

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TAYS MIRANDA DE ANDRADE

**MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS TIPO
STAROBINSKY**

VITÓRIA
2016

TAYS MIRANDA DE ANDRADE

MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS TIPO STAROBINSKY

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella (Orientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Júlio César Fabris (Coorientador).
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Sergio Eduardo de Carvalho Eyer Jorás.
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Valerio Marra.
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues.
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2016

**MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS TIPO
STAROBINSKY**

TAYS MIRANDA DE ANDRADE

**MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS TIPO
STAROBINSKY**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. OLIVER FABIO PIATTELLA
COORIENTADOR: PROF. DR. JÚLIO CÉSAR FABRIS

Vitória
01 de abril de 2016

© 2016, Tays Miranda de Andrade.
Todos os direitos reservados.

Andrade, Tays Miranda de

D1234p MODELOS COSMOLÓGICOS INFLACIONÁRIOS
TIPO STAROBINSKY / Tays Miranda de Andrade. —
Vitória, 2016
xiii, 55 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal do
Espírito Santo

Orientador: Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella

1. — Dissertações. 2. — Dissertações. I. Orientador.
II. Título.

CDU 000.0*00.00



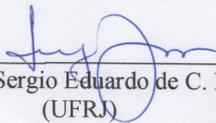
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

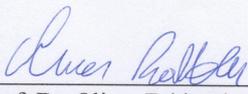
“Modelos cosmológicos inflacionários tipo Starobinsky”

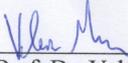
Tays Miranda de Andrade

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.

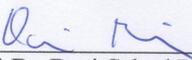
Aprovada por:


Prof. Dr. Sergio Eduardo de C. Eyer Jorás
(UFRJ)


Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
(Orientador /UFES)


Prof. Dr. Valerio Marra
(UFES)


Prof. Dr. Júlio César Fabris
(UFES)


Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
(UFES)

Vitória-ES, 01 de abril de 2016.

Dedico este trabalho à minha vó, Dorita.

Agradecimentos

Meus mais sinceros agradecimentos à minha amada família: minha mãe, Marialva, meus irmãos, Tayná e Manoel, minhas tias, Andreza e Lúcia, meu tio, Artur, e minha avó, Dorita;

Aos queridos amigos Antonio Petillo, Maria dos Anjos, Sandra Sousa e Arcelino Neves;

Ao meu amigo Felipe pelo grande suporte ao longo destes anos;

Ao meu orientador Oliver Fabio Piattella, pelos ensinamentos, pela paciência e pelos grandes conselhos;

Ao professor Júlio César Fabris pela enorme colaboração no trabalho;

Aos professores Antônio Brasil, Oliver Piattella, Davi Rodrigues e José Alexandre pelos ótimos cursos ministrados;

A Leonardo e Glauber, pela amizade tão verdadeira;

Aos amigos do PPGFIS: Carla, Eddy, Álefe, Denis, Edison, Adriano, Michael, Mariniel, Pedro, Luciano, Fulvio, Yaser, Igor, Rodrigo, Cássio, Fabio, Fernando e Alan;

Aos amigos de Belém: Hugo, Jessica, Rafael, Piet, Breno, Ingrid, Sarah, Henrique, Isaac, Natália, Leandro e Reginaldo;

Aos amigos que fiz em Vitória: Jefferson, Thiago e Rafael;

Ao querido secretário da pós, José Carlos;

Ao Sofá da Hebe, pelos momentos de descontração, inspiração e divulgação científica;

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta com este trabalho;

À CAPES pelo suporte financeiro ao longo destes dois anos.

“Eu quase que nada não sei. Mas desconfio de muita coisa”

(Guimarães Rosa)

Resumo

Neste trabalho estudamos as características do universo primordial. Nos últimos anos, a inflação cosmológica se tornou um ingrediente essencial em qualquer modelo que tenha como objetivo descrever o universo em sua fase inicial. As previsões dos modelos inflacionários podem ser relacionadas com as medidas da Radiação Cósmica de Fundo (CMB) e então, estes resultados permitem que os modelos propostos sejam testados rigorosamente. Nesta dissertação, apresentamos o Modelo Padrão da Cosmologia e analisamos alguns problemas do modelo como motivação para introduzir o conceito de inflação cosmológica. Descrevemos o paradigma inflacionário em termos de um campo escalar, encontramos suas equações dinâmicas e utilizamos a aproximação de *slow-roll*, o que nos permitiu calcular os índices espectrais n_s e r de dois modelos de inflação. Analisamos a teoria $f(R)$ em um contexto inflacionário e discutimos o modelo de Starobinsky. Foi possível calcular os índices espectrais para este modelo também. E pela análise de sistema dinâmico, conseguimos propor uma correção exponencial ao modelo de Starobinsky.

Palavras-chave: Cosmologia, Sistemas Dinâmicos, Gravitação.

Abstract

In this work we study the Early Universe. Over the past years cosmological inflation has become an essential ingredient of any model which aims at describing the universe in its primordial stage. The predictions of inflationary models can be related to measurements of the Cosmic Microwave Background (CMB) and then, these results have allowed the proposed models to be rigorously tested. In this dissertation, we present the Cosmological Standard Model and analyze some problems as motivation to introduce the concept of cosmological inflation. We describe the inflationary paradigm in terms of a scalar field, find their dynamic equations and use the slow-roll approximation, which allowed us to calculate the spectral indices n_s and r of two inflationary models. We have analyzed the theory $f(R)$ in an inflationary context and discuss Starobinsky's model. It was possible to calculate the spectral indices for this model, too. By the analysis of dynamical systems, we were able to propose an exponential correction to Starobinsky's model.

Keywords: Cosmology, Dynamical Systems, Gravitation.

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 2.1 | Fator de escala \times tempo em um universo de de Sitter [1]. | 11 |
| 3.1 | Exemplo de um potencial do <i>inflaton</i> . A aceleração ocorre quando $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$. A inflação termina em ϕ_{end} quando a energia cinética se torna comparável à energia potencial. Na época do reaquecimento, a densidade de energia do campo escalar é então convertida em radiação [2]. . . . | 19 |
| 4.1 | Potencial de Starobinsky \times campo escalar no referencial de Jordan. | 32 |
| 4.2 | Potencial de Starobinsky \times campo escalar no referencial de Einstein. | 33 |
| 4.3 | Regiões de curvas de nível conjuntas marginalizadas em 68% e 95% para n_s e $r_{0.002}$ do Planck combinado com outros conjuntos de dados, comparado com as previsões teóricas de alguns modelos inflacionários. Retirado de [3]. | 34 |
| 5.1 | Diagrama de fase para o modelo $f(R) = \alpha R^2$ com H e R definidos de maneira adimensional. A curva representa a parábola $R = 12H^2$ de pontos estáveis. . . . | 40 |
| 5.2 | Diagrama de fase para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$ com H e R definidos de maneira adimensional. | 42 |
| 5.3 | Plano equatorial da esfera de Starobinsky para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$. Os círculos pequenos representam os pontos críticos no infinito. | 44 |
| 5.4 | Diagrama de fase para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$ com H e R definidos de maneira adimensional. Aqui, os círculos pequenos representam os pontos críticos na região finita. | 45 |
| 5.5 | Plano equatorial da esfera de Poincaré para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$. Aqui os círculos pequenos representam os pontos críticos no infinito. | 46 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|---|
| 2.1 Tabela relacionando as quantidades ω , $\rho(a)$, $a(t)$ e $a(\eta)$ para as fases radiação e matéria. | 8 |
|--|---|

Sumário

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | vi |
| Resumo | viii |
| Abstract | ix |
| Lista de Figuras | x |
| Lista de Tabelas | xi |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Breve revisão do Modelo Padrão Cosmológico | 3 |
| 2.1 Universo de FLRW | 3 |
| 2.1.1 Tempo Conforme | 7 |
| 2.1.2 Horizontes | 8 |
| 2.2 Universo de de Sitter | 10 |
| 2.3 Os problemas | 11 |
| 2.3.1 Problema da Planura | 12 |
| 2.3.2 Problema do Horizonte | 12 |
| 3 Inflação Cósmica | 13 |
| 3.1 Teoria Inflacionária | 13 |
| 3.2 Solução dos Problemas da Planura e Horizonte | 14 |
| 3.2.1 Problema da Planura | 14 |
| 3.2.2 Problema do Horizonte | 15 |
| 3.2.3 O valor de N | 15 |
| 3.3 Dinâmica Inflacionária | 16 |
| 3.3.1 O <i>inflaton</i> | 17 |
| 3.3.2 Condições de <i>slow-roll</i> | 19 |
| 3.4 Modelos Inflacionários | 22 |
| 3.4.1 Vínculos observacionais da CMB na inflação <i>single-field</i> | 22 |
| 3.4.2 Modelos de <i>Large-field</i> | 23 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 3.4.3 | Modelos de <i>Small-field</i> | 23 |
| 4 | Teoria $f(R)$ | 25 |
| 4.1 | Ação e Equações de Campo | 26 |
| 4.2 | Equivalência com a teoria escalar-tensorial | 29 |
| 4.2.1 | Transformação Conforme | 30 |
| 4.3 | Inflação em teorias $f(R)$ | 31 |
| 5 | Evolução Cosmológica | 35 |
| 5.1 | $f(R)$ no universo FLRW | 35 |
| 5.2 | Evolução do caso de $f(R) = \alpha R^2$ | 38 |
| 5.3 | Evolução do caso de $f(R) = R + \alpha R^2$ | 41 |
| 5.4 | Evolução do caso de $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$ | 44 |
| 6 | Considerações Finais | 47 |
| | Apêndice A Cálculo dos Coeficientes $A(u, v, z)$, $B(u, v, z)$ e $C(u, v, z)$ | 49 |
| | Referências Bibliográficas | 52 |

Capítulo 1

Introdução

A teoria da inflação cósmica possui um lugar importante na Cosmologia Moderna e o desenvolvimento do cenário de um universo inflacionário revelou uma nova e promissora via para ligar a Física Fundamental com observações. A descoberta e subseqüentes medições da radiação cósmica de fundo (CMB) permitiram que os primeiros momentos do universo, a expansão exponencial do universo em aproximadamente 10^{-30} s de idade, pudessem ser estudados com grande profundidade [4].

Embora nosso trabalho tenha como objetivo analisar a física no Universo primordial, especificamente sua fase inflacionária, é mais conveniente começar nossa análise pela descrição do universo hoje, já que o universo atual pode fornecer uma vasta gama de informações sobre seu início.

Já foi verificado que a distribuição de matéria em escalas muito grandes, a chamada estrutura em larga escala, é surpreendentemente homogênea. Volumes suficientemente grandes do universo contém densidades médias de matéria semelhantes, há uma discussão relativamente recente em [5]. Além disso, a radiação do último espalhamento de fótons primordiais apresenta-se como um fundo quase uniforme na faixa de microondas [6].

Em escalas pequenas, há não-homogeneidades no conteúdo material do universo. É perceptível que as galáxias não estão distribuídas aleatoriamente, mas sim em estruturas como os aglomerados, por exemplo. E também há pequenas anisotropias na CMB, como mostrado nos resultados do Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [7].

Desta maneira, possíveis questões como ‘de onde vieram estas anisotropias da CMB e estruturas em larga escala?’ podem ser formuladas. E além, junto com questões desse tipo estão também: Por que o universo em largas escalas é tão homogêneo e isotrópico, apesar do fato de pequenas regiões estarem inicialmente desconectadas? Por que sua densidade de curvatura é tão pequena a ponto de parecer um universo plano?

Para responder questões como estas (que serão apresentadas com mais rigor nos capítulos seguintes) foi introduzido o conceito de universo inflacionário na década de 80 por físicos como Starobinsky [8], [9], [10], Guth [11] e Sato [12]. O cenário cosmológico inflacionário nos permite analisar questões fundamentais sobre as condições iniciais (homogeneidade

em largas escalas, planura e espectro de perturbações) que são exigidas para desenvolver o universo como nós observamos hoje [13]. A maneira mais simples obter esta fase inflacionária seria introduzir um campo escalar com um potencial na teoria que descreve a evolução do universo [14], embora esta não seja única. Neste trabalho, analisaremos também a fase inflacionária obtida através da modificação da teoria da Relatividade Geral, que é o caso do modelo proposto por Starobinsky.

Mesmo que a teoria inflacionária não seja uma teoria fundamental, sendo vista mais como um paradigma, ela é extremamente bem sucedida nas tentativas de explicar problemas na Cosmologia e resolvê-los quantitativamente.

Como estamos em uma fase de grandes precisões na Cosmologia, podemos nos guiar pelas presentes e futuras observações da CMB via satélites como o PLANCK [3] para discriminar os modelos inflacionários que vêm surgindo na literatura [15]. Há atualmente muitos modelos que podem ser considerados consistentes, a questão é encontrar um modelo definitivo de inflação, porém esta tarefa exige análises cada vez mais refinadas de cada modelo e medições cada vez mais precisas da CMB.

Nesta dissertação, nos baseamos no artigo de Tsujikawa de 2014 [15] e damos ênfase ao modelo inflacionário de Starobinsky. Utilizando ferramentas bem conhecidas como a aproximação de variação lenta do campo escalar (*slow-roll*) para teorias com apenas um campo escalar (*single-fields*), calculamos os observáveis cosmológicos n_s e r em termos dos parâmetros de *slow-roll* e comparamos com os dados observacionais que nos são fornecidos.

Iniciaremos nosso trabalho apresentando o Modelo Padrão da Cosmologia. Este modelo possui significativo sucesso fenomenológico [16]. Faremos a discussão dos problemas que surgem com as condições primordiais de evolução do universo - o problema do horizonte e o problema da planura.

Apresentados os problemas, daremos início ao Capítulo 3 que propõe a inflação como solução destes problemas. Analisaremos a dinâmica lenta do campo escalar que guiaria a fase inflacionária, discutiremos dois modelos inflacionários baseados em diferentes campos escalares e calcularemos seus respectivos observáveis cosmológicos n_s e r .

No Capítulo 4 faremos a descrição da teoria $f(R)$ para investigar a inflação em teorias de Gravitação Modificada. Discutiremos aqui o modelo de Starobinsky.

Com o objetivo de analisar modelos com modificações da lagrangiana de Starobinsky, no Capítulo 5 propomos a análise de sistema dinâmico do modelo $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$.

Encerramos o trabalho com as conclusões obtidas e as perspectivas.

Capítulo 2

Breve revisão do Modelo Padrão Cosmológico

O atual Modelo Padrão da Cosmologia é chamado de Modelo Λ CDM (*Lambda cold dark matter*) que é um modelo baseado no Princípio Cosmológico [17] e com adição de matéria escura e energia escura sob forma de constante cosmológica.

Este modelo é conhecido como o padrão por ser o modelo mais simples e com boas previsões para as propriedades do universo. Está baseado em três pilares observacionais¹ [19]

- O diagrama de Hubble, exibindo a expansão do universo [20,21];
- Abundância de elementos leves, em acordo com a teoria da nucleossíntese sugerida inicialmente por Gamow [22,23];
- A detecção da radiação cósmica de fundo em microondas (CMB) como espectro de corpo negro, que nos dá informações sobre uma época muito jovem do universo e comprova sua homogeneidade desde muito cedo [24];

2.1 Universo de FLRW

O Princípio Cosmológico, que nos permite caracterizar o universo como homogêneo e isotrópico a largas escalas (acima de 100 Mpc), somado com a Teoria da Relatividade Geral, é o suficiente para obter resultados quantitativos e testá-los com as observações astronômicas.

A dinâmica do campo gravitacional, que relaciona a geometria do espaço-tempo com o conteúdo material, é descrita por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

¹Os pilares não serão discutidos neste trabalho mas uma boa descrição pode ser encontrada nas referências [1,18]

sendo $\kappa = 8\pi G$, uma constante de acoplamento. Neste trabalho estamos convencionado a velocidade da luz como $c = 1$.

