Roberta Meschese Xavier

Conexões afins e a teoria de Cartan-Einstein

Vitória - Espírito Santo, Brasil
Julho de 2016

Roberta Meschese Xavier

Conexões afins e a teoria de Cartan-Einstein

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo PPGMAT/UFES, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Matemática. Orientador: Prof. Leonardo Meireles Câmara.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Leonardo Meireles Câmara

Vitória - Espírito Santo, Brasil
Julho de 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

X3c

Xavier, Roberta Meschese, 1979-
Conexões afins e a teoria de Cartan-Einstein / Roberta Meschese Xavier. – 2016.
79 f.

Orientador: Leonardo Meireles Câmara.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Cartan, Elie, 1869-1951. 2. Mecânica. 3. Relatividade. 4. Gravitação. 5. Conexões (Matemática). 6. Geometria. 7. Espaço e tempo. I. Câmara, Leonardo Meireles. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

"Conexões Afins e a Teoria de Cartan-Einstein"

Roberta Meschese Xavier

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 12/07/2016 por:

Leonardo Meireles Câmara – UFES

Matheus Vieira

Matheus Brioschi Herkenhoff Vieira – UFES

Leonardo Magalhães Macarini - UFRJ

Ao meu marido, à nossa filha e ao nosso filho que está sendo gerado no coração.

Agradecimentos

Agradeço e dedico este trabalho ao meu marido, companheiro e amigo Junior. Sem seu apoio, compreensão e afeto eu não teria percorrido nem o início deste caminho.

Agradeço a minha filha, meu tesouro, pela paciência em suportar minhas ausências e pelo seu amor.

Agradeço a todos que me ajudaram nos cuidados com minha filha nos momentos em que não pude estar presente, desde a graduação.

Agradeço a minha mãe Katia, meus irmãos Luna, Riwa e Lucas, meu padrasto Sandoval e minha tia Suzana por me estenderem as mãos todas as vezes que precisei.

Agradeço a Franciane que começou essa jornada comigo como parceira de estudos e hoje, de tão amiga, se tornou minha irmã e comadre.

Agradeço aos amigos Filipe, Alexandre, Emanuela, Weverthon e Solon por toda ajuda, amizade e conselhos.

Agradeço ao meu orientador, Professor Leonardo, pela confiança e generosidade.

Agradeço a todos professores que tive, na Estácio de Sá, no IFRJ, no IFES e na UFES. A contribuição de cada um foi fundamental para minha formação.

Agradeço ao PPGMAT pela excelente formação.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Opte por aquilo que faz o seu coração vibrar, apesar de todas as consequências."

Osho.

Resumo

A Teoria de Cartan-Einstein da gravitação é uma modificação da Teoria Geral da Relatividade. Enquanto a teoria de Einstein foi desenvolvida segundo a hipótese de que o espaço-tempo da relatividade possui torção nula, Cartan permite a existência de torção e a relaciona ao momento angular da matéria anos antes da descoberta do spin do elétron. Os artigos de Cartan, em especial, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, que é base deste trabalho, contém novas ideias matemáticas importantes que influenciaram o desenvolvimento de geometria diferencial e, em particular, conduziu à teoria geral de conexões afins. Essencialmente, estes são objetos geométricos sobre uma variedade diferenciável que conectam espaços tangentes próximos. Nesta dissertação estudaremos a invariância das leis das mecânicas clássica e relativística em meios contínuos e a geometria do espaço-tempo, a partir do ponto de vista das conexões afins.

Palavras-chaves: Mecânica clássica, relatividade, gravitação, conexões afins, geometria do espaço-tempo.

Abstract

The Cartan-Einstein theory of gravitation is a modified version of the General Theory of Relativity. While Einstein's theory was developed according to the hypothesis that the relativity of space-time has zero torsion, Cartan allows torsion and relate it to the angular momentum of the matter several years before the discovery of the spin of the electron. Cartan's articles, in particular *Sur les variétés the affine connexion et la théorie de la Généralisée relativité*, which is the basis of this work, contains important new mathematical ideas that have influenced the development of differential geometry and, in particular, led to the general theory of affine connections. Essentially these are geometrical objects on a differentiable manifolds that connect nearby tangent spaces. In this dissertation we study the invariance of the laws of classical and relativistic mechanics in continuous media and the geometry of space-time from the standpoint of affine connections.

Key-words: Classical mechanics, relativity, gravitation, affine connections, geometry of space-time.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho trata da abordagem da física relativística do ponto de vista da geometria diferencial através do conceito de conexão, introduzido por Élie Cartan. Ele se baseia, eminantemente, nos artigos de Cartan intitulados *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (1922 e 1923)*, mais tarde recompilados no livro (CARTAN, 1986). Nestes artigos, Cartan introduz as bases da geometria diferencial moderna e desenvolve conceitos introduzidos por H. Weyl, a saber, variedades diferenciáveis, espaços fibrados (vetoriais e de referenciais), formas assumindo valores em fibrados vetoriais e seus produtos tensoriais e exteriores.

Toda idéia é concebida a partir do conceito de referencial móvel, sendo fortemente influenciado pelo conceito de referenciais inerciais ou galileanos. Na prática, a nova geometria surge a partir da necessidade de uma nova maneira de retratar a variação infinitesimal destes referenciais móveis e mesmo da posição do ponto base destes referenciais. Em linguagem moderna (TRAUTMAN, 2006),

$$\begin{cases} \theta^\nu = a^\nu_\mu \theta'^\mu \\ e'_\mu = e_\nu a^\nu_\mu \end{cases},$$

onde M é um espaço-tempo 4-dimensional e $a = (a^\mu_\nu) : M \longrightarrow GL(\mathbb{R}^4)$. Na linguagem de Cartan, que manteremos nesta dissertação, tal variação se dá pela expressão:

$$\begin{cases} dm = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_i = \omega^0_i e_0 + \omega^1_i e_1 + \omega^2_i e_2 + \omega^3_i e_3 \end{cases}$$

.

Note-se que, por tratar-se de uma relação de equivalência, as distintas escolhas das relações entre equivalências de referenciais levam, a princípio, a diferentes escolhas de grupos de transformações que levam bases equivalentes em bases equivalentes. Obtemos, assim, subgrupos (ou matrizes) do grupo de matrizes inversíveis ($GL(\mathbb{R}^n)$). A matriz de conexão (ω^j_i) pertence, então, à algebra de Lie deste grupo.

A ideia fundamental de Cartan é seguir o princípio da relatividade de Poincaré 3.1, que nos diz que as leis físicas que regem um dado sistema físico são as mesmas em referenciais equivalentes. Em outras palavras, as equações de um dado sistema físico são as mesmas, independentemente do referencial, desde que ele pertença ao sistema de referenciais equivalentes. Isso nos leva a uma série de obstruções às possíveis conexões em formato de equações diferenciais 3.2. Neste trabalho, iremos nos referir às conexões que atendem a estas obstruções como conexões adaptadas ao sistema físico.

Para chegar à unicidade da conexão, Cartan revisita a mecânica newtoniana no espaço-tempo a partir dos invariantes integrais de Poincaré-Cartan (CARTAN, 1986), seção 58, página 90; (ABRAHAM; MARSDEN; MARSDEN, 1978), seção 3.4, página 201; (ARNOL'D, 2013), seção 44, página 233; e constrói a mecânica a partir do vetor momento-massa 3.3.1 (ou quantidade de movimento-energia).

A exigência do anulamento da torção leva à conexão única dada por 6.1

$$\begin{array}{llll} \omega^0 = dt, & \omega^1 = dx, & \omega^2 = dy, & \omega^3 = dz \\ \omega_0^1 = -Xdt, & \omega_0^2 = -Ydt, & \omega_0^3 = -Zdt, & \omega_i^j = 0. \end{array}$$

Cartan caracteriza, então, o sistema físico, em Newton, através de três propriedades desta conexão 6.1.1:

$$\Omega_{23} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0 \qquad \text{(II)}$$

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 = 4\pi G\rho\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 \qquad \text{(III)}$$

Em analogia ao caso newtoniano e ainda considerando a torção nula, Cartan sugere adaptações para o caso eisnteniano, chegando às equações 6.2:

$$\omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0 \qquad \text{(I')}$$

$$\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

$$= \frac{-4\pi G\rho}{c^2}\rho_0\, \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \qquad \text{(II')}$$

$$\begin{gathered} m \wedge e_0 \otimes \Pi^0 + m \wedge e_1 \otimes \Pi^1 + m \wedge e_2 \otimes \Pi^2 + m \wedge e_3 \otimes \Pi^3 \\ = -\frac{c^2}{8\pi G} \sum_{i,j,k,l} m \wedge e_i(\omega_j \wedge \Omega_{kl} + \omega_k \wedge \Omega_{lj} + \omega_l \wedge \Omega_{jk}) \qquad \text{(III')} \end{gathered}$$

onde a última equação contém informações sobre a geometria do espaço-tempo da gravitação de Einstein: a curvatura vetorial de um elemento 3-dimensional neste espaço-tempo. Ou seja, o momento-massa é a manifestação física de um vetor com origem geométrica.

Ao final do artigo, Cartan esboça um programa da unificação entre gravidade e eletromagnetismo, ao definir o tensor momento massa da forma

$$\mathbf{G} = \mathbf{m} \wedge e_i \Pi^i + e_i \wedge e_j \Pi^{ij}, \quad 8$$

onde $\Pi^{ij} = \rho u^i w^j + p^{ij}$ e a torção não é necessariamente nula.

2 Preliminares

Como a geometrização dos espaços-tempo newtoniano e einsteniano é um dos objetivos deste trabalho, precisaremos fazer um resumo de definições e resultados no âmbito da topologia. Para este capítulo seguimos como referências (ABRAHAM; MARSDEN; MARSDEN, 1978).

2.1 Variedades diferenciáveis

A concepção de uma variedade diferenciável, de dimensão n, nada mais é que uma colagem de espaços euclideanos n-dimensionais. Um espaço-tempo, como veremos a frente, consiste em uma variedade diferenciável. Passemos à formalização deste conceito.

Definição 2.1. *Seja M um conjunto, então diremos que o par* $\{(U_i, \varphi_i)\}$ *é uma* ***carta local*** *de M se* φ *é uma bijeçãoo entre U e um aberto de* $\mathbb{R}^n$*. Diremos que uma coleção de cartas locais de M, digamos* $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$*, onde I é um certo conjunto de índices, é um* ***atlas*** *diferenciável (respect. de classe* C^k*) para M, se:*

(i)$M = \bigcup\{U_i / i \in I\}$

ii)$\varphi_i(U_i \cap U_j)$ *é um aberto, para todos i, j tais que* $U_i \cap U_j \neq \varnothing$*;*

(iii)As aplicações de transição

$$\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \mid_{\varphi_j(U_i \cap U_j)} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

são difeomorfismo de classe C^k

Quando $k = \infty$*, diremos que* $\mathcal{A}$ *é um* ***atlas suave****.*

Definição 2.2. *Seja S um conjunto. Uma relação de equivalência em S é uma relação binária tal que para todo* $u, v, w \in S$*,*

(i) $u \backsim u$*,*

(ii) $u \backsim v$ *se e, somente se,* $v \backsim u$*, e*

(iii) $u \backsim v$ *e* $v \backsim w$ *implica* $u \backsim w$*.*

A classe de equivalência de u, denotada por [u], é definida por

$$[u] = \{v \in S/u \backsim v\}$$

Definição 2.3. *Sendo* $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ *e* $\mathcal{B} = \{(U_j, \varphi_j) : j \in J\}$ *dois atlas distintos para M, então eles serão ditos **compatíveis** quando a sua união for ainda um atlas diferenciável, i.e,* $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ *será um difeomorfismo para todo* $i \in I$ *e todo* $j \in J$. *A compatibilidade entre atlas define uma relação de equivalência entre atlas de uma dada variedade, diremos que a classe de equivalência de um atlas* $\mathcal{A}$ *é a **estrutura diferenciável** gerada por* $\mathcal{A}$*, que será denotada por* $\mathcal{D}$. *A união de todos os atlas compatíveis com* $\mathcal{A}$*:*

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} := \bigcup\{\mathcal{A}/\mathcal{A} \in \mathcal{D}\}$$

será chamado de atlas maximal de $\mathcal{D}$. *Cada carta local* $\{(U, \varphi)\} \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ *será chamada de uma **carta local admissível**. O par* $(M, \mathcal{D})$*, onde M é um conjunto e* $\mathcal{D}$ *é uma estrutura diferenciável, será chamado de **variedade diferenciável**.*

Exemplo 2.1. *O espaço* $\mathbb{R}^n$ *é uma variedade, tendo como atlas a aplicação identidade.*

Exemplo 2.2. *O espaço* $M(n, \mathbb{R})$ *de matrizes reais* $n \times n$ *é uma variedade com atlas dado pela aplicação* $\phi : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ *com a regra*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto (a_{11}, \cdots, a_{1,n}, a_{i1}, \cdots, a_{in}, a_{n1}, \cdots, a_{n,n})$$

Teremos, então uma bijeção de $M(n, \mathbb{R})$ *com* $\mathbb{R}^{n^2}$*, de onde vem a estrutura de variedade.*

2.2 Fibrados Vetoriais

Um fibrado vetorial, grosso modo, é uma variedade com um espaço vetorial anexo a cada ponto. Um tipo de fibrado vetorial de suma importância neste trabalho é o fibrado tangente.

Definição 2.4. *Sejam E e F espaços vetoriais reais de dimensão finita e U um aberto de E. O produto cartesiano* $U \times F$ *será chamado de um **fibrado vetorial local**. U será chamado **espaço base** e pode ser identificado com* $U \times \{0\}$*, a **seção nula**. Para* $u \in U$*,* $\{u\} \times F$ *será chamada **fibra sobre u** que pode ser dotada com a estrutura de espaço vetorial de F. A aplicação* $\pi : U \times F \longrightarrow U$ *dada por* $\pi(u, f) = u$ *é chamada de **projeção** de* $U \times F$.

Definição 2.5. *Seja M uma variedade e $m \in M$. Uma curva em m é uma aplicação C^1 da forma $c : I \longrightarrow M$, onde $I \in R$ é um intervalo aberto, $o \in I$ e c(0)=m. Se c_1 e c_2 são curvas em m e (U, φ) uma carta admissível com $m \in U$. Então dizemos que c_1, c_2 são **tangentes** em m em relação à φ se, e somente se,*

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$$

Proposição 2.1. *O conceito de tangência entre curvas não depende da carta local admissível escolhida.*

Lema 2.1. *A noção de tangência entre curvas define uma relação de equivalência.*

Definição 2.6. *Seja I um intervalo aberto da reta. A classe de equivalência das curvas tangentes à curva $c : I \longrightarrow M$ em $p = c(0)$ será denotada por $[c]_p$. O conjunto de tais classes de equivalência será denotado por T_pM. O conjunto*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

*será chamado de **espaço tangente** e a aplicação $\tau : TM \longrightarrow M$, dada por $[c]_q \longmapsto q$, será chamada de projeção canônica do espaço tangente.*

Definição 2.7. *Seja $\pi : E \longrightarrow B$ um fibrado vetorial. Uma **seção** C^r de π é uma aplicação $\xi : B \longrightarrow E$ de classe C^r tal que para cada $b \in B$ $\pi(\xi(b)) = b$. Denotaremos por $\Gamma^r(\pi)$ ao conjunto de todas as seções C^r de π. Definimos um **referencial móvel** para E como um conjunto de seções locais sobre B que forma uma base para $E_p = \pi^{-1}(p)$, para todo $p \in B$.*

2.3 Álgebra de Grassman

2.3.1 Tensores

Definição 2.8. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Então o conjunto dos funcionais lineares $L(E; \mathbb{K})$ será chamado de **espaço dual** de E e será denotado por E^**

Proposição 2.2. *Se $\beta = \{e_1, .., e_n\}$ é uma base do $\mathbb{K}$-espaço vetorial E e $\beta^* = \{\varepsilon_1, .., \varepsilon_n\}$ elementos de E^* tais que $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 1$ se i=j e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$, então β^* é uma base de E^*, chamada **base dual** de β.*

Definição 2.9. *Dados os espaços vetoriais E,F, uma aplicação $\varphi : E \times ... \times E \longrightarrow F$, definida no produto cartesiano de r fatores iguais a E, diz-se **r-linear** quando seus valores $\varphi(v_1, ..., v_r)$ dependem linearmente de cada uma das variáveis $v_1, ..., v_r \in E$. Ou seja,* *devemos ter*

$$\varphi(v_1, ...v_i + w_i, ..., v_r) = \varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_r) + \varphi(v_1, ..., w_i, ..., v_r)$$

$$\varphi(v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_r) = \lambda\varphi(v_1, ..., v_i, ..., v_r)$$

O conjunto das aplicações r-lineares, definidas acima, será denotado por $L^r(E; F)$.

Definição 2.10. *Dado um espaço vetorial E, definimos o conjunto*

$$T^r_s(E) = L^{r+s}(E^*, ...E^*, E, ..., E; F) \text{ (r copias de } E^* \text{ e s copias de E).}$$

*cujos elementos são chamados **tensores contravariantes de ordem r** e **covariantes de ordem s** ou, simplesmente, do tipo (r,s). Dados $t_1 \in L^{r_1+s_1}$ e $t_2 \in L^{r_2+s_2}$, o **produto tensorial** de t_1 por t_2 é o tensor $t_1 \otimes t_2 \in L^{r_1+r_2+s_1+s_2}$ definido por*

$$t_1 \otimes t_2(\alpha_1, ..., \alpha_{r_1}, \beta_1, ..., \beta_{r_2}, v_1, ..., v_{s_1}, w_1, ..., w_{s_2}) = t_1(\alpha_1, ..., \alpha_{r_1}, v_1, ..., v_{s_1})t_2(\beta_1, ..., \beta_{r_2}, w_1, ..., w_{s_2})$$

onde $\alpha_i, \beta_i \in E^*$ e $v_i, w_i \in E$, para todo i.

$$I^{p,n} := \{(i_1, ..., i_p) \in \mathbb{Z}^p_+ / 1 \leq i_1, ..., i_p \leq n\}$$

Proposição 2.3. *Se $dimE = n$, então $T^r_s(E)$ possui a estrutura de um espaço vetorial de dimensão n^{r+s}. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ordenada de E e $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ sua base dual então $\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon_{j1} \otimes ... \otimes \varepsilon_{js} : i_k, j_k = 1, ..., n\}$ é uma base para $T^s_r(E)$.*

Definição 2.11. *Seja M uma variedade e $\tau_M : TM \longrightarrow M$ seu fibrado tangente. Chamatemos $T^r_s(M) = T^r_s(TM)$ o **fibrado vetorial de tensores** contravariantes de ordem r e covariantes de ordem s, ou do tipo (r,s). $T^0_1(M)$ também é chamado de fibrado cotangente de M e é denotado por $\tau^*_M : T^*M \longrightarrow M$.*

Definição 2.12. *Um **campo tensorial** do tipo (r,s) em uma variedade é uma seção C^∞ de $T^r_s(M)$. Denotaremos por $\mathcal{T}^r_s(M)$ o conjunto $\Gamma^\infty(T^r_s(M))$. Um **campo vetorial** em M é um elemento de $\mathcal{T}^1_0(M) = \mathfrak{X}(M)$. Um **campo covetorial**, ou **1-forma diferencial** é um elemento de $\mathcal{T}^0_1(M) = \mathfrak{X}^*(M)$*

Definição 2.13. *Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita. Definimos $\Lambda^0(E) := \mathbb{R}$, $\Lambda^1(E) := E^*$ e $\Lambda^k(E)$ o espaço das aplicações ζ tais que $\zeta(e_1, ..., e_k) = (\text{sinal de } \pi)\zeta(e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(k)})$, onde π é uma permutação em S_k. O sinal de π será igual a 1 se a permutação for par e -1 se a permutação for ímpar. Chamaremos os elementos de Λ^k de **k-formas** em E.*

Definição 2.14. *O **operador alternância** $alt : T^0_k(E) \longrightarrow T^0_k(E)$ é definido por*

$$alt\,\zeta(e_1, ..., e_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} (-1)^\pi \zeta(e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(k)}),\ onde\ (-1)^\pi = (sinal\ de\ \pi).$$

A soma é sobre todos os k! elementos de S_k

Proposição 2.4. *Se $\zeta \in T_k^0(E)$ então $alt(\zeta) \in \Lambda^k(E)$.*

Definição 2.15. *Se $\zeta \in T_p^0(E)$ e $\xi \in T_q^0(E)$, então a (p+q)-forma*

$$\zeta \wedge \xi := \frac{(p+q)!}{p!q!} alt(\zeta \otimes \xi)$$

*será chamada de **produto exterior** entre ζ e ξ.*

Exemplo 2.3. *Se $\alpha, \beta \in \Lambda^1(E)$, então $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$. Em particular, $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$ e $\alpha \wedge \alpha = 0$*

Proposição 2.5. *Para $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$ e $\zeta \in T_m^0(E)$, temos:*

(i) $\wedge$ é bilinear;

(ii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$;

(iii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \zeta) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \zeta$.

