

Hélio Gomes Filho

Método dos Elementos Finitos através da Análise Isogeométrica: Uma Introdução

Vitória-ES

Junho de 2016

Hélio Gomes Filho

Método dos Elementos Finitos através da Análise Isogeométrica: Uma Introdução

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Dr. Etereldes Gonçalves Júnior

Vitória-ES

Junho de 2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

G633m Gomes Filho, Hélio, 1992-
Método dos elementos finitos através da análise
isogeométrica : uma introdução / Hélio Gomes Filho. – 2016.
100 f. : il.

Orientador: Etereldes Gonçalves Júnior.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Método dos elementos finitos. 2. Equações diferenciais
parciais. 3. Elasticidade. 4. Análise isogeométrica. I. Gonçalves
Junior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo.
Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

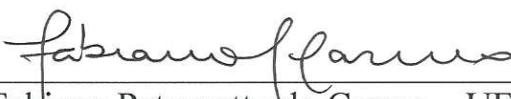
“Método dos Elementos Finitos através da Análise Isogeométrica: Uma Introdução”

Hélio Gomes Filho

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 24/06/2016 por:


Etereldes Gonçalves Júnior – UFES - Orientador


Fabiano Petronetto do Carmo – UFES

P1 
Fabrício Simeoni de Sousa – USP – São Carlos

*Este trabalho é dedicado a todos aqueles que,
mesmo diante de suas limitações, das dificuldades
e das injustiças, nunca desistem dos seus sonhos.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo sustento recebido a cada dia, de maneira que assim como Samuel, posso dizer: "Até aqui nos ajudou o Senhor" (1 Samuel 7, 13).

Agradeço à minha esposa, Franciane, pelo companheirismo, compreensão e apoio em todos os momentos e pela motivação para que eu nunca desistisse, e à minha família que sempre me apoiou e batalhou para que hoje eu pudesse ser o que sou.

Agradeço ao meu orientador Etereldes, que além de um mestre exemplar, posso dizer que foi um amigo durante esse período, e me possibilitou encontrar novamente a alegria em estudar matemática.

Agradeço aos meus amigos do mestrado na matemática, pelos bons e maus momentos juntos, pelas muitas conversas e reflexões, e em especial ao Weverthon, pela ajuda em momentos difíceis, e à Franciane, por compartilhar os momentos de dificuldades durante nosso período de estudos; e aos amigos da engenharia civil, por tudo que passamos, e em especial ao Mindszenty, pelas muitas e muitas horas de conversas.

Agradeço ao professor Valmecir, pelos seus ensinamentos e os muitos anos em que me orientou na iniciação científica.

Enfim, agradeço a todos do PPGMAT pelos conhecimentos adquiridos, ao PICME, mais do que pela oportunidade de concluir este mestrado, mas pela oportunidade de o ter iniciado, e à CAPES, pelo financiamento.

*“Aquele que leva a preciosa semente,
andando e chorando, voltará sem
dúvida com alegria, trazendo consigo
os seus molhos.
(Bíblia Sagrada, Salmos 126, 6)*

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução ao Método dos Elementos Finitos através da Análise Isogeométrica, que combina os conceitos de NURBS, utilizadas para construir o domínio a ser analisado e também como funções base, às características do Método dos Elementos Finitos. Ao longo do texto são apresentados os conceitos fundamentais a respeito das NURBS, a solução de Equações Diferenciais Parciais, comparando os resultados obtidos entre o Método Isogeométrico e o Método dos Elementos Finitos clássico, ressaltando as vantagens e desvantagens. Também é apresentada uma aplicação do método, onde o mesmo é usado na solução de problemas de elasticidade em duas e três dimensões, destacando um exemplo onde é feita a análise de uma casca (elemento tridimensional onde uma das dimensões é desprezível em relação as outras).

Palavras-chave: Método de Análise Isogeométrica. Método dos Elementos Finitos. NURBS. EDP. Problema de Elasticidade.

Abstract

The Isogeometric Analysis is a method that combine the Finite Elements Method with Non-Uniform Rational Basis Spline (NURBS). The NURBS is used to describe the geometry with great flexibility, and it can also work as basis functions. The main concepts of NURBS are presented in this study, and how to apply the method to solve ordinary and partial differential equations. A comparison between the isogeometric analysis and the classical finite elements method is showed to contrast the error behavior in both methods, and the advantages of describe exactly a domain. The elasticity problem in two-dimensional and three-dimensional model are performed as application of the isogeometric analysis, and as exemple it was developed a model of a shell based on a real structure.

Keywords: Isogeometric Analysis Method. Finite Elements Method. NURBS. PDE. Elasticity Problem.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Descontinuidade gerada na B-Spline $N_{m-p-1,p}$ em $\xi = 1$ devido a descontinuidade na definição de $N_{m-1,0}(\xi)$ nesse ponto.	26
Figura 2 – Construção recursiva de B-splines através do grau anterior	27
Figura 3 – Efeito da repetição do nós iniciais e finais na soma das funções base (a soma é representada pela função em vermelho).	27
Figura 4 – Construção das NURBS a partir das B-splines (a soma é representada pela função em vermelho).	29
Figura 5 – Construção das NURBS bidimensionais com funções base de graus diferentes em cada direção.	29
Figura 6 – Construção de curva a partir de bases de B-splines.	30
Figura 7 – Aplicação da Função Geométrica. As cores simbolizam a distribuição de uma função base no domínio gerado	31
Figura 8 – Alteração de alguns pontos de controle sem alterar a curva após a inserção de um novo nó.	33
Figura 9 – Transformação do domínio paramétrico para o domínio geométrico.	46
Figura 10 – Domínio definido no problema do exemplo 1.	48
Figura 11 – Domínio definido no problema do exemplo 2.	50
Figura 12 – Resultado obtido - vista - Exemplo 2.	50
Figura 13 – Resultado obtido - plano - Exemplo 2.	51
Figura 14 – Solução obtida após vários refinamentos.	52
Figura 15 – Solução em vista plana obtida após vários refinamentos.	52
Figura 16 – Comparação do erro entre o método dos elementos finitos e o método isogeométrico para funções base de graus 1, 2 e 3.	54
Figura 17 – Comparação entre domínio real (em azul) e domínio aproximado para o MEF (vermelho).	56
Figura 18 – Comparação entre Solução no domínio de 10 lados e o domínio de 60 lados para o MEF.	58
Figura 19 – Gráfico do erro em função do número de funções bases MEF (log x log).	59
Figura 20 – Gráfico do erro em função do número de funções base do Método Isogeométrico (log x log).	60
Figura 21 – Interseção entre uma aresta do polígono que aproxima o domínio do MEF (em verde) e a solução exata do problema.	60
Figura 22 – Comparação entre a solução exata (em roxo), o método isogeométrico (em azul) e o método dos elementos finitos (em vermelho) sobre uma aresta da fronteira aproximada por um polígono de 30 lados.	61

Figura 23 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para domínios aproximados por polígonos de 10, 20 e 30 lados e diferentes valores de a ($\log x \log$).	64
Figura 24 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para domínios aproximados por polígonos de 40, 50 e 60 lados e diferentes valores de a ($\log x \log$).	65
Figura 25 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para $a = 1.20, 1.25$ e 1.30 para diferentes domínios aproximados ($\log x \log$).	66
Figura 26 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para $a = 1.35, 1.40$ e 2.00 para diferentes domínios aproximados ($\log x \log$).	67
Figura 27 – Gráfico de comparação do erro do método isogeométrico para diferentes valores de a ($\log x \log$).	68
Figura 28 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.20$).	69
Figura 29 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.25$).	70
Figura 30 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.30$).	71
Figura 31 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.35$).	72
Figura 32 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.40$).	73
Figura 33 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 2.00$).	74
Figura 34 – Comparação do erro relativo entre o método isogemétrico e o MEF de grau 2 para domínios aproximados de 8, 12 e 16 lados para $a = 1.20$.	75
Figura 35 – Comparação entre as funções base de grau 2 do método dos elementos finitos e o método isogeométrico.	77
Figura 36 – Esquema da placa analisada na exemplo 1.	82
Figura 37 – Comparação da solução entre modelos com 9 função bases e 70 funções base.	82
Figura 38 – Comparação entre resultados do Mtool com a rotina de análise isogeométrica implementada em Matlab: Na parte superior o gráfico do deslocamento em X e na inferior em Y. À esquerda, Matlab e à direita, Mtool.	83
Figura 39 – Esquema da placa analisada no exemplo 2.	84
Figura 40 – Comparação da solução do problema de elasticidade plana para o círculo de acordo com o número de funções base onde se observa o aumento da deformação do domínio conforme se aumenta o número de funções base (na escala o azul representa deslocamento nulo e o vermelho representa deslocamento máximo).	84

Figura 41 – Igreja da Pampulha, Belo Horizonte - MG.	86
Figura 42 – Modelo da Igreja da Pampulha feito através do método de análise isogeométrico.	87
Figura 43 – Funções base na direção U.	88
Figura 44 – Distribuição da deformação do modelo da Igreja da Pampulha, onde o azul escuro representa deslocamento zero e o vermelho escuro representa o deslocamento máximo.	89

Lista de tabelas

Tabela 1 – Pontos de Controle e pesos usando no exemplo da Figura 7.	31
Tabela 2 – Pontos de Controle usando na modelagem.	49
Tabela 3 – Comparação de convergência do erro entre o método dos elementos finitos e o método isogeométrico.	55
Tabela 4 – Análise erro relativo para domínio de 10 lados	57
Tabela 5 – Análise erro relativo para domínio de 30 lados	58
Tabela 6 – Análise erro relativo para domínio de 40 lados	58
Tabela 7 – Análise erro relativo para domínio de 60 lados	58
Tabela 8 – Análise erro relativo para o Método Isogeométrico	59
Tabela 9 – Análise de erro relativo para o Método dos Elementos Finitos	61
Tabela 10 – Análise erro relativo para domínio de 10 lados	62
Tabela 11 – Análise erro relativo para domínio de 20 lados	63
Tabela 12 – Análise erro relativo para domínio de 30 lados	63
Tabela 13 – Análise erro relativo para domínio de 40 lados	63
Tabela 14 – Análise erro relativo para domínio de 50 lados	63
Tabela 15 – Análise erro relativo para domínio de 60 lados	63
Tabela 16 – Análise erro relativo para o método isogeométrico	68
Tabela 17 – Erro relativo para o MEF com funções bases de grau dois em domínios aproximados de 8, 12 e 16 lados para $a = 1.20$	75
Tabela 18 – Pontos de Controle usando na modelagem.	88

Sumário

	Introdução	23
1	UMA BREVE INTRODUÇÃO ÀS NURBS	25
1.1	B-Splines	25
1.2	NURBS como Função Base	28
1.3	Função Geométrica: Utilização de NURBS para Definir o Domínio	29
1.4	Inserção de Nós e Refinamento de NURBS	32
2	MÉTODO DE ANÁLISE ISOGOMÉTRICA APLICADO À SOLU- ÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	35
2.1	Espaço de Funções	35
2.2	Equações Diferenciais Ordinárias	36
2.3	Equações Diferenciais Parciais em Duas Dimensões	44
2.4	Refinamento	50
2.5	Análise de Erro e Convergência	53
2.6	Comparação entre Método de Análise Isogeométrico e o Método dos Elementos Finitos Clássico	55
3	MÉTODO ISOGOMÉTRICO APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE	79
3.1	Elasticidade 2D	80
3.2	Elasticidade 3D	83
4	CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	91
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICES	95
	APÊNDICE A – ALGORITMOS	97

Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) teve seu início em meados de 1950, destacando-se os trabalhos de John Argyris (1913-2004), o qual teve seu trabalho destacado como o primeiro a descrever o que veio a se tornar o MEF; Ray Clough (1920), quem foi o responsável por denominar o método; Richard Courant (1888-1972), quem criou o primeiro elemento finito, a saber, o triângulo linear; e Olgierd C. Zienkiewicz (1921-2009), quem se destacou no estudo dos elementos isoparamétricos; entre outros, como se pode ver em (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009).

Do surgimento do MEF até então as suas aplicações se tornaram inúmeras e cada vez mais complexas, o que fez necessário buscar cada vez mais por formas de aperfeiçoar o método, adaptando-o às aplicações e trabalhando de maneira a aumentar a sua velocidade (ou pelo menos com que esta não fosse reduzida). Obviamente, o desenvolvimento dos computadores teve grande importância nesse processo de evolução.

Dentre todas essas evoluções, esse trabalho se destaca em apresentar uma das mais recentes, o Método de Análise Isogeométrica, o qual foi proposto em 2004 por Thomas J.R. Hughes, J. Austin Cottrell e Yuri Bazilevs (HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005).

O Método de Análise Isogeométrica une os conceitos de NURBS aos conceitos do Método dos Elementos Finitos clássico, onde as NURBS ao mesmo tempo que são responsáveis por descrever a geometria do domínio, são as funções base para solução do problema, ou seja, não há a necessidade de métodos extras para geração da malha de elementos finitos, pois esta já é gerada no momento da concepção da geometria.

O texto se desenvolve basicamente em três capítulos, 2, 3 e 4, onde o capítulo 2 faz a apresentação dos conceitos básicos e necessários sobre as NURBS, o capítulo 3 apresenta o Método de Análise Isogeométrica na solução de Equações Diferenciais Parciais (EDP), e o capítulo 4 apresenta uma aplicação do método voltada ao problema de elasticidade. Todas as imagens apresentadas e os modelos foram desenvolvidos pelo autor.

Como requisitos básicos para o entendimento desse trabalho são necessários os conhecimentos básicos do Método dos Elementos Finitos clássico, aplicações e implementação, para que assim se possa ter maior aproveitamento a respeito das comparações entre os métodos desenvolvidas ao longo do texto.

1 UMA BREVE INTRODUÇÃO ÀS NURBS

Neste capítulo apresentaremos as ferramentas necessárias para formalização do Método de Análise Isogeométrico, sendo estas também o grande diferencial entre o Método dos Elementos Finitos (MEF) clássico e o que utiliza esta análise. Essas ferramentas são basicamente as NURBS (do inglês, *Non-Uniform Rational B-splines*), que são quocientes ponderados entre B-splines.

As NURBS são utilizadas de duas maneiras neste método: compondo as funções base (no MEF clássico as funções base são compostas por polinômios, geralmente de grau 1) e definindo a geometria do domínio de maneira exata, e nesse caso são elas que produzem a discretização desse domínio. Aqui apenas introduziremos os conceitos relacionados a NURBS, dando início na próxima seção aos estudos relacionados à B-splines. Para mais detalhes sobre NURBS ver (PIEGL; TILLER, 1996).

1.1 B-Splines

B-splines são funções polinomiais definidas recursivamente, onde se fazem necessários dois elementos para que estas sejam construídas: o *vetor de nós* e o *grau*. O vetor de nós é um conjunto de números reais organizados em ordem não-decrescente, dado por

$$\Xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

onde se um nó não é repetido a B-spline tem $p - 1$ derivadas contínuas nesse nó, onde p é o grau da função. Normalmente se usa o vetor de nós iniciando em 0 e terminando em 1, mas nada impede que esses números sejam outros quaisquer, respeitando as condições apontadas anteriormente.

Seja $N_{i,p}$ a i -ésima função base e B-spline de grau p , temos que esta pode ser definida recursivamente da seguinte forma:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{do contrário} \end{cases} \quad (1.1)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (1.2)$$

Observações importantes:

1. Seja m o número de nós, temos que o número de funções base é $m - p - 1$, onde p é o grau. Isso vem do fato da equação (1.2) utilizar o nó ξ_{i+p+1} , onde $i + p + 1$ é no máximo igual a m .
2. Note da equação (1.1) que quando ξ é igual ao último nó, nós temos que $N_{m-1,0}(\xi) = 0$, ou seja, a última função base nesse ponto tem valor 0, porém definimos aqui que $N_{m-1,0}(\xi) = 1$ para evitar descontinuidade na derivada da B-Spline de grau zero, que por consequência causaria descontinuidade na derivada de todos os outros graus, como pode ser visto na Figura 1.
3. Na equação (1.2) adotamos $0/0 = 0$.

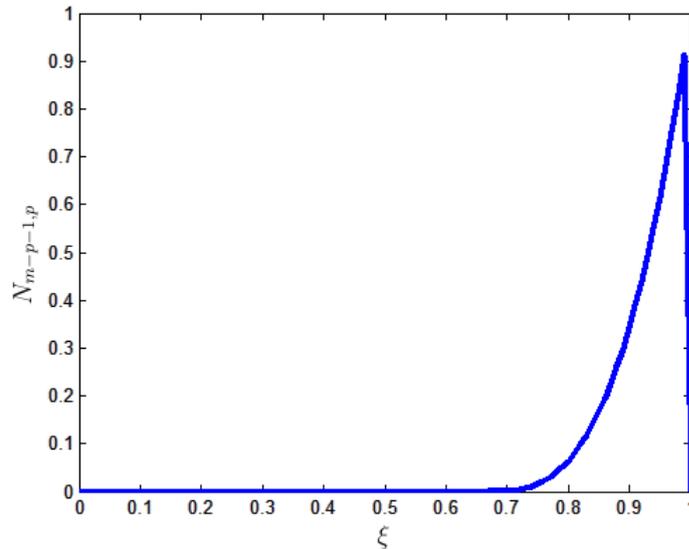


Figura 1 – Descontinuidade gerada na B-Spline $N_{m-p-1,p}$ em $\xi = 1$ devido a descontinuidade na definição de $N_{m-1,0}(\xi)$ nesse ponto.

Segue na Figura 2 um exemplo para deixar claro a construção recursiva das B-splines. Vamos usar o vetor de nós $\Xi = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.50 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1]$ para construir as funções base B-splines de grau 2. Note que em cada ponto do domínio existem exatamente $p + 1$ funções base, onde p é o grau indicado.

Seja p o grau da B-spline desejada, é necessário que se repita o primeiro e o último nó $p + 1$ vezes, para que a soma das funções base seja constante e igual a uma unidade (partição da unidade) em qualquer ponto do domínio, como mostra o exemplo da Figura 3, onde se adotou grau igual a 2 para os vetores de nós especificados. A demonstração disso pode ser encontrada em (ROCHA, 2016).

Também é importante conhecer as derivadas das funções base. As de primeira ordem são apresentadas na equação (1.3), enquanto as derivadas de ordem maior não serão

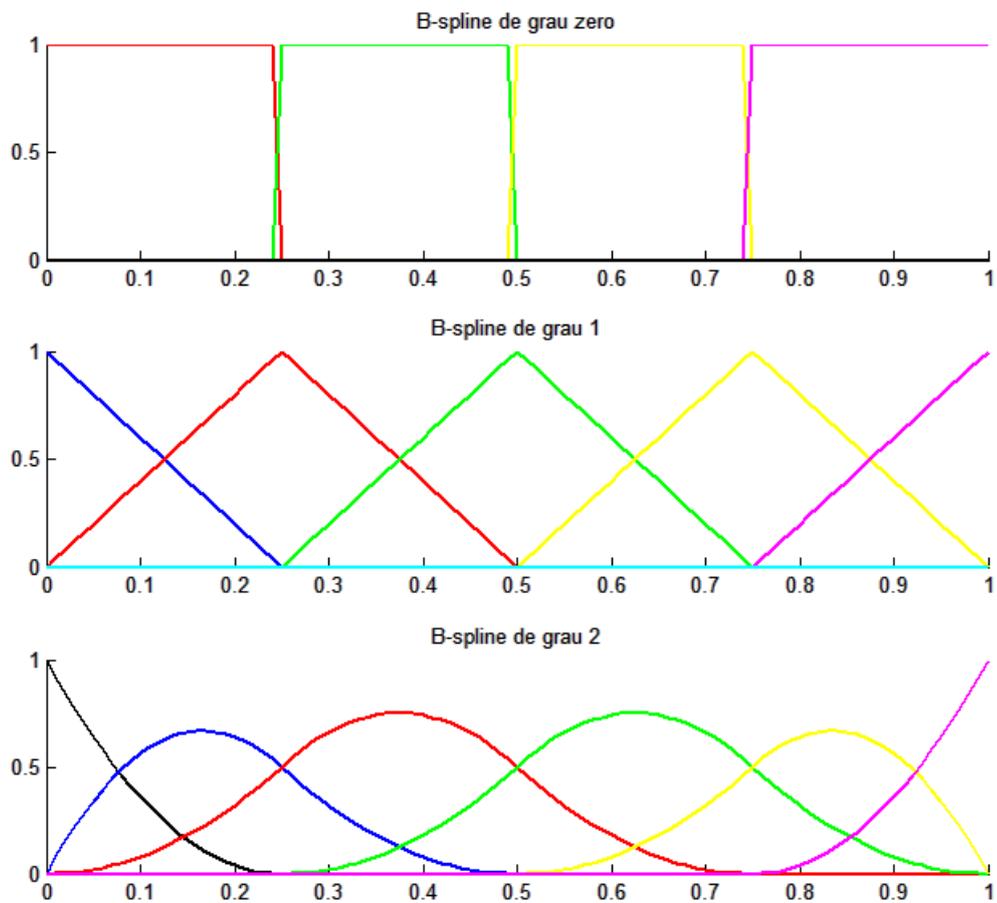


Figura 2 – Construção recursiva de B-splines através do grau anterior

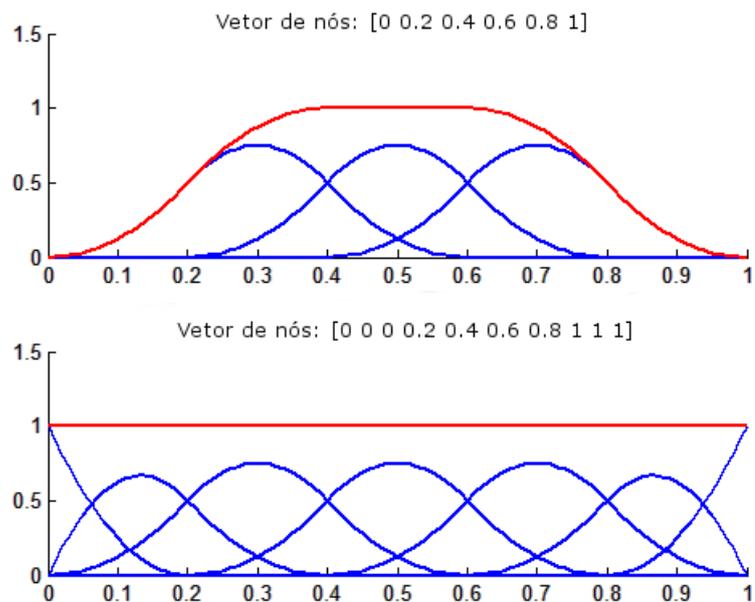


Figura 3 – Efeito da repetição do nós iniciais e finais na soma das funções base (a soma é representada pela função em vermelho).

aqui apresentadas, mas caso necessário elas podem ser encontradas em (PIEGL; TILLER, 1996; ROCHA, 2016).

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (1.3)$$

1.2 NURBS como Função Base

Na construção das funções base NURBS é adicionado mais um conceito além do vetor de nós e o grau: os pesos. As funções base NURBS são definidas através de uma média ponderada entre as funções base B-splines. Uma NURBS com pesos unitários é uma B-spline.

Seja w_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, o peso correspondente à i -ésima função base, temos que as NURBS são definidas da seguinte forma:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{j=1}^m w_j N_{j,p}(\xi)} \quad (1.4)$$

A Figura 4 compara as B-splines com as NURBS. Nesse exemplo utilizamos o vetor de nós $[0 \ 0 \ 0 \ 0.2 \ 0.4 \ 0.6 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1]$, grau 2 e os pesos $[1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 3 \ 2 \ 1]$. No ponto $\xi = 0.65$, três bases são não nulas: $N_{4,2} = 0.28125$, $N_{5,2} = 0.6875$ e $N_{6,2} = 0.03125$. Assim o valor de $R_{4,2}$ é dado por:

$$R_{4,2}(0,65) = \frac{1 \times 0.28125}{1 \times 0.28125 + 3 \times 0.6875 + 2 \times 0.03125} = 0.11688$$

Note que apesar dos pesos, a soma das funções base continua sendo constante e igual a uma unidade.