O conteúdo material do universo, representado por $T_{\mu\nu}$, pode ser visto como um fluido perfeito já que estamos considerando escalas acima de 100 Mpc,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

sendo que u_μ é a quadri-velocidade para um observador comóvel ao fluido e ρ e p são a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente. O tensor momento-energia é dado nesse referencial na forma diagonal $T = (\rho, -p, -p, -p)$.

Seu traço é dado por

$$T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = T^\mu_\mu = \rho - 3p \quad (2.3)$$

Uma outra forma de escrever (2.1) é tomar o traço de ambos os lados

$$g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \kappa g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

$$R - \frac{1}{2}R\delta^\mu_\mu = \kappa T \quad (2.5)$$

$$-R = \kappa T, \quad (2.6)$$

e substituir (2.6) em (2.1)

$$R_{\mu\nu} = \kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (2.7)$$

As equações (2.1) e (2.7) possuem exatamente o mesmo conteúdo físico.

A geometria é dada pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [16]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right], \quad (2.8)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala do universo. A constante k define a curvatura espacial do universo e pode assumir os valores $k = -1, 0, 1$.

Sabendo da relação entre os símbolos de Christoffel e a métrica

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\beta\sigma,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}), \quad (2.9)$$

temos então que seus termos não-nulos serão

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}; & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2; & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta; \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}; & \Gamma_{22}^1 &= -r^2(1-kr^2); & \Gamma_{33}^1 &= -r^2 \sin^2 \theta(1-kr^2); \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; & \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}; \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a};
\end{aligned} \tag{2.10}$$

As componentes do tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\rho}^\rho - \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \tag{2.11}$$

são dadas por

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}; \tag{2.12}$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2a^2 + 2k}{1-kr^2}; \tag{2.13}$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2a^2 + 2k); \tag{2.14}$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta(a\ddot{a} + 2a^2 + 2k); \tag{2.15}$$

Com o correspondente escalar de Ricci sendo expresso por

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) \tag{2.16}$$

Quando aplicamos esta geometria nas equações de Einstein (2.7), obtemos as equações de Friedmann [25]. Das quatro equações que resultam da diagonalidade dos tensores envolvidos, só existem duas independentes. As três equações com componentes espaciais do tipo $\mu\nu = ii$ são equivalentes, já que refletem a isotropia da métrica.

Para a parte temporal $\mu\nu = 00$, temos

$$R_{00} = \kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T\right) \tag{2.17}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p). \tag{2.18}$$

Para a parte espacial, podemos fazer $\mu\nu = 11$ e obter

$$R_{11} = \kappa\left(T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T\right) \tag{2.19}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{2}(\rho - p). \tag{2.20}$$

Substituindo (2.18) em (2.20) temos finalmente

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa}{3}\rho. \quad (2.21)$$

As equações de Friedmann (2.18)-(2.21) descrevem a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico.

Para haver uma expansão acelerada, $\ddot{a} > 0$ de forma que $\rho + 3p < 0$. Mas os tipos de matéria que conhecemos satisfazem a condição de energia $\rho + 3p > 0$ (condição de energia forte). Isto contradiz evidências observacionais que dizem que o universo está em expansão acelerada. Aqui vemos que o modelo precisa de uma modificação com adição de conteúdo exótico como a constante cosmológica para estar de acordo com as observações astronômicas.

Além dessas equações, temos também a expressão de conservação de energia, obtida da divergência do tensor momento-energia $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.22)$$

Considerando a equação de estado $p = \omega\rho$, encontramos a relação entre a densidade e o fator de escala

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.23)$$

sendo ω o parâmetro, em princípio constante, que determina as fases do universo

- $\omega = 0$, matéria não-relativística, dita poeira;
- $\omega = \frac{1}{3}$, gás de fótons, chamada radiação;
- $\omega = -1$, constante cosmológica;

Em um universo contendo matéria, radiação e constante cosmológica, (2.21) se torna

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.24)$$

ou em termos dos parâmetros de densidade relativa,

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_k}{a^2} \right], \quad (2.25)$$

sendo

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho \rightarrow \rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{\kappa} \quad (2.26)$$

aqui ρ_{cr} é a densidade de energia crítica para um universo plano ($k = 0$), e $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}}$ é o parâmetro de densidade relativa.

A equação (2.21) também pode ser escrita apenas em termos de densidade de energia

$$\Omega_T - \frac{k}{(aH)^2} = 1 \rightarrow \Omega_T + \Omega_k = 1, \quad (2.27)$$

o parâmetro de densidade Ω_T é igual a um para um universo plano e pode ser dividido em suas partes constituintes

$$\Omega_T = \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\gamma + \Omega_\Lambda. \quad (2.28)$$

As primeiras três contribuições (densidade de bárions, matéria escura fria e radiação) são comumente referidas como Ω_m , a densidade de matéria. A quarta contribuição vem da densidade de energia escura. A medição precisa destes constituintes para sabermos o atual valor do parâmetro de densidade tem sido um dos objetivos das observações da CMB.

A equação (2.27) evidencia uma relação direta entre a expansão do universo, sua densidade relativa de energia e a sua curvatura espacial.

De acordo com os resultados do Planck, $\Omega_m = 0.315 \pm 0.013$ e $\Omega_\Lambda = 0.685 \pm 0.013$ [26].

2.1.1 Tempo Conforme

Podemos obter a solução das equações de Friedmann utilizando como variável o tempo conforme

$$dt = ad\eta \rightarrow \eta = \int \frac{dt}{a}, \quad (2.29)$$

sendo t o tempo físico e η o tempo conforme.

Derivando (2.21) com relação à η e aplicando a equação de continuidade (2.22) também no tempo conforme, temos

$$a'' + ka = \frac{\kappa}{6}(\rho - 3p)a^3. \quad (2.30)$$

Para obter as soluções de (2.30) utilizamos a equação de estado $p = \omega\rho$.

No caso de universo dominado por radiação, $p = \frac{1}{3}\rho$, obtemos como solução

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \sinh(\eta) & \text{para } k = -1 \\ \eta & \text{para } k = 0 \\ \sin(\eta) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

em relação ao tempo físico

$$t(\eta) \propto \begin{cases} \cosh(\eta) - 1 & \text{para } k = -1 \\ \frac{\eta^2}{2} & \text{para } k = 0 \\ 1 - \cos(\eta) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

Para um universo dominado por matéria não-relativística, poeira, temos $p = 0$ e nossa solução será

$$a(\eta) \propto \begin{cases} \cosh(\eta) - 1 & \text{para } k = -1 \\ \eta^2 & \text{para } k = 0 \\ 1 - \cos(\eta) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

e

$$t(\eta) \propto \begin{cases} \sinh(\eta) - \eta & \text{para } k = -1 \\ \eta^3 & \text{para } k = 0 \\ \eta - \sin(\eta) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

A tabela abaixo sintetiza os resultados para radiação e matéria em um universo plano ($k = 0$).

| CONTEÚDO | ω | $\rho \sim a^{-3(1+\omega)}$ | $a \sim t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$ | $a \sim \eta^{\frac{2}{1+3\omega}}$ |
|----------|---------------|------------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|
| RADIAÇÃO | $\frac{1}{3}$ | a^{-4} | $t^{1/2}$ | η |
| MATÉRIA | 0 | a^{-3} | $t^{2/3}$ | η^2 |

Tabela 2.1. Tabela relacionando as quantidades ω , $\rho(a)$, $a(t)$ e $a(\eta)$ para as fases radiação e matéria.

É interessante perceber que em um universo plano dominado por radiação na relação entre ρ_r e a há um fator extra a^{-1} que tem origem no *redshift* cosmológico, a expansão do universo provoca um alongamento no comprimento de onda da radiação. A matéria não-relativística por sua vez possui pressão nula e $\rho_m \propto a^{-3}$, o que é bastante intuitivo já que a densidade de energia diminui com o aumento do volume do universo.

2.1.2 Horizontes

A métrica (2.8) em termos do tempo conforme η e da distância percorrida na superfície χ é expressa por

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[d\eta^2 - d\chi^2 - \Phi^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.35)$$

sendo

$$\Phi^2(\chi) = \begin{cases} \sinh^2(\chi) & \text{para } k = -1 \\ \chi & \text{para } k = 0 \\ \sin^2(\chi) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

A trajetória radial $\theta, \phi = \text{const}$ é uma geodésica. A função $\chi(\eta)$ ao longo da trajetória é determinada pela condição

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\chi^2] = 0. \quad (2.37)$$

A partir de (2.37) podemos traçar as trajetórias (ou linhas de mundo) de partículas no plano (η, χ) , compondo os chamados diagramas conformes.

Como solução para (2.37), obtemos

$$\chi(\eta) = \pm\eta + \text{cte}. \quad (2.38)$$

Dessa forma, as possíveis trajetórias luminosas correspondem a linhas retas em ângulos de 45° no plano, definindo o cone de luz. Neste, os eventos causalmente conectados estão entre (ou, no máximo, sobre) as trajetórias da luz.

Considerando o universo com uma idade finita, notamos que a luz só pôde se propagar em uma distância finita correspondente a esse tempo. Então o volume de onde podemos receber qualquer tipo de informação do universo é limitado.

O deslocamento máximo que os fótons puderam fazer é dado por

$$\chi_p(\eta) = \eta - \eta_i = \int_{\eta_i}^{\eta} \frac{d\eta'}{a(\eta')}, \quad (2.39)$$

sendo que η_i corresponde ao início do universo. Esta distância é o horizonte de partículas.

No instante η , um evento χ situado a uma distância $\chi > \chi_p(\eta)$ é inacessível para um observador na origem $\chi = 0$. Se o universo possui uma singularidade inicial, podemos considerar $\eta_i = 0$.

Multiplicando χ_p pelo fator de escala, obtemos o comprimento físico do horizonte de partículas,

$$d_p(t) = a(t)\chi_p = a(t) \int_{\eta_i}^{\eta} \frac{d\eta'}{a(\eta')}. \quad (2.40)$$

Quando o universo é dominado por radiação, $a(t) \propto t^{1/2} \rightarrow d_p(t) = 2t$;

Quando o universo é dominado por matéria, $a(t) \propto t^{2/3} \rightarrow d_p = 3t$;

Se a condição de energia forte for satisfeita, o horizonte de partículas é da ordem da escala de Hubble, definida por H^{-1} [1].

2.2 Universo de de Sitter

Em 1917, Einstein propôs uma modificação em suas equações (2.1) para que desta forma, esta condição pudesse contrabalançar a força atrativa da Gravitação e permitir a existência de um universo estático, que condizia com sua intuição na época. A modificação consistiu em acrescentar uma constante multiplicada pelo tensor métrico, sugerindo que seria uma propriedade intrínseca do espaço,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.41)$$

A constante Λ foi nomeada constante cosmológica. Ela pode ser vista como um fluido perfeito com equação de estado $p = -\rho$, o que significa $\omega_\Lambda = -1$.

A adição da constante Λ nas equações de Einstein modifica as equações de Friedmann da seguinte maneira

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.42)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.43)$$

Uma análise qualitativa de (2.43) nos mostra que se Λ for suficientemente grande, pode se sobrepôr à atração gravitacional e provocar uma força repulsiva. Se isso acontecesse, embora o conteúdo material gere uma desaceleração, o universo se expandiria aceleradamente.

Ainda em 1917, o astrônomo holandês Willem de Sitter apresentou um modelo com constante cosmológica no qual o conteúdo material do universo era nulo e ainda assim com espaço-tempo curvo². Neste modelo, as partículas teste livres se afastam entre si apenas pela ação de Λ , o que caracteriza um universo em expansão.

Para um universo de de Sitter puro ($T_{\mu\nu} = 0$), a evolução do fator de escala é dada por

$$\ddot{a}(t) - \frac{\Lambda}{3}a(t) = 0 \rightarrow a(t) = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (2.44)$$

Substituindo (2.44) em (2.42), vemos que a curvatura está vinculada com as constantes A e B por

$$k = 4ABH_\Lambda, \quad (2.45)$$

sendo $H_\Lambda = \frac{\Lambda}{3}$.

Em um universo plano, uma das constantes tem que ser igual a zero. Se $B = 0$, então (2.44) descreve um universo plano em expansão. Nos outros casos, temos $A = B$ para uma

²Nós damos uma atenção especial ao universo de de Sitter porque ele tem um papel importante no entendimento da inflação cosmológica, como veremos no próximo capítulo. Para uma descrição mais profunda deste universo, ver [1] e [27].

curvatura positiva e $A = -B$ para uma curvatura negativa. As soluções para $a(t)$ serão

$$a(t) \propto \begin{cases} \sinh(\sqrt{H_\Lambda}t) & \text{para } k = -1 \\ e^{\sqrt{H_\Lambda}t} & \text{para } k = 0 \\ \cosh(\sqrt{H_\Lambda}t) & \text{para } k = 1 \end{cases} \quad (2.46)$$

A figura abaixo representa graficamente estas soluções

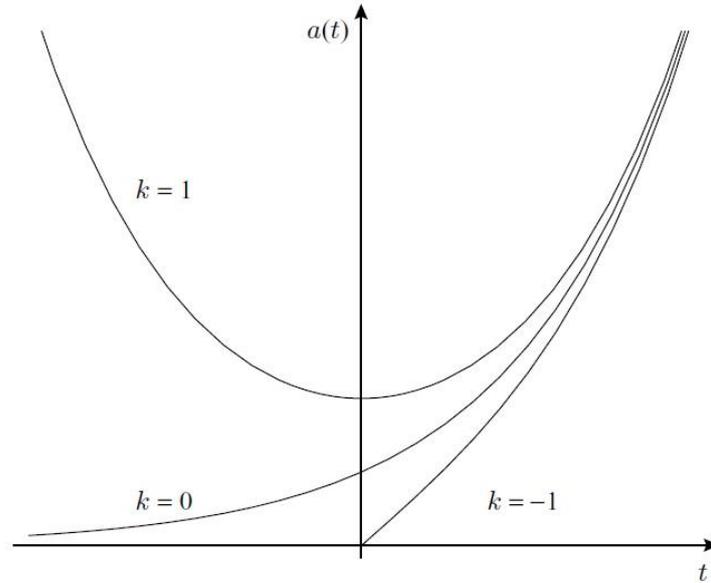


Figura 2.1. Fator de escala \times tempo em um universo de de Sitter [1].

2.3 Os problemas

A princípio gostaríamos de descrever um sistema físico dadas suas condições iniciais, mas é de certa forma filosófico questionar se as condições iniciais necessárias para a evolução do sistema estão contidas na teoria ou se estão separadas dela. Por exemplo na Mecânica Clássica, sabemos que dadas posição e velocidade iniciais, podemos utilizar as leis de Newton para descrever a trajetória de um corpo. Mas ainda não sabemos se a Cosmologia tem como papel prever ou mesmo explicar as condições primordiais exigidas. Obviamente, queremos evitar impor condições iniciais muito restritivas para observarmos o universo como ele é hoje. Então nesta seção do trabalho, vamos descrever os problemas que a teoria de Big Bang convencional encontra para que o universo evolua ao seu estado atual com base nos trabalhos [4] e [16].

2.3.1 Problema da Planura

A contribuição de matéria não-relativística e relativística na quantidade ρ em (2.21) cresce com a^{-3} e a^{-4} , respectivamente, então nos primórdios da expansão podemos negligenciar k e (2.21) nos fornece

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \rightarrow \frac{\kappa}{3}\rho, \quad (2.47)$$

ou seja, no universo primordial a densidade do conteúdo material é equivalente à densidade crítica $3H^2/\kappa$, sendo H ao valor da constante de Hubble nesta época.

Por outro lado, dados da relação *redshift*-distância de supernovas Tipo **Ia** observadas, medidas de idades de estrelas antigas e dados de flutuações da temperatura da CMB [16] favorecem uma densidade de curvatura $\Omega_k \approx 0$. Então em (2.27), no mínimo se espera que $|\Omega_k| < 1$. Mas Ω_k é justamente o valor atual do parâmetro de curvatura $-k/a^2H^2 = k/\dot{a}^2$, sendo k constante.