Definição 2.16. *A soma direta dos espaços $\Lambda^k(E)$ (k=0,1,2...) com sua estrutura de espaço vetorial real e multiplicação induzida por $\wedge$ é chamada **álgebra de Grassmann** ou **álgebra exterior**.*

Observação 2.1. *A definição de produto exterior também pode ser extendida a vetores ou campos de vetores. O produto exterior de dois vetores pode ser interpretada geométricamente, no caso bidimensional, por exemplo, como segmentos de planos orientados. O produto exterior de vetores gozará das propriedades de bilinearidade, antissimetria e distributividade em relação à soma. Uma discussão mais profunda pode ser encontrada em (DORAN; LASENBY, 2003)*

Definição 2.17. *Seja n=dim E. Então para $k > n$, $\Lambda^k(E) = \{0\}$. No entanto, se $0 < k \leq n$, $\Lambda^k(E)$ possui dimensão igual à $\binom{n}{k}$. A álgebra exterior sobre E possui dimensão igual a 2^n. Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de E e $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ é sua base dual,*

$$\{\alpha_{i_1} \wedge ... \wedge \alpha_{i_k} : 1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n\}\ \text{é uma base de}\ \Lambda^k(E)$$

Definição 2.18. *Para todo r, a aplicação linear $T : E \longrightarrow F$ determina uma nova aplicação linear $T^* : \Lambda^r(F) \longrightarrow \Lambda^r(E)$, definida por*

$$(T^*\omega)(v_1, ..., v_r) = \omega(T(v_1), ..., T(v_r)),$$

para quaisquer $\omega \in \Lambda^r(F)$ *e* $v_1, ..., v_r \in E$. *A r-forma linear* $T^*\omega$ *chama-se o* ***pull-back*** *de* ω *para o espaço* E *relativo a* T.

Teorema 2.1. *Seja M uma variedade. Então existe uma única família de aplicações* $d^k(U) : \Lambda^k(U) \longrightarrow \Lambda^{k+1}(U)$ *(k=0, 1,...,n e U é um abreto de M), que denotaremos simplesmente por* ***d****, chamada a* ***derivada exterior*** *em M, tal que:*

(i)Para $\alpha \in \Lambda^k(U)$ *e* $\beta \in \Lambda^l(U)$,

$$\boldsymbol{d}(\alpha + \beta) = \boldsymbol{d}\alpha + \boldsymbol{d}\beta \text{ e}$$

$$\boldsymbol{d}(\alpha \wedge \beta) = \boldsymbol{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \boldsymbol{d}\beta;$$

(ii) Se $f \in C^\infty$ *é uma função real, então* ***d****f=df, ou seja, a derivada exterior coincide com a derivada usual.*

(iii)$\boldsymbol{d} \circ \boldsymbol{d} = 0$

Definição 2.19. *Seja* $X \in \mathfrak{X}$ *um campo de vetores numa variedade M. Então a aplicação* $\boldsymbol{i}_X : \Lambda^p(M) \longrightarrow \Lambda^{p-1}(M)$ *dada por*

$$\boldsymbol{i}_X\omega(X_2, ..., X_p) = \begin{cases} \omega(X, X_2, ..., X_p), & se \quad p > 0, \\ 0, & se \quad p = 0. \end{cases}$$

será chamada ***produto interior*** *de* ω *por X.*

Proposição 2.6. *Seja X um campo de vetores em M,* $\omega \in \Lambda^p(M)$ *e* $\eta \in \Lambda^q(M)$. *Então*
$\boldsymbol{i}_X(\omega \wedge \eta) = (\boldsymbol{i}_X\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (\boldsymbol{i}_X\eta)$

Definição 2.20. *Chamamos* $\omega \in \Lambda^k(M)$ *de* ***forma fechada*** *se* $\boldsymbol{d}\omega = 0$ *e* ***forma exata*** *se existe* $\alpha \in \Lambda^{k-1}(M)$ *tal que* $\omega = \boldsymbol{d}\alpha$

Lema 2.2. ***(Lema de Poincaré)***
(i) Toda forma exata é fechada;

(ii)Se ω *é fechada então para cada* $m \in M$, *existe uma vizinhança U de m para a qual* $\omega|_U$ *é exata.*

3 Conexão afim do espaço tempo e a dinâmica dos meios contínuos

3.1 Princípio da inércia e gravidade newtoniana

No desenvolvimento de teorias físicas, a escolha de um referencial é fundamental para que se possa realizar medições e análises. Porém, as conclusões chegadas a partir das análises em um dado referencial devem independer de sua escolha.

A lei da inércia de Galileu-Newton diz o seguinte (EINSTEIN; PEREIRA, 2003)

Na mecânica, um corpo suficientemente afastado de outros corpos permanece em estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme.

Chamaremos um sistema de coordenadas na qual se verifica a lei acima, de **referencial galileano**. É imediato que se T_0 for um sistema de coordenadas galileano, então qualquer outro sistema de coordenadas T que executa, em relação a T_0, um movimento de translação uniforme também será um sistema de coordenadas galileano. Assim, em relação a T, as leis da mecânica serão tão válidas quanto em relação a T_0. Chamaremos T_0 e T, com essas condições, de **referenciais equivalentes**.

Durante muito tempo todos estavam convencidos que os fenômenos da natureza podiam ser representados com o auxílio da mecânica clássica. Mas, com o desenvolvimento da eletrodinâmica e da óptica, foi se tornando cada vez mais claro que a mecânica clássica era uma base insuficiente para a descrição de todos os fenômenos físicos. Nesse sentido, Poincaré dá um passo em direção à generalização da lei da inércia de Galileu-Newton, enunciando o princípio da inércia da seguinte forma (LOGUNOV, 2004)

As equações que determinam as leis físicas devem permanecer invariantes quando determinadas em referenciais fixos ou em referenciais que realizam movimentos de translação uniforme.

Referenciais cuja lei da inércia de Poincaré são válidas, são chamados de **referenciais inerciais**. A segunda lei da inércia apresentada acima, incorpora a primeira, mas também introduz a possibilidade de considerarmos referenciais acelerados. Pois se, por exemplo, considerarmos um corpo em queda livre e um refencial cuja origem é dada por esse corpo, o movimento do corpo em relação a este refencial será uniforme.

Vamos buscar uma modificação na nossa definição de referenciais equivalentes, para podermos estender o princípio da inércia para pontos de massa colocados num campo gravitacional.

Vamos considerar um ponto de massa se movendo e, anexo a ele, em cada instante de tempo, um referencial inercial que tem este ponto como sua origem. Se este ponto de massa não está sujeito a interações com outros corpos, podemos estabelecer o princípio da inércia da seguinte maneira:

Se um segundo referencial inercial equivalente é anexo a este ponto de massa em movimento, então, em cada instante de tempo, a velocidade do ponto de massa, no referencial galileano correspondente a este instante de tempo, é constante.

Daqui em diante, toda vez que nos referimos ao princípio da inércia, estaremos nos referindo ao princípio acima. Ele nos propiciará, mais a frente, utilizar o conceito de referenciais móveis, desenvolvida por Cartan.

Estaremos considerando, por enquanto, a noção de tempo absoluto.

Fixe um referencial galileano num ponto de massa em movimento, denote por T_0 sua tríade de coordenadas espaciais e introduza um campo de aceleração, análogo ao campo gravitacional,digamos (X,Y,Z). Então se a velocidade de um ponto de massa em relação à T_0 no tempo t for (u,v,w), tem-se que no tempo t+dt, a velocidade será igual à (u + Xdt, v+ Ydt, w + Zdt).

Agora, vamos anexar ao ponto de massa, nos tempos t e t + dt, as tríade T_1 e T_2, respectivamente, que são equivalentes a T_0 segundo princípio da inércia. Estas tríade definirão referenciais galileanos se eles estiverem num movimento retilínio uniforme em relação a T_0.

Sejam (a,b,c) e (a',b',c') as velocidades de translação de T_1 e T_2, respectivamente, em relação a T_0. Teremos, que a velocidade do ponto de massa relativa ao referencial galileano anexado a ele no tempo t será igual a

(u - a, v - b, w - c)

Analogamente, temos que a velocidade do ponto de massa no referencial galileano anexado no tempo t + dt será

(u + Xdt - a', v + Ydt + b', w + Zdt - c).

Além disso temos que velocidade de T_2 em relação a T_1 é igual a

(a' - a, b' - b, c' - c).

Assim, para que a noção de equivalência acima seja válido, precisamos que

(u - a,v - b,w - c)=(u + Xdt - a', v + Ydt + b', w + Zdt - c), ou seja,

(a' - a, b' - b , c' - c)=(Xdt, Ydt, Zdt).

Concluimos que, a definição de referenciais equivalentes dada anteriormente pode ser dada da seguinte maneira: *dois referenciais serão chamados equivalentes se eles movem-se entre si, com velocidade dada pelas coordenadas do campos de forças.*

3.2 Relações entre espaço-tempo, geometria e matéria

Se admitirmos que as condições determinando a equivalência de 2 referenciais inerciais, com origens infinitamente próximos, definem propriedades físicas e geométricas do espaço-tempo, então os fenômenos gravitacionais podem ser deslocados do domínio da física para o domínio da geometria. Essa hipótese é bastante admissível, uma vez que as relações

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -4\pi\rho$$

produzem uma formulação completa das leis de gravitação newtoniana.

A primeira equação, em coordenadas ortogonais, mantém as propriedades da estrutura geométrica de espaço-tempo. A segunda, mostra que a densidade de matéria, em um meio contínuo, é a manifestação física de uma propriedade geométrica de espaço-tempo. Note que essa formulação, de certa forma, restaura algumas características da teoria da gravidade de Einstein dentro do quadro da mecânica clássica, uma vez que, segundo Einstein, a gravidade é devida a uma curvatura do espaço-tempo provocada pela presença de matéria.

Dessa forma, as componentes do campo gravitacional (X,Y,Z) capturam a estrutura geométrica básica de espaço-tempo.

Um questionamento natural que segue das observações acima é: A redução da gravitação à geometria ocorre somente para uma definição epecífica de equivalência de 2 referenciais inerciais infinitamente próximos? Na seção 2.6, veremos que até que a dinâmica de um ponto de massa seja afetada, existe um número infinito de definições de equivalência de referenciais galileanos com origens infinitamente próximos.

3.3 O espaço tempo 4-dimensional e a dinâmica dos meios contínuos

3.3.1 O espaço-tempo 4-dimensional

Definição 3.1. *Seja M um conjunto não-vazio cujos elementos são chamados de eventos, V um espaço vetorial e* $f : M \times M \longrightarrow V$ *sobrejetora definida por f(c,a) = a - c. O conjunto M será chamado* ***espaço afim associado ao espaço vetorial V*** *se:*

a) Dado $c \in M$ *e* $v \in V$*, existe um único ponto* $a \in M$ *tal que v = a - c;*

b)Se v = b - a e w = c - b, então v+w=c-a

Definição 3.2. *Seja M um espaço afim e V o espaço vetorial associado. Um subconjunto não-vazio N de M será chamada* ***variedade afim*** *se para algum ponto a de M, o conjunto de vetores* $A = \{b - a;\, b \in M\}$ *for um subespaço vetorial de V.*

Trataremos espaço-tempo como uma variedade 4-dimensional afim, na mecânica clássica. Em relação à um referencial galileano, um vetor do espaço-tempo pode ser escrito como (t' - t, x' - x, y' - y, z' - z), onde (t, x, y, z) e (t', x', y', z') são dois eventos e representam a origem e extremidade deste vetor, respectivamente.

Cabe observar que como estamos considerando o tempo absoluto, o componente temporal de um vetor do espaço-tempo independe da escolha do referencial. O mesmo não ocorre para as componentes espaciais, cujas componentes, juntamente com a tríade T, definem um dado referencial galileano. Além disso, vimos anteriormente, que o vetor espacial (x' - x, y' - y, z'-z) depende também da velocidade de sua tríade em relação ao espaço absoluto.

Vamos, a partir de agora, construir um vetor que será de suma importância neste trabalho e que nos dará relevantes resultados ao longo deste capítulo: O vetor **momento-massa**.

Considere um ponto de massa movendo-se em relação à um referencial galileano. Neste referencial, o vetor espaço-tempo, com origem no tempo t e extremidade no tempo t + dt é dado por (dt, dx, dy, dz).

Sendo m igual a massa de uma partícula, os vetores $\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ e $\left(m, m\frac{dx}{dt}, m\frac{dy}{dt}, m\frac{dz}{dt}\right)$ independem da escolha do referencial inercial. Isso se deve ao fato de a massa, o intervalo de tempo e a velocidade serem independentes da escolha do referencial, onde a última afirmação segue da lei da inércia. Ao último vetor, damos o nome de **vetor momento-massa**. É fácil verificar que a derivada temporal do vetor momento-massa é igual ao vetor espacial força, ou seja, valem o princípio da conservação de massa e a lei que relaciona a força à aceleração.

3.3.2 Dinâmica clássica dos meios contínuos

As considerações desta subseção serão acerca de um meio contínuo equipado com um referencial galileano. Nosso objetivo será chegar em um vetor momento-massa neste meio, usando uma estratégia análoga à que utilizamos para meios não contínuos, além, de observar suas propriedades. Para isto, vamos fixar um volume 3-dimensional no espaço tempo. Por (CARTAN, 1922) temos que a massa total contida neste volume é dado pela integral

$$\iiint \rho dxdydz - \rho udydzdt - \rho vdzdxdt - \rho wdxdydt$$

onde ρ e u, v, w denotam, respectivamente, a densidade e as componentes da velocidade de cada elemento de matéria. Assumindo que a matéria é livre de pressão e tensão, o componente x do momento do mesmo volume será dado por

$$\iiint \rho udxdydz - \rho u^2 dydzdt - \rho uvdzdxdt - \rho uwdxdydt$$

Da mesma forma, as componentes y e z do momento serão dados por

$$\iiint \rho vdxdydz - \rho vudydzdt - \rho v^2 dzdxdt - \rho vwdxdydt$$

$$\iiint \rho wdxdydz - \rho wudydzdt - \rho wvdzdxdt - \rho w^2 dxdydt$$

respectivamente.

Vamos denotar os integrandos destas integrais por Π, Π_x, Π_y e Π_z e definí-las como as quatro componentes do **vetor momento massa de um elemento de matéria do meio**.

Teorema 3.1. *A derivada exterior do campo momento-massa é igual à Fdt, onde F é o campo de forças.*

Demonstração 3.1. *Primeiramente, note que*

$$\boldsymbol{d}\Pi = d(\rho)dx \wedge dy \wedge dz - d(\rho u)dy \wedge dz \wedge dt - d(\rho v)dz \wedge dx \wedge dt - d(\rho w)dx \wedge dy \wedge dt$$

$$= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}dt + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx + \frac{\partial \rho}{\partial y}dy + \frac{\partial \rho}{\partial z}dz\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$- \left[\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}dt + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z}dz\right)\right] dy \wedge dz \wedge dt$$

$$- \left[\left(\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}dt + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}dx + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z}dz\right)\right] dz \wedge dx \wedge dt$$

$$- \left[\left(\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} dt + \frac{\partial(\rho w)}{\partial x} dx + \frac{\partial(\rho w)}{\partial y} dy + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz \right) \right] dx \wedge dy \wedge dt$$
$$= \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

De onde temos

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] = 0$$

pelo princípio de conservação da massa.

Além disso,

$$\boldsymbol{d}\Pi_x \quad = \quad \left[\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \right] dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Mas

$$\left[\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} \right] =$$
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} u + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} u + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} u + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} u + \rho w \frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$
$$= \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$
$$= \rho \frac{du}{dt} = \frac{m}{dx \wedge dy \wedge dz} \frac{du}{dt} = F_1$$

onde F_1 é o componente x da força por unidade de volume.

Cálculos análogos nos darão que

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = F_2$$
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = F_3$$

De onde segue o resultado. ■

O caso geral pode ser reduzido ao anterior definindo o **momento generalizado de um elemento de matéria** que é obtido acrescentando as componentes Π_x, Π_y e Π_z do vetor momento-massa, respectivamente, as componentes

$-p_{xx}dydzdt - p_{xy}dzdxdt - p_{xz}dxdydt$

$$-p_{yx}dydzdt - p_{yy}dzdxdt - p_{yz}dxdydt$$

$$-p_{zx}dydzdt - p_{zy}dzdxdt - p_{zz}dxdydt$$

que nos dará as equações abaixo:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = X$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = Y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z$$

onde X, Y, Z são as componentes da aceleração devida à gravidade.

Estas três últimas equações são as conhecidas **equações de Euler** e são umas das equações fundamentais da dinâmica de fluidos.

Outro aspecto importante da dinâmica de um corpo é conhecido como **momento angular**. Sabemos que o momento angular de um elemento de matéria de um meio contínuo é dado por $\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times m\overrightarrow{V}$, onde $\overrightarrow{V}$ é o vetor velocidade e $\overrightarrow{r}$ é o vetor posição de cada elemento de matéria, respectivamente. Assim, considerando a ausência de pressão, as componentes do momento angular, no bordo 3-dimensional de um volume arbitrário do espaço-tempo são dados por

$$\int\limits_{\partial V} (y\Pi_z - z\Pi_y) = \int\limits_{V} (yF_3 - zF_2)dt$$

$$\int\limits_{\partial V} (z\Pi_x - x\Pi_z) = \int\limits_{V} (zF_1 - xF_3)dt$$

$$\int\limits_{\partial V} (x\Pi_y - y\Pi_x) = \int\limits_{V} (xF_2 - yF_1)dt$$

A igualdade segue do teorema de Stokes e das igualdades abaixo que, na ausência de pressão, são imediatamente satisfeitas:

$$dy \wedge \Pi_z - dz \wedge \Pi_y = 0$$

$$dz \wedge \Pi_x - dx \wedge \Pi_z = 0$$

$$dx \wedge \Pi_y - dy \wedge \Pi_x = 0$$

No caso geral, essas equações se mantêm considerando-se

$p_{zy} - p_{yz} = 0$

$p_{xz} - p_{zx} = 0$

$p_{yx} - p_{xy} = 0$

Os resultados obtidos, até agora, neste capítulo, podem ser expressados usando uma notação vetorial:

Sejam $e_0 = (1, 0, 0, 0), e_1 = (0, 1, 0, 0), e_2 = (0, 0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 0, 1)$. Nesta notação, o vetor momento-massa de uma partícula de massa m, é dado por

$$m\left(e_0 + \frac{dx}{dt}e_1 + \frac{dy}{dt}e_2 + \frac{dz}{dt}e_3\right)$$

Seja **m** = (t, x, y, z) um ponto do espaço-tempo, então a derivada deste ponto em relação ao tempo é o vetor $\left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ do espaço- tempo. Logo, o momento-massa de uma partícula é dado por $m\frac{d\mathbf{m}}{dt}$.

Agora vamos mergulhar o espaço-tempo em $\mathbb{R}^5$, considerando $\mathbf{m} = te_0 + xe_1 + ye_2 + ze_3 + e_4$ e tomar um segundo ponto **m'** $= t'e_0 + x'e_1 + y'e_2 + z'e_3 + e_4$. Assim, o vetor **m**$\wedge$**m'**, chamado por Cartan de *vetor deslizante*, cuja origem e extremidade encontram-se, respectivamente, nos pontos **m** e **m'** do espaço-tempo, é escrito da forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m} \wedge \mathbf{m}' &= (t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \wedge (t'\mathbf{e}_0 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) \\
&= (tx' - t'x)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1 + (ty' - t'y)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2 + (tz' - t'z)\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&+ (xy' - x'y)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + (xz' - x'z)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + (yz' - y'z)\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\
&+ (t - t')\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_4 + (x - x')\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + (y - y')\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + (z - z')\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.
\end{aligned}$$

Proposição 3.1. *O vetor deslizante* $m\left(\boldsymbol{m} \wedge \frac{d\boldsymbol{m}}{dt}\right)$*, cuja origem se encontra no ponto* $\boldsymbol{m}$ *do espaço-tempo, carrega consigo o momento-massa de uma partícula.*

Demonstração 2.1. Basta notarmos que

$$
\begin{aligned}
m\left(\mathbf{m}\wedge\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right) &= m(t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)\wedge(\mathbf{e}_0 + x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2 + z'\mathbf{e}_3)+\\
&+ m(t-1)\mathbf{e}_{0,4} + m(x-\frac{dx}{dt})\mathbf{e}_{1,4} + m(y-\frac{dy}{dt})\mathbf{e}_{2,4} + m(z-\frac{dz}{dt})\mathbf{e}_{3,4}\\
&= m(t\frac{dx}{dt}-x)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_1 + m(t\frac{dy}{dt}-y)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_2 + m(t\frac{dz}{dt}-z)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_3\\
&+ m(x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + m(x\frac{dz}{dt}-\frac{dx}{dt}z)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 + m(y\frac{dz}{dt}-\frac{dy}{dt}z)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\\
&- \left(m\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4\right).
\end{aligned}
$$

Teorema 3.2. *A derivada temporal do vetor móvel* $m\left(\mathbf{m}\wedge\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right)$ *é igual ao vetor móvel* $\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{F}$*, onde* $\boldsymbol{F} = (0, F_x, F_y, F_z)$

Demonstração 3.2. *Pelo que acabamos de mostrar,*

$$
\begin{aligned}
m\left(\mathbf{m}\wedge\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right) &= m(t\frac{dx}{dt}-x)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_1 + m(t\frac{dy}{dt}-y)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_2 + m(t\frac{dz}{dt}-z)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_3\\
&+ m(x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + m(x\frac{dz}{dt}-\frac{dx}{dt}z)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 + m(y\frac{dz}{dt}-\frac{dy}{dt}z)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\\
&- \left(m\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4 + m\frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4\right).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{m}\wedge\boldsymbol{F} &= m(t\mathbf{e}_0 + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4)\wedge(0\mathbf{e}_0 + X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3)\\
&- (0\mathbf{e}_{0,4} + X\mathbf{e}_{1,4} + Y\mathbf{e}_{2,4} + Z\mathbf{e}_{3,4})\\
&= (mtX)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_1 + (mtY)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_2 + (mtZ)\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_3\\
&+ m(xY-yX)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + m(xZ-zX)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 + m(yZ-zY)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\\
&- (0\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_4 + X\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_4 + Y\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_4 + Z\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4)
\end{aligned}
$$

Os teoremas de conservação de massa e momento angular e o princípio fundamental da dinâmica, expressos nas equações abaixo, nos dão o resultado desejado:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dm}{dt} = 0\\
&\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = F_y\\
&\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dx}{dt} - mx\right) = tF_y\\
&\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dz}{dt} - mz\right) = tF_z\\
&\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dz}{dt} - mz\right) = tF_z\\
&\frac{d}{dt}\left(mz\frac{dx}{dt} - mx\frac{dz}{dt}\right) = zF_x - xF_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = F_x\\
&\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = F_z\\
&\frac{d}{dt}\left(mt\frac{dy}{dt} - my\right) = tF_y\\
&\frac{d}{dt}\left(my\frac{dz}{dt} - mz\frac{dy}{dt}\right) = yF_z - zF_y\\
&\frac{d}{dt}\left(mx\frac{dy}{dt} - my\frac{dx}{dt}\right) = xF_y - yF_x \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

O teorema acima nos mostra que a equação

$$\frac{d}{dt}m\left(\mathbf{m}\wedge\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right)=\mathbf{m}\wedge\mathbf{F}$$

contém, de uma só vez, o princípio fundamental da dinâmica e o teorema do momento angular.