Podemos definir também as NURBS bidimensionais, que são geradas por uma estrutura semelhante ao produto tensorial entre duas B-splines em uma dimensão, diferenciando-se apenas pela presença dos pesos. A definição é dada na equação (1.5). Vale notar que não é necessário que os graus das B-splines utilizadas sejam o mesmos. A Figura 5 mostra a construção de uma função base NURBS bidimensional a partir de uma B-spline de grau 1 e outra de grau 2.

$$R_{ij}(\xi, \eta) = \frac{w_{ij} N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta)}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m w_{kl} N_{k,p}(\xi) M_{l,q}(\eta)} \quad (1.5)$$

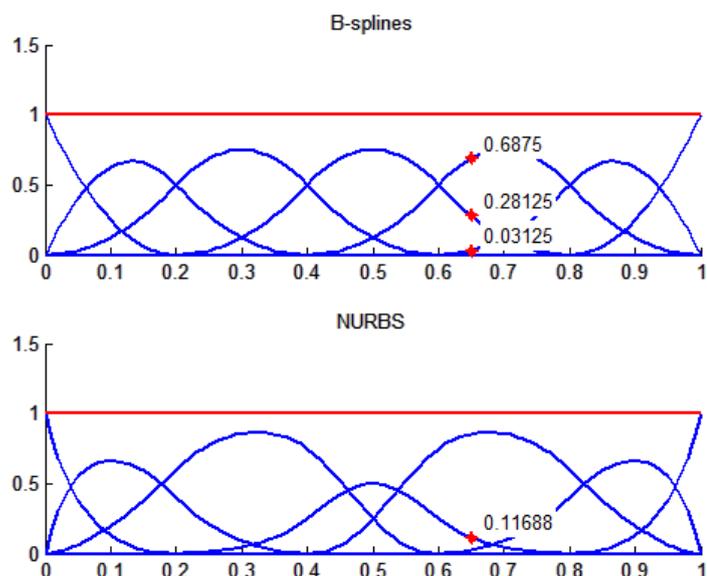


Figura 4 – Construção das NURBS a partir das B-splines (a soma é representada pela função em vermelho).

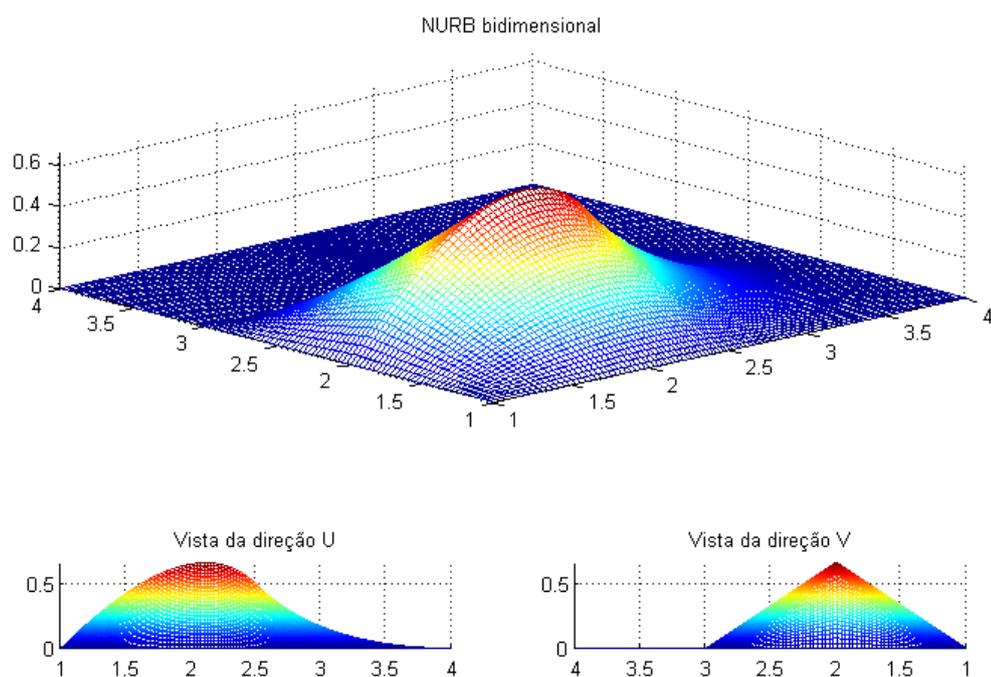


Figura 5 – Construção das NURBS bidimensionais com funções base de graus diferentes em cada direção.

1.3 Função Geométrica: Utilização de NURBS para Definir o Domínio

Antes de apresentarmos a construção do domínio através das NURBS, vamos apresentar a construção de curvas através de B-splines, pois a noção é análoga. Para isso é necessário um novo conceito: Pontos de controle. Os pontos de controle são um conjunto

de coordenadas em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 que definem a forma que a combinação das funções base irá tomar.

Dado um conjunto de funções base B-splines $\{N_{i,p}\}_i$ e um conjunto de pontos de controle $\{P_i\}_i$, onde $i = \{1, \dots, n\}$, uma curva pode ser construída da seguinte forma:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,p}(\xi) \quad (1.6)$$

Note que a equação (1.6) é uma aplicação tal que, dado o vetor de nós $\Xi = [a, \dots, b]$, vai de $[a, b]$ em \mathbb{R}^n dependendo da natureza dos pontos de controle.

A mesma equação é válida substituindo as funções base B-spline por NURBS. Para exemplificar a construção de uma curva de grau 2 a partir de B-splines vamos tomar o vetor de nós $\Xi = [0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5]$ e os pontos de controle $P = \{(0, 3), (1, 1), (2, 3), (4, 0), (6, 1), (6, 3), (3, 4)\}$. O resultado é apresentado na Figura 6.

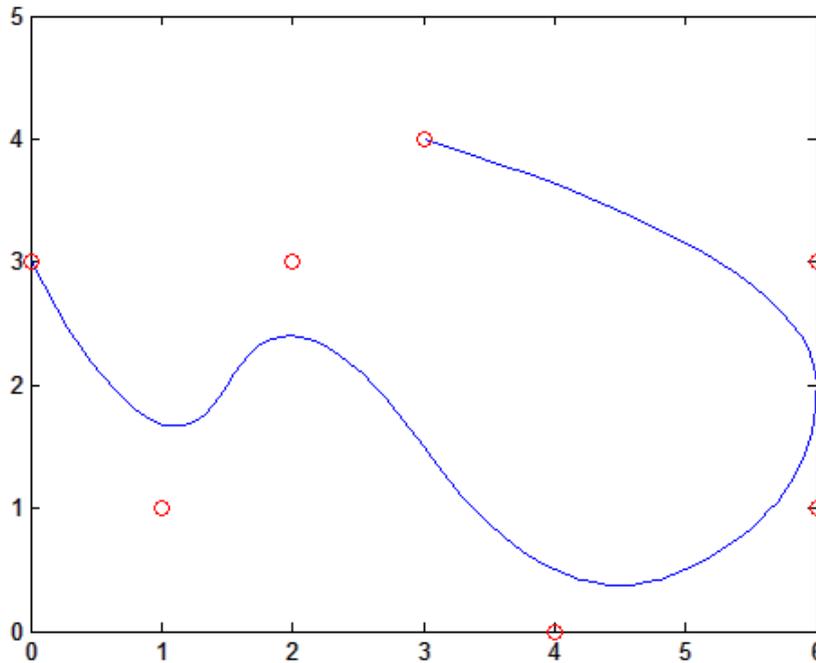


Figura 6 – Construção de curva a partir de bases de B-splines.

De maneira análoga podemos definir uma função que leva um domínio retangular em uma geometria baseada na disposição dos pontos de controle. Dado o conjunto de funções base NURBS bidimensionais $\{R_{i,j,p}\}_{i,j=1}^{n,m}$ e o conjunto de pontos de controle em \mathbb{R}^2 , $\{P_{ij}\}_{i,j=1}^{n,m}$, nós podemos definir a, doravante chamada, Função Geométrica:

$$F(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n,m} P_{ij} R_{i,j,p}(\xi, \eta) \quad (1.7)$$

A Função Geométrica é essencial no Método de Análise Isogeométrico, pois é ela quem torna possível a solução de EDP's em domínio com geometrias das mais variadas sem gerar erros por aproximação das fronteiras do domínio.

A Figura 7 mostra um círculo perfeito criado a partir de funções base de grau 2. Os vetores de nós utilizados foram $\Xi_U = \Xi_V = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$. Os pontos de controle e os pesos utilizados se encontram na tabela 1.

Pts de Controle	Pesos
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	1
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	1
$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$(0, 0)$	1
$\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	1
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$	1

Tabela 1 – Pontos de Controle e pesos usando no exemplo da Figura 7.

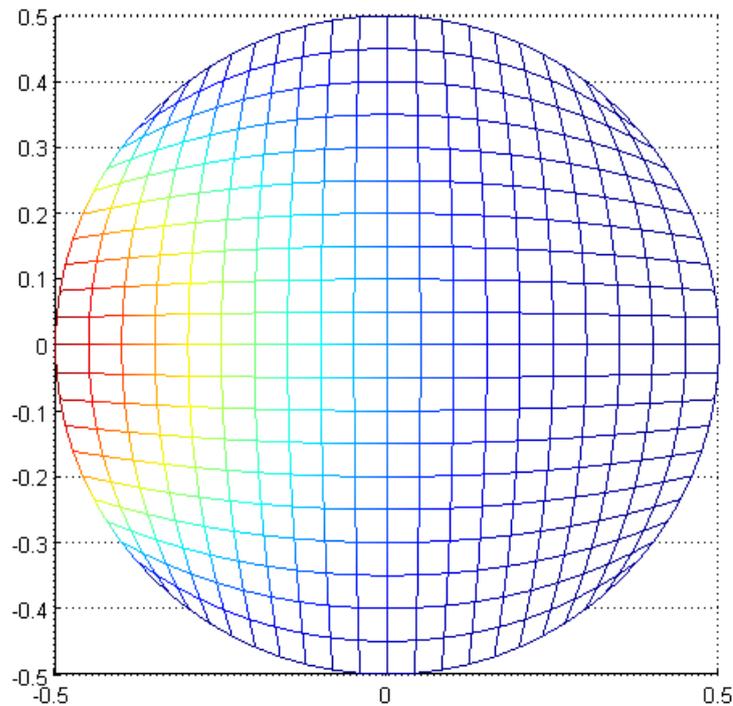


Figura 7 – Aplicação da Função Geométrica. As cores simbolizam a distribuição de uma função base no domínio gerado

Vale notar que se os pontos de controle pertencerem a \mathbb{R}^3 a equação (1.7) gera uma superfície.

1.4 Inserção de Nós e Refinamento de NURBS

Vimos anteriormente que os pontos de controle estão totalmente relacionadas com as funções base na construção de um objeto. Desta maneira, alterar o vetor de nós sem alterar os pontos de controle proporcionalmente alteraria a geometria do objeto estudado. Porém muitas vezes se faz necessário aumentar o número de funções bases para se avaliar melhor uma solução (trataremos melhor disso nos capítulos seguintes), o que torna necessário se ter uma maneira de aumentar o número de funções base e gerar novos pontos de controle (e pesos) sem alterar a geometria do objeto.

Dado o vetor de nós $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ e os pontos de controle ponderados ¹ $[P_1^w, P_2^w, \dots, P_{n-p-1}^w]$, onde p é o grau das NURBS, vamos inserir o nó $\bar{\xi}$.

De acordo com (PIEGL; TILLER, 1996), suponha que $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1})$, então é necessário alterar os $P_i^w, \forall i \in [k-p+1, k]$. Portanto, sejam $[Q_1^w, Q_2^w, \dots, Q_{n-p}^w]$ os novos pontos de controle ponderados, temos que, $\forall i \in [k-p+1, k]$

$$Q_i^w = \alpha_i P_i^w + (1 - \alpha_i) P_{i-1}^w$$

onde,

$$\alpha_i = \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}$$

Assim temos que $Q_1^w = P_1^w, Q_2^w = P_2^w, \dots, Q_{k-p+1}^w = \alpha_{k-p+1} P_{k-p+1}^w + (1 - \alpha_{k-p+1}) P_{k-p}^w, \dots, Q_k^w = \alpha_k P_k^w + (1 - \alpha_k) P_{k-1}^w, \dots, Q_{n-p}^w = P_{n-p-1}^w$.

A Figura 8 mostra os pontos de controle antes e depois de ter um nó adicionado.

Agora fica evidente que o processo de refinamento é uma sucessão de inserções de nós. Para esse processo a posição em que são adicionados os novos nós é no ponto médio entre os antigos.

Também é possível remover um nó, aumentar e diminuir o grau das funções, porém esses assuntos não serão abordados aqui, pois não serão utilizados nesse texto. Detalhes podem ser encontrados em (PIEGL; TILLER, 1996).

¹ Pontos de controle ponderados são os pontos de controle multiplicados por seus respectivos pesos.

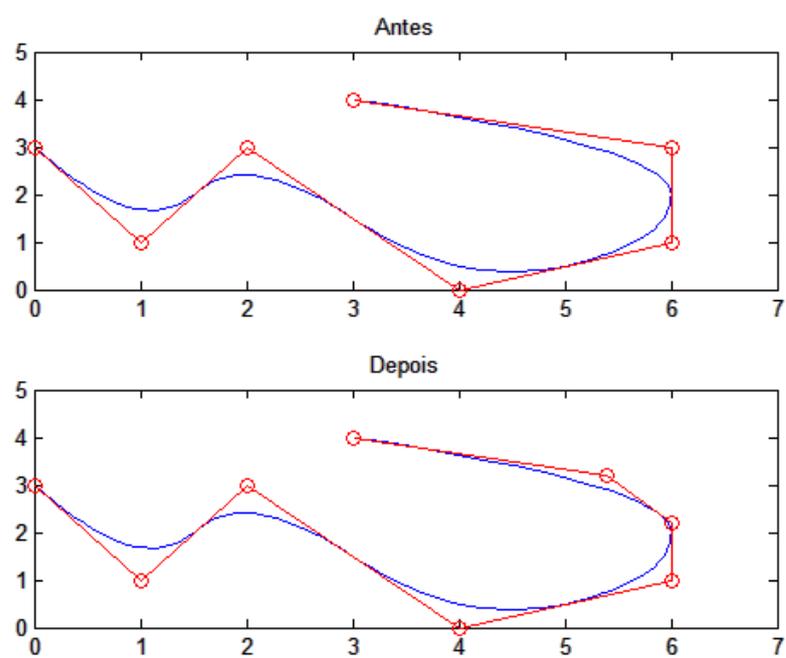


Figura 8 – Alteração de alguns pontos de controle sem alterar a curva após a inserção de um novo nó.

2 MÉTODO DE ANÁLISE ISOGOMÉTRICA APLICADO À SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Vistos os conceitos principais sobre NURBS, agora estamos habilitados a aplicá-los na solução de equações diferenciais através do Método dos Elementos Finitos. A diferença na solução das equações em uma dimensão é a utilização de funções base NURBS, o que torna esse método muito parecido com o método clássico nesse caso.

Já no caso da solução de equações diferenciais em dimensões maiores, onde o domínio é uma superfície ou um sólido, além das funções bases serem NURBS também utilizaremos a Função Geométrica para modelar o domínio com exatidão, eliminando assim os erros por aproximação frequentes no Método dos Elementos Finitos Clássico.

2.1 Espaço de Funções

Definiremos aqui os espaços de funções utilizados nos problemas estudados nesse capítulo, sendo estes especialmente mencionados nos teoremas de convergência tanto para o método dos elementos finitos clássicos como para o método isogeométrico. Esses espaços são os chamados Espaço de Hilbert (que são um caso particular dos espaços de Sobolev), denotados por $H^k(\Omega)$, para $\Omega \in \mathbb{R}^n$.

Seja $L^2(\Omega)$, o espaço das funções de quadrado integrável segundo a medida de Lebesgue, definimos $H^k(\Omega)$ como o espaço das funções de quadrado integrável cujas k -ésimas derivadas também são funções de quadrado integrável, ou seja,

$$H^k(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) / \frac{\partial^k v}{\partial x_i^k} \in L^2(\Omega), i \in (1, \dots, n) \right\}$$

Note que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Vamos aqui definir de forma simples o produto interno e a norma em $H^k(\Omega)$. Para uma definição mais geral e outros detalhes sobre os espaços de Sobolev ver ([ADAMS, 1975](#); [CIARLET, 2002](#)).

O produto interno é definido da forma,

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u(x) \partial^{\alpha} v(x) dx$$

e a norma é dada por

$$\| u \|_{H^k(\Omega)}^2 = \sum_{0 \leq \alpha \leq k} \int_{\Omega} | \partial^\alpha u(x) |^2 dx$$

2.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Dadas as definições necessárias sobre os espaços estudados, vamos agora abordar os problemas alvo deste texto, onde para ilustrar o uso do método de análise isogeométrica, mostraremos a solução de uma equação diferencial ordinária elíptica de Laplace. É possível perceber a grande semelhança com o método dos elementos finitos clássico. Para maiores detalhes sobre a solução através do método clássico ver (GALVIS, 2009).

Considere o seguinte problema de valor de contorno: Encontrar $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u(x)'' = f(x), & \text{para } x \in (a, b) \\ u(x) = g(x), & \text{para } x = a, x = b \end{cases} \quad (2.1)$$

Tome $\mathcal{V} := \{v \in H^1(a, b), v(a) = v(b) = 0\}$ espaço de funções teste. Multiplicando v por ambos os membros da primeira equação de (2.1) e integrando ambos os lados, temos:

$$- \int_a^b u(x)'' v(x) dx = \int_a^b f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.2)$$

Integrando por partes o primeiro membro da equação (2.2) e lembrando que $v(a) = v(b) = 0$, temos:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)'' v(x) dx &= u(x)' v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x)' v(x)' dx \\ &= [u(b)' v(b) - u(a)' v(a)] - \int_a^b u(x)' v(x)' dx \\ &= [u(b)' 0 - u(a)' 0] - \int_a^b u(x)' v(x)' dx \\ &= - \int_a^b u(x)' v(x)' dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Substituindo então (2.3) em (2.2), chegamos a formulação fraca do problema, que é encontrar $u \in \mathcal{U} := H^1(a, b)$ tal que

$$\int_a^b u(x)' v(x)' dx = \int_a^b f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.4)$$

Para tornar possível a solução do problema, vamos reduzi-lo para um problema de dimensão finita criando subespaços formados por bases NURBS tais que $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$ e

$\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$, onde h é um parâmetro que representa a dimensão do espaço de maneira que quanto menor o h , maior a dimensão do espaço.

Mudando a nomenclatura para facilitar a escrita, temos então a formulação de Galerkin para o problema, que se torna: Encontrar $u^h \in \mathcal{U}^h$ tal que

$$\mathcal{A}(u^h, v^h) = \mathcal{F}(v^h), \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_a^b u(x)'v(x)'dx \\ \mathcal{F}(v) &= \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Seja $\{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ a base do espaço \mathcal{V}^h (lembrando que essa base é formada por NURBS) podemos escrever u^h como combinação linear desta base,

$$u^h = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \dots + \alpha_n R_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i \quad (2.6)$$

Podemos então reescrever (2.5) substituindo (2.6) e adotando o fato de $\mathcal{A}(u^h, v^h)$ ser um operador bilinear.

$$\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i R_i, v^h\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}(R_i, v^h) = \mathcal{F}(v^h) \quad (2.7)$$

Podemos também escrever $v^h = \beta_1 R_1 + \beta_2 R_2 + \dots + \beta_n R_n = \sum_{i=1}^n \beta_i R_i$, e substituir na equação (2.7). Como \mathcal{F} é um funcional linear, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}\left(R_i, \sum_{j=1}^n \beta_j R_j\right) &= \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j R_j\right) \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \beta_j \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}(R_i, R_j) &= \sum_{j=1}^n \beta_j \mathcal{F}(R_j) \end{aligned}$$

Então nosso problema se torna, encontrar $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}(R_i, R_j) = \mathcal{F}(R_j), \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} \right. \quad (2.8)$$

Desta forma podemos ainda escrever (2.8) de forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(R_1, R_1) & \mathcal{A}(R_2, R_1) & \dots & \mathcal{A}(R_n, R_1) \\ \mathcal{A}(R_1, R_2) & \mathcal{A}(R_2, R_2) & \dots & \mathcal{A}(R_n, R_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}(R_1, R_n) & \mathcal{A}(R_2, R_n) & \dots & \mathcal{A}(R_n, R_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}(R_1) \\ \mathcal{F}(R_2) \\ \vdots \\ \mathcal{F}(R_n) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

e para simplificar a notação,

$$\mathbf{A}\bar{\alpha} = \mathbf{b} \quad (2.10)$$

Retomando a equação (2.1), vemos que resta impor que $u(x) = g(x)$, para $x = a, x = b$. Para que isso ocorra, basta impor que $\alpha_1 = g(a)$ e $\alpha_n = g(b)$, pois as funções base NURBS extremas (isso é, a primeira e a última) tem valor 1 em $x = a$ e $x = b$.

Podemos escrever então a equação (2.10) da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\overline{\alpha}_l + \overline{\alpha}_r) = \mathbf{b}$$

onde $\overline{\alpha}_l = [0, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0]^T$ e $\overline{\alpha}_r = [g(a), 0, \dots, 0, g(b)]^T$. E com isso temos,

$$\mathbf{A}\overline{\alpha}_l = \mathbf{b} - \mathbf{A}\overline{\alpha}_r$$

o sistema que nos dá a solução (aproximada) da equação diferencial proposta. Lembrando que $u^h = \sum_{i=1}^n \alpha_i R_i$.

Exemplo:

Vamos resolver a seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} -u(x)'' = 1, & \text{para } x \in (0, 1) \\ u(x) = 1, & \text{para } x = 0, x = 1 \end{cases}$$

Primeiramente devemos construir as bases NURBS que iremos usar para encontrar a solução aproximada da equação. Vamos construir bases de grau 2, pesos unitários e o seguinte vetor de nós:

$$\Xi = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$$

Como a construção das NURBS é recursiva, devemos construções a partir do grau zero até o grau desejado, e assim temos as funções de grau zero:

$$\begin{aligned}
N_{1,0} &= 0 \\
N_{2,0} &= 0 \\
N_{3,0} &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5 \\ 0, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{4,0} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.5 \\ 1, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{5,0} &= 0 \\
N_{6,0} &= 0
\end{aligned}$$

As funções de grau 1:

$$\begin{aligned}
N_{1,1} &= 0 \\
N_{2,1} &= \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 0, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{3,1} &= \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 - 2x, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{4,1} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2x - 1, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{5,1} &= 0
\end{aligned}$$

E finalmente as bases NURBS (lembrando que B-splines são NURBS de peso unitário) de grau 2 que vamos usar para aproximar a solução do problema:

$$\begin{aligned}
N_{1,2} &= \begin{cases} 1 - 4x + 4x^2, & 0 \leq x < 0.5 \\ 0, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{2,2} &= \begin{cases} 4x - 6x^2, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 - 4x + 2x^2, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{3,2} &= \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < 0.5 \\ -2 + 8x - 6x^2, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\
N_{4,2} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.5 \\ 1 - 4x + 4x^2, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Também é necessário que conheçamos as derivadas das funções base, como vimos nas equações (2.4) e (2.5).

$$\begin{aligned}\frac{dN_{1,2}}{dx} &= \begin{cases} -4 + 8x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 0, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \frac{dN_{2,2}}{dx} &= \begin{cases} 4 - 12x, & 0 \leq x < 0.5 \\ -4 + 4x, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \frac{dN_{3,2}}{dx} &= \begin{cases} 4x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 8 - 12x, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases} \\ \frac{dN_{4,2}}{dx} &= \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 0.5 \\ -4 + 8x, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Geradas as funções base necessárias, vamos à construção do sistema matricial. Para evitar a perda de tempo, computacionalmente falando, dividimos o domínio da função em várias partes e ao invés de construir diretamente a matriz global, construímos matrizes para cada parte desse domínio, de forma a calcular apenas as integrais para as funções que tem suporte não nulo nessa região.

Vamos dividir o domínio nos baseando no vetor de nós escolhido, ou seja, vamos dividir como elemento¹ 1 de 0 até 0.5 e como elemento 2 de 0.5 até 1. Como vimos na seção anterior, o número de funções base com suporte não nulo em um ponto do domínio é $p + 1$. Então, a matriz de cada elemento, será $(p + 1) \times (p + 1)$, ou seja, no nosso caso, 3×3 . Já a matriz global, que é a matriz relativa ao domínio todo, é composta por todas as funções base, então tem dimensão 4×4 .