Na época em que há dominação de matéria não-relativística (a partir da fase em que a temperatura do universo caiu de 10^4 K até próximo da época atual), $a(t) \propto t^{2/3}$, então $|k|/\dot{a}^2$ também cresce com $t^{2/3} \propto T^{-1}$. Então, se consideramos $|\Omega_k| < 1$, na fase em que o universo possuía 10^4 K, o parâmetro de curvatura tinha que ser da ordem de 10^{-4} . Se voltarmos mais na história do universo e considerarmos a era da radiação, $a(t) \propto t^{1/2}$, e $|k|/\dot{a}^2$ cresce com $t \propto T^{-2}$. Novamente para $|k|/\dot{a}^2$ não ser maior que 10^{-4} quando $T = 10^4$ K, seria necessário que $|k|/\dot{a}^2$ fosse da ordem de 10^{-16} na fase de nucleossíntese primordial e ainda menor em tempos mais antigos. Ou seja, um universo plano hoje já foi muito mais plano no passado. De fato, se extrapolamos para a era de Planck, então $\Omega_k \sim 10^{-64}$ naquela época. Isto exigiria um ajuste fino (*fine tuning*) enorme na curvatura espacial do universo primordial.

2.3.2 Problema do Horizonte

O tamanho do horizonte em um universo dominado por matéria ou radiação no período de desacoplamento é da ordem de $d_H(t_{des}) \approx H_0^{-1}(1+z_L)^{-3/2}$, já que $a(t)$ cresce com $t^{2/3}$ na época do último espalhamento. De acordo com (2.40), a distância física do horizonte de partículas na superfície do último espalhamento é da ordem de $d_H(t_0) \approx H_0^{-1}(1+z_L)^{-1}$.

A taxa entre o horizonte de partículas no desacoplamento e o horizonte de partículas hoje possui um ângulo da ordem de $d_H(t_{des})/d_H(t_0) \approx (1+z_L)^{-1/2}$ radianos, para $z_L \approx 1100$ é aproximadamente 1.6° . Portanto em um universo dominado por matéria ou radiação, nenhuma influência física poderia ter suavizado heterogeneidades iniciais e trazido à mesma temperatura pontos que eram separados por mais de 2° inicialmente. Isto está em contradição com a isotropia quase total da CMB em grandes escalas angulares observada atualmente.

Capítulo 3

Inflação Cósmica

A inflação cósmica é uma fase de expansão acelerada que teria ocorrido enquanto o universo ainda era primordial. Uma das razões mais importantes pelas quais modelos cosmológicos com uma fase inflacionária são interessantes é que eles poderiam explicar o presente estado de nosso universo sem impor condições altamente especiais no estado inicial. A inflação cósmica é capaz de resolver dinamicamente os problemas da planura e horizonte e permite que o universo se desenvolva de condições iniciais genéricas [28].

Nosso objetivo neste capítulo é fazer a descrição da dinâmica inflacionária de um campo escalar. Tudo o que precisamos assumir, a princípio, é que existe um campo escalar homogêneo, o *inflaton*, que em algum tempo no passado tinha um determinado valor no qual o potencial deste campo $V(\phi)$ é grande mas também suficientemente plano. Se isto acontece, o campo escalar rola bem lentamente (*slow-roll*) para o ponto de mínimo do potencial, então o parâmetro de Hubble decresce somente de maneira lenta e o universo passa por uma inflação quase-exponencial [16].

3.1 Teoria Inflacionária

Se assumimos que o universo passa por uma fase com expansão acelerada, ou seja,

$$\ddot{a} > 0, \tag{3.1}$$

de (2.18), teremos a seguinte condição

$$\rho + 3p < 0, \tag{3.2}$$

que viola a condição de energia forte. A condição (3.1) significa que \dot{a} ($= aH$) aumenta durante a inflação e portanto o raio de Hubble $(aH)^{-1}$ diminui na fase inflacionária.

A forma mais natural para implementar as condições (3.1) e (3.2) consiste em considerar que o universo passa por uma fase com parâmetro de estado $\omega_\Lambda = -1$. Nesta fase, temos

que (2.21) se torna

$$H^2 \simeq \frac{\kappa}{3} \rho_\Lambda \simeq cte, \quad (3.3)$$

mostrando que as distâncias da ordem do raio de Hubble são constantes nesse período. A solução desta equação mostra que o fator de escala cresce exponencialmente no tempo

$$a \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (3.4)$$

Logo, as distâncias físicas também crescem exponencialmente, forçando o parâmetro de densidade de matéria chegar à unidade e a consequente planura do universo.

É importante ressaltar que esta é apenas uma fase porque se o parâmetro de Hubble não evolui no tempo, a inflação continua indefinidamente, tornando o universo um enorme vazio com temperaturas muito baixas - um puro universo de de Sitter, mas isto vai de encontro com nossas observações atuais. Então a inflação tem que acabar e a energia de vácuo deve se transformar em energia térmica para o universo. Este processo é conhecido como *reheating* (reaquecimento) e consiste no decaimento da energia de vácuo em partículas, resultando no aumento da entropia do universo e dando início à era dominada pela radiação.

3.2 Solução dos Problemas da Planura e Horizonte

Os problemas mencionados no capítulo anterior podem ser resolvidos se o universo atravessou uma fase do tipo aproximadamente de Sitter logo depois de ter saído da fase quântica. Durante uma fase de Sitter, o fator de escala $a(t)$ cresce exponencialmente com o tempo.

3.2.1 Problema da Planura

Vamos supor que o universo teve período de inflação, com $H \approx cte$, durante o qual $a(t)$ cresce com um fator e^N , seguido por uma fase de radiação, depois um "momento" de equivalência entre radiação e matéria, que por sua vez foi substituída por uma era de dominação da matéria e em seguida uma fase dominada pela energia de vácuo.

Se $|k|/a_i^2 H_i^2 = O(1)$, sendo i = começo da inflação, então no final da inflação $|k|/a_f^2 H_f^2$, I denotando o fim da inflação, teria que ser da ordem de e^{-2N}

$$\frac{|k|}{a_f^2 H_f^2} = e^{-2N} \frac{|k|}{a_i^2 H_i^2} \approx e^{-2N}. \quad (3.5)$$

Hoje ($a_0 = 1$) teríamos

$$|\Omega_{k_0}| = \frac{|k|}{H_0^2} = \frac{|k|}{a_f^2 H_f^2} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 = e^{-2N} \left(\frac{a_f H_f}{H_0} \right)^2 < 1. \quad (3.6)$$

Então o problema da planura seria evitado se a expansão durante a inflação tivesse um limite

$$e^N > \frac{a_I H_I}{H_0}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Problema do Horizonte

A distância física do horizonte de partículas no tempo do último espalhamento t_L é dada por

$$d_H(t_H) = a(t_H) \int_{t_i}^{t_L} \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.8)$$

com t_i sendo o início da era da inflação.

Durante a inflação $a(t)$ é dado por

$$a(t) = a_i e^{H_i(t-t_i)}, \quad (3.9)$$

mas $a_I = a_i e^{H_i(t_i-t_i)}$ e $H_I = H_i \rightarrow cte$, logo

$$a(t) = a_I e^{-H_i(t_i-t)}. \quad (3.10)$$

Agora (3.8) se torna

$$d_H(t_L) = a(t_L) \int_{t_i}^{t_L} dt \frac{1}{a_I} e^{H_i(t_i-t)} = \frac{a(t_L)}{a_I H_I} (e^{H(t_L-t_i)} - 1). \quad (3.11)$$

Para resolver o problema do horizonte, $e^N \gg 1$, então podemos desprezar o termo -1 de (3.11). Para dar conta do alto grau de isotropia apresentado pela CMB em largas escalas, nós precisamos que

$$d_H(t_L) > d_A(t_L), \quad (3.12)$$

sendo $d_A = r_L a(t_L) \simeq \frac{a(t_L)}{a_0 H_0}$ a distância angular da superfície de último espalhamento [16].

A condição (3.12) para a isotropia da CMB é então

$$e^N > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \quad (3.13)$$

Esta é a mesma condição (3.7) para a solução do problema da planura.

3.2.3 O valor de N

Para encontrar um valor de N que satisfaça a condição (3.7), fazemos a hipótese de que o fator de escala e a taxa de expansão são aproximadamente iguais no final da inflação e no

início da era de radiação

$$a_I H_I \simeq a_1 H_1, \quad (3.14)$$

aqui 1 é relacionado ao início da era dominada por radiação. Da expressão (2.25) considerando apenas os termos de radiação e matéria, temos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m_0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r_0}}{a^4}. \quad (3.15)$$

O fator de escala para o qual há uma equivalência entre as duas eras, a_{eq} , é dado por

$$\frac{\Omega_{m_0}}{a_{eq}^3} = \frac{\Omega_{r_0}}{a_{eq}^4} \rightarrow a_{eq} = a_0 \frac{\Omega_{r_0}}{\Omega_{m_0}} \quad (3.16)$$

Escrevendo (3.15) em termos de a_{eq} , obtemos

$$H = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a_{eq}^3}{a^3} + \frac{a_{eq}^4}{a^4}}, \quad (3.17)$$

sendo $H_{eq} = \sqrt{2\Omega_{m_0}} H_0 (a_0/a_{eq})^{3/2}$. Escolhendo $a = a_1 \ll a_{eq}$, temos

$$H_1 = \frac{H_{eq}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{eq}}{a_1}\right)^2. \quad (3.18)$$

Usando a relação acima, podemos escrever condição (3.7) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} e^N > \frac{a_I H_I}{H_0} &= \sqrt{\frac{H_{eq}}{\sqrt{2}}} a_{eq} \frac{H_1}{H_0} \\ &= (\Omega_{m_0} a_{eq})^{1/4} \sqrt{\frac{H_I}{H_0}} = \Omega_{r_0}^{1/4} \left(\frac{\rho_I}{\rho_0}\right)^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Agora para encontrar o valor de N , precisamos estimar um valor para ρ_I . Temos dois limites: ρ_I não pode ser menor do que 1MeV (o início da conversão nêutron-próton), mas também não esperamos que ρ_I seja maior que a densidade de energia de Planck $G^{-2} = [1.22 \times 10^{19} \text{GeV}]^4$. Utilizando $\rho_I = [2 \times 10^{16} \text{GeV}]^4$ e a densidade crítica dada por $\rho_0 = [3 \times 10^{-3} \text{eV}]^4 h$ [16], a equação (3.19), com $h = 0.7$, exigiria que a expansão durante a inflação teve um fator de pelo menos 8×10^{26} , então $N > 62$.

3.3 Dinâmica Inflacionária

A época inflacionária corresponde a um período onde a expansão do universo era acelerada e o responsável por essa aceleração seria o potencial quase-constante de um campo escalar chamado *inflaton*. Essa dinâmica lenta do campo deve durar aproximadamente 70

e-folds para resolver os problemas de condições iniciais do Modelo Padrão e então, a inflação terminaria dando lugar à cosmologia de Friedmann-Robertson-Walker, a chamada saída graciosa [29]. Agora não vamos nos preocupar com a origem desse campo, embora haja certa desconfiança no fato do Modelo Padrão de Física de Partículas conter o tipo certo de campos e interações que funcionem como fonte de uma época inflacionária [4].

3.3.1 O inflaton

Vamos considerar um campo escalar homogêneo ϕ , cuja energia potencial pode levar à expansão acelerada do universo. Sabendo que a densidade de lagrangiana de um campo escalar e potencial $V(\phi)$ é dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi). \quad (3.20)$$

Então a ação que descreve o campo gravitacional e o campo escalar será

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_\phi \right), \quad (3.21)$$

aqui κ pode ser escrito como $\kappa = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2}$ já que a energia de Planck $M_{Pl} = 1.2211 \times 10^{19}$ GeV é relacionada a G através de $M_{Pl} = \left(\frac{\hbar c^5}{G}\right)^{1/2}$. Aqui \hbar e c são a constante de Planck e a velocidade da luz, respectivamente. Usaremos as unidades $\hbar = c = 1$.

Através de (3.21) podemos encontrar o tensor momento-energia do campo escalar, que é dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\phi &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na métrica FLRW para $k = 0$, a densidade de energia ρ_ϕ e a pressão p_ϕ do campo escalar são

$$\rho_\phi = -T_0^{0(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad \text{e} \quad p_\phi = \frac{1}{3}T_i^{i(\phi)} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.23)$$

O parâmetro ω_ϕ da equação de estado para ϕ pode então ser calculado

$$\omega_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}. \quad (3.24)$$

Podemos perceber que o campo escalar somente possui equação de estado $p \simeq -\rho$ se o termo cinético $\dot{\phi}^2$ for muito menor que $V(\phi)$.

As equações de campo de (3.21) são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \left(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{\mu\nu}V(\phi) \right), \quad (3.25)$$

e a primeira equação de Friedmann para o universo FRW plano se torna então

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \left(\partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}g_{00}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi - g_{00}V(\phi) \right) \\ 3H^2 &= \frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

A solução de (3.26), utilizando $\rho_\phi \simeq V(\phi)$, será

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \rho_\phi \rightarrow a(t) \sim a_i \exp \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{\frac{8\pi V(\phi)}{3M_{Pl}^2}} dt, \quad (3.27)$$

resultando em uma fase de de Sitter.

A equação de conservação de energia (2.22) toma a forma de

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.28)$$

$V'(\phi)$ é a derivada do potencial em relação a ϕ . Nesta equação, o segundo termo é proporcional ao fator de Hubble, isto mostra que a dinâmica do campo escalar é diretamente afetada pela expansão. Também é importante notar que este termo funciona como um termo de fricção ou amortecimento (por ser proporcional à velocidade) aumentando o tempo que o campo escalar leva para atingir o mínimo do potencial.

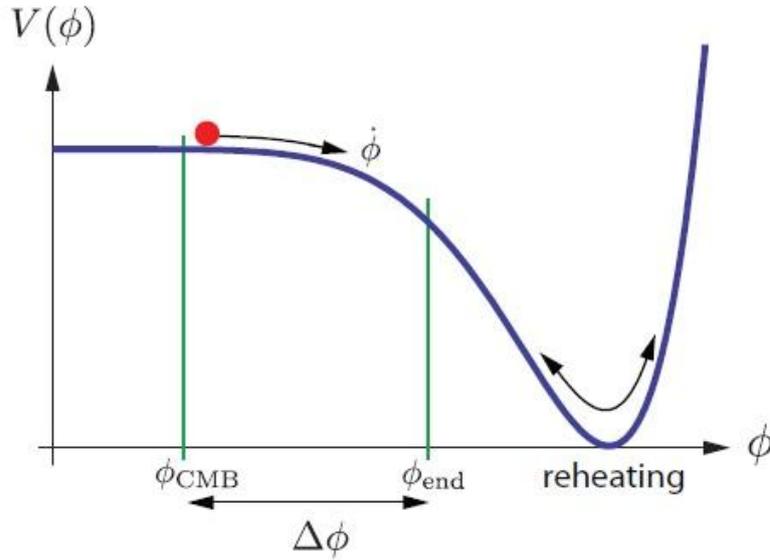


Figura 3.1. Exemplo de um potencial do *inflaton*. A aceleração ocorre quando $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$. A inflação termina em ϕ_{end} quando a energia cinética se torna comparável à energia potencial. Na época do reaquecimento, a densidade de energia do campo escalar é então convertida em radiação [2].

3.3.2 Condições de *slow-roll*

Durante a inflação, a densidade de energia e pressão do fluido cosmológico são dominados por campos escalares. Como vimos, pressão e densidade de energia são dados por (3.23), e a condição para inflação $p < -\rho/3$ é satisfeita se os campos não variarem muito rapidamente.¹ Aqui vamos supor que somente um campo ϕ varie. O que é chamado de *single-field inflation* (inflação de um único campo).