A partir de agora, retornaremos à mecânica dos meios contínuos.

Teorema 3.3. *Sejam*

$$G=\Pi\otimes\mathbf{e}_0+\Pi_x\otimes\mathbf{e}_1+\Pi_y\otimes\mathbf{e}_2+\Pi_z\otimes\mathbf{e}_3,$$

$$F=(Xdx\wedge dy\wedge dz)\otimes\mathbf{e}_1+(Ydx\wedge dy\wedge dz)\otimes\mathbf{e}_2)+(Zdx\wedge dy\wedge dz)\otimes\mathbf{e}_3,$$

$\mathbf{G}=\mathbf{m}\wedge G$ *e* $\mathbf{F}=\mathbf{m}\wedge F$.

Então $\boldsymbol{dG}=dt\wedge\boldsymbol{F}$, *onde* $\boldsymbol{d}$ *é derivada exterior.*

Demonstração 3.3. *De fato, sendo*

$dm=dte_0+dxe_1+dye_2+dze_3,$ *então*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{dG}&=m\wedge e_0\boldsymbol{d}\Pi+m\wedge e_1\boldsymbol{d}\Pi_x+m\wedge e_2\boldsymbol{d}\Pi_y+m\wedge e_3\boldsymbol{d}\Pi_z\\
&\quad+(dxe_1\wedge e_0+dye_2\wedge e_0+dze_3\wedge e_0)\Pi+(dte_0\wedge e_1+dye_2\wedge e_1+dze_3\wedge e_1)\Pi_x\\
&\quad+(dte_0\wedge e_2+dxe_1\wedge e_2+dze_3\wedge e_2)\Pi_y+(dte_0\wedge e_3+dxe_1\wedge e_3+dye_2\wedge e_3)\Pi_z\\
&=m\wedge e_0\boldsymbol{d}\Pi+m\wedge e_1\boldsymbol{d}\Pi_x+m\wedge e_2\boldsymbol{d}\Pi_y+m\wedge e_3\boldsymbol{d}\Pi_z\\
&\quad+e_0\wedge e_1(dt\wedge\Pi_x-dx\wedge\Pi)+e_0\wedge e_2(dt\wedge\Pi_y-dy\wedge\Pi)\\
&\quad+e_0\wedge e_3(dt\wedge\Pi_z-dz\wedge\Pi)+e_2\wedge e_3(dy\wedge\Pi_z-dz\wedge\Pi_y)\\
&\quad+e_3\wedge e_1(dz\wedge\Pi_x-dx\wedge\Pi_z)+e_1\wedge e_2(dx\wedge\Pi_y-dy\wedge\Pi_x)
\end{aligned}$$

Um cálculo simples mostra que as componentes de $e_i\wedge e_j$, *para todo i, j=0,1,2 3, na equação acima, são identicamente nulos. Agora basta lembrar que*

$$\boldsymbol{d}\Pi=0$$

$$\boldsymbol{d}\Pi_x=F_1dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=F_xdt,$$

$$\boldsymbol{d}\Pi_y=F_2dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=F_ydt,$$

$$\boldsymbol{d}\Pi_z=F_3dt\wedge dx\wedge dy\wedge dz=F_zdt,$$

De onde segue o resultado imediatamente.■

O importante resultado acima, nos mostra que numa só equação está encapsulada toda a dinâmica newtoniana de meios contínuos com um referencial fixo. Passemos agora à análise do mesmo resultado com referenciais móveis.

3.4 Conexão afim e equivalência entre referenciais

Nesta seção, veremos que o conceito de conexão aparece como um arcabouço geométrico adaptado ao sistema de equações que rege o sistema físico, sendo , portanto, associado ao grupo que preserva este último invariante. As principais referências utilizadas nesta seção são (CÂMARA, Versão preliminar de 26 de dezembro de 2013) e (CARMO, 1976).

Pensar em transformar um referencial arbitrário $\{e_i\}$ em, digamos, $\{e'_i\}$ equivalente ao primeiro, sendo estes bases do espaço afim associado a um espaço-tempo num ponto m, nos impulsiona, imediatamente, a pensar no estudo de matrizes de mudança de base, mas ao mesmo tempo, na necessidade de mantermos propriedades invariantes de figuras geométricas (equivalentemente a invariância de leis físicas). Nesse sentido, o estudo dos grupos de Lie associados às variedades nos fornece um excelente meio para alcançarmos estes objetivos.

Peço licença ao leitor para fazer uma brevíssima explanação de alguns conceitos básicos referente à grupos de Lie e álgebra de Lie. Um estudo rigoroso desses conceitos implicaria na necessidade de utilizar uma vasta bibliografia. Porém, nosso intuito é não desviar a atenção do nosso objetivo: estabelecer relações entre referenciais equivalentes e conexão afim.

Um grupo de Lie é definido como sendo uma variedade diferenciável munida de uma estrutura de grupo compatível com a estrutura de variedade diferenciável, no sentido de que o produto e a aplicação que leva um elemento no seu inverso são diferenciáveis. Estas características nos permite realizar estudos infinitesimais e aplicar regras fundamentais do cálculo, entre elas a derivação.

Uma álgebra **g** pode ser associada a cada grupo de Lie. A esta álgebra damos o nome de álgebra de Lie. Todo grupo de Lie é completamente determinado por sua álgebra de Lie (afirma um teorema fundamental de Lie). O estudo dos aspectos geométricos de um grupo de Lie é marcado pelas características algébricas de sua álgebra de Lie, já que a mesma se caracteriza como sendo o espaço vetorial dos campos de vetores invariantes à direita ou à esquerda e pode ser identificada com o espaço tangente na identidade do grupo.

Dessa forma, as relações de equivalência vão fazer os referenciais viverem num grupo de matrizes quadradas. Já as derivações indicam em certa forma a álgebra de Lie de matrizes, que é onde vivem os diferenciais entre referenciais equivalentes infinitamente próximos, em particular, as matrizes de formas de conexão que construiremos abaixo. Vejamos como isso se dá:

No espaço-tempo da mecânica newtoniana, o espaço 3-dimensional é um espaço euclideano. Como queremos estudar equivalência de referenciais em pontos infinitamente próximos, a derivada usual é, neste espaço 3-dimensional, uma ferramenta útil. Vamos então considerar um ponto m num aberto U do espaço-tempo newtoniano e considerar e_1, e_2, e_3 campos diferenciáveis de vetores em U, com origem em m. A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares pela condição $\omega^i(e_j) = \delta_{ij}$; em outras palavras, no ponto m $m \in U$, a base $\{\omega^i\}$ é a base dual da base $\{e_i\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega^i\}$ é chamado o **coreferencial** associado ao referencial $\{e_i\}$.

Vamos definir

$$d\mathbf{m} = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$$

Teremos que $d\mathbf{m}$ é a identidade do grupo de Lie associado ao espaço 3-demensional euclideano.(basta aplicarmos os campos $\{e_i\}$ para verificar este fato).

Agora, cada campo e_i, pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. A diferencial $de_i : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, em m, é uma aplicação linear. Portanto para todo $v \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever $(de_i).(v) = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j(v)e_j$, ou simplesmente

$$\begin{cases} de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

Como e_i é um campo diferenciável, ω_i^j é uma 1-forma diferencial linear. A matriz (ω_i^j) é chamada matriz das formas de conexão e, assim construída, vive na álgebra de Lie associada ao grupo de Lie que representa o espaço 3-dimensional do espaço tempo. Note, que como estamos tratando de um espaço euclideano, o espaço tangente à esta variedade é o próprio espaço euclideano, logo a derivada usual de cada campo é levada no próprio espaço. Isso é confirmado, ao escrevermos de_i como combinação linear dos campos e_j.

Até agora, tratamos do espaço 3-dimensional do espaço-tempo de Newton, que é euclideano. A pergunta que se segue é: Como generalizar as ideias acima para um espaço-tempo 4-dimensional não euclideano? Aqui surge a necessidade de utilizarmos novas geometrias.

Definição 3.3. *Sendo E um fibrado vetorial, $\pi_N : E \longrightarrow TM$ a projeção ortogonal em TM, então a aplicação $\nabla : \Gamma(TM) \longrightarrow \Lambda^1(M;TM)$ dada por $\nabla(s) = \pi_N \circ \nabla_E(s)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla(s_1) + \nabla(s_2)$;

(ii) $\nabla(f.s) = df \otimes +f.\nabla(s)$

*para todo $f \in C^\infty(M)$ e $s_1, s_2 \in \Gamma(TM)$. A aplicação ∇ é conhecida como **conexão afim** em TM.*

Finalmente, teremos as equações

$$\begin{cases} \nabla e_0 = \omega_0^0 e_0 + \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ \nabla e_1 = \omega_1^0 e_0 + \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ \nabla e_2 = \omega_2^0 e_0 + \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ \nabla e_3 = \omega_3^0 e_0 + \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

e definindo, agora,

$$d\mathbf{m} = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$$

que é, da mesma forma, a identidade do grupo de Lie assocoiado a um espaço-tempo, teremos uma matriz de formas de conexão (ω_i^j) que vive na álgebra de Lie associada ao grupo de Lie que representa um espaço-tempo 4-dimensional.

Cientes que em espaços não-euclideanos as derivações tratam-se de conexões afim, sem risco de confusão, manteremos a notação de Cartan:

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_0 = \omega_0^0 e_0 + \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^0 e_0 + \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^0 e_0 + \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^0 e_0 + \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

Dessa forma, estudarmos sistemas físicos através de referenciais inerciais associados a um grupo G é equivalente a estudar certas conexões afim com formas de conexão em **g**.

3.5 Dinâmica clássica de meios contínuos via conexão afim

Iremos agora estudar algumas das consequências da invariância das leis da mecânica com relação a referenciais inerciais e a uma conexão afim. Na mecânica clássica, o tempo é considerado ser absoluto. A nossa conexão afim será escrita da forma:

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_0 = \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

As componentes e_0 das equações acima são iguais a zero, pois se e_0, e_1, e_2, e_3 é um referencial qualquer num ponto (ou evento) do espaço-tempo, cada um destes vetores é definido pela diferença entre dois eventos no espaço-tempo. Como estamos considerando o tempo absoluto, a diferencial da função tempo será sempre igual a 1, logo a diferença será zero.

Nosso ω^0 será tão somente o intervalo de tempo infinitesimal entre dois pontos m e m'.

Vamos fazer uma pequena mudança na notação afim de obter simetria. Considere

$$\Pi_0 := \Pi = \rho\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \rho u_1 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 - \rho u_2 \omega^3 \wedge \omega^2 \wedge \omega^0 - \rho u_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^0$$

$$\Pi_1 := \Pi_x = \rho u_1 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \rho {u_1}^2 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 - \rho u_1 u_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^0 - \rho u_1 u_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^0$$

$$\Pi_2 := \Pi_y = \rho u_2 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \rho u_2 u_1 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 - \rho u_2^2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^0 - \rho u_2 u_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^0$$

$$\Pi_3 := \Pi_z = \rho u_3 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 - \rho u_3 u_1 \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 - \rho u_3 u_2 \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^0 - \rho u_3^2 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^0$$

respectivamente, as componentes do vetor momento-massa de um elemento de matéria num meio contínuo, onde u_1, u_2, u_3 são as velocidade neste novo sistema de coordenadas espaciais $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$.

Assim, o tensor momento-massa será escrito da forma $G = \Pi_0 \otimes \mathbf{e}_0 + \Pi_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \Pi_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \Pi_3 \otimes \mathbf{e}_3$ e o tensor momento-massa generalizado será dado por

$$\mathbf{G} = \mathbf{m} \wedge G = (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes \Pi_0 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes \Pi_1 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes \Pi_2 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes \Pi_3$$

Analogamente, a forma força é dada por $F = X\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \otimes \mathbf{e}_1 + Y\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \otimes \mathbf{e}_2 + Z\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \otimes \mathbf{e}_3$ e a força generalizada é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{m} \wedge F = (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes X\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes Y\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes Z\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Como não estamos mais considerando $\{\mathbf{e_0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ constantes, então

$$\begin{aligned}
d\mathbf{G} &= (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_0)\otimes d\Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_1)\otimes d\Pi_1 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_2)\otimes d\Pi_2 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_3)\otimes d\Pi_3\\
&\quad + (d\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_0)\otimes \Pi_0 + (d\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_1)\otimes \Pi_1 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_2)\otimes \Pi_2 + (d\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_3)\otimes \Pi_3\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge d\mathbf{e}_0)\otimes \Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge d\mathbf{e}_1)\otimes \Pi_1 + (\mathbf{m}\wedge d\mathbf{e}_2)\otimes \Pi_2 + (\mathbf{m}\wedge d\mathbf{e}_3)\otimes \Pi_3\\
&= (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_0)\otimes d\Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_1)\otimes d\Pi_1 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_2)\otimes d\Pi_2 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_3)\otimes d\Pi_3\\
&\quad + ([\omega^1\mathbf{e}_1+\omega^2\mathbf{e}_2+\omega^3\mathbf{e}_3]\wedge\mathbf{e}_0)\otimes\Pi_0 + ([\omega^0\mathbf{e}_0+\omega^2\mathbf{e}_2+\omega^3\mathbf{e}_3]\wedge\mathbf{e}_1)\otimes\Pi_1\\
&\quad + ([\omega^0\mathbf{e}_0+\omega^1\mathbf{e}_1+\omega^3\mathbf{e}_3]\wedge\mathbf{e}_2)\otimes\Pi_2 + ([\omega^0\mathbf{e}_0+\omega^1\mathbf{e}_1+\omega^2\mathbf{e}_2]\wedge\mathbf{e}_3)\otimes\Pi_3\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge(\omega_0^1\mathbf{e}_1+\omega_0^2\mathbf{e}_2+\omega_0^3\mathbf{e}_3))\otimes\Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge(\omega_1^1\mathbf{e}_1+\omega_1^2\mathbf{e}_2+\omega_1^3\mathbf{e}_3))\otimes\Pi_1\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge(\omega_2^1\mathbf{e}_1+\omega_2^2\mathbf{e}_2+\omega_2^3\mathbf{e}_3))\otimes\Pi_2 + (\mathbf{m}\wedge(\omega_3^1\mathbf{e}_1+\omega_3^2\mathbf{e}_2+\omega_3^3\mathbf{e}_3))\otimes\Pi_3\\
&= (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_0)\otimes d\Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_1)\otimes[d\Pi_1+\omega_0^1\otimes\Pi_0+\omega_1^1\otimes\Pi_1+\omega_2^1\otimes\Pi_2+\omega_3^1\otimes\Pi_3]\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_2)\otimes[d\Pi_2+\omega_0^2\otimes\Pi_0+\omega_1^2\otimes\Pi_1+\omega_2^2\otimes\Pi_2+\omega_3^2\otimes\Pi_3]\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_3)\otimes[d\Pi_3+\omega_0^3\otimes\Pi_0+\omega_1^3\otimes\Pi_1+\omega_2^3\otimes\Pi_2+\omega_3^3\otimes\Pi_3]\\
&\quad + (\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_1)\otimes[\omega^0\wedge\Pi_1-\omega^1\wedge\Pi_0] + (\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_2)\otimes[\omega^0\wedge\Pi_2-\omega^2\wedge\Pi_0]\\
&\quad + (\mathbf{e}_0\wedge\mathbf{e}_3)\otimes[\omega^0\wedge\Pi_3-\omega^3\wedge\Pi_0] + (\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2)\otimes[\omega^1\wedge\Pi_2-\omega^2\wedge\Pi_1]\\
&\quad + (\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3)\otimes[\omega^1\wedge\Pi_3-\omega^3\wedge\Pi_1] + (\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3)\otimes[\omega^2\wedge\Pi_3-\omega^3\wedge\Pi_2]
\end{aligned}$$

Note que

$$\omega^0\wedge\Pi_1-\omega^1\wedge\Pi_0 = \rho u_1\omega^0\wedge\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 - (-\rho u_1\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^0) = 0$$

Da mesma forma,

$$\omega^j\wedge\Pi_i-\omega^i\wedge\Pi_j = 0$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathbf{dG} &= (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_0)\otimes d\Pi_0 + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_1)\otimes[d\Pi_1+\omega_0^1\otimes\Pi_0+\omega_1^1\otimes\Pi_1+\omega_2^1\otimes\Pi_2+\omega_3^1\otimes\Pi_3]\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_2)\otimes[d\Pi_2+\omega_0^2\otimes\Pi_0+\omega_1^2\otimes\Pi_1+\omega_2^2\otimes\Pi_2+\omega_3^2\otimes\Pi_3]\\
&\quad + (\mathbf{m}\wedge\mathbf{e}_3)\otimes[d\Pi_3+\omega_0^3\otimes\Pi_0+\omega_1^3\otimes\Pi_1+\omega_2^3\otimes\Pi_2+\omega_3^3\otimes\Pi_3]
\end{aligned}$$

Como as leis da mecânica não se alteram sob mudança de referenciais inerciais equivalentes, conforme o teorema 2.3, devemos ter: $\mathbf{dG} =\omega^0\wedge\mathbf{F} = dt\wedge\mathbf{F}$ e

$$\omega_0^1\otimes\Pi_0+\omega_1^1\otimes\Pi_1+\omega_2^1\otimes\Pi_2+\omega_3^1\otimes\Pi_3 = 0 \tag{3.1}$$
$$\omega_0^2\otimes\Pi_0+\omega_1^2\otimes\Pi_1+\omega_2^2\otimes\Pi_2+\omega_3^2\otimes\Pi_3 = 0 \tag{3.2}$$
$$\omega_0^3\otimes\Pi_0+\omega_1^3\otimes\Pi_1+\omega_2^3\otimes\Pi_2+\omega_3^3\otimes\Pi_3 = 0 \tag{3.3}$$

Em outras palavras, afirmar que uma conexão afim satisfaz a equação $\mathbf{dG} = dt\wedge\mathbf{F}$ é equivalentemente a dizer que ela satisfaz as equações (2.1), (2.2) e (2.3). Uma conexão com esta característica será chamada **conexão adaptada**.

3.6 A conexão afim do espaço-tempo e a mecânica clássica

Vamos, agora, trabalhar com a hipótese de que uma definição arbitrária de equivalência entre vetores espaço-tempo, com origens infinitesimalmente próximas (i.e.,numa vizinhança), é dada. Teremos que as equações que definem a conexão linear no espaço-tempo, dada na seção anterior, preservariam suas formas, porém com coeficientes modificados.

Exemplo 3.1. *Se anexássemos a cada ponto do universo um outro sistema galileano dado por* $\overline{e_0} = e_0 + ue_1, \overline{e_1} = e_1, \overline{e_2} = e_2, \overline{e_3} = e_3$, *a equação que define* de_0 *seria modificada. Teríamos:*

$$d\overline{e_0} = de_0 + due_1 + ude_1$$

$$\overline{\omega}_0^1\overline{e_1} + \overline{\omega}_0^2\overline{e_2} + \overline{\omega}_0^3\overline{e_3} = \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 + due_1 + u(\omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3)$$

De onde,

$$\overline{\omega_0^1} = \omega_0^1 + du + u\omega_1^1$$

$$\overline{\omega_0^2} = \omega_0^2 + u\omega_1^2$$

$$\overline{\omega_0^3} = \omega_0^3 + u\omega_1^3$$

Vamos assumir, agora, que a única força presente é a força devida à gravidade. Se a definição de equivalência de dois sistemas galileanos infinitamente próximos, ou equivalentemente, a definição de equivalência de dois 4-vetores cujas origens são infinitamente próximas, é escolhida de modo a cancelar as forças gravitacionais, as equações da dinâmica reduziriam-se à $\mathbf{dG} = 0$. Fixando um referencial galileano e escolhendo para e_0, e_1, e_2, e_3 vetores que permanecem iguais aos vetores unitários deste sistema, tomaremos

$$\omega_0^1 = -Xdt, \omega_0^2 = -Ydt, \omega_0^3 = -Zdt$$

$$\omega_i^j = 0 \text{ para todo i,j=1,2,3}$$

Então, fazendo estas substituições acima na expressão

$$\begin{aligned}\mathbf{dG} = (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes d\Pi_0 + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes [d\Pi_1 + \omega_0^1 \otimes \Pi_0 + \omega_1^1 \otimes \Pi_1 + \omega_2^1 \otimes \Pi_2 + \omega_3^1 \otimes \Pi_3] \\ + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes [d\Pi_2 + \omega_0^2 \otimes \Pi_0 + \omega_1^2 \otimes \Pi_1 + \omega_2^2 \otimes \Pi_2 + \omega_3^2 \otimes \Pi_3] \\ + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes [d\Pi_3 + \omega_0^3 \otimes \Pi_0 + \omega_1^3 \otimes \Pi_1 + \omega_2^3 \otimes \Pi_2 + \omega_3^3 \otimes \Pi_3] = 0\end{aligned}$$

obtemos

$$\mathbf{d}\Pi_0 = 0$$

$$\mathbf{d}\Pi_1 - Xdt \wedge \Pi_0 = 0$$

$$\mathbf{d}\Pi_2 - Ydt \wedge \Pi_0 = 0$$

$$\mathbf{d}\Pi_3 - Zdt \wedge \Pi_0 = 0$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{d}\Pi_0 = 0$$

$$\mathbf{d}\Pi_1 = \rho X dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

$\mathbf{d}\Pi_2 = \rho Y dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$

$\mathbf{d}\Pi_3 = \rho Z dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$

Estas são as equações de dinâmica clássica de um meio contínuo que está sujeito à força por unidade de volume proporcional à massa. Para geometrizar a gravidade é suficiente escolher X, Y, Z como as componentes da aceleração devida à gravidade. O resultado obtido é análogo ao que levou para a dinâmica de uma partícula. De fato, as fórmulas

$de_0 = -X dt e_1 - Y dt e_2 - Z dt e_3$

$de_1 = de_2 = de_3 = 0$

implicam que dois sistemas galileanos com origens em (t, x, y, z) e em (t + dt, x + dx, y + dy, z + dz) devem ser considerados como equivalentes se as tríades correspondentes T e T' são equivalentes no senso usual e T' sofre uma translação retilínea e uniforme de velocidade (Xdt, Ydt, Zdt) em relação à T (ver seção 2.1).

