

Universidade Federal Do Espírito Santo  
Centro Tecnológico  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Pedro Vinicius Moreira Pereira

Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz

Vitória – ES  
2016

Pedro Vinicius Moreira Pereira

Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA-ES  
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial Tecnológica,  
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

P436c Pereira, Pedro Vinicius Moreira, 1991-  
Comparação entre duas formulações do método dos elementos de contorno : a que faz integração direta e a que usa solução fundamental dependente da frequência em problemas bidimensionais governados pela equação de Helmholtz / Pedro Vinicius Moreira Pereira. – 2016.  
99 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Coorientador: Luciano de Oliveira Castro Lara.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –  
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Métodos de elementos de contorno. 2. Helmholtz, Equação de. 3. Solução fundamental dependente da frequência. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Lara, Luciano de Oliveira Castro. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. IV. Título.

CDU: 621

---

Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro Tecnológico  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

Comparação entre duas formulações do Método dos Elementos de Contorno: a que faz Integração Direta e a que usa Solução Fundamental Dependente da Frequência em Problemas Bidimensionais Governados pela Equação de Helmholtz

Pedro Vinicius Moreira Pereira

COMISSÃO EXAMINADORA

---

**Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto – Orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEM/UFES

---

**Prof. Dr. Luciano de Oliveira Castro Lara – Co-orientador**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEM/UFES

---

**Prof. Dr. Antônio Manoel Ferreira Frasson – Examinador Interno**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEE/UFES

---

**Prof. Dr. Julio Tomás Quije Chacaltana – Examinador Externo**  
Universidade Federal do Espírito Santo – DEA/PPGEA/UFES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 02 de Setembro de 2016.

## **Resumo**

Com a meta de validar uma nova técnica de solução do Método dos Elementos de Contorno para problemas de Helmholtz, denominada Técnica com Integração Direta (MECID), esta é comparada a formulação clássica do Método dos Elementos de Contorno, que utiliza como função auxiliar a solução fundamental do problema acústico correlato (MECFD), em cujo argumento figura a própria frequência de excitação. Empregando uma estrutura matemática bem distinta da formulação clássica, a MECID emprega funções de base radial para aproximar o termo de inércia e sua metodologia já foi aplicada com êxito em problemas mais simples, associados aos problemas de Poisson. A comparação se baseia na resolução numérica de alguns problemas regidos pela Equação de Helmholtz, que possuem solução analítica conhecida.

**Palavras-chave.** Método dos Elementos de Contorno, Equação de Helmholtz, Solução fundamental dependente da frequência.

## **Abstract**

Seeking validate a solution technique for Helmholtz problems, the Boundary Element Method with Direct Integration, in which applies radial basis functions to approach the inertia term, is used to solve numerically problems governed by Helmholtz equation. To compare results, it is used the standard Boundary Element formulation which uses the fundamental solution correlated to Helmholtz Equation and has the frequency of excitation as argument. Examples solved with both Boundary Element formulations are compared with available analytic solutions.

**Keywords.** Elements Method, Helmholtz Equation, Frequency Dependent Fundamental Solution Formulation, Approximation using Radial Basis Functions

## Lista de Figuras

Figura 1 - Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero com argumentos complexos no intervalo $z = [0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.....	29
Figura 2 - Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um com argumentos complexos no intervalo $z = [0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.....	30
Figura 3 – Contorno dividido em elementos lineares.....	32
Figura 4 - Elemento retilíneo com extrapolação constante da variável prescrita. ....	32
Figura 5 - Coordenadas adimensionais da Quadratura de Gauss. ....	33
Figura 6 – Elemento linear com extrapolação constante e simetria radial. ....	34
Figura 7 – Integral da Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero no intervalo $[0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa. ....	35
Figura 8 - Elemento retilíneo com interpolação linear das variáveis prescritas. ....	36
Figura 9 – Representação da transformação de coordenadas para a integração numérica do elemento linear com interpolação retilínea. ....	37
Figura 10 - Integral da função $-zk_1(z)$ no intervalo $[0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa. ....	39
Figura 11 - Condições de contorno para o problema da barra elástica carregada. ....	52
Figura 12 – Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de interpolação linear, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). ....	53
Figura 13 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial e derivada no contorno do problema da barra elástica simulado com 80 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente. ....	55
Figura 14 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). ....	56
Figura 15 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial e a derivada normal do contorno do problema da barra elástica simulado com 80 elementos de contorno, à esquerda com elementos de extrapolação constante.....	57
Figura 16 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de interpolação linear utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). ....	58
Figura 17 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de extrapolação constante utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). ....	59