A primeira equação de Friedmann nos leva então a (3.26). Diferenciando esta equação e utilizando (3.28), encontramos uma expressão útil

$$\frac{M_{Pl}^2}{4\pi} \dot{H} = -\dot{\phi}^2. \quad (3.29)$$

Para haver uma aceleração quase exponencial, a mudança de $|\dot{H}/H|(1/H)$ em H durante um tempo de expansão $1/H$ deve ser muito menor que 1, ou seja,

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} \ll 1. \quad (3.30)$$

De acordo com (3.29) e (3.26), para que $|\dot{H}|/H^2 \ll 1$, há a seguinte exigência

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (3.31)$$

¹Há exceções como *fast-roll inflation* e *locked inflation*. Estas necessitam de apenas alguns *e-folds* de inflação, ver [30].

que é a mesma obtida para que, em (3.24), $\omega = -1$. Então, como consequência temos que $p = -\rho$ e também

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} V(\phi)}. \quad (3.32)$$

Também é exigido que a mudança de $|\ddot{\phi}/\dot{\phi}|(1/H)$ em $\dot{\phi}$ durante um tempo de expansão $1/H$ seja muito menor que 1, isto é

$$|\ddot{\phi}| \ll H|\dot{\phi}|. \quad (3.33)$$

A consequência de (3.33) é que desprezamos o termo $\ddot{\phi}$ de (3.28), que se torna então

$$\dot{\phi} = -\frac{V'(\phi)}{3H} = -\frac{M_{Pl}V'(\phi)}{\sqrt{24\pi V(\phi)}} \quad (3.34)$$

Então, utilizando (3.29), (3.32) e (3.34), temos que

$$\frac{|\dot{H}|}{H^2} = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{V'(\phi)^2}{V(\phi)^2}. \quad (3.35)$$

Então a expansão quase exponencial do universo dura muitos *e-foldings* se

$$\left| \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{\sqrt{16\pi}}{M_{Pl}}. \quad (3.36)$$

De acordo com (3.34), a condição sobre o potencial para que a desigualdade (3.31) seja satisfeita é

$$\left| \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{\sqrt{24\pi}}{M_{Pl}}, \quad (3.37)$$

que também é garantida por (3.36).

De (3.34) também temos

$$\ddot{\phi} = -\frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H} + \frac{V'(\phi)\dot{H}}{3H^2} = \frac{V''(\phi)V'(\phi)}{9H^2} - \frac{M_{Pl}^2 V'(\phi)^3}{48\pi V(\phi)^2}. \quad (3.38)$$

A desigualdade (3.36) garante que o valor absoluto do último termo do lado direito de (3.38) é muito menor que $|V'(\phi)|$, então a condição para $\ddot{\phi}$ ser muito menor que $|V'(\phi)|$ é que $|V''(\phi)| \ll 9H^2$, ou seja,

$$\left| \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right| \ll \frac{24\pi}{M_{Pl}^2}. \quad (3.39)$$

As equações (3.36) e (3.39) são duas condições de planura no potencial necessárias para

assegurar o rolamento lento de ϕ e $\dot{\phi}$.

De acordo com as condições (3.31) e (3.33), os parâmetros de *slow-roll* podem ser definidos em termos do potencial como

$$\epsilon_V = \frac{M_{Pl}^2}{16\pi} \frac{V'(\phi)^2}{V(\phi)^2}. \quad (3.40)$$

$$\eta_V = \frac{M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}. \quad (3.41)$$

Os parâmetros acima são chamados de parâmetros de *slow-roll* do potencial para distinguir dos parâmetros de *slow-roll* de Hubble, $\epsilon_H = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ e $|\eta_H| = \frac{|\dot{\epsilon}_H|}{H\epsilon_H}$. Na aproximação de *slow-roll* os parâmetros de potencial e Hubble são relacionados por [2]

$$\epsilon_V \simeq \epsilon_H, \quad \eta_V \simeq \epsilon_H + \eta_H. \quad (3.42)$$

Uma vez definidos os parâmetros de *slow-roll*, podemos analisar sua relevância em um cenário inflacionário. A vantagem da utilização desses parâmetros é a redução na ordem das equações de Friedmann e Klein-Gordon, que se tornam (3.32) e (3.34), respectivamente.

Desta forma, podemos obter soluções analíticas tanto para o campo escalar quanto para o fator de escala. Resolvendo (3.32) em termos do fator de escala, temos

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \simeq \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{8\pi}{3} V(\phi)} \quad (3.43)$$

$$a(t) \propto \exp\left\{\frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \int [V(t)]^{1/2} dt\right\}. \quad (3.44)$$

Agora resolvendo (3.34) e utilizando (3.32) para escrever H em termos de $V(\phi)$,

$$dt \simeq -3H \frac{d\phi}{V'(\phi)} \quad (3.45)$$

$$t(\phi) \propto -\frac{2}{M_{Pl}} \sqrt{6\pi} \int \frac{V(\phi)^{1/2}}{V'(\phi)} d\phi. \quad (3.46)$$

Para verificar que o potencial permite um número suficiente de *e-folds* para que ocorra a inflação, integramos o tempo conforme $dN = d \ln a$ e mostramos que o número de *e-folds* entre um tempo t_i e um tempo final t_f é dado por

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt = \int \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \simeq -\frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi, \quad (3.47)$$

aqui ϕ_f é o valor do campo no final da inflação e pode ser encontrado pela condição $\epsilon(\phi_f) = 1$.

Para resolver os problemas da planura e horizonte é exigido que $N > 60$ então este valor é visto como um número de *e-foldings* padrão mínimo para qualquer novo modelo inflacionário.

3.4 Modelos Inflacionários

Os modelos de inflação classificam a forma do potencial $V(\phi)$ do *inflaton*. O primeiro a utilizar o termo inflação foi Alan Guth, em 1981, quando apresentou um modelo inflacionário baseado em uma teoria de grande unificação (GUT). Este modelo é conhecido como o modelo de "inflação antiga" e assumia que o campo escalar estaria preso em um falso vácuo, um mínimo instável ou metaestável, e teria que alcançar o verdadeiro estado de vácuo por uma transição de primeira ordem. Isto porém não poderia acontecer nem de maneira graciosa nem completamente [31], [32].

Os problemas do modelo de Guth são evitados com os modelos de "nova inflação" nos quais a inflação terminaria via uma transição de segunda ordem [33]. Os diferentes tipos de modelos inflacionários de um único campo podem ser classificados como [34]

- Modelos do tipo I - modelos de *large-field* (modelos de grandes campos) possuem um valor inicial para o *inflaton* maior que a massa de Planck, M_{Pl} ;
- Modelos do tipo II - modelos de *small-field* (modelos de pequenos campos) possuem um valor inicial para o *inflaton* menor que a massa de Planck, M_{Pl} ;
- Modelos do tipo III - modelos híbridos, nos quais se utilizam mais de um campo escalar durante o período inflacionário;

Podemos ver que vários modelos de inflação não podem ser classificados em nenhum dos tipos acima [15]. Por exemplo, termos de ordens superiores de curvatura podem levar à inflação, mesmo sem um potencial para o campo escalar. Este seria o caso do modelo de Starobinsky, que será analisado com maiores detalhes no capítulo seguinte, porém neste caso o sistema pode ser reduzido a um campo escalar acoplado minimamente com um potencial de *large-field* por uma transformação conforme.

3.4.1 Vínculos observacionais da CMB na inflação *single-field*

Antes de caracterizar os modelos de acordo com sua classificação, vamos estabelecer os vínculos na inflação de *slow-roll single-field* usando os dados observacionais.

Os parâmetros de *slow-roll*, embora não sejam observáveis, estão relacionados com os observáveis inflacionários. Há seis observáveis inflacionários: A_s , amplitude escalar; r , razão tensor-escalar; n_s , índice espectral escalar; α_s , *running of scalar perturbations*; α_t , *running of tensor perturbations*;

Nos modelos de inflação de *slow-roll de single-fields*, os observáveis abaixo devem ser expressos por [15]

$$n_s = 1 - \epsilon_V + 2\eta_V; \quad r = -8n_t; \quad n_t = -2\epsilon_V; \quad (3.48)$$

Deste modo, podemos comparar o modelo teórico de inflação com os dados observacionais para analisar sua credibilidade.

De acordo com Planck 2015, $n_s = 0.968 \pm 0.006$ e o limite superior para a razão tensor-escalar é $r_{0.002} < 0.11(95\%CL)^2$, este limite também é consistente com o vínculo de polarização B-mode, $r < 0.12(95\%CL)$, obtido da análise conjunta do BICEP2/Keck Array e dados do Planck.

3.4.2 Modelos de *Large-field*

Modelos de *large-field* são tipicamente caracterizados por um potencial monomial. Um exemplo deste tipo de modelo é a inflação caótica introduzida por Linde em 1983 [35]

$$V = \lambda_n \frac{\phi^n}{n}, \quad (3.49)$$

aqui λ_n e n são constantes positivas.

Neste caso, os parâmetros de *slow-roll* são dados por

$$\epsilon_V = n^2 \frac{M_{Pl}^2}{2\phi^2}; \quad e \quad \eta_V = n(n-1) \frac{M_{Pl}^2}{\phi^2}; \quad (3.50)$$

De (3.47), temos que

$$\phi^2(N) \approx 2n \left(N + \frac{n}{4} \right) M_{Pl}^2, \quad (3.51)$$

aqui a partir da condição $\epsilon(\phi_f) = 1$, encontramos que $\phi_f = \frac{nM_{Pl}}{\sqrt{2}}$. Os índices espectrais, em termos do número de *e-folds*, são

$$n_s = 1 - \frac{2(n+2)}{4N+n}; \quad e \quad r = \frac{8n}{n+2}(1-n_s); \quad (3.52)$$

Quando consideramos o potencial quadrático ($n = 2$) e para $N = 60$, obtemos $n_s = 0.967$ e $r = 0.132$.

3.4.3 Modelos de *Small-field*

Os potenciais que dão origem à evoluções do tipo *small-field* podem surgir de um mecanismo de quebra espontânea de simetria, no qual o campo rola de um equilíbrio instável para um vácuo deslocado. Um exemplo desse tipo de potencial é o modelo de inflação natural em que o bóson pseudo-Nambu-Goldstone (PNGB) faz o papel do *inflaton* [36], [37]. O potencial do PNGB é expresso por

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 + \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right], \quad (3.53)$$

²Geralmente r é definido com $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ mas aqui, em comparação com outros estudos, os limites de $r_{0.002}$ com $k_* = 0.002 \text{Mpc}^{-1}$ também são incluídos.

aqui, Λ e f caracterizam altura e largura do potencial, respectivamente.

O número de *e-folds* pode ser estimado como

$$N \approx \delta_f^{-1} \ln \frac{2\epsilon_V + \delta_f}{(2 + \delta_f)\epsilon_V}, \quad (3.54)$$

sendo $\delta f = \frac{M_{Pl}^2}{f}$. Se a relação acima for invertida, obtemos

$$\epsilon_V = \frac{\delta_f}{e^{N\delta_f}(2 + \delta_f) - 2}. \quad (3.55)$$

O parâmetro η_V está relacionado a ϵ_V da seguinte forma

$$\eta_V = \epsilon_V - \frac{\delta_f}{2}. \quad (3.56)$$

Definindo os valores de N e f , podemos calcular os índices espectrais com o auxílio de (3.55)

$$n_s = 1 - 4\epsilon_V - \delta_f; \quad e \quad r = 12\epsilon_V; \quad (3.57)$$

Podemos perceber que apenas a escala f influencia nos parâmetros de *slow-roll*. Da análise conjunta dos dados *Planck* + *WP* + *BAO* + *high-l*, [15], f é limitado à

$$5.1M_{Pl} < f < 7.9M_{Pl} \quad (68\%CL). \quad (3.58)$$

Capítulo 4

Teoria $f(R)$

Poucos anos após a apresentação da teoria da Relatividade Geral, cientistas começaram a se perguntar se a teoria de Einstein seria a única teoria fundamental capaz de explicar a interação gravitacional com sucesso. Em 1919 Weyl [38] e em 1923 Eddington¹ [39] já haviam considerado modificações na teoria com a inclusão de invariantes com ordens superiores na ação da teoria.

Na Cosmologia, a presença da singularidade inicial junto com os problemas da planura e horizonte indicam que o Modelo Padrão baseado na Relatividade Geral é inapropriado para descrever o universo em regimes extremos. Além disso, a Relatividade Geral é uma teoria clássica que não funciona como teoria fundamental em um contexto quântico. Por estas razões e especialmente pela ausência de uma Teoria Quântica da Gravitação definitiva, várias teorias gravitacionais alternativas foram propostas [40].

O objetivo deste capítulo é fazer a descrição de uma das teorias alternativas à Relatividade Geral, a teoria $f(R)$. A teoria $f(R)$ substitui o escalar R da ação de Einstein-Hilbert por uma função mais geral que depende também do escalar de curvatura.

Há três casos diferentes de teorias $f(R)$ e os três levam à equações de campo distintas [41]: Formalismo Métrico, Formalismo de Palatini e Formalismo Métrico-Afim.

- Formalismo Métrico: A ação total neste formalismo é dada por

$$S_{Met} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M[g_{\mu\nu}, \Psi]. \quad (4.1)$$

Fazemos a variação da ação com respeito a $g_{\mu\nu}$ e o campo Ψ representa os campos de matéria;

- Formalismo de Palatini: Este é o caso em que a métrica e a conexão são independentes

$$S_{Pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M[g_{\mu\nu}, \Psi]. \quad (4.2)$$

¹O mesmo que havia fornecido, há três anos antes, a primeira verificação experimental da Relatividade Geral com a medida do encurvamento da luz durante o eclipse solar.

Aqui, explicitamos que $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$, em que $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ é construído com a conexão independente. A ação associada aos campos de matéria é independente da conexão.

- Formalismo Métrico-Afim: Este é parecido com o Formalismo de Palatini mas neste caso, a ação de matéria depende da conexão

$$S_{MA} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_M[g_{\mu\nu}, \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}, \Psi]. \quad (4.3)$$

Claramente o Formalismo Métrico-Afim é o mais geral dos três podendo se reduzir ao Formalismo de Palatini ou ao Formalismo Métrico se forem feitas algumas imposições. Neste trabalho, daremos ênfase ao formalismo métrico.

4.1 Ação e Equações de Campo

Encontraremos agora as equações de campo para a Teoria $f(R)$ utilizando a formulação métrica.

A ação para esta teoria é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_m d^4x, \quad (4.4)$$

sendo R o escalar de Ricci, \mathcal{L}_m a densidade de lagrangiana da matéria e $\sqrt{-g}d^4x$ o elemento invariante de volume.

Fazendo agora a variação de (4.4) com respeito à métrica, teremos

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \delta \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + \delta \int \mathcal{L}_m d^4x \quad (4.5)$$

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int \delta(f(R) \sqrt{-g}) d^4x + \int \delta(\mathcal{L}_m) d^4x. \quad (4.6)$$

Analisando o termo gravitacional de (4.6)

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int (f(R) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} \delta f(R)) d^4x \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \int (f(R) \delta \sqrt{-g} + \sqrt{-g} f'(R) \delta R) d^4x. \quad (4.8)$$

Considerando que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad \delta R = \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (4.9)$$

a variação da ação (4.8) se torna

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int \left[-\frac{1}{2} f(R) \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g} f'(R) (R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right] d^4x, \quad (4.10)$$

sendo $f'(R)$ a derivada da função com respeito a R .