Duas observações aqui são importantes. A primeira é o fato das matrizes serem simétricas, pois $\int uv dx = \int v u dx$ e a segunda é que dividir a matriz global em várias matrizes, uma para cada elemento, consiste simplesmente em usar umas das propriedades da integração: $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$.

Temos então a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{b} do elemento 1

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^1 & a_{21}^1 & a_{31}^1 \\ a_{12}^1 & a_{22}^1 & a_{32}^1 \\ a_{13}^1 & a_{23}^1 & a_{33}^1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{bmatrix}$$

¹ chamamos de elemento cada uma das divisões do domínio.

e a matriz \mathbf{A} e o vetor \mathbf{b} do elemento 2:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{22}^2 & a_{32}^2 & a_{42}^2 \\ a_{23}^2 & a_{33}^2 & a_{43}^2 \\ a_{24}^2 & a_{34}^2 & a_{44}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} b_2^2 \\ b_3^2 \\ b_4^2 \end{bmatrix}$$

Vamos agora calcular cada termo das matrizes \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 , lembrando que eles são da forma: $a_{ij} = \int_a^b \frac{dR_i}{dx} \frac{dR_j}{dx} dx$.

$$a_{11}^1 = \int_0^{0.5} (-4 + 8x)(-4 + 8x)dx = 2.6667$$

$$a_{22}^1 = \int_0^{0.5} (4 - 12x)(4 - 12x)dx = 2$$

$$a_{33}^1 = \int_0^{0.5} (4x)(4x)dx = 0.6667$$

$$a_{12}^1 = a_{21}^1 = \int_0^{0.5} (-4 + 8x)(4 - 12x)dx = -2$$

$$a_{13}^1 = a_{31}^1 = \int_0^{0.5} (-4 + 8x)(4x)dx = -0.6667$$

$$a_{23}^1 = a_{32}^1 = \int_0^{0.5} (4 - 12x)(4x)dx = 0$$

então

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2.6667 & -2 & -0.6667 \\ -2 & 2 & 0 \\ -0.6667 & 0 & 0.6667 \end{bmatrix}$$

e

$$a_{22}^2 = \int_{0.5}^1 (-4 + 4x)(-4 + 4x)dx = 0.6667$$

$$a_{33}^2 = \int_{0.5}^1 (8 - 12x)(8 - 12x)dx = 2$$

$$a_{44}^2 = \int_{0.5}^1 (-4 + 8x)(-4 + 8x)dx = 2.6667$$

$$a_{23}^2 = a_{32}^2 = \int_{0.5}^1 (-4 + 4x)(8 - 12x)dx = 0$$

$$a_{24}^2 = a_{42}^2 = \int_{0.5}^1 (-4 + 4x)(-4 + 8x)dx = -0.6667$$

$$a_{34}^2 = a_{43}^2 = \int_{0.5}^1 (8 - 12x)(-4 + 8x)dx = -2$$

então

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0.6667 & 0 & -0.6667 \\ 0 & 2 & -2 \\ -0.6667 & -2 & 2.6667 \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, vamos calcular os termos dos vetores \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 , que são da forma:
 $b_i = \int_a^b f(x)R_j dx$. Vale lembrar que a $f(x) = 1$.

$$\begin{aligned} b_1^1 &= \int_0^{0.5} (1)(1 - 4x + 4x^2)dx = 0.1667 \\ b_2^1 &= \int_0^{0.5} (1)(4x - 6x^2)dx = 0.25 \\ b_3^1 &= \int_0^{0.5} (1)(2x^2)dx = 0.0833 \end{aligned}$$

então

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.25 \\ 0.0833 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} b_2^2 &= \int_{0.5}^1 (1)(2 - 4x + 2x^2)dx = 0.0833 \\ b_3^2 &= \int_{0.5}^1 (1)(-2 + 8x - 6x^2)dx = 0.25 \\ b_4^2 &= \int_{0.5}^1 (1)(1 - 4x + 4x^2)dx = 0.1667 \end{aligned}$$

então

$$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0.0833 \\ 0.25 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Sobrepondo então as matrizes e os vetores temos a matriz \mathbf{A} e vetor \mathbf{b} globais.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.6667 & -2 & -0.6667 & 0 \\ -2 & 2 + 0.6667 & 0 + 0 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0 + 0 & 0.6667 + 2 & -2 \\ 0 & -0.6667 & -2 & 2.6667 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.25 + 0.0833 \\ 0.0833 + 0.25 \\ 0.1667 \end{bmatrix}$$

Podemos agora montar o sistema, ou seja, vamos escrever da forma $\mathbf{A}\alpha_l = \mathbf{b} - \mathbf{A}\alpha_r$, com $\alpha_1 = \alpha_4 = 1$.

$$= \begin{bmatrix} 0.1667 \\ 0.3333 \\ 0.3333 \\ 0.1667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.6667 & -2 & -0.6667 & 0 \\ -2 & 2.6667 & 0 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0 & 2.6667 & -2 \\ 0 & -0.6667 & -2 & 2.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Simplificando...

$$\begin{bmatrix} 2.6667 & -2 & -0.6667 & 0 \\ -2 & 2.6667 & 0 & -0.6667 \\ -0.6667 & 0 & 2.6667 & -2 \\ 0 & -0.6667 & -2 & 2.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 3 \\ 3 \\ -2.5 \end{bmatrix}$$

Resolver esse sistema implica em resolver:

$$\begin{bmatrix} 2.6667 & 0 \\ 0 & 2.6667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Donde temos que $\alpha_2 = \alpha_3 = 1.125$.

A solução que buscamos é, para o elemento 1,

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i N_i \\ &= 1 \times (1 - 4x + 4x^2) + 1.125 \times (4x - 6x^2) + 1.125 \times (2x^2) + 1 \times (0) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

e para o elemento 2,

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i N_i \\ &= 1 \times (0) + 1.125 \times (2 - 4x + 2x^2) + 1.125 \times (-2 + 8x - 6x^2) \\ &\quad + 1 \times (1 - 4x + 4x^2) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

De fato, a solução encontrada é a solução exata do problema, como se pode comprovar substituindo-a no problema inicial.

2.3 Equações Diferenciais Parciais em Duas Dimensões

Na seção anterior vimos que a solução de uma equação diferencial em uma dimensão através dos métodos clássicos de elementos finitos e o método de análise isogeométrico são muito similares, exceto pelas funções base utilizadas. Já nessa seção, vamos ver que em duas dimensões a abordagem é bem diferente, pois enquanto no método clássico se faz necessária a aproximação do domínio durante a discretização do mesmo, na análise isogeométrica conseguimos discretizar com exatidão² o domínio através das NURBS e ainda as usamos como funções base. Mais detalhe podem ser encontrados em (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009; VEIGA et al., 2014; HUGHES; COTTRELL; BAZILEVS, 2005; NGUYEN; BORDAS; RABCZUK, 2012; VUONG; HEINRICH; SIMEON, 2010).

Vamos ver como se dá a solução de uma equação diferencial elíptica através do seguinte problema: Encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = g(x, y), & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

onde Δu é o Laplaciano de u ou seja, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Tome $\mathcal{V} := \{v \in H_0^1(\Omega)\}$ espaço de funções teste. Multiplicando v pela primeira equação de (2.11) e integrando ambos os lados, temos

$$-\int_{\Omega} v \Delta u \, dx dy = \int_{\Omega} v f \, dx dy, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.12)$$

² As NURBS modelam com exatidão os domínios formados por quadricas, domínios esses que não podem ser aproximados por polinômios.

Agora, aplicamos o método de integração por partes em duas dimensões, que é dado pela seguinte fórmula

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} v (\nabla u \cdot \eta) dS - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy$$

onde $\eta(x, y)$ é um vetor normal com sentido para o exterior de Ω em (x, y) . Então, como $v(x, y) = 0$ para $(x, y) \in \partial\Omega$, temos que $\int_{\partial\Omega} v (\nabla u \cdot \eta) dS = 0$, e assim a equação (2.12) fica

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \int_{\Omega} v f dx dy, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.13)$$

Da mesma forma que na seção anterior, aproximamos o problema por outro problema de dimensão finita, que se resume em achar $u^h \in \mathcal{U}$ tal que

$$\mathcal{A}(u^h, v^h) = \mathcal{F}(v^h), \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h \quad (2.14)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy \\ \mathcal{F}(v) &= \int_{\Omega} v f dx dy \end{aligned}$$

Seja $\{\phi_{11}, \phi_{21}, \dots, \phi_{n1}, \dots, \phi_{1m}, \dots, \phi_{nm}\}$ uma base para o espaço \mathcal{V}^h definida no domínio Ω , podemos escrever a solução do problema como combinação linear dessa base.

$$u^h = x_{11}\phi_{11} + x_{21}\phi_{21} + \dots + x_{nm}\phi_{nm} = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij}\phi_{ij} \quad (2.15)$$

Poderíamos agora nos precipitar e pensar que assim como no problema em uma dimensão, basta adotar as funções base NURBS, porém observe que, da maneira como estão definidas as NURBS bidimensionais na equação (1.5), o domínio é retangular, sendo este da forma $[\xi_0, \xi_n] \times [\eta_0, \eta_n]$, para os vetores de nós nas direções ξ e η , respectivamente, $[\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n]$ e $[\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n]$, enquanto Ω pode assumir qualquer forma, como se pode ver na Figura 9.

É evidente que o domínio retangular é muito mais simples para se calcular as integrais necessárias para solução do problema, e por isso vamos usar a função geométrica, que define o domínio Ω .

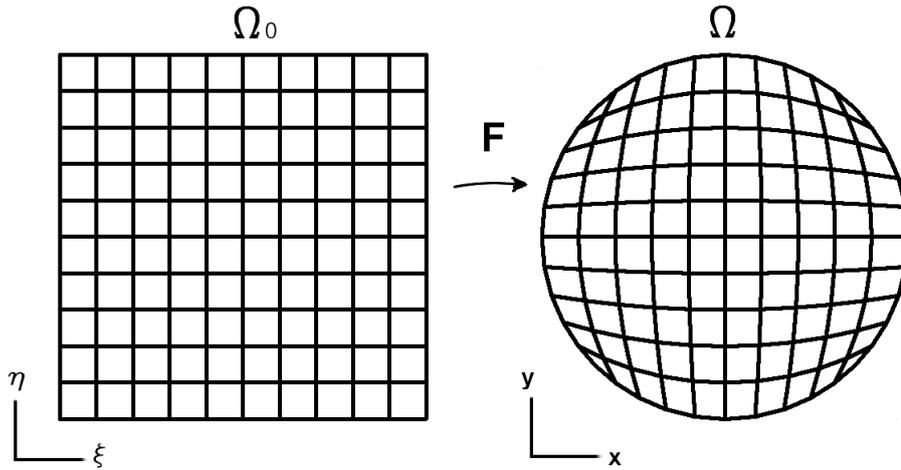


Figura 9 – Transformação do domínio paramétrico para o domínio geométrico.

Dada a função geométrica $F : \Omega_0 \rightarrow \Omega$ tal que $F(\xi, \eta) = (x, y)^T$ onde $\Omega_0 = [\xi_0, \xi_n] \times [\eta_0, \eta_n]$, chamado domínio paramétrico, podemos escrever as funções bases NURBS para o domínio Ω da seguinte forma:

$$\phi_{ij}(x, y) = R_{ij}(F^{-1}(x, y)) \quad (2.16)$$

Assim a equação (2.15) fica

$$u^h = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} R_{ij}(F^{-1}(x, y)) \quad (2.17)$$

Como estamos interessados em integrar no domínio paramétrico, é necessário conhecer as derivadas $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ (vamos suprimir o h para simplificar a notação e escrever u ao invés de u^h). Da função composta $u(F(\xi, \eta))$ temos

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \quad (2.19)$$

onde $F = (F_1, F_2)$.

Das equações (2.18) e (2.19), nós temos o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Note que

$$\nabla_{(\xi,\eta)}u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{(x,y)}u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$DF^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

onde DF é o Jacobiano de F .

Assim, a equação (2.20) se torna:

$$\nabla_{(\xi,\eta)}u = DF^T \nabla_{(x,y)}u \quad (2.21)$$

Voltando a equação (2.13) e fazendo as devidas substituições, lembrando que

$$\int_{\Omega} f(x,y)dx dy = \int_{\Omega_0} f(F(\xi,\eta))|detDF(\xi,\eta)|d\xi d\eta$$

temos que o primeiro membro se torna

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \int_{\Omega_0} (DF(\xi,\eta)^{-T} \nabla u(\xi,\eta)) \cdot (DF(\xi,\eta)^{-T} \nabla v(\xi,\eta)) |detDF(\xi,\eta)| d\xi d\eta \quad (2.22)$$

e o segundo membro

$$\int_{\Omega} v f dx dy = \int_{\Omega_0} v(F(\xi,\eta)) f(F(\xi,\eta)) |detDF(\xi,\eta)| d\xi d\eta \quad (2.23)$$

Agora que temos as integrais definidas no domínio paramétrico, podemos dividir em várias integrais, uma para cada quadrado do domínio, ou seja,

$$\sum_{k,l} \int_{Q_{k,l}} (DF(\xi,\eta)^{-T} \nabla u(\xi,\eta)) \cdot (DF(\xi,\eta)^{-T} \nabla v(\xi,\eta)) |detDF(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

e

$$= \sum_{k,l} \int_{Q_{k,l}} v(F(\xi,\eta)) f(F(\xi,\eta)) |detDF(\xi,\eta)| d\xi d\eta$$

Calcular essas integrais na maioria das vezes não é uma tarefa fácil, e por isso usa-se o método da Quadratura de Gauss, que conforme (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009) tem se mostrado um método muito eficiente para a integração de NURBS.

Exemplo 1:

Vamos resolver, de forma analítica, o seguinte problema: Encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 1, & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde o domínio Ω é definido pelos seguintes dados e é apresentado na figura 10.

- vetor de nós na direção u: $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ e grau 2;
- vetor de nós na direção v: $[0 \ 0 \ 1 \ 1]$ e grau 1;
- Pontos de controle: $\{(0, 0); (2, 1); (4, 0); (0, 2); (2, 3); (4, 2)\}$
- Pesos unitários.

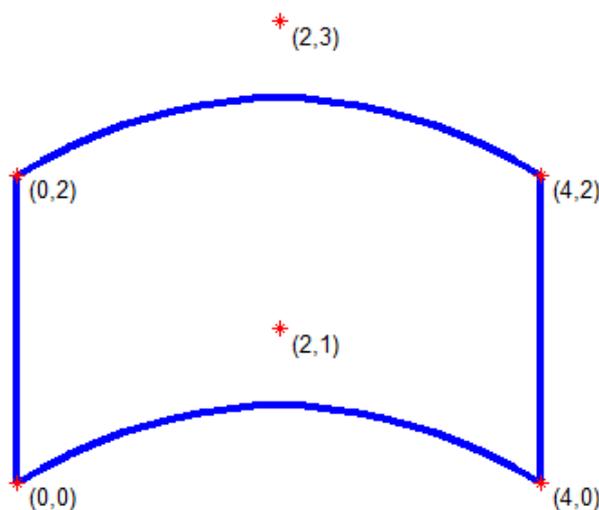


Figura 10 – Domínio definido no problema do exemplo 1.

Primeiramente, é necessário calcular as bases NURBS. Elas são apresentadas na tabela 2 juntamente com seus respectivos pontos de controle, derivadas em ξ e em η .

Pts. Contr.	R_i	$\frac{\partial R_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial R_i}{\partial \eta}$
(0, 2)	$(1 - 2\xi + \xi^2)\eta$	$(-2 + 2\xi)\eta$	$1 - 2\xi + \xi^2$
(2, 3)	$(2\xi - 2\xi^2)\eta$	$(2 - 4\xi)\eta$	$2\xi - 2\xi^2$
(4, 2)	$\xi^2\eta$	$2\xi\eta$	ξ^2
(0, 0)	$(1 - 2\xi + \xi^2)(1 - \eta)$	$(-2 + 2\xi)(1 - \eta)$	$-1 + 2\xi - \xi^2$
(2, 1)	$(2\xi - 2\xi^2)(1 - \eta)$	$(2 - 4\xi)(1 - \eta)$	$-2\xi + 2\xi^2$
(4, 0)	$\xi^2(1 - \eta)$	$2\xi(1 - \eta)$	$-\xi^2$

Tabela 2 – Pontos de Controle usando na modelagem.

Vamos agora calcular a função geométrica para então calcular sua jacobiana, que é a responsável pela mudança de variável que desejamos, como visto anteriormente.

$$\begin{aligned}
 F(\xi, \eta) &= (\mathbf{0}, \mathbf{2})(1 - 2\xi + \xi^2)\eta + (\mathbf{2}, \mathbf{3})(2\xi - 2\xi^2)\eta + (\mathbf{4}, \mathbf{2})\xi^2\eta \\
 &+ (\mathbf{0}, \mathbf{0})(1 - 2\xi + \xi^2)(1 - \eta) + (\mathbf{2}, \mathbf{1})(2\xi - 2\xi^2)(1 - \eta) + (\mathbf{4}, \mathbf{0})\xi^2(1 - \eta) \\
 &= (4\xi, \quad 2\xi - 2\xi^2 + 2\eta)
 \end{aligned}$$

Temos então a matriz jacobiana,

$$DF^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 - 4\xi \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

De posse da jacobiana e das derivadas (suficientes para formar os gradientes), já se é possível montar o sistema da equação 2.14 através das equações 2.22 e 2.23. A solução não será concluída devida ao grande esforço necessário para se resolver as integrais, porém até onde foi apresentado já é o suficiente para se perceber as diferenças para com o MEF clássico. Vamos agora então apresentar outro exemplo, desta vez, resolvido computacionalmente.

Exemplo 2:

Encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y), & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde o domínio Ω é definido pelos seguintes dados e é apresentado na figura 11.

- vetor de nós na direção u: [0 0 0 1.5 3 3 3] e grau 2;
- vetor de nós na direção v: [0 0 0 1.5 3 3 3] e grau 2;

- Pontos de controle: $\left\{ \begin{array}{l} (0, 0); (1, 1); (2, 0); (3, 1); \\ (0, 1); (1, 2); (2, 1); (3, 2); \\ (0, 2); (1, 3); (2, 2); (3, 3); \\ (0, 3); (1, 4); (2, 3); (3, 4) \end{array} \right\}$
- Pesos unitários.



Figura 11 – Domínio definido no problema do exemplo 2.

Como solução para o problema obtemos a superfície apresentada nas figuras 12 e 13, porém será que está solução se aproxima realmente da solução real? Isso é o que vamos tratar nas próximas duas subseções.

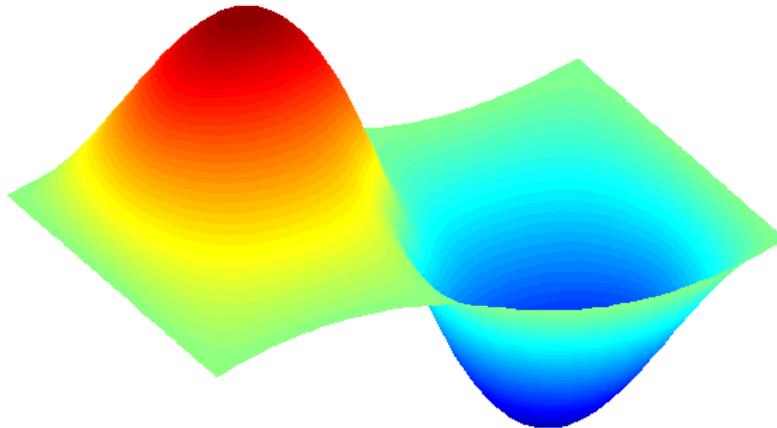


Figura 12 – Resultado obtido - vista - Exemplo 2.

2.4 Refinamento

Aqui nesse capítulo vamos tratar do refinamento da solução através da adição de nós, o que chamamos de h-refinamento. Vale destacar que existem outros dois tipos de refinamentos, o p-refinamento e o k-refinamento, onde o primeiro se trata da elevação do grau das funções bases e o segundo é uma combinação entre o h-refinamento e o

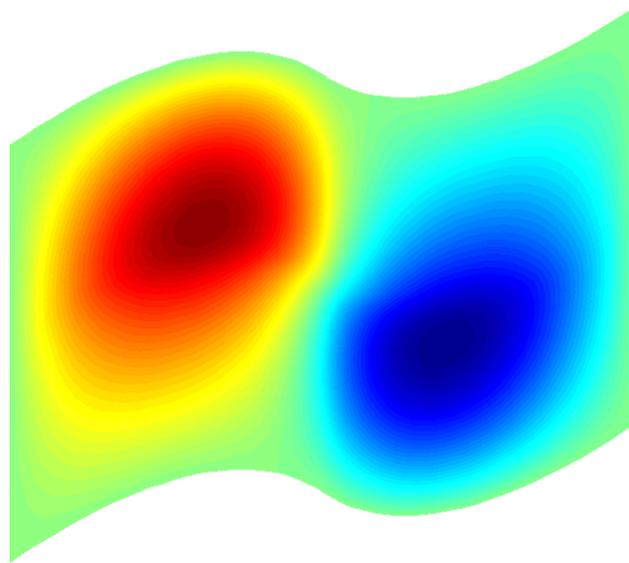


Figura 13 – Resultado obtido - plano - Exemplo 2.

p-refinamento. Mais detalhes podem ser obtidos em (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009).

Quanto ao h-refinamento, os detalhes já foram apresentados no capítulo destinado ao estudo das NURBS, onde vimos que se dá pela adição de nós nos pontos médios entre os nós já existentes (desconsiderando as repetições, obviamente). A única diferença aqui é que para problemas em duas ou três dimensões, temos mais de um vetor de nós, porém o processo é o mesmo feito a cada um deles, tomando apenas o cuidado referente aos pontos de controle a serem utilizados tendo em vista que o refinamento de um vetor de nós deve refinar várias "linhas" de pontos de controle.

Vamos agora retornar ao problema do exemplo 2 e à solução apresentada. Os dados informados eram os mínimos possíveis para construção do domínio, então vamos agora realizar o processo de refinamento algumas vezes e analisar como a solução se comporta. Essa comparação é apresentada na figura 14.

Agora fica claro que a solução encontrada dista em muito da solução encontrada após vários refinamentos. Isso ocorre devido ao número de funções base que antes era pequeno e insuficiente para descrever todas as variações da solução procurada. A figura 15 apresenta uma vista plana do comportamento da solução para se comparar a figura 13.

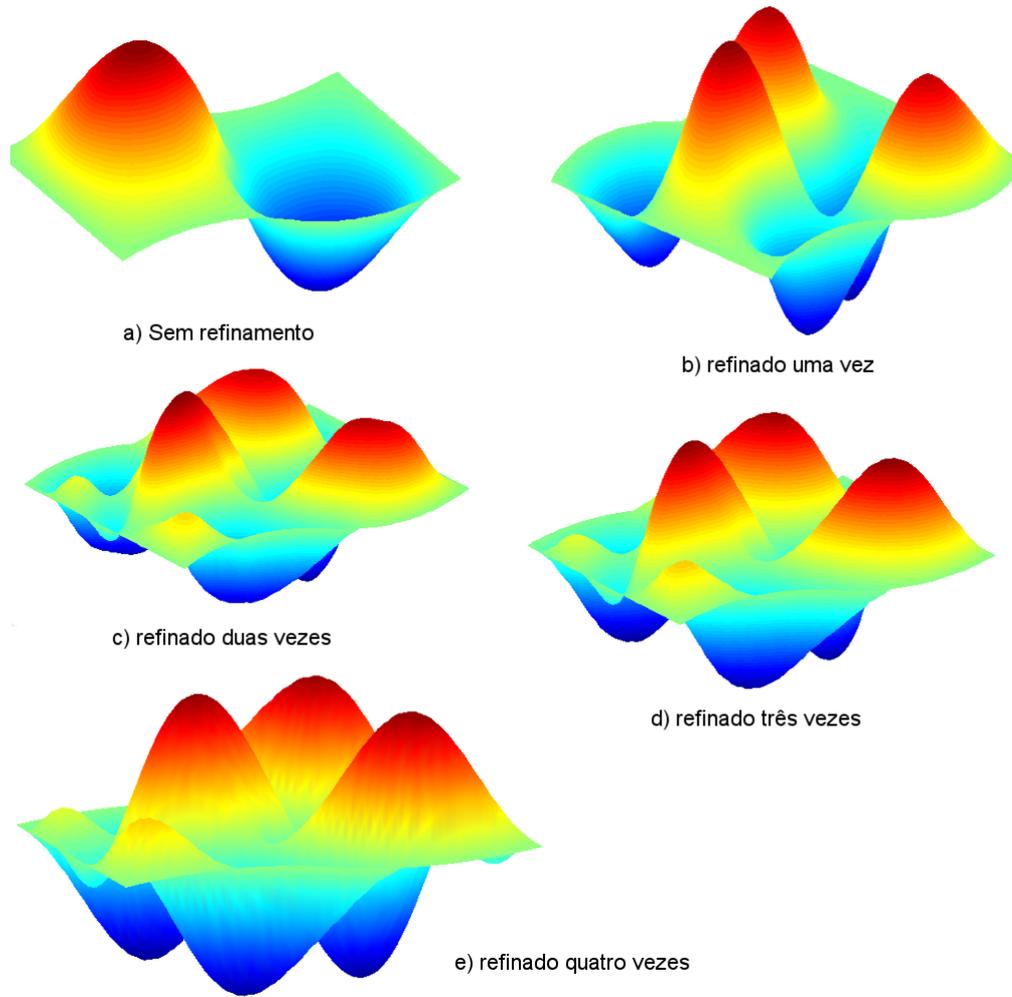


Figura 14 – Solução obtida após vários refinamentos.