Vamos admitir que uma dada definição de equivalência entre referenciais galileanos com origens infinitamente próximas dá origem à uma conexão afim no espaço-tempo. Teríamos que o fenômeno gravitacional seria compatível com várias conexões afins no espaço-tempo.

Se o sistema inteiro consiste de uma massa pequena, a correspondente conexão afim não dependerá do estado desta massa. Qualquer pequena modificação na conexão afim poderá ser escrita na forma:

$$\begin{cases} d\mathbf{m} = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_0 = (\omega_0^1 + \overline{\omega}_0^1)e_1 + (\omega_0^2 + \overline{\omega}_0^2)e_2 + \omega_0^3 + \overline{\omega}_0^3)e_3 \\ de_1 = (\omega_1^1 + \overline{\omega}_1^1)e_1 + (\omega_1^2 + \overline{\omega}_1^2)e_2 + (\omega_1^3 + \overline{\omega}_1^3)e_3 \\ de_2 = (\omega_2^1 + \overline{\omega}_2^1)e_1 + (\omega_2^2 + \overline{\omega}_2^2)e_2 + (\omega_2^3 + \overline{\omega}_2^3)e_3 \\ de_3 = (\omega_3^1 + \overline{\omega}_3^1)e_1 + (\omega_3^2 + \overline{\omega}_3^2)e_2 + (\omega_3^3 + \overline{\omega}_3^3)e_3 \end{cases}$$

e terá como consequência a adição dos termos abaixo, na expessão de **dG**:

$[\overline{\omega}_0^1 \otimes \Pi_0 + \overline{\omega}_1^1 \otimes \Pi_1 + \overline{\omega}_2^1 \otimes \Pi_2 + \overline{\omega}_3^1 \otimes \Pi_3] \otimes (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1)$

$[\overline{\omega}_0^2 \otimes \Pi_0 + \overline{\omega}_1^2 \otimes \Pi_1 + \overline{\omega}_2^2 \otimes \Pi_2 + \overline{\omega}_3^2 \otimes \Pi_3] \otimes (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2)$

$[\overline{\omega}_0^3 \otimes \Pi_0 + \overline{\omega}_1^3 \otimes \Pi_1 + \overline{\omega}_2^3 \otimes \Pi_2 + \overline{\omega}_3^3 \otimes \Pi_3] \otimes (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3)$

onde $\overline{\omega}_0^i, \overline{\omega}_i^j$ são os acréscimos nas componentes ω_0^i, ω_i^j da conexão afim, devida a uma dada alteração desta conexão. Logo, para que uma conexão afim modificada satisfaça a equação **dG**=0, ou equivalentemente, seja uma conexão adaptada, as possíveis modificações são as que fazem os três termos, entre parênteses, acima serem iguais a zero.

Proposição 3.2. *Seja* $\{d\boldsymbol{m}, de_0, de_1, de_2, de_3\}$ *uma conexão afim originada por uma definição de equivalência entre referenciais e* $\{\tilde{d\boldsymbol{m}}, \tilde{de_0}, \tilde{de_1}, \tilde{de_2}, \tilde{de_3}\}$ *uma conexão afim gerada por uma pequena modificação em* $\{d\boldsymbol{m}, de_0, de_1, de_2, de_3\}$*. Então*

$$\textstyle\sum_{j=0}^3 \overline{\omega}_j^i \wedge \Pi_j = 0$$

se, e somente se,

$$\overline{\omega}_0^i \otimes dt + \overline{\omega}_1^i \otimes dx + \overline{\omega}_2^i \otimes dy + \overline{\omega}_3^i \otimes dz = 0$$

para todo i = 1, 2, 3.

Antes de demonstrarmos a proposição acima, vamos fazer uma definição:

Definição 3.4. *Diremos que* $q : E^4 \longrightarrow R$ *é uma forma quadrática se existir um 2-tensor* $\tau : E^4 \times E^4 \longrightarrow R$ *tal que* $q(v) = \tau(v, v)$

De outra forma, sendo $D(E^4) = diag(E^4 \times E^4) = \{(u, v) \in E^4 \times E^4 / u = v\}$, então toda restrição de $\tau \in \Gamma^2(E^4)$ à $diag(E^4 \times E^4)$ é uma forma quadrática.

Demonstração 2.2. Note que $\overline{\omega}_j^i = \sum_{\ell=0}^{3} \gamma_{j\ell}^i dx^\ell$ deve satisfazer as equações

$$\sum_{j=0}^{3} \overline{\omega}_j^i \wedge \Pi_j = 0$$

onde

$$\begin{aligned}
\Pi_0 &= \rho dx^{1,2,3} - \rho u_1 dx^{2,3,0} - \rho u_2 dx^{3,1,0} - \rho u_3 dx^{1,2,0}, \\
\Pi_1 &= \rho u_1 dx^{1,2,3} - (\rho {u_1}^2 + p_{x_1x_1}) dx^{2,3,0} - (\rho u_1 u_2 + p_{x_1x_2}) u_2 dx^{3,1,0} - (\rho u_1 u_3 + p_{x_1x_3}) dx^{1,2,0}, \\
\Pi_2 &= \rho u_2 dx^{1,2,3} - (\rho u_2 u_1 + p_{x_2x_1}) dx^{2,3,0} - (\rho u_2^2 + p_{x_2x_2}) dx^{3,1,0} - (\rho u_2 u_3 + p_{x_2x_3}) dx^{1,2,0}, \\
\Pi_3 &= \rho u_3 dx^{1,2,3} - (\rho u_3 u_1 + p_{x_3x_1}) dx^{2,3,0} - (\rho u_3 u_2 + p_{x_3x_2}) dx^{3,1,0} - (\rho u_3^2 + p_{x_3x_3}) dx^{1,2,0}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_0^i \wedge \Pi_0 &= \rho \gamma_{00}^i dx^0 \wedge dx^{1,2,3} - \rho u_1 \gamma_{01}^i dx^1 \wedge dx^{2,3,0} - \rho u_2 \gamma_{02}^i dx^2 \wedge dx^{3,1,0} - \rho u_3 \gamma_{03}^i dx^3 \wedge dx^{1,2,0} \\
&= (\rho \gamma_{00}^i + \rho u_1 \gamma_{01}^i + \rho u_2 \gamma_{02}^i + \rho u_3 \gamma_{03}^i) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
\end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_j^i \wedge \Pi_j &= \rho u_j \gamma_{j0}^i dx^0 \wedge dx^{1,2,3} - (\rho u_1 u_j + p_{x_jx_1}) \gamma_{j1}^i dx^1 \wedge dx^{2,3,0} - (\rho u_2 u_j + p_{x_jx_2}) \gamma_{j2}^i dx^2 \wedge dx^{3,1,0} \\
&\quad - (\rho u_3 u_j + p_{x_jx_3}) \gamma_{j3}^i dx^3 \wedge dx^{1,2,0} \\
&= (\rho u_j \gamma_{j0}^i + (\rho u_1 u_j + p_{x_jx_1}) \gamma_{j1}^i + (\rho u_2 u_j + p_{x_jx_2}) \gamma_{j2}^i + (\rho u_3 u_j + p_{x_jx_3}) \gamma_{j3}^i) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge d
\end{aligned}$$

para $j = 1, 2, 3$. Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{3} \overline{\omega}_j^i \wedge \Pi_j &= \rho \gamma_{00}^i + \rho u_1 (\gamma_{0,1}^i + \gamma_{1,0}^i) + \rho u_2 (\gamma_{0,2}^i + \gamma_{2,0}^i) + \rho u_3 (\gamma_{0,3}^i + \gamma_{3,0}^i) \\
&\quad + (\rho (u_1)^2 + p_{x_1x_1}) \gamma_{11}^i + (\rho (u_2)^2 + p_{x_2x_2}) \gamma_{22}^i + (\rho (u_3)^2 + p_{x_3x_3}) \gamma_{33}^i \\
&\quad + (\rho u_1 u_2 + p_{x_1x_2}) (\gamma_{1,2}^i + \gamma_{2,1}^i) + (\rho u_1 u_3 + p_{x_1x_3}) (\gamma_{1,3}^i + \gamma_{3,1}^i) \\
&\quad + (\rho u_2 u_3 + p_{x_2x_3}) (\gamma_{2,3}^i + \gamma_{3,2}^i).
\end{aligned}$$

como $\sum_{j=0}^{3} \overline{\omega}_j^i \wedge \Pi_j$ é igual a zero independentemente de ρ, u_j e $p_{x_ix_j}$, então devemos ter

$$\gamma_{0,j}^i + \gamma_{j,0}^i = 0, \quad \gamma_{k,\ell}^i + \gamma_{\ell,k}^i = 0$$

para todo $i = 1, 2, 3$ para todo $j, k = 0, 1, 2, 3$.

Mas as igualdades acima são verdadeiras se, e somente se, as formas quadráticas

$$\overline{\omega}_0^i \otimes dt + \overline{\omega}_1^i \otimes dx + \overline{\omega}_2^i \otimes dy + \overline{\omega}_3^i \otimes dz = 0 \text{ para todo i = 1, 2, 3}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_0^i \otimes dt + \overline{\omega}_1^i \otimes dx + \overline{\omega}_2^i \otimes dy + \overline{\omega}_3^i \otimes dz &= (\gamma_{00}^i dt + \gamma_{01}^i dx + \gamma_{02}^i dy + \gamma_{03}^i dz) \otimes dt \\ &+ (\gamma_{10}^i dt + \gamma_{11}^i dx + \gamma_{12}^i dy + \gamma_{13}^i dz) \otimes dx \\ &+ (\gamma_{20}^i dt + \gamma_{21}^i dx + \gamma_{22}^i dy + \gamma_{23}^i dz) \otimes dy \\ &+ (\gamma_{30}^i dt + \gamma_{31}^i dx + \gamma_{32}^i dy + \gamma_{33}^i dz) \otimes dz \\ &= (\gamma_{01}^i + \gamma_{10}^i) dx \otimes dt + (\gamma_{02}^i + \gamma_{20}^i) dy \otimes dt \\ &+ (\gamma_{03}^i + \gamma_{30}^i) dy \otimes dt + (\gamma_{12}^i + \gamma_{21}^i) dy \otimes dx \\ &+ (\gamma_{13}^i + \gamma_{31}^i) dz \otimes dx + (\gamma_{23}^i + \gamma_{32}^i) dz \otimes dy \\ &= 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\gamma_{0j}^i + \gamma_{j0}^i = 0 \quad e \quad \gamma_{jk}^i + \gamma_{kj}^i = 0. \blacksquare$$

3.7 Espaço-tempo da relatividade especial e sua conexão afim

Na relatividade especial, assim como na mecânica clássica, são admitidos os sistemas de referenciais inerciais ou galileanos. Porém, como na relatividade especial o tempo depende do referencial escolhido, as leis que transformam as coordenadas de um evento em um referencial S em coordenadas de um outro referencial inercial S' serão modificadas. Ao invés das transformações de Galileu são utilizadas as transformações de Lorentz.

O espaço-tempo relativístico ainda é um espaço afim e este é tratado, por Cartan, como uma derivação do conceito de equivalência, ou invariância, entre vetores do espaço-tempo. Neste caso, o elemento de comprimento invariante é $ds^2 = c^2(t'-t)^2 - (x'-x) - (y'-y) - (z'-z)$, onde c é a velocidade da luz no vácuo. Consequência imediata da invariância da distância entre dois vetores dados pela pseudo-métrica acima, é que o produto escalar entre dois vetores é também invariante. Vamos considerar e_0, e_1, e_2, e_3, vetores unitários anexos ao referencial galileano com as seguinte propriedade:

$$(e_0)^2 = c^2, \quad (e_1)^2 = (e_2)^2 = (e_3)^2 = -1, \quad e_0.\, e_i = 0, \quad e_1.\, e_j = 0 \text{ para } i \neq j \qquad \text{(I)}$$

Considerando um referencial móvel, nossa conexão linear aqui será dada por

$$\begin{cases} de_0 = \omega_0^0 e_0 + \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^0 e_0 e_0 + \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^0 e_0 + \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^0 e_0 + \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

onde cada 1-forma ω_i^j é combinação linear dos diferenciais das funções que classificam pontos do espaço-tempo, sujeita às restrições

$$\omega_0^0 = 0, \quad \omega_0^i = c^2 \omega_i^0 \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0, \text{ com i, j = 1, 2, 3.} \qquad \text{(II)}$$

dadas pela derivação das equações (I) desta seção. Aqui, também, os coeficientes ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3 representam a velocidade de translação dos eixos de um segundo referencial galileano S' em relação à um primeiro S. No limite, quando c tende ao infinito, as equações (II) reduzem-se às leis relacionando dois referenciais galileanos na mecânica clássica.

Na relatividade especial, a noção de vetor momento-massa continua a ser a base da dinâmica de partículas pontuais e ainda poderá ser dado por

$$m\left(e_0 + e_1\tfrac{dx}{dt} + e_2\tfrac{dy}{dt} + e_3\tfrac{dz}{dt}\right)$$

após fazermos algumas definições. Isto será necessário pois, utilizando a mesma definição de momento linear da mecânica newtoniana, ao mudarmos de um referencial S para um referencial S', via transformações de Lorentz, o momento linear não será conservado no caso de ausência de forças externas, devido as modificações nas velocidades impostas pelas transformações de Lorentz. A forma encontrada, por Einstein, para resolver esse impasse foi alterar o conceito clássico de momento-linear.

Definição 3.5. *A* ***massa de repouso de uma partícula****, denotada por μ, é definida pela raíz quadrada do produto escalar do vetor momento-massa por ele mesmo, ou seja,*

$$\mu = m\sqrt{1-\tfrac{V^2}{c^2}}, \quad \textit{onde } V = (\tfrac{dx}{dt})^2 + (\tfrac{dy}{dt})^2 + (\tfrac{dz}{dt})^2$$

A massa de repouso é um valor correpondente à cada partícula pontual assim como a massa usual em mecânica clássica.

Agora, através das transformações de Lorentz é possível relacionar um intervalo de tempo dt mensurado por um referencial S ao observar o seu sistema de relógios estáticos e o intervalo de tempo τ que será por ele inferido via valores registrados através de um relógio móvel atrelado à origem de um referencial S' que dele afaste-se com uma velocidade da qual V dependa. Chamaremos de dt o tempo próprio da partícula, e teremos a seguinte relação que nos dará a dilatação do tempo na relatividade especial:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \tfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2}} = \sqrt{1-\tfrac{V^2}{c^2}}dt = \tfrac{\mu}{m}dt$$

Assim, a expressão do vetor momento-massa ganhará a forma generalizada abaixo, onde agora é válida a lei de conservação do momento linear.

$\mu\left(\tfrac{dt}{d\tau}e_0 + \tfrac{dx}{d\tau}e_1 + \tfrac{dy}{d\tau}e_2 + \tfrac{dz}{d\tau}e_3\right)$, onde μ e $d\tau$, por definição, independem da escolha do referencial.

Do mesmo modo como fizemos na mecânica clássica, poderemos estabelecer o princípio fundamental da mecânica relativística através da derivação do vetor momento-massa em relação a $d\tau$. Esta derivada será igual ao chamado *hiperforça* $Re_0 + Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$ que, conforme devíamos esperar, independe da escolha do referencial:

Proposição 3.3. *O vetor hiperforça independe da escolha do referencial*

Demonstração 2.3. Basta observarmos que

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}X$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Y$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}Z$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}R$$

Por outro lado, o fato da massa de repouso ser constante, implica em restrições entre R, X, Y e Z: Temos que

$$c^2m\frac{dm}{dt} - m\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) - m\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) - m\frac{dz}{dt}\frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right) = 0 \qquad (III)$$

Ou seja, o produto escalar entre o vetor hiperforça e o vetor momento-energia relativístico é igual a zero. Isso se deve à invariâcia do produto interno de um vetor por ele mesmo. Demais basta notar que a derivada do produto interno do vetor momento-massa por ele mesmo em relação ao tempo apropriado será igual a zero.

Substituindo os termos dados na proposição 2.3 na equação acima, teremos:

$$c^2Rdt = Xdx + Ydy + Zdz \qquad \text{(IV)}$$

Essa relação expressa o fato que o trabalho infinitesimal feito pela força é igual à variação em $mc^2 = \mu\gamma c^2$, onde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$. De fato, note que a expressão (IV) implica que $\dfrac{d}{d\tau}(c^2\gamma\mu) = Fv\gamma$, mas $Fv\gamma = \dfrac{dW}{d\tau}$, onde W é o trabalho realizado pelas forças aplicadas. Desde que a variação de energia é dada pela variação do trabalho executado, tem-se que $E = c^2\gamma\mu$. Cabe observar que

$$mc^2 = \mu c^2\left(1 - \tfrac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \mu c^2 + \tfrac{1}{2}\mu v^2$$

se v for muito pequena comparada à c (basta fazermos o desenvolvimento em série binomial).

3.8 A dinâmica dos meios contínuos e a relatividade especial

Vamos supor que todas as forças por unidade de volume são ausentes. Vimos nas seções anteriores, na dinâmica clássica e na dinâmica de meios contínuos, as equações são essencialmente as mesmas: Basta introduzirmos o vetor momento-massa de um elemento de matéria na forma

$$G = (m \wedge e_0)\Pi + (m \wedge e_1)\Pi_x + (m \wedge e_2)\Pi_y + (m \wedge e_3)\Pi_z$$

e definirmos sua derivada exterior como sendo identicamente nula.

Se equiparmos o meio contínuo com um referencial galileano fixo, as componentes Π, Π_x, Π_y, Π_z podem ser expressos como:

$$\Pi = \rho dx \wedge dy \wedge dz - \rho u dy \wedge dz \wedge dt - \rho v dz \wedge dx \wedge dt - \rho w dx \wedge dy \wedge dt$$

$$\Pi_x = u\Pi - p_{xx}dy \wedge dz \wedge dt - p_{xy}dz \wedge dx \wedge dt - p_{xz}dx \wedge dy \wedge dt$$

$$\Pi_y = v\Pi - p_{yx}dy \wedge dz \wedge dt - p_{yy}dz \wedge dx \wedge dt - p_{yz}dx \wedge dy \wedge dt$$

$$\Pi_x = w\Pi - p_{zx}dy \wedge dz \wedge dt - p_{zy}dz \wedge dx \wedge dt - p_{zz}dx \wedge dy \wedge dt$$

A densidade de matéria ρ_0, em seu referencial de repouso, será dada por:

$$\rho_0 dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = dt \wedge \Pi - \left(\frac{1}{c^2}\right) dx \wedge \Pi_x - \left(\frac{1}{c^2}\right) dy \wedge \Pi_y - \left(\frac{1}{c^2}\right) dz \wedge \Pi_z,$$

onde o lado direito invariante, uma vez que é o produto escalar dos vetores (dt,dx,dy,dz) e $(\Pi, \Pi_x, \Pi_y, \Pi_z)$. Note que se fizermos c tender ao infinito, as duas densidades serão iguais.

A equação acima também pode ser escrita da forma:

$$\rho_0 = \rho\left(1 - \frac{u^2 + v^2 + z^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}),$$

Para verificar isso, basta substituirmos Π, Π_x, Π_y, Π_z pelas suas correspondentes expressões e levar em conta as relações (II) da seção anterior.

