event horizon, similar to the Schwarzschild solution immersed in asymptotically singular space-time.

**Keywords:** General Relativity, Scalar-tensor theories, K-essence theories, Spherically symmetric spaces-times

# Lista de Figuras

3.1	Diagrama do espaço-tempo com base nas coordenadas $(u, v)$ . . . . .	22
3.2	Diagrama de Kruskal. . . . .	24
3.3	Diagrama de espaço-tempo baseado nas coordenadas $(v, r)$ . . . . .	25
3.4	Coordenadas compactas do espaço-tempos de Schwarzschild. . . . .	25
3.5	Diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Schwrazschild. . . . .	26
3.6	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, para o caso $m^2 < q^2$ . . . . .	30
3.7	Diagramas de Penrose-Carter do espaço-tempo de Reissner-Nordström . . . . .	31
3.8	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo Schwarzschild-de Sitter para $0 < 9\Lambda m^2 < 1$ . Este contém uma sequência infinita de regiões Schwarzschild-de Sitter. Todas as linhas mostradas têm valores de constantes de $r$ . . . . .	33
3.9	(a) Dois eventos simultâneos, 1 e 2, considerados o mesmo evento, criando um atalho no tempo zero entre as linhas de mundo. (b) Diagrama de um buraco de minhoca que liga duas regiões distintas de um espaço-tempo . . . . .	35
3.10	O interior da solução de Schwarzschild é dinâmico: representação do diagrama de imersão de um estrangulamento da garganta. . . . .	35
3.11	Diagrama de imersão de um buraco de minhoca. . . . .	37
3.12	Um buraco de minhoca conectando regiões de um mesmo espaço-tempo, funcionando como um atalho. . . . .	37
5.1	Gráficos correspondentes à partes de regiões conformes. . . . .	65
5.2	Construção do diagrama de Penrose para solução particular I. . . . .	66
5.3	Diagrama de Penrose para solução 1. Os cones de luz indicam a direção temporal . . . . .	66
5.4	Construção do diagrama de Penrose para solução particular II. . . . .	71
5.5	Diagrama de Penrose para solução 2 com $B_0 > 0$ . As letras R e T correspondem às regiões estática e não estática, respectivamente. . . . .	72

# Lista de Tabelas

3.1	Limites do espaço-tempo de Schwarzschild compactado . . . . .	26
-----	---	----

# Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	viii
Abstract	ix
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentos da Relatividade Geral</b>	<b>4</b>
2.1 Sistema de coordenadas e referenciais . . . . .	4
2.2 Curvatura do espaço-tempo Riemanniano . . . . .	5
2.3 A ação do campo gravitacional e equações dinâmicas . . . . .	8
2.3.1 Equações de Einstein . . . . .	8
2.3.2 Equação da geodésica . . . . .	9
2.4 Campos não gravitacionais em relatividade geral . . . . .	11
2.4.1 Campos escalares . . . . .	11
2.4.2 Campo eletromagnético . . . . .	12
2.5 Grupos de isometria e vetores de Killing . . . . .	13
<b>3 Buracos Negros e Buracos de Minhoca</b>	<b>15</b>
3.1 Espaço-tempo Esféricamente Simétrico . . . . .	15
3.1.1 Centro regular e espaços assintoticamente planos . . . . .	17
3.2 Solução de Schwarzschild . . . . .	18
3.2.1 Solução de Schwarzschild . . . . .	18
3.2.2 Singularidade . . . . .	21
3.2.3 Coordenadas de Kruskal . . . . .	21
3.2.4 Coordenadas de Eddington-Finkelstein . . . . .	23
3.2.5 Diagrama de Penrose-Carter . . . . .	25
3.2.6 Horizonte de eventos . . . . .	27

3.3	Solução de Reissner-Nordström . . . . .	27
3.3.1	Horizontes e estrutura causal . . . . .	29
3.4	Solução Schwarzschild-de Sitter . . . . .	31
3.4.1	Buracos negros no espaço-tempo de de Sitter . . . . .	32
3.5	Solução de Buraco de Minhoca . . . . .	34
3.5.1	Buraco de minhoca . . . . .	34
3.5.2	Buracos de minhoca transitáveis . . . . .	36
3.5.3	Criando um buraco de minhoca . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Buracos Negros Escalares</b>	<b>39</b>
4.1	Teoria Escalar-Tensorial . . . . .	39
4.1.1	Campos Fantasmas . . . . .	41
4.2	Buracos negros em teorias escalares-tensoriais . . . . .	42
4.2.1	Campos escalares não-minimamente acoplados à gravidade . . . . .	42
4.2.2	Solução de buracos negros em campos escalares minimamente acoplados à gravidade . . . . .	43
4.2.3	<i>Frame</i> de Jordan na teoria Brans-Dicke . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Teorias de k-essência em espaços-tempos esfericamente simétricos</b>	<b>55</b>
5.1	Teorias de k-essência . . . . .	55
5.1.1	Equações de campo . . . . .	56
5.2	Um teorema No-Go . . . . .	57
5.2.1	Horizontes de Killing . . . . .	59
5.3	Solução particular I . . . . .	59
5.3.1	Estrutura causal . . . . .	63
5.4	Solução particular II . . . . .	67
5.4.1	Estrutura causal . . . . .	70
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>73</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>75</b>
	<b>Apêndice A Breve Histórico</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A relatividade geral é a teoria geométrica da gravitação publicada por Albert Einstein, em 1915 [32, 31, 33], e é a atual descrição da Física para a gravitação. A relatividade geral fornece uma descrição unificada da gravidade como uma propriedade geométrica do espaço e do tempo, ou espaço-tempo. Em particular, a curvatura do espaço-tempo é diretamente relacionada com a energia e o momento de matéria ou radiação. Esta relação é dada pelas equações de campo de Einstein, que compõem um sistema de equações diferenciais parciais não lineares.

Algumas previsões da relatividade geral diferem significativamente das previsões da física clássica, especialmente sobre a passagem do tempo, a geometria do espaço, o movimento dos corpos em queda livre e a propagação da luz. Tais diferenças incluem dilatação de tempo gravitacional, lente gravitacional, desvio para o vermelho de origem gravitacional da luz e o atraso gravitacional do tempo. As previsões da relatividade geral foram confirmadas em todas as observações e experiências até o momento. Embora a relatividade geral não seja a única teoria relativista da gravidade, apresenta-se como a teoria mais simples e consistente com dados experimentais. No entanto, há questões ainda sem respostas, sendo a mais fundamental delas explicar como a relatividade geral pode ser conciliada com as leis da física quântica para produzir uma teoria completa e auto-consistente da gravitação quântica.

A teoria de Einstein tem implicações astrofísicas importantes. Ela aponta para a existência de buracos negros - regiões no espaço onde o espaço e o tempo são distorcidos de tal forma que nada, nem mesmo a luz pode escapar - como um estado final para as estrelas massivas. Há ampla evidência de que a intensa radiação emitida por certos tipos de objetos astronômicos seja devido aos buracos negros; por exemplo, microquasares e núcleos galácticos ativos resultariam da presença de buracos negros estelares e buracos negros supermassivos, respectivamente. O desvio da luz pela gravidade pode levar ao fenômeno de lente gravitacional, no qual várias imagens do mesmo objeto astronômico distante são visíveis no céu. A relatividade geral prevê ainda a existência de ondas gravitacionais, que já foram observadas indiretamente; uma medida direta é o objetivo de projetos como o *LIGO*[2], *Virgo*[48] e *Laser Interferometer Space Antenna* da *ESA* (*ELISA*)[50]. Em 11 de fevereiro de 2016, o projeto LIGO anunciou a primeira medida direta de ondas gravitacionais[1]. Estas ondas gravitacionais foram originadas a partir da fusão de dois

buracos negros de massa estelar, que formavam um sistema binário, se tornando, conseqüentemente, a primeira observação de uma fusão buraco negro binário.

A previsão mais popular e exótica de relatividade geral é certamente a existência de buracos negros. A imagem de bocas enormes insaciáveis que devoram tudo, não permitindo o retorno de nenhum objeto ou sinal, tornou-se, sem exagero, uma parte da cultura humana, da ficção científica ao folclore.

Curiosamente, a primeira solução exata das equações de Einstein, a solução de Schwarzschild [70], que caracteriza o campo estático de um centro gravitando, descreve o buraco negro mais simples. Embora totalmente compreendidas somente na década de 50 [57, 73], suas propriedades ainda despertam o interesse de muitos pesquisadores.

Desde o início dos anos 60, a física de buraco negro começou a se estabelecer como uma linha independente de investigação, e isso levou a muitos resultados interessantes e inesperados. Descobriu-se, por exemplo, que é possível extrair energia de buracos negros que giram, lançando pequenos corpos em sua vizinhança, diminuindo ligeiramente sua rotação [66]; que podemos considerar os buracos negros como objetos termodinâmicos com certa temperatura e entropia [9]; que os buracos negros podem evaporar, emitindo energia para o espaço ambiente, exatamente como corpos comuns aquecidos até à temperatura correspondente de evaporação [45]. O processo de evaporação Hawking está conectado com a produção de partícula quântica no campo gravitacional clássico do buraco. Os buracos negros de massas estelares e massas maiores evaporam muito lentamente, e isso não afeta todos os processos observáveis.

Campos escalares minimamente acoplados à gravidade foram considerados pela primeira vez por Fisher [38], que encontrou uma solução estática, esfericamente simétrica com as equações de Einstein-campo escalar sem massa. Uma contrapartida de solução de Fisher para campos escalares sem massa com um sinal inadequado da energia cinética (chamado de campo escalar fantasma) foi encontrada por Bergmann e Leipnik [11]. Mais tarde, um estudo geral de sistemas escalares esfericamente simétricos com gravidade, incluindo um possível acoplamento não-mínimo, foi realizado por Bronnikov [16], que identificou novas configurações não triviais que correspondem a estruturas de buraco negro e buraco de minhoca. Entre os casos especiais estão os buracos negros neutros e carregados [14] e os buracos de minhoca com um campo conformalmente escalar acoplado, bem como os chamados buracos de minhoca de Ellis (descrito pelo caso mais simples da solução Bergmann-Leipnik [11]) e buracos de minhoca na teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke [15] no caso em que o acoplamento  $\omega$  constante é menor do que  $-3/2$ . Estes resultados foram estendidos posteriormente e identificados como *buracos negros frios*, isto é, buracos negros contendo cargas escalares, exibindo gravidade superficial zero e áreas de superfície de horizonte infinita [19, 20, 26]. Em geral, na obtenção de tais buracos negros frios, o campo escalar deve ter energia cinética negativa, ou seja, ele deve ser fantasma e violar as condições de energia padrão.

Isto posto, nosso objetivo é propor nesta dissertação um estudo de espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos em teorias de  $k$ -essência. As teorias de  $k$ -essência são amplamente aplicadas no contexto de expansão acelerada do universo, energia escura e modelos

inflacionários, porém, há uma lacuna no estudo de objetos locais, como estrelas, buracos negros e buracos de minhoca. No capítulo 2, apresentaremos de forma sucinta alguns conceitos importantes de relatividade geral. No capítulo 3, faremos uma revisão acerca dos espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos assintoticamente planos, dados pelas soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström e espaços-tempos não assintoticamente planos, dado pela solução de Schwarzschild-de Sitter. Analisaremos suas singularidades, horizontes e estrutura causal. Ainda neste capítulo, faremos uma discussão de outro tipo de solução esfericamente simétrica, o buraco de minhoca e dos requisitos, em tese, para se criá-lo. Além disso, discutiremos acerca do buraco de minhoca transitável. No capítulo 4, faremos a revisão de parte do artigo intitulado *Cold Scalar-Tensor Black Holes: Causal Structure, Geodesics, Stability* [19] em que os autores estudam a estrutura causal, geodésicas e estabilidade de buracos negros frios. Em seguida, no capítulo 5, apresentaremos nossa contribuição original e proposta central da dissertação, *On Horizons and Wormholes in  $k$ -Essence Theories* [22], que é obter e analisar soluções para espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos em teorias de  $k$ -essência. Por fim, na Conclusão, registraremos nossas discussões acerca dos resultados mais importantes obtidos.

# Capítulo 2

## Fundamentos da Relatividade Geral

As ideias básicas da relatividade geral são muito bem apresentadas em um grande número de livros e monografias bem conhecidos, como por exemplo, [77, 61, 78, 59], dentre outros. Ciente desses fundamentos, nesta seção, vamos citar apenas os fatos básicos e as principais relações da relatividade geral. Muitas noções geométricas, tais como vetor e tensor, componentes co-variantes e contravariantes de vetores e tensores, contração de tensores e assim por diante, supomos serem conhecidas, uma vez que, serão, aqui, utilizadas sem explicações.

O espaço-tempo em relatividade geral é uma variedade de quatro dimensões com uma métrica pseudo-Riemanniana. O campo gravitacional é descrito na relatividade geral em termos da curvatura do espaço-tempo, que é expresso usando o tensor métrico com relação às coordenadas. Assim, a relatividade geral pertence à classe das teorias métricas da gravidade [80] e é historicamente a primeira, a mais simples, e é a mais bem elaborada teoria desta classe.

### 2.1 Sistema de coordenadas e referenciais

Em qualquer das variedades diferenciáveis, tanto no espaço-tempo Minkowski ou em qualquer espaço-tempo Riemanniano, transformações arbitrárias de coordenadas  $x^\mu \mapsto y^\mu$  são possíveis, com funções arbitrárias

$$x^\mu = x^\mu(y^0, y^1, y^2, y^3). \quad (2.1)$$

No espaço-tempo físico, as transformações de coordenadas (2.1) conduzem, em geral, à alterações no referencial.

Note que uma relação entre as noções de sistemas de coordenadas e referencial é uma questão sutil que às vezes conduz à confusões e equívocos. É, portanto, essencial explicarmos em que sentido usaremos essas noções. Esta discussão, em sua maior parte, encontra-se nos livros [75, 81, 4].

Em suma, um espaço Riemanniano é uma variedade diferenciável de dimensão  $D$  equipada com uma métrica  $g_{\mu\nu}$ . Se tal assinatura é definida como positiva,  $(+ + \dots +)$ , o espaço é chamado Riemanniano, em outros casos é chamado pseudo-Riemanniano<sup>1</sup>.

Vamos considerar um espaço-tempo Riemanniano arbitrário com o intervalo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

com o tensor métrico simétrico  $g_{\mu\nu}$ , tendo a assinatura  $(+ - - -)$ <sup>2</sup>.

Fixando um ponto arbitrário, podemos trazer o tensor métrico, neste ponto, a uma forma diagonal por transformações lineares de coordenadas e, em seguida, ordenando os elementos da diagonal obtidos e normalizando-os para mais ou para menos unidades, obtendo sempre o tensor de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.3)$$

devido à nossa escolha da assinatura. Isto indica claramente que em uma pequena vizinhança de cada ponto da geometria de qualquer espaço-tempo Riemanniano coincide com a geometria de Minkowski, e todos os fenômenos para os quais a curvatura é insignificante pode ser descrito no contexto da relatividade especial.

## 2.2 Curvatura do espaço-tempo Riemanniano

Aqui apresentaremos algumas definições e relações importantes do espaço-tempo Riemanniano que serão frequentemente usadas nesta dissertação. Antes de mais nada, vamos relacionar a métrica  $g_{\mu\nu}$  com a sua inversa  $g^{\mu\nu}$  por meio de

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (2.4)$$

em que  $\delta_\mu^\nu$  é o símbolo de Kronecker, definido por

$$\delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1 & , \text{ se } \mu = \nu \\ 0 & , \text{ se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.5)$$

Os tensores  $g_{\mu\nu}$  e  $g^{\mu\nu}$  são usados para levantar e abaixar os índices de um tensor qualquer.

Derivadas parciais de qualquer função escalar  $f(x^\mu)$  com respeito às coordenadas,  $\partial_\mu f$ , forma um vetor covariante chamado de gradiente de  $f$ . Derivadas parciais dos componentes de um vetor  $A_\mu$  ou  $A^\mu$ , não formam um tensor porque as transformações de coordenadas são, em

<sup>1</sup>o prefixo "pseudo" será frequentemente omitido; de outro modo, usaremos simplesmente espaço-tempo Riemanniano

<sup>2</sup>Espaços-tempos com esta assinatura são chamados *de Lorentz* ou *Lorentziano*. O mesmo termo também é aplicado à assinatura  $(- + + +)$ ; muitos autores usam esta assinatura. O conteúdo físico da teoria certamente não dependem da escolha de *um mais e três menos* ou vice-versa, porém as formas de algumas equações tornam-se ligeiramente diferentes o que cria alguma inconveniência e exige certos cuidados.

geral, não lineares. Para obter uma forma covariante das equações físicas, portanto, é preciso generalizar a noção de derivada, para torná-las um tensor. Este objetivo é conseguido através da introdução das derivadas covariantes

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}A_{\nu} &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha}, \\ \nabla_{\mu}A^{\nu} &= \partial_{\mu}A^{\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\nu}A^{\alpha},\end{aligned}\tag{2.6}$$

em que as quantidades  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  (que não são um tensor) são chamados de símbolos de Christoffel ou coeficientes de conexão afim. São expressos em termos do tensor métrico e suas derivadas parciais de primeira ordem:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma} (\partial_{\nu}g_{\mu\sigma} + \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).\tag{2.7}$$

Os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices inferiores, por isso, em geral, podem haver até 40 componentes diferentes.

Para tensores de qualquer *rank*, as derivadas covariantes são calculadas de acordo com (2.6) e aplicada a cada índice superior ou inferior separadamente. Por exemplo, para o tensor misto  $T_{\mu}^{\nu}$  temos

$$\nabla_{\alpha}T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\alpha}T_{\mu}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}T_{\mu}^{\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}T_{\beta}^{\nu}.\tag{2.8}$$

Devido a (2.7), o tensor métrico é covariantemente constante:

$$\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}g^{\mu\nu} = 0.\tag{2.9}$$

Portanto, a operação de diferenciação covariante comuta com a subida e a descida de índice, o que é extremamente conveniente nas transformações de expressões de tensores mais complexos.

Um ponto importante é a aplicação repetida de derivadas covariantes. Derivadas parciais usuais são conhecidas por comutarem entre si; o mesmo é verdade para as derivadas covariantes de um escalar  $f$ . A derivada de primeira ordem,  $\nabla_{\mu}f \equiv \partial_{\mu}f$ , é uma derivada parcial, porém a segunda derivada é, obrigatoriamente, um operador nabla aplicado a um vetor, mas, no entanto,

$$(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta} - \nabla_{\beta}\nabla_{\alpha})f = 0.\tag{2.10}$$

Aplicado a um vetor, a comutação de derivadas covariantes dá

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A_{\rho} = R_{\rho\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha},\tag{2.11}$$

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})A^{\rho} = -R_{\alpha\mu\nu}^{\rho}A^{\alpha},\tag{2.12}$$

em que as quantidades  $R_{\mu\rho\nu}^{\sigma}$  são as componentes do tensor chamado tensor de curvatura, ou tensor de Riemann:

$$R_{\mu\alpha\nu}^{\sigma} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma}\Gamma_{\mu\alpha}^{\rho}. \quad (2.13)$$

O tensor de Riemann desempenha um papel central na geometria Riemanniana, uma vez que é este tensor que caracteriza a natureza de uma dada métrica. Por exemplo, para o espaço plano todas as componentes do tensor de Riemann são zero.

As propriedades de simetria do tensor de Riemann podem ser representadas por meio de suas componentes covariantes,  $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\alpha}R_{\nu\rho\sigma}^{\alpha}$ . Por construção, o tensor de Riemann é simétrico com respeito a permutação do primeiro e segundo pares de índices e é anti-simétrico dentro de cada par:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}. \quad (2.14)$$

Além disso, as componentes do tensor de Riemann satisfazem a identidade Ricci

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} + R_{\mu\beta\gamma\alpha} + R_{\mu\gamma\alpha\beta} = 0, \quad (2.15)$$

em que o primeiro índice é o mesmo em todos os termos, enquanto os outros estão sujeitos a permutação cíclica. Devido a (2.14), pode-se reescrever essa identidade com qualquer outro índice fixo.

Tendo em conta a simetria do tensor de Riemann, o número dos seus elementos independentes no espaço 4-dimensional é 20. No caso geral de um espaço D-dimensional este número é igual a  $D^2(D^2 - 1)/12$ . Em exemplos especiais de espaços que possuam simetrias substanciais, o número de componentes independentes é muito menor. Por exemplo, no espaço de Sitter, que tem a máxima simetria possível, todas as componentes do tensor de Riemann são expressos através de apenas uma constante.

As contrações do tensor de Riemann levam ao tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  e ao escalar de curvatura  $R$ , também chamado escalar de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R_{\alpha}^{\alpha}. \quad (2.16)$$

Uma inspeção direta mostra que o tensor de Riemann, além das identidades algébricas (2.14) e (2.15), satisfazem as identidades diferenciais

$$\nabla_{[\alpha}R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0, \quad (2.17)$$

chamadas de identidades de Bianchi.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Como de costume, nos índices, parenteses indicam simetrização e colchetes indicam alternância.

Sua contração por um par de índices resulta em

$$\nabla_{\sigma} R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} + \nabla_{\gamma} R_{\alpha\beta} - \nabla_{\beta} R_{\alpha\gamma} = 0, \quad (2.18)$$

enquanto uma nova contração leva a uma igualdade de extrema importância na teoria da gravitação:

$$\nabla_{\alpha} G^{\alpha}_{\mu} = 0, \quad G^{\nu}_{\mu} := R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2} \delta^{\nu}_{\mu} R. \quad (2.19)$$

O tensor  $G^{\nu}_{\mu}$  é o tensor de Einstein.

Para concluirmos a seção, vamos apresentar uma fórmula para o elemento de volume invariável em um espaço de Riemann de dimensão arbitrária  $D$ : se tentarmos encontrar o volume de um pequeno paralelepípedo especificado por  $D$  vetores  $dx^{\mu}_a$  ( $a$  é o número de um vetor, e  $\mu$  é, como de costume, o número de seu componente), o elemento de volume invariável é

$$dV = \sqrt{|g|} |\det(dx^{\mu}_a)|, \quad g := \det(g_{\mu\nu}). \quad (2.20)$$

Conseqüentemente, uma integral invariante de uma função escalar de  $f(x)$  ao longo de um certo volume  $V$  é

$$\int_V \sqrt{|g|} f(x) d^D x, \quad d^D x := dx^1 dx^2 \dots dx^D. \quad (2.21)$$

Fórmulas similares são válidas para integração ao longo de superfícies de qualquer dimensão  $d < D$  se  $x_{\mu}$  denota as coordenadas contidas na superfície enquanto  $g_{\mu\nu}$  é a métrica interna da superfície, induzida pela métrica do espaço ambiente.

## 2.3 A ação do campo gravitacional e equações dinâmicas

### 2.3.1 Equações de Einstein

Na relatividade geral, as variáveis dinâmicas que caracterizam o campo gravitacional são as componentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ . As equações dinâmicas da relatividade geral são derivadas do princípio de variação de Hilbert

$$\delta S = 0, \quad S = \int \frac{R - 2\Lambda}{2\kappa} \sqrt{-g} d^4 x + S_m, \quad (2.22)$$

em que  $S_m = \int \int L_m \sqrt{-g} d^4 x$  é a ação da matéria, que é composta pela substância e todos os campos, exceto o campo gravitacional, e  $\Lambda$  é a constante cosmológica, que normalmente é insignificante quando se considera configurações locais (até a escala de um aglomerado de galáxias), mas é manifestamente importante na escala cosmológica. A condição  $\delta S = 0$  conduz para as

equações de Einstein-Hilbert, ou apenas equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.23)$$

Aqui,  $\kappa = 8\pi G/c^4$  é a constante gravitacional de Einstein ( $G$  é a constante gravitacional de Newton), e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento da matéria:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.24)$$

Em (2.23) existem, em geral, dez equações diferenciais parciais não-lineares. Em primeiro lugar, a liberdade de escolha de um sistema de coordenadas permite impor quatro condições arbitrárias de coordenadas que podem ser formuladas como igualdades envolvendo os coeficientes  $g_{\mu\nu}$ , e restam apenas seis equações independentes. Em segundo lugar, entre as equações restantes existem quatro dependências diferenciais relacionadas com as identidades (2.19), o que resulta em apenas duas equações dinâmicas reais. As outras quatro são equações de restrição que não contêm derivadas de tempo de segunda ordem. Estas circunstâncias são de importância para todos os processos dinâmicos em relatividade geral, e, acima de tudo, para as ondas gravitacionais, que podem ter apenas duas polarizações independentes.

Devido às identidades contraídas de Bianchi (2.19) e às equações de Einstein (2.23), o tensor energia-momento da matéria obedece a quatro igualdades diferenciais com o significado das leis de conservação<sup>4</sup>

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\mu = 0, \quad (2.25)$$

a partir do qual pode-se obter as equações de movimento para a matéria. Assim, as equações de movimento resultam das equações de campo. Esta circunstância é uma diferença fundamental entre relatividade geral e a maioria das teorias clássicas de campo, incluindo a teoria da gravitação de Newton, onde se tem que postular, separadamente, as equações de movimento para fontes a partir das equações de campo.

### 2.3.2 Equação da geodésica

As equações de movimento para partículas livres em espaços-tempos Riemannianos podem ser obtidas através da variação da ação

$$S = -mc \int ds = -mc^2 \int \sqrt{g_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma} dt, \quad (2.26)$$

<sup>4</sup>Em geral, estas igualdades diferenciais não conduzem a leis de conservação integral pois, para isso, eles devem ter a forma  $\partial f^\mu_\nu / \partial x^\nu = 0$ , e que seria mais preciso dizer que eles expressam a conjunto mudança relacionada à mudança de métrica. No entanto, ao nome "leis de conservação" para as igualdades (2.25) tornou-se bastante comum, e ainda mais, qualquer tensor  $T^\mu_\nu$ , obedecendo a condição (2.25), é freqüentemente chamado de conservativo.

que agora deve ser expresso por um elemento de linha Riemanniano. A equação de variação, que no espaço de Minkowski tem o significado de uma equação da (da geodésica) trajetória, que descreve o extremo do comprimento da linha de mundo entre dois pontos dados, pode ser escrita como

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.27)$$

em que  $s$  é o intervalo que coincide com o tempo próprio de um observador que se move ao longo da geodésica tipo-tempo ou comprimento próprio se o movimento se dá ao longo da geodésica tipo-espaço. Em todos os casos  $s$  é um parâmetro afim.