O termo $\delta R_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\nabla_\rho\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho), \quad (4.11)$$

rearranjando os índices, obtemos

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu(g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho), \quad \text{ou,} \quad g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu K^\nu \rightarrow \nabla_\nu K^\nu = \nabla_\alpha K^\alpha, \quad (4.12)$$

sendo

$$\nabla_\alpha K^\alpha = \nabla_\nu(g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\nu - g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho). \quad (4.13)$$

Agora substituindo (4.12) em (4.10)

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int \left[-\frac{1}{2}f(R) \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}f'(R)\nabla_\alpha K^\alpha \right] d^4x. \quad (4.14)$$

Aplicando a regra de Leibniz, podemos escrever o último termo de (4.14) como

$$\sqrt{-g}f'(R)\nabla_\alpha K^\alpha = \nabla_\alpha(\sqrt{-g}f'(R)K^\alpha) - \sqrt{-g}K^\alpha(\nabla_\alpha f'(R)). \quad (4.15)$$

Quando integrado, o primeiro termo do lado direito de (4.15) pode ser transformado em uma integral de superfície utilizando o Teorema de Gauss e descartado já que $\delta\Gamma$ se anula na superfície. Utilizando esse resultado em (4.14), teremos

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int \left[-\frac{1}{2}f(R) \sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}f'(R)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \sqrt{-g}K^\alpha(\nabla_\alpha f'(R)) \right] d^4x. \quad (4.16)$$

Mas por (4.13)

$$\sqrt{-g}K^\alpha(\nabla_\alpha f'(R)) = \sqrt{-g}[g^{\mu\rho}\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho]\nabla_\alpha f'(R). \quad (4.17)$$

sendo $\delta\Gamma$

$$\delta\Gamma_{\mu\rho}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\lambda}(\nabla_\mu\delta g_{\lambda\rho} + \nabla_\rho\delta g_{\mu\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\mu\rho}) \quad (4.18)$$

$$\delta\Gamma_{\rho\mu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\nabla_\rho\delta g_{\mu\lambda} + \nabla_\mu\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_\lambda\delta g_{\rho\mu}), \quad (4.19)$$

e utilizando também que

$$g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda} = -\delta g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

a variação da ação gravitacional (4.16) se torna

$$\delta S_g = \frac{1}{2\kappa} \int \left[-\frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + f'(R)R_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla^\alpha f'(R) \right] \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (4.20)$$

Como $\delta S = 0$, a variação da ação total (4.4) em relação à métrica nos fornece

$$R_{\mu\nu}f'(R) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\square f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.21)$$

sendo o tensor momento-energia definido por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad e \quad S_m = \int \mathcal{L}_m d^4x. \quad (4.22)$$

Claramente, as equações (4.21) são equações diferenciais parciais de quarta ordem na métrica, uma vez que o escalar de Ricci R já inclui segundas derivadas de $g_{\mu\nu}$. Em uma ação que é linear em R , os termos de quarta ordem - os dois últimos do lado esquerdo da equação de campo - desaparecem e a teoria se reduz à Relatividade Geral.

O traço de (4.21),

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = \kappa T, \quad (4.23)$$

relaciona R e T de maneira diferente da Relatividade Geral, na qual há uma relação algébrica entre os dois entes, $R = -\kappa T$. Ou seja, nesta teoria se $T = 0$ não podemos inferir que R seja igual a zero ou mesmo constante já que a relação entre R e T é uma equação diferencial.²

É importante notar que podemos colocar as equações de campo na forma das equações de Einstein com um tensor energia-momento efetivo³ composto pelos termos de curvatura. Especificamente, podemos escrever (4.21) como

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}f'(R) &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'(R)R + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f'(R)R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + \\ &- \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu}\square f'(R) = \kappa T_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$f'(R)G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - f'(R)R}{2} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R), \quad (4.25)$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein. Agora definindo

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{T_{\mu\nu}}{f'(R)} \quad e \quad T_{\mu\nu}^{(eff)} = \frac{1}{\kappa f'(R)} \left[g_{\mu\nu} \frac{f(R) - f'(R)R}{2} + \nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu}\square f'(R) \right], \quad (4.26)$$

temos que

$$G_{\mu\nu} = \kappa [T_{\mu\nu}^{(m)} + T_{\mu\nu}^{(eff)}]. \quad (4.27)$$

Logo $T_{\mu\nu}^{(eff)}$ pode ser visto como um fluido efetivo.

²É importante ressaltar que há diferenças entre o traço das equações dinâmicas pelo formalismo Métrico e de Palatini, mas isto foge ao escopo deste trabalho, para maiores detalhes ver [42].

³Ressaltamos que esta forma de manusear a equação de campo de modo que os termos extras de curvatura podem ser vistos como um fluido efetivo não é única, outra forma é apresentada, por exemplo, em [43].

4.2 Equivalência com a teoria escalar-tensorial

Da mesma forma que podemos fazer redefinições de variáveis em mecânica clássica, a fim de trazer uma equação que descreve um sistema para uma forma mais atraente ou fáceis de manusear, como mudanças dos sistemas de coordenadas, podemos também realizar redefinições de campo em uma teoria de campo, com o objetivo de reescrever a ação ou as equações de campo. Duas teorias são consideradas equivalentes se, dinamicamente, sob uma redefinição adequada dos campos gravitacional e de matéria, podemos fazer suas equações de campo coincidirem.

A teoria $f(R)$ no Formalismo Métrico pode ser vista como uma representação da teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke, $\omega_{BD} = 0$, com um potencial efetivo.

Considerando novamente a ação para uma $f(R)$ no formalismo métrico

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (4.28)$$

podemos introduzir um novo campo escalar χ e escrever a ação dinamicamente equivalente

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f'(\chi)(R - \chi)] + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (4.29)$$

aqui ao introduzirmos o campo escalar efetivo χ , convertemos o sistema a duas equações de segunda ordem, ao invés de uma equação de quarta ordem.

Variando a ação com respeito a χ , obtemos

$$f''(\chi)(R - \chi) = 0. \quad (4.30)$$

Se $f''(\chi) \neq 0$, necessariamente $R = \chi$ e recuperamos a ação (4.28). Definindo o campo χ por $f'(\chi) \equiv \phi$ e escolhendo

$$V(\phi) = \chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi)), \quad (4.31)$$

a ação (4.29) é expressa por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\chi(\phi)\phi - V(\phi)] + \int d^4x \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (4.32)$$

A ação da teoria de Brans-Dicke com um potencial $V(\phi)$ é

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + S^m, \quad (4.33)$$

sendo ω_{BD} o parâmetro de Brans-Dicke. As equações (4.32) e (4.33) são equivalentes quando $\omega_{BD} = 0$.

As equações de campo correspondentes à ação (4.32) são

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2\phi} g_{\mu\nu} V(\phi) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (4.34)$$

$$R = V'(\phi). \quad (4.35)$$

As equações acima poderiam ser diretamente derivadas de (4.21) se tivéssemos feito a mesma redefinição de campos nesta ação.

4.2.1 Transformação Conforme

Para analisar a ação (4.33) em termos do referencial de Einstein é necessário fazer uma transformação conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

sendo Ω^2 o fator conforme e o til representa as quantidades no referencial de Einstein (em oposição as quantidades sem til que estão no referencial de Jordan). As teorias escalar-tensoriais são invariantes sob transformações conformes.

Os escalares de Ricci, R e \tilde{R} , estão relacionados por

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega), \quad (4.37)$$

sendo

$$\omega = \ln \Omega, \quad \partial_\mu \omega = \frac{\partial \omega}{\partial x^\mu} \quad \text{e} \quad \tilde{\square}\omega = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \omega). \quad (4.38)$$

Aplicando (4.37) e a relação $\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^{-4} \sqrt{-g}$ em (4.33)

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa} \phi \Omega^{-2} (\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega) - \Omega^{-4} V(\phi) \right] + \\ &+ \int d^4x \mathcal{L}_m(\Omega^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu}, \psi). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esta é ação no referencial de Einstein.

Porém, temos que $g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. Para este caso $\Omega^2 = f'(R) \equiv \phi$, então a redefinição $f'(R) = \phi \rightarrow \tilde{\phi}$ com

$$\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \phi, \quad (4.40)$$

e de (4.38) temos que $\omega = \frac{\kappa}{\sqrt{6\kappa}} \tilde{\phi}$.

Logo (4.39) se torna

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa} \tilde{R} + \frac{1}{2\kappa} \frac{6\kappa}{6\sqrt{6\kappa}} \tilde{\square}\omega - \frac{1}{2\kappa} \frac{6\kappa^2}{6\kappa} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] + \int d^4x \mathcal{L}_m(\Omega^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu}, \psi), \quad (4.41)$$

sendo $U(\tilde{\phi}) = \frac{Rf'(\tilde{\phi}) - f(\tilde{\phi})}{2\kappa(f'(\tilde{\phi}))^2}$.

Analisando o segundo termo de (4.39), vemos que é identicamente nulo devido ao Teorema de Gauss.

Então, a ação no referencial de Einstein é

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial_\nu \tilde{\phi} - U(\tilde{\phi}) \right] + S_M(e^{-\sqrt{2\kappa/3}\tilde{\phi}} \tilde{g}^{\mu\nu}, \psi). \quad (4.42)$$

Aqui enfatizamos que as ações (4.4), (4.33) com $\omega_{BD} = 0$ e (4.42) são diferentes representações da mesma teoria [42]. Entretanto, há questões em aberto a respeito de "qual referencial conforme é o verdadeiro", isto é, se devemos considerar como físico o referencial ligado à $g_{\mu\nu}$ da moldura de Jordan ou $\tilde{g}_{\mu\nu}$ da moldura de Einstein. No trabalho de Dicke [44], o qual introduziu a transformação conforme para a teoria de Brans-Dicke, ele afirma que os dois referenciais são equivalentes no contexto clássico. Na cosmologia moderna e em teorias gravitacionais alternativas à teoria de Einstein, os campos quânticos desempenham um papel significativo então a equivalência de referenciais conformes não é bem estabelecida. Esta discussão ainda tem sido uma questão de debate, como é citado em [45].

4.3 Inflação em teorias $f(R)$

O primeiro modelo inflacionário feito por Starobinsky é relacionado a anomalias que aparecem na Gravitação Quântica [46]. Diferente dos modelos de inflação antiga, este cenário não sofre do problema de "saída graciosa" - o período de expansão acelerada é seguido pela época de radiação e depois da era de matéria [9], [47]. Indo além, este modelo prediz espectros quase invariantes de escala de ondas gravitacionais e anisotropias da temperatura consistentes com a CMB [8], [48].

A densidade de lagrangiana para o modelo de Starobinsky é dada por

$$f(R) = R + \alpha R^2; \quad \alpha = \frac{1}{6M^2}, \quad (4.43)$$

sendo R o escalar de Ricci e M é uma escala de massa da ordem de 10^{13} GeV.

Como visto anteriormente, o mapeamento de uma teoria $f(R)$ em uma teoria escalar-tensorial nos leva a

$$f(R) = \phi, \text{ e também } V(\phi) = \frac{1}{2\kappa} [Rf'(R) - f(R)]. \quad (4.44)$$

Então para o caso de Starobinsky

$$V = \frac{1}{2\kappa}[R(1 + 2\alpha R) - R - \alpha R^2] = \frac{1}{2\kappa}[\alpha R^2] \quad (4.45)$$

Mas percebemos que

$$\frac{1}{4\alpha}(1 - \phi)^2 = \alpha R^2 \quad (4.46)$$

Então podemos reescrever (4.45) como

$$V(\phi) = \frac{1}{2\kappa} \frac{1}{4\alpha} (1 - \phi)^2. \quad (4.47)$$

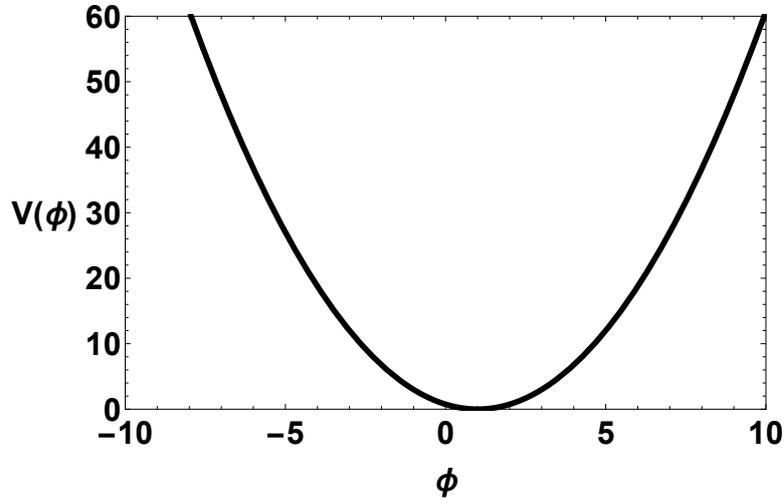


Figura 4.1. Potencial de Starobinsky \times campo escalar no referencial de Jordan.

Fazendo a transformação conforme,

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{V(\phi)}{2\kappa f'(R)^2}, \quad \tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \phi \rightarrow \phi = e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\phi}}. \quad (4.48)$$

Para a inflação de Starobinsky, $\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \ln \left(1 + \frac{R}{3M^2}\right)$.

O potencial no *frame* de Einstein é dado por

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{3M^2}{4\kappa} (1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\phi}})^2. \quad (4.49)$$

Expressando o potencial acima em termos de M_{Pl}

$$U(\tilde{\phi}) = \frac{3M^2 M_{Pl}^2}{4} (1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}} \tilde{\phi}/M_{Pl}})^2. \quad (4.50)$$

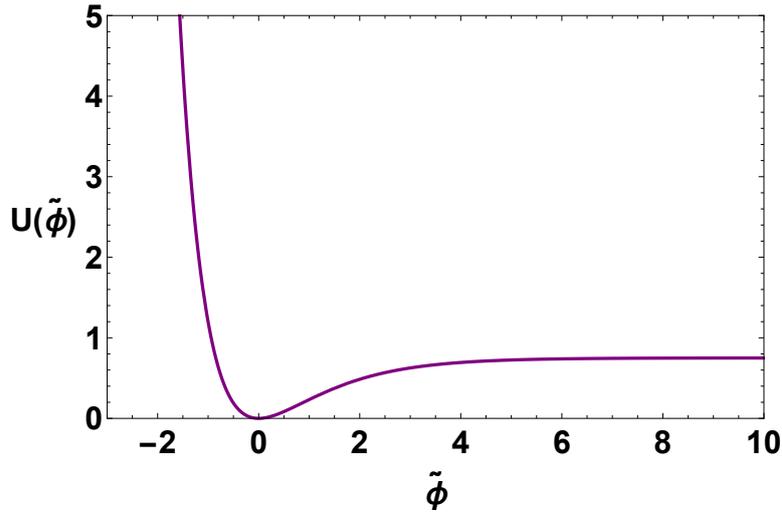


Figura 4.2. Potencial de Starobinsky \times campo escalar no referencial de Einstein.

No limite em que $\tilde{\phi} \rightarrow \infty$, o potencial tende a um valor constante $U(\tilde{\phi}) \rightarrow \frac{3M^2 M_{Pl}^2}{4}$, então a inflação ocorre quando $\tilde{\phi} \gg M_{Pl}$, o que confirma que a inflação de Starobinsky pode ser vista como um modelo de *large-field*. Além disso, usando a condição de que $\tilde{\epsilon} \ll 1$ para que haja inflação, podemos extrair a relação entre o campo escalar e a massa de Planck para este caso

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_V &= \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \\ &= \frac{4}{3} \frac{\exp(-2\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl})}{[1 - \exp(-\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl})]^2} \ll 1; \end{aligned} \quad (4.51)$$

Então, temos que

$$\begin{aligned} [1 - \exp(-\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl})]^2 \exp(2\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl}) &\gg 1 \\ \exp(\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl}) - 1 &\gg 1 \\ \exp(\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl}) &\gg 2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Esta condição é satisfeita quando $\tilde{\phi} \gg M_{Pl}$.

Os parâmetros de *slow-roll* neste regime podem ser estimados

$$\tilde{\epsilon}_V \simeq \frac{3}{4N^2}, \quad \tilde{\eta}_V \simeq -\frac{1}{N}. \quad (4.53)$$

Sendo $N \simeq \frac{3}{4} e^{\sqrt{2/3}\tilde{\phi}/M_{Pl}}$. Em [46] é provado que os espectros de potência inflacionários de perturbações escalares e tensoriais são equivalentes nos referenciais de Jordan e Einstein em *slow-roll*.

Os observáveis cosmológicos podem ser calculados [49]

$$n_s = 1 - \frac{2}{N}, \quad r = \frac{12}{N^2}. \quad (4.54)$$

A figura abaixo compara diferentes modelos inflacionários com os dados do satélite Planck e outros conjuntos de dados.