Figura 18 – Simulação da solução do primeiro problema pelo MECID com elemento de interpolação linear e $fr = r2ln(r)$ como função de interpolação radial para o potencial. ....	60
Figura 19 – Comparação entre a curva de erro médio ponderado obtido pelo MECID e o pelo MECFD para o potencial da variável básica nas malhas de 160 elementos. ....	61
Figura 20 - Condições de contorno para o problema da membrana carregada. ....	62
Figura 21 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de interpolação linear, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	64
Figura 22 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	65
Figura 23 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de interpolação linear utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	66
Figura 24 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de extrapolação constante utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). ....	67
Figura 25 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial do problema da membrana carregada simulado com 320 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente e a direita com elementos de extrapolação constante.....	68
Figura 26 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para a derivada normal do problema da membrana carregada simulado com 320 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente e a direita com elementos de extrapolação constante. ....	69
Figura 27 – Erro médio ponderado para diferente quantidade de pontos internos de interpolação utilizando frequência de excitação de $1, 5\pi$ pelo MECID (Barcelos, 2014). ....	70
Figura 28 - Erro médio ponderado para malhas de diferentes refinamentos pelo MECID. Simulações realizadas por (Loeffler, Mansur, Barcelos, & Bulcão, 2015).....	71
Figura 29 – Erro médio ponderado (verde), erro médio absoluto (azul) e valor máximo analítico (vermelho) para a simulação com uma malha de 320 elementos de contorno pelo MECID, com resultados da derivada normal no contorno do problema.....	72
Figura 30 – Condições de contorno para problema da membrana circular carregada. ....	73
Figura 31 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de interpolação linear, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	74
Figura 32 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	75
Figura 33 Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de interpolação linear e utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).....	76
Figura 34 Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e utilizando apenas a parte real	

da matriz do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo). .....	77
Figura 35 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valor máximo analítico (curva vermelha) dos valores de potencial interno para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e interpolação linear. ....	78
Figura 36 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valor máximo analítico (curva vermelha) dos valores da derivada normal para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e interpolação linear. ....	79
Figura 37 - Máxima percentagem de erros nas Abordagens 1 e 3 versus frequência de excitação (Zhu & Zhang, 2007). ....	80
Figura 38 - Máxima percentagem de erros da Abordagem 2 versus frequência de excitação (Zhu & Zhang, 2007). ....	80
Figura 39 – Geometria simplificada do terceiro problema para a solução pelo MECID. ....	81
Figura 40 - Erro médio ponderado calculado para o MECID com o uso de malhas de: 60 elementos de contorno, 118 pontos fonte internos e 226 polos internos (curva verde); 120 elementos de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva preta); 120 elementos de contorno, 511 pontos fonte internos e 511 polos internos (curva laranja); e 239 elementos de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva azul). ....	82
Figura 41 – Comparativo do erro médio ponderado do MECID com o MECFD com uso de malhas de 60 elementos de contorno, 118 pontos fonte internos e 226 polos internos (curva verde); 120 elementos de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva preta); e 120 elementos de contorno, 511 pontos fonte internos, e 511 polos internos (curva laranja) para o MECID e 40 elementos de contorno (curva roxa) e 320 elementos de contorno (curva vermelha) para o MECFD. ....	83
Figura 42 - Gráficos das funções de Bessel de primeira espécie (esquerda) e segunda espécie (direita) para as primeiras ordens, gerados na página do Wolfram (WolframAlpha.com). ....	95
Figura 43 - Gráficos das funções de Bessel modificada de primeira espécie (esquerda) e segunda espécie (direita) para as primeiras ordens, gerados na página do Wolfram (WolframAlpha.com). ....	98

## Lista de Abreviaturas e Símbolos

FBR – Funções de Base Radial.

MEC – Método dos Elementos de Contorno.

MECDR – Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade.

MECFD – Método dos Elementos de Contorno com Formulação Direta.

MECID – Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta.

MEF – Método dos Elementos Finitos.

$\omega$  – Frequência de excitação.

$\omega_n$  – Frequência natural de vibração.

$\Omega$  – Domínio.

$\Gamma$  – Contorno.

$\Delta(\xi; x)$  – Função Delta de Dirac.

$J_\nu(z)$  – Função de Bessel de primeira espécie e ordem  $\nu$ .

$Y_\nu(z)$  – Função de Bessel de segunda espécie e ordem  $\nu$ .

$I_\nu(z)$  – Função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem  $\nu$ .

$K_\nu(z)$  – Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem  $\nu$ .

$H_\nu^{(1)}(z)$  – Função de Bessel de terceira espécie, ou Função de Hankel, de ordem  $\nu$ .

$H_\nu^{(2)}(z)$  – Função de Bessel de terceira espécie, ou Função de Hankel, de ordem  $\nu$ .

## Sumário

1. Introdução .....	13
1.1. Objetivo .....	15
1.2. Metas Decorrentes .....	15
1.3. Metodologia .....	15
1.4. Contexto Histórico .....	16
2. Equações de Campo Escalar Generalizado .....	18
2.1. O problema da Acústica .....	21
2.2. Solução Harmônica da Equação da Onda .....	25
3. Método dos Elementos de Contorno com Formulação Direta .....	27
3.1. Elemento com Extrapolação Constante .....	32
3.2. Elemento com Interpolação Linear .....	36
3.3. Solução do Sistema Linear resultante utilizando apenas parte real da matriz .....	41
4. Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta .....	43
4.1. Formulação Matemática .....	43
4.2. Formação da Matriz de Inércia .....	46
5. Simulações Numéricas .....	50
5.1. Primeiro Problema .....	51
5.1.1 Simulações MECFD com interpolação linear .....	53
5.1.2 Simulações MECFD com interpolação constante .....	56
5.1.3 Simulações MECFD com interpolação linear e parte real da matriz .....	57
5.1.4 Simulações MECFD com interpolação constante e parte real da matriz .....	59
5.1.5 Simulações MECID com elementos isoparamétricos lineares .....	60
5.2. Segundo Problema .....	62
5.2.1 Simulações MECID com elementos isoparamétricos lineares .....	63
5.2.2 Simulações MECFD com elementos constantes .....	65
5.2.3 Simulações MECFD com elementos isoparamétricos e parte real .....	66
5.2.4 Simulações MECFD com elementos constantes e parte real .....	67
5.2.5 Comparativo de entre as medidas de erro .....	68
5.2.6 Simulações MECID com elementos isoparamétricos lineares .....	70
5.3. Terceiro Problema .....	72
5.3.1 Simulações MECFD com interpolação linear .....	74
5.3.2 Simulações MECFD com interpolação constante .....	75
5.3.3 Simulações MECFD com elementos com interpolação linear e parte real .....	76