Vamos derivar a equação (2.27) a partir da lei de conservação (2.25). O resultado irá ilustrar a possibilidade de derivar as equações de movimento para a matéria a partir das equações de Einstein.

Começaremos com a expressão para o conjunto de um fluido perfeito, que pode ser obtido como uma extensão natural da expressão correspondente da relatividade especial [59] para espaços Riemannianos:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.28)$$

em que  $u_\mu$  é a quadrivelocidade das partículas do fluido,  $\rho$  é a sua densidade de energia e  $p$  a sua pressão. Em particular, para a matéria tipo poeira constituída por partículas que não interagem, temos:

$$p = 0, \quad T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (2.29)$$

Os grãos de poeira se movem sem influência de forças externas que não seja a gravidade, portanto, as suas equações de movimento coincidem com os das partículas livres. Vamos obtê-las diferenciando o tensor (2.29):

$$\nabla_\alpha T_\mu^\alpha = u_\mu \nabla_\alpha (\rho u^\alpha) - \rho u^\alpha \nabla_\alpha u_\mu = 0. \quad (2.30)$$

Multiplicando essa igualdade por  $u^\mu$ , tendo em conta que  $u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow \nabla_\alpha (u^\mu u_\mu) = 0$ , obtemos a partir de (2.30) a equação de continuidade  $\nabla(\rho u^\mu) = 0$  (seu significado é a conservação de massa para a poeira) e a equação de movimento

$$u^\mu \nabla_\mu u_\alpha = 0, \quad (2.31)$$

que pode ser reescrita na forma

$$u^\mu \nabla_\mu u_\alpha = 0 \Rightarrow \frac{dx^\mu}{ds} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.32)$$

em que, finalmente, obtemos a equação (2.27)

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.33)$$

As geodésicas podem ser do tipo-espaço, tipo-tempo e nula, e ao longo da própria geodésica, essa natureza especial não se altera, pois  $\partial_\alpha(u_\mu u^\mu) = 0$ .

## 2.4 Campos não gravitacionais em relatividade geral

Todos os tipos de matéria, exceto o campo gravitacional, admitem uma descrição no âmbito da relatividade especial. Para sua descrição em relatividade geral (e, em geral, em qualquer teoria formulada em um espaço Riemanniano), o chamado *princípio de acoplamento mínimo* é utilizado, segundo o qual todas as equações conhecidas na relatividade especial são estendidas para espaço-tempo curvo, substituindo todas as derivadas parciais por derivadas covariantes. Notamos que este artifício pode até aumentar a liberdade de cálculos no âmbito da relatividade especial, sem restrição para as coordenadas de Minkowski, introduzindo coordenadas curvilíneas e invocando quaisquer acelerações, translacionais e rotacionais.

Vamos apresentar algumas relações válidas para a matéria não gravitacional no espaço-tempo curvo de acordo com o princípio de acoplamento mínimo.

### 2.4.1 Campos escalares

Para um campo escalar  $\phi$  com auto-interação arbitrária, descrita por um potencial  $V(\phi)$ , se for minimamente acoplado à gravidade, a Lagrangiana no espaço curvo é escrita precisamente da mesma forma que no espaço de Minkowski:

$$L_s = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi), \quad (2.34)$$

e a sua variação com respeito à  $\phi$  leva a uma equação que generaliza a equação relativística de Klein-Gordon

$$\square\phi + dV/d\phi = 0, \quad (2.35)$$

com o operador de d'Alembert geral e relativístico

$$\square = \nabla^\alpha \nabla_\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta). \quad (2.36)$$

O tensor energia-momento do campo escalar é obtido a partir da Lagrangiana (2.34) pela sua variação de acordo com (2.24):

$$T_{\mu_s}^\nu = \phi_{,\mu} \phi^{,\nu} - \delta_\mu^\nu L_s \quad (2.37)$$

Formas mais complexas de campos escalares são também consideradas em problemas de gravitação e cosmologia. Por exemplo, a chamada *k-essência* com lagrangianas com a forma geral  $L_s = F(\phi, X)$ , com  $X = (\partial\phi)^2$ , não viola o princípio de acoplamento mínimo.

### 2.4.2 Campo eletromagnético

O campo eletromagnético caracteriza-se pelo potencial vetor  $A_\mu$  e pelo tensor eletromagnético, também chamado tensor de Maxwell

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (2.38)$$

A Lagrangiana do campo eletromagnético generaliza diretamente a expressão do espaço plano correspondente. Para um campo com fontes, a Lagrangiana é

$$L_{em} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.39)$$

em que  $j^\mu$  é a densidade de corrente de carga elétrica. Sua variação em relação à  $A_\mu$  resulta em uma equação dinâmica que corresponde ao segundo par das equações de Maxwell na eletrodinâmica habitual,

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) = j^\mu, \quad (2.40)$$

e devido a (2.40) a lei de conservação quadri-corrente se mantém automaticamente:

$$\nabla_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}j^\mu) = 0, \quad (2.41)$$

O primeiro par de equações de Maxwell encontra o seu análogo na identidade a partir de (2.38),

$$\nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma F_{\mu\nu} + \nabla_\nu F_{\sigma\mu} = 0, \quad (2.42)$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla_\mu {}^*F^{\mu\nu}, \quad (2.43)$$

em que  ${}^*F^{\mu\nu}$  é tensor dual de  $F_{\mu\nu}$ :

$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}} F_{\rho\sigma}. \quad (2.44)$$

O tensor energia-momento do campo eletromagnético é obtido variando a ação do campo  $F_{\mu\nu}$  com respeito à  $g^{\mu\nu}$ :

$$T_{\mu}^{\nu}{}_{em} = -F_{\mu\alpha}F^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}\delta_{\mu}^{\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (2.45)$$

O campo de Maxwell (2.38) não muda se for acrescentado um gradiente de qualquer função escalar  $f(x^\mu)$  ao potencial vetor  $A_\mu$ . Esta propriedade de invariância de calibre é de extrema importância na eletrodinâmica e é evidentemente preservada se considerarmos Lagrangianas mais gerais que (2.39), tais como  $L(F)$  e  $L(F, G)$ , em que  $F := F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  e  $G := {}^*F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . Tais formas de eletrodinâmica não linear, respeitando o princípio de acoplamento mínimo, também podem ser usadas em problemas gravitacionais.

O princípio de acoplamento mínimo não é universal e muitos pesquisadores discutem as interações não-mínimas entre campos materiais e gravidade. Estas interações são introduzidas pela adição de certos termos na Lagrangiana que contêm um campo material e alguns invariantes da curvatura, geralmente, o escalar de curvatura  $R$ . Poderíamos, também, ter invariantes envolvendo o campo material e a curvatura, como, por exemplo,  $A^\mu\partial_\mu R$ . Assim, uma interação não-mínima entre um campo escalar e a gravidade pode ser introduzida por meio de uma adição, em (2.34), do termo  $\zeta R\phi^2$ ,  $\zeta = \text{constante}$ , enquanto uma interação não-mínima entre o campo eletromagnético e a gravidade pode ser descrita pelo termo  $\zeta RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

## 2.5 Grupos de isometria e vetores de Killing

O espaço-tempo de Minkowski possui a maior simetria possível, expressada na invariância do intervalo em relação ao grupo de Poincaré ( $G_{10}$ , ou seja, um grupo de 10 parâmetros). Um espaço-tempo geral Riemanniano  $\mathbb{V}_4$  não possui qualquer simetria, enquanto em casos especiais, em que exista simetria, é descrita por um grupo de isometria com um certo número de parâmetros, obviamente, não mais que dez. Este número é igual ao número de soluções linearmente independentes  $\zeta_\alpha$  da equação de Killing

$$\nabla_\alpha\zeta_\beta + \nabla_\beta\zeta_\alpha = 0. \quad (2.46)$$

Os vetores  $\zeta^\mu$ , vetores de Killing, que satisfazem a Eq. (2.46), possuem a seguinte propriedade: se todos os pontos são deslocados de  $\zeta^\mu d\lambda$  (em que  $d\lambda$  é uma quantidade infinitesimal), todas as relações métricas em  $\mathbb{V}_4$  permanecerão invariáveis. Deslocamentos consecutivos de  $\zeta^\mu d\lambda$  levam a um movimento de pontos de mundo ao longo de uma *órbita do vetor de Killing*, cujos pontos são todos mutuamente equivalentes. Por exemplo, sobre uma superfície arbitrária de rotação no habitual espaço 3-dimensional, há um vetor de Killing apontando ao longo do "paralelo" e descrevendo mudanças ao longo deste "paralelo" por pequenos ângulos azimutais, enquanto todo o "paralelo" é uma órbita deste vetor de Killing.

As métricas maximamente simétricas ( $G_{10}$ ), em  $\mathbb{V}_4$ , são conhecidas por serem soluções para as equações de Einstein no vácuo,

$$R_{\nu\mu} + g_{\nu\mu}\Lambda = 0, \quad (2.47)$$

com a constante cosmológica  $\Lambda$ , que corresponde ao tensor energia-momento efetivo  $T_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}\Lambda/\kappa$ . Estes espaços são chamados de *espaços de curvatura constante*: o espaço de curvatura constante zero é o espaço de Minkowski ( $\Lambda = 0$ ), o espaço de curvatura constante positiva é o espaço de Sitter (dS) ( $\Lambda > 0$ ), o espaço de curvatura constante negativa é o espaço anti-de Sitter (AdS) ( $\Lambda < 0$ ). Nos espaços de curvatura constante, o tensor de Riemann é determinado por uma única constante ( $\Lambda$ ) e também em termos do tensor métrico da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\Lambda}{3}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}), \quad (2.48)$$

em que o tensor e escalar de Ricci podem ser obtidos

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\Lambda, \quad R = 4\Lambda. \quad (2.49)$$

# Capítulo 3

## Buracos Negros e Buracos de Minhoca

### 3.1 Espaço-tempo Esfericamente Simétrico

Uma suposição natural para uma descrição mais simples de corpos isolados, como se fossem ilhas, é a simetria esférica. Espaços-tempos esféricamente simétricos são invariantes sob rotações espaciais, formando o grupo de isometria  $G_3$ .

No caso mais geral, podemos escrever uma métrica esféricamente simétrica da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} dr^2 - e^{2\beta} d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.1)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são, geralmente, funções da coordenada radial  $u$  (ou  $r$ ) e da coordenada temporal  $t$ . Também usaremos a notação  $r \equiv e^\beta$ ; aqui,  $r$  representa o raio de uma esfera coordenada  $u = \text{constante}$ ,  $t = \text{constante}$ , ou a coordenada radial de Schwarzschild. Vale ressaltar que, no espaço curvo, o raio esférico  $r$  nada tem a ver com a distância em relação ao centro coordenado, podendo nem mesmo existir um centro. Na expressão (3.1) há uma liberdade na escolha de referencial: diferentes referenciais correspondem a corpos distintos com diferentes distribuições de velocidade radial entre si.

No caso de um espaço-tempo estático (no grupo de isometria  $G_4$  [69, 51, 55] as rotações são complementadas com translações temporais), pode-se sempre escolher o referencial de tal maneira que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  dependam apenas de  $u$ . Há ainda a possibilidade de substituir a coordenada radial  $u$  por uma outra, através de transformações da forma  $u = u(\rho)$ ; a ideia aqui é definir a escolha da coordenada radial postulando uma relação entre as funções  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

Ao resolver problemas diferentes, pode ser conveniente, dependendo de cada caso, adotar diferentes variantes de tais condições de coordenadas[25]. Vamos enumerar algumas delas.

1.  $e^\alpha \equiv 1$ ,  $du = dl$ . Neste caso temos a coordenada normal Gaussiana, em que a coordenada  $l$  é de fato o comprimento ao longo da direção radial, contando a partir de uma esfera fixada em  $l = 0$ ;

2.  $u = r$ ,  $\gamma = \gamma(r)$ ,  $\alpha = \alpha(r)$  e  $\beta = \ln r$ . Coordenada de (Schwarzschild) curvatura:  $r$  é o raio de curvatura da esfera  $r = \text{constante}$ ;
3.  $e^{2\beta(u)} = e^{2\alpha(u)}u^2$ . Coordenadas isotrópicas, em que a parte espacial é escrita na forma conformalmente plana:

$$dl^2 = e^{2\alpha(u)}(dr^2 + u^2d\Omega^2) = e^{2\alpha(u)}d\vec{x}^2, \quad (3.2)$$

em que, o elemento de linha em três dimensões, em coordenadas cartesianas, é introduzido,  $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ ;

4.  $\alpha(u) = 2\beta(u) + \gamma(u)$ . A coordenada harmônica  $u$  é usada particularmente para resolver problemas que envolvem campos escalares;
5.  $\alpha(u) = -\gamma(u)$ . Coordenada  $u$  quasiglobal. Este nome está ligado com o fato de que esta coordenada é mais adequada na descrição de buracos negros e outras métricas similares, em ambos os lados do horizonte;
6.  $\alpha(u) = \gamma(u)$ . Aqui,  $u$  às vezes é chamada de "coordenada tartaruga", pois em muitos casos importantes as funções métricas mudam muito lentamente quando expressas em termos de  $u$ . Neste caso, a métrica do subespaço  $(t, u)$  toma uma forma conformalmente plana, o que simplifica a análise de equações de onda.

Outras condições de coordenadas podem ser usadas.

A métrica na forma (3.1) é o caso mais geral, com coordenadas  $u$  e  $t$  arbitrárias. A escolha das condições de coordenadas citadas anteriormente vai depender de como será conduzida a solução do problema, bastando simplesmente substituir a condição correspondente.

Ao estudar qualquer espaço-tempo, é acima de tudo importante saber se este espaço-tempo é regular, o que significa que todos os invariantes de curvatura são finitos em todos os seus pontos, ou contém singularidades de curvatura, no qual, pelo menos um destes invariantes é infinito. Em muitos casos, é mais útil para verificar a finitude do escalar Kretschmann  $\mathcal{K} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ . Para uma métrica estática (3.1), o escalar Kretschmann é uma soma dos quadrados de todos os componentes diferentes de zero do tensor de Riemann  $R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= 4K_1^2 + 8K_2^2 + 8K_3^2 + 4K_4^2 \\ K_1 &= e^{-2\alpha} [\gamma'' - \gamma'(\alpha' - \gamma')] = -R_{01}{}^{01} \\ K_2 &= e^{-2\alpha} \beta' \gamma' = -R_{02}{}^{02} = -R_{03}{}^{03} \\ K_3 &= e^{-2\alpha} [\gamma'' - \gamma'(\alpha' - \beta')] = -R_{12}{}^{12} = -R_{13}{}^{13} \\ K_4 &= -e^{-2\beta} + e^{-2\alpha} \beta'^2 = -R_{23}{}^{23} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Isso acontece porque, neste caso (e em muitos outros casos importantes), o tensor  $R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$  é diagonal aos pares. Isso significa que todos  $K_i$  são invariantes sob parametrizações da coordenada  $u$ , ou seja, sob as transformações  $u \rightarrow f(u)$ . Em outras palavras, eles se comportam

como escalares em tais transformações. Notemos que uma parametrização  $u \rightarrow f(u)$  é um caso especial de uma transformação puramente espacial de coordenadas, deixando o referencial inalterado.

Uma vez que o escalar  $\mathcal{K}$  é uma soma de quadrados, para que seja finito é necessário que todos as suas componentes  $K_i$  sejam finitas, para tal, é necessário, também, que as componentes não nulas do tensor de Riemann  $R_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$  sejam finitas. Assim, se o  $\mathcal{K}$  escalar é finito, todos os invariantes que podem ser construídos algebricamente, a partir do tensor de Riemann e do tensor métrico, são finitos, em particular, o escalar de curvatura  $R$ , o "tensor de Ricci quadrado"  $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$ , o invariante  $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\mu}R^{\beta\nu}$  e assim por diante. Dessa forma, o caráter finito de  $\mathcal{K}$  em algum ponto do espaço-tempo significa que uma singularidade de curvatura está ausente neste ponto.

É importante mencionar que as singularidades de curvatura não são o único tipo de singularidades que podem aparecer em espaços-tempos fisicamente relevantes. Na forma mais geral, uma singularidade é definida como um ponto ou um conjunto de pontos em que as geodésicas cessam com um valor finito do seu parâmetro afim. Em outras palavras, elas são lugares de incompletude geodésica. Isto pode acontecer em qualquer caso em que a métrica perde a sua analiticidade.

### 3.1.1 Centro regular e espaços assintoticamente planos

Um centro em um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico é, por definição, um ponto, linha ou superfície onde  $r \equiv e^\beta = 0$ ; um lugar onde as coordenadas esféricas convergem a um ponto. Um centro pode ser regular ou singular, e como em qualquer ponto do espaço-tempo é determinado por finitude de todos  $K_i$  na expressão (3.3). É importante frisar que, em alguns casos, não pode haver nenhum centro em um espaço-tempo esféricamente simétrico; isto acontece se a quantidade  $r$  é diferente de zero em todo o espaço de tempo, ou pelo menos na sua região estática.

Uma importante condição é obtida a partir da exigência de finitude de  $K_4$  (3.3). O significado é que a circunferência relação ao raio deve ter o valor correto ( $2\pi$ ) para pequenos círculos circunscritos em volta do centro. Esta é uma propriedade de qualquer ponto regular - mas para um centro é preciso introduzir condições especiais de regularidade porque um centro é um ponto singular de um tipo de sistema de coordenadas esféricas usado.

Para  $r \rightarrow \infty$ , longe de fontes de campo gravitacional, em muitos casos, a geometria do espaço-tempo deve coincidir com a geometria de Minkowski. Tais espaços-tempos são chamados assintoticamente planos. Isso significa que todos os componentes do tensor de Riemann tornam-se zero, ou seja, todos  $K_i \rightarrow 0$ . A última condição, no entanto, não é suficiente, pois para um espaço-tempo assintoticamente plano também é necessário ter uma circunferência correta em ao relação raio ( $2\pi$ ) de grandes círculos coordenados. Caso contrário, mesmo com um tensor de curvatura zero o espaço tridimensional terá uma forma de funil assintótico, com um déficit ou excesso de ângulo sólido em comparação com o seu valor padrão de  $4\pi$ . Essa geometria caracteriza um tipo específico de configuração chamado monopólos globais.

Assim como um espaço-tempo esféricamente simétrico pode ser desprovido de um centro, também pode ser desprovido de um infinito plano; além disso, pode não haver limite de  $r \rightarrow \infty$ .

## 3.2 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild recebeu esse nome em homenagem ao seu descobridor, Karl Schwarzschild, que encontrou a solução exata em 1915 e a publicou em 1916[70], um pouco mais de um mês após a publicação da teoria da relatividade geral de Einstein. Essa foi a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein, excetuando-se a solução trivial para o espaço plano.

### 3.2.1 Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico. Trata-se de uma boa aproximação para campos gravitacionais de corpos de lenta rotação como um planeta ou um buraco negro. Conforme o teorema de Birkhoff [13], qualquer solução esféricamente simétrica das equações de campo no vácuo na relatividade geral deve ser estática e assintoticamente plana. Isto significa que a solução de um espaço-tempo exterior a um objeto esférico e sem rotação é dada pela métrica de Schwarzschild. Uma demonstração rigorosa pode ser encontrada em Hawking e Ellis [46].

A solução de Schwarzschild, descreve a geometria de um espaço-tempo estático e esféricamente simétrico ao redor de um objeto de massa  $M$ , no vácuo. Consequentemente, o elemento de linha correspondente, em termos das denominadas coordenadas de Schwazrschild  $(t, r, \theta, \varphi)$ , pode ser escrito da seguinte forma

$$ds^2 = e^{2\gamma(r)} dt^2 - e^{2\alpha(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.4)$$

em que  $e^{2\gamma(r)}$  e  $e^{2\alpha(r)}$  são funções escalares desconhecidas e  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ . Espera-se que a métrica (3.4), quando longe da fonte gravitacional, aproxime-se assintoticamente do espaço-tempo plano, quando:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{2\gamma(r)} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{2\alpha(r)} = 1 \quad (3.5)$$

A partir da métrica (3.4) podemos encontrar os símbolos de Christoffel não nulos

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{10} &= \gamma' \quad , \quad \Gamma^1_{00} = e^{-2(\alpha-\gamma)}\gamma', \\
\Gamma^1_{11} &= \alpha' \quad , \quad \Gamma^1_{22} = -e^{-2\alpha}r, \\
\Gamma^1_{33} &= -e^{-2\alpha}r \sin^2 \theta \quad , \quad \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \quad , \quad \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \\
\Gamma^3_{32} &= \cot \theta.
\end{aligned}$$

Denotemos (') por  $\partial/\partial r$ .

Consequentemente, as componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned}
R_{00} &= e^{-2(\alpha-\gamma)} \left[ \gamma'' + \gamma'^2 - \alpha'\gamma' + \frac{2\gamma'}{r} \right], \\
R_{11} &= - \left[ \gamma'' + \gamma'^2 - \alpha'\gamma' - \frac{2\alpha'}{r} \right], \\
R_{22} &= 1 + e^{-2\alpha} [r\alpha' - r\gamma' - 1], \\
R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Pelo fato de estudarmos uma solução de vácuo ( $R_{\mu\nu} = 0$ ), podemos fazer todas as componentes do tensor de Ricci iguais a zero. Resolvendo, então, este sistema, determinaremos explicitamente as funções  $\alpha(r)$  e  $\gamma(r)$ , fazendo

$$e^{2(\alpha-\gamma)}R_{00} + R_{11} = 0, \tag{3.7}$$

obtemos,

$$\alpha' + \gamma' = 0,$$

que integrando, resulta em

$$\alpha + \gamma = \text{constante},$$

Porém, pela condição (3.5) temos

$$\gamma = -\alpha. \tag{3.8}$$

Agora, fazendo  $R_{22} = 0$ , obtemos

$$e^{2\gamma} (2r\gamma' + 1) = 1,$$

que equivale a

$$(re^{2\gamma})' = 1. \quad (3.9)$$

Podemos resolver a expressão anterior e obter

$$e^{2\gamma} = 1 - \frac{2m}{r}, \quad (3.10)$$

e, conseqüentemente,

$$e^{2\alpha} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.11)$$

em que  $-2m$  é uma constante de integração indeterminada. Pode-se comprovar facilmente que (3.10) e (3.11) satisfazem cada uma das equações  $R_{\mu\nu} = 0$ . Portanto, com (3.10) e (3.11), nossa métrica torna-se

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.12)$$

O que nos resta fazer agora é interpretar a constante  $2m$  em termos de alguns parâmetros físicos. Podemos interpretar a constante  $2m$  considerando o limite Newtoniano [29]. Um ponto de massa  $M$  situada na origem  $O$ , na teoria Newtoniana dá origem a um potencial  $\phi = -GM/r$ . Considerando o limite de campos fracos, temos

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi/c^2 = 1 - 2m/r, \quad (3.13)$$

portanto, é fácil ver que

$$m = GM/c^2. \quad (3.14)$$

Dessa forma, podemos finalmente escrever a métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.15)$$

Note que com  $M \rightarrow 0$ , o espaço de Minkowski é recuperado, o que já era esperado. Note também que a métrica se torna progressivamente Minkowskiana quando  $r \rightarrow \infty$ , ou seja, o espaço-tempo de Schwarzschild se torna assintoticamente plano.

### 3.2.2 Singularidade

Um problema que está associado a um sistema de coordenadas é o fato de que, geralmente, ele cobre apenas uma parte do espaço-tempo. Assim, por exemplo, as coordenadas de Schwarzschild não cobrem o eixo onde  $\theta = 0, \pi$ , pois o elemento de linha torna-se degenerado nesses pontos. Esta degenerescência pode ser removida através da introdução de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , em que, como sabemos

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad \text{e} \quad z = r \cos \theta.$$

Esses pontos são chamados singularidades de coordenada, pois refletem deficiências no sistema de coordenadas utilizado e, portanto, são removíveis. Existem dois outros valores de coordenadas para os quais a solução de Schwarzschild é degenerada,  $r = 2m$  e  $r = 0$ . O valor de  $r = 2m$  é conhecido como o raio de Schwarzschild. A hipersuperfície  $r = 2m$  parece ser uma singularidade de coordenada removível. Como discutido na seção 3.1, isso pode ser verificado por meio do invariante de curvatura

$$\mathcal{K} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{48m^2}{r^6},$$

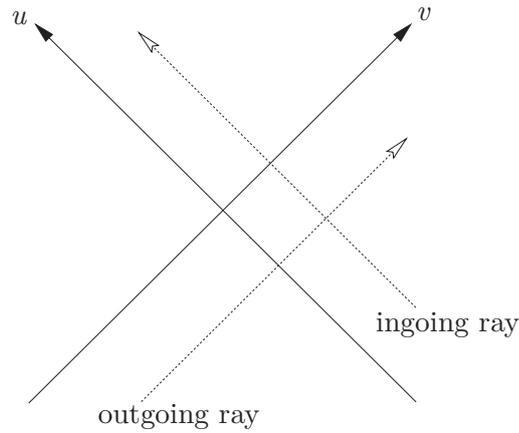
que é finito em  $r = 2m$ . Por ser um escalar, o seu valor continua a ser o mesmo em quaisquer sistemas de coordenadas. Da mesma forma, este invariante explode na origem,  $r = 0$ . A singularidade na origem é, de fato, irremovível e pode ser chamado de singularidade **intrínseca**, de **curvatura**, **física**, **essencial** ou **real**.