Assim, se considerarmos a ausência de forças externas e um referencial inercial variável em cada ponto do espaço-tempo teremos que as equações da dinâmica de meios contínuos serão idênticas as da mecânica clássica:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{G} &= (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes d\Pi + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes d\Pi_x + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes d\Pi_y + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes d\Pi_z \\
&+ (d\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes \Pi + (d\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes \Pi_x + (d\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes \Pi_y + (d\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes \Pi_z \\
&+ (\mathbf{m} \wedge d\mathbf{e}_0) \otimes \Pi + (\mathbf{m} \wedge d\mathbf{e}_1) \otimes \Pi_x + (\mathbf{m} \wedge d\mathbf{e}_2) \otimes \Pi_y + (\mathbf{m} \wedge d\mathbf{e}_3) \otimes \Pi_z \\
&= (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes d\Pi + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes d\Pi_x + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes d\Pi_y + (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes d\Pi_z \\
&+ ([\omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3] \wedge \mathbf{e}_0) \otimes \Pi + ([\omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3] \wedge \mathbf{e}_1) \otimes \Pi_x \\
&+ ([\omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^3 \mathbf{e}_3] \wedge \mathbf{e}_2) \otimes \Pi_y + ([\omega^0 \mathbf{e}_0 + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2] \wedge \mathbf{e}_3) \otimes \Pi_z \\
&+ (\mathbf{m} \wedge (\omega_0^1 \mathbf{e}_1 + \omega_0^2 \mathbf{e}_2 + \omega_0^3 \mathbf{e}_3)) \otimes \Pi + (\mathbf{m} \wedge (\omega_1^0 \mathbf{e}_0 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3)) \otimes \Pi_x \\
&+ (\mathbf{m} \wedge (\omega_2^0 e_0 + \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3)) \otimes \Pi_y + (\mathbf{m} \wedge (\omega_3^0 e_0 + \omega_3^1 \mathbf{e}_1 + \omega_3^2 \mathbf{e}_2)) \otimes \Pi_z \\
&= (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_0) \otimes [d\Pi + \omega_1^0 \otimes \Pi_x + \omega_2^0 \otimes \Pi_y + \omega_3^0 \otimes \Pi_z] \\
&+ (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_1) \otimes [d\Pi_x + \omega_0^1 \otimes \Pi + \omega_2^1 \otimes \Pi_y + \omega_3^1 \otimes \Pi_z] \\
&+ (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_2) \otimes [d\Pi_y + \omega_0^2 \otimes \Pi + \omega_1^2 \otimes \Pi_x + \omega_3^2 \otimes \Pi_z] \\
&+ (\mathbf{m} \wedge \mathbf{e}_3) \otimes [d\Pi_z + \omega_0^3 \otimes \Pi + \omega_1^3 \otimes \Pi_x + \omega_2^3 \otimes \Pi_y] \\
&+ (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_1) \otimes [\omega^0 \wedge \Pi_x - \omega^1 \wedge \Pi] + (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_2) \otimes [\omega^0 \wedge \Pi_y - \omega^2 \wedge \Pi] \\
&+ (\mathbf{e}_0 \wedge \mathbf{e}_3) \otimes [\omega^0 \wedge \Pi_z - \omega^3 \wedge \Pi] + (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \otimes [\omega^1 \wedge \Pi_y - \omega^2 \wedge \Pi_x] \\
&+ (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \otimes [\omega^1 \wedge \Pi_z - \omega^3 \wedge \Pi_x] + (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \otimes [\omega^2 \wedge \Pi_z - \omega^3 \wedge \Pi_y]
\end{aligned}$$

Na relatividade também definiremos uma **conexão adaptada** a um sistema físico como sendo uma conexão que satisfaça a equação $\mathbf{dG} = 0$ e assim como fizemos na mecânica clássica, podemos verificar se distintas conexões afins podem ser compatíveis com experimentos. Para isso, da mesma maneira, na passagem de uma conexão para outra, as componentes ω_0^i e ω_j^i sofrem as variações $\overline{\omega}_0^i$ e $\overline{\omega}_j^i$, mas agora satisfazendo

$$\overline{\omega}_0^i = c^2 \overline{\omega}_i^0 \text{ e } \overline{\omega}_j^i + \overline{\omega}_i^j = 0.$$

Teremos que estas variações serão tais que

$\overline{\omega}_1^0 \wedge \Pi_x + \overline{\omega}_2^0 \wedge \Pi_y + \overline{\omega}_3^0 \wedge \Pi_z = 0$

$\overline{\omega}_0^1 \wedge \Pi + \overline{\omega}_2^1 \wedge \Pi_y + \overline{\omega}_3^1 \wedge \Pi_z = 0$

$\overline{\omega}_2^0 \wedge \Pi + \overline{\omega}_1^2 \wedge \Pi_x + \overline{\omega}_3^2 \wedge \Pi_z = 0$

$\overline{\omega}_0^3 \wedge \Pi + \overline{\omega}_1^3 \wedge \Pi_x + \overline{\omega}_2^3 \wedge \Pi_y = 0$

independente de qual seja o estado do elemento de matéria considerado. Se o meio material é descrito utilizando um referencial inercial fixo, encontramos as formas quadráticas

$$\overline{\omega}_0^i \otimes dt + \overline{\omega}_1^i \otimes dx + \overline{\omega}_2^i \otimes dy + \overline{\omega}_3^i \otimes dz = 0 \text{ (i=0,1,2,3)}$$

Assim, finalmente, teríamos ampliado nossa noção de meio contínuo:

Teorema 3.4. *Uma conexão é adaptada ao sistema físico* $\boldsymbol{dG} = 0$ *se, e somente se, preserva as formas quadráticas* $\overline{\omega}_0^i \otimes dt + \overline{\omega}_1^i \otimes dx + \overline{\omega}_2^i \otimes dy + \overline{\omega}_3^i \otimes dz = 0$.

4 Principais propriedades de uma variedade com conexão afim

4.1 O espaço afim

A estrutura de um espaço afim 3-dimensional, o qual chameremos de M, é dado aqui em termos de referencial móvel, isto é, um campo suave de referenciais. Cartan sugere a possibilidade de associar a cada ponto uma infinidade de referenciais. Um ponto, segundo ele, no espaço desses referenciais, depende de 12 parâmetros. Ou seja, aqui aparece intuitivamente a ideia de fibrado de referenciais de uma variedade. Esses 12 parâmetros mencionados são coordenadas locais do fibrado, que neste caso, possui dimensão igual 12.

Vamos analisar a passagem de um ponto m para um ponto infinitamente próximo m + dm:

Fixando uma origem 0 e 3 vetores linearmente independentes e_1, e_2, e_3, originando em 0, teremos que qualquer vetor poderá ser escrito da forma $x^1e_1 + x^2e^2 + x^3e_3$ e qualquer ponto m pode ser escrito como $0 + x^1e_1 + x^2e^2 + x^3e_3$.

Considere que um referencial cartesiano é ligado $m = (x^1, x^2, x^3)$ do espaço, sendo m sua origem. Agora, sejam e_1, e_2, e_3 os 3 vetores que junto com m definem este referencial. Poderemos associar a cada ponto m um número infinito de referenciais. Caracterizamos cada referencial por 12 parâmetros u_i, no espaço dos referenciais, e fazemos mudanças infinitesimais nestes parâmetros. Como consequência dessas mudanças infinitesimais em u_i, tanto m como e_1, e_2, e_3 sofrerão mudanças infinitesimais que poderão ser expressas como combinações lineares de e_1, e_2, e_3, se olharmos para suas derivadas usuais:

$$\begin{cases} dm = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

Aqui, os coeficientes ω^i e ω_j^i são combinações lineares dos diferenciais du^i. Essas 12 formas permitirão, assim, fixar o referencial em $m + dm$ em termos do referencial em m, definindo assim um deslocamento infinitesimal relativamente aos dois referenciais.

Teorema 4.1. ***(Equação estrutural de um espaço afim)*** *Seja M um espaço afim com deslocamentos infinitesimais definidos conforme sistema de equações (3.1.1). Então:*

$$\boldsymbol{d}\omega^i = \sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \omega_k^i$$
$$\boldsymbol{d}\omega_i^j = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j,$$

onde i,j=1,2,3; e ***d*** *é derivada exterior.*

Prova: Seja γ um caminho fechado em M. Abusando da notação, tomaremos $m = m(\gamma(t))$. Note que $\int_\gamma dm = \int_s^s dm(\gamma(t))d\gamma(t) = m(s) - m(s) = 0$, onde a penúltima igualdade segue do Teorema Fundamental do Cálculo.

Da mesma forma, $\int_\gamma de_i = \int_s^s de_i(\gamma(t))d\gamma(t) = e_i(s) - e_i(s) = 0$

Por outro lado, pelo Teorema de Stokes,

$$
\begin{aligned}
\int dm &= \iint \mathbf{d}(dm) \\
&= \iint \mathbf{d}\omega^1 e_1 + \mathbf{d}\omega^2 e_2 + \mathbf{d}\omega^3 e_3 - \omega^1 de_1 - \omega^2 de_2 - \omega^3 de_3 \\
&= \iint e_1(\mathbf{d}\omega^1 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^1) \\
&+ \iint e_2(\mathbf{d}\omega^2 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^2) \\
&+ \iint e_3(\mathbf{d}\omega^3 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int de_i &= \iint \mathbf{d}(de_i) \\
&= \iint \mathbf{d}\omega_i^1 e_1 + \mathbf{d}\omega_i^2 e_2 + \mathbf{d}\omega_i^3 e_3 - \omega_i^1 de_1 + \omega_i^2 de_2 + \omega_i^3 de_3 \\
&= \iint e_1(\mathbf{d}\omega_i^1 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^1) \\
&+ \iint e_2(\mathbf{d}\omega_i^2 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^2) \\
&+ \iint e_3(\mathbf{d}\omega_i^3 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^3)
\end{aligned}
$$

onde, $\mathbf{d}$ é derivada exterior. Daí,

$\mathbf{d}\omega^i - \sum_{k=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega^k = 0$, i= 1,2,3
$\mathbf{d}\omega_j^i - \sum_{j=1}^{3} \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0$, i,j=1,2,3 ■

Corolário 4.1. *Se M é um espaço afim então,para todo i = 1,...,n, dm e de_i são formas exatas.*

4.2 A noção de uma variedade com uma conexão afim

O objetivo desta seção é generalizar a discussão que fizemos na seção anterior, ou seja, encontrar uma equação estrutural para uma variedade arbitrária, assim como encontramos para um espaço afim.

Definição 4.1. *Uma variedade se diz **equipada com uma conexão afim** se é especificada uma lei que relacione espaços afins associados com quaisquer dois pontos infinitamente próximos desta variedade.*

De acordo com a definição acima, a escolha de uma lei que relacione espaços afins associados é bastante arbitrária. Basta, tomando dois pontos m e m' em uma variedade, que alguma lei nos permita relacionar um ponto qualquem do espaço afim em m a um ponto do espaço afim em m' e nos dizer que um vetor no espaço em m é paralelo ou igual a um vetor no espaço m'. Em particular, o próprio m' pode ser especificado com relação ao espaço afim em m.

A partir de agora, trabalharemos em busca do nosso objetivo: encontrar uma equação estrutural para uma variedade com uma conexão afim.

Vamos associar a cada ponto $m = (u^1, u^2, u^3)$ da variedade, 3 vetores linearmente independente e_1, e_2, e_3 no espaço afim tangente à m. Teremos que a conexão afim da variedade pode ser descrita, formalmente, assim como as equações (3.1.1), onde ω^i depende somente dos diferenciais du^1, du^2, du^3. Isto pode ser interpretado da seguinte maneira: Dado qualquer ponto m', infinitamente próximo de m, da variedade podemos identificar m' com o ponto $m + dm = m + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$ no espaço afim tangente à m. De maneira análoga, os vetores e'_k são equivalentes aos vetores $e_k + \omega_k^1 e_1 + \omega_k^2 e_2 + \omega_k^3 e_3$

Dito isso, se tomarmos a derivada exterior de dm e de_i, respectivamente, teremos:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(dm) &= e_1(\mathbf{d}\omega^1 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^1) \\ &+ e_2(\mathbf{d}\omega^2 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^2) \\ &+ e_3(\mathbf{d}\omega^3 - \sum_{i=1}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^3)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(de_i) &= e_1(\mathbf{d}\omega_i^1 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^1) \\ &+ e_2(\mathbf{d}\omega_i^2 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^2) \\ &+ e_3(\mathbf{d}\omega_i^3 + \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^3)\end{aligned}$$

exatamente como o lado esquerdo das equações obtidas no teorema anterior.

Porém, neste caso, não poderemos garantir que a integral ao longo de um caminho fechado infinitamente pequeno originando e teminando em m, na variedade, seja igual a zero, uma vez que a variedade não é necessariamente um espaço afim.

Vamos definir

$$\Omega^i = d\omega^i - \sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \omega_k^i = A_{jk}^i \sum_{j<k} \omega^j \wedge \omega^k \qquad (3.2.1),$$

com j,k=1, 2, 3 para todo i=1,2,3.

A última igualdade segue do fato de $\{\omega^1 \wedge \omega^2, \omega^2 \wedge \omega^3, \omega^1 \wedge \omega^3\}$ ser uma base de $\Lambda^2(M)$, logo podemos escrever $\Omega^i \in \Lambda^2(M)$ como combinação linear dos elementos desta base, para todo i= 1,2,3.

O vetor

$$\mathbf{d}(dm) = \Omega^1 e_1 + \Omega^2 e_2 + \Omega^3 e_3 \qquad (3.2.2)$$

definirá uma 2-forma chamada **torção de uma variedade com uma conexão afim**.

De modo análogo, não temos necessariamente $d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0$, e assim também estabeleceremos

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \omega_k^j = A_{ikl}^j \sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \omega^l \qquad (3.2.3)$$

As formas Ω_i^j definem a chamada **forma de curvatura** da variedade com uma conexão afim dada.

Resumindo, associado a todo caminho fechado originando e terminando em m , existe um deslocamento infinitesimal no referencial anexado em m. Os componente destes deslocamentos serão dados por Ω^i e Ω_i^j, que definem, respectivamente, uma translação e uma rotação em m. A translação revelará a presença de torção e a rotação nos garantirá a presença de curvatura, em uma dada variedade com conexão afim.

A partir das igualdades acima, onde definimos as componentes de curvatura e torção, podemos chegar, facilmente, nas igualdades abaixo, a partir de uma simples derivação exterior:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\Omega^i + \sum_{k=1}^{3} \Omega^k \wedge \omega_k^i - \sum_{k=1}^{3} \omega^k \wedge \Omega_k^i = 0 \\ \mathbf{d}\Omega_i^j + \sum_{k=1}^{3} \Omega_i^k \wedge \omega_k^j - \sum_{k=1}^{3} \omega_i^k \wedge \Omega_k^j = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Todas as equações deste capítulo serão muito utilizadas ao longo deste trabalho.

5 Variedades com uma conexão métrica e invariantes integrais de uma variedade com uma conexão euclideana

5.1 Variedades com uma conexão métrica

Vamos considerar um espaço euclideano e escolher um referencial ortonormal e uma unidade de comprimento em cada ponto deste espaço. Quando passamos de um ponto m para um ponto infinitamente próximo m + dm, obtemos as fórmulas

$$\begin{cases} dm = \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

Se definimos um produto escalar entre dois vetores, utilizando a unidade de comprimento particular que é considerada absoluta, obtemos:

$$e_1.e_1 = e_2.e_2 = e_3.e_3 = 1 \text{ e } e_1.e_2 = e_1.e_3 = e_3.e_2 = 0$$

A derivada das relações acima nos dá

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0 \text{ e } \omega_i^j + \omega_j^i = 0 \text{ para } i \neq j$$

Definição 5.1. *Uma **variedade com uma conexão métrica** é uma variedade com uma conexão afim tal que o espaço tangente afim em cada ponto m é também um espaço euclideano.*

A diferença entre os espaços euclideanos que são tangentes em dois pontos infinitamente próximos são capturadas (para i, j = 1, 2,..., n) nas formas ω^i, ω_i^i, ω_j^i, onde ω^i é a componente da **translação**, uma vez que expressa o componente da velocidade na direção e_i, o ω_i^i é componente de **dilatação**, pois representa o deslocamento infinitesimal do vetor e_i na direção e_i e, finalmente, o ω_i^j é componente de **rotação**, já que nos dá o deslocamento infinitesimal do vetor e_j na direção e_i.

Vamos, agora, generalizar as observações acima para uma variedade de dimensão arbitrária, referenciais não necessariamente ortonormais e comprimento de vetores e_i's não necessariamente iguais.

Considere um ponto m e um referencial $\{e_i\}$ em m. Vamos estudar o caso em que a unidade de comprimento é escolhida em cada ponto m, tal que:

$$|e_i|^2 = g_{ii} \text{ e } e_i e_j = 0, \text{ para todo i}\neq\text{j}$$

onde g_{ii} são constantes e dependem apenas de m.

Sendo

$$|e_1|^2/g_{11} = |e_2|^2/g_{22} = ...|e_n|^2/g_{nn}$$

então, derivando as expressões acima, obtemos:

$$g_{ii}d(e_je_j) = g_{jj}d(e_ie_i)$$
$$2g_{ii}g_{jj}\omega_j^j = 2g_{jj}g_{ii}\omega_i^i$$
$$\omega_i^i = \omega_j^j$$

$$d(e_ie_j) = 0$$
$$de_ie_j + e_ide_j = 0$$
$$\omega_i^j g_{ii} + \omega_j^i g_{ii} = 0$$

Feito isso, vamos considerar um vetor (ξ^i) originando em m. Temos que o comprimento deste vetor é igual a $g_{ii}(\xi^i)^2$, que varia de acordo com a unidade de comprimento escolhida em m. O mesmo ocorre para o produto escalar $g_{ii}\xi^i\eta^i$ dos vetores (ξ^i) e (η^i).

Definição 5.2. *Seja (η) um vetor com componentes η^i. Chamaremos de* ***componentes covariantes*** *de η, e denotaremos por η_i, o produto escalar $\eta.e_i$*

Note que com a notação acima, o quadrado do comprimento de um vetor (ξ^i) é igual a $\xi^i\xi_i$ e o ds^2 (quadrado da distância entre dois pontos infinitamente próximos é igual à $\omega^i\omega_i$. Da mesma forma, definiremos Ω_i, ω_{ij} e Ω_{ij} como componentes covariantes dos vetores (Ω^i), $\bigtriangledown e_i$ e Ω_i^j, respectivamente.

Vamos definir, também:

$$\Omega^{ij} = \tfrac{1}{g_{ii}}\Omega_i^j$$

Com as relações acima estabelecidas, temos que:

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$$

e, naturalmente

$$\Omega_{ij} + \Omega ji = 0$$

Logo, podemos expressar as equações estruturais de uma variedade com uma conexão afim sua derivada, respectivamente, em termos de componentes covariantes:

$$\begin{cases} d\omega_i = \omega_i \wedge \omega_i^i + \omega_i^k \wedge \omega_k + \Omega_i \\ d\omega_i^i = \Omega_i^i \\ d\omega_{ij} = \omega_i^k \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij} = \omega_{ki} \wedge \omega_j^k + \Omega_{ij} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\Omega_i - \omega_i^k \wedge \Omega_k + \omega_k \wedge \Omega_i^k = 0 \\ d\Omega_i^i = 0 \\ d\Omega_{ij} - \omega_j^k \wedge \Omega_{ik} - \omega_i^k \wedge \Omega_{kj} = 0 \end{cases}$$

Definição 5.3. *Uma conexão afim é dita* ***euclideana*** *se fixa-se uma unidade de comprimento única, válida para todos os espaços euclideanos que são tangentes à uma variedade.*

É importante notar que, numa conexão euclideana, as componentes ω de dilatação serão nulos. Neste caso, podemos escolher um referencial tal que $\omega_i^i = 0$

5.2 Conexão afim e mudança de coordenadas

Iremos agora considerar o comportamento da conexão afim por mudança de coordenadas.

Sendo $\mathbf{d}m_\alpha = \theta_\alpha = \sum_{i=1}^{n} [\theta_\alpha]_i \otimes [e_\alpha]_i$ a forma que representa a parte que mensura a translação de uma conexão afim, então recorde da álgebra linear que os referenciais se relacionam na forma

$$[e_\beta]_j = \textstyle\sum_{i=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ij} [e_\alpha]_i$$

e, além disso, podemos relacionar as componentes dos vetores θ_α e θ_β da seguinte maneira:

$$[\theta_\alpha]_i = \sum_{j=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ij} [\theta_\beta]_j$$

onde $q_{\beta\alpha}$ são os isomorfismo lineares nas fibras induzidos pelas aplicações de transição $\phi_{\beta\alpha}(x, y) = (x, q_{\beta\alpha}(x) \cdot y)$.

Proposição 5.1. *Sendo θ_α e θ_β as formas que representam dm nos referenciais $[e_\alpha]_i$ e $[e_\beta]_i$, respectivamente, então*

$$\theta_\alpha = \theta_\beta.$$

Demonstração 5.1. *Basta notarmos que*

$$\begin{aligned}
\theta_\beta &= \sum_{j=1}^{n} [\theta_\beta]_j \otimes [e_\beta]_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} [\theta_\beta]_j \otimes \sum_{i=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ij} [e_\alpha]_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ij} [\theta_\beta]_j \otimes [e_\alpha]_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\theta_\alpha]_i \otimes [e_\alpha]_i \\
&= \theta_\alpha
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado desejado.

Passemos agora à parte linear da conexão

Proposição 5.2. *Sendo ω_α a matriz de formas que representa a parte linear de uma conexão afim com relação ao referencial $\{[e_\alpha]_1, ..., [e_\alpha]_n\}$, então $\omega_\beta = dq_{\beta\alpha} q_{\beta\alpha}^{-1} + q_{\beta\alpha} \omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}$, onde ω_β é a matriz de conexão associada ao referencial $\{[e_\beta]_1, ..., [e_\beta]_n\}$.*

Demonstração 5.2. *Basta notarmos que*

$$
\begin{aligned}
d[e_\beta]_i &= d\sum_{i=1}^{n}[q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} d([q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(d[q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k + [q_{\alpha\beta}]_{ki}d[e_\alpha]_k) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(d[q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k + [q_{\alpha\beta}]_{li}\sum_{l=1}^{n}[\omega_\alpha]_l^k[e_\alpha]_k) \\
&= \sum_{k,l,j=1}^{n}(d[q_{\alpha\beta}]_{ki} + [q_{\alpha\beta}]_{li}[\omega_\alpha]_l^k)[q_{\beta\alpha}^{-1}]_{kj}[e_\beta]_j \\
&= \sum_{k,l,j=1}^{n}([dq_{\beta\alpha}]_{ik}[q_{\beta\alpha}^{-1}]_{kj} + [q_{\beta\alpha}]_{il}[\omega_\alpha]_{lk}[q_{\beta\alpha}^{-1}]_{kj})[e_\beta]_j
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
d[e_\beta]_i = \sum_{k=1}^{n}[\omega_\beta]_j^i[e_\beta]_j
$$

De onde segue que

$dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1} = \omega_\beta$ ∎.