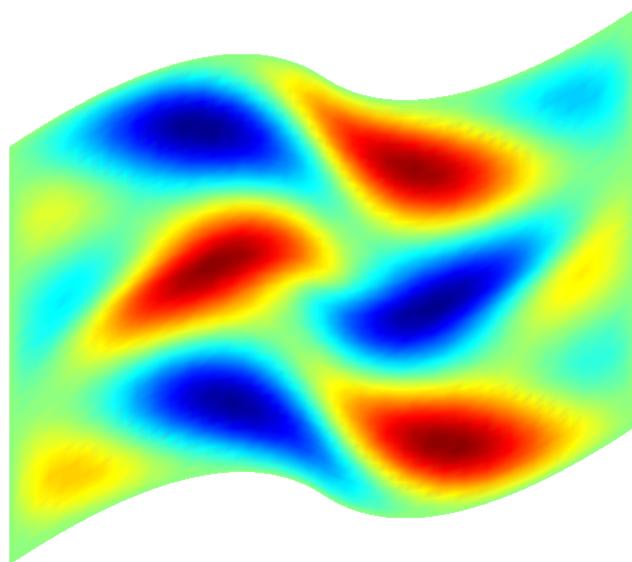


Figura 15 – Solução em vista plana obtida após vários refinamentos.

2.5 Análise de Erro e Convergência

Como método de aproximação de soluções de EDPs é essencial que o Método Isogeométrico não só convirja, mas também faça isso à uma taxa aceitável. Nesse aspecto, vamos ver o teorema de convergência do Método dos Elementos Finitos e compará-lo com o teorema de convergência para o Método Isogeométrico.

Teorema 1 *No Método dos Elementos Finitos clássico, a estimativa de erro para problemas elípticos, expressa como o módulo da diferença entre a solução exata, u , e a solução aproximada pelo método, u^h , é da forma,*

$$\| u - u^h \|_m \leq C h^\beta \| u \|_r$$

onde $\| \bullet \|_m$ e $\| \bullet \|_r$ são as normas correspondentes aos espaços de Sobolev $H^m(\Omega)$ e $H^r(\Omega)$, respectivamente, h está relacionado ao tamanho da malha, $\beta = \min(p + 1 - m, r - m)$, onde p é o grau da base polinomial, e C é uma constante que não depende de u ou h .

Demonstração 1 Ver ([COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009](#)).

Teorema 2 *No Método Isogeométrico de Análise, a estimativa de erro para problemas elípticos, é da forma,*

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \| u - \Pi_k u \|_{H^k(\Omega^e)}^2 \leq C \sum_{e=1}^{n_{el}} h_e^{2(l-k)} \sum_{i=0}^l \| DF \|_{L^\infty(F^{-1}(\Omega_e))}^{2(i-l)} \| u \|_{H^i(\Omega^e)}^2$$

onde k e l são índices inteiros tais que $0 \leq k \leq l \leq p + 1$, $u \in H^l(\Omega)$, h_e está relacionado ao tamanho de cada elemento, Π_k é o operador projeção de $H^k(\Omega)$ no espaço gerado pelas bases da análise isogeométrica, DF é a jacobiana da função geométrica, e C é uma constante que depende apenas de p e da forma do domínio (mas não do tamanho).

Demonstração 2 Ver ([COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009](#)) para uma ideia da demonstração e referência de onde encontrá-la.

Tendo em vista os dois teoremas acima apresentados, não fica claro qual dos dois métodos converge de maneira mais rápida. Vamos então analisar um exemplo que compara a convergência do erro entre o método do elementos finitos e o método isogeométrico para o seguinte problema:

Encontrar $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -u(x)'' = 2(2x + 10\text{sen}(8\pi x) + 80\pi x \cos(8\pi x) - 1)^2 \\ \quad + 2(x(x - 1) + 10x\text{sen}(8\pi x))(-640\pi^2 x \text{sen}(8\pi x) + 160\pi \cos(8\pi x) + 2) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

A solução exata desse problema é $u(x) = (10x\text{sen}(8\pi x) + x(x - 1))^2$.

A figura 16 apresenta a comparação do erro entre método dos elementos finitos e o método isogeométrico (na legenda chamado de AIG) para funções base de graus 1, 2 e 3. A maneira com a qual se calculou o erro relativo será apresentada na próxima seção e o gráfico é dado em escala log x log. Os dados utilizados para construir os gráficos se encontram na tabela 3.

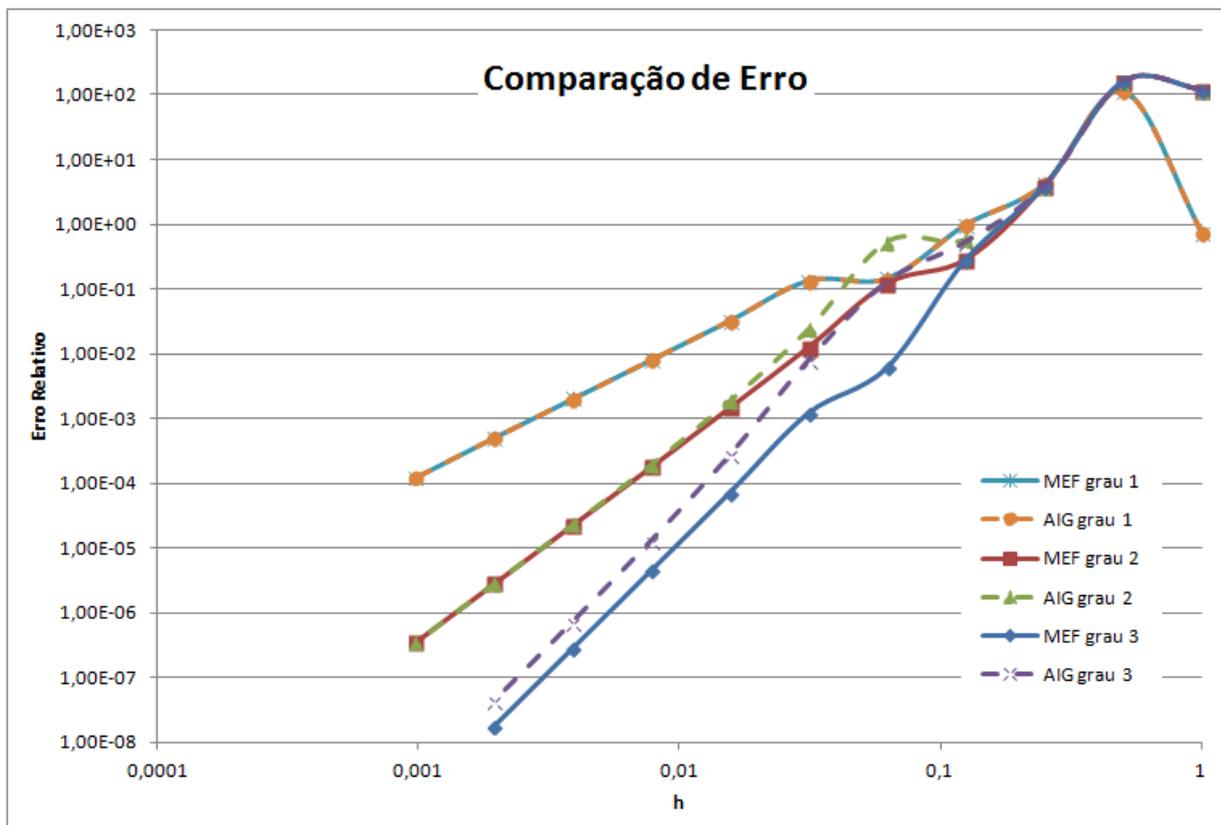


Figura 16 – Comparação do erro entre o método dos elementos finitos e o método isogeométrico para funções base de graus 1, 2 e 3.

Pode-se observar que para o grau 1 os dois métodos geram resultados exatamente iguais (de fato, para funções base de grau 1 os métodos são iguais), para grau 2 a partir de $h < 0.01$ as curvas se sobrepõem, mostrando uma convergência de mesma ordem, e para grau 3 observa-se que para um mesmo h o erro do MEF é menor, porém a inclinação da curva do método isogeométrico é ligeiramente maior, mostrando uma convergência pouco mais rápida que o MEF.

h	Erro %					
	Grau 1		Grau 2		Grau 3	
	MEF	AIG	MEF	AIG	MEF	AIG
1	74.743	74.743	11905.448	11905.448	11905.448	11905.448
2^{-1}	11276.098	11276.098	15898.128	15898.128	15898.128	15898.1283
2^{-2}	418.572	418.572	391.668	391.668	391.668	391.668
2^{-3}	99.209	99.209	28.633	57.747	28.502	53.292
2^{-4}	14.618	14.618	12.250	53.915	0.616	12.939
2^{-5}	13.600	13.600	1.272	2.426	0.122	0.783
2^{-6}	3.296	3.296	0.149	0.191	0.0072	0.0270
2^{-7}	0.820	0.820	0.018	0.020	0.00045	0.00129
2^{-8}	0.205	0.205	0.0023	0.0024	0.00003	0.00007
2^{-9}	0.052	0.052	0.00028	0.00029	0.000002	0.000004
2^{-10}	0.013	0.013	0.00004	0.00004	-	-

Tabela 3 – Comparação de convergência do erro entre o método dos elementos finitos e o método isogeométrico.

As observações feitas para esse exemplo nos levam a crer que os dois métodos convergem de forma muito semelhante, e na verdade o teorema seguinte nos diz que eles tem a mesma ordem de convergência desde que as funções base sejam de mesma ordem.

Teorema 3 *A solução do Método de Análise Isogeométrico obtida usando NURBS de ordem p tem a mesma ordem de convergência que a esperada no Método dos Elementos Finitos clássico usando bases de funções clássicas com polinômios de ordem p .*

Demonstração 3 *Uma ideia da demonstração assim como as devidas referências podem ser encontradas em (COTTRELL; HUGHES; BAZILEVS, 2009).*

O teorema anterior nos garante a capacidade do método isogeométrico, o colocando com a mesma pontencialidade que o MEF clássico.

2.6 Comparação entre Método de Análise Isogeométrico e o Método dos Elementos Finitos Clássico

Ao longo das seções anteriores já foram destacadas algumas das diferenças e semelhanças entre os dois métodos. Agora vamos destacar outras diferenças e destacar vantagens e desvantagens.

A grande diferença e vantagem da análise isogeométrica é o mapeamento exato da geometria de alguns domínios comumente usados, como é o caso dos domínios gerados por quárticas, tendo em vista que o MEF aproxima a fronteira de forma polinomial, devidas às suas funções base, o que gera erros na fronteira. De forma exagerada a figura 17

mostra esse problema, onde em um caso com condição de contorno de Dirichlet $u(\partial\Omega) = 0$ teríamos para o método clássico a linha vermelha sendo de valor zero, enquanto no método isogeométrico o zero seria a linha azul, o que poderia representar grandes erros se a solução fosse uma curva muito acentuada próximo a fronteira.

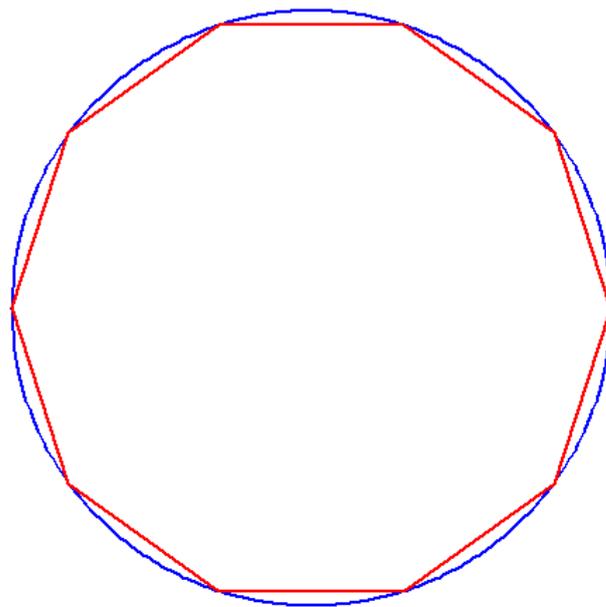


Figura 17 – Comparação entre domínio real (em azul) e domínio aproximado para o MEF (vermelho).

Evidentemente o problema apresentado pelo MEF clássico poderia ser reduzido aumentando o número de pontos sobre a fronteira do domínio, o que resultaria em uma malha com elementos menores (e com isso maior número de elementos e um maior custo computacional), porém em problemas em que o resultado na fronteira deve ser muito preciso, como escoamento de um fluido em um tubo, problema de contato, etc., o mapeamento exato da fronteira pode resultar em grandes avanços.

Para deixar claro essa questão do erro na fronteira, vamos apresentar dois exemplos, comparando os resultados de erros obtidos nos dois. Para isso, vamos calcular o erro da seguinte forma:

$$E_{rel}\% = \frac{\|u - u^h\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}} \times 100\% \quad (2.24)$$

onde u é a solução exata e u^h é a solução aproximada pelo método em questão.

Problema: Encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = \text{sen}(10\sqrt{x^2 + y^2}), & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde o domínio é um disco com diâmetro unitário, cujos dados foram dados na tabela 1.

A solução exata do problema é

$$u(x, y) = -\frac{1}{100} \int_0^{10\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\text{sen}(t)}{t} dt + \frac{1}{100} \text{sen}(10\sqrt{x^2 + y^2}) + \frac{1}{100} + \int_0^5 \frac{\text{sen}(t)}{t} dt - \frac{1}{100} \text{sen}(5)$$

No método dos elementos finitos, primeiramente é necessário aproximar o domínio circular, e então construir a malha. Em seguida, o refinamento é responsável pelo aumento do número de funções base, porém temos que uma vez definida a fronteira a mesma terá sempre a forma inicial, ou seja, o refinamento não aproxima a fronteira poligonal da fronteira real. Todas as malhas de elementos finitos utilizadas nos exemplos foram geradas nos programa Mtool³.

Sendo assim, vamos fazer a análise dos erros desse problemas para os casos onde a fronteira foi aproximada por um polígono de 10, 30, 40 e 60 lados e comparar os resultados com o método isogeométrico. A figura 18 nos mostra a diferença entre as soluções no domínio de 10 lados e no domínio de 60 lados, para o MEF utilizando funções base de grau 1.

As tabelas 4, 5, 6 e 7 apresentam os valores de erros obtidos em relação ao número de funções base para cada uma das aproximações do domínio.

Nº fun. base	Erro Relativo
14	44.884%
43	15.862%
149	8.873%
553	8.663%
2129	8.586%

Tabela 4 – Análise erro relativo para domínio de 10 lados

Dos resultados obtidos percebemos que quanto melhor a aproximação da fronteira, menor o erro obtido, ou seja, melhor o resultado, com está apresentado gráfico da figura 19. Sendo assim, o método isogeométrico, que aproxima a fronteira deste problema exatamente, tende a ter resultados ainda melhores que os apresentados pelo MEF. Isso é confirmado pelos dados da tabela 8 e pela figura 20.

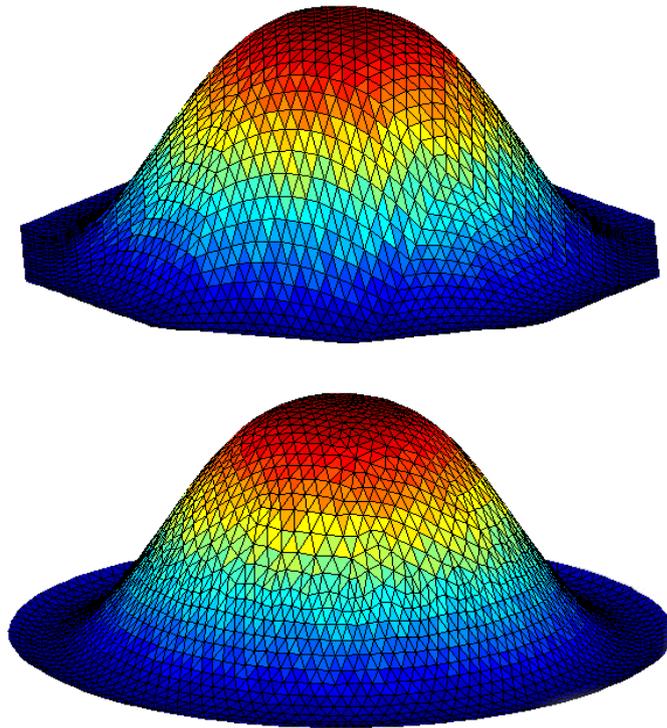


Figura 18 – Comparação entre Solução no domínio de 10 lados e o domínio de 60 lados para o MEF.

Nº fun. base	Erro Relativo
160	3.927%
607	1.375%
2365	1.195%
9337	1.184%

Tabela 5 – Análise erro relativo para domínio de 30 lados

Nº fun. base	Erro Relativo
194	3.292%
733	1.008%
2849	0.685%
11233	0.673%

Tabela 6 – Análise erro relativo para domínio de 40 lados

Nº fun. base	Erro Relativo
641	0.887%
2501	0.330%
9881	0.300%

Tabela 7 – Análise erro relativo para domínio de 60 lados

³ Two Dimensional Mesh Tool! Versão 5.06. Setembro/2010. Convênio TecGraf/PUC-Rio - CENPES/-PETROBRAS.

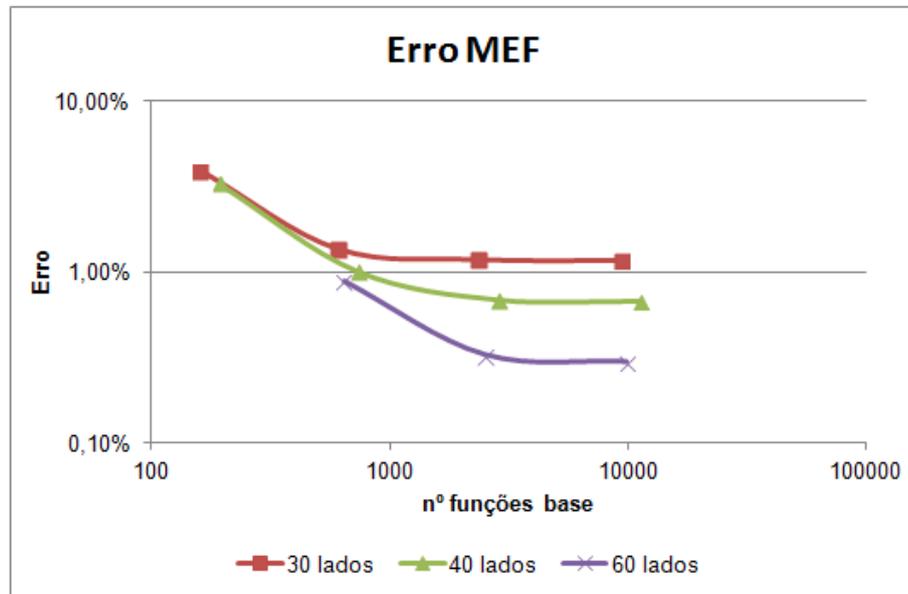


Figura 19 – Gráfico do erro em função do número de funções bases MEF (log x log).

Nº fun. base	Erro Relativo
9	95.298%
16	58.958%
36	5.827%
100	0.837%
324	0.073%
1156	0.008%

Tabela 8 – Análise erro relativo para o Método Isogeométrico

Para destacar ainda a relação do erro causado pela aproximação da fronteira do domínio, vamos analisar o comportamento da solução exata do problema e da solução apresentada pelo método isogeométrico sobre uma das arestas do polígono de 30 lados, isto é, vamos mostrar o comportamento das soluções no corte destacado em verde na figura 21. O resultado é apresentado na figura 22 onde a curva em vermelho é a solução obtida pelo método dos elementos finitos (condição de contorno), a curva em roxo é a solução através do método isogeométrico, e a curva em azul a solução exata do problema.

Além disso, ainda resta um outro erro referente ao MEF que não foi mencionado. Quando calculamos o erro acima estamos apenas fazendo a comparação entre as soluções dentro do domínio aproximado, porém não mensuramos nada a respeito da parte do domínio que fora ignorada. Como a solução aproximada não está definida naquela região, vamos considerá-la nula para esse problema. Sendo assim, vamos calcular esse erro da seguinte forma,

$$E_{front}\% = \frac{\|u_{\Omega} - u_{\Omega_{aprox}}\|_{L^2}}{\|u_{\Omega}\|_{L^2}}$$

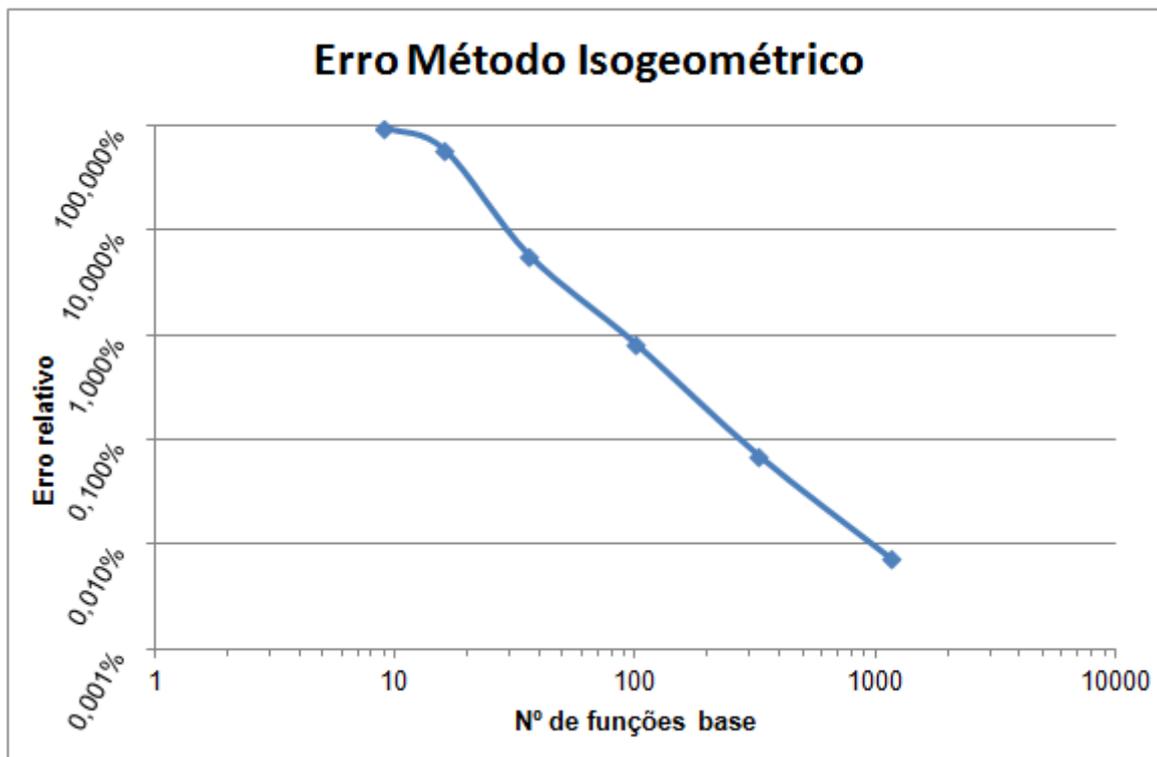


Figura 20 – Gráfico do erro em função do número de funções base do Método Isogeométrico (log x log).