Pode-se verificar que, em  $r = 2m$ , nenhum dos invariantes de curvatura explode. Logo, a métrica realmente não é singular neste ponto, ou seja, temos apenas uma má escolha do sistema de coordenadas. Neste caso, talvez seja possível a escolha de um sistema apropriado de coordenadas. Veremos em breve que, neste caso, é de fato possível, e a superfície  $r = 2m$  é bem comportada e interessante na métrica de Schwarzschild, pois demarca o horizonte de eventos de um buraco negro.

### 3.2.3 Coordenadas de Kruskal

As dificuldades da métrica de Schwarzschild em  $r = 2m$  são bem conhecidas. O espaço-tempo é bem comportado, porém, as coordenadas  $(t, r)$  tornam-se singulares quando  $r = 2m$  - não estão mais em uma correspondência um-a-um com eventos do espaço-tempo. Este problema pode ser contornado através da introdução de outro sistema de coordenada. A seguinte construção origina-se do trabalho independente de Kruskal (1960) e Szekeres (1960).

Considere um "enxame" de partículas sem massa que se deslocam radialmente no espaço-tempo de Schwarzschild,  $t$  e  $r$  podem variar, mas  $\theta$  e  $\phi$  não. É fácil verificar que partículas de entrada (*ingoing*) se movem ao longo de curvas  $v = \text{constante}$ , enquanto as partículas de saída (*outgoing*) se movem ao longo de curvas  $u = \text{constante}$


 Figura 3.1: Diagrama do espaço-tempo com base nas coordenadas  $(u, v)$ .

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*$$

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - 2m/r} = r + 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right| \quad (3.16)$$

No diagrama de espaço-tempo, usando  $v$  (tempo avançado) e  $u$  (tempo retardado) como coordenadas oblíquas (ambos orientados a 45 graus), as partículas sem massa se propagam em 45 graus, assim como no espaço-tempo plano (Fig. 3.1). As coordenadas nulas  $(u, v)$  são, portanto, bem adequadas para a descrição radial de geodésicas nulas. Nestas coordenadas a métrica de Schwarzschild assume a forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2 \quad (3.17)$$

Aqui,  $r$  já não aparece como uma coordenada, mas como a função de  $u$  e  $v$  definida implicitamente por

$$r^*(r) = \frac{1}{2}(v - u).$$

Nestas coordenadas a superfície  $r = 2m$  aparece em  $v - u = -\infty$ , e ainda é o *locus* de uma singularidade coordenada. Para ver como esta singularidade de coordenada pode ser removida, focamos nossa atenção em um pequena vizinhança da superfície  $r = 2m$ , em que a relação  $r^*(r)$  pode ser aproximada por

$$r^* \simeq 2m \ln \left| \frac{r}{2m} - 1 \right|.$$

Isto implica que

$$r/2M \simeq 1 \pm e^{r^*/2m} = 1 \pm e^{(v-u)/4m} \quad \text{e} \quad f \simeq \pm e^{(v-u)/4m}, \quad (3.18)$$

em que o sinal superior correspondente a  $r > 2m$ , enquanto o sinal inferior refere-se a  $r < 2m$ . A métrica (3.17) torna-se

$$ds^2 \simeq \mp e^{(v-u)/4m} dvdu + r^2 d\Omega^2. \quad (3.19)$$

A expressão anterior nos motiva a escolher um novo conjunto de coordenadas nulas,  $U$  e  $V$ , definidas por

$$U = \mp e^{-u/4m} \quad e \quad V = e^{v/4m}.$$

Em termos às expressões anteriores, a métrica será bem comportada quando próxima de  $r = 2m$ . Voltando à expressão (3.16), para  $r^*$ , temos que  $e^{r^*/2m} = 1 \pm e^{(v-u)/4m} = \mp UV$ , ou

$$e^{r/2m} \left( \frac{r}{2m} - 1 \right) = -UV, \quad (3.20)$$

que, implicitamente, nos dá que  $r$  é uma função de  $UV$ . Podemos verificar que a métrica de Schwarzschild é, agora, dada por

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-r/2m} dUdV + r^2 d\Omega^2. \quad (3.21)$$

Isto é manifestamente regular em  $r = 2m$ . As coordenadas  $U$  e  $V$  são chamadas de *coordenadas nulas de Kruskal*. Em um diagrama de Kruskal (um mapa do plano de  $UV$ ; ver Fig. 3.2), os raios de luz de saída movem-se ao longo de curvas  $U = \text{constante}$ , enquanto que os raios de luz de entrada movem-se ao longo de curvas  $V = \text{constante}$ .

Nas coordenadas de Kruskal, uma superfície de  $r$  constante é descrita por uma equação da forma  $UV = \text{constante}$ , que corresponde a uma hipérbole de dois ramos no plano  $UV$ . Por exemplo,  $r = 2m$  torna-se  $UV = 0$ , enquanto que  $r = 0$  torna-se  $UV = 1$ . Há *duas cópias* de cada superfície  $r = \text{constante}$  no diagrama de Kruskal. Por exemplo,  $r = 2m$  pode ser  $U = 0$  ou  $V = 0$ . As coordenadas de Kruskal, portanto, revelam a existência de uma variedade muito maior do que a parte coberta pelas coordenadas originais de Schwarzschild. No diagrama de Kruskal, esta parte é rotulada I. As coordenadas de Kruskal não só permitem a continuação da métrica através de  $r = 2m$  para a região II, mas também permitem a continuação nas regiões III e IV. Estas regiões adicionais, no entanto, existem apenas na extensão máxima da Espaço-tempo de Schwarzschild. Se o buraco negro é o resultado de um colapso gravitacional, o diagrama de Kruskal deve reduzir-se às regiões I e II, em um limite tipo-tempo que representa a superfície do corpo em colapso. As regiões III e IV, então, devem desaparecer sob a superfície da estrela em colapso [67].

### 3.2.4 Coordenadas de Eddington-Finkelstein

Devido à natureza implícita da relação entre  $r$  e  $UV$ , as coordenadas de Kruskal podem ser complicadas de se usar em alguns casos. Na verdade, raramente é necessário empregar coordenadas que cobrem todas as quatro regiões do diagrama de Kruskal, embora muitas vezes é

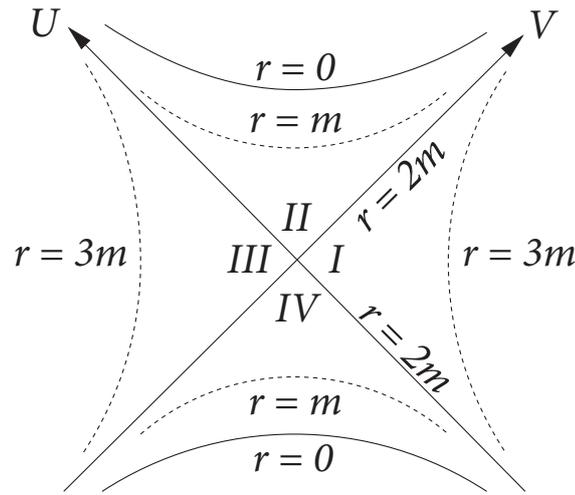


Figura 3.2: Diagrama de Kruskal.

desejável ter as coordenadas que são bem comportadas em  $r = 2m$ . Nesse caso, a escolha de  $v$  e  $r$  ou  $u$  e  $r$  como coordenadas é suficiente. Estes sistemas de coordenadas são conhecidos como coordenadas de Eddington-Finkelstein de entrada (*ingoing*) e de saída (*outgoing*), respectivamente.

É fácil verificar que nas coordenadas de entrada, a métrica de Schwarzschild assume a forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2, \quad (3.22)$$

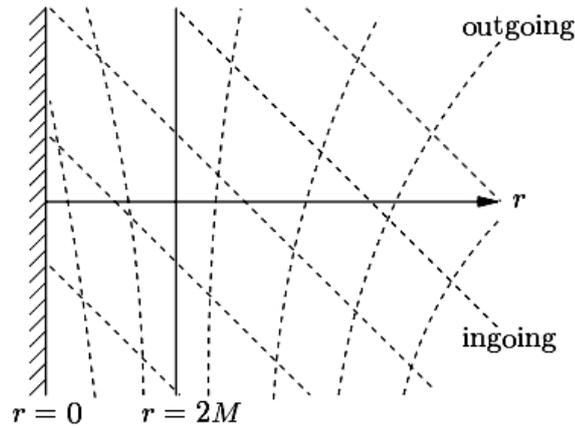
enquanto nas coordenadas de saída,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)du^2 - 2dudr + r^2d\Omega^2. \quad (3.23)$$

Também pode-se verificar que as coordenadas  $v$  e  $r$  cobrem as regiões I e II do diagrama de Kruskal, enquanto que  $u$  e  $r$  cobrem as regiões IV e I. As coordenadas de Eddington-Finkelstein também podem ser usadas para construir diagramas de espaço-tempo (Fig. 3.3), porém, as geodésicas tipo-luz, de entrada e de saída, não possuem a propriedade de se propagar em 45 graus. Por exemplo, a partir da equação (3.22), temos que os raios de luz de entrada (*ingoing*) que se movem com  $dv = 0$ , podem seguir linhas coordenada com ângulo de 45 graus, porém os raios de saída se movem com

$$\frac{dv}{dr} = \frac{2}{(1 - 2m/r)},$$

ou seja, com uma inclinação variável.


 Figura 3.3: Diagrama de espaço-tempo baseado nas coordenadas  $(v, r)$ .

### 3.2.5 Diagrama de Penrose-Carter

A dupla coordenada nula de Kruskal faz com que a estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild tenha uma clareza maior, e esta é a sua principal vantagem. Outro conjunto útil de dupla coordenada nula é obtida através da aplicação da transformação

$$\tilde{U} = \arctan U, \quad \tilde{V} = \arctan V. \quad (3.24)$$

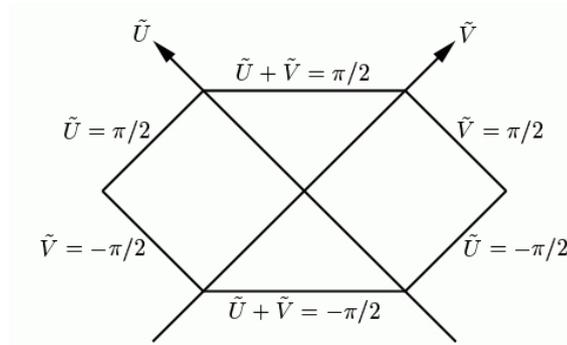


Figura 3.4: Coordenadas compactas do espaço-tempo de Schwarzschild.

Este redimensionamento das coordenadas nulas não afeta a aparência dos raios de luz radiais, que ainda se propagam a 45 graus em um diagrama de espaço-tempo baseado nas novas coordenadas (Fig. 3.4). No entanto, enquanto o intervalo inicial das coordenadas era infinito,  $-\infty < U < \infty$ , torna-se finito com as novas coordenadas,  $-\pi/2 < \tilde{U} < \pi/2$ . Todo o espaço-tempo é, portanto, mapeado sobre um domínio finito do plano de  $\tilde{U}\tilde{V}$ . Esta compactação da variedade introduz singularidades de coordenada nas fronteiras do novo sistema de coordenada, mas isto não é preocupante, já que o objetivo é simplesmente construir um mapa compacto de todo o espaço-tempo.

Nas novas coordenadas as superfícies  $r = 2m$  localizam-se em  $\tilde{U} = 0$  e  $\tilde{V} = 0$ , e a singularidade em  $r = 0$ , ou  $UV = 1$ , está agora em  $\tilde{U} + \tilde{V} = \pm\pi/2$ . O espaço-tempo também é

limitado pelas superfícies  $\tilde{U} = \pm\pi/2$  e  $\tilde{V} = \pm\pi/2$ . Os quatro pontos  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (\pm\pi/2, \pm\pi/2)$  são singularidades da transformação de coordenada, já que, no espaço-tempo real as superfícies  $U = 0$ ,  $U = \infty$  e  $UV = 1$ , nunca se encontram.

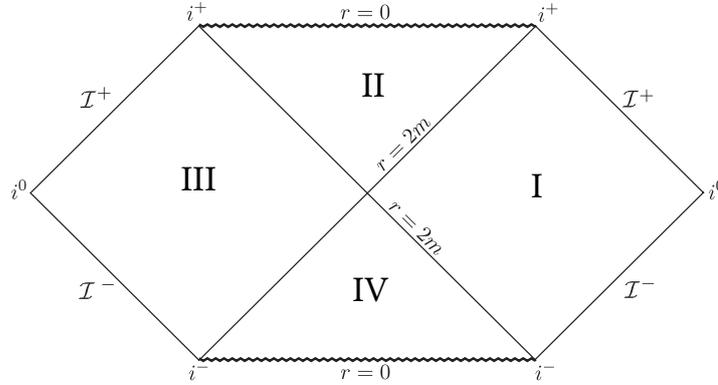


Figura 3.5: Diagrama de Penrose-Carter do espaço-tempo de Schwarzschild.

É útil designar nomes para os limites do espaço-tempo compactado (Fig. 3.5). As superfícies  $\tilde{U} = \pi/2$  e  $\tilde{V} = \pi/2$  chamam-se *infinito futuro nulo* e são identificados por  $\mathcal{I}^+$ . O diagrama deixa claro que  $\mathcal{I}^+$  contém a extremidade dos pontos futuros de todas as geodésicas nulas de saída (aqueles ao longo dos quais  $r$  aumenta). Semelhantemente, as superfícies  $\tilde{U} = -\pi/2$  e  $\tilde{V} = -\pi/2$  chamam-se *infinito passado nulo* e são identificados por  $\mathcal{I}^-$ . Estes contêm a extremidade dos pontos passados de todas as geodésicas nulas de entrada (aqueles ao longo dos quais  $r$  diminui). Os pontos nos quais  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$  se encontram chamam-se *infinito espacial* e são identificados por  $i^0$ . Estes contêm a extremidade de todas as geodésicas espaciais. Os pontos  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (0, \pi/2)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (\pi/2, 0)$  chamam-se *infinito futuro temporal* e são identificados por  $i^+$ . Estes contêm a extremidade do futuro de todas as geodésicas temporais que não terminam em  $r = 0$ . Finalmente, os pontos  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (0, -\pi/2)$  e  $(\tilde{U}, \tilde{V}) = (-\pi/2, 0)$  chamam-se *infinito passado temporal* e são identificados por  $i^-$ . Estes contêm a extremidade do passado de todas as geodésicas tipo-tempo que não têm origem em  $r = 0$ . A tabela 3.1 nos fornece um resumo dessas definições.

Tabela 3.1: Limites do espaço-tempo de Schwarzschild compactado

Legenda	Nome	Definição
$\mathcal{I}^+$	Infinito futuro nulo	$v = \infty, u$ finito
$\mathcal{I}^-$	Infinito passado nulo	$u = -\infty, v$ finito
$i^0$	Infinito espacial	$r = \infty, t$ finito
$i^+$	Infinito temporal futuro	$t = \infty, r$ finito
$i^-$	Infinito temporal passado	$t = -\infty, r$ finito

Mapas compactados tais como o apresentado na Fig. 3.5 são chamados de diagramas de Penrose-Carter. Eles exibem, em resumo, a estrutura causal completa do espaço-tempo em questão. Os diagramas de espaço-tempo são uma ferramenta muito útil na relatividade geral.

### 3.2.6 Horizonte de eventos

Em um diagrama de Kruskal (Fig. 3.2), todos os raios de luz radiais movem-se ao longo de curvas  $U = \text{constante}$  ou  $V = \text{constante}$ . Os cones de luz são, portanto, orientados a 45 graus, e linhas de mundo tipo-tempo, que se encontram dentro dos cones de luz, movem-se com uma inclinação maior do que a unidade. O caráter unidirecional da superfície  $r = 2m$  separando regiões I e II do espaço-tempo de Schwarzschild é claro: um observador cruzando esta superfície nunca pode refazer seu caminho de volta, e não pode escapar de um encontro com a singularidade de curvatura em  $r = 0$ . Também é claro que, depois de atravessar  $r = 2m$ , o observador não pode enviar sinais para o mundo exterior, embora ele possa continuar a recebê-los. A superfície  $r = 2m$ , portanto, impede que qualquer observador externo possa detectar o que se passa no interior. Neste contexto, a superfície  $r = 2m$  é chamada de *horizonte de eventos* do buraco negro. A região dentro do horizonte de eventos (região II) é chamada de *buraco negro* do espaço-tempo de Schwarzschild.

A superfície  $r = 2m$  que separa as regiões I e II devem ser distinguidas a partir da superfície  $r = 2m$  que separa as regiões III e IV. Esta última superfície é um horizonte de eventos para todos os observadores que vivem dentro da região IV (que não podem perceber o que se passa na região I). É também uma superfície de sentido único, porque os observadores do exterior não podem atravessá-la. Para distinguir entre as duas superfícies  $r = 2m$ , é comum referir-se à primeira como um horizonte futuro e à segunda como um horizonte passado. A região dentro do horizonte passado (região IV) é chamada de *buraco branco* do espaço-tempo de Schwarzschild.

## 3.3 Solução de Reissner-Nordström

Nossa intenção, nesta seção, é analisar a solução de Reissner-Nordström para um buraco negro *carregado*, demonstrando que uma solução estática, esfericamente simétrica e assintoticamente plana, é dada pelas equações de campo de Einstein-Maxwell. As equações de Einstein-Maxwell são

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

em que  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento de Maxwell, que em regiões sem fontes se escreve

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right). \quad (3.26)$$

Além disso, o tensor eletromagnético  $F_{\mu\nu}$  deve satisfazer as equações de Maxwell em regiões sem fontes

$$\nabla_{\mu} F^{\mu\nu} = 0 \quad (3.27)$$

$$\nabla_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0. \quad (3.28)$$

A suposição de simetria esférica significa que podemos introduzir as coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  de modo que o elemento de linha se reduz à forma

$$ds^2 = e^{\gamma} dt^2 - e^{\alpha} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (3.29)$$

em que  $\gamma$  e  $\alpha$  são as funções de  $t$  e  $r$ . Se impusermos a condição de que a solução é estática, então isto implica que  $\gamma$  e  $\alpha$  sejam as funções de  $r$  apenas. Portanto,

$$\gamma = \gamma(r), \quad \alpha = \alpha(r). \quad (3.30)$$

A suposição de que o campo é devido a um objeto carregado, situado na origem das coordenadas, significa que o elemento de linha e o tensor eletromagnético se tornarão singulares. Além disso, o objeto carregado irá dar origem a um campo eletrostático puramente radial. Isto significa que o tensor eletromagnético deve assumir a seguinte forma

$$F_{\mu\nu} = E(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Conectando as suposições (3.29), (3.29) e (3.31) em (3.27) e (3.28), encontramos que (3.28) é automaticamente satisfeita e (3.27) se reduz à equação

$$\left[ e^{-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} r^2 E \right]' = 0 \quad (3.32)$$

em que (') indica a diferenciação com respeito a  $r$ . Integrando a expressão anterior, obtemos

$$E = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)} q}{r^2}, \quad (3.33)$$

em que  $q$  é uma constante de integração. A hipótese de que a solução é assintoticamente plana exige

$$\gamma, \alpha \rightarrow 0, \quad \text{quando } r \rightarrow \infty, \quad (3.34)$$

e assim,  $E \sim q/r^2$  assintoticamente. Este último resultado é exatamente o mesmo que o resultado clássico para o campo elétrico de uma partícula pontual de carga  $q$  situado na origem.

Interpretamos, portanto,  $q$  como a carga do objeto. Agora, usaremos (3.29) a (3.33) juntamente com (3.26) para calcular o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . Substituindo esse resultado nas equações de Einstein (3.25), encontraremos as equações (0 – 0) e (1 – 1) que levam a

$$\gamma' + \alpha' = 0, \quad (3.35)$$

que pela condição (3.34) implica em  $\alpha = -\gamma$ . A equação (22) é a expressão independente restante e nos leva a

$$(re^\gamma)' = 1 - \frac{q^2}{r^2}, \quad (3.36)$$

em que o resultado da integral é

$$e^\gamma = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}, \quad (3.37)$$

em que  $m$  é uma constante de integração. Finalmente, encontramos a solução de **Reissner-Nordström**:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr - r^2 d\Omega^2, \quad (3.38)$$

com  $m = GM/c^2$  e  $q^2 = GQ^2/(4\pi\epsilon_0 c^4)$ .

### 3.3.1 Horizontes e estrutura causal

O cálculo do invariante de curvatura  $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$  mostra que a única singularidade intrínseca na métrica de Reissner-Nordström ocorre em  $r = 0$ . Nas coordenadas de Schwarzschild  $(t, r, \theta, \phi)$ , no entanto, a métrica de Reissner-Nordström também possui uma singularidade de coordenada, onde  $r$  satisfaz

$$\Delta(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0. \quad (3.39)$$

Multiplicando (3.39) por  $r^2$  e resolvendo da equação quadrática resultante, verificamos que as singularidades de coordenada ocorrem nas superfícies  $r = r_\pm$ , em que

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - q^2},$$

que resultam em horizonte(s) dependendo dos casos a seguir:

**Caso 1:**  $m^2 < q^2$ . Neste caso o coeficiente  $\Delta$  é sempre positivo e a métrica é completamente regular nas coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  até  $r = 0$ . A coordenada  $t$  é sempre tipo-tempo e  $r$  é sempre tipo-espaço. Mas ainda há a singularidade em  $r = 0$ . Como não há horizonte de even-

tos, não há nenhuma restrição para um observador ir até a singularidade, voltar e apresentar um relatório sobre o que foi observado<sup>1</sup>. Esta é uma *singularidade nua*, que não é protegida por um horizonte.

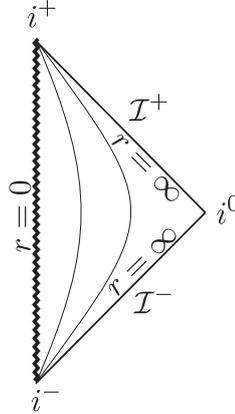
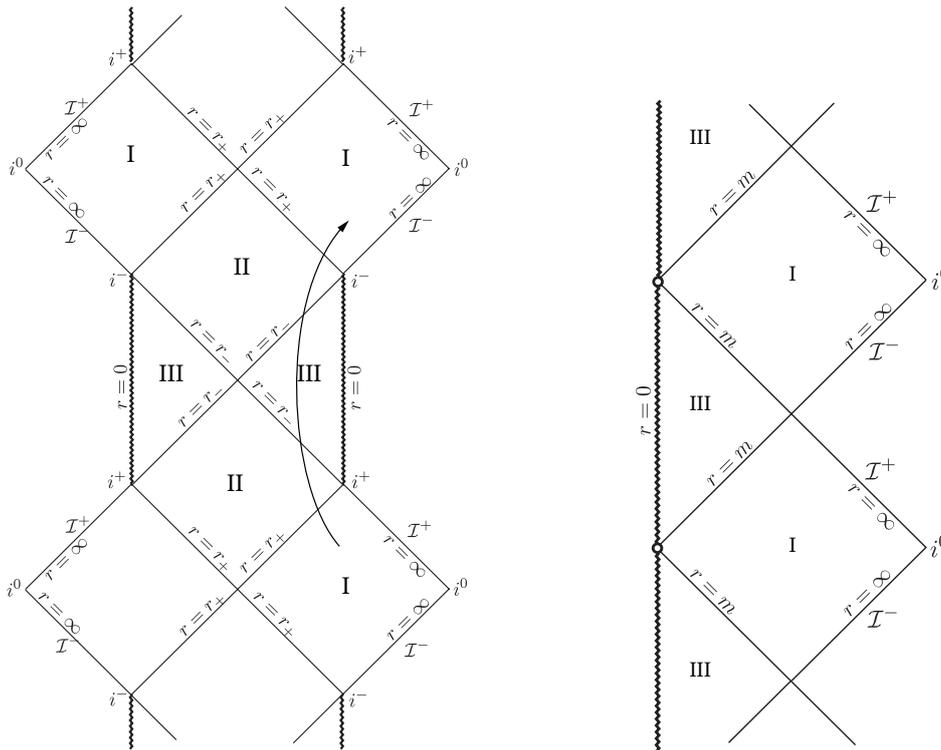


Figura 3.6: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, para o caso  $m^2 < q^2$ .

**Caso 2:  $m^2 > q^2$ .** Desta vez, a extensão máxima dá origem a uma infinidade de "novos universos". Existe um número infinito de regiões I assintoticamente planas, em que  $r > r_+$ . Estas regiões estão ligadas por intermédio das regiões II e III, onde  $r_- < r < r_+$  e  $0 < r < r_-$ , respectivamente. A região III possui uma singularidade em  $r = 0$ , mas, ao contrário da solução de Schwarzschild, é tipo-tempo e, por isso, pode ser evitada por meio de uma curva tipo-tempo direcionada ao futuro, partindo da região I, atravessando  $r = r_+$ . A curva tipo-tempo é desenhada na Fig. 3.7a, que se inicia numa determinada região I, passa através das regiões II, III e, novamente, II, e reemerge na outra região I, assintoticamente plana. Isto nos leva a pensar, de forma altamente especulativa, na possibilidade de viajar para outros universos por uma passagem através dos *buracos de minhoca* produzidos por cargas. Aparentemente, não seria possível fazer o caminho de volta. No entanto, existe a possibilidade de identificar regiões I, de modo que uma partícula pode então reemergir do buraco negro através do horizonte  $r = r_+$ . Se a partícula emerge ou não na mesma parte ou em uma parte diferente do universo dependerá de como a identificação é feita. A passagem de uma partícula no horizonte de eventos  $r = r_+$  parece sofrer um desvio para o vermelho infinito, em relação a um observador que permanece na região I. Na região II, cada ponto representa uma *superfície fechada de aprisionamento*<sup>2</sup>. A solução estendida possui uma propriedade muito bizarra em que qualquer observador cruzando

<sup>1</sup>Aqui, usamos de abuso de linguagem. Um corpo que se aproxime da singularidade deverá ser destruído.