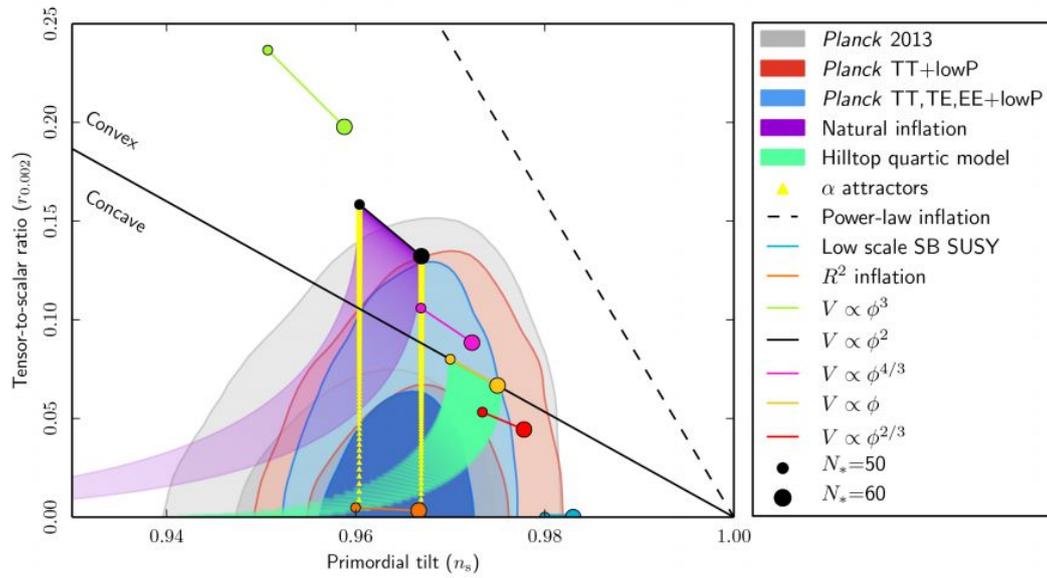


Figura 4.3. Regiões de curvas de nível conjuntas marginalizadas em 68% e 95% para n_s e $r_{0.002}$ do Planck combinado com outros conjuntos de dados, comparado com as previsões teóricas de alguns modelos inflacionários. Retirado de [3].

Quando $N = 60$, nós temos $n_s = 0.967$ e $r = 0.0033$. O modelo de Starobinsky está bem ajustado em 68% e 95% de confiança de acordo com os dados observacionais [3].

Capítulo 5

Evolução Cosmológica

Na Cosmologia, a identificação do nosso universo com o espaço-tempo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker é baseada no alto grau de isotropia medido na CMB. Esta identificação pode ser vista como um resultado formal do Teorema de Ehlers-Geren-Sachs [50]. Este teorema afirma que se, num dado universo, todos os observadores em queda livre medirem um campo de radiação isotrópico (assumindo que a isotropia se mantém em cada ponto do espaço), então o espaço-tempo é espacialmente homogêneo e isotrópico, ou seja, um espaço-tempo de FLRW. Indo além, o teorema pode ser estendido para o caso de uma teoria $f(R)$ arbitrária no Formalismo Métrico [51].

5.1 $f(R)$ no universo FLRW

Considerando a discussão acima, torna-se válido utilizar a métrica de FLRW. Como em muitos trabalhos encontrados na literatura, aqui vamos focar no caso em que $k = 0$, esta escolha é feita para simplificar as equações. Mesmo que os dados indiquem um valor para Ω_k muito próximo de zero [26], devemos ter em mente que isto não revela o valor de k explicitamente já que

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (5.1)$$

ou seja, o valor de Ω_k é dependente do valor de $a(t)$. Uma "quantidade significativa de expansão" pode conduzir Ω_k a um valor muito próximo de zero. O sucesso do paradigma inflacionário é exatamente o que explica o problema da planura - como o universo tornou-se tão plano - de uma forma dinâmica, permitindo-nos evitar o ajuste fino de Ω_k .

De qualquer forma, a escolha de $k = 0$ pode ser considerada como hipótese a princípio. Neste caso, a métrica de FLRW, em coordenadas retangulares se torna

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (5.2)$$

e encontramos que os únicos termos de conexão não-nulos são

$$\Gamma_{ij}^0 = \delta_{ij}a\dot{a} \quad \text{e} \quad \Gamma_{0j}^i = \Gamma_{0j}^i = \delta_{ij}\frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.3)$$

o que nos permite calcular as componentes do tensor de Ricci e o escalar de curvatura

$$R_{00} = -\frac{\ddot{a}}{a}; \quad (5.4)$$

$$R_{ij} = \delta_{ij}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2); \quad (5.5)$$

$$R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right); \quad (5.6)$$

Pela definição

$$\square f'(R) = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta f'(R) - g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda\partial_\lambda f'(R). \quad (5.7)$$

Como $f = f(R(t)) \rightarrow \partial_i f'(R) = 0$ então

$$\square f'(R) = g^{00}\partial_0\partial_0 f'(R) - g^{ij}\Gamma_{ij}^0\partial_0 f'(R), \quad (5.8)$$

$$= -\partial_0^2 f'(R) - [g^{11}\Gamma_{11}^0 + g^{22}\Gamma_{22}^0 + g^{33}\Gamma_{33}^0]\partial_0 f'(R), \quad (5.9)$$

$$= -\ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R), \quad (5.10)$$

sendo $H = \frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de Hubble.

E também

$$\nabla_\mu\nabla_\nu f'(R) = \partial_\mu\partial_\nu f'(R) - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\partial_\alpha f'(R). \quad (5.11)$$

O conteúdo material que utilizaremos será do tipo fluido perfeito

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p, \quad (5.12)$$

sendo que u^μ é a quadri-velocidade para um observador comóvel ao fluido e ρ e p são a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente.

Para as componentes temporais ($\mu, \nu = 0$) de (4.21), temos

$$\begin{aligned} R_{00}f'(R) &- \frac{1}{2}g_{00}f(R) - \partial_0\partial_0 f'(R) + \Gamma_{00}^\lambda\partial_\lambda f'(R) + \\ &- g_{00}\partial_0\partial_0 f'(R) - g_{00}3H\dot{f}'(R) = \kappa\rho, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$-3\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + \frac{1}{2}f(R) + 3H\dot{f}'(R) = \kappa\rho, \quad (5.14)$$

mas $\frac{df'}{dt} = \frac{dR}{dt} \frac{df'}{dR} = \dot{R}f''$, então

$$-3\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + \frac{1}{2}f(R) + 3H\dot{R}f''(R) = \kappa\rho, \quad (5.15)$$

$$-3\left(\frac{R}{6} - H^2\right)f'(R) + \frac{1}{2}f(R) + 3H\dot{R}f''(R) = \kappa\rho, \quad (5.16)$$

$$H^2 = \frac{\kappa}{3f'}\left[\rho + \frac{Rf'(R) + f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R)\right]. \quad (5.17)$$

Para as componentes espaciais ($\mu, \nu = i, j$)

$$f'(R)R_{ij} - \frac{1}{2}f(R)g_{ij} + \Gamma_{ij}^0\partial_0f'(R) + g_{ij}(-\ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R)) = \kappa T_{ij}, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} f'(R)\delta_{ij}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) - \frac{1}{2}f(R)\delta_{ij} + a\dot{a}\delta_{ij}\dot{f}'(R) + \\ + a^2\delta_{ij}(-\ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R)) = \kappa a^2\delta_{ij}p, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}f'(R) - \frac{1}{2}f(R) + \dot{a}f'(R) - \ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R) = \kappa p, \quad (5.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) + 2H^2f'(R) - \frac{1}{2}f(R) + H\dot{f}'(R) - \ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R) = \kappa p. \quad (5.21)$$

Fazendo

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \rightarrow H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} - \dot{H}, \quad (5.22)$$

a equação (5.21) pode ser escrita como

$$3\frac{\ddot{a}}{a}f'(R) - 2\dot{H}f'(R) - \frac{1}{2}f(R) + H\dot{f}'(R) - \ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R) = \kappa p, \quad (5.23)$$

$$3\left(\frac{R}{6} - H^2\right)f'(R) - 2\dot{H}f'(R) - \frac{1}{2}f(R) + H\dot{f}'(R) - \ddot{f}'(R) - 3H\dot{f}'(R) = \kappa p, \quad (5.24)$$

agora utilizando de novo $\dot{f}' = \dot{R}f''$ e sua segunda derivada $\ddot{f}' = \ddot{R}f'' + \dot{R}^2f'''$, encontramos

$$3H^2 + 2\dot{H} = -\frac{\kappa}{f'(R)}\left[p + \frac{f(R) - Rf'(f)}{2} + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2f'''(R)\right]. \quad (5.25)$$

Nós assumimos que $f'(R) > 0$ para obter um acoplamento gravitacional efetivo positivo e $f''(R) > 0$ em ordem de evitar a instabilidade de Dolgov-Kawasaki [52], discutida em [42].

Uma significativa parte da motivação para a gravitação com $f(R)$ é que ela pode levar a uma expansão acelerada sem precisar de um campo escalar como o *inflaton* (ou energia escura).

Definindo

$$\rho_{eff} = \frac{Rf'(R) - f(R)}{2f'(R)} - \frac{3H\dot{R}f''(R)}{f'(R)}, \quad (5.26)$$

$$p_{eff} = \frac{\dot{R}^2 f''' + 2H\dot{R}f'' + \ddot{R}f'' + \frac{1}{2}(f(R) - Rf'(R))}{f'(R)}, \quad (5.27)$$

para o caso de vácuo, temos então

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho_{eff} \quad \text{e} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho_{eff} + 3p_{eff}). \quad (5.28)$$

Então no vácuo, a correção de curvatura pode ser vista como um fluido efetivo.

O parâmetro da equação de estado efetiva, ω_{eff} , é expresso por

$$\omega_{eff} = \frac{p_{eff}}{\rho_{eff}} = \frac{\dot{R}^2 f'''(R) + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \frac{1}{2}[f(R) - Rf'(R)]}{\frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R)}. \quad (5.29)$$

Uma vez que o denominador do lado direito de (5.29) é sempre positivo, o sinal de ω_{eff} é determinado pelo numerador. Para uma $f(R)$ mimetizar a equação de estado de de Sitter, $\omega_{eff} = -1$, ela tem que satisfazer a seguinte relação

$$\frac{f'''(R)}{f''(R)} = \frac{\dot{R}H - \ddot{R}}{\dot{R}^2}. \quad (5.30)$$

Podemos calcular ω_{eff} em função de n , se assumimos o comportamento genérico de lei de potência para o fator de escala $a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^\alpha$ [53], assim

$$\omega_{eff} = -\frac{6n^2 - 7n - 1}{6n^2 - 9n + 3}, \quad (5.31)$$

para $n \neq 1$, α dado em termos de n é expresso por

$$\alpha = \frac{-2n^2 + 3n - 1}{n - 2}. \quad (5.32)$$

Aqui, a escolha de n leva ao valor que queremos de ω_{eff} . Para o caso do modelo de Starobinsky, $n = 2$, temos $\omega_{eff} = -1$ e $\alpha \rightarrow \infty$, como esperado.

5.2 Evolução do caso de $f(R) = \alpha R^2$

Para o caso de uma $f(R)$ qualquer no vácuo, (5.17) e (5.25) se tornam, respectivamente

$$3H^2 = \frac{1}{f(R)} \left[\frac{Rf'(R) - f(R)}{2} - 3H\dot{R}f''(R) \right], \quad (5.33)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{1}{f(R)} \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} + 2H\dot{R}f''(R) + \ddot{R}f''(R) + \dot{R}^2 f'''(R) \right]. \quad (5.34)$$

Para construir o sistema dinâmico,¹ utilizaremos como variáveis dinâmicas R e H , então é interessante notar que quando fazemos $\dot{R} = 0$ e $\dot{H} = 0$, com a finalidade de determinar os pontos críticos do sistema, encontramos a mesma relação para as duas equações acima

$$3H^2 = \frac{1}{f(R)} \left[\frac{Rf'(R) - f(R)}{2} \right], \quad (5.35)$$

isto sugere que as duas equações, obtidas através das equações de Friedmann, na verdade não são independentes, a segunda equação pode ser derivada da primeira.

De fato, já temos uma relação entre \dot{H} e R e H vinda do escalar de Ricci calculado anteriormente e dado por (5.6), R pode ser escrito como

$$R = 6(\dot{H} + 2H^2), \quad \text{portanto,} \quad \dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2. \quad (5.36)$$

Logo, da primeira equação de Friedmann para uma $f(R)$ qualquer com $T_{\mu\nu} = 0$ e do Escalar de Curvatura, encontramos o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{6Hf''(R)} [Rf'(R) - f(R) - 6f'(R)H^2], \\ \dot{H} &= \frac{R}{6} - 2H^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Os pontos críticos do sistema são obtidos quando $\dot{R} = 0$ e $\dot{H} = 0$ e são dados por

$$\begin{aligned} Rf'(R) - f(R) - 6f'(R)H^2 &= 0, \\ R &= 12H^2. \end{aligned} \quad (5.38)$$

O que gera

$$\frac{f'(R)}{f(R)} = \frac{2}{R}, \quad (5.39)$$

e fornece como solução

$$f(R) = \alpha R^2. \quad (5.40)$$

Aqui α é uma constante de integração. A condição para $\dot{H} = 0$, que corresponde a uma fase de de Sitter estável ou instável, naturalmente escolhe a correção R^2 na ação de Einstein-Hilbert. Se $f(R) \neq \alpha R^2$ não existe pontos críticos.

Escolhendo $f(R) = \alpha R^2$ no conjunto de equações (5.37), e considerando $H > 0$ como região de interesse já que $H < 0$ indicaria um universo em contração, encontramos como

¹Uma descrição completa da construção de sistemas dinâmicos para $f(R)$ com radiação e matéria é feita na referência [54]. Para mais informações sobre a construção de sistemas dinâmicos na Cosmologia, ver [55].

sistema autônomo

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{R}{12\alpha H}[\alpha R - 12\alpha H^2], \\ \dot{H} &= \frac{R}{6} - 2H^2.\end{aligned}\quad (5.41)$$

Com o objetivo de tornar o sistema acima adimensional, reescrevemos as variáveis como $R \rightarrow \alpha R$, $H \rightarrow \sqrt{\alpha}H$ e $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$

$$\begin{aligned}\alpha^{3/2}\dot{R} &= \frac{1}{12H\sqrt{\alpha}}[\alpha^2 R^2 - 6\alpha H^2(1 + 2\alpha R)], \\ \alpha\dot{H} &= \frac{\alpha R}{6} - 2\alpha H^2.\end{aligned}\quad (5.42)$$

A Fig.(5.1) representa o diagrama de fase do caso $f(R) = \alpha R^2$.

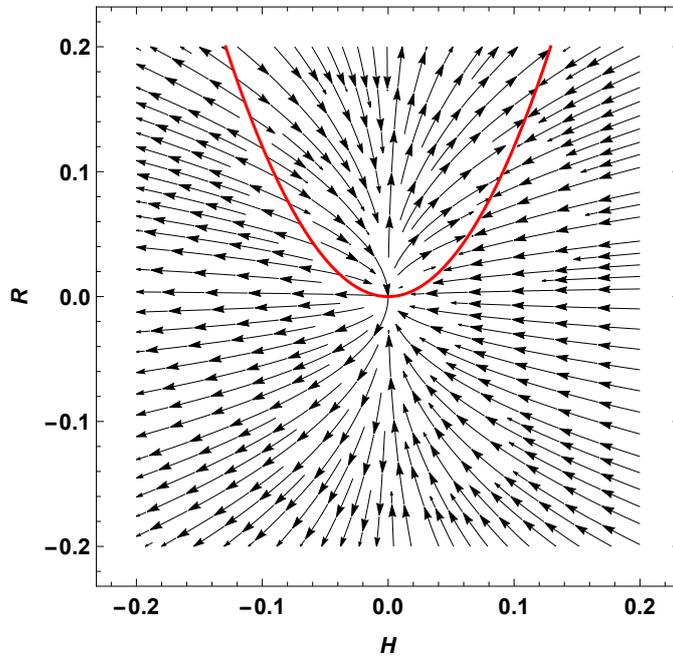


Figura 5.1. Diagrama de fase para o modelo $f(R) = \alpha R^2$ com H e R definidos de maneira adimensional. A curva representa a parábola $R = 12H^2$ de pontos estáveis.