5.3 A forma de torção

Sendo $\theta = \sum_{i=1}^{n}\theta_i \otimes s_i$ a 1-forma vetorial local que descreve dm, então temos

$$
\begin{aligned}
\nabla\theta &= \sum_{i=1}^{n}\nabla(\theta_i \otimes s_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\theta_i \otimes s_i - \theta_i \wedge \nabla s_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\theta_i \otimes s_i - \sum_{i,j=1}^{n}(\theta_i \wedge \omega_{ji}) \otimes s_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\theta_i \otimes s_i - \sum_{i,j=1}^{n}(\theta_j \wedge \omega_{ij}) \otimes s_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[d\theta_i + \sum_{j=1}^{n}(\omega_{ij} \wedge \theta_j)\right] \otimes s_i \\
&= d\theta + \omega \wedge \theta.
\end{aligned}
$$

onde ω é a forma de curvatura. Sendo $\Theta = d\theta + \omega \wedge \theta$ a forma de torção

Proposição 5.3. *Sendo* Θ_α *a vetor de torção com relação ao referencial* $[s_\alpha]_i$*, então temos*

$$\Theta_\beta = g_{\beta\alpha}\Theta_\alpha.$$

Demonstração 5.3. *Segue imediatamente da definição que*

$$\begin{aligned}
\Theta_\beta &= d\theta_\beta + \omega_\beta \wedge \theta_\beta \\
&= d(g_{\beta\alpha}\theta_\alpha) + (g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}) \wedge g_{\beta\alpha}\theta_\alpha \\
&= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha}d\theta_\alpha + (g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge g_{\beta\alpha}\theta_\alpha \\
&= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha}d\theta_\alpha + (g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\beta\alpha}^{-1}dg_{\beta\alpha}g_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge g_{\beta\alpha}\theta_\alpha \\
&= dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha + g_{\beta\alpha}d\theta_\alpha + g_{\alpha\beta}^{-1}\omega_\alpha \wedge \theta_\alpha - dg_{\beta\alpha} \wedge \theta_\alpha \\
&= g_{\beta\alpha}(d\theta_\alpha + \omega_\alpha \wedge \theta_\alpha) \\
&= g_{\beta\alpha}\Theta_\alpha.
\end{aligned}$$

Proposição 5.4. *A forma* $\sum_{i=1}^n [\Theta_\alpha]_i \otimes [e_\alpha]_i$ *é um invariante diferencial global.*

Demonstração 5.4. *De fato temos,*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n [\Theta_\beta]_j \otimes [e_\beta]_j &= \sum_{i,j=1}^n [\Theta_\beta]_j \otimes [g_{\alpha\beta}]_{ij}[e_\alpha]_i \\
&= \sum_{i,j=1}^n [g_{\alpha\beta}]_{ij}[\Theta_\beta]_j \otimes [e_\alpha]_i \\
&= \sum_{i=1}^n [\Theta_\alpha]_i \otimes [e_\alpha]_i.
\end{aligned}$$

5.4 A forma de curvatura

Teorema 5.1. *Se* Ω_α *é uma matriz de formas de curvatura associda à conexão afim com relação ao referencial* $\{[e_\alpha]_1, ..., [e_\alpha]_n\}$*,então* $\Omega_\beta = q_{\beta\alpha}\Omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}$*, onde* Ω_β *é uma matriz de formas de curvatura associada à conexão afim com relação ao referencial* $\{[e_\beta]_1, ..., [e_\beta]_n\}$.

Demonstração 5.5. *Por definição, temos*

$$\Omega_\beta = \boldsymbol{d}\omega_\beta - \omega_\beta \wedge \omega_\beta$$

Pela proposição 4.2,

$$\omega_\beta q_{\beta\alpha} = dq_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha.$$

Tomando a derivada exterior nos dois lados da igualdade acima:

$\boldsymbol{d}\omega_\beta q_{\beta\alpha} - \omega_\beta \wedge dq_{\beta\alpha} = dq_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + q_{\beta\alpha}\boldsymbol{d}\omega_\alpha$, *ou seja,*

$$\boldsymbol{d}\omega_\beta q_{\beta\alpha} = \omega_\beta \wedge dq_{\beta\alpha} + dq_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + q_{\beta\alpha}\boldsymbol{d}\omega_\alpha.$$

Substituido ω_β *por* $dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}$*, o lado direito da equação acima será igual a*

$$(dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}) \wedge dq_{\beta\alpha} + dq_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha + q_{\beta\alpha}\boldsymbol{d}\omega_\alpha.$$

Desta forma,

$$\boldsymbol{d}\omega_\beta = \overbrace{dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1} \wedge dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1}}^{1} + \overbrace{q_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge q_{\beta\alpha}^{-1}dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1}}^{2} + \overbrace{dq_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}}^{3} + q_{\beta\alpha}\boldsymbol{d}\omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \omega_\beta \wedge \omega_\beta &= (dq_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha)q_{\beta\alpha}^{-1} \wedge (dq_{\beta\alpha} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha)q_{\beta\alpha}^{-1} \\ &= \overbrace{dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1} \wedge dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1}}^{1} + \overbrace{dq_{\beta\alpha} \wedge \omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1}}^{3} + \overbrace{q_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge q_{\beta\alpha}^{-1}dq_{\beta\alpha}q_{\beta\alpha}^{-1}}^{2} + q_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1} \end{aligned}$$

Logo, pela definição de Ω_β dada no início desta proposição:

$$\Omega_\beta = q_{\beta\alpha}\boldsymbol{d}\omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1} - q_{\beta\alpha}\omega_\alpha \wedge \omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1} = q_{\beta\alpha}(\boldsymbol{d}\omega_\alpha - \omega_\alpha \wedge \omega_\alpha)q_{\beta\alpha}^{-1} = q_{\beta\alpha}\Omega_\alpha q_{\beta\alpha}^{-1} \blacksquare$$

Proposição 5.5. *A forma $\sum_{i,j=1}^{n} [\Omega_\beta]_{ij}[e_\beta]_i \wedge [e_\beta]_j$ é um invariante diferencial global.*

Demonstração 5.6. *De fato, temos*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} [\Omega_\beta]_{ij}[e_\beta]_i \wedge [e_\beta]_j &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} [\Omega_\beta]_{ij}[q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k \wedge [q_{\alpha\beta}]_{lj}[e_\alpha]_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ki}[\Omega_\beta]_{ij}[q_{\alpha\beta}^t]_{jl}[e_\alpha]_k \wedge [e_\alpha]_l \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{n} [q_{\alpha\beta}]_{ki}[\Omega_\beta]_{ij}[q_{\beta\alpha}]_{jl}[e_\alpha]_k \wedge [e_\alpha]_l \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} [\Omega_\alpha]_{kl}[e_\alpha]_k \wedge [e_\alpha]_l, \end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue do fato de $q_{\alpha\beta} \in SO(n)$, que implica $q_{\alpha\beta}^t = q_{\alpha\beta}^{-1} = q_{\beta\alpha}$.

5.5 Formas invariantes de uma variedade equipada com uma conexão métrica

Nesta seção construiremos novos invariantes diferenciais a partir do vetor torção e do bivetor curvatura, que, como vimos nas seções anteriores,, são invariantes diferenciais globais.

Vamos considerar uma variedade com uma conexão euclideana, e suas componentes Ω^i e Ω^{ij}, de torção e curvatura, respectivamente.

Conforme vimos nas últimas duas seções,

$$\sum_i e_i \otimes \Omega^i$$
$$\sum_{i,j} e_i \wedge e_j \otimes \Omega^{ij}$$

são duas formas invariantes.

A partir desses invariantes, podemos construir outros invariantes. Vamos considerar, respectivamente, o produto escalar e o produto exterior

$$\sum_{i=0}^{n} \xi_i \Omega^i$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} e_i \wedge e_j (\xi^i \Omega^j - \xi^j \Omega^i)$$

dos vetores $e_0\xi_0 + ... + e_n\xi_n$ e $e_0\Omega^0 + ... + e_n\Omega^n$.

Agora considere um volume 3-dimensional incluso numa superfície infinitesimal fechada e um ponto a fixo, neste volume. Vamos decompor a superfície fechada em infinitos elementos e tomar um ponto m em um destes elementos.

Analogamente a construção acima, vamos considerar as formas

$$\sum_{i=0}^{n} \omega_i \Omega^i$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} e_i \wedge e_j \otimes (\omega^i \wedge \Omega^j - \omega^j \wedge \Omega^i).$$

Podemos interpretar a primeira como a soma do produto escalar do vetor m-a, com a *translação* associada com o elemento de superfície em torno de m e a segunda como a soma geométrica do produto exterior destes vetores.

De maneira similar, podemos considerar o deslocamento que um vetor arbitrário $e_0\xi_0 + ... + e_n\xi_n$ sofre como resultado da rotação Ω^{ij} e a soma dos produtos exteriores deste deslocamento com as diferentes 2-formas que representam a rotação Ω^{ij}, dadas, respectivamente, abaixo:

$$e_i\xi^k\Omega^i_k \quad \text{e} \quad e_i \wedge e_j \wedge e_k(\xi^i\Omega^{jk} + \xi^j\Omega^{ki} + \xi^k\Omega^{ij})$$

Finalmente, consideramos um volume 3-dimensional, como fizemos anteriormente, as duas formas abaixo, elementos de integrais triplas

$$e_i\omega^k \wedge \Omega^i_k \quad \text{e} \quad e_i \wedge e_j \wedge e_k(\omega^i\Omega^{jk} + \omega^j\Omega^{ki} + \omega^k\Omega^{ij})$$

representam, nesta ordem, a soma geométrica dos deslocamentos sofridos pelo vetor m-a como um resultado da *rotação* associada com o elemento de superfície que contém m e a soma geométrica dos trivetores obtidos ao tomarmos o produto exterior do vetor m-a com o sistema de bivetores representando esta rotação.

Estes procedimentos podem ser repetidos para obtermos invariantes integrais 4-dimensionais. Para cada vetor $e_0\xi_0 + ... + e_n\xi_n$, podemos associar:

(i)Seu produto escalar com $\omega_k \wedge \Omega^k$: $e_i\xi^i(\omega_k \wedge \Omega^k)$;

(ii)Seu deslocamento sob a rotação representada pela forma bivetorial $e_i \wedge e_j(\omega^i \wedge \Omega^j - \omega^j \wedge \Omega^i)$: $e_i\xi^k(\omega_k \wedge \Omega^i - \omega^i \wedge \Omega_k)$;

(iii) Seu produto exterior com o sistema de bivetores $e_i \wedge e_j(\omega^i \wedge \Omega^j - \omega^j \wedge \Omega^i)$: $e_i\xi^k(\omega_k \wedge \Omega^i - \omega^i \wedge \Omega_k)$: $e_i \wedge e_j \wedge e_k[\xi^i(\omega^j \wedge \Omega^k - \omega^k \wedge \Omega^j) + \xi^j(\omega^k \wedge \Omega^i - \omega^i \wedge \Omega^k) + \xi^k(\omega^i \wedge \Omega^j - \omega^j \wedge \Omega^i)]$;

(iv)Seu produto escalar com o vetor $e_i(\omega^k \wedge \Omega^i_k)$:$\xi_i(\omega^k \wedge \Omega^i_k)$;

(v) Seu produto exterior com o vetor $e_i(\omega^k \wedge \Omega^i_k)$: $e_i \wedge e_j(\xi^i \wedge \omega^k \wedge \Omega^j_k - \xi^j \wedge \omega^k \wedge \Omega^i_k$ e

(vi)Seu produto exterior com o sistema de trivetores $e_i \wedge e_j \wedge e_k(\omega^i\Omega^{jk} + \omega^j\Omega^{ki} + \omega^k\Omega^{ij})$: $e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l[\xi^i(\omega^j \wedge \Omega^{kl} + \omega^k \wedge \Omega^{ij} + \omega^l \wedge \Omega^{jk}) - \xi^j(\omega^i \wedge \Omega^{kl} + \omega^k \wedge \Omega^{li} + \omega^l \wedge \Omega^{ik}) + \xi^k(\omega^i \wedge \Omega^{jl} + \omega^j \wedge \Omega^{li} + \omega^l \wedge \Omega^{ij}) + \xi^l(\omega^i \wedge \Omega^{jk} + \omega^j \wedge \Omega^{ki} + \omega^k \wedge \Omega^{ij})]$

Das expressões acima, surgem novos invariantes integrais:

$e_i(\omega^i \wedge \omega^k \wedge \Omega^i_k);$

$e_i \wedge e_j \wedge e_k(\omega^j \wedge \omega^k \wedge \Omega^i + \omega^k \wedge \omega^i \wedge \Omega^j + \omega^i \wedge \omega^j \wedge \Omega^k;$

$\omega^i \wedge \omega^j \wedge \Omega_{ij};$

$e_i \wedge e_j(\omega^i \wedge \omega^k \wedge \Omega^j_k - \omega^j \wedge \omega^k \wedge \Omega^i_k\ ;$

$e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge e_l\ [\omega^i \wedge \omega^j \wedge \Omega^{kl} + \omega^i \wedge \omega^k \wedge \Omega^{lj} + \omega^k \wedge \omega^l \wedge \Omega^{ij} + \omega^l \wedge \omega^j \wedge \Omega^{ik} + \omega^j \wedge \omega^k \wedge \Omega^{il}]$

A interpretação geométrica destas formas é similar aquelas que foram expostas anteriormente. Pode-se continuar, desta meneira, a obter formas invariantes com maior número de dimensões.

6 O espaço tempo em teorias de gravitação newtoniana e einsteniana

6.1 Leis de gravitação newtoniana

Conforme visto no capítulo 1, se admitirmos que uma definição de equivalência entre referenciais galileanos, cujas origens são infinitamente próximas, dê origem à uma conexão afim no espaço-tempo, teremos que as leis gravitacionais de Newton serão compatíveis com infinitas conexões afins. Porém, veremos a seguir que entre elas existe somente uma que será livre de torção, a saber, a conexão afim dada pelas equações :

$$\begin{array}{llll} \omega^0 = dt, & \omega^1 = dx, & \omega^2 = dy, & \omega^3 = dz \\ \omega_0^1 = -Xdt, & \omega_0^2 = -Ydt, & \omega_0^3 = -Zdt, & \omega_i^j = 0 \end{array}$$

para todo i, j = 1, 2, 3, onde X, Y e Z são as componentes da aceleração devido à gravidade em um sistema galileano fixo. Vale notar que as equações acima nos diz que um universo newtoniano, cujo campo gravitacional é constante em cada instante de tempo, possui curvatura nula.

Definição 6.1. *Uma conexão afim é dita **galileana** se ela é da forma*

$$\begin{cases} dm = dt\, e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_0 = \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

Proposição 6.1. *Dentre todas as conexões galileanas mecanicamente equivalentes, existe uma, e somente uma, que é livre de torção.*

Demonstração 6.1. *Seja dada uma conexão galileana adaptada qualquer num espaço-tempo.*

$$\begin{cases} dm = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ de_0 = \omega_0^1 e_1 + \omega_0^2 e_2 + \omega_0^3 e_3 \\ de_1 = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 \\ de_2 = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

com $\omega^0 = dt$. Sejam Ω^l (l=1,2,3) as componentes da torção desta conexão e $\tilde{\Omega}^l$ as componentes da torção de qualquer outra conexão afim equivalente a conexão dada, digamos

$$\begin{cases} dm = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 \\ d\tilde{e_0} = (\omega_0^1 + \overline{\omega_0^1})e_1 + (\omega_0^2 + \overline{\omega_0^2})e_2 + (\omega_0^3 + \overline{\omega_0^3})e_3 \\ d\tilde{e_1} = (\omega_1^1 + \overline{\omega_1^1})e_1 + (\omega_1^2 + \overline{\omega_1^2})e_2 + (\omega_1^3 + \overline{\omega_1^3})e_3 \\ d\tilde{e_2} = (\omega_2^1 + \overline{\omega_2^1})e_1 + (\omega_2^2 + \overline{\omega_2^2})e_2 + (\omega_2^3 + \overline{\omega_2^3})e_3 \\ d\tilde{e_3} = (\omega_3^1 + \overline{\omega_3^1})e_1 + (\omega_3^2 + \overline{\omega_3^2})e_2 + (\omega_3^3 + \overline{\omega_3^3})e_3 \end{cases}$$

Sendo

$dm = \omega^0 e_0 + \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3$

então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}(dm) &= d\omega^0 e_0 - \omega^0 \wedge d\tilde{e_0} + d\omega^1 e_0 - \omega^1 \wedge d\tilde{e_1} + d\omega^2 e_2 - \omega^2 \wedge d\tilde{e_2} + d\omega^3 e_3 - \omega^3 \wedge d\tilde{e_3} \\
\tilde{\Omega}^1 e_1 + \tilde{\Omega}^2 e_2 + \tilde{\Omega}^3 e_3 &= d\omega^0 e_0 + d\omega^1 e_1 + d\omega^2 e_2 + d\omega^3 e_3 \\
&- \omega^0[(\omega_0^1 + \varpi_0^1)e_1 + (\omega_0^2 + \varpi_0^2)e_2 + (\omega_0^3 + \varpi_0^3)e_3] \\
&- \omega^1[(\omega_1^1 + \varpi_1^1)e_1 + (\omega_1^2 + \varpi_1^2)e_2 + (\omega_1^3 + \varpi_1^3)e_3] \\
&- \omega^2[(\omega_2^1 + \varpi_2^1)e_1 + (\omega_2^2 + \varpi_2^2)e_2 + (\omega_2^3 + \varpi_2^3)e_3] \\
&- \omega^3[(\omega_3^1 + \varpi_3^1)e_1 + (\omega_3^2 + \varpi_3^2)e_2 + (\omega_3^3 + \varpi_3^3)e_3]
\end{aligned}$$

ou, seja,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Omega}^l &= d\omega^l - \sum_{i=0}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^l - \sum_{i=0}^{3} \omega^i \wedge \varpi_i^l \\
&= \Omega^l + \sum_{i=0}^{3} \varpi_i^l \wedge \omega^i, l = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

A última igualdade segue da definição $\Omega^l = d\omega^l - \sum_{i=0}^{3} \omega^i \wedge \omega_i^l$.