5.3.4 Simulações MECFD com elementos com interpolação constante e parte real .....	77
5.3.5 Comparativo de entre as medidas de erro .....	78
5.3.6 Simulações com função de Neumann .....	79
5.3.7 Simulações com a MECID .....	81
6. Conclusões .....	85
7. Referências .....	88
Apêndice A - Equação da Acústica para Pressão e Densidade .....	92
Apêndice B - Demonstração que a Solução Fundamental para o Problema de Helmholtz atende a Solução da Equação do Problema Correlato .....	92
Apêndice C - Funções de Bessel .....	94
Apêndice D - Funções de Bessel Modificadas .....	97

## 1. Introdução

O conhecimento humano evolui constantemente e a tecnologia acompanha essa evolução. Nos últimos séculos, as pessoas que antes se locomoviam há tração animal ou por navios feitos de madeira pelos oceanos, hoje viajam em automóveis potentes ou aviões a milhares de quilômetros da superfície. Internet, métodos de fabricação, materiais, os exemplos são numerosos. A tecnologia evolui e traz novos desafios, e é cada vez mais necessário entender o mundo ao nosso redor.

Computadores potentes e acessíveis contribuíram para esse novo mundo tecnológico, definindo novas fronteiras nos mais variados campos, e permitiu o fácil acesso a ferramentas e softwares que hoje fazem parte do cotidiano. As indústrias também investiram pesado nessas ferramentas tecnológicas de ponta e estão sempre a explorar novas fronteiras em busca de produtos e serviços de maior qualidade com menores preços.

O acesso a máquinas mais eficazes reduziu o tempo de processamento dos cálculos, tornando possível o uso de métodos matemáticos já desenvolvidos há muito tempo, mas que ainda, até pouco tempo, eram pouco explorados por falta de processadores computacionais adequados. A popularização dessa tecnologia também torna maior o esforço em desenvolver pesquisas e aprimorar a exatidão dessas ferramentas computacionais, ao mesmo tempo em que intenta a redução do custo computacional despendido.

A modelagem numérica e computacional é uma área da matemática na qual se encontram vários métodos para se determinar aproximadamente soluções de problemas modelados matematicamente. De forma mais ampla, a busca de soluções aproximadas tem sido importante na resolução destes problemas, quando não existe a possibilidade de resolvê-los por técnicas exatas.

Os métodos numéricos são essenciais para resolver problemas complexos e em larga escala relacionados à engenharia. Ferramentas numéricas podem ser construídas para que, de forma simples, se solucione um problema que demandaria uma quantidade numerosa de profissionais e de tempo. Essas ferramentas são utilizadas na indústria, centros de pesquisas e universidades para automatizar os cálculos e fornecer resultados rápidos e confiáveis, eliminando erros simples que possam ser cometidos por humanos.

Alguns problemas comuns são regidos por equações de difícil solução, que envolvem muitas variáveis e também árduo desenvolvimento algébrico. Mesmo os problemas aparentemente triviais podem, na prática, ser insolúveis para determinadas geometrias. Mas a maior parte dos problemas concretos são, em geral, complexos e envolvem fenômenos não lineares. É comum encontrarem-se situações em que os conhecimentos matemáticos disponíveis não são suficientes para a descoberta da solução analítica de um problema real. Assim, deve-se fazer uso de um método numérico para obter a solução aproximada de um modelo ou sistema exato condizente com o problema.

Para a viabilidade da utilização desses métodos em problemas reais, deve haver minimização dos erros de aproximação e redução do tempo de processamento, para que os métodos numéricos possam dar soluções úteis em tempos cada vez mais curtos, se

tornando assim aceitáveis para aplicações na indústria, cada vez mais dinâmica e exigente quanto à exatidão dos resultados.