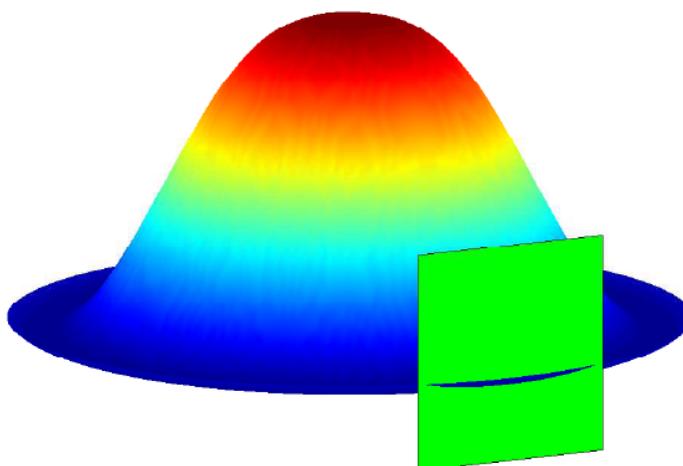


Figura 21 – Interseção entre uma aresta do polígono que aproxima o domínio do MEF (em verde) e a solução exata do problema.

onde u_{Ω} é a solução exata no domínio todo e $u_{\Omega_{aprox}}$ é a solução exata no domínio aproximado.

Devidas as dificuldades para calcular esse erro, podemos aproximá-lo por,

$$E_{front} \% = \frac{\| u_{\Omega} - u_{\Omega_{aprox}} \|}{\| u_{\Omega} \|} \geq \frac{\| u_{\Omega} \| - \| u_{\Omega_{aprox}} \|}{\| u_{\Omega} \|}$$

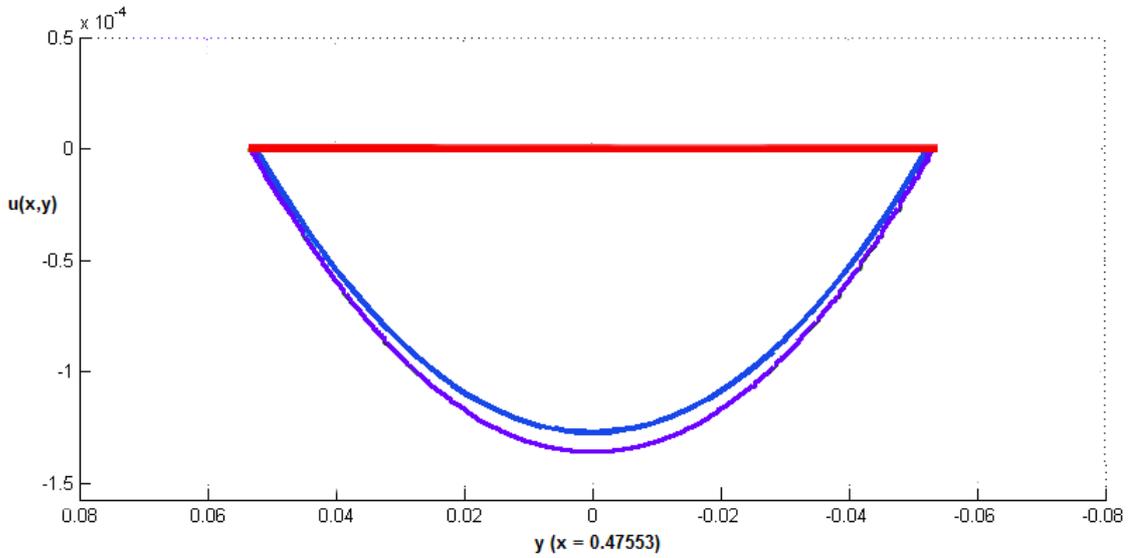


Figura 22 – Comparação entre a solução exata (em roxo), o método isogeométrico (em azul) e o método dos elementos finitos (em vermelho) sobre uma aresta da fronteira aproximada por um polígono de 30 lados.

A tabela 9 apresenta os resultados obtidos para esse erro na fronteira para fronteiras com 10, 30, 40 e 60 lados.

Nº lados (front)	$E_{front}\%$
10	0.389
30	0.051
40	0.022
60	0.002

Tabela 9 – Análise de erro relativo para o Método dos Elementos Finitos

Fica claro que mesmo para uma aproximação grosseira da fronteira, o erro da fronteira apresentado é bem pequeno para esse problema, e por isso não traz grandes problemas. Vamos então para um problema onde a função buscada tenha um crescimento mais rápido na fronteira.

Problema: Encontrar $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = f(x, y), & \text{para } (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & \text{para } (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde o domínio é um disco agora de raio unitário (basta multiplicar o valor dos pontos de

controle da tabela 1 por dois), e f é igual à

$$f(x, y) = \frac{4}{(x^2 + y^2 - a)^4} e^{\frac{1}{a - x^2 - y^2}} ((a^4 - 4a^3(x^2 + y^2) + a^2(6x^4 + 3x^2(4y^2 + 1) + 6y^4 + 3y^2 - 1) - 4a(x^2 + y^2)^2(x^2 + y^2 + 1) + x^8 + x^6(4y^2 + 1) + x^4(6y^4 + 3y^2 + 2) + x^2(4y^6 + 3y^4 + 4y^2 - 1) + y^2(y^6 + y^4 + 2y^2 - 1))$$

A solução exata do problema é

$$u(x, y) = (1 - x^2 - y^2) e^{\frac{1}{a - x^2 - y^2}}$$

A solução exata se desenvolve de forma radial e temos que a função tende ao infinito quando o seu raio tende a \sqrt{a} . Vamos buscar a solução da EDP para vários valores de a de maneira a comparar os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e pelo método isogeométrico conforme a se aproxima da fronteira.

As tabelas 10, 11, 12, 13, 14 e 15 apresentam os erros obtidos para domínios de 10, 20, 30, 40, 50 e 60 lados, respectivamente, para diferentes valores de a através do método dos elementos finitos utilizando funções base de grau 1. Os valores destacados em vermelhos são aqueles onde o erro aumentou, ao invés de diminuir, após o refinamento. Note que quanto mais próximo de 1 está o valor de a , mais frequentes são os casos onde o erro aumenta ao invés de diminuir. Isso se deve ao fato da função exponencial tender a infinito conforme a tende à 1, fazendo com que o comportamento próximo a fronteira seja de uma crescimento muito rápido, e com isso uma pequena diferença entre o domínio exato e o aproximado, faz com que a solução através do FEM não consiga aproximar a solução exata, devido a continuidade da solução.

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
14	11.16	42.38	48.47	58.76	78.54	123.11
43	9.14	39.56	45.93	55.88	73.42	111.53
149	8.16	38.16	45.17	56.19	75.22	113.29
553	7.82	37.45	44.65	56.09	76.12	116.68
2129	7.71	37.19	44.42	55.95	76.24	117.67

Tabela 10 – Análise erro relativo para domínio de 10 lados

As figuras 23 e 24 apresentam os gráficos de comparação para cada domínio aproximado e diferentes valores de a . As figuras 24 e 26 apresentam os gráficos de comparação entre diferentes domínios aproximados para cada valor de a . O eixo das abscissas foi denominado h^* por representar um múltiplo de h , que está diretamente relacionado ao tamanho dos elementos.

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
52	2.77	14.61	17.50	22.24	31.75	60.42
185	2.25	13.58	17.12	23.26	35.37	64.94
697	2.07	12.98	16.60	23.05	36.37	70.67
2705	2.02	12.76	16.36	22.82	36.25	71.47

Tabela 11 – Análise erro relativo para domínio de 20 lados

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
160	1.14	7.05	8.77	11.54	16.39	27.34
607	0.97	6.41	8.31	11.76	19.00	37.98
2365	0.92	6.13	8.00	11.45	18.97	40.10

Tabela 12 – Análise erro relativo para domínio de 30 lados

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
194	0.72	4.54	5.66	7.39	10.08	15.88
733	0.57	3.83	5.00	7.14	11.71	23.74
2849	0.52	3.56	4.68	6.77	11.41	24.87

Tabela 13 – Análise erro relativo para domínio de 40 lados

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
194	0.53	3.21	4.00	5.29	7.66	15.20
723	0.38	2.55	3.33	4.78	7.89	16.26
2789	0.34	2.32	3.06	4.44	7.55	16.70

Tabela 14 – Análise erro relativo para domínio de 50 lados

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
641	0.28	1.87	2.43	3.43	5.43	9.62
2501	0.24	1.65	2.18	3.17	5.39	11.86

Tabela 15 – Análise erro relativo para domínio de 60 lados

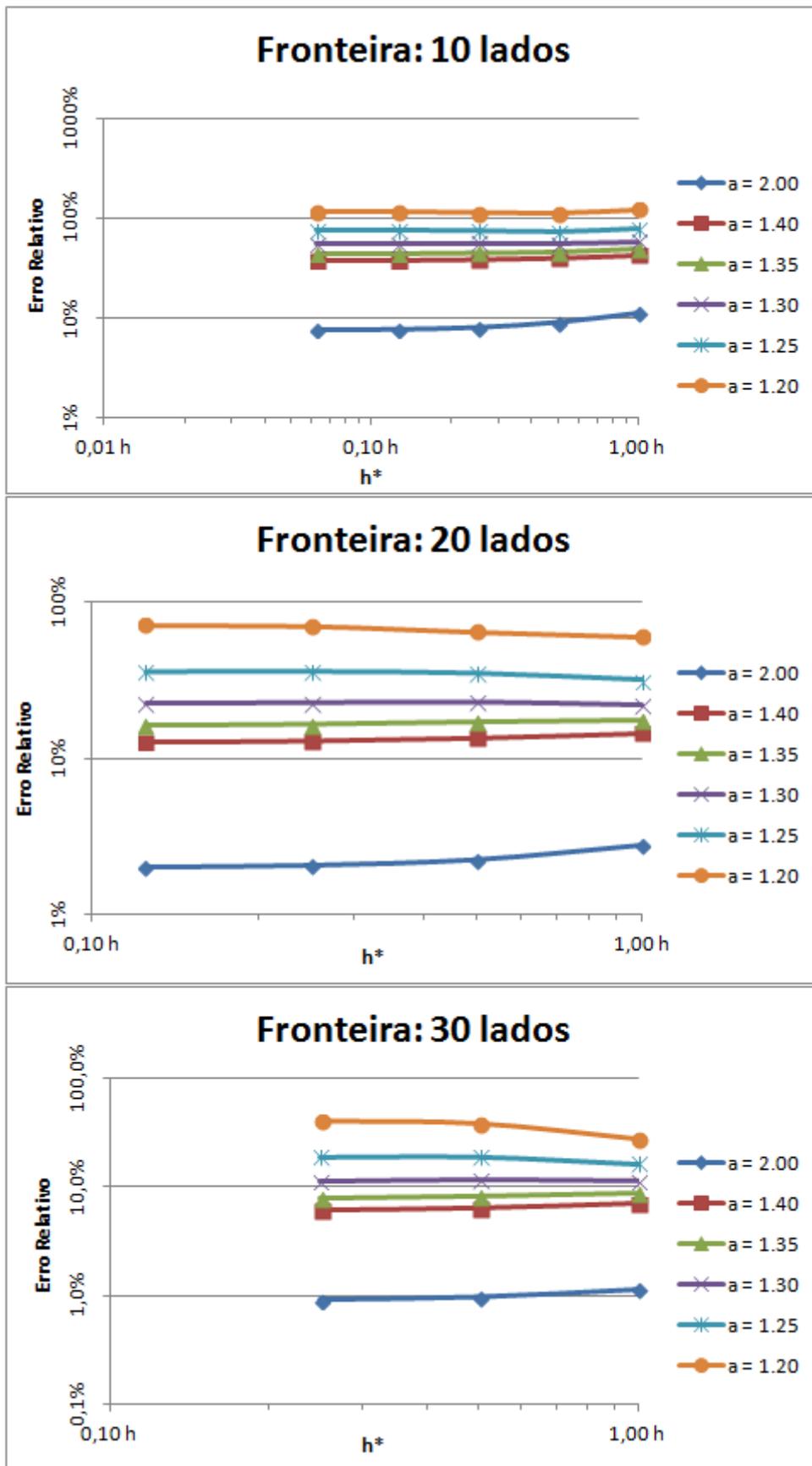


Figura 23 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para domínios aproximados por polígonos de 10, 20 e 30 lados e diferentes valores de a (log x log).

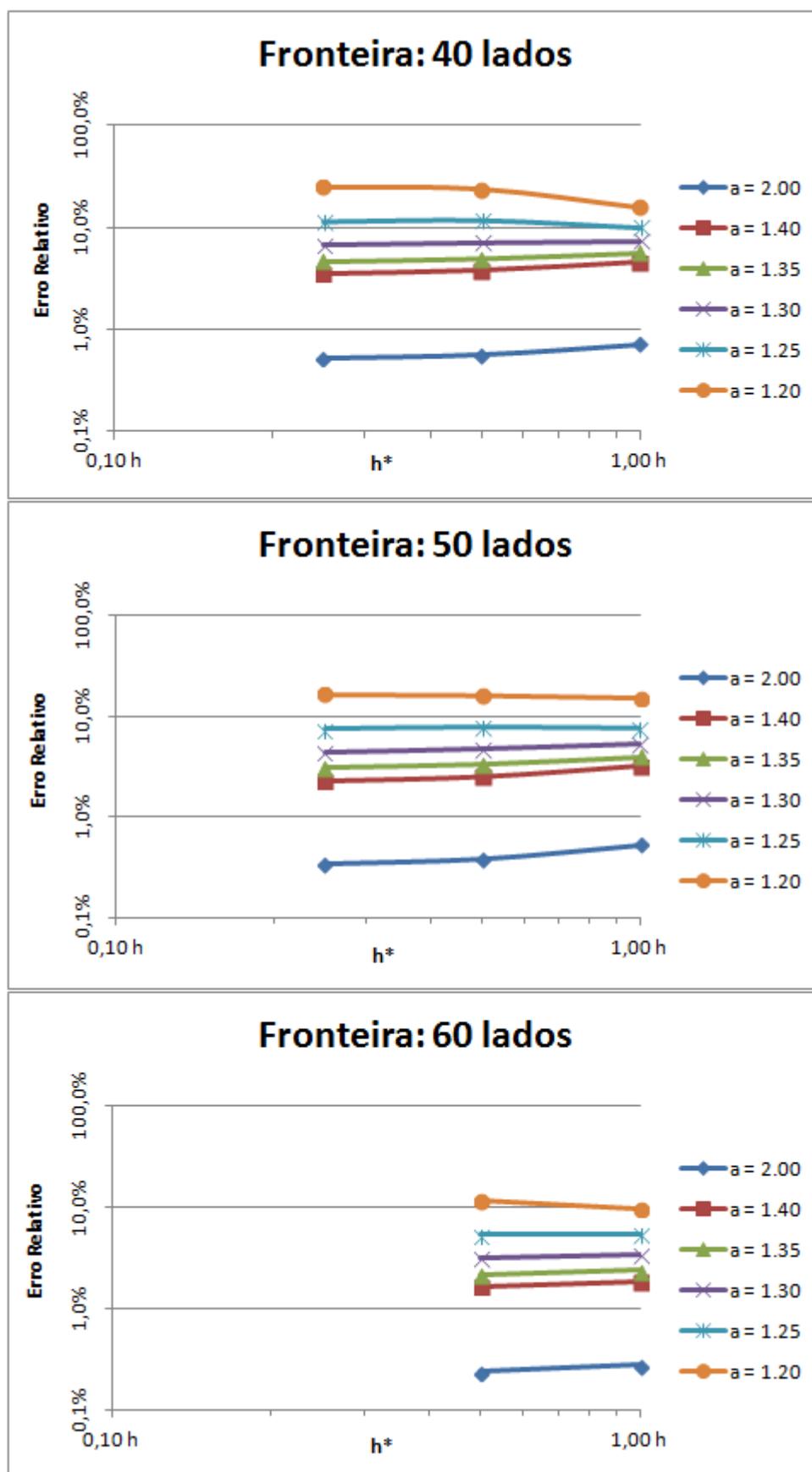


Figura 24 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para domínios aproximados por polígonos de 40, 50 e 60 lados e diferentes valores de a (log x log).

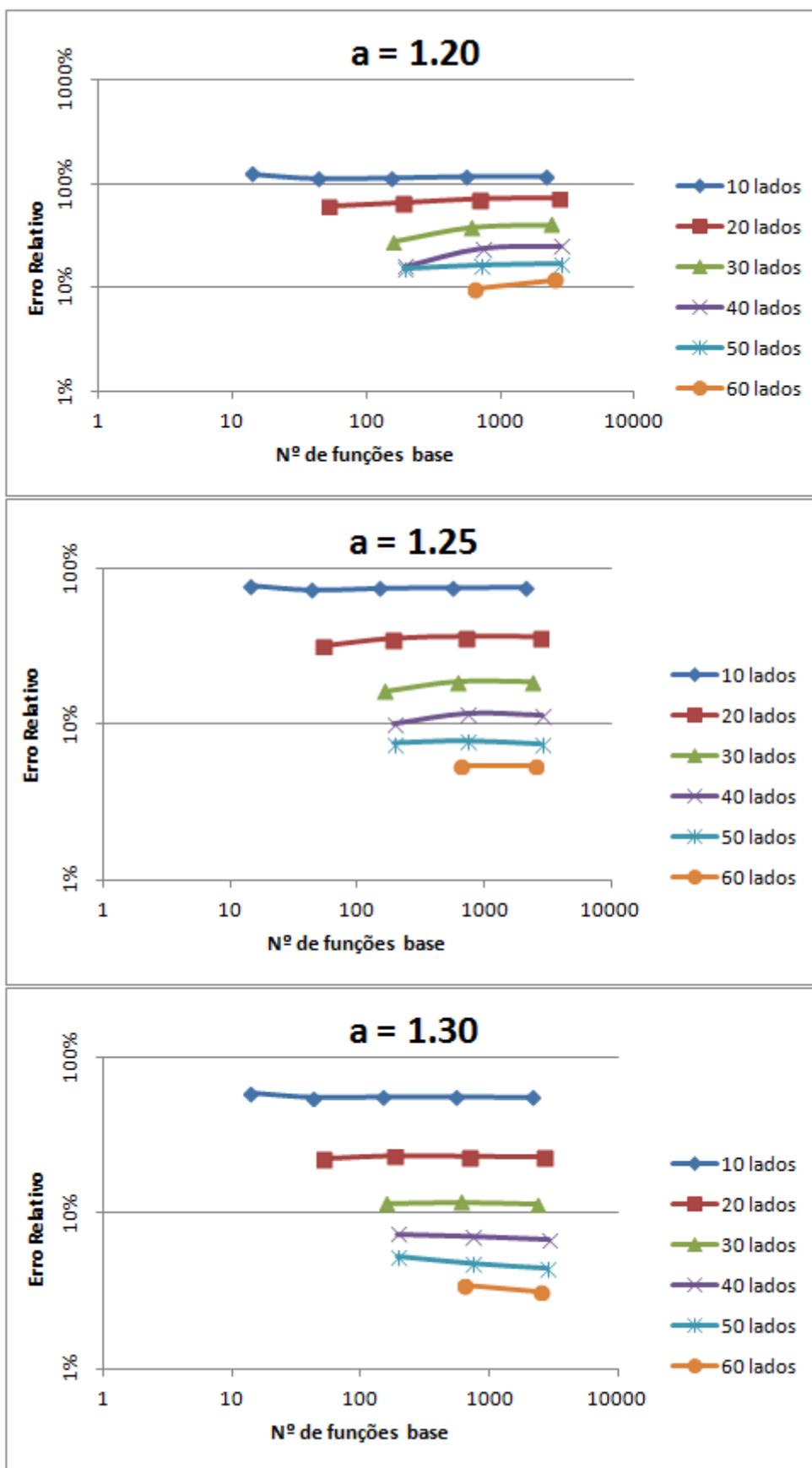


Figura 25 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para $a = 1.20, 1.25$ e 1.30 para diferentes domínios aproximados (log x log).

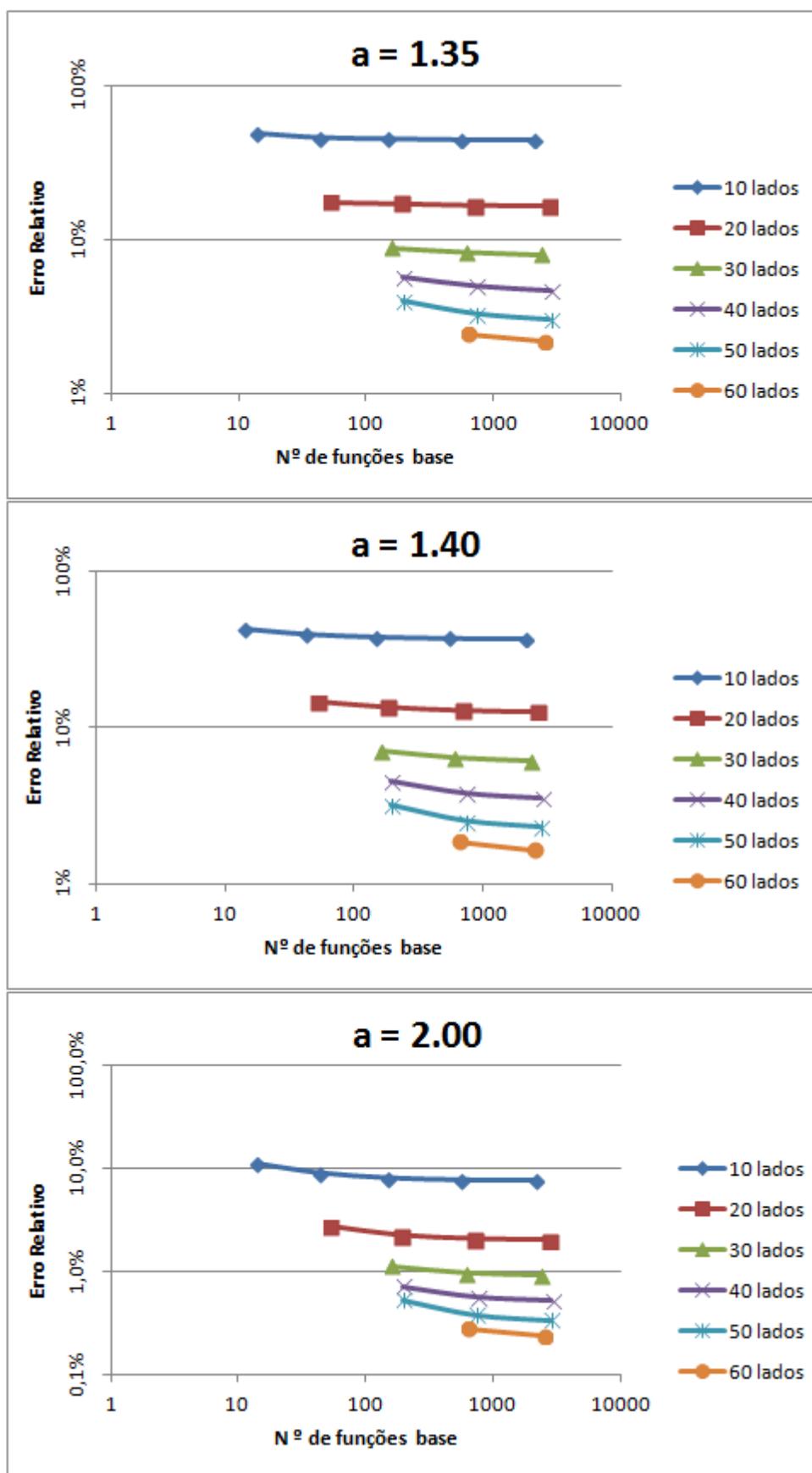


Figura 26 – Gráficos de comparação dos erros do MEF para $a = 1.35, 1.40$ e 2.00 para diferentes domínios aproximados (log x log).