<sup>2</sup>Em 1965, Penrose[65] introduziu um novo importante conceito: superfície fechada de aprisionamento. Estas são superfícies fechadas tipo-espaço (geralmente esferas topológicas) tais que a sua área tende a diminuir localmente ao longo de qualquer possível orientação futura. (Há uma dupla definição para o passado). As soluções tradicionais para Buracos Negros em relatividade geral, constituídas por métricas da família Kerr-Newman, possuem superfície fechada de aprisionamento na região no interior do horizonte de eventos[77]. Na verdade, a existência de superfície fechada de aprisionamento é um ingrediente fundamental em teoremas de singularidade[47]: se houver a formação de superfície fechada de aprisionamento, então certamente singularidades irão se desenvolver[72].



(a) Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordström, para o caso  $m^2 > q^2$ .

(b) Diagrama de Penrose para o buraco negro extremo de Reissner-Nordström, ou seja,  $m^2 = q^2$ .

Figura 3.7: Diagramas de Penrose-Carter do espaço-tempo de Reissner-Nordström

a superfície  $r = r_-$  veria toda a história da região assintoticamente plana restante em um tempo finito![29]

**Caso 3:**  $m^2 = q^2$ . Este caso é conhecido como buraco negro extremo de Reissner-Nordström, em que os dois horizontes coincidem. Os buracos negros extremos têm  $\Delta(r) = 0$  em um único raio,  $r = m$ . Isso representa um horizonte de eventos, porém, a coordenada  $r$  nunca é tipo-tempo; torna-se nula em  $r = m$ , mas é de tipo-espaço em ambos os lados. A singularidade em  $r = 0$  é uma linha de tipo-tempo, como nos outros casos. Portanto, para este buraco negro, é possível novamente evitar a singularidade e continuar a mover-se para o futuro, para cópias extras da região assintoticamente plana, porém, a singularidade é sempre "a esquerda". O diagrama de Penrose é mostrado na Fig. 3.7b.

### 3.4 Solução Schwarzschild-de Sitter

Agora, vamos considerar uma generalização da solução de Schwarzschild que, além do parâmetro de massa  $m$ , inclui uma constante cosmológica  $\Lambda$  arbitrária. A métrica para este caso

foi encontrada por Kottler [56], Weyl [79] e Trefftz [74], e pode ser escrita na forma

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.40)$$

e é a única solução de vácuo esfericamente simétrica das equações de Einstein com a constante cosmológica  $\Lambda$ ,

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = 0. \quad (3.41)$$

Esta solução também é conhecida como métrica de *Schwarzschild-de Sitter*, para  $\Lambda > 0$ , e métrica de *Schwarzschild-anti-de Sitter*, para  $\Lambda < 0$ .

A expressão (3.40) se reduz, claramente, a métrica de Schwarzschild quando  $\Lambda = 0$ , e para as métricas de Sitter ou anti-de Sitter quando  $m = 0$ . Quando  $m \neq 0$ , a métrica possui uma singularidade de curvatura em  $r = 0$ . Para pequenos valores de  $r$ , esta solução aproxima-se da solução de Schwarzschild, que pode ser compreendida como a solução exterior de um corpo esférico ou buraco negro. Para  $r$  grande, ela se comporta assintoticamente como a solução de de Sitter ou a solução de anti-de Sitter de acordo com o sinal de  $\Lambda$ , ou seja, não são soluções assintoticamente planas. A métrica (3.40), portanto, pode ser pensada como a região exterior de uma massa esférica (ou buraco negro) em um fundo de Sitter ou anti-de Sitter. No entanto, quanto ao espaço-tempo de Schwarzschild, a completa extensão analítica do espaço-tempo pode ser considerada, ignorando a sua relação com qualquer fonte de massa física.

Para analisar esta solução e executar a sua extensão global, inicialmente, é conveniente nos concentramos na função

$$g_{00}(r) = \frac{1}{r} \left( \frac{\Lambda r^3}{3} - r + 2m \right), \quad (3.42)$$

que é positiva para pequenos e grandes valores de  $r$  se  $\Lambda > 0$ . Isso indica que, nesses domínios,  $r$  é uma coordenada tipo-tempo enquanto  $t$  é uma coordenada espacial, e o espaço-tempo é dependente do tempo. Entre esses domínios (e genericamente para valores pequenos de  $\Lambda m^2$ ),  $g_{00} < 0$  para que, nesta região "ordinária",  $r$  seja espacial,  $t$  seja temporal e o espaço-tempo seja estático.

Agora é necessário considerar separadamente os vários casos possíveis em que o valor de  $\Lambda m^2$  ocorre em intervalos diferentes.

### 3.4.1 Buracos negros no espaço-tempo de de Sitter

Quando  $0 < 9\Lambda m^2 < 1$ , a função (3.42) admite duas raízes distintas reais positivas em  $r = r_1$  e  $r = r_2$ , ordenadas tal que  $r_2 > r_1 > 0$ . A terceira raiz é negativa já que não há termo quadrático nos parênteses de (3.42), e, portanto, a soma das três raízes deve desaparecer. A menor raiz  $r = r_1$  corresponde a um horizonte de eventos do buraco negro de *Schwarzschild*,

enquanto a maior raiz  $r = r_2$  corresponde a um horizonte de eventos cosmológico de *de Sitter*, para além do qual o espaço de tempo é novamente dependente do tempo. A métrica é estática na região  $r_1 < r < r_2$  entre os dois horizontes de eventos [43].

Com essa notação, a função (3.42) pode ser reescrita como

$$-g_{00} = \frac{\Lambda}{3r} (r - r_1) (r_2 - r) (r + r_1 + r_2). \quad (3.43)$$

Esta forma foi usada, por exemplo, por Gibbons e Hawking [41], Lake e Roeder [58], e Laue e Weiss [60], para uma análise qualitativa de possíveis extensões da métrica. Como em (3.16), a coordenada tartaruga  $r^* = \int (-g_{00})^{-1} dr$  é definida, e a dupla coordenada nula  $u = t - r^*$ ,  $v = t + r^*$  são subsequentemente introduzidas. A extensão de Kruskal entre os dois horizontes  $r_1$  e  $r_2$  é então considerada e o diagrama de Penrose que representa a estrutura conforme global do espaço-tempo de *Schwarzschild-de Sitter* é então obtida. Isto é ilustrado na Fig. 3.8.

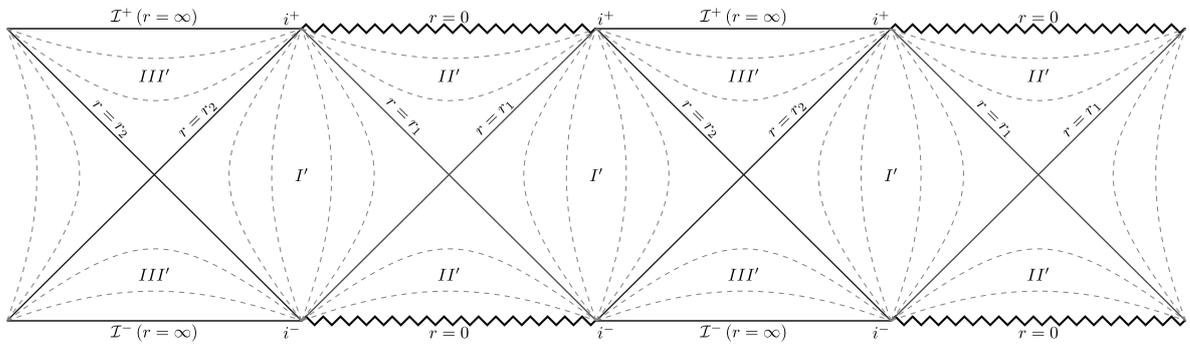


Figura 3.8: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo Schwarzschild-de Sitter para  $0 < 9\Lambda m^2 < 1$ . Este contém uma sequência infinita de regiões Schwarzschild-de Sitter. Todas as linhas mostradas têm valores de constantes de  $r$ .

Uma extensão analítica explícita da variedade em ambos os horizontes foi obtida por Geyer [40], Bažński e Ferrari [8], e Bičák e Podolský [12]. Isso confirma que  $r = r_1$  é um horizonte de um buraco negro/branco de *Schwarzschild*, e que  $r = r_2$  é um horizonte cosmológico de *de Sitter*. A área do horizonte do buraco negro é  $4\pi r_1^2$ , enquanto que a área do horizonte cosmológico é  $4\pi r_2^2$ . Quando todas as coordenadas de Kruskal, em seções diferentes de um diagrama conforme<sup>3</sup> são combinadas, a extensão analítica da variedade é obtida. Esta é delimitada por singularidades de curvatura  $r = 0$  e infinitos conformes  $\mathcal{I}^\pm$  em  $r = +\infty$ . Além disso, a máxima extensão do espaço-tempo contém uma sequência infinita de regiões tipo-Schwarzschild e tipo-de Sitter, como indicado na Fig. 3.8. Nas regiões tipo-Schwarzschild, a singularidade de curvatura  $r = 0$  está localizada atrás dos horizontes de eventos de buraco negro e buraco branco, e outra região cosmológica exterior está causalmente separada. Esta última existe como uma ex-

<sup>3</sup>Diagramas conformes, diagramas de Penrose-Carter ou simplesmente diagramas de Penrose, são diagramas bidimensionais que conservam a informação sobre as relações causais entre diversos pontos do espaço-tempo e permitem representar regiões infinitas em diagramas finitos.

tensão analítica em qualquer seção de tipo-espaço que não alcança a singularidade. Cada região cosmológica exterior é de tipo-Sitter com um tipo espaço infinito conforme  $\mathcal{I}$ .

### 3.5 Solução de Buraco de Minhoca

Uma métrica de um espaço-tempo, obtida das equações de Einstein, é uma quantidade puramente local, que não determina a topologia global do espaço-tempo. Para ilustrar o significado desta declaração vamos usar a analogia de uma simples folha de papel de espessura zero enrolada na forma de um cilindro. A métrica na folha plana e no cilindro são a mesma métrica euclidiana plana, como é claro o fato de que as distâncias entre pontos vizinhos não são alterados por enrolar a folha sem esticar ou rasgar. Porém, relações globais são alteradas: pontos perto de bordas opostas na folha plana, que foram separados pelo comprimento da folha, estão juntos no cilindro. O cilindro fornece um atalho entre alguns pontos que foram previamente separados. Podemos até mesmo, em princípio, enrolarmos o cilindro na sua outra dimensão para formar um toroide, que também é localmente indistinguível em relação ao espaço plano, respeitando suas propriedades métricas. Para evitar confusão, lembre-se que uma superfície bidimensional pode parecer curva do ponto de vista do espaço tridimensional, no qual ele está inserido, embora as medições confinadas ao espaço bidimensional, por exemplo, sobre a soma dos ângulos de um triângulo, vai mostrar que a superfície é intrinsecamente plana. Portanto, o cilindro e o toroide são intrinsecamente planos, embora eles parecem ser curvos do ponto de vista do espaço em que estão mergulhados.

Podemos imaginar o enrolamento do espaço-tempo de Minkowski (bidimensional) de uma maneira similar. Também pode ser generalizado para quatro dimensões. Considere dois observadores inerciais em repouso relativo. Identificamos pontos ao longo destas linhas de mundo simultaneamente, para que o espaço intermediário esteja contido no cilindro. Um viajante que chega no evento 1 (Fig. 3.9a), encontra-se no evento 2, portanto, há agora dois caminhos entre 1 e 2: a identificação fornece um atalho adicional entre os dois locais. Chamamos este atalho de *buraco de minhoca*. Isto não é uma máquina do tempo ou um meio de viajar mais rápido que a luz. O resultado surge da topologia cilíndrica do espaço-tempo: a distância entre os dois pontos de um caminho curvo é zero [68].

#### 3.5.1 Buraco de minhoca

O problema com o modelo da seção anterior é que não temos um meio prático de identificar pontos no espaço-tempo de Minkowski para criar o atalho inicial.

Métricas de buraco de minhoca podem ser criadas a partir de matéria gravitando e levadas a se comportarem da mesma maneira? Nosso primeiro pensamento seria tomar o espaço-tempo completo de Schwarzschild (definido pela métrica de Kruskal) e enrolá-lo de tal forma que a região IV, na Fig. 3.2 do capítulo 2, seja identificado como parte de nosso próprio universo e não em um universo separado. Poderíamos, então, viajar através do buraco negro à uma região

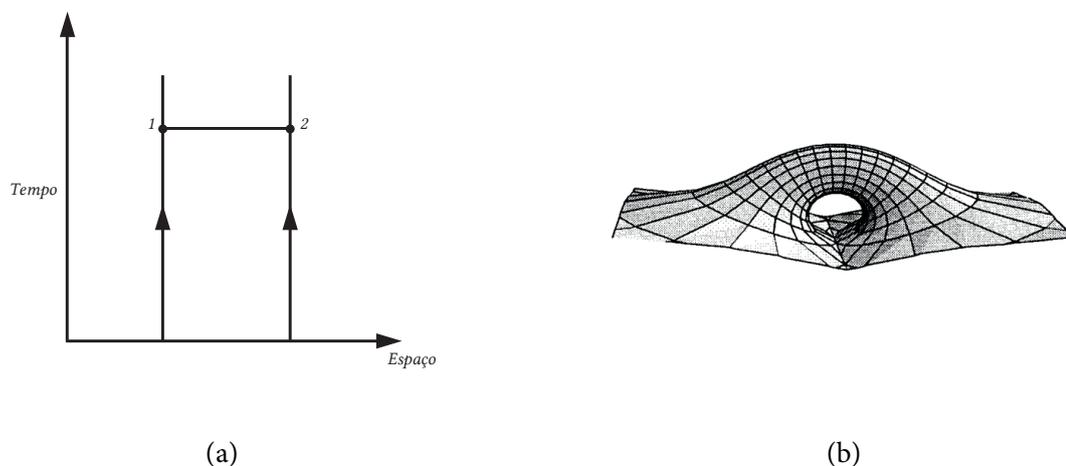


Figura 3.9: (a) Dois eventos simultâneos, 1 e 2, considerados o mesmo evento, criando um atalho no tempo zero entre as linhas de mundo. (b) Diagrama de um buraco de minhoca que liga duas regiões distintas de um espaço-tempo

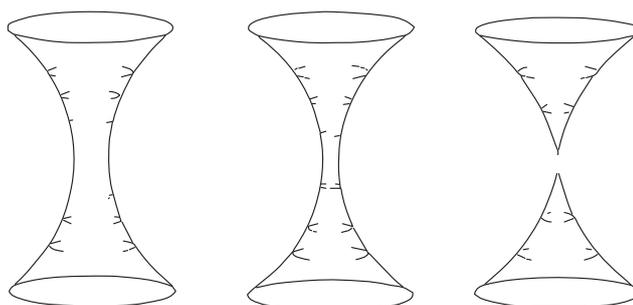


Figura 3.10: O interior da solução de Schwarzschild é dinâmico: representação do diagrama de imersão de um estrangulamento da garganta.

diferente do espaço-tempo, possivelmente, de tal forma que nos permitisse chegar a um destino distante mais rápido do que um raio de luz tomando a rota convencional. Porém, isto revela-se impossível. A Fig. 3.10 mostra o porquê. Quando tentamos atravessar da região I para a região IV, verificamos um estrangulamento da *garganta* (um fragmento estreito do espaço-tempo, extremamente curvo). Outra maneira de interpretar isso é que viajar através do buraco negro, não há como evitar a singularidade.

A estrutura do espaço-tempo de um buraco negro, como, por exemplo, o buraco negro de Kerr, é instável para as pequenas perturbações que ocorreriam se tentássemos mover qualquer matéria gravitando ou energia entre regiões assintóticas. A instabilidade altera a estrutura do espaço-tempo e parece levar a uma singularidade espacial [64].

Podemos concluir que os buracos negros não permitem construir *atalhos* entre pontos do Universo. No entanto, em tese, é possível verificar que há outras maneiras de se conseguir tais atalhos através do que chamamos *buraco de minhoca transitável*.

### 3.5.2 Buracos de minhoca transitáveis

Nesta seção, vamos tratar de métricas para buracos de minhoca, os quais, em tese, podem ser transitáveis. Abordaremos o problema partindo de uma métrica simples do espaço-tempo de um buraco de minhoca e investigaremos suas propriedades. Nesse sentido, devemos postular uma métrica e utilizar as equações de Einstein para encontrar as propriedades do material gravitacional necessário para produzi-lo, em contraste com o procedimento habitual, através do qual a métrica é obtida resolvendo as equações de Einstein para uma determinada distribuição da matéria.

Uma métrica geral para um buraco de minhoca possui a seguinte forma

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - \frac{1}{1 - b(r)/r} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.44)$$

em que  $\Phi$  e  $b$  são funções de  $r$ . A métrica é esfericamente simétrica e estática. O valor mínimo de  $r$  é  $r_{min} = b_0$  que satisfaz  $r = b(r)$ . Isto define a garganta do buraco de minhoca. No infinito  $\Phi(r) = 0$ ; caso contrário é negativo e finito. Então uma partícula estacionária tem sempre linhas de mundo tipo-tempo: não há nenhum horizonte. A distância própria da garganta  $l$  é dada por

$$dl = \frac{dr}{[1 - b(r)/r]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.45)$$

Um caso especial simples de uma métrica de buraco de minhoca, encontrada por Morris e Thorne [62], é obtida fazendo  $\Phi = 0$ ,  $b = b_0^2/r$ , com  $r^2 = b_0^2 + l^2$ ,

$$ds^2 = dt^2 - dl^2 - (b_0^2 + l^2) d\Omega^2, \quad (3.46)$$

que é o caso vamos que discutir. O diagrama de imersão para essa métrica é dado na Fig. 3.11. Em contraste com a métrica de Schwarzschild, que é dependente do tempo dentro do horizonte, a métrica de buraco de minhoca é estática em toda parte. Assim, o diagrama de imersão fornece as propriedades em todos os momentos.

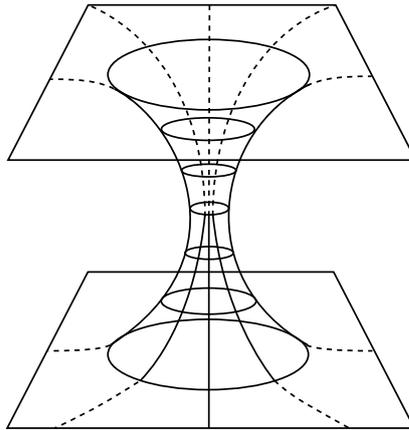


Figura 3.11: Diagrama de imersão de um buraco de minhoca.

Um observador pode viajar através da garganta e emergir do outro lado, em um tempo finito. Portanto, não há nenhuma singularidade no caminho. É por isso que o espaço-tempo é referido como um buraco de minhoca transitável. Uma forma de mostrar a ausência de uma singularidade é calcular o invariante de curvatura  $\mathcal{K}$ , como citado anteriormente.

Observe que, exteriormente, para uma propagação radial dos raios de luz  $dt = dl$ . Assim, um raio de luz radial pode sempre escapar até o infinito, ou seja, esta é outra maneira de constatar que o espaço-tempo não tem horizonte. Há duas regiões,  $l = \pm\infty$ , onde a curvatura tende a zero em grandes distâncias do buracos de minhoca. Estas regiões são unidas pela garganta do buraco de minhoca. Não há qualquer restrição para viagens entre as duas regiões.

Como isto poderia fornecer um atalho através do espaço? Como discutido anteriormente, temos a liberdade, em princípio, para alterar a topologia sem afetar a métrica. A Fig. 3.12 mostra como poderíamos, teoricamente, unir o espaço-tempo para criar uma rota mais curta através de um buraco de minhoca.

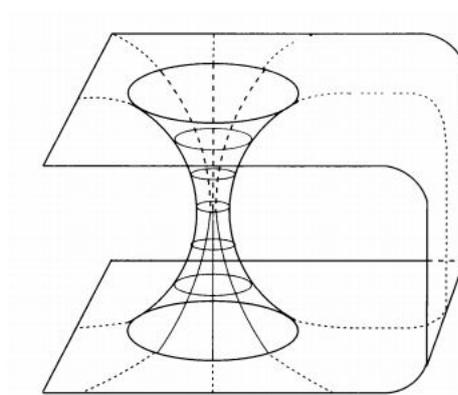


Figura 3.12: Um buraco de minhoca conectando regiões de um mesmo espaço-tempo, funcionando como um atalho.

### 3.5.3 Criando um buraco de minhoca

Seria possível soluções de buracos de minhoca, como (3.46), serem criadas a partir de matéria gravitando e construídos para fornecer atalhos através do espaço-tempo? Um problema surge quando nos perguntamos que tipo de matéria precisamos para criar a curvatura da métrica do buraco de minhoca. A substituição dos coeficientes da métrica (3.46) nas equações de Einstein, evidencia o conteúdo de matéria correspondente à métrica de um buraco de minhoca. Este é um cálculo longo e pode ser acompanhado com mais detalhes em [62], e que apresenta o seguinte resultado:

$$T^{00} = T^{11} = -\frac{1}{8\pi G} \frac{b_0^2}{(b_0^2 + l^2)^2}, \quad (3.47)$$

com as componentes tangenciais de igual magnitude, mas de sinal contrário. A quantidade  $T^{00}$  é a densidade de massa e energia, e  $T^{11}$  é a pressão radial. Note que a densidade de energia e a pressão radial são ambos negativos!

Densidades de energia negativas de matéria, em um referencial de repouso local, não são possíveis na física clássica. De modo mais geral, a física clássica proíbe densidades de energia que são positivas em um referencial de repouso local, mas negativas a observadores que se movem rapidamente. Isto chama-se "condição de energia fraca" a qual, que trataremos na seção seguinte. Na mecânica quântica, densidades de energia negativas são possíveis.

# Capítulo 4

## Buracos Negros Escalares

### 4.1 Teoria Escalar-Tensorial

A teoria da relatividade geral de Einstein é uma teoria geométrica do espaço-tempo. O fundamental nesta teoria é o campo tensorial métrico. Por esta razão, a teoria pode ser chamada de uma "teoria tensorial". Uma "teoria escalar" da gravidade já havia sido tentada por G. Nordström promovendo a função potencial newtoniana a um escalar de Lorentz. Devido à falta de uma natureza geométrica, o princípio da equivalência - uma das duas colunas que suportam toda a estrutura da relatividade geral, foi deixado fora do objetivo da teoria no início dos anos 1910. Isso não satisfez Einstein, que finalmente chegou a uma teoria dinâmica da geometria do espaço-tempo. Sua teoria pode ter parecido altamente especulativa no início, mas depois provou ser verdadeiramente realista, uma vez que foi apoiada por observações de diversos fenômenos físicos, incluindo aqueles em cosmologia moderna.

Apesar do sucesso amplamente reconhecido da relatividade geral, agora chamada de teoria padrão da gravitação, ela também tem alimentado muitas teorias alternativas. Dentre elas, podemos nos concentrar particularmente sobre a teoria escalar-tensorial. Aparentemente, a velha ideia da gravidade escalar estava sendo ressuscitada. De fato, no entanto, este tipo de teoria não se limita a combinar os dois tipos de campo. Ela é construída sobre a base sólida da relatividade geral, e o campo escalar entra em jogo de uma forma altamente não trivial, especificamente através de um termo de acoplamento não-mínimo.

A teoria escalar-tensorial foi concebida originalmente por Jordan, que começou a incorporar uma variedade curva de quatro dimensões no espaço-tempo plano de cinco dimensões [52]. Ele mostrou que uma restrição na formulação de geometria projetiva pode ser um campo escalar de quatro dimensões, o que permite descrever um espaço-tempo dependente da constante gravitacional, que estava em acordo com o argumento de Dirac de que a constante gravitacional deve ser dependente do tempo [30], que, obviamente, está além do que é compreendido pela teoria padrão. Ele também discutiu a possível conexão de sua teoria com uma outra teoria de cinco dimensões, que tinha sido apresentada por Th. Kaluza e O. Klein [53]. Com base nestas considerações, Jordan apresentou uma Lagrangiana geral para o campo escalar inserida em um

espaço-tempo curvo de quatro dimensões:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ \varphi_J \left( R - \omega_J \frac{1}{\varphi_J^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_J \partial_\nu \varphi_J \right) + L_m(\varphi_J, \Psi) \right], \quad (4.1)$$

em que  $\varphi_J(x)$  é o campo escalar de Jordan, enquanto  $\omega_J$  são constantes, também com  $\Psi$  representando campos de matéria coletivamente. A introdução do *termo de acoplamento não-mínimo*,  $\varphi_J R$ , ao primeiro termo do lado direito, marcou o nascimento da teoria escalar-tensorial. O termo  $L_m(\varphi_J, \Psi)$  é a Lagrangiana da matéria que, também, depende, geralmente, do campo escalar.

Inspirados no esforço de Jordan, C. Brans e R. H. Dicke definiram o campo escalar  $\varphi$  por

$$\varphi = \varphi_J \quad (4.2)$$

o que simplifica (4.1), fazendo uso do fato de que a escolha específica do valor de  $\gamma$  é irrelevante [39]. Este processo só se justifica porque eles exigiram que a parte da Lagrangiana da matéria,  $\sqrt{-g}L_m$ , tinha que ser dissociada de  $\varphi(x)$  exigindo que o Princípio de Equivalência Fraco (WEP) fosse respeitado, em contraste com o modelo de Jordan<sup>1</sup>.