Os principais métodos numéricos são baseados na ideia de discretização (Brebbia, 1978). Isto significa que a representação do meio contínuo e infinito é aproximada por uma quantidade finita e matematicamente consistente de pontos. Quanto à discretização, esses métodos podem ser classificados em discretização de domínio ou contorno. O primeiro é representado por um conjunto de pontos em todo domínio do problema (inclusive no contorno), e o segundo apenas no contorno.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), em especial, requer a discretização do problema apenas em seu contorno, reduzindo em uma a dimensão do problema (Brebbia, et al., 1984). Assim, num problema com domínio bidimensional, a discretização se reduz somente a linha que define o contorno; num problema tridimensional, a discretização se reduz à superfície que contorna o domínio. Isso se dá através da obtenção da forma inversa da equação de governo a ser resolvida, onde é aplicado o Teorema da Divergência (Stewart, 2013). Comparado à análise de um método de domínio do tipo similar ao Método dos Elementos Finitos (MEF) (Zienkiewicz, 1977), uma análise de contorno resulta em uma substancial redução na preparação dos dados e um sistema algébrico de equações menor, a ser resolvido numericamente.

Uma das mais bem sucedidas classes de aplicação do MEC é governada pela Equação de Campo Escalar Generalizada (Loeffler, 1988), que inclui muitos problemas importantes da Engenharia e da Física Matemática. Nesta, se incluem problemas harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas elásticas, eletromagnéticas e acústicas, que são modelados por uma equação diferencial parcial de segunda ordem, denominada Equação de Helmholtz (Butkov, 1968). A solução fundamental da equação de Helmholtz para a formulação clássica do MEC (Brebbia & Walker, 1980) é referente à função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero (Abramowitz & Stegun, 1964), e tem entre os argumentos a distância radial Euclidiana e a frequência de excitação.

A formulação proposta para comparação, o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID) (Loeffler, et al., 2015a), se baseia na utilização de funções de base radial plena ou compacta (Buhmann, 2003) para a interpolação de cargas de domínio atuantes em um corpo. Tais funções são hoje largamente aplicadas nos procedimentos de aproximação com os mais diversos métodos e são muito versáteis. Através de um procedimento matemático artificioso, mostrado no decorrer deste trabalho, os termos referentes às cargas de domínio são transformados de modo a ser integrados apenas no contorno do problema, com o uso da solução fundamental referente ao problema de Laplace (Brebbia, 1978), mais simples que a solução do problema correlato de Helmholtz. Ressalta-se que o procedimento MECID, embora recente, já foi implementado com êxito nos problemas de Poisson (Pereira, 2014; Loeffler, et al., 2015a) e Helmholtz (Loeffler, et al., 2015b). O MEC com a solução fundamental correlata ao problema de Helmholtz, conhecida como formulação direta (MECFD), será aplicado na solução de problemas que possuem solução analítica de forma a comparar os resultados obtidos com o MECID. Uma atenção

especial é dada em relação ao erro obtido na resposta numérica em função da discretização utilizada e outros aspectos numéricos importantes.

### **1.1.Objetivo**

Desenvolver uma comparação entre duas diferentes formulações baseadas no Método dos Elementos de Contorno para melhor atestar a eficiência delas na solução de problemas governados pela Equação de Helmholtz em duas dimensões. Particularmente, busca-se avaliar qualitativa e quantitativamente o desempenho da formulação do Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID), que por ser uma formulação alternativa e recente do MEC, precisa ter sua eficiência melhor examinada.

### **1.2.Metas Decorrentes**

Caso seja comprovada a viabilidade e relativa eficiência do MECID na solução dos problemas de Helmholtz em duas dimensões, através de comparações com a formulação do MEC que usa a solução fundamental correlata ao problema de Helmholtz (MECFD) e da solução analítica dos problemas simulados, procurar-se-á tornar esse método uma alternativa para as atuais técnicas relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno que são aplicadas para solução dos problemas de Helmholtz, tais como as integrações em células (Brebbia, 1978), e a formulação com Dupla Reciprocidade (Partridge, et al., 1992; Kythe, 1995). Espera-se que essa formulação apresente exatidão em seus resultados e velocidade de processamento de dados satisfatória, de forma a se tornar uma opção viável na solução de tais problemas.

Devido às características de construção dos sistemas lineares do MECID, esse método permite o cálculo de autovalores e uma flexibilidade de construção de matrizes dada pelas funções de base radial (FBR) que podem ser escolhidas dentre uma grande variedade, e também permitem o uso de suporte compacto.

Conforme já mencionado, a MECID já se mostrou eficiente na solução de problemas de Poisson, assim, aferindo a qualidade do método para problemas de Helmholtz espera-se desenvolver uma formulação flexível e efetiva na modelagem de problemas dinâmicos, particularmente os problemas de análise sísmica. Entretanto, antes de chegar à plenitude deste objetivo, é importante aferir as suas potencialidades resolvendo-se problemas governados pela equação de Helmholtz, envolvendo cálculo de autovalores ou resposta acústica e os casos dependentes do tempo, que se constituem em seguimento natural deste trabalho.

### **1.3.Metodologia**

A proposta metodológica deste trabalho se inicia com a discretização da equação integral através de elementos de contorno, tanto constantes quanto lineares, seguindo a geração de um sistema algébrico de equações que é montado na forma de um sistema matricial. Este é resolvido para diferentes valores da frequência de excitação, conseguindo-se estabelecer um espectro de resposta no qual os valores

das frequências naturais podem ser identificados e comparados com os valores dados por expressões analíticas e também por diferentes métodos numéricos. Também para as mesmas frequências é possível comparar diferentes refinamentos nas malhas de contorno e analisá-los quanto à convergência do erro em relação ao valor analítico.