Algo a se destacar é que no caso de funções com grande crescimento na fronteira o erro diminui muito mais rápido refinando a fronteira, do que refinando o interior do domínio, o que não necessariamente é verdade para funções de menor crescimento.

Para o método isogeométrico, a tabela 16 apresenta os resultados de erro encontrados, e pode-se observar que, exceto por problemas no primeiro refinamento, o método apresentou um decrescimento do erro mesmo para o $a = 1.20$, e o erro observado foi bem pequeno, mostrando que descrição exata do domínio é realmente uma grande vantagem. A figura 27 apresenta um gráfico comparando os resultados da tabela 16 e mostra que quanto menor o a maior o erro encontrado, ou seja, é necessário uma refinamento menor.

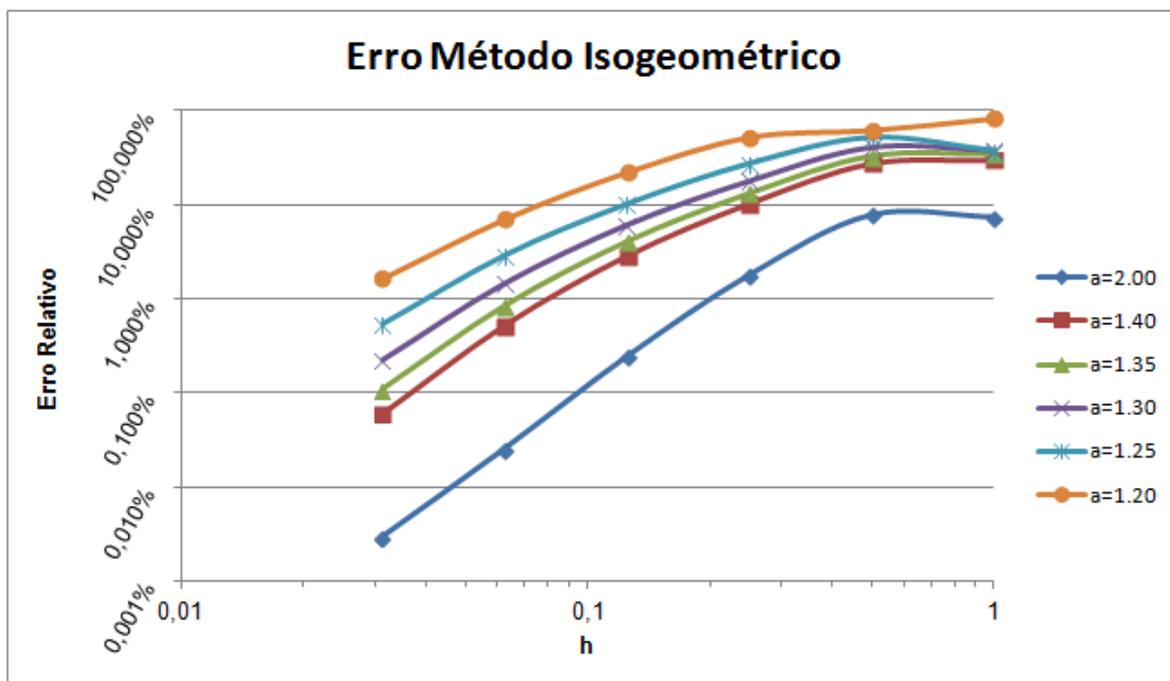


Figura 27 – Gráfico de comparação do erro do método isogeométrico para diferentes valores de a (log x log).

Nº fun. base	Erro %					
	$a=2.00$	$a=1.40$	$a=1.35$	$a=1.30$	$a=1.25$	$a=1.20$
9	7.546	29.936	35.091	38.658	38.450	82.098
16	7.943	27.619	33.413	41.626	52.914	61.840
36	1.819	10.322	13.343	18.214	27.884	52.004
100	0.247	2.863	4.087	6.204	10.336	22.076
324	0.026	0.522	0.846	1.483	2.937	7.025
1156	0.003	0.059	0.109	0.226	0.543	1.645

Tabela 16 – Análise erro relativo para o método isogeométrico

As figuras 28, 29, 30, 31, 32 e 33, apresentam comparações entre a solução através do MEF em um domínio de 10 lados com refinamento de 2129 funções base para cada a , a solução através do método isogeométrico com um refinamento de 1156 funções base e a

solução exata. Fica claro o que já foi mencionado anteriormente: para valores de a muito pequenos, a solução não converge para domínios com pouca aproximação.

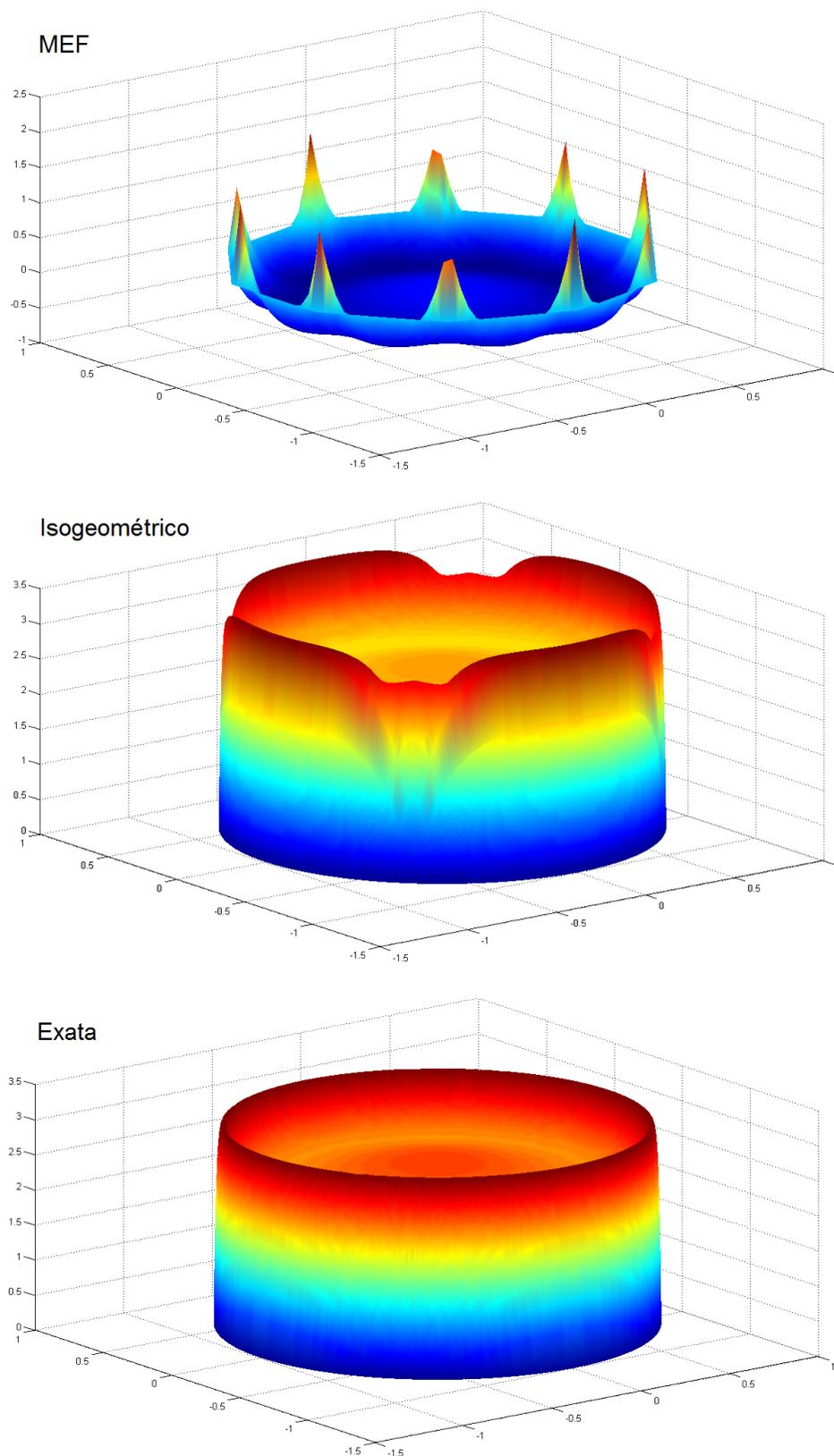


Figura 28 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.20$).

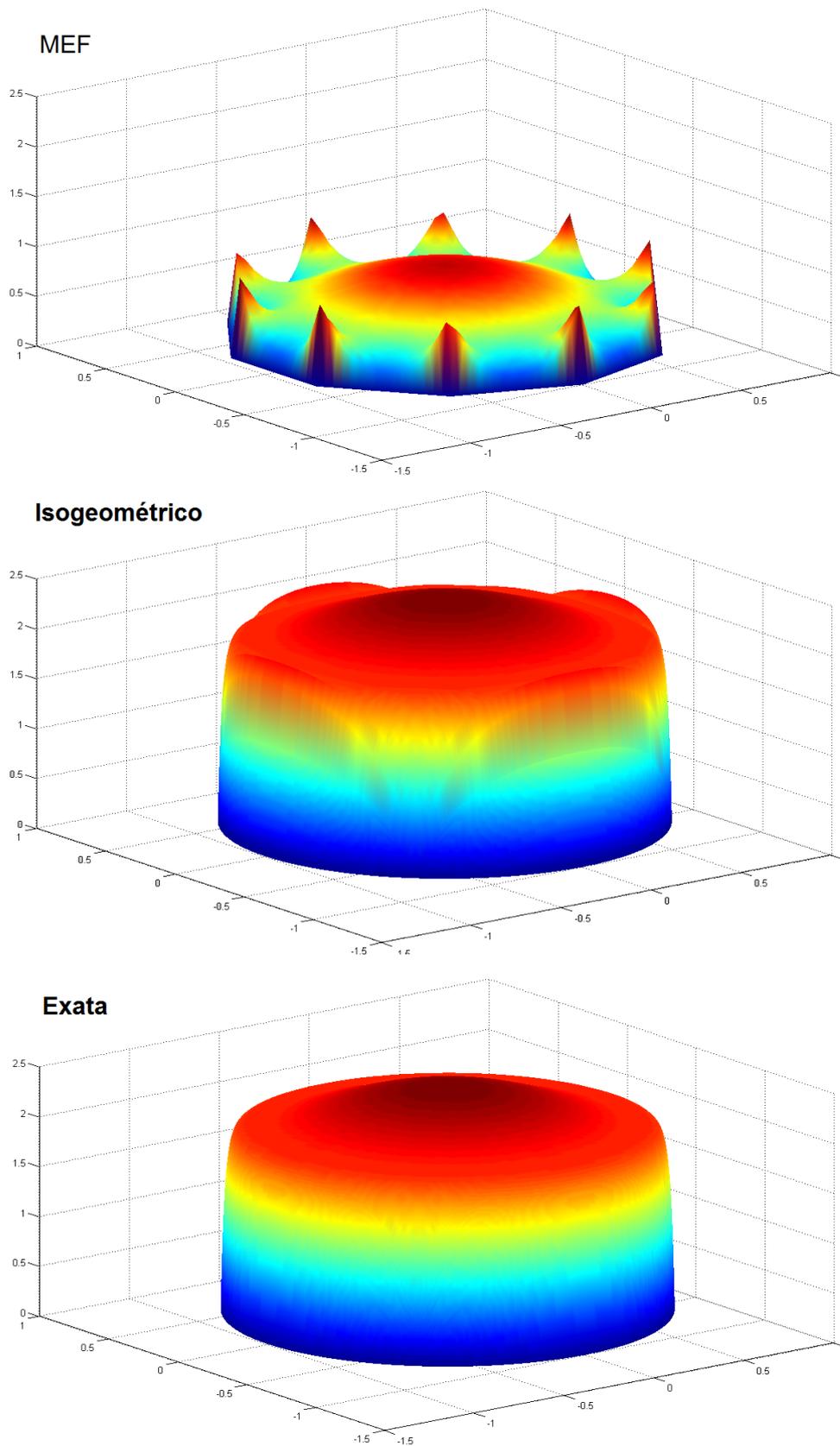


Figura 29 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.25$).

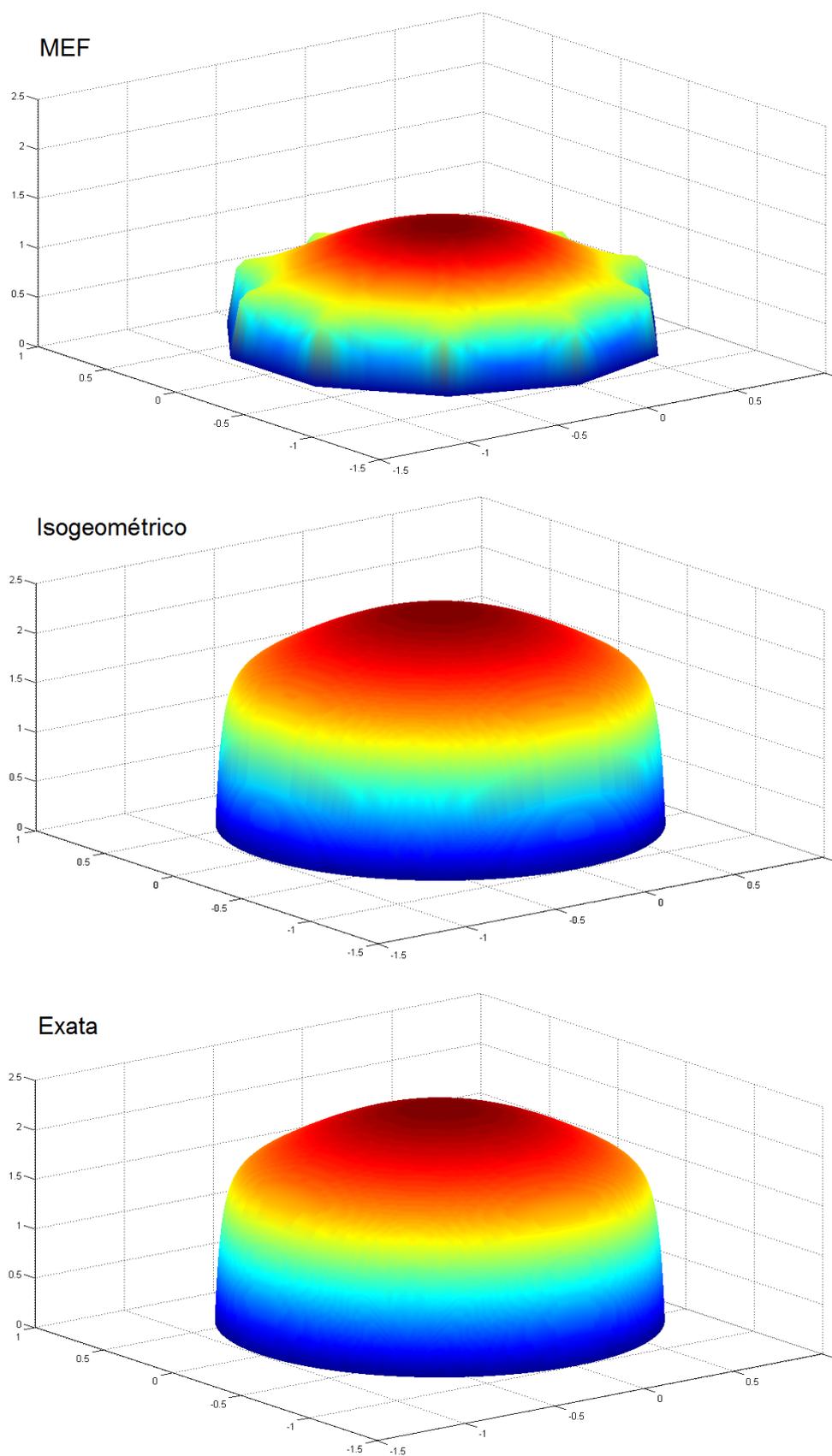


Figura 30 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.30$).

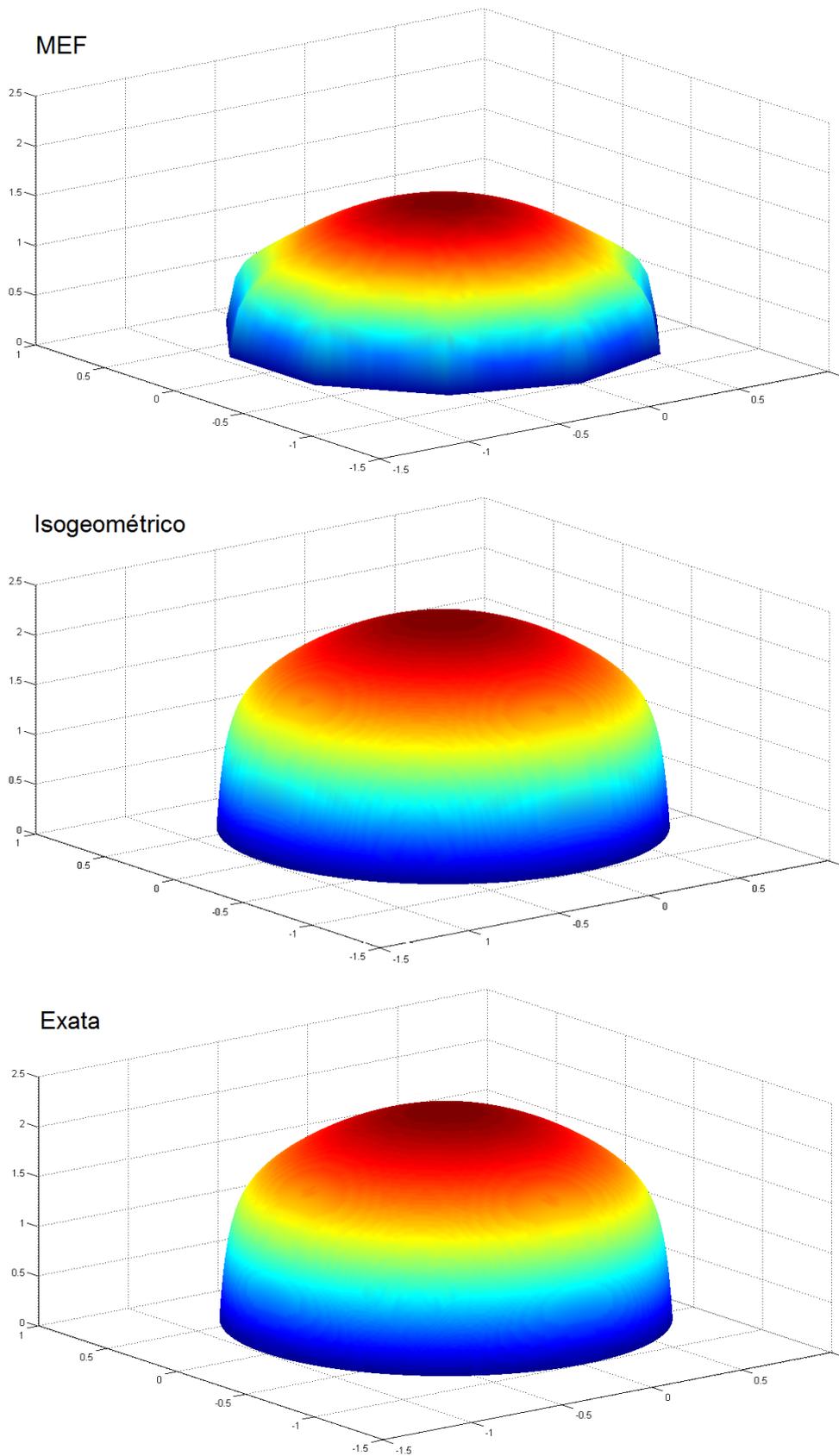


Figura 31 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.35$).

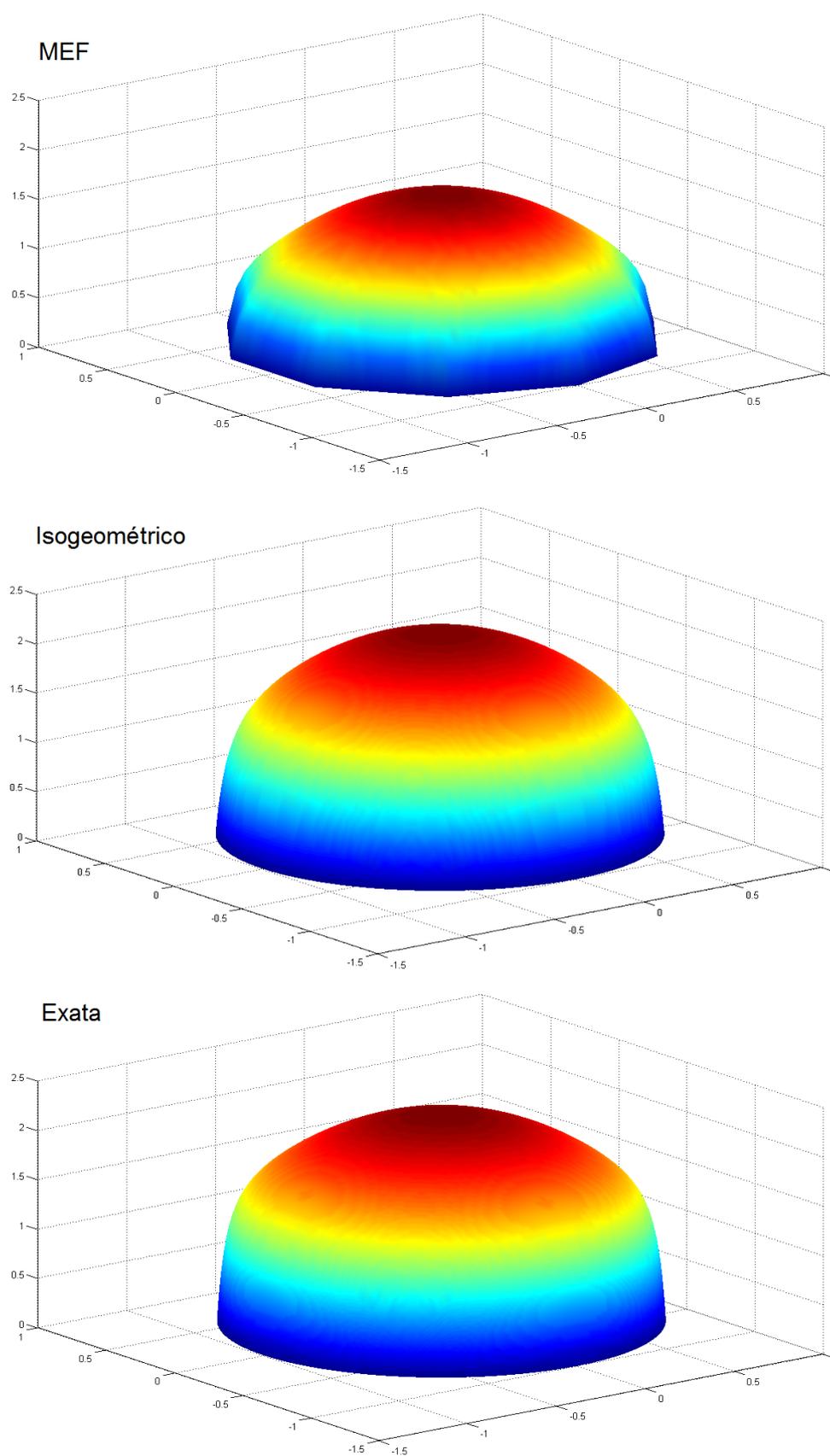


Figura 32 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 1.40$).