Vamos, agora, verificar se a equação $\sum_{i=0}^{3} \varpi_i^l \wedge \omega^i = -\Omega^l$ *possui solução, ou seja, se a conexão afim logo acima pode ser livre de torção.*

Para isso, lembremos que também podemos definir

$\Omega^l = \sum_{j<k} A_{jk}^l \omega^j \wedge \omega^k$ *com i,j varrendo 0,1,2,3*

Daí temos que
$\sum_{i=0}^{3} \varpi_i^l \wedge \omega^i = -\sum_{j<k} A_{jk}^l \omega^j \wedge \omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{j<k} A_{jk}^l \omega^j \wedge \omega^k - \frac{1}{2} \sum_{j<k} A_{jk}^l \omega^j \wedge \omega^k$

Cujas únicas soluções em ϖ_i^j *são*

$\varpi_0^i = \frac{1}{2}[-A_{01}^i \omega^1 - A_{02}^i \omega^2 - A_{03}^i \omega^3]$

$\varpi_1^i = \frac{1}{2}[A_{01}^i \omega^0 - A_{12}^i \omega^2 - A_{13}^i \omega^3]$

$\varpi_2^i = \frac{1}{2}[A_{02}^i \omega^0 + A_{12}^i \omega^1 - A_{23}^i \omega^3]$

$\varpi_3^i = \frac{1}{2}[A_{03}^i \omega^0 + A_{13}^i \omega^1 + A_{23}^i \omega^2]$

que também são soluções de

$\sum_{i=0}^{3} \varpi_i^l \otimes \omega^i = 0$

lembrando que esta última equação é equivalente a afirmação que uma conexão é mecanicamente equivalente, ou seja, satistaz a equação $\boldsymbol{dG} = 0$*. Logo, são as únicas soluções do sistema de equações*

$$\sum_{i=0}^{3} \overline{\omega}_i^l \otimes \omega^i = 0$$

e

$$\sum_{i=0}^{3} \overline{\omega}_i^l \wedge \omega^i = -\Omega^l$$

De outro modo, podemos escrever $\overline{\omega}_i^j = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i}_{e_i}\Omega^j$*, com* $i = 0,1,2,3$ *e* $j = 1,2,3$*, onde* $\boldsymbol{i}_{e_i}\Omega^j$ *é o produto interior de* Ω^j *por* e_i*.* ■

Definição 6.2. *Uma conexão afim é dita* ***newtoniana*** *se é uma conexão galileana e, além disso, tem-se* $\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \quad$ *para* $i, j = 1,2,3$

Proposição 6.2. *Dado um espaço tempo com uma conexão newtoniana então entre todas as conexões afins mecanicamente equivalentes existe uma, e somente uma, tal que*

$$\omega_1 \wedge \Omega^1 + \omega_2 \wedge \Omega^2 + \omega_3 \wedge \Omega^3 = 0$$

Demonstração 6.2. *Primeiramente, observe que se tomarmos dm numa conexão mecanicamente equivalente a uma conexão newtoniana dada, então*

$$dm.\boldsymbol{d}(dm) = \omega_1 \wedge \tilde{\Omega}^1 + \omega_2 \wedge \tilde{\Omega}^2 + \omega_3 \wedge \tilde{\Omega}^3$$

Na proposição anterior, vimos que

$$\sum_{i=0}^{3} \overline{\omega}_i^l \wedge \omega^i + \Omega^l = \tilde{\Omega}^l$$

logo, supondo $\omega_1 \wedge \tilde{\Omega}^1 + \omega_2 \wedge \tilde{\Omega}^2 + \omega_3 \wedge \tilde{\Omega}^3 = 0$*, então, substituindo* $\tilde{\Omega}^l$*, teremos*

$$\omega_1 \wedge (\Omega^1 + \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^1) + \omega_2 \wedge (\Omega^2 + \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^2) + \omega_3 \wedge (\Omega^3 + \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega}_j^3) = 0$$

ou seja,

$$\omega_1 \wedge \Omega^1 + \omega_2 \wedge \Omega^2 + \omega_3 \wedge \Omega^3 = -\omega_1 \wedge \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega_j^1} - \omega_2 \wedge \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega_j^2} - \omega_3 \wedge \sum_{j=0}^{3} \omega^j \wedge \overline{\omega_j^3}$$

Como $\overline{\omega}_i^j + \overline{\omega}_j^i = 0$*, então o lado direito da igualdade acima pode ser escrito da forma*

$$\omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \overline{\omega}_{01} + \omega^0 \wedge \omega^2 \wedge \overline{\omega}_{02} + \omega^0 \wedge \omega^3 \wedge \overline{\omega}_{03} + 2\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \overline{\omega}_{12} + 2\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \overline{\omega}_{31} + 2\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \overline{\omega}_{23}$$

Assim, para chegar no resultado que queremos, devemos resolver a equação acima e também as equações

$$\sum_{i=0}^{3} \omega^i \otimes \overline{\omega}_i^l = 0, \qquad i = 1,2,3$$

Escrevendo $\overline{\omega}_i^j$ *como combinação linear de* ω^0*,* ω^1*,* ω^2 *e* ω^3 *conforme definição dada na seção 2.6, e considerando que* $\gamma_{ij}^l = -\gamma_{ji}^l$*,* $\gamma_{00}^i = 0$*,* $\overline{\omega}_i^i = 0 \quad (\gamma_{il}^i = 0)$ *e* $\gamma_{ij}^l = -\gamma_{lj}^i$ *, temos que*

$$\overline{\omega}_0^1 = \gamma_{02}^1\omega^2 + \gamma_{03}^1\omega^3, \quad \overline{\omega}_0^2 = \gamma_{01}^2\omega^1 + \gamma_{03}^2\omega^3, \quad \overline{\omega}_0^3 = \gamma_{01}^3\omega^1 + \gamma_{02}^3\omega^2$$

$$\overline{\omega}_{12} = \gamma_{10}^2\omega^0 + \gamma_{13}^2\omega^3, \quad \overline{\omega}_{23} = \gamma_{21}^3\omega^1 + \gamma_{20}^3\omega^0, \quad \overline{\omega}_{31} = \gamma_{30}^1\omega^0 + \gamma_{32}^1\omega^2$$

Agora fazendo $\gamma_{02}^1 = r$, $\gamma_{30}^1 = q$, $\gamma_{03}^2 = p$ e $\gamma_{21}^3 = h$ e substituindo estas equações em (i) temos que

$$\omega_1 \wedge \Omega^1 + \omega_2 \wedge \Omega^2 + \omega_3 \wedge \Omega^3 = 4r\omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + 4q\omega^0 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 \qquad (ii)$$

$$+4p\omega^0 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + 6h\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

Por outro lado,

$$\omega_1 \wedge \Omega^1 + \omega_2 \wedge \Omega^2 + \omega_3 \wedge \Omega^3 = g_{11}\omega^1\Omega^1 + g_{22}\omega^2\Omega^2 + g_{33}\omega^3\Omega^3$$

$$= g_{11}\omega^1 \wedge A_{23}^1\,\omega^2 \wedge \omega^3 + g_{11}\omega^1 \wedge A_{02}^1\,\omega^0 \wedge \omega^2 + g_{11}\omega^1 \wedge A_{03}^1\,\omega^0 \wedge \omega^3$$

$$+g_{22}\omega^2 \wedge A_{31}^2\,\omega^3 \wedge \omega^1 + g_{22}\omega^2 \wedge A_{01}^2\,\omega^0 \wedge \omega^1 + g_{22}\omega^2 \wedge A_{03}^2\,\omega^0 \wedge \omega^3$$

$$+g_{33}\omega^3 \wedge A_{12}^3\,\omega^1 \wedge \omega^2 + g_{33}\omega^3 \wedge A_{01}^3\,\omega^0 \wedge \omega^1 + g_{33}\omega^3 \wedge A_{02}^3\,\omega^0 \wedge \omega^2$$

Fazendo $g_{ii}A_{kj}^i = A_{ikj}$ e comparando com a equação (ii), temos que

$$6h = A_{123} + A_{231} + A_{312}$$

$$4p = A_{302} - A_{203}$$

$$4q = A_{103} - A_{301}$$

$$4r = A_{201} - A_{102}$$

de onde segue o resultado.■

Como a conexão dada no início desta seção é galileana, de uma variedade 4-dimensional livre de torção e satisfaz as leis da gravitação newtoniana, a proposição 5.1 acima nos diz que ela é única.

6.1.1 Propriedades invariantes do espaço-tempo newtoniano

Para a teoria newtoniana, a estrutura do espaço-tempo é dada pelo produto cartesiano de um espaço tridimensional e do tempo, representados como espaços euclidianos. Como na gravitação newtoniana o tempo é absoluto, as seções do espaço-tempo com t constante também possuem um significado absoluto.

A conexão afim livre de torção desta teoria é dada pelas equações

$$\begin{array}{llll} \omega^0 = dt, & \omega^1 = dx, & \omega^2 = dy, & \omega^3 = dz \\ \omega_0^1 = -Xdt, & \omega_0^2 = -Ydt, & \omega_0^3 = -Zdt, & \omega_i^j = 0 \end{array}$$

Se tomarmos a derivada exterior das equações acima, obtemos:

$$\Omega_0^1 = -dXdt, \quad \Omega_0^2 = -dYdt, \quad \Omega_0^3 = -dZdt$$

$$\Omega_{23} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0 \qquad \text{(I)}$$

As relações (I) nos diz que o espaço tridimensional newtoniano é euclideano em qualquer instante de tempo. Elas possuem claramente um significado invariante, uma vez que, por definição, são componentes da derivada exterior de $de_1 = de_2 = de_3 = 0$.

Definição 6.3. *Seja $F : R^n \longrightarrow R^n$ o campo de forças de um sistema. Se F é um campo gradiente, ou seja, se existe uma função $V : R^n \longrightarrow R$ tal que $F(u) = -\nabla V(u)$, diremos que F é conservativo. A função V é chamada de **potencial gravitacional**.*

Proposição 6.3. *Seja $F : A \longrightarrow R^3$ um campo de vetores de classe C^1 no aberto simplesmente conexo $A \subset R^3$. Então F é um campo gradiente em A se, e somente se, $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$ em A.*

Demonstração 6.3. *A demostração dessa proposição pode ser encontrada em (LOPES, 2006)*

Proposição 6.4. *A lei que garante a existência do potencial gravitacional pode ser expressa pela equação*

$$\omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0 \qquad \textit{(II)}$$

Demonstração 6.4. *Basta observar que*

$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge \Omega_0^1 = -\omega_1 \wedge dX \wedge dt \\
&= -dx \wedge \left(\frac{\partial X}{\partial y} dy \wedge dt + \frac{\partial X}{\partial z} dz \wedge dt \right) \\
&= -\frac{\partial X}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dt - \frac{\partial X}{\partial z} dx \wedge dz \wedge dt
\end{aligned}$$

Cálculos análogos nos dá que

$$\begin{aligned}
&\omega_2 \wedge \Omega_0^2 = \frac{\partial Y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt - \frac{\partial Y}{\partial z} dy \wedge dz \wedge dt \\
&\omega_3 \wedge \Omega_0^3 = \frac{\partial Z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge +dt + \frac{\partial Z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt
\end{aligned}$$

ou, seja,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$$

de onde segue o resultado.$\blacksquare$

Proposição 6.5. *A equação dada na proposição anterior independe da escolha do referencial.*

Demonstração 6.5. *Primeiramente, vamos mostrar que o vetor $\sum\limits_{i=1}^{3} e_i \Omega_0^i$ independe da escolha do referencial. Para isto, basta notarmos que como, para cada i=1,2,3, e_i independe da escolha do referencial. Logo, lembrando a discussão feita no capítulo 4 teremos $[e_\beta]_i = [e_\alpha]_i$, pois a matriz $g_{\alpha\beta}$ será igual a identidade. Daí, pelo teorema 4.1, teremos $\Omega_\beta = \Omega_\alpha$ de onde segue imediatamente o resultado.*

Agora, sendo o espaço livre de torção, a equação estutural será dada por

$\boldsymbol{d}\omega^i = \sum_{k=0}^{3} \omega^k \wedge \omega_k^i$

Logo tomando a derivada exterior de ambos os lados da equação acima, teremos $\sum_{k=0}^{3} \omega^i \wedge \Omega_k^i = 0.$

Como pela equação (I), $\Omega_k^i = 0$*, para k=1,2,3, obtemos*

$\omega^0 \wedge \Omega_0^i = 0.$

Finalmente, a invariância da equação

$\omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0$

segue do fato do lado esquerdo desta equação ser o produto interno do vetor dm (cujas componentes espaciais são independentes da escolha do referencial) pelo vetor $\sum_{i=1}^{3} e_i\Omega_0^i$ *(que conforme mostramos é invariante), uma vez que* $\omega^0 \wedge \Omega_0^i = 0$*, para todo i=1,2,3.* ■

Proposição 6.6. *As equações de Poisson podem ser escritas da forma*

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 = 4\pi G\rho\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0 \qquad \textit{(III)}$$

Demonstração 6.6. *Basta observar que*

$\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 =$

$= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz = 4\pi\rho G dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$ ■

Proposição 6.7. *A equação* $\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 = 4\pi G\rho\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0$ *independe da escolha do referencial.*

Demonstração 6.7. *Basta observarmos que*

$\frac{1}{2} dm \wedge dm \wedge (e_1\Omega_0^1 + e_2\Omega_0^2 + e_3\Omega_0^3) =$

$= (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) \wedge (\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3),$

uma vez que $\omega^0 \wedge \Omega_0^i = 0$ *e, as componentes espaciais de dm e o vetor* $\sum_{i=1}^{3} e_i\Omega_0^i$ *são invariantes.*

Concluímos, então, que em uma variedade com uma conexão newtoniana livre de torção, as equações (I), (II) e (III) possuem um significado invariante.

6.1.2 Caracterização do espaço-tempo da gravitação newtoniana via propriedades invariantes

Na subseção anterior, mostramos que as equações (I), (II) e (III) são invariantes em variedades com uma conexão newtoniana livre de torção. Nosso trabalho aqui será geometrizar o espaço-tempo da gravitação newtoniana a partir destas equações e, além disso, derivar delas a formulação completa das leis de gravitação newtoniana.

Conforme é sabido da mecânica clássica, as equações $\dfrac{\partial F_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}$, para i = 1, 2,3 juntamente com a equação $\sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i} = -4\pi\rho G$, chamada equação de Poisson, produzem uma formulação completa das leis de gravitação newtoniana.

As observações acima e a proposição anterior nos dizem que o campo gravitacional é um campo conservativo.

Feitas essas observações, vamos em busca do nosso objetivo: A partir das equações (I), (II) e (III) encontrar a conexão afim livre de torção da teoria gravitacional de Newton e, além disso, as equações acima.

Como já foi dito na subseção anterior, se considerarmos um espaço-tempo com uma conexão newtoniana livre de torção, as equações (I) implicam que o espaço do espaço-tempo é euclideano. Assim, se escolhermos uma tríade espacial em um ponto do espaço-tempo, poderemos estendê-la para todos os outros pontos, via transporte paralelo, independentemente do caminho. Assim, podemos assumir que as equações

$\omega_2^3 = \omega_3^1 = \omega_1^2 = 0$ se mantém em toda parte.

Agora, note que as equações

$d\omega^i = dt \wedge \omega_0^i + \sum\limits_{j=1}^{3} \omega^j \wedge \omega_j^i$ implicam que, sendo t constante, as formas ω^i são diferenciais fechadas, e como são de classe C^1, são exatas. Assim, pode-se definir

$$\omega^1 = dx - adt, \quad \omega^2 = dy - bdt, \quad \omega^3 = dz - cdt$$

e escolhendo adequadamente o vetor temporal e_0, pode-se definir os coeficientes a, b, c iguais a zero. Daí, tem-se

$$\omega^0 = dt, \quad \omega^1 = dx, \quad \omega^2 = dy, \quad \omega^3 = dz$$

Agora, sendo a torção igual a zero, tem-se

$d\omega^i = dt \wedge \omega_0^i$ de onde

$$\omega_0^1 = -Xdt, \quad \omega_0^2 = -Ydt, \quad \omega_0^3 = -Zdt,$$

Ou seja, as equações (I) nos fornece a conexão afim livre de torção da teoria gravitacional de Newton, dada no início deste capítulo.

Além disso, as equações (II) podem ser escritas como

$$(dxdX + dydY + dzdZ) \wedge dt = 0$$

e isto implica que, para t constante, $Xdx + Ydy + Zdz$ é um diferencial exato, digamos dV. Portanto, tem-se

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

Finalmente, , as equações (III) rendem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G\rho,$$

Ou seja, temos recuperadas todas as leis de gravitação newtoniana, onde V é o potencial gravitacional e (X,Y,Z) é o campo gravitacional.

6.2 A formulação invariante das leis de gravitação Einsteniana

O espaço-tempo da gravitação einsteiniana é uma variedade 4-dimensional com uma conexão newtoniana, com a métrica estabelecida pelas equações

$$\omega_i^0 = c^2\omega_0^i, \quad \omega_i^j + \omega_j^i = 0$$

onde c é a velocidade da luz no vácuo. A distância entre dois pontos infinitamente próximos será dada por

$$c^2(\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2$$

Devemos, aqui, recuperar a variedade com uma conexão newtoniana se fizermos a velocidade da luz tender ao infinito. Conforme fizemos na teoria de gravitação newtoniana, também teríamos que mostrar que entre todas as conexões einstenianas mecanicamente equivalentes num espaço-tempo, existe uma e somente uma, tal que a forma escalar $\omega^i \wedge \Omega_i$ seja igual a zero. Será natural para dizer que esta é a que vai ser a conexão afim do universo.

Teoricamente, a torção do espaço tempo não precisa ser nula. Porém, por enquanto vamos considerar que seja, conforme a teoria de gravitação de Einstein.

A questão fundamental aqui é que as leis de gravitação de Newton dependem da escolha do referencial. Conforme vimos, para que tais leis sejam válidas, precisamos de um referencial galileano, ou outro, que esteja em movimento de translação uniforme em relação ao um referencial galileano fixo. Mas com a teoria da relatividade geral e a inserção de referenciais não-inerciais, as leis de gravitação de Newton não são mais invariantes. O problema então é modificar estas leis procurando manter o máximo de suas estruturas gerais quanto possível.

Primeiro passo, será desconsiderar as relações $\Omega_{22} = \Omega_{31} = \Omega_{12} = 0$, pois estas nos limita a referenciais cujas tríades espaciais são paralelas, normalmente utilizadas na relatividade especial, uma noção que somente será válida na ausência de gravitação.

O mesmo não ocorre com a relação

$$\omega_1 \wedge \Omega_0^1 + \omega_2 \wedge \Omega_0^2 + \omega_3 \wedge \Omega_0^3 = 0$$

Isso se deve ao fato de

$$0 = \mathbf{d}(\Omega^0) = -\sum_{k=0}^{3} \omega_k^0 \wedge \Omega^k + \sum_{k=0}^{3} \omega^k \wedge \Omega_k^0$$

e estarmos considerando nulos as componentes da torção.

O resultado, então, segue do fato de termos $\Omega_i^0 = c^2\Omega_0^i$

Finalmente, embora a equação

$$\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \Omega_0^1 + \omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \Omega_0^2 + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \Omega_0^3 = 4\pi G\rho\, \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^0, \qquad (i)$$

aqui, não seja invariante, tentaremos recuperar esta característica.

Segundo a Teoria da Relatividade Geral, as propriedades geométricas do espaço-tempo são afetadas pela presença de matéria. Logo, podemos tentar relacionar a 4-forma

$$\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

com a densidade de matéria presente da seguinte maneira: Vimos que a densidade matéria em seu referencial de repouso é dada por $\rho_0\, \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$. Assim podemos reescrever a equação (i) da forma:

$$\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

$$= \lambda \rho_0\, \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 \qquad (ii)$$

onde λ é o valor que iremos encontrar adiante.

Proposição 6.8. *A expressão*

$$\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

é uma forma invariante.

Proposição 6.9. *Primeiramente, vamos notar que a forma dada no enunciado é igual ao produto exterior de* $\frac{1}{2}\boldsymbol{d}m \wedge \boldsymbol{d}m$ *e* $e_i \wedge e_j \Omega^{ij}$.

Na seção 4.5, mostramos que $e_i \wedge e_j \Omega^{ij}$ *é invariante. Logo, basta verificarmos que* $\frac{1}{2}\boldsymbol{d}m \wedge \boldsymbol{d}m$ *também é invariante e o resultado que desejamos será natural.*

Vamos escrever $\boldsymbol{d}m_\beta = [\omega_\beta]^i [e_\beta]_i$ *com relação ao referencial* $\{[e_\beta]_1, ..., [e_\beta]_3\}$.

Então,

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{d}m_\beta \wedge \boldsymbol{d}m_\beta = \sum_{i,j=0}^{3} [\omega_\beta]^i \wedge [\omega_\beta]^j [e_\beta]_i \wedge [e_\beta]_j$$

$$= \sum_{i,j=0}^{3} [\sum_{k=0}^{3} [(q_{\alpha\beta}]_{ik}[\omega_\alpha]^k) \wedge \sum_{l=0}^{3} ([q_{\alpha\beta}]_{jl}[\omega_\alpha]^l)][(\sum_{k=0}^{3} [([q_{\alpha\beta}]_{ki}[e_\alpha]_k) \wedge (\sum_{l=0}^{3} [q_{\alpha\beta}]_{lj}[e_\alpha]_l)$$

$$= \sum_{i,j,k,l=0}^{3} [g_{\alpha\beta}]_{ik}[q_{\alpha\beta}]_{ki}[g_{\alpha\beta}]_{jl}[q_{\alpha\beta}]_{lj}[\omega_\alpha]^k \wedge [\omega_\alpha]^l [e_\alpha]_k \wedge [e_\alpha]_l$$

Como $q_{\alpha\beta}^{-1} = q_{\alpha\beta}^t$, *segue que a expressão acima é igual a*

$\sum_{k,l=0}^{3} [\omega_\alpha]^k \wedge [\omega_\alpha]^l [e_\alpha]_k \wedge [e_\alpha]_l$, *de onde segue o resultado.* ■

Quando analisamos a relatividade em meios contínuos, vimos que sendo $e_0\Pi + e_1\Pi^1 + e_2\Pi^2 + e_3\Pi^3$ é o vetor momento-massa, temos que

$$\rho_0\, \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = \omega^0 \wedge \Pi^0 - \frac{1}{c^2}\omega^1 \wedge \Pi^1 - \frac{1}{c^2}\omega^2 \wedge \Pi^2 - \frac{1}{c^2}\omega^3 \wedge \Pi^3$$

ou

$$-\rho_0\, \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_0 \wedge \Pi^0 + \omega_1 \wedge \Pi^1 + \omega_2 \wedge \Pi^2 + \omega_3 \wedge \Pi^3$$

Daí, podemos escrever (ii) da forma

$$\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

$$= -\lambda\left(\omega_0 \wedge \Pi^0 + \omega_1 \wedge \Pi^1 + \omega_2 \wedge \Pi^2 + \omega_3 \wedge \Pi^3\right) \qquad (iii)$$

Agora, se notarmos que o lado esquerdo da última equação é igual à

$$\frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{01} + \frac{1}{2}\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02} + \frac{1}{2}\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{02}$$

$$+\frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{03} + \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23} + \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \Omega_{23}$$

$$+\frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12} + \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \Omega_{12}$$

encontraremos as sequintes equações:

$$\omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_3 \wedge \Omega_{12} = -2\lambda\Pi^0$$

$$-\omega_0 \wedge \Omega_{23} + \omega_2 \wedge \Omega_{03} - \omega_3 \wedge \Omega_{02} = -2\lambda\Pi^1$$

$$-\omega_0 \wedge \Omega_{31} + \omega_3 \wedge \Omega_{01} - \omega_1 \wedge \Omega_{03} = -2\lambda\Pi^2$$

$$-\omega_0 \wedge \Omega_{12} + \omega_1 \wedge \Omega_{02} - \omega_2 \wedge \Omega_{01} = -2\lambda\Pi^3$$

Que, também, são invariantes. De fato, podemos verificar que os lados esquerdos das equações acima são iguais aos produtos interiores do lado esquerdo da equação (iii) em relação à e_0, e_1, e_2 e e_3, respectivamente.