Com o intuito de melhor comparar a solução obtida pelo MECID com as obtidas pelo MECFD para problemas de Helmholtz, foram propostos para solução numérica problemas simples e com geometria simplificada, para os quais as soluções analíticas são conhecidas. A solução obtida através das simulações com os métodos numéricos será comparada àquela encontrada através da solução analítica, já estabelecido um critério de erro médio percentual para cada frequência de excitação. A qualidade da resposta será então representada pela exatidão alcançada através do erro médio para cada frequência.

Em se tratando de métodos discretos, é importante aferir os efeitos do refinamento da malha e do aumento do número dos pontos de informação ou interpolação, usados nas formulações que usam funções de base radial para aproximar o termo de domínio com mais exatidão. Portanto, para o MECID várias malhas compostas de diferentes quantidades de pontos de contorno e pontos internos de interpolação foram utilizadas. Já para o MECFD houve apenas o refinamento da malha, uma vez que não há necessidade de pontos internos interpolantes para esse método.

Devido ao erro apresentado nas soluções do MEC não ser uniforme na geometria do problema, o erro utilizado em cada configuração de teste foi o erro médio aritmético de todos os pontos amostrais. A medida de erro adotada para cada ponto foi dada pela diferença entre o valor obtido numericamente e o valor obtido analiticamente.

#### **1.4.Contexto Histórico**

O primeiro trabalho rigoroso em equações integrais foi publicado por Fredholm (1905). Cerca de 60 anos mais e a aparição dos computadores digitais modernos foi necessária para produzir métodos numéricos baseados naquelas formulações “clássicas”. O começo da formulação direta do MEC pode ser considerado nos três trabalhos de Jaswon(1963), Symm (1963) e Jaswon e Ponter (1963) para problemas potenciais estáticos, e no trabalho de Rizzo (1967), para elastostática.

O desenvolvimento inicial do MEC em dinâmica foi independente dos trabalhos mencionados de Jaswon, Ponter, Symm e Rizzo na formulação direta do método. O trabalho de Banaugh e Goldsmith (1963b), que trata do estado permanente de problemas planos da elastodinâmica, é possivelmente a primeira aplicação do MEC na dinâmica. Entretanto, da mesma época, tem-se os trabalhos de Friedman e Shaw (1962) e Banaugh e Goldsmith (1963a) que tratam da equação da onda escalar e podem ser considerados como estudos do movimento anti-plano na eletrodinâmica.

Foi em 1968 quando Cruse e Rizzo (1968) e Cruse (1968) derivou o MEC direto em conjunto com a transformada de Laplace para solucionar problemas transientes de

elastodinâmica. No mesmo ano, Wheeler e Sternberg (1968) definiam a base teórica para o MEC em elastodinâmica, em particular, em aspectos relacionados a abordagem de domínios infinitos. Anos mais tarde Manolis e Beskos (1983) aperfeiçoaram o método de Cruse e Rizzo para solução de problemas elastodinâmica transientes em combinação com a transformada de Laplace.

A solução de problemas transientes por meio da transformada de Fourier e a formulação dos Elementos de Contorno para o domínio da frequência foi obtida por Niwa et. al. (1975; 1976). Dominguez (1978a; 1978b) pela primeira vez estudou interação de problemas de dinâmica de fundações rígidas usando a formulação da frequência de domínio do MEC.

O movimento anti-plano no domínio da frequência, o qual é governado pela equação de Helmholtz, é numericamente tratado nos trabalhos de Banaugh e Goldsmith (1963a) e Schuster e Smith (1985).

A primeira formulação do MEC para domínio de tempo geral em elastodinâmica bidimensional foi apresentada por Cole et. al. (1978), entretanto, apenas para o anti-plano. Em Mansur (1983) e Mansur & Brebbia (1982a; 1982b; 1983; 1985) se apresentou a formulação para um domínio geral de tempo e estudou questões de implementação para problemas escalares bidimensionais e de propagação de ondas elásticas em detalhe. Nardini & Brebbia (1983; 1985) derivaram a abordagem do Elemento de Contorno para problemas dinâmicos onde as matrizes de massa e de rigidez são obtidas usando as integrais da formulação estática.

Em 1986, Loeffler e Mansur apresentaram aplicações da abordagem denominada de Dupla Reciprocidade em problemas de Poisson, Helmholtz, Difusão de calor transiente e Propagação de Ondas Acústicas, nas quais se mostrou a importância de pontos internos interpolantes para o bom desempenho desta formulação. Em 1987, a Dupla Reciprocidade foi estendida aos meios infinitos (Loeffler & Mansur, 1987), usando funções radiais especiais com decaimento. Na Dupla Reciprocidade, o sistema resultante das equações de equilíbrio dinâmico é solucionado de forma similar ao MEF.

Exatamente pelos vínculos históricos entre as técnicas integrais de contorno e a teoria dos potenciais, a penetração das técnicas de contorno é bastante grande junto aos problemas de campo escalar, tais como proteção catódica, transferência de calor, escoamentos potenciais, acústica, percolação em meios porosos e outros, não obstante o emprego relevante junto à área estrutural.