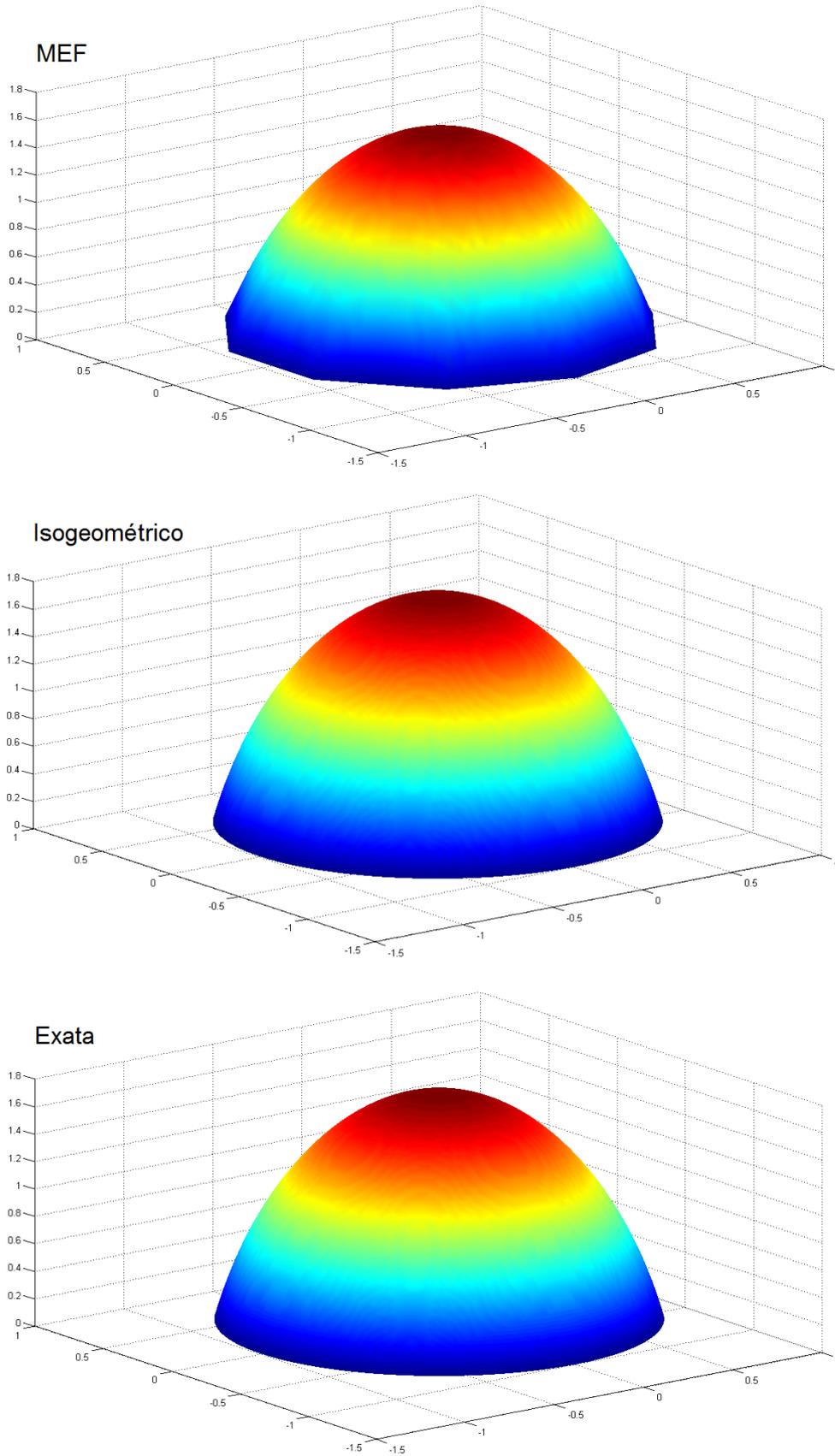


Figura 33 – Comparação entre solução através do Método Isogeométrico com a solução exata ($a = 2.00$).

Vamos agora, para esse mesmo problema com $a = 1.20$, comparar com o método dos elementos finitos utilizando funções de grau 2, já que como vimos na seção anterior, se os dois métodos utilizam funções base de mesmo grau então a ordem de convergência é a mesma. Vale destacar que mesmo com funções polinomiais de grau 2 não é possível descrever exatamente a geometria de uma domínio circular, então da mesma forma que os exemplos anteriores, vamos aproximar a fronteira por um polígono, porém desta vez os lados desse polígono possuem 3 nós ao invés de dois, sendo todos os três sobre a fronteira, o que faz com que os lados não sejam retas, mas sim curvas que interpolam os três pontos quadraticamente. Para a comparação foram utilizados domínios aproximados de 8, 12 e 16 lados, onde foi calculado o erro relativo em função do número de funções bases. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela 17, enquanto a figura 34 apresenta a comparação entre esses dados e os resultados obtidos pelo método isogeométrico.

8 lados		12 lados		16 lados	
nº fun. base	Erro (%)	nº fun. base	Erro (%)	nº fun. base	Erro (%)
25	47.580	45	48.212	225	41.133
81	41.821	153	36.272	865	12.355
289	13.494	561	13.155	3393	2.874
1089	7.148	2145	5.612	13441	0.830
4225	7.929	8385	6.699	53505	0.384
16641	11.831	33133	13.871	-	-

Tabela 17 – Erro relativo para o MEF com funções bases de grau dois em domínios aproximados de 8, 12 e 16 lados para $a = 1.20$.

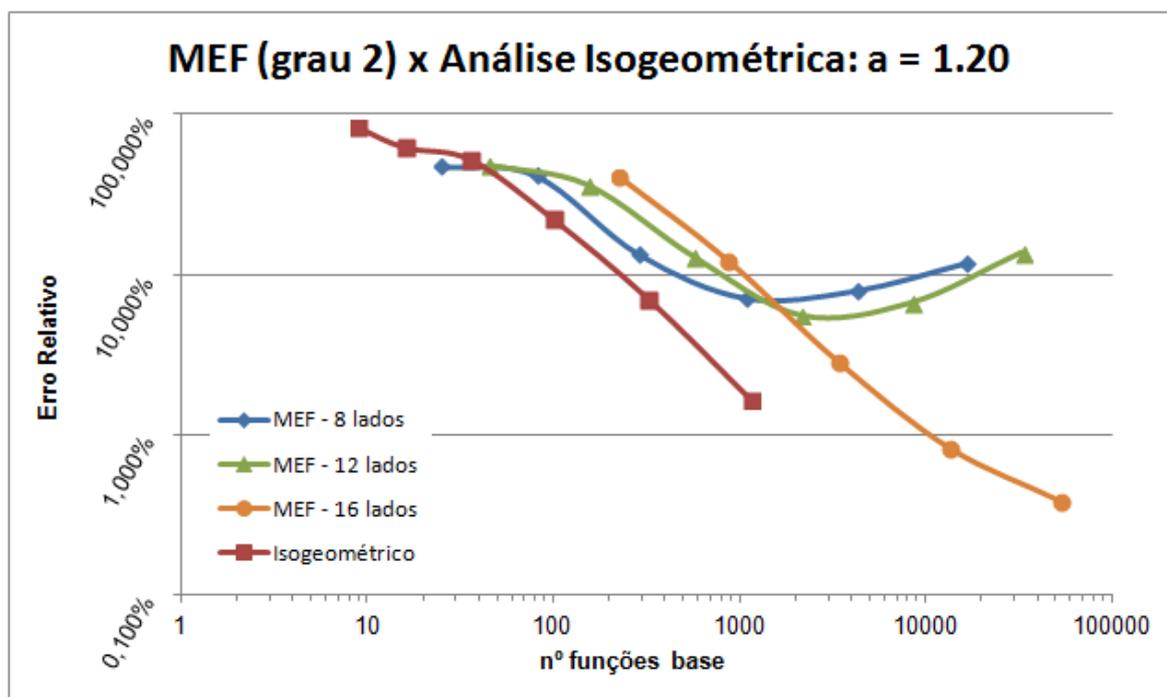


Figura 34 – Comparação do erro relativo entre o método isogeométrico e o MEF de grau 2 para domínios aproximados de 8, 12 e 16 lados para $a = 1.20$.

Observe que para os domínios aproximados de 8 e 12 lados o erro começa a aumentar após alguns refinamentos, o que mostra que mesmo para funções de grau 2, um domínio pouco aproximado e uma função de crescimento rápido na fronteira implicam em não convergência da solução. Para o domínio aproximado de 16 lados percebe-se que a inclinação da curva do gráfico começa a diminuir, indicando um comportamento semelhante ao das outras curvas do MEF caso o domínio fosse refinado ainda mais.

Mesmo para funções base de grau mais elevados, o fato do domínio não ser mapeado exatamente faz com que em algum momento do refinamento o erro comece a aumentar. O que acontece na maioria dos problemas é que a aproximação da fronteira é boa o suficiente para que o erro só comece a aumentar depois de um número muito grande de refinamentos, a ponto de que não seriam necessários tantos refinamentos para se obter uma solução aproximada satisfatória.

Outra diferença entre os métodos são as funções base utilizadas, já que o isogeométrico usa as NURBS e o MEF usa base polinomial, onde as primeiras não interpolam os pontos de controle e são sempre positivas, enquanto as outras interpolam os nós e nem sempre são positivas (caso o grau seja maior que 1), como mostra a figura 35 comparando as funções base de grau 2. Além disso a continuidade das bases no método isogeométrico é variável (como visto, repetir um nó no vetor significa reduzir o grau de uma das bases) e estas bases são suaves, com um custo mais baixo que as bases suaves do MEF.

A utilização dos pontos de controle ao invés dos nós também pode ser destacada como uma grande diferença, já que os nós eram parte integrante das malhas enquanto os pontos de controle não necessariamente fazem parte do domínio. Isso trás dificuldades em saber exatamente que ponto do domínio paramétrico gera certo ponto do domínio geométrico, isso vem do fato de não conhecermos a inversa das funções geométricas, devido a dificuldade da sua construção, o que pode ser um problema, por exemplo em um problema de elasticidade onde se deseja aplicar uma força em certo ponto do domínio onde não haja pontos de controle (como gerar um ponto de controle exatamente no ponto desejado?).

Uma desvantagem que pode ser apontada sobre o Método Isogeométrico é a dificuldade em se obter os pontos de controle, vetores de nós, etc., para a construção do domínio, que para certos domínios clássicos estão bem definidos, mas para outros seria necessária a utilização de uma ferramenta CAD (*Computer Aided Design*) específica para a obtenção desses dados. O MEF também necessita de software específicos para gerar a malha do domínio, porém esses são muito mais variados e difundidos que os softwares que geram as NURBS.

Entre as semelhanças dos métodos podemos destacar o conceito de elementos isoparamétricos, a utilização do método de Galerkin, bases de suporte compacto e a partição da unidade (soma das bases é igual a uma unidade).

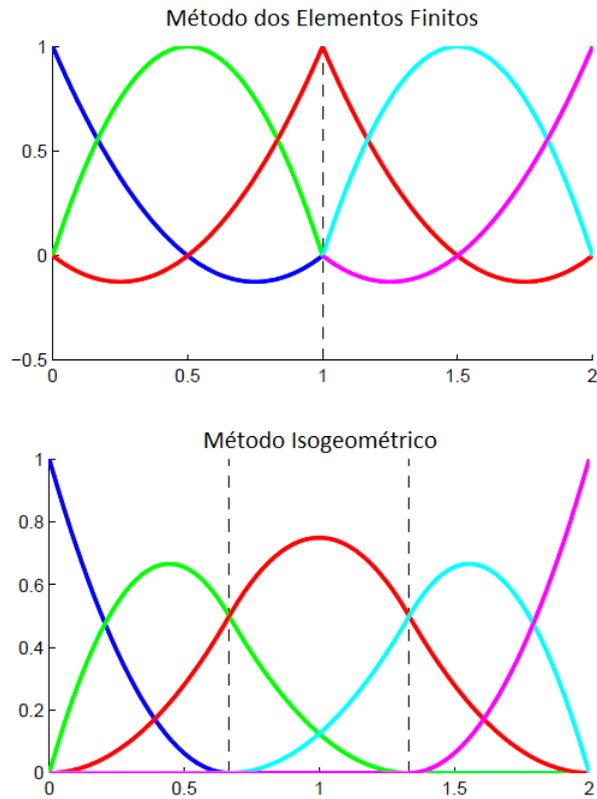


Figura 35 – Comparação entre as funções base de grau 2 do método dos elementos finitos e o método isogeométrico.

Apresentadas então as semelhanças e diferenças, resta então fazer um comentário: devida a maior complexidade das funções bases usadas no método isogeométrico o tempo computacional do mesmo é maior que o tempo computacional do MEF clássico se considerarmos um refinamento tal que os dois métodos tenham o mesmo número de funções base, resta então ponderar o que é melhor: usar o MEF clássico com uma malha muito fina para reduzir os erros na fronteira ou usar o método isogeométrico com uma malha refinada o suficiente para uma boa solução. Essa discussão não cabe à esse trabalho tendo em vista que para fazer uma análise a ponto de ponderar qual seria a melhor opção seria necessária a busca por algoritmos de solução otimizados, porém vale lembrar as vantagens já discutidas sobre a aproximação da fronteira.

3 MÉTODO ISOGEOMÉTRICO APLICADO A PROBLEMAS DE ELASTICIDADE

Dentre as aplicações mais frequentes do Método dos Elementos Finitos se destacam os problemas de elasticidade. Esses problemas consistem basicamente na análise da distribuição de tensões/deformações em um objeto, levando-se em conta vários fatores, nos casos mais complexos, como forças externas, temperatura, vibrações, etc.

Na ilustração desse capítulo vamos nos ater a uma análise elástica linear, ou seja, aquele onde os materiais se comportam de acordo com a Lei de Hooke. Primeiramente vamos analisar uma chapa retangular plana de espessura desprezível. Em seguida, será apresentado como o método pode ser aplicado na análise de cascas de espessura desprezíveis.

A partir da tradicional Lei de Hooke, $\sigma = E\epsilon$, que relaciona a tensão com o módulo de elasticidade e a deformação linear percentual de uma elemento unidimensional, deriva-se uma forma geral de se avaliar as tensões (ou deslocamentos) em elementos de mais dimensões. Note por exemplo que para um elemento de comprimento L , seção transversal A , e que sofre uma deformação ΔL , nós temos, a seguinte relação, $\sigma A = EA \frac{\Delta L}{L}$. Das leis da física sabemos que tensão = força / área, então, $F = \sigma A$, onde F é uma força aplicada na extremidade da barra, perpendicular à seção transversal.

Podemos escrever ainda a equação da seguinte forma: $Kd = F$, onde $K = \frac{EA}{L}$, é chamado de rigidez do elemento, e d é o deslocamento da extremidade (antes chamado ΔL). Essa mesma equação é válida não só para um único elemento, como também para um conjunto de elementos, sendo eles uni, bi ou tridimensionais, adaptando apenas K , que será então a matriz de rigidez do conjunto todo, d e F .

Matematicamente, definimos $K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega$, onde B é uma matriz de deformação e D é a matriz de elasticidade, porém é muito difícil definir essas matrizes para um grande conjunto de elementos, desta forma definimos, através da teoria de elementos finitos, essas matrizes para cada elemento, ou seja, definimos $K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T D_e B_e d\Omega_e$. Nos tópicos a seguir definiremos analiticamente as matrizes B e D de acordo com a aplicação utilizada.

3.1 Elasticidade 2D

Vamos agora definir as variáveis necessárias para o cálculo da matriz de rigidez de cada elemento, que é da forma:

$$K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T D_e B_e d\Omega_e \quad (3.1)$$

A matriz de elasticidade é dada por

$$D_e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

A matriz de deformação é definida de acordo com as funções base não nulas no elemento calculado. Supondo Φ o conjunto de funções bases em um certo elemento e , temos que a matriz B é definida por,

$$[B_e] = \left[[B_{\phi_1}] \quad [B_{\phi_2}] \quad \dots \quad [B_{\phi_n}] \right]$$

onde $\phi_i \in \Phi$ e B_{ϕ_i} é definido como

$$B_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Assim, sendo n o número de funções base no elemento, a matriz K_e terá dimensões $2n \times 2n$.

Como visto anteriormente, calcular as derivadas no domínio geométrico não é fácil, e por isso, utilizamos a função geométrica para calculá-las no domínio paramétrico. Com um raciocínio análogo ao da equação (2.20), podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde temos

$$\nabla_{(\xi,\eta)} R_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{(x,y)} R_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DF}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Assim, para montar a matriz B basta resolver o sistema (3.2), porém com essa mudança de variáveis é necessário que se altere também a equação (3.1), que fica da seguinte forma:

$$K_e = \int_{\Omega_{0e}} B_e^T D_e B_e |det(\mathbf{DF})| d\Omega_{0e} \quad (3.3)$$

Construídas então as matrizes de rigidez dos elementos, basta posicioná-las na matriz de rigidez do sistema de acordo com as funções base de cada elemento, assim como é feito no método dos elementos finitos clássico.

A respeito das forças externas aplicadas na estrutura, nos ateremos aqui àquelas que são pontuais e estão dispostas sobre os pontos de controle. Elas são simplesmente posicionadas no vetor de forças de acordo com a função base corresponde ao ponto de controle. Já para forças aplicadas fora dos pontos de controle é utilizada interpolação e um sistema (muitas vezes não linear) é resolvido de maneira iterativa, como é apresentado para solução do problema de elasticidade através do método dos elementos finitos clássico em (AZEVEDO, 2003). Informações sobre forças distribuídas na fronteira podem ser encontradas em (NGUYEN; BORDAS; RABCZUK, 2012).

Após resolver do problema de elasticidade, encontra-se o vetor dos deslocamentos d , que apresenta o deslocamento de cada ponto de controle na direção x e y (chamaremos d_{ij} esses dois deslocamentos para o ponto de controle P_{ij}), e com isso, somando os deslocamentos encontrados aos seus respectivos pontos de controle, é possível gerar o domínio deformado do problema utilizando a mesma equação que gera a função geométrica (equação 1.7), porém com esses novos pontos de controle, como na equação 3.4.

$$F(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n,m} (P_{ij} + d_{ij}) R_{i,j,p}(\xi, \eta)$$

Note que na equação 3.4 se aplicarmos a propriedade distributiva, temos que o primeiro termo é exatamente o mapeamento do domínio e o segundo termo é solução do problema de elasticidade para cada ponto do domínio, ou seja, é o deslocamento de cada ponto do domínio nas direções x e y , e sendo assim, a soma dos dois termos nos dá o domínio deformado pelas condições do problema.

Vamos agora ver dois exemplos da aplicação da análise isogeométrica em problemas de elasticidade 2D. O primeiro exemplo é de uma placa de espessura desprezível medindo 2×1 cm, com movimento restrito, em dois vértices do lado esquerdo, nas duas direções. Foi aplicada uma força vertical de cima para baixo no valor de 1kN na extremidade superior direita, conforme o esquema apresentado na figura 36. O material considerado possui módulo de elasticidade de 200kN/cm^2 e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

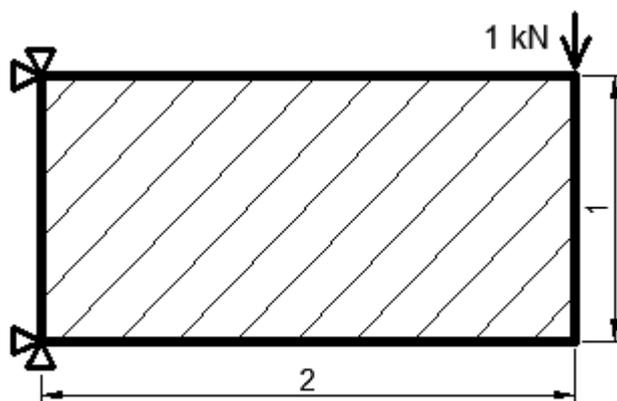


Figura 36 – Esquema da placa analisada na exemplo 1.

Na Figura 37 temos uma comparação entre uma solução com 9 funções base (3×3) e uma com 70 funções base (10×7), onde percebe-se que apenas 9 funções base não são o suficiente para representar o deslocamento causado pela força aplicada. Já a Figura 38 apresenta uma comparação qualitativa entre os deslocamentos (direção X e Y) com os resultados do programa Mtool.

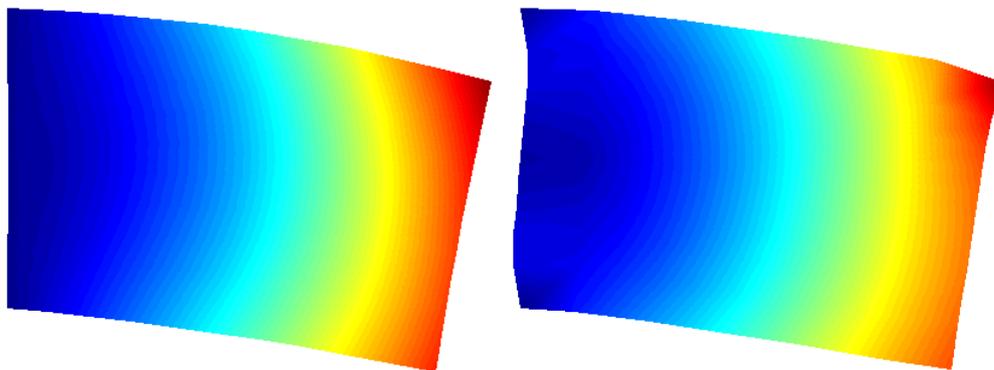


Figura 37 – Comparação da solução entre modelos com 9 função bases e 70 funções base.

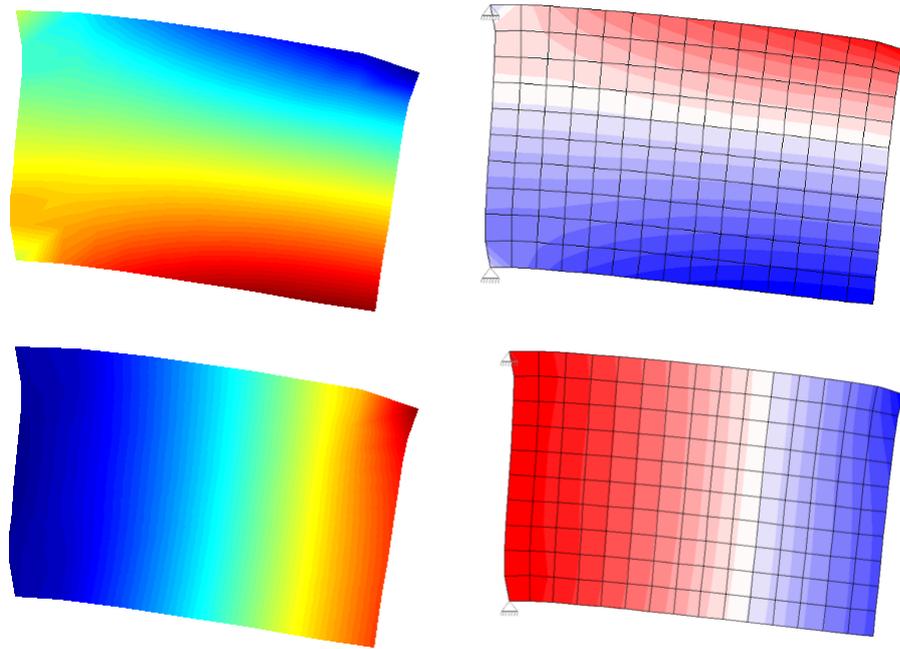


Figura 38 – Comparação entre resultados do Mtool com a rotina de análise isogeométrica implementada em Matlab: Na parte superior o gráfico do deslocamento em X e na inferior em Y. À esquerda, Matlab e à direita, Mtool.

Apesar das diferentes cores utilizadas pelos programas, percebe-se na Figura 38 que o deslocamento obtido através da análise isogeométrica (70 funções base de grau 2) é condizente com o obtido pelo Mtool (176 funções base lineares).

O segundo exemplo apresenta uma placa circular de espessura desprezível e diâmetro unitário com módulo de elasticidade 20000kN/cm^2 e coeficiente de Poisson igual a $0,3$ também com deslocamentos restritos nas extremidades do lado esquerdo e duas forças de 1kN na extremidade superior direita de maneira que a combinação das duas formem uma força no sentido radial apontando para o interior da placa circular, conforme o esquema da figura 39. A Figura 40 apresenta a variação do deslocamento, em soma vetorial, para diferentes refinamentos da placa circular. Nota-se que houve não só variação na distribuição dos deslocamentos, como no formato assumido.