Dessa forma, eles propuseram uma Lagrangian básica

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left( \varphi R - \omega \frac{1}{\varphi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + L_m(\Psi) \right). \quad (4.3)$$

O modelo descrito por (4.3) pode ser chamado de protótipo de BD [15]. O "protótipo" é um adjetivo que enfatiza as características do modelo original em comparação com muitas versões estendidas. A constante  $\omega$  adimensional é o único parâmetro da teoria. Note que, foi deixado de fora o fator  $16\pi$ , que multiplica toda a expressão no lado direito no artigo original, fazendo com que o resultado tenha uma forma mais padrão. Por esta razão, o  $\varphi$  está relacionado ao seu campo escalar original, denotado aqui por  $\phi_{BD}$ , através da relação

$$\varphi = 16\pi\phi_{BD}. \quad (4.4)$$

Olhando agora, com cuidado, o termo de acoplamento não-mínimo, o primeiro termo do lado direito de (4.3). Este termo substitui o termo de Einstein-Hilbert,

$$\mathcal{L}_{EH} = \sqrt{-g} \frac{1}{16\pi G} R, \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup>De acordo com as análises disponíveis até agora, não parece que haja qualquer maneira simples de proibir este acoplamento à matéria, embora os detalhes ainda precisam ser trabalhados. Neste sentido, pode ter que aceitar a possibilidade de violação do WEP como uma das consequências naturais da teoria das cordas, bem como do modelo KK (Kaluza-Klein). Isso foi o que Jordan deve ter percebido a partir da abordagem KK, também foi observado por Fierz [37], mas foi rejeitado por Brans e Dicke, que escolheram para apreciar a validade do WEP como um fato empírico

na teoria padrão, em que  $R$  é multiplicado por uma constante de  $G^{-1}$ . Ao comparar (4.3) e (4.5), vemos que este modelo não possui "constante" gravitacional, de outro modo, possui uma *constante gravitacional efetiva*  $G_{eff}$ , definida por

$$\frac{1}{16\pi G_{eff}} = \varphi, \quad (4.6)$$

enquanto o campo dinâmico  $\varphi$  varia suficientemente devagar. Em particular, podemos esperar que  $\varphi$  é espacialmente uniforme, mas varia lentamente com o tempo cósmico, como sugerido por Dirac. Devemos ter cuidado, no entanto, ao distinguir  $G_{eff}$ , da constante relacionada com a possível contribuição do campo escalar.

Podemos eliminar o termo de acoplamento não-mínimo por meio da transformação

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

conhecida como *transformação conforme*, que significa passar de uma estrutura (*frame*) conforme para outra. Este tipo de transformação é muito importante em teorias escalares-tensoriais. Mais especificamente, a Lagrangiana assume a forma com um termo de acoplamento não-mínimo no frame de Jordan, enquanto, no frame de Einstein, após a transformação conforme, a mesma Lagrangiana é re-expressa em termos do termo de Einstein – Hilbert, ou seja, em que o acoplamento é mínimo.

A transformação conforme é simplesmente diferente da transformação geral de coordenadas; o primeiro altera a linha elemento  $ds^2$ , que é mantido invariante sob este último.

Algumas teorias ou modelos de importância prática são invariantes sob transformação conforme. Em estruturas conformes diferentes, fenômenos físicos parecem ser diferentes, em geral, embora estejam relacionados entre si. Se  $G$  é constante ou varia com o tempo, por exemplo, depende de qual estrutura conforme estamos.

### 4.1.1 Campos Fantasmas

Campos fantasmas têm aparecido com bastante frequência em teorias escalares-tensoriais. Sendo bastante incomuns, esses campos são, muitas vezes, considerados entidades puramente artificiais. Mas, recentemente, esses campos têm atraído muito interesse em conexão com o problema da *Energia Escura*, um modelo que busca explicar a observada expansão acelerada do Universo.

A principal objeção contra um campo fantasma é que um campo com um termo cinético negativo pode ter uma, arbitrariamente, grande energia negativa de oscilações de alta frequência, que, de acordo com a teoria quântica de campos, pode levar à produção descontrolada de partículas e antipartículas acompanhada pela adição de energia negativa igual a do próprio campo fantasma. Nada deste tipo é observado, o que lança sérias dúvidas sobre a possível existência de campos fantasmas.

Por outro lado, há razões teóricas para considerarmos campos fantasmas, uma vez que naturalmente aparecem em alguns modelos de teoria das cordas [71], supergravidade [63] e teorias em mais de 11 dimensões, como *F-theory* [54], e em algumas teorias de Kaluza-Klein. Podem ser campos efetivos, seguindo um procedimento de redução de uma teoria subjacente. Não podem estar sujeitos a quantização (pelo menos diretamente) e possivelmente não interagem com outros campos.

Mesmo não sendo um objeto teórico constante, campos fantasmas parecem ser úteis a uma espécie de experimento *gedanken*<sup>2</sup>, e podem levar a modelos ou previsões interessantes que posteriormente podem ser obtido por outros meios, menos exóticos.

## 4.2 Buracos negros em teorias escalares-tensoriais

### 4.2.1 Campos escalares não-minimamente acoplados à gravidade

Começemos com uma formulação mais geral de uma teoria escalar-tensorial (Bergmann–Wagoner–Nordvedt) em uma variedade pseudo-Riemanniana  $\mathbb{M}_J[g]$ , cuja a ação é dada por [18]

$$S = \int d^4x \sqrt{g} [f(\varphi)\mathcal{R} + h(\varphi)(\partial\varphi)^2 - 2U(\varphi) + L_m], \quad (4.8)$$

em que  $g_{\mu\nu}$  é a métrica,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}[g]$  é o escalar curvatura,  $f$ ,  $h$  e  $U$  são funções do campo escalar real  $\varphi$ ,  $(\partial\varphi)^2 = g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$  e  $L_m$  é a Lagrangiana da matéria. A variedade  $\mathbb{M}_J[g]$  com a métrica  $g_{\mu\nu}$  compõem o chamado frame conforme de Jordan. Esta formulação é de natureza fundamental na teoria escalar-tensorial, uma vez que é nesta estrutura que o tensor de energia-momento de matéria  $T^{\mu\nu}$  satisfaz a lei de conservação habitual  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

As equações de campo são mais facilmente resolvidas no chamado frame conforme de Einstein, no qual o campo escalar é minimamente acoplado à gravidade. A transição para o frame de Einstein é representada pela seguinte transformação conforme [76]

$$g_{\mu\nu} = |f(\varphi)|^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{\sqrt{|l(\varphi)|}}{f(\varphi)}, \quad l(\varphi) = \left| fh + \frac{3}{2} \left( \frac{df}{d\phi} \right)^2 \right|^{-1/2}, \quad (4.10)$$

que remove o acoplamento escalar-tensorial não-mínimo expresso pelo coeficiente  $f(\varphi)$ . Fazendo  $L_m = 0$  (vácuo), pode-se reescrever a ação (4.8) em termos da nova métrica  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  e do

<sup>2</sup>Um experimento mental ou experiência mental (da expressão alemã *Gedankenexperiment*) constitui um raciocínio lógico sobre um experimento não realizável na prática mas cujas conseqüências podem ser exploradas pela imaginação. Esses experimentos são utilizados para se compreender aspectos não experimentáveis do Universo. A expressão foi popularizada pelos *Gedankenexperiment* utilizados por Albert Einstein para explorar algumas das conseqüências da Teoria da Relatividade.

novo campo escalar  $\phi$ , da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \{ (\text{sign } f) [\mathcal{R} + (\text{sign } l) (\partial\phi)^2] - 2V(\phi) \}, \quad (4.11)$$

em que o determinante  $\tilde{g}$ , o escalar de curvatura  $\mathcal{R}$  e  $(\partial\phi)^2$  são calculados a partir de  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  e  $V(\phi) = |f|^{-2}U(\phi)$ .

Note-se que  $\epsilon := \text{sign } l = -1$  corresponde à chamada teoria escalar-tensorial anômala, com o sinal inadequado do termo da energia cinética do campo escalar no *frame* de Einstein, enquanto  $\text{sign } f = -1$  significa que a constante gravitacional efetiva no *frame* de Jordan é negativa. Assim, a escolha normal dos sinais é  $\text{sign } l = \text{sign } f = 1$ . No entanto, as teorias que admitem  $\epsilon = -1$  e/ou  $f < 0$  possuem características interessantes que merecem ser estudadas. Com  $f > 0$ , a ação (4.11) descreve a gravidade de Einstein minimamente acoplada a um campo escalar auto-interagindo, que é chamada normal para  $\epsilon = 1$  e fantasma para  $\epsilon = -1$ .

Mais adiante, na seção 4.2.2, vamos descrever as propriedades básicas das soluções estáticas e esfericamente simétricas para o sistema de Einstein-*campo escalar sem massa*, que representam as soluções de uma classe geral de teorias escalares-tensoriais com o potencial do campo escalar igual a zero, no *frame* de Einstein. Vamos destacar uma família particular de soluções correspondem a *buracos negros frios*.

#### 4.2.2 Solução de buracos negros em campos escalares minimamente acoplados à gravidade

Nesta seção, vamos abordar este sistema com um campo escalar sem massa, minimamente acoplado à gravidade, que admite soluções de buraco negro, porém, isso acontece apenas com um campo escalar *fantasma*, ou seja, um campo escalar com o sinal de inadequado no termo cinético. Estes buracos negros "escalares" também possuem horizonte de área infinita e temperatura zero. Toda a discussão abordada neste capítulo foi feita originalmente em [19, 20]

##### Equações de campo

Considerando um sistema auto-gravitacional<sup>3</sup> minimamente acoplado a um campo escalar auto-interagindo com um potencial arbitrário  $V = V(\phi)$ , a ação desse sistema pode ser descrita por

$$S = \int [R - \epsilon g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} + 2V] \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.12)$$

em que  $R$  é a curvatura escalar,  $\epsilon = 1$  corresponde a um campo escalar habitual com energia cinética positiva e  $\epsilon = -1$  para um campo fantasma.

<sup>3</sup>Um sistema auto-gravitacional é um sistema de massas mantidas juntas pela sua gravidade mútua. Um exemplo de tal é uma estrela.

Variando a ação (4.12) com respeito ao inverso da métrica,  $g^{\mu\nu}$ ,

$$\delta S = \int \left\{ \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g}R) - \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} [\sqrt{-g} (\epsilon g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - 2V)] \right\} \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0 \quad (4.13)$$

$$\int \left[ R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\epsilon g^{\rho\sigma} \phi_{;\rho} \phi_{;\sigma} - 2V) - \epsilon \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (4.14)$$

obtemos a expressão geral para as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \epsilon \left( \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho} \right) + g_{\mu\nu} V(\phi). \quad (4.15)$$

Sabemos que, por meio da Identidade de Bianchi, que o tensor de Einstein tem divergência nula, portanto aplicando o divergente em (4.15)

$$\begin{aligned} \epsilon \left[ \nabla^\mu (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\mu (\phi_{;\rho} \phi^{;\rho}) \right] + g_{\mu\nu} \nabla^\mu V(\phi) &= 0 \\ \epsilon \left[ \phi_{;\mu}^{;\mu} \phi_{;\nu} + \phi_{;\mu} \phi_{;\nu}^{;\mu} - \frac{1}{2} (\phi^{;\mu} \phi_{;\mu;\nu} + \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}_{;\nu}) \right] + V_{;\nu} &= 0, \\ \epsilon (\phi_{;\mu}^{;\mu} \phi_{;\nu} + \phi_{;\mu} \phi_{;\nu}^{;\mu} - \phi_{;\mu} \phi^{;\mu}_{;\nu}) + V_{;\nu} &= 0, \\ \epsilon \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \cdot \phi_{;\nu} + V_\phi \phi_{;\nu} &= 0, \\ (\epsilon \square \phi + V_\phi) \phi_{;\nu} &= 0, \\ \epsilon \square \phi + V_\phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

com  $V_\phi = \frac{dV}{d\phi}$ . Obtemos, assim, a equação de Klein-Gordon.

Resumindo, as expressões gerais para as equação de campo são:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R &= \epsilon \left( \phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi^{;\rho} \right) + g_{\mu\nu} V(\phi), \\ \square \phi + \epsilon V_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

### Soluções esfericamente simétricas

Nesta seção, retomamos o elemento de linha (3.1) para um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico

$$ds^2 = e^{2\gamma} dt^2 - e^{2\alpha} dr^2 - e^{2\beta} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.18)$$

em que  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são funções da coordenada  $r$ .

A partir de (2.7) podemos encontrar os termos não nulos da conexão afim. São eles

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{10} &= \gamma' \quad , \quad \Gamma^1_{00} = e^{-2(\alpha-\gamma)}\gamma', \\ \Gamma^1_{11} &= \alpha' \quad , \quad \Gamma^1_{22} = -e^{-2(\alpha-\beta)}\beta', \\ \Gamma^1_{33} &= -e^{-2(\alpha-\beta)}\beta' \sin^2 \theta \quad , \quad \Gamma^2_{21} = \beta', \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin \theta \cos \theta \quad , \quad \Gamma^3_{31} = \beta', \\ \Gamma^3_{32} &= \cot \theta.\end{aligned}$$

Denotemos, durante o texto, (') como  $\partial/\partial r$ .

A partir das conexões não nulas, podemos encontrar as componentes não nulas do tensor de Riemann, a partir da relação a seguir:

$$R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\rho}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\rho_{\mu\alpha}. \quad (4.19)$$

Portanto, as componentes do tensor de Riemann não nulas encontradas foram:

$$\begin{aligned}R^0_{101} &= \gamma'' + \gamma'(\gamma' - \alpha') \quad , \quad R^0_{202} = \gamma'\beta'e^{2(\beta-\alpha)}, \\ R^0_{303} &= -\gamma'\beta'e^{2(\beta-\alpha)}\sin^2 \theta \quad , \quad R^1_{212} = e^{2(\beta-\alpha)}[\beta'' + \beta'(\beta' - \alpha')], \\ R^1_{313} &= e^{2(\beta-\alpha)}[\beta'' + \beta'(\beta' - \alpha')]\sin^2 \theta \quad , \quad R^2_{323} = [e^{2(\beta-\alpha)}\beta'^2 - 1]\sin^2 \theta.\end{aligned} \quad (4.20)$$

Obtemos as componentes não nulas do tensor de Ricci contraindo o tensor de Riemann.

$$\begin{aligned}R_{00} &= e^{-2(\alpha-\gamma)}[\gamma'' + \gamma'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')], \\ R_{11} &= -\gamma'' - 2\beta'' + \gamma'(\alpha' - \gamma') + 2\beta'(\alpha' - \beta'), \\ R_{22} &= 1 - e^{2(\beta-\alpha)}[\beta'' + \beta'(\gamma' + 2\beta' - \alpha')], \\ R_{33} &= \sin^2 \theta R_{22}.\end{aligned} \quad (4.21)$$

Finalmente, encontramos o escalar de Ricci

$$R = -2e^{-2\beta} + 2e^{-2\alpha}[3\beta'^2 + 2\beta'\gamma' + \gamma'^2 - 2\alpha'\beta' - \alpha'\gamma' + 2\beta'' + \gamma'']. \quad (4.22)$$

De posse desses resultados e substituindo em (4.16), encontramos as equações de campo para o espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, dado por (3.1)

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2 + e^{2\alpha}V(\phi), \quad (4.23)$$

$$-e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \frac{\epsilon}{2}\phi'^2 - e^{2\alpha}V(\phi), \quad (4.24)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi'^2 - e^{2\alpha}V(\phi), \quad (4.25)$$

$$e^{-2\alpha} [\phi'' - (\alpha' - 2\beta' - \gamma')\phi'] = \epsilon V_\phi. \quad (4.26)$$

Como abordado na seção (3.1), temos uma liberdade na escolha de uma condição de coordenada. Neste caso, vamos adotar a coordenada harmônica, dada por

$$\alpha = 2\beta + \gamma, \quad (4.27)$$

muito comum em problemas que envolve campos escalares. Aliado a isso, vamos optar por fazer  $V(\phi) = 0$ . Dessa forma, a expressão (4.25) se resume a

$$\phi'' = 0, \quad (4.28)$$

que integrando duas vezes, resulta em

$$\phi = Ar + \phi_0, \quad (4.29)$$

em que  $A$  e  $\phi_0$  são constantes.

Diante das considerações acima, as equações (4.22)-(4.25) se resumem a

$$e^{2(\beta+\gamma)} + 2\beta'\gamma' + \beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}A^2, \quad (4.30)$$

$$-e^{2(\beta+\gamma)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = \frac{\epsilon}{2}A^2, \quad (4.31)$$

$$\beta'^2 + 2\beta'\gamma' - \beta'' - \gamma'' = \frac{\epsilon}{2}A^2. \quad (4.32)$$

A resolução do sistema de equações (4.30)-(4.32) nos fornece as seguintes expressões:

$$\gamma = Br + \gamma_0 \quad e \quad (4.33)$$

$$\beta'' = e^{2(\beta+Br+\gamma_0)}, \quad (4.34)$$

com  $B$  e  $\gamma_0$  constantes.

Partindo da equação (4.34), vamos chamar de  $v = \beta + br + \gamma_0$  e desta forma obtemos que  $v'' = \beta''$ , portanto,

$$v'' = e^{2v},$$

$$v'^2 = e^{2v} + 2C,$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{e^{2v} + 2C}} = \int dr. \quad (4.35)$$

Agora, vamos analisar a solução da integral mediante às condições da constante  $C$ , ou seja,  $C > 0$ ,  $C = 0$  e  $C < 0$ .

Para  $C > 0$ , reescrevemos a integral da seguinte forma

$$\int \frac{dv}{\sqrt{2C}\sqrt{1 + \frac{e^{2v}}{2C}}} = \int dr. \quad (4.36)$$

Substituindo  $\zeta = \frac{e^v}{\sqrt{2C}}$ , na expressão anterior, podemos encontrar  $v = \ln \zeta + \ln \sqrt{2C}$  e derivando obtemos  $dv = \frac{d\zeta}{\zeta}$ . Substituindo na expressão (4.36), temos

$$\int \frac{d\zeta}{\zeta\sqrt{1 + \zeta^2}} = \sqrt{2C} \int dr. \quad (4.37)$$

Fazendo  $\zeta = \sinh \theta$  e derivando, obtemos  $d\zeta = \cosh \theta d\theta$ . Substituindo em (4.37) e realizando sucessivos passos

$$\begin{aligned} \int \frac{\cosh \theta d\theta}{\sinh \theta \sqrt{1 + \sinh^2 \theta}} &= \sqrt{2C} \int dr, \\ \int \frac{d\theta}{\sinh \theta} &= \sqrt{2C} \int dr, \\ \ln \left[ \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right) \right] &= \sqrt{2C} (r + D), \\ \tanh \left( \frac{\theta}{2} \right) &= e^{\sqrt{2C}(r+D)}. \end{aligned}$$

Porém,

$$\tanh \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta}$$

logo,

$$\frac{\sinh \theta}{1 + \cosh \theta} = e^\sigma, \quad (4.38)$$

em que  $\sigma = \sqrt{2C}(r + D)$ , com  $C$  e  $D$  constantes. Da expressão (4.38), seguimos com

$$\begin{aligned} e^\sigma + e^\sigma \cosh \theta &= \sinh \theta, \\ e^\sigma \cosh \theta &= \sinh \theta - e^\sigma, \\ e^{2\sigma} \cosh^2 \theta &= \sinh^2 \theta - 2e^\sigma \sinh \theta + e^{2\sigma}, \\ e^{2\sigma} + e^{2\sigma} \sinh^2 \theta &= \sinh^2 \theta - 2e^\sigma \sinh \theta + e^{2\sigma}, \\ e^{2\sigma} \sinh \theta &= \sinh \theta - 2e^\sigma, \\ \sinh \theta &= \frac{2e^\sigma}{1 - e^{2\sigma}}. \end{aligned}$$

e, multiplicando a expressão anterior por  $\frac{e^{-\sigma}}{e^{-\sigma}}$ , obtemos

$$\sinh \theta = \frac{2}{e^{-\sigma} - e^\sigma},$$

ou, ainda,

$$\sinh \theta = -\frac{1}{\sinh \sigma}.$$

Recuperando as substituições feitas, temos

$$e^{2v} = \frac{2C}{\sinh^2 \left[ \sqrt{2C}(r + D) \right]}. \quad (4.39)$$

De posse da equação (4.39) podemos chegar aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} e^{2\gamma} = e^{2(Br+\gamma_0)} \quad , \quad e^{2\beta} &= \frac{2Ce^{-2(Br+\gamma_0)}}{\sinh^2 \left[ \sqrt{2C}(r + D) \right]}, \\ e^{2\alpha} &= \frac{4C^2e^{-2(Br+\gamma_0)}}{\sinh^4 \left[ \sqrt{2C}(r + D) \right]}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Com base nos resultados obtidos podemos reescrever a métrica

$$ds^2 = e^{2(Br+\gamma_0)} dt^2 - \frac{2Ce^{-2(Br+\gamma_0)}}{\sinh^2 \left[ \sqrt{2C}(r + D) \right]} \left\{ \frac{2C}{\sinh^2 \left[ \sqrt{2C}(r + D) \right]} dr^2 + d\Omega^2 \right\}. \quad (4.41)$$

Agora, vamos considerar

$$\begin{aligned}\sqrt{2C}(r + D) &= ku \\ \sqrt{2C}dr &= kdu \\ dr &= \frac{k}{\sqrt{2C}}du \\ dr^2 &= \frac{k^2}{2C}du^2.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Logo,  $k = \frac{1}{\sqrt{2C}}$ . Agora, vamos fazer, também,

$$Br + \gamma_0 = -bu,\tag{4.43}$$

e, também,

$$r = \frac{ku}{\sqrt{2C}} - \frac{D}{\sqrt{2C}},$$

ou, ainda,

$$r = k^2u - kD, \quad \text{com } k = \frac{1}{\sqrt{2C}}.\tag{4.44}$$

Substituindo a expressão (4.44) na expressão (4.43), obtemos

$$B(k^2u - kD) + \gamma_0 = -bu.$$

Dessa forma, temos que

$$B = -\frac{b}{k^2} \quad \text{e} \quad \gamma_0 = kD.\tag{4.45}$$

A partir desses resultados, podemos reescrever as expressões (4.40) da seguinte forma:

$$e^{2\gamma} = e^{-2bu}, \quad e^{2\beta} = \frac{k^2 e^{2bu}}{\sinh^2(ku)} \quad \text{e} \quad e^{2\alpha} = \frac{k^4 e^{2bu}}{\sinh^4(ku)}.\tag{4.46}$$

Após a mudança de coordenada e simplificações, podemos reescrever, novamente, a métrica

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2bu}}{\sinh^2(ku)} \left[ \frac{k^2}{\sinh^2(ku)} du^2 + d\Omega^2 \right].\tag{4.47}$$

De forma análoga, usamos do mesmo raciocínio para  $C = 0$ , obtendo

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{e^{2bu}}{u^2} \left[ \frac{du^2}{u^2} + d\Omega^2 \right], \quad (4.48)$$

e para  $C < 0$ , obtendo

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2bu}}{\sin^2(ku)} \left[ \frac{k^2}{\sin^2(ku)} du^2 + d\Omega^2 \right]. \quad (4.49)$$

Encontramos a métrica para as três condições da constante  $C$ , que agora possui uma dependência da constante  $k$  e da coordenada  $u$ . Podemos resumi-la da seguinte forma:

$$ds^2 = e^{-2bu} dt^2 - \frac{e^{2bu}}{s^2(k, u)} \left[ \frac{du^2}{s^2(k, u)} + d\Omega^2 \right], \quad (4.50)$$

em que a função  $s(k, u)$  é dada por,

$$s(k, u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} k^{-1} \sinh(ku), & \text{se } k > 0, \\ u, & \text{se } k = 0, \\ k^{-1} \sin(ku), & \text{se } k < 0. \end{cases} \quad (4.51)$$

As constantes  $b$ ,  $k$  e  $A$  (chamada de carga escalar), podem ser relacionadas a partir da equação (4.32), portanto,

$$2k^2 \text{sign } k = 2b^2 + \epsilon A^2. \quad (4.52)$$

A coordenada  $u$  é definida no intervalo  $u > 0$  quando  $k \geq 0$  e no intervalo  $0 < u < \frac{\pi}{|k|}$  quando  $k < 0$ . O valor  $u = 0$  corresponde ao infinito espacial plano, porém, para valores pequenos de  $u$ , o raio esférico é  $r(u) \approx \frac{1}{u}$  e a métrica é aproximadamente do tipo Schwarzschild, com  $g_{00} \approx 1 - 2b/r$ .

No caso  $k > 0$ , é útil passar para o coordenada quasiglobal  $\rho$  por meio da transformação

$$e^{-2ku} = 1 - \frac{2k}{\rho} = P(\rho), \quad (4.53)$$

também podemos relacionar

$$[P(\rho)]^a = (e^{-2ku})^a = e^{-2bu} \quad , \text{ portanto, } a = \frac{b}{k}$$

e também,

$$u = \frac{1}{\rho} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad \Rightarrow \quad du^2 = \frac{1}{\rho^4} d\rho^2.$$

Com isso, podemos reescrever (4.50), para  $k > 0$ , da seguinte forma:

$$ds^2 = P^a dt^2 - P^{-a} d\rho^2 - P^{1-a} \rho^2 d\Omega^2, \quad \phi = -\frac{A}{2k} \ln P(\rho) \quad (4.54)$$

em que as constantes são relacionadas por

$$a = \frac{b}{k}, \quad a^2 = 1 - \frac{\epsilon A^2}{2k^2}. \quad (4.55)$$

A solução para  $\epsilon = 1$ , conhecida como solução de Fisher[38], que de acordo com (4.52), é consistente apenas para  $k > 0$  e, em (4.54), temos que  $|a| < 1$ . A solução é definida para  $\rho > 2k$ , porém para  $\rho = 2k$  temos uma singularidade nua central ( $r = 0$ ) que é atrativa para  $b > 0$  e repulsiva para  $b < 0$ . A solução de Schwarzschild pode ser restaurada fazendo  $A = 0$ ,  $a = 1$  e  $b > 0$  ou  $A = 0$ ,  $a = -1$  e  $b < 0$ .

A solução para  $\epsilon = -1$  (campo escalar fantasma) que pode ser chamado como solução anti-Fisher[11], em analogia a de Sitter e anti-de Sitter. Suas propriedades são mais diversas e interessantes. De acordo com as três variantes da função (4.51), esta solução se divide em três ramos com as seguintes propriedades:

**Ramo a:**  $k > 0$ , novamente a solução tem a forma (4.54), mas agora  $|a| > 1$ . Para  $b < 0$ , isto é,  $a < -1$ , temos assim, uma solução tipo Fisher, uma singularidade central repulsiva em  $\rho = 2k$ .