Os pontos críticos estão na parábola $R = 12H^2$. Para calculá-los, linearizamos o sistema (5.42) em torno do ponto crítico $R_0 = 12H_0^2$, ou seja, $R = 12H_0^2 + \epsilon$ e $H = H_0 + \eta$. Então obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= H_0\epsilon - 24H_0^2\eta, \\ \dot{\eta} &= \frac{\epsilon}{6} - 4H_0\eta.\end{aligned}\quad (5.43)$$

A matriz jacobiana para o sistema acima é dada por

$$J = \begin{pmatrix} H_0 & -24H_0^2 \\ \frac{1}{6} & -4H_0 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

que quando diagonalizada nos fornece como autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -3H_0$ (aqui consideramos que $H_0 > 0$). Isto caracteriza os pontos fixos como atratores.

5.3 Evolução do caso de $f(R) = R + \alpha R^2$

Para o modelo proposto por Starobinsky, o sistema dinâmico descrito por (5.37) se transforma em

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{12\alpha H} [\alpha R^2 - 6H^2(1 + 2\alpha R)], \\ \dot{H} &= \frac{R}{6} - 2H^2, \end{aligned} \quad (5.45)$$

aqui também podemos reescrever as variáveis como $R \rightarrow \alpha R$, $H \rightarrow \sqrt{\alpha}H$ e $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$ e obter

$$\begin{aligned} \alpha^{3/2}\dot{R} &= \frac{1}{12\sqrt{\alpha}H} [\alpha^2 R^2 - 6\alpha H^2(1 + 2\alpha R)], \\ \alpha\dot{H} &= \frac{\alpha R}{6} - 2\alpha H^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Os pontos críticos na região finita para o sistema autônomo acima são encontrados quando fazemos $\dot{H} = 0$, dessa maneira obtemos a relação $R = 12H^2$ e temos então

$$\begin{aligned} \dot{R} &= -\frac{H}{2\alpha}, \\ \dot{H} &= 0, \end{aligned} \quad (5.47)$$

Então concluímos que $H = R = 0$, ou seja, o espaço de Minkowski é um ponto crítico. O comportamento do modelo de Starobinsky, para a região finita, está expresso na Fig.(5.2).

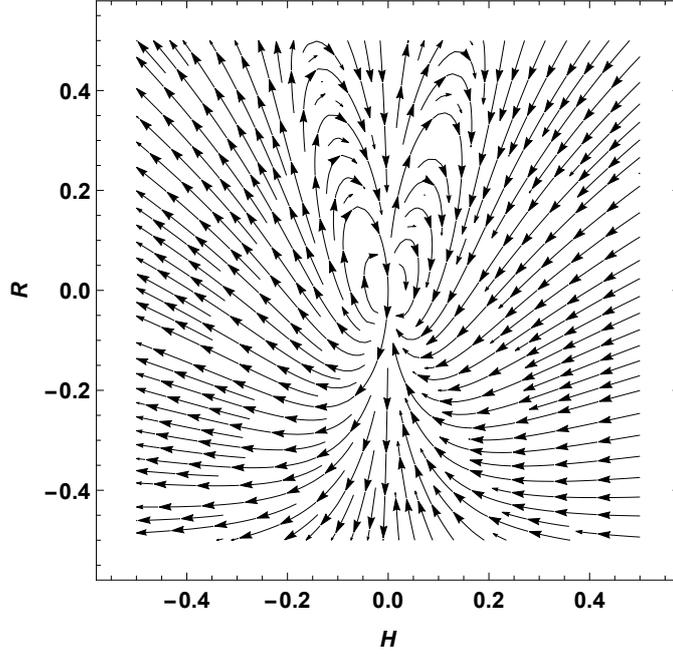


Figura 5.2. Diagrama de fase para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$ com H e R definidos de maneira adimensional.

Para investigar os pontos críticos no infinito, utilizamos a esfera de Poincaré [56] $u^2 + v^2 + z^2 = 1$, a qual é tangente ao plano (H, R) em $z = 1$. Então, adotamos as seguintes transformações

$$H = \frac{u}{z} \quad \text{e} \quad R = \frac{v}{z}. \quad (5.48)$$

Agora podemos escrever o sistema (5.46) como a equação

$$A(u, v, z)du + B(u, v, z)dv + C(u, v, z)dz = 0, \quad (5.49)$$

em que os coeficientes A , B e C são definidos como²

$$A(u, v, z) = \frac{6u^2z + 12u^2v - v^2z}{12u}z; \quad (5.50)$$

$$B(u, v, z) = \frac{vz - 12u^2}{6}z; \quad (5.51)$$

$$C(u, v, z) = \frac{12u^2v - 6u^2z - v^2z}{12}. \quad (5.52)$$

A partir das definições acima e da condição $udu + vdv + zdz = 0$, o sistema (5.46) se

²No Apêndice A mostramos o cálculo desses coeficientes explicitamente.

torna

$$\begin{aligned} u' &= B(u, v, z)z - C(u, v, z)v; \\ v' &= C(u, v, z)u - A(u, v, z)z; \\ z' &= A(u, v, z)v - B(u, v, z)u. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Os pontos críticos desse sistema são encontrados quando $u' = v' = z' = 0$ (a condição para que isto seja verdade é que $A = B = C = 0$). Dentre eles, aqueles para os quais $z = 0$ estão no infinito.

Das definições acima, temos que $A = B = 0$ e

$$C(u, v, z) = u^2 v = 0, \quad (5.54)$$

e utilizando o vínculo $u^2 + v^2 = 1$, obtemos

$$u^2 \sqrt{1 - u^2} = 0. \quad (5.55)$$

Então, concluímos que os pontos críticos são $u = \pm 1$, $v = 0$ e $z = 0$. Para analisar as curvas características em torno dos pontos críticos, executamos a seguinte transformação

$$\eta = \frac{v}{u}, \quad \zeta = \frac{z}{u}, \quad u^2 = (1 + \eta^2 + \zeta^2)^{-1}. \quad (5.56)$$

Dessa forma, o sistema (5.53) é reescrito como

$$\begin{aligned} \eta' &= u \frac{12\eta - 6\zeta - \eta^2\zeta}{12}, \\ \zeta' &= -u\zeta \frac{\eta\zeta - 12}{6}, \end{aligned} \quad (5.57)$$

que quando linearizado em torno de $(0, 0)$, para $u = 1$ nos fornece

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta - \frac{\zeta}{2}, \\ \zeta' &= 2\zeta. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Os autovalores desse sistema são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$ caracterizando uma fonte imprópria instável. E quando linearizado em torno de $(0, 0)$, para $u = -1$ nos fornece

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{\zeta}{2} - \eta, \\ \zeta' &= -2\zeta. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Os autovalores desse sistema são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ caracterizando um sorvedouro impróprio assintoticamente estável. Nós apresentamos na Fig.(5.3) o diagrama (u, v) para o modelo de Starobinsky, isto é, o plano equatorial da esfera de Poincaré.

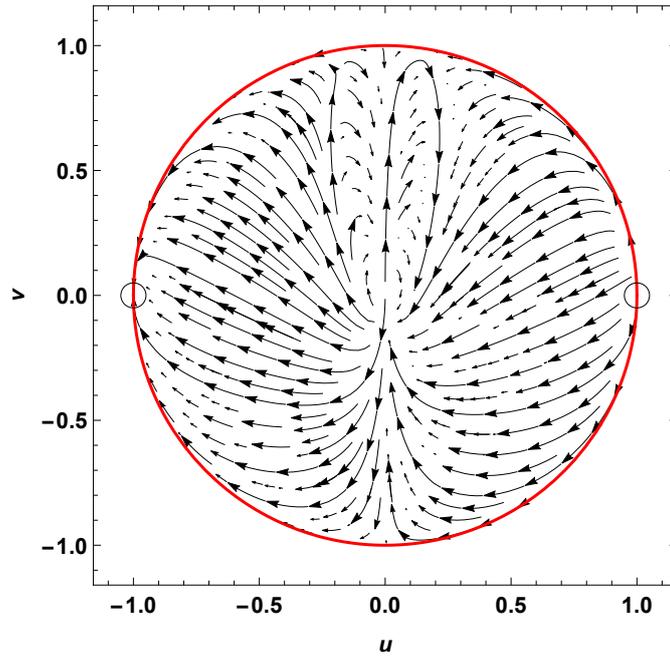


Figura 5.3. Plano equatorial da esfera de Starobinsky para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2$. Os círculos pequenos representam os pontos críticos no infinito.

5.4 Evolução do caso de $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$

Uma vez que o modelo de Starobinsky tem se mostrado consistente com as observações [3], [57], [15], é interessante investigar pequenos desvios do modelo com o objetivo de testar sua robustez. Da análise de sistema dinâmico chegamos à conclusão de que a $f(R)$ tem que ser quadrática para valores muito grandes de R . Propomos, então, o seguinte modelo

$$f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}, \quad (5.60)$$

que claramente é uma correção exponencial ao modelo de Starobinsky, já que para $\alpha R \gg 1$ nosso modelo reproduz o sucesso do modelo de Starobinsky e para $\alpha R \ll 1$, a função acima pode ser aproximada a

$$f(R) \sim R - 2\Lambda, \quad (5.61)$$

ou seja, a ação de Einstein-Hilbert usual com o termo de constante cosmológica.

Substituindo a $f(R)$ (5.60) no sistema (5.37), encontramos

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \frac{1}{12\alpha H} \frac{\alpha R^2 + 2\Lambda(\alpha R + 1)e^{-\alpha R} - 6H^2 - 12\alpha R H^2 - 12\alpha \Lambda H^2 e^{-\alpha R}}{1 - \alpha \Lambda e^{-\alpha R}}, \\ \dot{H} &= \frac{R}{6} - 2H^2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Mais uma vez, é possível reescrever as variáveis de maneira que o sistema se torna

adimensional: $R \rightarrow \alpha R$, $H \rightarrow \sqrt{\alpha}H$, $t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\alpha}}$ e $\Lambda \rightarrow \alpha\Lambda$. Fazendo $R = 12H^2$, nosso sistema se torna

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \frac{1}{12\alpha \sqrt{R/12}} \frac{\Lambda(\alpha R + 2)e^{-\alpha R} - R/2}{1 - \alpha\Lambda e^{-\alpha R}}, \\ \dot{H} &= 0.\end{aligned}\tag{5.63}$$

E a condição para que $\dot{R} = 0$ é que

$$R = 2\Lambda(\alpha R + 2)e^{-\alpha R}.\tag{5.64}$$

Para encontrar os pontos críticos do sistema (5.62) precisamos atribuir valores para os parâmetros Λ e α , então escolhemos $\alpha\Lambda = 0.1$ como referência. Dessa maneira, numericamente encontramos um autovalor nulo e outro negativo (aqui novamente considerando como região de interesse apenas $H > 0$), o que caracteriza um comportamento atrator.

O diagrama de fase (H, R) para a região finita do modelo exponencial é representado pela Fig.(5.4).

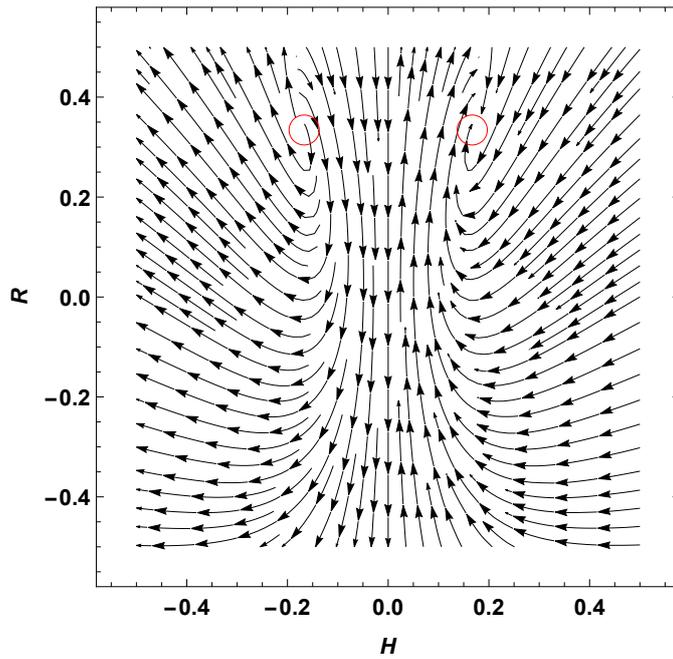


Figura 5.4. Diagrama de fase para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$ com H e R definidos de maneira adimensional. Aqui, os círculos pequenos representam os pontos críticos na região finita.

Uma observação importante é que o modelo com correção exponencial não admite o espaço de Minkowski, isto é, $H = R = 0$ como ponto crítico na região finita.

Seguindo os passos da construção da esfera de Poincaré para o modelo de Starobinsky

para o caso do modelo exponencial, encontramos novamente como sistema autônomo

$$\begin{aligned} u' &= B(u, v, z)z - C(u, v, z)v; \\ v' &= C(u, v, z)u - A(u, v, z)z; \\ z' &= A(u, v, z)v - B(u, v, z)u. \end{aligned} \quad (5.65)$$

em que

$$A(u, v, z) = -\frac{z}{12u} \frac{z^2[v^2z + 2\Lambda(v+z)e^{-v/z} - 6u^2z - 12u^2z\Lambda e^{-v/z}] - 12u^2v}{1 - \Lambda e^{-v/z}}; \quad (5.66)$$

$$B(u, v, z) = \frac{vz - 12u^2}{6}z; \quad (5.67)$$

$$C(u, v, z) = \frac{z^2[v^2z + 2\Lambda(v+z)e^{-v/z} - 6u^2z - 12u^2z\Lambda e^{-v/z}] - 12u^2v}{12(1 - \Lambda e^{-v/z})} - \frac{v^2z}{6} + 2u^2v. \quad (5.68)$$

Quando fazemos $A = B = C = 0$ junto com $z = 0$, obtemos novamente que $C = u^2v = 0$. Na região infinita, o comportamento do modelo com correção exponencial é o mesmo que o do modelo de Starobinsky, como já era esperado. Na Fig.(5.5) representamos o diagrama (u, v) para o modelo com correção exponencial.

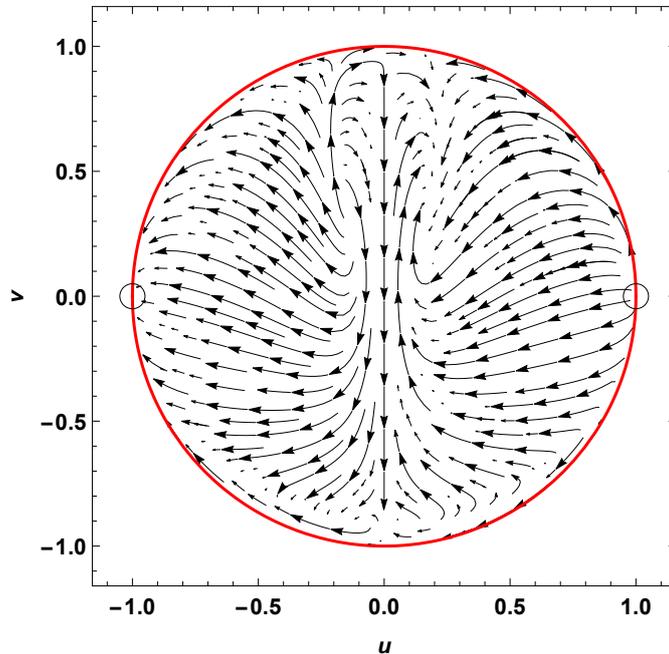


Figura 5.5. Plano equatorial da esfera de Poincaré para o modelo $f(R) = R + \alpha R^2 - 2\Lambda e^{-\alpha R}$. Aqui os círculos pequenos representam os pontos críticos no infinito.

Capítulo 6

Considerações Finais

A teoria de Gravitação Modificada $f(R)$ fornece uma alternativa interessante para analisar a questão da expansão acelerada do universo. Há grande interesse da comunidade científica nesta teoria devido ao fato de ser uma generalização da Relatividade Geral, que consiste em uma função arbitrária do escalar de Ricci na lagrangiana que descreve a Gravitação.