Enfoques mais gerais, ligados não só à Teoria das Equações Integrais, mas também ao método dos resíduos ponderados, unificam a maior parte das técnicas numéricas mais destacadas, incluindo o Método dos Elementos Finitos, Método das Diferenças Finitas e Método dos Elementos de Contorno. Isto posiciona estas técnicas como ramificações distintas de uma mesma formulação global, o que permite melhor compreender as estruturas matemáticas envolvidas e avaliar suas potencialidades.

## 2. Equações de Campo Escalar Generalizado

Conforme exposto por Loeffler (Loeffler, 1988), os problemas de Campo Escalar são problemas físicos associados à teoria de campo ou potencial, cujo objetivo é integrar problemas presentes na natureza segundo um mesmo enfoque matemático (Moon & Spencer, 1988).

A representação matemática da vibração de um sistema massa-mola-amortecedor, o movimento de um elétron junto ao núcleo por ação da radiação eletromagnética, a oscilação de um galvanômetro e a alternância de corrente de um circuito elétrico com indutor, capacitor e resistência, são exemplos da equivalência matemática de problemas físicos distintos.

Cada ponto geométrico do domínio do problema físico estudado é associado a um valor potencial ou fluxo de potencial. Esses valores potenciais podem representar temperatura, pressão, deslocamento, campo elétrico, entre outras grandezas físicas. Os fluxos de potencial podem ser campo elétrico, campo gravitacional, campo térmico, campo de deslocamentos, ou outros. Problemas que envolvem a especificação de uma única quantidade para cada ponto no espaço são denominados problemas de campo escalar. Quando há especificação de várias grandezas que precisam de um número maior de variáveis em cada ponto no espaço para sua caracterização – como por exemplo, sentido e direção - tem-se um campo vetorial (Kreyszig, 1968).

O modelo matemático concebido pela teoria de campo pode ser interpretado geometricamente pelo estabelecimento de uma rede de linhas de fluxo e linhas equipotenciais, que representam o comportamento da grandeza física no espaço considerado.

Alguns dos problemas físicos de acordo com a ideia de campo escalar são (Brebbia & Ferrante, 1975):

- Proteção catódica
- Condução de calor
- Escoamento potencial
- Fluxo através de meios porosos
- Condução elétrica
- Difusão de massa

Problemas típicos de mecânica dos sólidos de representação mais simples podem ser incluídos nesta categoria, a saber:

- Torção uniforme de barras prismáticas na zona elástica
- Deflexão de membranas
- Escoamento de lubrificantes em mancais de deslizamento;

- Propagação, em separado, de ondas planas e cisalhantes no anti-plano (Atkin & Fox, 1980).

Os problemas físicos que se adequam matematicamente à Teoria do Campo Escalar são regidos por uma equação que pode ser obtida a partir da seguinte forma geral (Loeffler, 1992):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \lambda_1 \ddot{u} + \lambda_2 \dot{u} + \lambda_3 u + p \quad (2.01)$$

A equação (2.01) é conhecida como Equação de Campo Escalar Generalizada, onde  $u$  é o potencial,  $k$  são propriedades físicas do sistema,  $p$  é uma fonte e  $\lambda$  são as constantes definidas.

Considerando problemas bidimensionais e independentes do tempo a Equação de Campo Escalar Generalizada (equação 2.01) toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lambda_3 u + p \quad (2.02)$$

Considerando as propriedades de um meio homogêneo na equação (2.02):

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_3 u + p \quad (2.03)$$

Admitindo ainda com a hipótese de isotropia, a equação (2.03) é particularizada:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_3 u + p \quad (2.04)$$

Um caso particular importante da equação (2.04) ocorre quando  $p = 0$ , tem-se a denominada de Equação de Helmholtz.

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_3 u \quad (2.05)$$

A equação de Helmholtz (equação 2.05) pode representar um problema de autovalor quando, especificadas condições de contorno naturais homogêneas, se procuram todas as configurações auto-equilibradas possíveis do potencial (Hadley, 1972), o que ocorre para certas frequências de excitação, conhecidas como frequências naturais do sistema. Tais frequências são os autovalores e suas configurações são dadas pelas autofunções associadas aos modos naturais de vibração.

Tal equação também pode representar um caso particular da Equação da Onda, em que se busca determinar o movimento produzido no sistema por uma excitação variável,

mas cuja frequência é conhecida e dada por  $\lambda$ . O potencial  $u(X)$  dependeria apenas da posição no espaço  $X$  e não mais do tempo  $t$  e também o conteúdo vibracional passa a ser expresso de modo específico, dado pelo potencial  $u(X)$ , que significa a amplitude da resposta produzida pelo movimento de excitação imposto.

Um caso importante consiste onde o potencial multiplicado por  $\lambda$  esta derivado temporalmente na forma:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_2 \dot{u} \quad (2.06)$$

A equação (2.06) governa processos que, na prática, comumente envolvem transformações lentas, como os que caracterizam transferência de calor por condução (Özsisik, 1980; Chapman, 1967). Outra extensão da Equação de Campo dessa vez relaciona o potencial com a derivada segunda em relação ao tempo, na seguinte forma.