A situação é, no entanto, drasticamente diferente para  $a > 1$ . Com efeito, o raio  $r$  esférico, então, tem um mínimo finito em  $\rho = \rho_{th} = (a + 1)k$ , correspondendo a uma garganta do tamanho

$$r(\rho_{th}) = r_{th} = k(a + 1)^{(a+1)/2} (a - 1)^{(1-a)/2}, \quad (4.56)$$

que tende ao infinito quando  $\rho \rightarrow 2k$ . Além disso, para  $a = 2, 3, \dots$  a métrica exibe um horizonte de ordem  $a$  em  $\rho \rightarrow 2k$  e admite continuações para  $\rho < 2k$ . Uma peculiaridade de tais horizontes é a sua área infinita. Horizontes que possuem essas características foram denominados horizontes tipo B [19, 20], para distingui-los dos horizontes usuais, "tipo A", de área finita. Todas as configurações assintoticamente planas com horizontes do tipo B foram chamados de buracos negros frios, desde que todos eles tenham temperatura Hawking igual a zero.

Além disso, todas as componentes  $K_i$  do escalar de Kretschmann (ver 3.3) comportam-se como  $P^{a-2}$  e quando  $\rho \rightarrow 2k$ ,  $P \rightarrow 0$ . Uma exceção é o valor  $a = 1$ , que no caso em que  $A = 0$  e  $\phi = 0$ , a solução de Schwarzschild é reproduzida. Assim, em  $\rho = 2k$  a métrica tem uma singularidade de curvatura, se  $a < 2$  (excepto para  $a = 1$ ); uma curvatura finita, se  $a = 1$  e  $a = 2$ ; e, curvatura zero, se  $a > 2$ .

Para  $a > 2$  não inteiro, o comportamento qualitativo da métrica quando  $\rho \rightarrow 2k$  é o mesmo próximo do horizonte de tipo B, mas uma continuação além do horizonte é impossível devido à não analiticidade da função  $P^a(\rho)$  em  $\rho = 2k$ . Uma vez que as geodésicas terminam em  $\rho = 2k$ , com um valor finito do parâmetro afim, esta é uma singularidade do espaço-tempo (um horizonte singular), embora os invariantes de curvatura tendam a zero.

**Ramo b:** a solução é definida no intervalo de  $u \in \mathbb{R}_+$  e é reescrita em termos da coordenada quasiglobal  $\rho = 1/u$  como se segue:

$$ds^2 = e^{-2b/\rho} dt^2 - e^{2b/\rho} [d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2], \quad \phi = A/\rho. \quad (4.57)$$

Como dito antes,  $\rho = \infty$  é um plano infinito, enquanto no outro extremo,  $\rho \rightarrow 0$ , o comportamento é diferente para  $b$  positivo e negativo. Assim, para  $b < 0$ ,  $\rho = 0$  é um centro singular ( $r = 0$  e todos  $K_i$  são infinitos). Pelo contrário, para  $b > 0$ ,  $r \rightarrow \infty$  e todos  $K_i \rightarrow 0$  como  $\rho \rightarrow 0$ . Este é de novo um horizonte singular: apesar do desaparecimento curvatura, a não-analiticidade da métrica em termos de  $\rho$  torna impossível a sua continuação.

**Ramo c:** esta solução descreve um buraco de minhoca com dois planos assintóticos, em  $u = 0$  e  $u = \pi/|k|$ . A métrica assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{-2bu} dt^2 - \frac{k^2 e^{2bu}}{\sin^2(ku)} \left[ \frac{k^2}{\sin^2(ku)} du^2 + d\Omega^2 \right]. \\ &= e^{-2bu} dt^2 - e^{2bu} dt^2 [d\rho^2 + (k^2 + \rho^2) d\Omega^2], \end{aligned} \quad (4.58)$$

em que  $u$  é expressa em termos da coordenada quasiglobal  $\rho$ , definido em todo o eixo real de  $\mathbb{R}$ , por  $|k|u = \cot^{-1}(\rho/|k|)$ . Se  $b > 0$ , o buraco de minhoca é atrativo para uma matéria teste no primeiro caso assintótico ( $\rho \rightarrow \infty$ ) e repulsivo no segundo caso ( $\rho \rightarrow -\infty$ ), e vice-versa se  $b < 0$ . Para  $b = 0$ , obtém-se a solução mais simples possível de buraco de minhoca, chamado de buraco de minhoca de Ellis, embora Ellis[35], tenha discutido essas soluções de buraco de minhoca com qualquer  $b$ .

### Buracos negros frios na solução anti-Fisher

Nos diferentes ramos da solução anti-Fisher, o de maior interesse para nós é o caso dos buracos negros frios. Vamos discutir brevemente sua estrutura e propriedades.

Para  $a$  ímpar, as propriedades geométricas e causais principais, inclusive o diagrama de Penrose, coincidem com a métrica de Schwarzschild. Assim, para  $\rho < 2k$ ,  $\rho$  é uma coordenada tipo-tempo e  $t$  é tipo-espaco, e o espaco-tempo é homogêneo e anisotrópico, correspondendo às cosmologias anisotrópicas tipo Kantowski-Sachs. A singularidade em  $\rho = 0$  ( $r = 0$ ) é tipo-espaco (cosmológica) e é alcançada por todas as geodésicas tipo-tempo em um intervalo de tempo finito depois da travessia do horizonte.

Para  $a$  par, o diagrama de Penrose é o mesmo que para o espaco-tempo extremo de Reissner-Nordström, no entanto, o significado físico da região para  $\rho < 2k$  é bem diferente. Uma vez que  $g_{22}$  e  $g_{33}$  mudam seus sinais no horizonte, a métrica em  $\rho < 2k$  tem a assinatura  $(- + ++)$  em vez de  $(+ - --)$  quando  $\rho$  é grande. A natureza Lorentziana do espaco-tempo ainda é preservada, e pode-se verificar que todas as geodésicas continuam sem problemas de uma

região para a outra, pois as equações das geodésicas dependem somente dos símbolos de Christoffel e são invariantes sob a anti-isometria  $g_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu}$ . A coordenada de tempo na região  $\rho < 2k$  é a coordenada  $\rho$  desde que  $g^{\rho\rho} < 0$ , enquanto as outras componentes diagonais de  $g_{\mu\nu}$  são positivas. Assim, tal como acontece para  $a$  ímpar, temos uma cosmologia tipo Kantowski-Sachs com uma singularidade tipo-espaço em  $\rho = 0$  ( $r = 0$ ). A direção da flecha de tempo pode ser arbitrária desde que geodésicas tipo-tempo vindas de uma região estática tornam-se tipo-espaço (não se pode dizer onde é o passado e onde está o futuro) na região interna à hipersuperfície delimitada por  $\rho < 2k$ , podendo até mesmo evitar a singularidade.

As propriedades do campo escalar não são menos exóticas. De acordo com (4.54),  $\phi \rightarrow \infty$  quando  $\rho \rightarrow 2k$ ; isso, no entanto, não contradiz a regularidade da superfície  $\rho = 2k$  para  $a \geq 2$  desde que a densidade de energia seja

$$T_0^0 = -\frac{1}{2}P^a\phi'^2 = -\frac{A^2}{2}\frac{(\rho - 2k)^{a-2}}{\rho^{a+2}}, \quad (4.59)$$

bem como os outros componentes de  $T_{\mu\nu}$ , são finitos em  $\rho = 2k$  (lembrando que para  $a < 2$  os invariantes de curvatura também divergem, juntamente com  $T_{\mu\nu}$ ). Assim, o valor infinito de  $\phi$  não impede a continuação da variedade do espaço-tempo para um  $\rho$  menor, onde a solução é válida com  $\phi = -\frac{A}{2k} \ln P(\rho)$ . Por outro lado, a energia do campo escalar total, calculada como a quantidade conservada que corresponde ao vetor de Killing tipo-tempo, acaba por ser infinita na região estática de uma forma independente de  $a$ ,

$$\mathcal{E} = \int T_0^0 \sqrt{g} d^3x = -2\pi C^2 \int \frac{d\rho}{\rho(\rho - 2k)}, \quad (4.60)$$

e a integral diverge logaritmicamente em  $\rho = 2k$ . A divergência está relacionada com o volume espacial infinito: a integral  $\int \sqrt{g} d^3x$  diverge perto  $\rho = 2k$  ainda mais forte do que (4.60).

### 4.2.3 Frame de Jordan na teoria Brans-Dicke

A solução (anti-)de Fisher, é a solução da relatividade geral minimamente acoplada a um campo escalar sem massa no frame de Einstein. Vamos discutir, brevemente, a solução correspondente no frame de Jordan, no contexto da teoria escalar-tensorial mais simples e mais conhecida, a teoria de Brans-Dicke. Isto corresponde às seguintes escolhas, na equação (4.8):

$$f(\varphi) = \varphi, \quad h(\varphi) = \omega/\varphi. \quad (4.61)$$

em que  $\omega$  é a constante de acoplamento de Brans-Dicke; Tomamos também a versão sem massa da teoria,  $U(\varphi) = 0$ , para lidar com a solução (anti-)de Fisher. Assim, a Lagrangiana toma a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left( \varphi R - \omega \frac{1}{\varphi} (\partial\varphi)^2 \right). \quad (4.62)$$

Uma vez que nós estamos interessados apenas em buracos negros frios, vamos considerar as soluções para  $k > 0$ , dado pela equação (4.54) com (4.53). Portanto, a solução da teoria Brans-Dicke no frame de Jordan pode ser escrita na forma

$$ds_J^2 = P^{-\xi} ds_E^2 = P^{a-\xi} dt^2 - P^{-a-\xi} d\rho^2 - P^{1-a-\xi} \rho^2 d\Omega^2, \quad (4.63)$$

com,

$$\varphi = \exp \left[ \phi / \sqrt{|\omega + 3/2|} \right] = P^\xi, \quad (4.64)$$

em que o parâmetro  $\xi$  está relacionado com  $a$  e  $\omega$  por

$$(3 + 2\omega)\xi^2 = 1 - ca^2. \quad (4.65)$$

As condições para encontrar buracos negros nesta solução foram discutidas nas seções anteriores, como também em [19, 20]. Vamos recordá-las brevemente.

Em (4.54), um horizonte na métrica (4.63) pode ocorrer em  $\rho = 2k$  se  $a > 0$ . No entanto, para que existam soluções buracos negros frios os parâmetros  $a$  e  $\xi$  devem obedecer às seguintes condições:

$$a = \frac{m+1}{m-n}, \quad \xi = \frac{m-n-1}{m-n}, \quad (4.66)$$

em que  $m$  e  $n$  são inteiros positivos que satisfazem as desigualdades

$$m - 2 \geq n \geq 0. \quad (4.67)$$

A constante de acoplamento  $\omega$  também deve pertencer a um conjunto discreto de valores,

$$2\omega + 3 = -\frac{2m(n+1) - n^2 + 1}{(m-n-1)^2} < 0 \quad (4.68)$$

Uma vez que, para a teoria de Brans-Dicke,  $l(\varphi) = \omega + 3/2$  e  $\epsilon = \text{sign } l$  (4.9), encontramos que, assim como no frame de Einstein, os buracos negros frios só podem existir com um campo escalar fantasma. O mesmo é verdade para as configurações semelhantes com carga eléctrica diferente de zero [21], apesar de um número maior de classes de soluções.

No entanto, as condições de existência de buracos negros frios são diferentes nos frames de Einstein e Jordan, e as estruturas globais dos espaços-tempos completos, continuam além dos horizontes, também são diferentes [19, 20]. Em particular, todos  $K_i$  vão para o infinito quando  $\rho \rightarrow 0$  na solução (4.54). Em outras palavras, há sempre uma singularidade de curvatura na região interna das buracos negros frios no frame de Einstein (que é o mesmo buracos negros frios com um campo escalar fantasma sem massa minimamente acoplado na relatividade geral). Enquanto isso, muitos buracos negros frios de Brans-Dicke no frame de Jordan são não singulares, e alguns deles têm outra região assintoticamente plano para além do horizonte [19, 20].

# Capítulo 5

## Teorias de k-essência em espaços-tempos esfericamente simétricos

### 5.1 Teorias de k-essência

As teorias de k-essência [7] pertencem a um grupo de campos fundamentais acoplados à gravidade. Estão baseadas numa possível modificação do termo cinético do campo escalar. Esta teoria foi, pela primeira vez, sugerida por [5], a fim de se ter um modelo de inflação impulsionada pelo termo cinético em vez do potencial. Mas logo depois, essa ideia foi aplicada para explicar o atual estágio da expansão acelerada do Universo [6]. É interessante notar que uma estrutura de k-essência também aparece em teorias das cordas como, por exemplo, sob a ação de Dirac-Born-Infeld, em que o termo cinético do campo escalar tem uma estrutura semelhante ao termo de Maxwell na eletrodinâmica de Born-Infeld [28].

As teorias de k-essência podem ser definidas a partir da seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [R - F(X, \phi)], \quad (5.1)$$

com

$$X = \eta \phi_{; \rho} \phi^{; \rho}, \quad (5.2)$$

em que  $\eta = \pm 1$  é usado para fazer com que  $X$  seja positivo nos casos gerais de lei de potência de quantidades negativas. Podemos, ainda, ter um caso particular de k-essência em que o termo cinético esta dissociado do potencial, dado pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [R - f(X) + 2V(\phi)] \quad (5.3)$$

As teorias de k-essência são amplamente aplicadas no estudo de cosmologia. Além disso, existe também, porém em menor escala, um esforço para se estudar possíveis efeitos da k-essência nas propriedades e estruturas de objetos locais, tais como buracos negros e buracos de minhoca.

De forma mais geral, vamos considerar as configurações estáticas e esfericamente simétricas em  $k$ -essência.

Mais adiante, iremos verificar características semelhantes às encontradas no capítulo 4.

### 5.1.1 Equações de campo

Basicamente, os passos que seguiremos nesta seção serão os mesmos da seção 4.2.2. Variando a Lagrangiana (5.1) com respeito à métrica, obtemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \eta\phi_{;\mu}\phi_{;\nu}F_X - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(X, \phi), \quad (5.4)$$

A divergência da equação (5.4) é nula, portanto,

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (5.5)$$

e, portanto, obtemos

$$\eta\nabla_\mu (F_X\phi^{i\mu}) - \frac{1}{2}F_\phi = 0, \quad (5.6)$$

com  $F_X = \frac{dF}{dX}$  e  $F_\phi = \frac{dF}{d\phi}$ .

Considerando, novamente, uma métrica geral estática e esfericamente simétrica

$$ds^2 = e^{2\gamma(u)}dt^2 - e^{2\alpha(u)}dr^2 - e^{2\beta(u)}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.7)$$

em que  $u$  é uma coordenada radial arbitrária. Dessa forma, das equações (5.4) e (5.6) podemos escrever explicitamente as equações de campo

$$e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' = -e^{2\alpha}\frac{F}{2}, \quad (5.8)$$

$$-e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' = e^{2\alpha}\left(\frac{F}{2} + XF_X\right), \quad (5.9)$$

$$\beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' = e^{2\alpha}\frac{F}{2}, \quad (5.10)$$

$$2(F_X e^{-\alpha+2\beta+\gamma}\phi')' = e^{-\alpha+2\beta+\gamma}F_\phi, \quad (5.11)$$

em que  $X = -\eta e^{-2\alpha}\phi'^2$  e  $(')$  denota  $d/du$ . Note que podemos deixar  $X$  positivo escolhendo  $\eta = -1$ , caso seja necessário.

O próximo passo é escolher uma condição de coordenada. Neste caso, escolheremos a coordenada radial quasiglobal  $x := u$ , como já apresentado na seção 2.1, dada pela condição  $\alpha(u) + \gamma(u) = 0$ , muito útil, pois estamos considerando horizontes de Killing dados pelos zeros

regulares da função

$$A(x) = e^{2\gamma} = e^{-2\alpha}, \quad (5.12)$$

com  $r(x) = e^\beta$ . Portanto, a métrica (5.7) ganha a seguinte forma

$$ds^2 = A(x)dt^2 - \frac{dr^2}{A(x)} - r(x)^2 d\Omega^2. \quad (5.13)$$

Combinando as equações (5.8)-(5.10) nesta nova configuração de coordenadas, obtemos

$$2A \frac{r''}{r} = XF_X, \quad (5.14)$$

$$A''r^2 - A(r^2)'' = -2, \quad (5.15)$$

em que, agora, (') denota  $d/dx$ . Podemos integrar a equação (5.14), fazendo  $r^2 = v$

$$\int v \frac{d}{dx} \left( \frac{dA}{dx} \right) dx - \int A \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) dx = -2 \int dx,$$

$$vA' - Av' = 6m - 2x,$$

$$r^2A' - A(r^2)' = 6m - 2x.$$

Dividindo ambos os lados por  $r^4$ , obtemos

$$B'(x) = \left( \frac{A}{r^2} \right)' = \frac{6m - 2x}{r^4}, \quad (5.16)$$

em que  $B(x) \equiv A/r^2$  e  $m$  é uma constante de integração e igual à massa de Schwarzschild caso a métrica (5.12) seja assintoticamente plana quando  $u \rightarrow \infty$ . Nesta aproximação, temos  $r \approx x$ , e portanto,  $A = 1 - 2m/x + o(1/x)$ .

Um detalhe importante conectado à equação (5.14) é a sua relação com o sinal da diferença  $T_0^0 - T_1^1 = -XF_X$  com a quantidade  $r''$ . Desta forma, se  $r'' < 0$ , então  $T_0^0 - T_1^1 > 0$ , e portanto, a Condição de Energia Nula (NEC) é satisfeita, por outro lado, se  $r'' > 0$ , é violada e, em particular, gargantas de buracos de minhoca são possíveis. Parece claro que a Lagrangiana (5.1) ou até mesmo (5.3) tornam possível qualquer sinal de  $XF_X$  e, conseqüentemente, o sinal de  $r''$ .

## 5.2 Um teorema No-Go

A estrutura do tensor energia-momento (5.3) nos fornece uma importante afirmação sobre a possível existência de horizontes na métrica (5.7), até mesmo no caso mais geral (5.1). A base para esta afirmação vem do *Teorema de Estrutura Global*[17]: pode haver no máximo

dois horizontes simples, tipo-Schwarzschild, no raio finito  $r = e^\beta$ , e não mais do que um desses horizontes se o tempo-espaço é assintoticamente plano. Este resultado decorre diretamente da igualdade

$$T_0^0 = T_2^2. \quad (5.17)$$

De fato, como já mencionado, horizontes são descritos por zeros regulares da função de  $A(x)$  ou, de forma equivalente,  $B(X) = A/r^2$ , desde que  $r$  seja finito. Enquanto isso, segue de (5.15) que a função  $B(x)$  não pode ter um mínimo regular, portanto, uma vez que se tornou negativo,  $B(x)$  nunca retorna a zero.

Há muitos outros resultados de interesse sobre a possível existência ou não de horizontes em configurações com campos escalares. O teorema *No-Hair* encontrado em [3], alega que não podem haver buracos negros assintoticamente planos com um campo escalar não trivial como no caso  $F = X - 2V(\phi)$ , com  $\eta = 1$  (um campo escalar normal, não fantasma) e potenciais  $V$  não negativos. O teorema foi generalizado em [24] para determinados espaços-tempos multi-escalares e multidimensionais. O objetivo agora é obter mais um resultado "no-hair" relativo à importante família de lagrangianas (5.1), com  $F = f(X)$ .

Integrando a equação (5.11), considerando apenas  $F = f(X)$ , obtemos

$$f_X e^{-\alpha+2\beta+\gamma} \phi' = C = \text{constante}. \quad (5.18)$$

Utilizando a coordenada quasiglobal  $u = x$ , o que implica em  $A(x) = e^{2\gamma} = e^{-2\alpha}$  e  $r(x) = e^\beta$ , a expressão fica

$$A f_X \phi' = C/r^2. \quad (5.19)$$

Isto posto, a partir das expressões (5.18) e (5.19), podemos reescrever equação (5.14) como

$$2 \frac{r''}{r} = -\phi'^2 f_X = -\frac{C^2}{A^2 r^4 f_X}, \quad \text{com } X = e^{-\alpha} \phi'^2. \quad (5.20)$$

O que precisamos fazer é verificar se o sistema admite um horizonte de Killing como os horizontes de evento dos buracos negros estáticos. Do Teorema de Estrutura Global [17] citado anteriormente, segue-se que, se  $A(x) > 0$  em algum intervalo de  $x$ , onde a métrica é realmente estática, tal horizonte pode ser apenas de primeira ordem, de tal modo que a função  $A(x)$  se comporta como  $A \sim x - x_h$ .

Observando a expressão (5.19), vemos que  $A \rightarrow 0$  para um valor de  $r$  finito, o que implica em  $f_X \phi' \rightarrow \infty$ , descartando o caso trivial  $C = 0$ . Por outro lado, mais uma vez devido à (5.19), a expressão  $X f_X$ , que está presente no tensor energia-momento, é igual a  $C \phi' / r^2$ . Portanto, o caráter finito das componentes do tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , necessário para regularidade do espaço-tempo implica em  $|\phi'| < \infty$ , logo, um horizonte requer  $f_X \rightarrow \infty$ .

Assim, obtemos o seguinte teorema no-go: *A existência de um buraco negro com horizonte de Killing para  $r$  finito é incompatível com a função normal  $f(X)$ .*

### 5.2.1 Horizontes de Killing

Um campo vetorial de Killing  $\zeta^\mu$  é aquele que satisfaz a equação de Killing

$$\nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu = 0, \quad (5.21)$$

em que  $\zeta_\mu = g_{\mu\nu} \zeta^\nu$  é a 1-forma associada ao campo vetorial  $\zeta^\nu$ . As soluções da equação de Killing (5.21) são chamadas vetores de Killing. Os vetores de Killing são os geradores de isometrias do espaço-tempo

Um horizonte de Killing  $\mathcal{H}$  de um espaço-tempo  $(M, g_{\mu\nu})$ <sup>1</sup> é uma hipersuperfície nula tangente a um campo vetorial de Killing  $\zeta^\mu$  que se torna nula,  $\zeta^\nu \zeta_\nu = 0$ , em  $\mathcal{H}$ . Este campo vetorial de Killing é tipo-tempo,  $\zeta^\nu \zeta_\nu > 0$ , em uma região do espaço-tempo que tem  $\mathcal{H}$  como limite. Horizontes de eventos estacionários em relatividade geral são geralmente horizontes de Killing de um vetor Killing convenientemente escolhido [27]. Por exemplo, na geometria de Schwarzschild, um vetor de Killing  $\zeta^\mu$  é tipo-tempo na região de  $r > 2m$ , externa ao horizonte, torna-se nulo em  $r = 2m$  e tipo espaço na região interior,  $r < 2m$ . O horizonte de eventos  $r = 2m$  também é um horizonte Killing. De modo mais geral, qualquer horizonte de eventos em um espaço-tempo localmente estático é também um horizonte de Killing para o vetor de Killing  $\zeta^\mu = (\partial/\partial t)^\mu$  associado com a simetria do tempo. Se o espaço-tempo é estacionário e assintoticamente plano (mas não necessariamente estático), deve ser axialmente simétrico e qualquer horizonte de eventos é um horizonte Killing para o vetor de Killing

$$\zeta^\mu = (\partial/\partial t)^\mu + \Omega_h (\partial/\partial \varphi)^\mu, \quad (5.22)$$

que é uma combinação linear dos vetores associados com o tempo e simetrias de rotação.  $\Omega_h$  é a velocidade angular no horizonte.

O conceito de horizonte de Killing deixa de ser útil em espaços-tempos, ou regiões do espaço-tempo, que não são estacionárias e não admitem vetores de Killing tipo-tempo [36].