O nosso objetivo neste trabalho consistiu em analisar as teorias $f(R)$, especialmente o modelo de Starobinsky, no contexto de Inflação Cosmológica. No capítulo 2 descrevemos alguns problemas do atual Modelo Padrão com o objetivo de destacar a necessidade de uma fase inflacionária nos primórdios da evolução de nosso universo.

No capítulo 3 fizemos uma revisão das técnicas empregadas na descrição do paradigma inflacionário investigando dois de seus vários potenciais. Algo que deve ser destacado nesse contexto é a relativa simplicidade da teoria inflacionária que é capaz de resolver alguns problemas do modelo padrão sem uma forma explícita de um potencial para o campo escalar proposto.

No capítulo 4, obtivemos as equações de campo para o formalismo métrico da teoria $f(R)$. As equações são de quarta ordem na métrica e quando fazemos uma comparação com as equações de campo da Relatividade Geral, os termos extras podem ser vistos como a contribuição de um tensor energia-momento efetivo composto por entes meramente geométricos. Discutimos também a equivalência da teoria $f(R)$ com a teoria de Brans-Dicke nos *frames* de Jordan e Einstein.

Assumindo a validade das equações de campo modificadas e do Princípio Cosmológico, dois modelos inflacionários foram estudados no capítulo 5: o modelo proposto por Starobinsky e uma correção exponencial do modelo de Starobinsky proposta por nós. A análise das equações de Friedmann modificadas, estruturadas como um sistema autônomo, nos permitiu encontrar critérios para obter modelos de $f(R)$ cosmológicamente viáveis.

Aqui ressaltamos 3 pontos importantes: Construímos o sistema dinâmico com as variáveis H e R , uma abordagem diferente da encontrada na literatura (geralmente encontramos sistemas dinâmicos em termos de densidade de energia); O sistema dinâmico da teoria $f(R)$

com $T_{\mu\nu} = 0$ não necessita da segunda equação de Friedmann, podemos utilizar a relação entre \dot{H} e R e H vinda do escalar de Ricci; Outro resultado importante foi o fato da correção R^2 vir naturalmente da solução do sistema dinâmico (5.37), este fato nos permitiu escolher uma outra $f(R)$ como *toy-model* que difere da proposta por Starobinsky mas, no limite em que $\alpha R \gg 1$, recupera o sucesso desta teoria.

Como perspectiva temos a investigação mais profunda das possibilidades apresentadas pela teoria $f(R)$ com a análise de sistemas dinâmicos. Também pretendemos fazer a análise perturbativa da teoria com o intuito de estudar o espectro de perturbações na densidade de energia e suas consequências na formação de estruturas.

Apêndice A

Cálculo dos Coeficientes $A(u, v, z)$, $B(u, v, z)$ e $C(u, v, z)$

Utilizando as transformações $H = u/z$ e $R = v/z$ no sistema (5.46), encontramos

$$\dot{v} - \frac{v}{z}\dot{z} = \frac{1}{12u}\left[v^2 - 6\frac{u^2}{z}(z + 2v)\right], \quad (\text{A.1})$$

$$\dot{u} - \frac{u}{z}\dot{z} = \frac{v}{6} - 2\frac{u^2}{z}. \quad (\text{A.2})$$

Mas temos que $u^2 + v^2 + z^2 = 1$, então

$$\dot{z} = \frac{-u\dot{u} - v\dot{v}}{z}. \quad (\text{A.3})$$

Logo, (A.2) pode ser escrita como

$$\dot{u}\left(1 + \frac{u^2}{z^2}\right) = \frac{v}{6} - 2\frac{u^2}{z} - \frac{uv}{z^2}\dot{v}. \quad (\text{A.4})$$

Agora, se multiplicarmos (A.1) por $\frac{z}{v}$ e (A.2) por $\frac{z}{u}$, temos

$$\frac{z}{v}\dot{v} - \dot{z} = \frac{1}{12u}\left[zv - 6\frac{u^2}{v}(z + 2v)\right], \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{z}{u}\dot{u} - \dot{z} = \frac{vz}{6u} - 2u. \quad (\text{A.6})$$

E fazendo (A.5)-(A.6), obtemos a equação

$$\dot{v} = \frac{v}{u}\dot{u} - \frac{v^2}{12u} - \frac{u}{2} + \frac{uv}{z}. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.7) em (A.4)

$$\begin{aligned}\dot{u}\left(1 + \frac{u^2}{z^2}\right) &= \frac{v}{6} - 2\frac{u^2}{z} - \frac{uv}{z^2}\left[\frac{v}{u}\dot{u} - \frac{v^2}{12u} - \frac{u}{2} + \frac{uv}{z}\right] + \frac{v}{6} - 2\frac{u^2}{z} \\ \dot{u} &= \frac{v^3}{12} + \frac{u^2v}{2} - \frac{u^2v^2}{z} + \frac{vz^2}{6} - 2u^2z.\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

A equação (A.8) pode ser escrita em termos dos coeficientes $B(u, v, z)$ e $C(u, v, z)$ como

$$\dot{u} = B(u, v, z)\frac{z}{z} - C(u, v, z)\frac{v}{z}, \quad (\text{A.9})$$

sendo $B(u, v, z)$ e $C(u, v, z)$ definidos como

$$B(u, v, z) = z\left(\frac{vz}{6} - 2u^2\right); \quad (\text{A.10})$$

$$C(u, v, z) = \frac{12u^2v - 6u^2z - v^2z}{12}; \quad (\text{A.11})$$

Agora substituindo (A.3) em (A.1)

$$\dot{v}\left(1 + \frac{v^2}{z^2}\right) = -\frac{uv}{z^2}\dot{u} + \frac{v^2}{12u} - \frac{u}{2} - \frac{uv}{z} \quad (\text{A.12})$$

Agora rearranjando (A.7) e substituindo em (A.12)

$$\begin{aligned}\dot{v}\left(1 + \frac{v^2}{z^2}\right) &= -\frac{uv}{z^2}\left[\frac{u\dot{v}}{v} + \frac{v}{12} + \frac{u^2}{2v} - \frac{u^2}{z}\right] + \frac{v^2}{12u} - \frac{u}{2} - \frac{uv}{z} \\ \dot{v} &= -\frac{uv^2}{12} - \frac{u^3}{2z^2} + \frac{u^3v}{z^3} + \frac{v^2}{12u} - \frac{u}{2} - \frac{uv}{z}.\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Aqui, (A.13) pode ser colocada em termos de $A(u, v, z)$ e $C(u, v, z)$

$$\dot{v} = C(u, v, z)\frac{u}{z} - A(u, v, z)\frac{z}{z}, \quad (\text{A.14})$$

em que por definição

$$A(u, v, z) = z\frac{6u^2z + 12u^2v - v^2z}{12u}. \quad (\text{A.15})$$

Então, substituindo (A.9) e (A.14) em (A.3)

$$\dot{z} = \frac{-B(u, v, z)u + A(u, v, z)v}{z}. \quad (\text{A.16})$$

Se fizermos $z\frac{d}{dt} ='$, nosso sistema composto pelas equações (A.9), (A.14) e (A.16) se

torna

$$\begin{aligned}u' &= B(u, v, z)z - C(u, v, z)v; \\v' &= C(u, v, z)u - A(u, v, z)z; \\z' &= A(u, v, z)v - B(u, v, z)u;\end{aligned}\tag{A.17}$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado para a análise dos pontos críticos na região infinita do modelo de correção exponencial.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [2] D. Baumann, "TASI Lectures on Inflation," *arXiv preprint arXiv:0907.5424*, 2009.
- [3] P. Ade *et al.*, "Planck 2015 Results. XX. Constraints on Inflation," *arXiv preprint arXiv:1502.02114*.
- [4] D. Baumann, *Lecture Notes: The Physics of Inflation*.
- [5] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, M. R. Blanton, N. A. Bahcall, J. Brinkmann, J. E. Gunn, and D. P. Schneider, "Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies," *Astrophys. J.*, vol. 624, pp. 54–58, 2005.
- [6] G. F. Smoot, C. Bennett, A. Kogut, E. Wright, J. Aymon, N. Boggess, E. Cheng, G. De Amici, S. Gulkis, M. Hauser *et al.*, "Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps," *The Astrophysical Journal*, vol. 396, pp. L1–L5, 1992.
- [7] C. Bennett *et al.*, "First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Foreground emission," *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 148, p. 97, 2003.
- [8] A. Starobinsky, "Spectrum of Relict Gravitational Radiation and the Early State of the Universe," *JETP Letters*, vol. 30, pp. 682–685, 1979.
- [9] Starobinsky, "Nonsingular Model of the Universe with the Quantum-Gravitational de Sitter Stage and its Observational Consequences." in *Quantum Gravitation. Quantum Theory of Gravitation*, vol. 1, 1982, pp. 58–72.
- [10] A. A. Starobinsky, "A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity," *Phys. Lett.*, vol. B91, pp. 99–102, 1980.
- [11] A. H. Guth, "Inflationary Universe: a Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems," *Physical Review D*, vol. 23, no. 2, p. 347, 1981.
- [12] K. Sato, "First-Order Phase Transition of a Vacuum and the Expansion of the Universe," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 195, no. 3, pp. 467–479, 1981.
- [13] A. A. Starobinsky and Ya. B. Zeldovich, "The Spontaneous Creation of the Universe," 1993.

- [14] A. D. Linde, "Is the Lee Constant a Cosmological Constant?" *JETP Lett.*, vol. 19, p. 183, 1974.
- [15] S. Tsujikawa, "Distinguishing between Inflationary Models from Cosmic Microwave Background," *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, vol. 2014, no. 6, p. 06B104, 2014.
- [16] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [17] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [18] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic press, 2003.
- [19] R. H. Brandenberger, "Inflationary Cosmology: Progress and Problems," in *Large Scale Structure Formation*. Springer, 2000, pp. 169–211.
- [20] E. P. Hubble, "Extragalactic Nebulae." *The Astrophysical Journal*, vol. 64, pp. 321–369, 1926.
- [21] E. Hubble and M. L. Humason, "The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae," *The Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 43, 1931.
- [22] G. Gamow, "Expanding Universe and the Origin of Elements," *Physical Review*, vol. 70, no. 7-8, p. 572, 1946.
- [23] Gamow, "Rotating Universe?" *Nature*, vol. 158, p. 549, 1946.
- [24] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, "Cosmic Black-Body Radiation." *The Astrophysical Journal*, vol. 142, pp. 414–419, 1965.
- [25] A. Friedmann, "On the Curvature of Space," *Zeitschrift für Physik*, vol. 10, pp. 377–386, 1922.
- [26] P. Collaboration *et al.*, "Planck 2015 Results. XIII. Cosmological Parameters," *arXiv preprint arXiv:1502.01589*, 2015.
- [27] W. Rindler, "Book Review: Relativity: Special, General and Cosmological," *CERN Courier*, vol. 46, no. 10, p. 45 (December 2006), vol. 46, p. 45, 2006.
- [28] R. M. Wald, "Asymptotic Behavior of Homogeneous Cosmological Models in the Presence of a Positive Cosmological Constant," *Physical Review D*, vol. 28, no. 8, p. 2118, 1983.
- [29] S. Coleman and E. Weinberg, "Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking," *Physical Review D*, vol. 7, no. 6, p. 1888, 1973.
- [30] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, 2009.

- [31] S. W. Hawking, I. Moss, and J. Stewart, "Bubble Collisions in the Very Early Universe," *Physical Review D*, vol. 26, no. 10, p. 2681, 1982.
- [32] A. H. Guth and E. J. Weinberg, "Could the Universe have Recovered from a Slow First-Order Phase Transition?" *Nuclear Physics B*, vol. 212, no. 2, pp. 321–364, 1983.
- [33] A. D. Linde, "A New Inflationary Universe Scenario: a Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems," *Physics Letters B*, vol. 108, no. 6, pp. 389–393, 1982.
- [34] E. W. Kolb, "Dynamics of the Inflationary Era," *arXiv preprint hep-ph/9910311*, 1999.
- [35] A. D. Linde, "Chaotic Inflation," *Physics Letters B*, vol. 129, no. 3, pp. 177–181, 1983.
- [36] K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, "Natural Inflation with Pseudo Nambu-Goldstone Bosons," *Physical Review Letters*, vol. 65, no. 26, p. 3233, 1990.
- [37] F. C. Adams, J. R. Bond, K. Freese, J. A. Frieman, and A. V. Olinto, "Natural Inflation: Particle Physics Models, Power-Law Spectra for Large-Scale Structure, and Constraints from the Cosmic Background Explorer," *Physical Review D*, vol. 47, no. 2, p. 426, 1993.
- [38] H. Weyl, "A New Extension of Relativity Theory," *Annalen Phys*, vol. 59, pp. 101–133, 1919.
- [39] A. Eddington, "The Mathematical Theory of Relativity," 1923.
- [40] S. Capozziello and V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Springer Science & Business Media, 2010, vol. 170.
- [41] V. Faraoni, "f(R) Gravity: Successes and Challenges," *arXiv preprint arXiv:0810.2602*, 2008.
- [42] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, "f (R) Theories of Gravity," *Reviews of Modern Physics*, vol. 82, no. 1, p. 451, 2010.
- [43] M. O'Dwyer, S. E. Joras, and I. Waga, " γ gravity: Steepness control," *Phys. Rev.*, vol. D88, no. 6, p. 063520, 2013.
- [44] R. H. Dicke, "Mach's principle and invariance under transformation of units," *Phys. Rev.*, vol. 125, pp. 2163–2167, 1962.
- [45] V. Faraoni and S. Nadeau, "(Pseudo) Issue of the Conformal Frame Revisited," *Physical Review D*, vol. 75, no. 2, p. 023501, 2007.
- [46] A. De Felice and S. Tsujikawa, "f (R) Theories," *Living Rev. Rel*, vol. 13, no. 3, pp. 1002–4928, 2010.
- [47] A. Vilenkin, "Classical and Quantum Cosmology of the Starobinsky Inflationary Model," *Physical Review D*, vol. 32, no. 10, p. 2511, 1985.

- [48] V. F. Mukhanov and G. Chibisov, "Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe," *JETP Letters*, vol. 33, no. 10, pp. 532–535, 1981.
- [49] J.-C. Hwang and H. Noh, "f (R) Gravity Theory and CMB Constraints," *Physics Letters B*, vol. 506, no. 1, pp. 13–19, 2001.
- [50] J. Ehlers, P. Geren, and R. K. Sachs, "Isotropic Solutions of the Einstein-Liouville Equations," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, no. 9, pp. 1344–1349, 1968.
- [51] S. Rippl, H. van Elst, R. Tavakol, and D. Taylor, "Kinematics and Dynamics of f (R) Theories of Gravity," *General Relativity and Gravitation*, vol. 28, no. 2, pp. 193–205, 1996.
- [52] A. D. Dolgov and M. Kawasaki, "Can Modified Gravity Explain Eccelerated Cosmic Expansion?" *Physics Letters B*, vol. 573, pp. 1–4, 2003.
- [53] S. Capozziello, S. Carloni, and A. Troisi, "Quintessence without scalar fields," *Recent Res. Dev. Astron. Astrophys.*, vol. 1, p. 625, 2003.
- [54] L. Amendola, R. Gannouji, D. Polarski, and S. Tsujikawa, "Conditions for the Cosmological Viability of f (R) Dark Energy Models," *Physical Review D*, vol. 75, no. 8, p. 083504, 2007.
- [55] C. G. Boehmer and N. Chan, "Dynamical Systems in Cosmology," *arXiv preprint arXiv:1409.5585*, 2014.
- [56] G. Sansone and R. Conti, *Equazioni differenziali non Lineari: Con 133 figure nel testo*. Edizioni cremonese, 1956, vol. 3.
- [57] J. Martin, C. Ringeval, R. Trotta, and V. Vennin, "The Best Inflationary Models after Planck," *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2014, no. 03, p. 039, 2014.