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = \lambda_1 \ddot{u} \quad (2.07)$$

Na prática, processos rápidos de transmissão de energia, como propagação de ondas de dilatação em meios elásticos podem ser descritos pela equação (2.07) (Wasley, 1973). Esta equação tem enorme importância prática pelas suas aplicações em eletromagnetismo, acústica e, na sísmica de prospecção.

Outro caso particular da equação (2.04) se dá quando  $\lambda_3 = 0$ , é a Equação de Poisson:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = p \quad (2.08)$$

A equação (2.08) caracteriza problemas estacionários onde há presença de fontes, fluxos ou forças de corpo no interior do domínio (Özsisik, 1977) representados pela função  $p$ , que é uma função conhecida.

Quando ambos,  $\lambda_3$  e  $p$ , são nulos na equação (2.04), tem-se o caso particular denominado por Equação de Laplace:

$$k \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (2.09)$$

Apesar de aparentemente simples, a Equação de Laplace tem enorme importância por representar problemas estacionários numerosos e seu estudo matemático permite estabelecer importantes considerações sobre o comportamento de um sistema físico representado por tal modelo. O fato de caracterizar sistemas elípticos, nos quais a resposta depende imediata e tão somente das condições de contorno, é uma delas.

## 2.1.O problema da Acústica

A Equação de Helmholtz governa problemas físicos de interesse a engenharia. Neste item, demonstrar-se-á que problemas de propagação de ondas acústicas em meios gasosos podem obedecer a tal equação, considerando simplificações.

De acordo com Butkov (1968), as experiências indicam que o fenômeno do som no ar é relacionado com a rápida oscilação da densidade do ar e pressão sobre valores médios  $\rho_0$  e  $p_0$ . Essas mudanças são causadas pelo movimento oscilatório coletivo das moléculas do ar, descritas por suas velocidades macroscópicas. Assim, considere uma pequena quantidade de ar dentro de um volume  $dV$  em um instante  $t$ . Faça-se a suposição de que  $\mathbf{v} \cong \mathbf{v}(r, t)$ , sendo  $v$  a velocidade macroscópica do ar no ponto  $r$  interior a  $dV$  no tempo  $t$ . Se  $\rho = \rho(r, t)$  é a densidade do ar no ponto  $r$  tempo  $t$ , então a força por unidade de volume é dada pela segunda lei de Newton:

$$\mathbf{F}(r, t) = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.10)$$

A força total no volume  $V$  é então:

$$\mathbf{F}_t = \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \quad (2.11)$$

Se as forças de corpo e viscosidade são desconsideradas, então a força total é referente à variação da pressão agindo sobre a superfície do volume de controle, sendo igual à integral de superfície da pressão:

$$\iiint_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = - \oint_S p d\mathbf{S} \quad (2.12)$$

Do cálculo vetorial, há relação entre a integral de superfície e volumétrica, dada por (2.13) (Stewart, 2013).

$$\oint_S p d\mathbf{S} = \iiint_V \text{grad } p dV \quad (2.13)$$

Com o fato de o volume ser arbitrário e pela substituição da equação (2.13) na equação (2.12), obtém-se a seguinte equação de equilíbrio na forma diferencial:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \text{grad } p = 0 \quad (2.14)$$

A equação da continuidade (conservação de matéria) para um volume diferencial arbitrário é dada pela equação (2.15). (Fox, et al., 2014).

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \oint_S \rho (v dS) \quad (2.15)$$

Com base no Teorema da Divergência (Stewart, 2013), e na arbitrariedade do volume  $V$ , tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.16)$$

A pressão  $p = p(r, t)$  e a densidade  $\rho = \rho(r, t)$  podem ser relacionadas. Para as frequências envolvidas nas ondas de som (20 – 20000 cps), a oscilação de  $p$  e  $\rho$  acontecem tão rapidamente que não há tempo para uma apreciável troca de calor entre dois volumes adjacentes de ar durante as oscilações. Em outras palavras, a expansão e contração do ar, provocadas pela vibração são adiabáticas e (Moran & Shapiro, 2013):

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-\gamma} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad (2.17)$$

Com  $\gamma = C_p/C_v$ . Onde  $C_p$  é o calor específico a pressão constante, e  $C_v$  é o calor específico a volume constante. Até então, dadas às hipóteses feitas, a propagação do som é governada pelas equações (2.14), (2.16) e (2.18):

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad (2.18)$$

Uma vez que a velocidade  $\mathbf{v}(r, t)$  é função de posição e tempo, a derivada  $d\mathbf{v}/dt$  é uma derivada hidrodinâmica, tem-se.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \quad (2.19)$$

Sabe-se que:

$$(\mathbf{v} \cdot \text{grad})\mathbf{v} \equiv \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \quad (2.20)$$

Serão consideradas, então, três simplificações para o modelo adotado. A primeira simplificação considera que essas equações são compatíveis de representar uma onda acústica típica de intensidade moderada. Considere uma onda de som de frequência  $500 \text{ s}^{-1}$ , onde as partículas de ar vibram com amplitude de ordem  $10^{-6} \text{ cm}$ . O comprimento de onda no ar é aproximadamente.

$$\lambda = \frac{c}{f} \cong \frac{3,3 \times 10^4 \text{ cm/s}}{500 \text{ s}^{-1}} \sim 60 \text{ cm} \quad (2.21)$$