Para determinarmos o valor de λ, vamos considerar um campo gravitacional para o qual as leis newtonianas se mantenham numa primeira aproximação. Então, vamos considerar um campo gravitacional fraco para que, no limite, as leis newtonianas sejam válidas.
Como, no espaço-tempo estritamente newtoniano, o lado esquerdo da primeira equação acima se anula, precisamos que λ tenda à zero.

Assim, no limite, a segunda equação nos dá:

$$\omega_0 \wedge \Omega_{23} = \omega_2 \wedge \Omega_{03} - \omega_3 \wedge \Omega_{02}$$

Conforme vimos no início da subseção 4.1.1, podemos escrever

$$\Omega_0^3 = -dZ \wedge dt,\ \Omega_0^2 = -dY \wedge dt,$$

onde Y e Z são, respectivamente, a segundo e terceiro componente da aceleração devida à gravidade. Além disso, na subseção 4.1.2 vimos que $Y = \dfrac{\partial V}{\partial y}$ e $Z = \dfrac{\partial V}{\partial z}$, one V é o potencial gravitacional.

Se escrevermos $\omega_0 \wedge \Omega_{23} = c^2 dt \wedge \Omega_{23}$ e considerarmos o que foi recordado logo acima, teremos que:

$$\omega_0 \wedge \Omega_{23} = \omega_2 \wedge \Omega_{03} - \omega_3 \wedge \Omega_{02}$$

implica

$$c^2 dt \wedge \Omega_{23} = \omega_2 \wedge \Omega_{03} - \omega_3 \wedge \Omega_{02} = dy \wedge -dZ \wedge dt \ - \ dz \wedge -dY \wedge dt$$

$$= -dt \wedge dy \wedge d\frac{\partial V}{\partial z} + dy \wedge dz \wedge d\frac{\partial V}{\partial y}$$

Assim,

$$\Omega_{23} = \frac{1}{c^2}\left[dz \wedge d\frac{\partial V}{\partial y} \ - \ dy \wedge d\frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

A equação acima nos mostra que, na primeira aproximação, sabe-se a curvatura do espaço, em cada instante de tempo, devido ao potencial gravitacional.

Cálculos análogos resultarão em:

$$\Omega_{31} = \frac{1}{c^2}\left[-dz \wedge d\frac{\partial V}{\partial x} \ + \ dx \wedge d\frac{\partial V}{\partial z}\right], \qquad \Omega_{12} = \frac{1}{c^2}\left[-dx \wedge d\frac{\partial V}{\partial y} \ + \ dy \wedge d\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$

Agora, se substituirmos esses valores na equação

$$\omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_3 \wedge \Omega_{12} = -2\lambda\Pi^0$$

Obteremos

$$dx \wedge \left[\frac{1}{c^2}\left(dz \wedge d\frac{\partial V}{\partial y} - dy \wedge d\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right] + dy \wedge \left[\frac{1}{c^2}\left(-dz \wedge d\frac{\partial V}{\partial x} + dx \wedge d\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$
$$+dz \wedge \left[\frac{1}{c^2}\left(-dx \wedge d\frac{\partial V}{\partial y} + dy \wedge d\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = -2\lambda\Pi^0$$

que por sua vez implica em

$$\frac{1}{c^2}dx \wedge dy\left[-d\frac{\partial V}{\partial z} - d\frac{\partial V}{\partial z}\right] + \frac{1}{c^2}dx \wedge dz\left[d\frac{\partial V}{\partial y} + d\frac{\partial V}{\partial y}\right] + \frac{1}{c^2}dy \wedge dz\left[-d\frac{\partial V}{\partial x} - d\frac{\partial V}{\partial x}\right]$$
$$= -2\lambda\rho dx \wedge dy \wedge dz$$

Usando a definição de diferencial de uma função, teremos que

$$-\frac{2}{c^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dx \wedge dy \wedge dz = -2\lambda\rho dx \wedge dy \wedge dz$$

Ou seja,

$$\lambda = \frac{-4\pi G}{c^2}.$$

O valor encontrado para λ sugere que, numa primeira aproximação, a curvatura total do espaço é não-negativa e igual à $\frac{8\pi G\rho}{c^2}$, onde ρ é a densidade de matéria. Para verificar este fato, basta substituir o valor de λ na equação

$$\omega_1 \wedge \Omega_{23} + \omega_2 \wedge \Omega_{31} + \omega_3 \wedge \Omega_{12} = -2\lambda\Pi^0$$

Finalmente, a densidade do momento-massa é a manifestação física de um vetor com origem geométrica:

$$m \wedge e_0 \otimes \Pi^0 + m \wedge e_1 \otimes \Pi^1 + m \wedge e_2 \otimes \Pi^2 + m \wedge e_3 \otimes \Pi^3 =$$

$$-\frac{c^2}{8\pi G} \sum_{i,j,k,l} m \wedge e_i(\omega_j \wedge \Omega_{kl} + \omega_k \wedge \Omega_{lj} + \omega_l \wedge \Omega_{jk})$$

De fato, nós vimos na seção 4.2 que o lado direito desta igualdade é uma forma invariante associada à variedade, a curvatura vetorial de um elemento 3-dimensional num espaço-tempo. A lei de conservação de momento-massa, obtida analiticamente das equações de dinâmica de meio contínuo, é imediatamente consequência do fato deste invariante possuir derivada exterior igual a zero (basta verificarmos que $\mathbf{d}(\mathbf{m} \wedge e_i\omega^k \wedge \Omega^i_k) = e_i\Omega^k \wedge \Omega^i_k$ e lembrarmos que estamos considerando um espaço-tempo livre de torção).

A discussão acima mostra que embora esteja mais intimamente relacionado à mecânica newtoniana do que se poderia esperar, a teoria de Einstein possui um conteúdo físico muito mais rico. As leis de gravitação de Newton são, de certa maneira, remanescentes das leis de gravitação de Einstein, basta fazermos c tender ao infinito.

7 Eletromagnetismo e a conexão afim do espaço-tempo

Nas suas observações sobre eletromagnetismo e relatividade especial, Cartan, diferentemente de Einstein, não postula a constância da velocidade da luz. Ele alicerça suas ideias levando em conta o princípio da relatividade segundo Poincaré, que afirma que nenhum experimento eletromagnético ou mecânico pode detectar a diferença entre estados de movimento uniforme. Neste capítulo, veremos que as equações de Maxwell podem ser deduzidas a partir de 2-formas diferenciais cujos coeficientes são campos eletromagnéticos.

7.1 Equações de Maxwell

No estudo da teoria da gravitação de Newton e Einstein, vimos que, entre todas as conexões mecanicamente equivalentes, existe uma que se distingue de todas as outras pela seguinte propriedade:

$$\sum_{i=0}^{3} \omega^i \wedge \Omega_i = 0$$

Porém, nada se afirma sobre a necessidade da torção ser identicamente nula, conforme a teoria de gravitação segundo Einstein. Faremos algo semelhante na teoria de eletromagnetismo.

No nosso estudo da teoria da relatividade especial, as equações de Maxwell serão formuladas da seguinte maneira:

Vamos fixar um referencial galileano e definir as formas

$$\Omega = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy + E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt$$

$$\overline{\Omega} = D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy + H_x dx \wedge dt + H_y dy \wedge dt + H_z dz \wedge dt$$

$$S = \rho dx \wedge dy \wedge dz - I_x dy \wedge dz \wedge dt - I_y dz \wedge dx \wedge dt - I_z dx \wedge dy \wedge dt$$

onde B_x, B_y, B_z são as componentes da **indução magnética**; D_x, D_y, D_z os da **indução elétrica**; E_x, E_y, E_z os do **campo elétrico**, H_x, H_y, H_z os do **campo magnético**, I_x, I_y, I_z os da **densidade de corrente** e, finalmente, ρ é a densidade de carga.

Chamaremos tais formas de **forma de campo eletromagnético**, **forma de indução eletromagnética** e **forma de carga-corrente**, respectivamente. Note que S representa a quantidade elementar de eletricidade assim como Π representou, no capítulo 1, a quantidade elementar de matéria.

Proposição 7.1. *As equações de Maxwell homogêneas*

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0 \quad e \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

são equivalentes à equação

$$\boldsymbol{d}\Omega = 0,$$

onde Ω é a forma de campo eletromagnético e $\boldsymbol{d}$ é a derivada exterior.

Demonstração 7.1. *Sendo*

$$\Omega = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy + E_x dx \wedge dt + E_y dy \wedge dt + E_z dz \wedge dt \text{ então}$$

$$\boldsymbol{d}\Omega = dB_x \wedge dy \wedge dz + dB_y \wedge dz \wedge dx + dB_z \wedge dx \wedge dy$$

$$+dE_x \wedge dx \wedge dt + dE_y \wedge dy \wedge dt + dE_z \wedge dz \wedge dt$$

$$= \frac{\partial B_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial B_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx$$
$$+ \frac{\partial B_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial B_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$
$$+ \frac{\partial E_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt$$
$$+ \frac{\partial E_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial E_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt$$
$$= \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) dt \wedge dy \wedge dz$$
$$+ \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) dt \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) dt \wedge dx \wedge dy$$
$$= 0$$

se e somente se,

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \blacksquare$$

Proposição 7.2. *As equações de Maxwell não-homogêneas*

$$\nabla . D = 4\pi\rho \quad e \quad \frac{\partial D}{\partial t} + \nabla \times H = 4\pi I$$

são equivalentes à equação

$$\boldsymbol{d}\overline{\Omega} = 4\pi S$$

Demonstração 7.2. *Sendo*

$$\overline{\Omega} = D_x dy \wedge dz + D_y dz \wedge dx + D_z dx \wedge dy + H_x dx \wedge dt + H_y dy \wedge dt + H_z dz \wedge dt \text{ então}$$

$$\boldsymbol{d}\overline{\Omega} = \boldsymbol{d}D_x \wedge dy \wedge dz + \boldsymbol{d}D_y \wedge dz \wedge dx + \boldsymbol{d}D_z \wedge dx \wedge dy$$

$$+\boldsymbol{d}H_x \wedge dx \wedge dt + \boldsymbol{d}H_y \wedge dy \wedge dt + \boldsymbol{d}H_z \wedge dz \wedge dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial D_x}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial D_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial D_y}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial D_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \\
&+ \frac{\partial D_z}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial D_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial H_x}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dt + \frac{\partial H_x}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dt \\
&+ \frac{\partial H_y}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial H_y}{\partial z} dz \wedge dy \wedge dt + \frac{\partial H_z}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dt + \frac{\partial H_z}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dt = 4\pi S
\end{aligned}
$$

se e somente se,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 4\pi\rho \\
&\frac{\partial D_x}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 4\pi I_x \\
&\frac{\partial D_y}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = 4\pi I_y \\
&\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = 4\pi I_z \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

A proposição acima implica que **d**S=0, que expressa a lei de conservação de carga, ou seja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla . I = 0$$

7.2 Teoria do elétron de Lorentz, conexão afim e eletromagnetismo

Uma pergunta natural aqui é: Como modificar as equações de Maxwell para trabalharmos com uma conexão afim arbitrária no espaço-tempo da relatividade especial?

A resposta depende de como a conexão que relaciona com as características essenciais das equações de Maxwell. Podemos começar a pensar da seguinte forma: Uma vez que as equações de Maxwell são equações diferenciais parciais de primeira ordem, elas envolvem valores numéricos de quantidades físicas em dois pontos infinitamente próximos do espaço-tempo. Estes valores numéricos são obtidos fixando um referencial inercial. Portanto, para comparar esses valores obtidos em dois pontos infinitamente próximos, devemos ser capazes de alinhar um referencial em relação ao outro. Assim, podemos dizer que para escrever as equações de Maxwell, ou qualquer outra lei física, precisa-se saber a conexão afim do espaço-tempo.

Contudo, a primeira equação de Maxwell $\nabla . B = 0$ resume um grande número de experimentos que mostram que o fluxo de indução magnética total é sempre zero. Portanto, a formulação analítica correta não é a que envolve derivadas parciais, que podem até mesmo não existir. Ela é antes a declaração que a integral

$$\iint B_x dydz + B_y dzdx + B_z dxdy$$

tomada sobre uma superfície fechada é zero. Deste ponto de vista, o significado físico das leis de maxwell é melhor conduzido pelas equações

$$\iint \Omega = 0 \text{ e}$$

$$\iint \overline{\Omega} = 4\pi \iiint S$$

onde a integral do lado direito, da última equação, estende-se sobre qualquer volume 3-dimensional do espaço-tempo (e representa a carga elétrica contida nele) e a integral do lado esquerdo estende-se sobre o bordo bidimensional deste volume. Nesta formulação, as equações de Maxwell se mantém sob as hipóteses relativas a conexão afim do espaço-tempo.

7.2.1 A teoria do elétron de Lorentz

Nesta subseção, faremos um brevíssimo comentário sobre a teoria do elétron de Lorentz, uma vez que o restante desta seção será desenvolvida se apoiando em hipóteses desta teoria.

A teoria do elétron de Lorentz surgiu de um esforço científico de sístese entre a teoria eletromagnética de Maxwell e a concepção atômica da matéria. O resultado deste esforço foi a concretização de uma nova visão de mundo, diferente da mecanicista.

O modelo de Lorentz, iniciado em 1892, recebeu sua forma completa em 1904, baseando-se nas seguintes hipóteses:

(i) O elétron esférico em movimento se deforma como qualquer corpo;

(ii) Todas as forças não elétricas são influenciadas pelo movimento da mesma maneira que as forças eletrostáticas entre elétrons;

(iii)A massa do elétron é totalmente de origem eletromagnética e o único momento linear existente é o momento eletromagnético;

(iv)A influência do movimento sobre dimensões dos corpos é somente na direção do movimento;

(v)As massas de todas as partículas variam da mesma maneira que a massa do elétron.

Ao longo desta seção, iremos utilizar, principalmente, as hipótese (ii),(iii) e (v). No seu trabalho de 1895, Lorentz introduz o **princípio dos estados correspondentes** que assegura a invariância das equações básicas de Maxwell de maneira que o movimento em relação ao éter não altera os fenômenos eletromagnéticos observados.

7.2.2 Conexão afim e eletromagnetismo à luz da teoria de Lorentz

Vamos assumir o príncípio dos estados correspondentes de Lorentz e identificar, no vácuo, a indução magnética com o campo magnético e a indução elétrica com o campo elétrico. Se escolhermos um referencial inercial, ou outro referencial que desempenha o mesmo papel, em cada ponto do espaço-tempo, podemos definir

$$\Omega = \sum_{i,j} H_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$$
$$\overline{\Omega} = \sum_{i,j,k,l} H^{ij}\omega^k \wedge \omega^l$$
$$S = \sum_{i,j,k,l} I^i\omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l$$

de forma que as equações $\mathbf{d}\Omega = 0$ e $\mathbf{d}\overline{\Omega}$ continuam invariantes. Consequência disto é que, se representarmos dH_{ij} por $H_{ij}|^k\omega_k$, teremos as seguintes relações expressando tais equações, respectivamente:

$$H_{ij}|^k + H_{jk}|^i + H_{ki}|^j$$

$$Hi\rho|^{\rho} = 4\pi I_i$$

onde temos $I_0 = I^0$ e $I^j = -I_j$.

Porém a invariância das equações de Maxwell não têm como consequência a conexão afim do espaço-tempo pois tais equações não fornecem todas as leis do eletromagnetismo. Na teoria de Lorentz, existe também a equação que dá a hiperforça exercida pelo campo eletromagnético no elétron.

Nos apropriando das hipóteses (ii), (iii) e (v) da teoria de Lorentz, aqui, da mesma forma que fizemos na mecânica clássica e na relatividade, podemos afirmar que a hiperforça é dada pela derivada exterior do *momento-massa eletromagnético*, que será representado pelo vetor deslizante

$$\mathbf{G} = -(\mathbf{m} \wedge e_i) H^{i\rho} H_{k\rho} \overline{\omega}^k + \frac{1}{2} H^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma} (\mathbf{m} \wedge e_i) \overline{\omega}^i$$

onde

$$\begin{array}{ll} \overline{\omega_0} = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 & \overline{\omega_1} = -\omega_0 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \\ \overline{\omega_2} = -\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \omega_1 & \overline{\omega_3} = -\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array}$$

Vamos assumir que a torção é igual a zero. Então, tratando $\mathbf{m}$, e_i e $\overline{\omega}^i$ como se fossem constantes, e tomarmos a derivada exterior de G, teremos:

$$\mathbf{dG} = 4\pi \mathbf{m} \wedge e_i H^{i\rho}|_{\rho} \, \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Assim temos a expressão da hiperforça em termos das componentes do campo eletromagnético e da hipercorrente, análogo à mecânica clásssica e à relatividade especial.

Agora, se supormos que a torção é não-nula, temos que pensar em quais condições a conexão afim do espaço-tempo deve satisfazer para que a equação dada logo acima se mantenha. Vamos supor que o ds^2 do espaço-tempo é fixo. Como as relações dadas nas proposições 6.1 e 6.2 são invariantes, ou seja, independem da escolha da conexão afim do espaço-tempo, as componentes do campo eletromagnético e da hipercorrente serão completamente determinadas. Logo, se existir uma conexão que satisfaça a equação acima, ela será mecanicamente equivalente àquela conexão livre de torção.

8 Considerações finais

Neste capítulo, falaremos sobre como Cartan concebeu as ideias que originaram na conhecida teoria de Cartan-Einstein, que é uma modificação da Teoria Geral da Relatividade e permite o espaço-tempo possuir conexão afim cujo tensor torção não se anula.

Para isso, representaremos a densidade de momento-massa na mecânica de meios contínuo por

$$\mathbf{G} = \mathbf{m} \wedge e_i \Pi^i + e_i \wedge e_j \Pi^{ij},$$

onde $\Pi^{ij} = \rho u^i u^j + p^{ij}$.

Se admitirmos a possibilidade da torção ser não-nula e exigirmos, como na teoria de Einstein, que a densidade do momento-massa seja um invariante de característica puramente geométrica, para encontrarmos o invariante apropriado, vamos retornar à interpretação geométrica de G discutida na seção 5.2.

Nesta interpretação, foi atribuída à G somente a *rotação* associada ao elemento de superfície. Agora, vamos lembrar que se substituirmos esta rotação pelo deslocamento total (*rotação* e *translação*) associado com um elemento (ver seção 4.5), obteremos a forma geométrica:

$$\sum_{i,j,k,l} \{\mathbf{m} \wedge e_i(\omega_j \wedge \Omega_{kl} + \omega_k \wedge \Omega_{lj} + \omega_l \Omega_{jk}) - e_i \wedge e_j(\omega_k \wedge \Omega_l - \omega_l \wedge \Omega_k)\}$$

Se esta forma representar, a menos de uma constante multiplicativa, a densidade de momento-massa, sua derivada exterior deve ser nula. Por outro lado, como esta forma é invariante, é facil verificar que sua derivada exterior é igual a

$$\sum_{i,j,k,l} m \wedge e_i[\Omega_j \wedge \Omega_{kl} + \Omega_k \wedge \Omega_{lj} + \Omega_l \wedge \Omega_{jk}]$$

que não é identicamente nula. Logo, para mantermos a interpretação, deveremos fazer uma hipótese restritiva não somente sobre a torção, mas também sobre a curvatura do espaço-tempo. A mais simples, seria assumir relações entre as componentes de torção e curvatura que façam desaparecer os coeficientes de $m \wedge e_i$, para todo i = 0,1,2,3, na derivada exterior. Isto renderia numa generalização da teoria de Einstein compatível com todas as leis do eletromagnetismo. Nesta teoria, a torção desaparece numa região onde a densidade do momento-massa pode ser representada por um vetor simples, como fizemos na discussão da teoria de Einstein.

Referências

ABRAHAM, R.; MARSDEN, J. E.; MARSDEN, J. E. *Foundations of mechanics*. [S.l.]: Benjamin/Cummings Publishing Company Reading, Massachusetts, 1978.

ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 60.

CÂMARA, L. M. Uma Breve Introdução à Topologia das Variedades. *Notas de Aula, Departamento de Matemática CCE/UFES*.

CÂMARA, L. M. Geometria Diferencial. O cálculo de darboux e o método do referencial móvel aplicados a curvas e superfícies. *Departamento de Matemática CCE/UFES*, preprint, Versão preliminar de 26 de dezembro de 2013.

CARMO, M. P. do. *O método do referencial móvel*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.

CARTAN, E. Leçons sur les invariants intégraux. *Hermann, Paris*, 1922.

CARTAN, É. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie). In: SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. [S.l.], 1923. v. 40, p. 325–412.

CARTAN, E. Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie)(suite). In: *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*. [S.l.: s.n.], 1924. v. 41, p. 1–25.

CARTAN, É. *On manifolds with an affine connection and the theory of general relativity*. [S.l.]: Humanities Press, 1986. v. 1.

DORAN, C.; LASENBY, A. *Geometric algebra for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.

EINSTEIN, A.; PEREIRA, C. A. *A teoria da relatividade especial e geral*. [S.l.]: Contraponto Editora, 2003.

GODBILLON, C. Geometrie differentielle et mecanique analytique. Hermann, Collier-Macmillan Ltd., 1969.

LOGUNOV, A. A. Henri poincaré and relativity theory. *arXiv preprint physics/0408077*, 2004.

LOPES, A. O. *Introdução à mecânica clássica*. [S.l.]: Edusp, 2006.

SEARS, E. Z.-Y. E. F. *Física I–Volume 1–Mecânica–Editora Pearson Education do Brasil.–10 a*. [S.l.]: Edição, 2003.

TRAUTMAN, A. Einstein-cartan theory. *arXiv preprint gr-qc/0606062*, 2006.

VILLANI, A. A visão eletromagnética e a relatividade: I-a gênese das teorias de lorentz e einstein. Instituto de Física USP, 1985.