3.2 Elasticidade 3D

As diferenças para o problema de elasticidade espacial são apenas as dimensões das matrizes e os elementos da equação (3.1), que é lembrada abaixo.

$$K_e = \int_{\Omega_e} B_e^T D_e B_e d\Omega_e$$

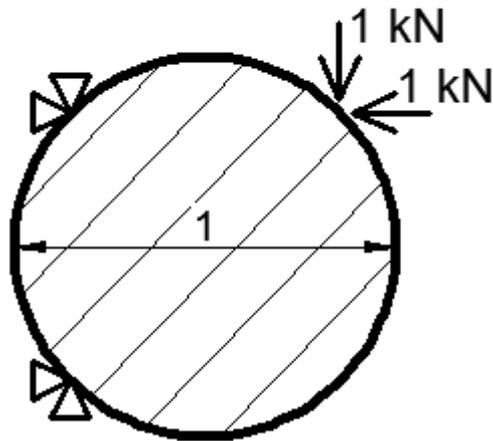


Figura 39 – Esquema da placa analisada no exemplo 2.

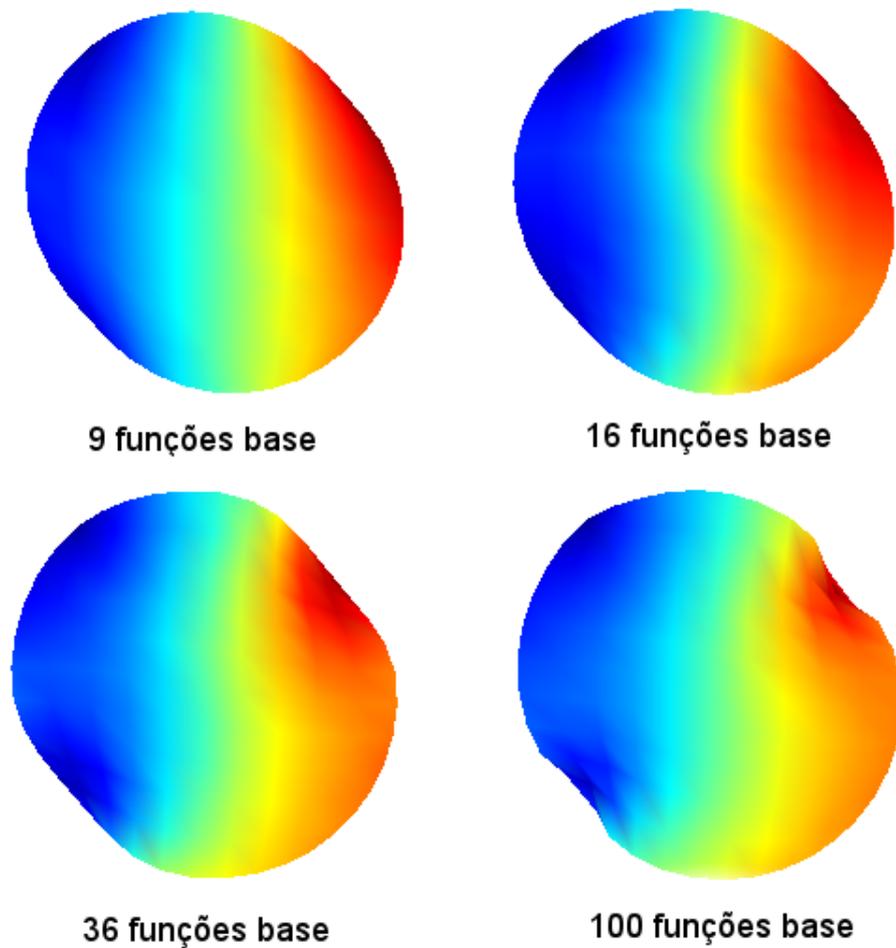


Figura 40 – Comparação da solução do problema de elasticidade plana para o círculo de acordo com o número de funções base onde se observa o aumento da deformação do domínio conforme se aumenta o número de funções base (na escala o azul representa deslocamento nulo e o vermelho representa deslocamento máximo).

A matriz de elasticidade é dada por

$$D_e = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

onde E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson. Por simplicidade estamos adotando o mesmo coeficiente de Poisson para ambas as direções do elemento.

As matrizes B_{ϕ_i} que constituem a matriz de deformação B_e , são definidas da seguinte forma:

$$B_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial z} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial z} & \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Na aplicação da função geométrica também temos algumas modificações devido ao aumento da dimensão. A transformação para o domínio paramétrico fica da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} & \frac{\partial F_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} & \frac{\partial F_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial F_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde temos

$$\nabla_{(\xi, \eta, \zeta)} R_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_{(x,y,z)} R_{\phi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{\phi_i}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{DF}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi} & \frac{\partial F_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} & \frac{\partial F_3}{\partial \eta} \\ \frac{\partial F_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial F_2}{\partial \zeta} & \frac{\partial F_3}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Para exemplificar o problema de elasticidade 3D vamos apresentar uma superfície não plana ao invés de um sólido, por facilidade de visualização do resultado. Como exemplo foi escolhida uma obra real visando mostrar a grande aplicabilidade e as vantagens do método em relação à arquiteturas não convencionais. Foi escolhida a Igreja São Francisco de Assis da Pampulha, Belo Horizonte - MG, apresentada na Figura 41, em virtude das belas curvas produzidas em uma casca de concreto armado. A Igreja da Pampulha foi inaugurada em 1943 e, seu projeto foi concebido pelo renomado arquiteto Oscar Niemeyer (1907-2012) e o cálculo estrutural realizado pelo engenheiro Joaquim Cardoso (1897-1978).



Figura 41 – Igreja da Pampulha, Belo Horizonte - MG.
Fonte: <http://www.ricardoamado.fot.br/igrejinha-da-pampulha/>

O modelo analisado como exemplo apresenta apenas parte da casca da estrutura e é fiel apenas quanto a forma, porém não representando exatamente as medidas do projeto original, este pode ser observado na Figura 42.

Por simplicidade o modelo foi analisado como uma casca de espessura desprezível, apoiada nos pontos de descontinuidade da derivada. Na direção u adotou-se NURBS de grau 2 para se representar bem as curvas e na direção v , apesar de NURBS de grau 1 serem suficientes, adotou-se também grau 2 para representar melhor os deslocamentos obtidos

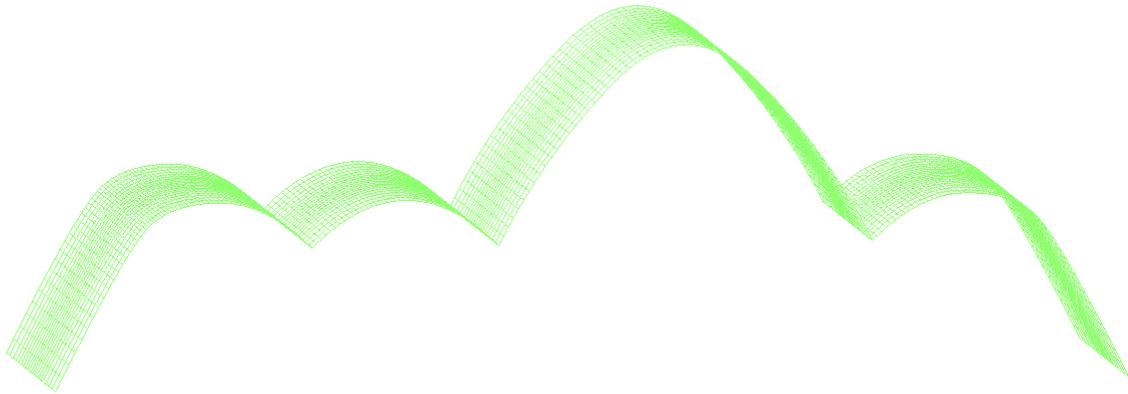


Figura 42 – Modelo da Igreja da Pampulha feito através do método de análise isogeométrico.

como resultados. Os vetores de nós utilizados nas direções u e v foram, respectivamente,

$$\Xi_u = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 5 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 11 \ 11]$$

e

$$\Xi_v = [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1]$$

de maneira a termos 16 funções base na direção u e 5 funções base na direção v . Note que Ξ_u possui algumas repetições. Elas foram feitas justamente para que houvesse a descontinuidade da derivada e assim de produzisse os 'vértices' no modelo. A Figura 43 apresenta as funções base utilizadas na direção u .

Como não se tinha as dimensões exatas para se modelar a estrutura, utilizou-se pesos unitários por facilidade. Os pontos de controle utilizados são dados na Tabela 18.

Nos pontos máximos de cada curva, adicionou-se algumas forças pontuais verticais para ilustrar a distribuição das deformações na estrutura. Estas não são fiéis a nenhum esforço real da estrutura, como peso próprio, por exemplo, e assumiram posições e valores aleatórios. A Figura 44 apresenta o resultado obtido.

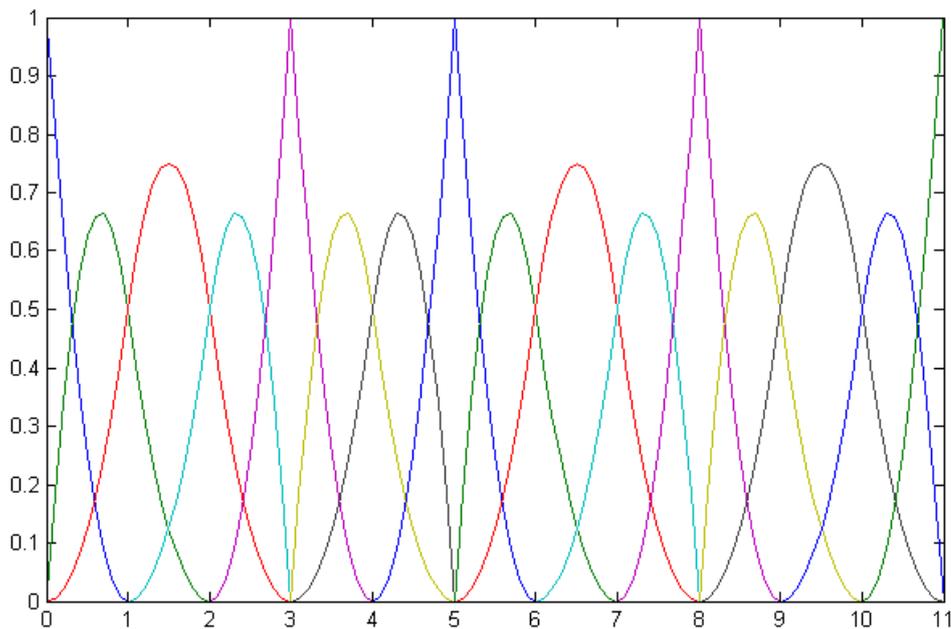


Figura 43 – Funções base na direção U.

x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
0	0	0	0	2	0	0	4	0	0	6	0	0	8	0
1.5	0	3	1.5	2	3	1.5	4	3	1.5	6	3	1.5	8	3
2.5	0	4	2.5	2	4	2.5	4	4	2.5	6	4	2.5	8	4
4.5	0	4	4.5	2	4	4.5	4	4	4.5	6	4	4.5	8	4
5.5	0	3	5.5	2	3	5.5	4	3	5.5	6	3	5.5	8	3
6.5	0	4	6.5	2	4	6.5	4	4	6.5	6	4	6.5	8	4
8.5	0	4	8.5	2	4	8.5	4	4	8.5	6	4	8.5	8	4
9.5	0	3	9.5	2	3	9.5	4	3	9.5	6	3	9.5	8	3
10.5	0	5	10.5	2	5	10.5	4	5	10.5	6	5	10.5	8	5
13.5	0	8	13.5	2	8	13.5	4	8	13.5	6	8	13.5	8	8
16.5	0	5	16.5	2	5	16.5	4	5	16.5	6	5	16.5	8	5
17.5	0	3	17.5	2	3	17.5	4	3	17.5	6	3	17.5	8	3
18.5	0	4	18.5	2	4	18.5	4	4	18.5	6	4	18.5	8	4
20.5	0	4	20.5	2	4	20.5	4	4	20.5	6	4	20.5	8	4
21.5	0	3	21.5	2	3	21.5	4	3	21.5	6	3	21.5	8	3
23	0	0	23	2	0	23	4	0	23	6	0	23	8	0

Tabela 18 – Pontos de Controle usando na modelagem.

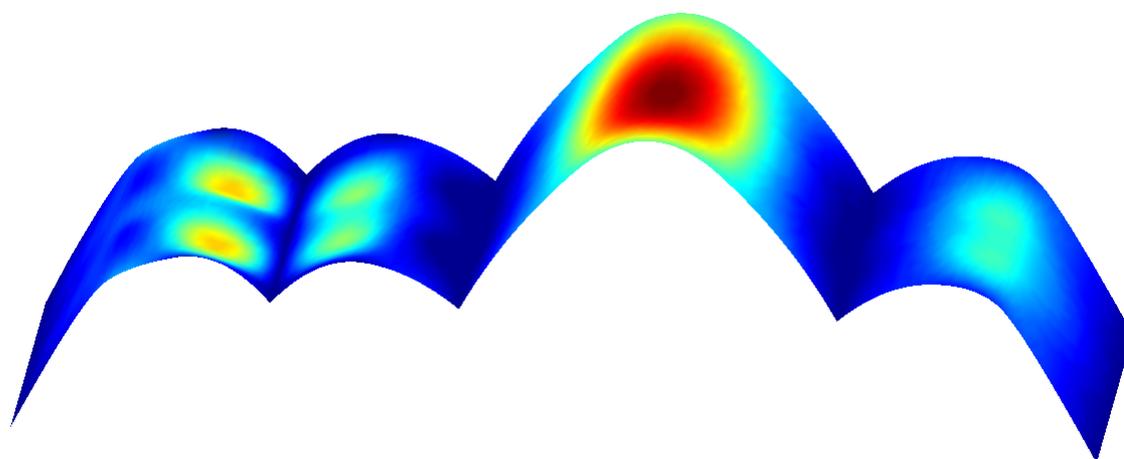


Figura 44 – Distribuição da deformação do modelo da Igreja da Pampulha, onde o azul escuro representa deslocamento zero e o vermelho escuro representa o deslocamento máximo.

4 CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Tendo em vista as discussões feitas neste trabalho, ficou claro que o Método de Análise Isogeométrica tem um grande potencial, já que a convergência da solução por este método é da mesma ordem que a solução pelo método dos elementos finitos clássico. Sendo assim, esse método tem grande aplicação em problemas cujos domínios podem ser mapeados por NURBS mas não por polinômios, enquanto que nos domínios que podem ser mapeados por polinômios, o método clássico é o mais indicado tendo devido a sua simplicidade.

Obviamente, algumas dificuldades também se apresentam na aplicação do método, como é o caso da obtenção dos pontos de controle e pesos para a construção das NURBS para um domínio qualquer, apesar de que para várias das figuras geométricas mais comuns esses valores já são apresentados na literatura. Com a evolução do método, é provável que surjam programas computacionais para vencer esse desafio, semelhantes aos aplicados para gerar as malhas utilizadas no MEF, voltados à geração das NURBS a partir do domínio.

Devido ao surgimento recente dos primeiros estudos do método isogeométrico, muito ainda há para ser feito onde destacamos as comparações entre resultados para o problema de elasticidade comparado ao MEF clássico, tanto para problemas estáticos como para problemas dinâmicos, além do problema de contato (problema no qual se estuda os efeitos de pressionar um corpo contra o outro).

Além disso, o método pode ser aplicado aos problemas de controle (ver (GONÇALVES, 2009)) tendo em vista sua grande vantagem que é a exatidão do domínio.

Referências

- ADAMS, R. A. *Sobolev spaces. 1975*. [S.l.]: Academic Press, New York, 1975. Citado na página 35.
- AZEVEDO, Á. F. Método dos elementos finitos. *Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, v. 1, 2003. Citado na página 81.
- CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. [S.l.]: Siam, 2002. v. 40. Citado na página 35.
- COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J.; BAZILEVS, Y. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 6 vezes nas páginas 23, 44, 48, 51, 53 e 55.
- GALVIS, J. Introdução aos métodos de decomposição de domínio. *Publicações Matemáticas - 27º Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA*, v. 27, 2009. Citado na página 36.
- GONÇALVES, E. *Preconditioners for Elliptic Control Problems*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, 2009. Citado na página 91.
- HUGHES, T. J.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 194, n. 39, p. 4135–4195, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 44.
- NGUYEN, V. P.; BORDAS, S.; RABCZUK, T. Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects. *arXiv preprint arXiv:1205.2129*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 81.
- PIEGL, L.; TILLER, W. *The NURBS book*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 32.
- ROCHA, F. F. *NURBS e o Método Isogeométrico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, UFES, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 28.
- VEIGA, L. B. D. et al. Mathematical analysis of variational isogeometric methods. *Acta Numerica*, Cambridge Univ Press, v. 23, p. 157–287, 2014. Citado na página 44.
- VUONG, A.-V.; HEINRICH, C.; SIMEON, B. Isogat: A 2d tutorial matlab code for isogeometric analysis. *Computer Aided Geometric Design*, Elsevier, v. 27, n. 8, p. 644–655, 2010. Citado na página 44.

Apêndices

APÊNDICE A – ALGORITMOS

Neste capítulo vamos apresentar dois algoritmos utilizados na solução de EDPs pelo método isogeométrico, onde o primeiro será o algoritmo para a montagem da matriz \mathbf{A} , e o segundo para a construção do vetor \mathbf{b} .

Algoritmo para montagem da matriz \mathbf{A} :

Esse algoritmo calcula a matriz \mathbf{A} para apenas um elemento do domínio, a saber (iU, iV) .

```
function [Ak]=MatrizA(knotVectorU ,knotVectorV ,tableU ,tableV ,pU,pV, ...
    ptsctrl ,pesos ,nosU ,nosV ,iU ,iV)

%=====
%Variaveis:
%knotVectorU e knotVectorV = vetor de nos de cada direcao;
%tableU e tableV = matriz que contem quais as bases sao nao nulas por elemento;
%pU e pV = graus;
%ptsctrl = pontos de controle;
%pesos = pesos para as NURBS;
%nosU e nosV = divisoes entre os elementos no dominio parametrico;
%iU e iV = elemento para se calcular a matriz A;
%=====

%limites do elemento
linf1=nosU(iU);
lsup1=nosU(iU+1);
linf2=nosV(iV);
lsup2=nosV(iV+1);

%numero de funcoes base
nobU=size(knotVectorU,2)-pU-1;
nobV=size(knotVectorV,2)-pV-1;

PC=cell(1,nobU*nobV);
for l=1:nobU*nobV
    PC{1,l}=ptsctrl(l,:);
end
PC=reshape(PC,nobU,nobV);
matrizpesos=reshape(pesos ,nobU ,nobV);

% valores utilizados pela integracao de Gauss
s = [-0.906179845938664 , -0.538469310105683 , 0 , ...
    0.538469310105683 , 0.906179845938664 ];
w = [0.236926885056189 , 0.478628670499366 , 0.568888888888889 , ...
    0.478628670499366 , 0.236926885056189 ];

h1=(lsup1-linf1)/2;
```

```

m1=(linf1+lsup1)/2;
s1=s*h1+m1;

h2=(lsup2-linf2)/2;
m2=(linf2+lsup2)/2;
s2=s*h2+m2;

val1=zeros(nobU*nobV,nobU*nobV);
for i=1:5
    val2=zeros(nobU*nobV,nobU*nobV);
    for j=1:5
        result=zeros(nobU*nobV,nobU*nobV);
        %calcular as B-pline e suas derivadas nos pontos s1(i) e s2(j)
        [NU,dNU]=Bspline_pontual(knotVectorU, pU, s1(i));
        [NV,dNV]=Bspline_pontual(knotVectorV, pV, s2(j));

        N=NU*NV' .*matrizpesos;
        DNU=dNU*NV' .*matrizpesos;
        DNV=NU*dNV' .*matrizpesos;
        sN=sum(sum(N));
        sDNU=sum(sum(DNU));
        sDNV=sum(sum(DNV));
        DNU= (sN*DNU-N*sDNU)/(sN^2);
        DNV= (sN*DNV-N*sDNV)/(sN^2);

        %jacobiana
        DF=zeros(2,2);
        for ix=1:pU+1
            for iy=1:pV+1
                DF(:,1)=DF(:,1)+...
                    DNU(tableU(ix,iU),tableV(iy,iV))*...
                    PC{tableU(ix,iU),tableV(iy,iV)}';
                DF(:,2)=DF(:,2)+...
                    DNV(tableU(ix,iU),tableV(iy,iV))...
                    *PC{tableU(ix,iU),tableV(iy,iV)}';
            end
        end

        for k=1:pU+1
            for l=1:pV+1
                for m=1:pU+1
                    for n=1:pV+1
                        %gradientes
                        gradR1 = [DNU(tableU(k,iU),tableV(l,iV));
                            DNV(tableU(k,iU),tableV(l,iV))];
                        gradR2 = [DNU(tableU(m,iU),tableV(n,iV));
                            DNV(tableU(m,iU),tableV(n,iV))];

                        result(nobU*(tableV(l,iV)-1)+tableU(k,iU),...
                            nobU*(tableV(n,iV)-1)+tableU(m,iU)) = ...
                            ((DF')\gradR2)'*((DF')\gradR1)*abs(det(DF));
                    end
                end
            end
        end
        val2=val2+result*w(j)*h2;
    end
end
val2=val2+result*w(j)*h2;

```

```

    end
    val1=val1+val2*w(i)*h1;
end

Ak=val1;

end

```

Algoritmo para montagem da vetor **b**:

Esse algoritmo calcula o vetor **b** para apenas um elemento do domínio, a saber (iU , iV).

```

function [bk]=VetorF(knotVectorU ,knotVectorV ,tableU ,tableV ,pU,pV, ...
    ptsctrl , pesos ,nosU ,nosV ,iU ,iV)

%limites do elemento
linf1=nosU(iU);
lsup1=nosU(iU+1);
linf2=nosV(iV);
lsup2=nosV(iV+1);

%numero de funcoes base
nobU=size(knotVectorU,2)-pU-1;
nobV=size(knotVectorV,2)-pV-1;

PC=cell(1,nobU*nobV);
for l=1:nobU*nobV
    PC{1,l}=ptsctrl(1,:);
end
PC=reshape(PC,nobU,nobV);
matrizpesos=reshape(pesos,nobU,nobV);

% valores utilizados pela integracao de Gauss
s = [-0.906179845938664 , -0.538469310105683 , 0 , ...
    0.538469310105683 , 0.906179845938664 ];
w = [0.236926885056189 , 0.478628670499366 , 0.568888888888889 , ...
    0.478628670499366 , 0.236926885056189 ];

h1=(lsup1-linf1)/2;
m1=(linf1+lsup1)/2;
s1=s*h1+m1;

h2=(lsup2-linf2)/2;
m2=(linf2+lsup2)/2;
s2=s*h2+m2;

val1=zeros(nobU*nobV,1);
for i=1:5
    val2=zeros(nobU*nobV,1);
    for j=1:5
        result=zeros(nobU*nobV,1);
        [NU,dNU]=Bspline_pontual(knotVectorU , pU , s1(i));
        [NV,dNV]=Bspline_pontual(knotVectorV , pV , s2(j));
        N=NU*NV' .*matrizpesos;
    end
end

```

```

DNU=dNU*NV' .* matrizpesos;
DNV=NU*dNV' .* matrizpesos;
sN=sum(sum(N));
sDNU=sum(sum(DNU));
sDNV=sum(sum(DNV));
DNU= (sN*DNU-N*sDNU)/(sN^2);
DNV= (sN*DNV-N*sDNV)/(sN^2);
N=N/sN;
for k=1:pU+1
    for l=1:pV+1
        DF=zeros(2,2);
        for ix=1:pU+1
            for iy=1:pV+1
                DF(:,1)=DF(:,1)+...
                    DNU(tableU(ix,iU),tableV(iy,iV))...
                    *PC{tableU(ix,iU),tableV(iy,iV)}';
                DF(:,2)=DF(:,2)+...
                    DNV(tableU(ix,iU),tableV(iy,iV))...
                    *PC{tableU(ix,iU),tableV(iy,iV)}';
            end
        end
        [S]=ponto_na_superficie(knotVectorU,knotVectorV,pU,pV,ptsctrl,...
            pesos,s1(i),s2(j));
        result(nobU*(tableU(k,iU)-1)+tableV(1,iV))=...
            fct_direita(S(1),S(2))*N(tableU(k,iU),tableV(1,iV))*abs(det(DF));
    end
end
val2=val2+result*w(j)*h2;
end
val1=val1+val2*w(i)*h1;
end

bk=val1;

end

```