## 5.3 Solução particular I

Nesta seção vamos investigar uma solução particular para uma configuração estática e esfericamente simétrica (5.7) em uma teoria de k-essência, a partir do modelo

$$F(X) = \epsilon X^n - 2\Lambda, \quad \text{com } X = \eta \phi_{;\rho} \phi^{;\rho}. \quad (5.23)$$

<sup>1</sup> $M$  é uma variedade e  $g_{\mu\nu}$  é uma métrica de assinatura Lorentziana

Desta forma, a Lagrangiana toma a seguinte forma

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} [R - \epsilon X^n + 2\Lambda], \quad (5.24)$$

em que  $\epsilon = \pm 1$  (1 para um campo normal;  $-1$  para um campo fantasma). Escolhendo  $\eta = -1$  teremos  $X = e^{-\alpha} \phi'^2$ , garantindo que  $X$  seja sempre positivo, evitando qualquer problema com o expoente  $n$ . Isto posto, podemos escrever as expressões gerais para as equações de campo, seguindo os mesmo passos de seções anteriores. São elas

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R &= \epsilon \left( n\phi_{;\mu}\phi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{;\rho}\phi^{;\rho} \right) X^{n-1} + g_{\mu\nu}\Lambda, \\ \square\phi + 2(n-1) \frac{\phi_{;\mu}\phi_{;\sigma}\phi^{;\sigma;\mu}}{\phi_{;\rho}\phi^{;\rho}} &= 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

mais explicitamente,

$$\begin{aligned} e^{2(\alpha-\beta)} + 2\alpha'\beta' - 3\beta'^2 - 2\beta'' &= \frac{\epsilon}{2}e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} + e^{2\alpha}\Lambda, \\ -e^{2(\alpha-\beta)} + \beta'^2 + 2\beta'\gamma' &= \frac{\epsilon}{2}(2n-1)e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} - e^{2\alpha}\Lambda, \\ \beta'^2 + \beta'\gamma' + \gamma'^2 - \alpha'(\beta' + \gamma') + \beta'' + \gamma'' &= -\frac{\epsilon}{2}e^{2(1-n)\alpha}\phi'^{2n} - e^{2\alpha}\Lambda, \\ (2n-1)\phi'' &= -[(1-2n)\alpha' + 2\beta' + \gamma']\phi'. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Neste ponto, vamos escolher uma condição de coordenadas, conhecida como coordenadas harmônicas, já mencionada anteriormente, dada por

$$\alpha(u) = 2\beta(u) + \gamma(u), \quad (5.27)$$

em que a coordenada  $u$  tem dimensão de  $1/\text{comprimento}$ . Além da escolha da condição anterior, vamos estabelecer  $n = 1/2$  e  $\alpha = 0$  ( $\gamma = -2\beta$ ). Assim, podemos reescrever as equações (5.26)

$$e^{-2\beta} - 3\beta'^2 - 2\beta'' = \frac{\epsilon}{2}\phi' + \Lambda, \quad (5.28)$$

$$e^{-2\beta} + 3\beta'^2 = \Lambda, \quad (5.29)$$

$$3\beta'^2 - \beta'' = -\frac{\epsilon}{2}\phi' - \Lambda. \quad (5.30)$$

Partindo da equação (5.29), temos

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\beta' &= \sqrt{\Lambda - e^{-2\beta}} &\Rightarrow &\sqrt{3}e^\beta\beta' = \sqrt{e^{2\beta}\Lambda - 1}, \\ v &= \sqrt{\Lambda}e^\beta &\Rightarrow &dv = \sqrt{\Lambda}e^\beta d\beta, \\ \int \sqrt{3}dv &= \int \sqrt{\Lambda}\sqrt{v^2 - 1}du &\Rightarrow &\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 - 1}} = \int \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}du,\end{aligned}$$

que resulta em

$$v = \cosh(bu), \quad \text{com } b = \sqrt{\Lambda/3}. \quad (5.31)$$

Na expressão anterior, uma constante de integração foi suprimida, escolhendo-se o ponto zero da coordenada  $u$ . Note que a solução é válida apenas para  $\Lambda > 0$ . Assim, encontramos as expressões para  $e^\gamma$ ,  $e^\alpha$  e  $e^\beta$  da métrica original, dadas por

$$e^\beta = \frac{1}{\sqrt{3}b} \cosh(bu), \quad e^\gamma = \frac{3b^2}{\cosh^2(bu)} \quad \text{e} \quad e^\alpha = 1, \quad (5.32)$$

e, portanto, a métrica, em sua nova forma é

$$ds^2 = \frac{9b^4}{\cosh^4(bu)} dt^2 - du^2 - \frac{1}{3b^2} \cosh^2(bu) d\Omega^2. \quad (5.33)$$

De  $e^\beta$  obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\beta &= \ln[\cosh(bu)] - \ln(\sqrt{3}b), &\beta' &= b \frac{\sinh(bu)}{\cosh(bu)}, \\ \beta'' &= \frac{b^2}{\cosh^2(bu)} &\text{e} &e^{-2\beta} = \frac{3b^2}{\cosh^2(bu)}.\end{aligned} \quad (5.34)$$

Resolvendo as equações (5.28)-(5.30), juntamente com as expressões (5.34), obtemos as expressões para  $\phi'$  e  $\phi$ .

$$\phi' = \frac{4b^2}{\epsilon} [2 \operatorname{sech}^2(bu) - 3] \quad \text{e} \quad (5.35)$$

$$\phi = \frac{4b^2}{\epsilon} \left[ \frac{2}{b} \tanh(bu) - 3u \right] + \phi_0, \quad (5.36)$$

em que  $\phi_0$  é uma constante.

Para uma melhor análise da métrica, vamos utilizar uma coordenada quasiglobal  $x = 3b \tanh(bu)$ , portanto,

$$\begin{aligned} x = 3b \tanh(bu) &\Rightarrow \operatorname{sech}^2(bu) = 1 - \frac{x^2}{9b^2} \\ dx = 3b^2 \operatorname{sech}^2(bu) du &\Rightarrow du^2 = \frac{dx^2}{9b^4 \operatorname{sech}^4(bu)}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões anteriores em (5.33), obtemos

$$ds^2 = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9} dt^2 - \frac{9}{(9b^2 - x^2)^2} dx^2 - \frac{3}{(9b^2 - x^2)} d\Omega^2. \quad (5.37)$$

Desta forma, é fácil ver que este espaço-tempo possui dois horizontes,  $x = \pm 3b = \pm \sqrt{3\Lambda}$ .

Podemos analisar algumas características da solução (5.37), tais como a gravidade de superfície  $\kappa$ . A gravidade de superfície é uma expressão da aceleração da gravidade no horizonte de um buraco negro e é dada pela expressão [77, 44]:

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{g'_{00}}{\sqrt{|g_{00}g_{11}|}}, \quad (5.38)$$

que, para a solução (5.37)

$$\kappa = \frac{2x(9b^2 - x^2)}{9}, \quad (5.39)$$

que avaliada em  $x = \pm 3b$ , se anula. Portanto, a solução (5.37) possui gravidade de superfície nula nos horizontes. Isto também implica que a temperatura Hawking, dada pela expressão

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi k_B} \quad (5.40)$$

sobre os horizontes é nula.

Outra característica que podemos analisar é a área da superfície dos horizontes, que pode ser calculada por meio da expressão [10]

$$A = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{g_{22}g_{33}}, \quad (5.41)$$

que para a solução (5.37) fica

$$A = 4\pi \frac{3}{(9b^2 - x^2)}, \quad (5.42)$$

ou seja,  $A \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \pm 3b$ .

Portanto, esta solução possui horizontes de área infinita. No entanto, podemos pensar, que o fato de possuir área infinita, qualquer corpo estendido será infinitamente esticado po-

dando ser destruídos antes de realmente atravessar o horizonte. Para verificar isso, considere, por exemplo, um objeto extenso em queda livre, cujo centro de massa segue uma linha geodésica radial no plano  $\theta = \pi/2$ . A distância entre duas geodésicas radiais varia de acordo com a lei de desvio geodésico

$$\frac{D^2 n^\alpha}{d\lambda^2} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} u^\beta n^\mu u^\nu. \quad (5.43)$$

Desta forma, a aceleração azimutal relativa próxima do horizonte [19], se resume a

$$\frac{1}{n^3} \frac{D^2 n^3}{d\lambda^2} = E^2 R''/R, \quad (5.44)$$

em que  $R^2 = |g_{22}|$ ,  $R'' = d^2 R/dx^2$  e  $E$  é uma constante. O desvio geodésico azimutal (5.44) que, devido à sua estrutura, é insensível a *boosts* radiais é, portanto, igualmente aplicável a um referencial estático ou comóvel, para um corpo em queda, similar às relações dadas por Horowitz e Ross [49]. Assim sendo, para a métrica (5.37),  $R''/R \rightarrow \infty$  quando  $x \rightarrow \pm 3b$ .

Resumindo, a solução (5.37) possui algumas características interessantes, tais como gravidade de superfície nula (temperatura Hawking igual a zero), horizontes de área infinita - isto é, os horizontes são do mesmo tipo das soluções de buracos negros frios [19, 20] -, forças de maré que atuam sobre corpos extensos, que são infinitas no horizonte, permitindo a passagem apenas de partículas .

### 5.3.1 Estrutura causal

O objetivo, agora, é analisar a estrutura causal da solução particular I (5.37). O procedimento consiste em averiguar todos os pontos, ou regiões do espaço-tempo, que apresentem degenerescência ou singularidade aparente na métrica. Para isso, faremos a análise das geodésicas, pela equação das geodésicas, e da própria métrica, quando houver simetria esférica [34].

Antes de definirmos a equação da geodésica, primeiro vamos definir a densidade de Lagrangiana da solução I (5.37), dado por<sup>2</sup>

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \frac{1}{2} [g_{00} \dot{t}^2 + g_{11} \dot{x}^2 + g_{22} \dot{\theta}^2 + g_{33} \dot{\varphi}^2] = \varepsilon, \quad (5.45)$$

em que,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{para geodésicas tipo-tempo,} \\ 0, & \text{para geodésicas tipo-luz,} \\ -1, & \text{para geodésicas tipo-espaço.} \end{cases}$$

<sup>2</sup>Define-se usualmente esta quantidade, fazendo a extremização do parâmetro geodésico afim, entre dois pontos. Existem outras formas de definir esta quantidade, mas que se mostram equivalentes. Nossa escolha é feita no intuito de abreviar enormemente os cálculos.

Definindo os momentos canonicamente conjugados às coordenadas  $t$  e  $\varphi$ <sup>3</sup> como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = g_{00} \dot{t} = E \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = g_{33} \dot{\varphi} = L. \quad (5.46)$$

Substituindo (5.46) em (5.46), no plano equatorial  $\theta = \pi/2$  obtemos

$$\dot{x}^2 = \frac{g^{11}}{g_{22}} E^2 - \frac{g^{11}}{g_{33}} L^2 + g^{11} \varepsilon, \quad (5.47)$$

$$= E^2 - \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9} \left[ \varepsilon + \frac{3L^2}{9b^2 - x^2} \right]. \quad (5.48)$$

Esta é a chamada equação das geodésicas, pois depende de qual tipo de geodésica se trata, as quais são determinadas pelo parâmetro  $\varepsilon$ . Por enquanto, guardemos este resultado.

O segundo passo para o procedimento consiste em parametrizar a métrica em coordenadas adequadas de modo que coordenada radial seja proporcional ao parâmetro geodésico afim próximo ao horizonte de eventos, ou seja, da equação (5.48), temos que  $x \sim \lambda$ , em que  $\lambda$  é o parâmetro geodésico afim. Assim, qualquer solução esféricamente simétrica deve ficar na forma:

$$ds^2 = H(x) \{ dt^2 - dy^2 - F(x) d\Omega^2 \}, \quad (5.49)$$

com

$$H(x) = \frac{(9b^2 - x^2)^2}{9}, \quad dy = \pm \frac{9}{(9b^2 - x^2)^2} dx \quad \text{e} \quad F(x) = \frac{27}{(9b^2 - x^2)^3}, \quad (5.50)$$

e  $x$  é uma coordenada radial proporcional ao parâmetro geodésico afim próximo ao horizonte de eventos.

Agora, vamos analisar os pontos que representam problemas diretamente na métrica. A primeira região a ser analisada é chamada de horizonte de eventos,  $x = \pm 3b$ . Se fizermos o limite  $x \rightarrow -3b$ , pela direita, em (5.48), temos  $d\lambda \propto \pm dx$ , o que reflete a analiticidade e regularidade do horizonte, e

$$H \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty \quad \text{e} \quad F(x) \rightarrow \infty, \quad (5.51)$$

o que caracteriza um horizonte, mostrando o caráter de região conformalmente nula. Esta separa a estrutura causal do espaço-tempo em antes deste horizonte e depois dele. Geodésicas podem atravessá-lo, mas as tipo-tempo e nulas, não retornam. Assim, a representação no diagrama de Penrose dessa região é dada pela figura (5.1a)

Na região  $x < -3b$ , a componente  $g_{00}$  da métrica não muda de sinal, porém, a coordenada  $x$  se torna a coordenada temporal. Fazendo o limite  $x \rightarrow -3b$ , pela esquerda, temos o

<sup>3</sup>Podemos ver facilmente que a métrica não depende do tempo e da coordenada  $\varphi$ , logo, podemos ver que os momentos canonicamente associados a essas coordenadas são conservados. Então  $E$  e  $L$  são constantes de movimento.

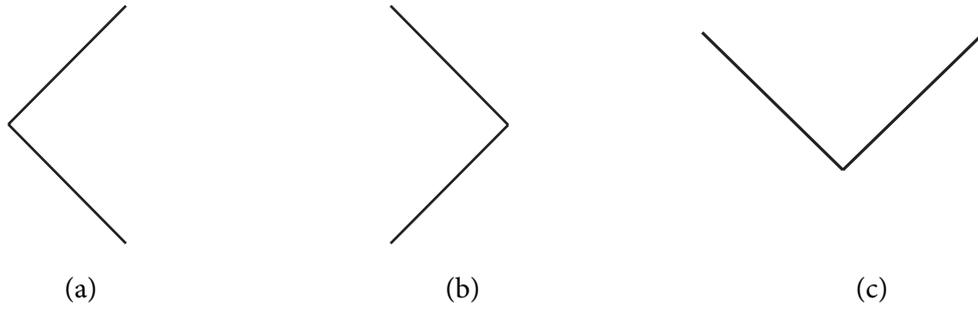


Figura 5.1: Gráficos correspondentes à partes de regiões conformes.

mesmo resultado anterior, mas a representação desta parte no diagrama de Penrose é dado pela figura (5.1b) devido ao sinal de  $g_{00}$  não ter mudado. Caso o sinal de  $g_{00}$  tivesse mudado esta parte do diagrama de Penrose seria dado pela figura (5.1c) como acontece, por exemplo, com a representação do diagrama de Penrose para métrica de Schwarzschild numa região além do horizonte. Portanto, unindo as duas parte do diagrama, obtemos a figura (5.1a)

Se fizermos, agora,  $x \rightarrow -\infty$ , temos a seguinte estrutura:

$$\dot{x}^2 = E^2 - V_{ef}, \quad (5.52)$$

em que  $V_{ef}$  é o potencial efetivo. Neste limite  $V_{ef} \rightarrow +\infty$ , logo  $\dot{x}^2 \rightarrow -\infty$ , o que caracteriza uma singularidade. Nesta região as geodésicas param e a estrutura causal termina. Visto que

$$H \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow \pm\infty \quad \text{e} \quad F(x) \rightarrow 0, \quad (5.53)$$

temos uma singularidade tipo-tempo<sup>4</sup> que representamos por uma reta duplicada, que deve ser acrescentada à figura (5.2a) para obtermos a figura (5.2bb). Para o horizonte  $x = 3b$  a análise é idêntica, de modo que, o diagrama encontrado é simétrico à figura (5.2b). Colando as duas obtemos a figura (5.2c).

Devemos impor a continuidade da solução em todos os horizontes, temos que colar infinitas regiões uma nas outras. Quando isso é feito, estamos na realidade fazendo a extensão analítica máxima da solução particular I (5.37), que está representada na figura (5.3).

Assim, a solução acima tem muito em comum com as soluções de buracos negros frios encontrados em teorias escalares-tensoriais. No entanto, ela não pode ser chamada de buraco negro, pois neste espaço-tempo (na região estática  $|x| < 3b$ ) não há lugar para um observador distante. Por outro lado, há uma ligação dos horizontes com a constante cosmológica  $\Lambda$ , portanto, eles são de natureza cosmológica, semelhante ao horizonte em espaço-tempo de Sitter.

<sup>4</sup>A determinação do tipo de singularidade é feita pela análise dos valores de  $H(x)$ ,  $F(x)$  e  $y$ . Quando  $H$ ,  $F$  e  $y$  divergem para infinito, a singularidade depende da distribuição das geodésicas, mas é sempre representada por uma reta duplicada, no nosso caso.

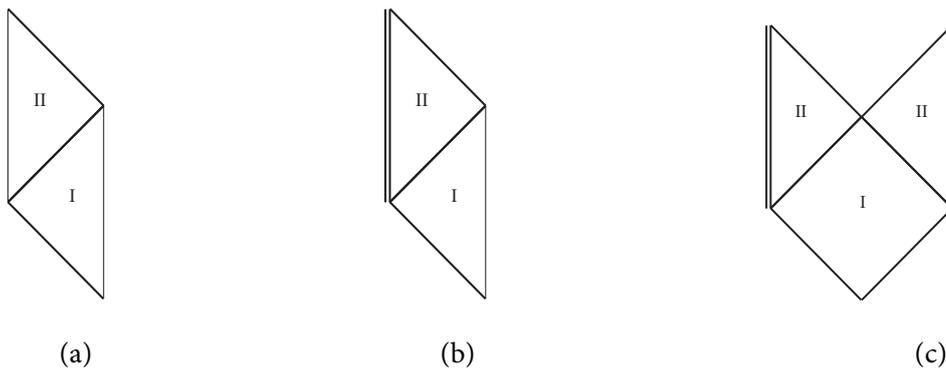


Figura 5.2: Construção do diagrama de Penrose para solução particular I.

Podemos afirmar que esses dois horizontes de área infinita estão conectados por um buraco de minhoca cuja garganta situa-se na esfera  $x = 0$ . Além disso, a fonte de gravidade, isto é, o campo de  $k$ -essência viola a NEC não só na garganta, como, também, na sua vizinhança (condição necessária para buracos de minhoca estáticos em relatividade geral), mas em todo valor de  $x$ , como decorre da desigualdade  $d^2r/dx^2 > 0$ , como comentado no final da seção 5.1. Percebemos que, em  $x = \pm 3b$  o coeficiente de  $d\Omega^2$  muda de sinal, as regiões  $|x| > 3b$  tem a

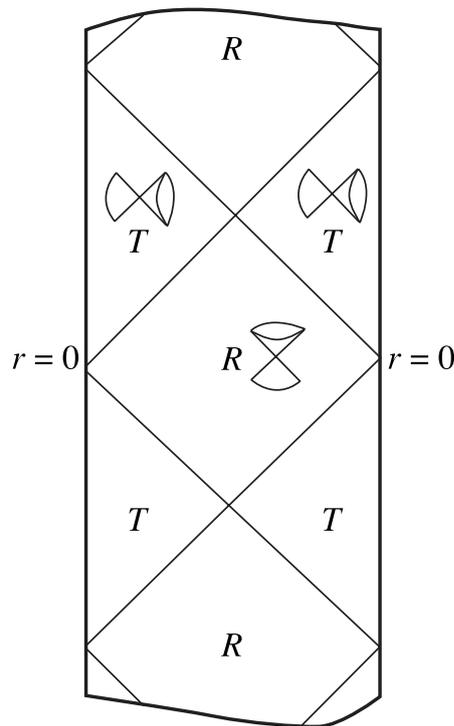


Figura 5.3: Diagrama de Penrose para solução 1. Os cones de luz indicam a direção temporal

assinatura  $(+ - ++)$ , ao invés da assinatura original  $(+ - --)$ . Assim, mesmo que o horizonte seja de mesma (segunda) ordem, além do horizonte, a coordenada  $x$  que antes era espacial torna-se temporal, e assim as regiões  $|x| > 3b$  representam modelos cosmológicos anisotrópicos (Kantowski-Sachs) semelhante à região interna do espaço-tempo de Schwarzschild. Analisando

o invariante de Kretschmann,

$$\mathcal{K} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 60b^4 - \frac{64b^2x^2}{3} + \frac{80x^4}{27}, \quad (5.54)$$

percebemos que ocorrem singularidades cosmológicas em  $x = \pm\infty$ , e as suas propriedades também se assemelham às propriedades de singularidade de Schwarzschild em  $r = 0$ : um corpo extenso de teste é compactado em um ponto nas direções angulares, mas é infinitamente esticado na direção espacial correspondente à coordenada que antes representava a coordenada tempo na região estática  $|x| < 3b$ . Além disso, pode-se verificar que as singularidades  $x = \pm\infty$  são acessadas por corpos de prova em tempos próprios finitos.

O campo escalar em função de  $x$  e sua derivada são dados por

$$\phi = \frac{4}{3\epsilon} \left[ 2x - \frac{9b}{2} \ln \left( \frac{3b+x}{3b-x} \right) \right] + \phi_0, \quad (5.55)$$

$$\phi' = \frac{4}{3\epsilon} \left[ 2 - \frac{27b^2}{9b^2 - x^2} \right]. \quad (5.56)$$

O campo escalar  $\phi$  é singular em  $x = \pm\infty$  e nos horizontes  $x = \pm 3b$ , enquanto  $X = A\phi'^2$  é infinito em  $x = \pm\infty$  e finito com os horizontes. Temos, assim, um exemplo de um horizonte onde o espaço-tempo não é singular, mas o campo escalar é infinito.

## 5.4 Solução particular II

Para uma segunda solução, vamos assumir a seguinte construção

$$F(X) = F_0X^n, \quad F_0, n = \text{constante}. \quad (5.57)$$

Para expressão anterior, existe uma solução bem conhecida para o caso linear do campo escalar sem massa,  $n = 1$ , a solução de Fisher e sua contrapartida fantasma, A solução anti-Fisher, que leva a soluções simples de buraco de minhoca [35, 16]. Vamos propor uma outra solução, com  $n = 1/3$ , que embora possa parecer estranha, ainda ilustra o teorema no-go obtido seção 5.2, apresentando algumas características interessantes.

Considerando a coordenada quasiglobal  $u = x$ , o que significa que estamos optando novamente pela condição de coordenada  $\gamma(u) = -\alpha(u)$ . Dessa forma, a métrica (5.7) assume a forma (5.13), novamente. Substituindo a hipótese (5.57) em (5.19) obtemos

$$\phi' = \frac{C}{nAF_0X^{n-1}r^2}, \quad F_X = nF_0X^{n-1}. \quad (5.58)$$

Porém,  $X = A\phi'^2$ . Substituindo em (5.58), temos

$$\phi' = \left[ \frac{C}{nF_0A^n r^2} \right]^{1/(2n-1)}. \quad (5.59)$$

Podemos reescrever a expressão (5.14) em função de (5.57), que resulta em

$$2\frac{r''}{r} = nF_0A^n \phi'^{2n}. \quad (5.60)$$

Substituindo (5.59) em (5.60) encontramos

$$2\frac{r''}{r} = \left[ \frac{C^{2n}}{nF_0A^{3n-1}r^{4n}} \right]^{1/(2n-1)} \quad (5.61)$$

Podemos perceber que  $A(x)$  deixa a equação (5.61) quando fazemos a escolha  $n = 1/3$ , além disso, esta escolha nos leva à

$$r'' = 3Kr^5, \quad 3K := \frac{F_0^3}{54C^2}, \quad (5.62)$$

que integrando resulta em

$$r'^2 = Kr^6 + K_1, \quad K_1 = \text{constante}. \quad (5.63)$$

Podemos integrar a equação anterior mais uma vez, porém com  $K_1 \neq 0$  obtemos expressões muito complicadas a partir de integrais elípticas, que não serão consideradas. Supondo  $K_1 = 0$ , podemos resolver a integral com maior facilidade sem perda de generalidade. Portanto,

$$\begin{aligned} r'^2 &= Kr^6, \\ \frac{dr}{dx} &= -\sqrt{K}r^3, \\ \int r^{-3}dr &= -\sqrt{K} \int dx, \end{aligned}$$

que resulta em

$$r(x) = \frac{1}{k\sqrt{x}}, \quad k = \sqrt{2\sqrt{K}} = \frac{2^{1/4}F_0^{3/4}}{3\sqrt{|C|}}, \quad (5.64)$$

em que suprimimos a constante integração que surgiu escolhendo o ponto nulo de  $x$ . Assim, a solução é definida em  $x > 0$ .

Derivando duas vezes a expressão (5.64), encontramos

$$r'' = \frac{3}{4kx^{5/2}} > 0, \quad (5.65)$$

que viola a NEC e, portanto, a nossa k-essência é de natureza fantasma.

É forma simples, podemos encontrar as expressões para  $B(x)$  e  $\phi(x)$  a partir (5.16) e (5.59), respectivamente:

$$B(x) = B_0 + k^4 \left( 2mx^3 - \frac{1}{2}x^4 \right), \quad (5.66)$$

$$\phi'(x) = \left[ \frac{F_0}{3C} \right]^3 Ar^6 = \left[ \frac{F_0}{3C} \right]^3 Br^8 \quad (5.67)$$

A substituição destas quantidades na equação (5.9) deve verificar a regularidade da solução e talvez levar a uma relação entre a sua integração constantes. Portanto,

$$-rB'r' - 3Br'^2 + \frac{1}{r^2} = XF_X - \frac{1}{2}F(X), \quad (5.68)$$

$$-rB'r' - 3Br'^2 + \frac{1}{r^2} = XnF_0X^{n-1} - \frac{1}{2}F_0X^n. \quad (5.69)$$

Fazendo  $n = 1/3$  no lado direito da expressão anterior, temos

$$-rB'r' - 3Br'^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{3}F_0X^{1/3} - \frac{1}{2}F_0X^{1/3} \quad (5.70)$$

Substituindo, no lado esquerdo, a expressão para  $B(x)$  (5.66) e sua derivada, como também, a expressão para  $r(x)$  (5.64) e sua derivada, obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{1}{k\sqrt{x}} \frac{1}{k\sqrt{x^3}} \left[ k^4 (6mx^2 - 2x^3) \right] - \frac{3}{4k^2x^3} B + k^2x = -\frac{1}{6} \frac{1}{k^6x^3} \frac{F_0^3}{(3C)^2} B, \quad (5.71)$$

$$3k^2m - k^2x - \frac{3}{4k^2x^3} B + k^2x = -\frac{1}{6} \frac{1}{k^6x^3} \frac{F_0^3}{(3C)^2} B. \quad (5.72)$$

Da expressão (5.64) podemos encontrar a relação  $F_0^3/(3C)^2 = 9k^4/2$  para finalmente obtermos

$$3k^2m - \frac{3B}{4k^2x^3} = -\frac{3B}{4k^2x^3}. \quad (5.73)$$

Podemos concluir que a solução existe somente se  $m = 0$ . Dessa forma, podemos expressar a função  $A(x)$

$$A(x) = B(x)r(x)^2 = \frac{B_0}{k^2x} - \frac{k^2x^3}{2}. \quad (5.74)$$

Conseqüentemente, podemos apresentar a forma final da métrica, dada por

$$ds^2 = \left( \frac{B_0}{k^2x} - \frac{k^2x^3}{2} \right) dt^2 - \left( \frac{B_0}{k^2x} - \frac{k^2x^3}{2} \right)^{-1} dx^2 - \frac{1}{k^2x} d\Omega^2. \quad (5.75)$$

Se  $B_0 \leq 0$ , a função  $A(x)$  é negativa, e a métrica descreve um modelo cosmológico particular de Kantowski-Sachs. Se  $B_0 > 0$ , a métrica é estática em

$$x < x_h = \frac{(2B_0)^{1/4}}{k}, \quad (5.76)$$

que tem um horizonte em  $x = x_h$  e é do tipo cosmológica para grandes valores de  $x$ . Embora a métrica seja perfeitamente regular em todo o intervalo  $x \in \mathbb{R}_+$ , a função original  $F(X)$  na Lagrangiana é singular no horizonte.

Podemos facilmente verificar de (5.58) que

$$F_X = \frac{(F_0/3)}{X^{2/3}} \propto 1/A^2, \quad (5.77)$$

é infinito em um horizonte onde  $A = 0$  e  $X = 0$ , em pleno acordo com o teorema no-go apresentado anteriormente. Uma observação importante a existência de uma métrica regular na presença de uma função singular  $F(X)$  na Lagrangiana.

Outra observação de interesse é o sinal negativo de  $X = A\phi'^2$  na região T,  $x > x_h$ . A existência e o comportamento regular da solução nesta região está evidentemente relacionado com o denominador ímpar no expoente  $1/3$ , em consequência de que na região temos  $f(x) < 0$ . Portanto, a escolha de um  $n$  qualquer pode tornar a função  $X^n$  mal definida.

Analisando escalar de Kretschmann para a métrica (5.75) é dado por

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{3[81k^8x^8 + 68B_0(-k^4x^4 + B_0)]}{16k^4x^6}, \quad (5.78)$$

podemos concluir que a métrica (5.75) possui singularidades em  $x = 0$  que corresponde  $r = \infty$  e  $x = \infty$  que corresponde  $r = 0$ . Como consequência, o campo escalar dado por

$$\phi(x) = \left[ \frac{F_0}{3C} \right]^3 \left( -\frac{B_0}{k^8x^3} - \frac{x}{k^4} \right), \quad (5.79)$$

também é infinito em ambas as extremidades. Note que esta última análise somente pode ser feita para o caso  $B_0 \neq 0$ .

### 5.4.1 Estrutura causal

Para a construção do diagrama de Penrose da solução particular II (5.75), vamos nos basear mesmo método usado para a construção do diagrama da solução particular I. Partindo da densidade de Lagrangiana (5.45) podemos encontrar a equação da geodésica no plano equatorial  $\theta = \pi/2$

$$\dot{x}^2 = E^2 - \left( \frac{B_0}{k^2x} - \frac{k^2x^3}{2} \right) [\varepsilon + k^2xL^2], \quad (5.80)$$

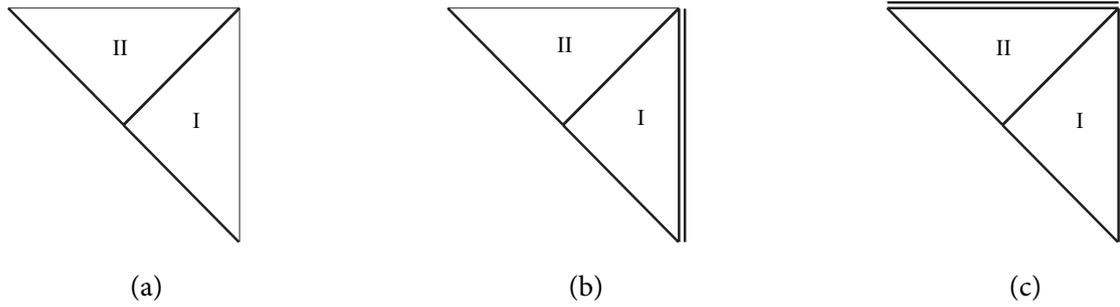


Figura 5.4: Construção do diagrama de Penrose para solução particular II.

em que  $\varepsilon = -1$  para geodésicas tipo-espaço,  $\varepsilon = 0$  para geodésicas tipo-luz e  $\varepsilon = 1$  para geodésicas tipo-tempo.

Considerando a parametrização (5.49), temos

$$H(x) = \frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2 x^3}{2}, \quad dy = \pm \left( \frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2 x^3}{2} \right)^{-1} dx \quad e$$

$$F(x) = \frac{1}{k^2 x} \left( \frac{B_0}{k^2 x} - \frac{k^2 x^3}{2} \right)^{-1}. \quad (5.81)$$

Novamente, precisamos analisar os pontos que os pontos que representam problemas na métrica (5.75). O primeiro ponto é o horizonte de eventos  $x_h = (2B_0)^{1/4}/k$ . Fazendo o limite  $x \rightarrow x_h$ , pela direita, em (5.80), temos  $d\lambda \propto \pm dx$ , o que reflete a analiticidade e regularidade do horizonte, e

$$H \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm\infty \quad e \quad F(x) \rightarrow \infty, \quad (5.82)$$

o que caracteriza um horizonte. Como  $H$  se anula, esta região é conformalmente nula. Como já mencionado na solução particular I, esta região separa a estrutura causal do espaço-tempo em antes deste horizonte e depois dele. Geodésicas podem transpor essa fronteira, porém, as tipo-tempo e nulas não retornam. Dessa forma, essa parte do diagrama de Penrose é representada pela figura (??). Fazendo o limite  $x \rightarrow x_h$ , pela esquerda, temos o mesmo resultado anterior, mas a representação desta parte no diagrama de Penrose, devido a mudança de sinal de  $g_{00}$ , fica sendo a da figura (5.1c). Colando estas duas partes obtemos a figura (5.4a)

Fazendo, agora, o limite  $x \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ), podemos observar que, da equação (5.80) que  $V_{ef} \rightarrow +\infty$ , logo  $\dot{x}^2 \rightarrow -\infty$ , o que caracteriza uma singularidade. Como comentado anteriormente, nesta região as geodésicas param e a estrutura causal termina, pois

$$H \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow 0 \quad e \quad F(x) \rightarrow \infty, \quad (5.83)$$

ou seja, temos uma singularidade tipo-tempo que iremos representar por uma dupla reta na vertical, de acordo com a figura (5.4b).

Por fim, fazendo o limite  $x \rightarrow \infty$  ( $r \rightarrow 0$ ), de forma semelhante ao limite anterior, temos  $V_{ef} \rightarrow +\infty$  e  $\dot{x}^2 \rightarrow -\infty$ , com

$$H \rightarrow -\infty, \quad y \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad F(x) \rightarrow 0, \quad (5.84)$$

o que caracteriza novamente uma singularidade, só desta vez tipo-espaço, representada por duas retas horizontais paralelas, como mostra a figura (5.4c). A extensão analítica do diagrama de Penrose para solução particular II encontra-se na figura (5.5).

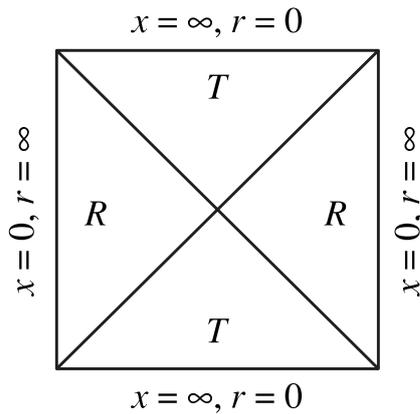


Figura 5.5: Diagrama de Penrose para solução 2 com  $B_0 > 0$ . As letras R e T correspondem às regiões estática e não estática, respectivamente.

O diagrama de Penrose no caso  $B_0 > 0$  (fig. 5.5) se parece com o diagrama do espaço-tempo de Sitter. No entanto, ao contrário deste, a região T não estática (ou seja, além do horizonte) nesta solução corresponde raios  $r(x)$  menores do que a região de estática, assim como em espaço-tempo de um buraco negro. Além disso, todos os lados do diagrama correspondem a singularidades. Pode-se concluir que a solução descreve um buraco negro no espaço-tempo assintoticamente singular.

# Capítulo 6

## Conclusões

Este trabalho teve como objetivo encontrar soluções em teorias de  $k$ -essência definida pela função  $F(X, \varphi)$ , em que  $X$  é o termo cinético do campo escalar, em espaços-tempos estáticos e esfericamente simétricos.

Com uma aplicação ampla em cosmologia, no contexto de expansão acelerada do universo, energia escura e modelos inflacionários, objetivamos, neste nosso trabalho, preencher uma lacuna no estudo de teorias de  $k$ -essência no contexto de objetos locais, como estrelas, buracos negros ou buracos de minhoca.

Nosso estudo teve início no capítulo 2, onde apresentamos uma breve revisão de relatividade geral

No capítulo 4, apresentamos a simetria esférica e o porquê da escolha de uma métrica geral, que contemple um espaço-tempo estático, pertencente ao grupo de isometrias  $G_4$ , em que as rotações são complementadas por translações temporais, a qual trabalhamos durante todo o texto. Ainda, na mesma seção, enumeramos um conjunto de condições de coordenadas, importantes em soluções de teorias escalares como também em  $k$ -essência. Também apresentamos o invariante de Kretschmann e discutimos a sua importância para identificar as singularidades reais ou físicas de uma métrica. No mesmo capítulo, apresentamos duas soluções estáticas e esfericamente simétricas assintoticamente planas, as soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström. Discutimos suas singularidades, horizontes e estrutura causal. Em seguida, apresentamos uma solução não assintoticamente plana, a solução de Schwarzschild-de Sitter. Também discutimos, brevemente, seus horizontes e estrutura causal. Por fim, ainda no capítulo 2, apresentamos uma seção sobre buracos de minhoca. Nela, discutimos, brevemente, a sua geometria, a idéia buraco de minhoca transitável e os requisitos necessários para a criação de um buraco de minhoca.

No capítulo 4, fizemos uma revisão de parte do artigo [20] para que pudéssemos ficar familiarizados com a solução de campos escalares minimamente acoplados à gravidade em espaço-tempos estático e esfericamente simétricos. Encontramos diferentes objetos locais nessa solução, buracos negros, buracos de minhoca e até mesmo singularidades nuas. Buracos negros presentes nessa solução possuem característica notáveis, como gravidade de superfície nula, temperatura Hawking igual a zero, horizontes com área infinitas. Tais buracos negros, exóticos, foram de-

nominados *buracos negros frios*. Não podemos esquecer que essas soluções para buracos negros frios somente são possíveis com o sinal inadequado do termo cinético do campo escalar, chamado de campo fantasma.

No capítulo 5 finalizamos a dissertação apresentando nossa proposta original[22]. Analisamos soluções estáticas e esféricamente simétricas em um contexto de k-essência. Em uma primeira solução, partimos da função  $F(X, \phi) = \epsilon X^n - 2\Lambda$ , em que  $X$  é termo cinético do campos escalar,  $\epsilon = \pm 1$  e  $\Lambda$ , em que o potencial dá lugar à constante cosmológica. Optamos por escolher  $n = 1/2$ , juntamente com um  $\alpha = 0$  na condição de coordenada hamônica  $\alpha = 2\beta + \gamma$ . Em uma segunda solução, partimos, agora, da função  $F(X) = F_0 X^n$ , com  $F_0$  e  $n$  constantes. Neste caso, escolhemos  $n = 1/3$  e, além disso, optamos por não considerar nenhum tipo de potencial.

Discutimos um teorema no-go para o caso em que a teoria de k-essência tem dependência apenas do termo cinético do campo escalar,  $F(X, \phi) = f(X)$ , informando que a solução de buraco negro com horizonte de área finito é possível, a menos que a derivada da função  $f(X)$  divirja no horizonte.

Na primeira solução percebemos que, além dos horizontes, o espaço-tempo muda sua assinatura, mas ainda mantém sua natureza Lorentziana e a solução naquela região descreve um universo anisotrópico do tipo Kantowski-Sachs com singularidades que podem ser alcançadas por corpos de teste em tempo próprio finito. Entre os dois horizontes há uma região estática com uma geometria de buraco de minhoca. A solução nos mostra um comportamento violento de um campo escalar no horizonte que ainda assim mantém o tensor energia-momento finito e regular, que, por sua vez, conduz a um espaço-tempo com uma geometria regular. Podemos recordar apenas um exemplo na literatura, um buraco negro com um campo escalar conforme sem massa [14] e sua contraparte eletricamente carregada [16].

Na segunda solução, encontramos uma solução não-assintoticamente plana, com um único horizonte em que  $f_X$  diverge enquanto  $X$  e  $f$  são finitos. A configuração resultante pode ser caracterizada como um buraco negro com um interior do tipo Schwarzschild imergido em um espaço-tempo assintoticamente singular.

Como perspectiva futura, desejamos estudar a estabilidade de tais soluções, em particular, a região estática. As condições de estabilidade são um aspecto muito importante de qualquer solução do tipo buraco negro ou buraco de minhoca, que continua a ser um problema especialmente interessante nos casos em que campos escalares e gargantas de buracos de minhoca estão presentes [42, 23]. A inclusão de rotação nessa perspectiva seria de grande valia.

# Referências Bibliográficas

- [1] Abbott, B. P. et al. (2016). Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102.
- [2] Abramovici, A. et al. (1992). LIGO: The Laser interferometer gravitational wave observatory. *Science*, 256:325–333.
- [3] Adler, S. L. and Pearson, R. B. (1978). 'No Hair' Theorems for the Abelian Higgs and Goldstone Models. *Phys. Rev.*, D18:2798.
- [4] Agakov, V. G. and ZelManov, A. L. (1989). Elements of general relativity. *Moscow Izdatel Nauka*, 1.
- [5] Armendariz-Picon, C., Damour, T., and Mukhanov, V. F. (1999).  $k$  - inflation. *Phys. Lett.*, B458:209–218.
- [6] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., and Steinhardt, P. J. (2000). A Dynamical solution to the problem of a small cosmological constant and late time cosmic acceleration. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4438–4441.
- [7] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. F., and Steinhardt, P. J. (2001). Essentials of  $k$  essence. *Phys. Rev.*, D63:103510.
- [8] Bazański, S. and Ferrari, V. (1986). Analytic extension of the schwarzschild-de sitter metric. *Il Nuovo Cimento B Series 11*, 91(1):126–142.
- [9] Bekenstein, J. D. (1973). Extraction of energy and charge from a black hole. *Phys. Rev.*, D7:949–953.
- [10] Bekenstein, J. D. (2008). Bekenstein-hawking entropy. *Scholarpedia*, 3(10):7375.
- [11] Bergmann, O. and Leipnik, R. (1957). Space-Time Structure of a Static Spherically Symmetric Scalar Field. *Phys. Rev.*, 107:1157–1161.
- [12] Bičák, J. and Podolský, J. (1995). Cosmic no-hair conjecture and black-hole formation: An exact model with gravitational radiation. *Physical Review D*, 52(2):887.
- [13] Birkhoff, G. D. and Langer, R. E. (1923). *Relativity and modern physics*, volume 1. Harvard University Press Cambridge MA.
- [14] Bocharova, N., Bronnikov, K., and Melnikov, V. (1970). An exact solution of the system of einstein equations and mass-free scalar field, *vestn. Mosk. univ. Fiz. astron.*, 6:706.
- [15] Brans, C. and Dicke, R. H. (1961). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical Review*, 124(3):925.
- [16] Bronnikov, K. A. (1973). Scalar-tensor theory and scalar charge. *Acta Phys. Polon.*, B4:251–266.

- [17] Bronnikov, K. A. (2001). Spherically symmetric false vacuum: No go theorems and global structure. *Phys. Rev.*, D64:064013.
- [18] Bronnikov, K. A., Chernakova, M. S., Fabris, J. C., Pinto-Neto, N., and Rodrigues, M. E. (2008). Cold black holes and conformal continuations. *Int. J. Mod. Phys.*, D17:25–42.
- [19] Bronnikov, K. A., Clement, G., Constantinidis, C. P., and Fabris, J. C. (1998a). Cold scalar tensor black holes: Causal structure, geodesics, stability. *Grav. Cosmol.*, 4:128–138.
- [20] Bronnikov, K. A., Clement, G., Constantinidis, C. P., and Fabris, J. C. (1998b). Structure and stability of cold scalar - tensor black holes. *Phys. Lett.*, A243:121–127.
- [21] Bronnikov, K. A., Constantinidis, C. P., Evangelista, R. L., and Fabris, J. C. (1999). Electrically charged cold black holes in scalar tensor theories. *Int. J. Mod. Phys.*, D8:481–505.
- [22] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C., and Rodrigues, D. C. (2015). On horizons and wormholes in k-essence theories. *Grav. Cosmol.*
- [23] Bronnikov, K. A., Fabris, J. C., and Zhidenko, A. (2011). On the stability of scalar-vacuum space-times. *Eur. Phys. J.*, C71:1791.
- [24] Bronnikov, K. A., Fadeev, S. B., and Michtchenko, A. V. (2003). Scalar fields in multidimensional gravity: No hair and other no go theorems. *Gen. Rel. Grav.*, 35:505–525.
- [25] Bronnikov, K. A. and Rubin, S. G. (2013). *Black holes, cosmology and extra dimensions*. World Scientific.
- [26] Campanelli, M. and Lousto, C. (1993). Are black holes in brans-dicke theory precisely the same as in general relativity? *International Journal of Modern Physics D*, 2(04):451–462.
- [27] Chruściel, P. T. (1996). Uniqueness of stationary, electro-vacuum black holes revisited. *arXiv preprint gr-qc/9610010*.
- [28] Dai, J., Leigh, R. G., and Polchinski, J. (1989). New Connections Between String Theories. *Mod. Phys. Lett.*, A4:2073–2083.
- [29] d’Inverno, R. (1992). *Introducing Einstein’s relativity*. Clarendon Press.
- [30] Dirac, P. A. M. (1938). New basis for cosmology. volume A165, pages 199–208.
- [31] Einstein, A. (1915a). Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:831–839.
- [32] Einstein, A. (1915b). On the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:778–786. [Addendum: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*1915,799(1915)].
- [33] Einstein, A. (1915c). The Field Equations of Gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1915:844–847.
- [34] Eleuterio Rodrigues, M. (2010). *Buracos Negros Fantasmas*. PhD thesis, Espirito Santo U.
- [35] Ellis, H. G. (1973). Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 14(1):104–118.
- [36] Faraoni, V. (2015). Cosmological and black hole apparent horizons. In *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 907. Springer.

- [37] Fierz, M. (1956). On the physical interpretation of p. Jordan's extended theory of gravitation. *Helv. Phys. Acta*, 29:128–134.
- [38] Fisher, I. Z. (1948). Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 18:636–640.
- [39] Fujii, Y. and Maeda, K.-i. (2003). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press.
- [40] Geyer, K. (1980). Geometrie der raum-zeit der maßbestimmung von kottler, weyl und trefftz. *Astronomische Nachrichten*, 301(3):135–149.
- [41] Gibbons, G. W. and Hawking, S. W. (1977). Cosmological event horizons, thermodynamics, and particle creation. *Physical Review D*, 15(10):2738.
- [42] Gonzalez, J. A., Guzman, F. S., and Sarbach, O. (2009). Instability of wormholes supported by a ghost scalar field. I. Linear stability analysis. *Class. Quant. Grav.*, 26:015010.
- [43] Griffiths, J. B. and Podolský, J. (2009). *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press.
- [44] Grøn, Ø. and Hervik, S. (2007). *Einstein's general theory of relativity: with modern applications in cosmology*. Springer Science & Business Media.
- [45] Hawking, S. W. (1974). Black hole explosions. *Nature*, 248:30–31.
- [46] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R. (1973). *The large scale structure of space-time*, volume 1. Cambridge university press.
- [47] Hawking, S. W. and Penrose, R. (1970). The singularities of gravitational collapse and cosmology. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 314, pages 529–548. The Royal Society.
- [48] Hello, P. and Marraud, A. (1990). The VIRGO project: The Birth of gravitational astronomy. (In French). *Recherche*, 21:970–971.
- [49] Horowitz, G. T. and Ross, S. F. (1998). Properties of naked black holes. *Physical Review D*, 57(2):1098.
- [50] Hough, J. (1994). LISA: Laser Interferometer Space Antenna for gravitational wave measurements. In *Gravitational wave experiments. Proceedings, 1st Edoardo Amaldi Conference, Frascati, Italy, June 14-17, 1994*.
- [51] Israel, W. and Hawking, S. W. (1979). *General Relativity: An introductory survey*. Cambridge University Press.
- [52] Jordan, P. (1955). *Schwerkraft und Weltall: Grundlagen der theoretischen Kosmologie*, volume 107. Friedr. Vieweg & Sohn.
- [53] Kaluza, T. (1926). Sitzungsber. preuss. akad. wiss. berlin (math. phys.) k1, 966 (1921); o. klein. *Z. Phys.*, 37(985):985.
- [54] Khviengia, N., Khviengia, Z., Lu, H., and Pope, C. N. (1998). Towards a field theory of F theory. *Class. Quant. Grav.*, 15:759–773.
- [55] Kokkotas, K. D. and Stergioulas, N. (2003). Recent developments in gravity. In *Recent Developments in Gravity*, volume 1.

- [56] Kottler, F. (1918). Über die physikalischen Grundlagen der einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 361(14):401–462.
- [57] Kruskal, M. D. (1960). Maximal extension of Schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745.
- [58] Lake, K. and Roeder, R. (1977). Effects of a nonvanishing cosmological constant on the spherically symmetric vacuum manifold. *Physical Review D*, 15(12):3513.
- [59] Landau, L. and Lifshitz, E. (1973). *Theory of field*.
- [60] Laue, H. and Weiss, M. (1977). Maximally extended Reissner-Nordström manifold with cosmological constant. *Physical Review D*, 16(12):3376.
- [61] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. Macmillan.
- [62] Morris, M. S. and Thorne, K. S. (1988). Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56(5):395–412.
- [63] Nilles, H. P. (1984). Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics. *Phys. Rept.*, 110:1–162.
- [64] Novikov, I. and Frolov, V. (1998). *Black hole physics: Basic concepts and new developments*.
- [65] Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, 14(3):57.
- [66] Penrose, R. (1969). Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, 1:252–276. [Gen. Rel. Grav.34,1141(2002)].
- [67] Poisson, E. (2004). *A relativist's toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge University Press.
- [68] Raine, D. and Thomas, E. (2010). *Black Holes: An Introduction*. Imperial College Press.
- [69] Schmidt, B. G. (2008). *Einstein's Field Equations and Their Physical Implications: Selected Essays in Honour of Jürgen Ehlers*, volume 540. Springer.
- [70] Schwarzschild, K. (1916). On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196.
- [71] Sen, A. (2002). Tachyon matter. *JHEP*, 07:065.
- [72] Senovilla, J. M. M. (2011). Trapped surfaces. *Int. J. Mod. Phys.*, D20:2139.
- [73] Synge, J. L. (1950). The gravitational field of a particle. *Proc. Roy. Irish Acad. (Sect. A)*, 53:83.
- [74] Trefftz, E. (1922). Das statische Gravitationsfeld zweier Massenpunkte in der einsteinschen Theorie. *Mathematische Annalen*, 86(3):317–326.
- [75] Vladimirov, U. (1982). Reference frames in gravitational theory. *Energoizdat, Moscow*.
- [76] Wagoner, R. V. (1970). Scalar tensor theory and gravitational waves. *Phys. Rev.*, D1:3209–3216.
- [77] Wald, R. M. (2010). *General relativity*. University of Chicago press.
- [78] Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York.

- [79] Weyl, H. (1919). Über die statischen kugelsymmetrischen lösungen von einsteins kosmologischen gravitationsgleichungen. *Phys. Z*, 20:31–34.
- [80] Will, C. M. (1993). *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press.
- [81] Zelmanov, A. L. (2006). *Chronometric Invariants: On Deformations and the Curvature of Accompanying Space (1944)*. Infinite Study.

# Apêndice A

## Breve Histórico

Um breve histórico de buracos negros em Relatividade Geral:

- 1915: Einstein formula a teoria da relatividade geral.
- 1916: Karl Schwarzschild publica sua solução esfericamente simétrica e estática exata, mostrando uma singularidade em  $r = 2m$ .
- 1924: Eddington introduz coordenadas que são bem comportadas em  $r = 2m$ .
- 1930: Usando a relatividade geral, Subrahmanyan Chandrasekhar calcula que um corpo de matéria elétron-degenerada não rotativo acima de 1,44 massas solares (o limite de Chandrasekhar) entraria em colapso.
- 1933: LeMaître percebe o significado do resultado de Eddington:  $r = 2m$  é uma singularidade fictícia.
- 1958: David Finkelstein introduz o conceito do horizonte de eventos, apresentando a coordenada Eddington-Finkelstein, que lhe permitiu mostrar que "A superfície de Schwarzschild  $r = 2m$  não é uma singularidade, mas que ele age como uma membrana unidirecional perfeito: influências causais podem atravessá-la em apenas uma direção". Todas as teorias acima até este ponto, incluindo a solução de Finkelstein, cobrem apenas buracos negros não rotativos.
- 1960: Kruskal e Szekeres obtêm a extensão máxima da solução de Schwarzschild.
- 1960: Penrose apresenta métodos globais no estudo da Relatividade Geral.
- 1963: Roy Kerr encontra uma generalização da métrica de Schwarzschild e a interpreta como o campo de uma "partícula giratória".
- 1967: John Wheeler usa a expressão "buraco negro" em uma conferência pública. Extraoficialmente, a frase foi usada anteriormente por outros.

- final dos anos 1960 - início dos anos 1970: Bekenstein, Bardeen, Carter, Penrose e Hawking exploraram a estrutura e as propriedades dos buracos negros. Bekenstein propõe que os buracos negros devem transportar entropia, proporcional à área do horizonte. Bardeen, Carter e Hawking provam os primeiros teoremas sobre a mecânica de buraco negro.
- 1974: Hawking e Bekenstein descobrem a evaporação do buraco negro. Campos quânticos em um espaço-tempo com um buraco negro de fundo irradia (ou seja, preto corpo) espectro térmico de partículas, com uma temperatura de  $kT = \hbar\kappa/2\pi$ .
- 1982: Bunting e Mazur derivam de forma independente uma generalizada teorema de unicidade: qualquer, buraco negro isolado independente do tempo na relatividade geral é descrito pela métrica Kerr. Portanto, o estado de equilíbrio de cada buraco negro (sem carga) é totalmente descrito por apenas dois parâmetros: massa e momento angular (representada por  $M$  e  $J$ ).
- 1995: Strominger, Vafa, Maldacena, entre outros, descobrem como descrever microestados de um buraco negro em termos de D-branas na teoria das cordas. A descrição detalhada é particularmente no ou perto do limite extremo, e, geralmente, o buraco negro é considerado em mais de 4 dimensões do espaço-tempo.