Onde  $c$  é a velocidade do som no ar e  $f$  é a frequência. A velocidade  $v$  das partículas do ar é da ordem de:

$$v \sim 2\pi f a = 2\pi \times 500 \times 10^{-6} \sim 3 \times 10^{-3} \text{ seg}^{-1} \quad (2.22)$$

O gradiente de velocidade é da ordem de:

$$\left| \frac{\partial v_x}{\partial x} \right| \sim \frac{2\pi}{\lambda} v \cong \frac{2\pi \times 3 \times 10^{-3}}{60} \sim 3 \times 10^{-4} \text{ seg}^{-1} \quad (2.23)$$

Enquanto a taxa de variação da velocidade  $v$  é da ordem

$$\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right| \sim 2\pi f v \cong 2\pi \times 500 \times 3 \times 10^{-3} \sim 10 \text{ cm/seg}^2 \quad (2.24)$$

Como a variação temporal é uma parcela de ordem muito maior que a variação espacial, esta última pode ser desconsiderada, então, a derivada hidrodinâmica  $dv/dt$  pode ser aproximada por  $\partial v/\partial t$ .

Em uma segunda aproximação, observa-se que as mudanças relativas da densidade são muito pequenas. Se uma coluna de ar vibrar na frequência de  $500 \text{ s}^{-1}$  com  $\lambda/4$  de espessura, e então comprimida por uma quantidade  $a = 10^{-6} \text{ cm}$ , o aumento da densidade é da ordem de:

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \cong \frac{a}{\lambda/4} = \frac{10^{-6} \text{ cm}}{15 \text{ cm}} < 10^{-7} \quad (2.25)$$

Segue-se que, para um gama muito pequeno:

$$\left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( \rho_0 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^\gamma = (1 + \delta)^\gamma \cong 1 + \gamma \delta \quad (2.26)$$

E pela equação (2.18) a pressão pode ser aproximada em função da variação da densidade, assim com a equação (2.26) na equação (2.18):

$$p \cong p_0(1 + \gamma \delta) \quad (2.27)$$

Com as pequenas variações na densidade, de acordo com a relação (2.27) as mudanças relativas na pressão também são pequenas.

Finalmente, tomando-se o segundo termo da esquerda da expressão (2.16):

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \mathbf{v} \quad (2.28)$$

Como  $\rho \sim 10^{-3} \text{ gm/cm}^3$  e  $|\text{div } \mathbf{v}| \sim 3 \times 10^{-4} \text{ seg}^{-1}$ ,  $\rho \text{ div } \mathbf{v}$  é da ordem de  $10^{-7}$ . O  $|\text{grad } \rho| < 10^{-11} \text{ gm/cm}^4$  e  $v \sim 3 \times 10^{-3} \text{ seg}^{-1}$ , logo  $\mathbf{v} \cdot \text{grad } \rho$  é da ordem de  $10^{-14}$ . O termo com divergente é maior que do termo com gradiente na ordem de  $10^7$ , e para efeitos de aproximação, tem-se:

$$\text{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho_0 \text{ div } \mathbf{v} \quad (2.29)$$

Com as aproximações consideradas obtêm-se um sistema de equações que são formas simplificadas das equações (2.14), (2.16) e (2.18), mas apresentam uma boa precisão na representação do fenômeno físico:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } p = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.31)$$

$$p = p_0(1 + \gamma\delta) \quad (2.32)$$

Onde  $\rho$  foi aproximado por  $\rho_0$ , uma vez que  $\delta \sim 10^{-7}$ . Substituindo a equação (2.32) na equação (2.30) segue que:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } (p_0(1 + \gamma\delta)) = 0 \quad (2.33a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad } p_0 + p_0 \gamma \text{grad } \delta = 0 \quad (2.33b)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + p_0 \gamma \text{grad } \delta = 0 \quad (2.33c)$$

Da equação (2.25) tem-se que  $\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ . Portanto:

$$\partial \rho / \partial t = \rho_0 (\partial \delta / \partial t) \quad (2.34)$$

Substituindo a equação (2.34) na equação (2.31):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \text{div } \mathbf{v} = 0 \quad (2.35)$$

Derivando a equação (2.35) no tempo:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \text{div} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.36)$$

A equação (2.33c) pode ser reescrita de forma a evidenciar a derivada temporal da velocidade:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \text{grad } \delta \quad (2.37)$$

Substituindo a relação para a derivada temporal da velocidade da equação (2.37) na equação (2.36). Onde o divergente do gradiente é o laplaciano.

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \text{div} \left( -\frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \text{grad } \delta \right) = 0 \quad (2.38a)$$

Como  $p_0$ ,  $\gamma$ , e  $\rho_0$  são constantes:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = \frac{p_0 \gamma}{\rho_0} \operatorname{div}(\operatorname{grad} \delta) \quad (2.38b)$$

E também:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \delta \quad (2.38c)$$

Sendo que  $c^2 = p_0 \gamma / \rho_0$ .

A equação (2.38c) é a Equação da Onda Acústica, que relaciona as variações na densidade na propagação de onda no ar. Esta equação é um caso particular da Equação de Campo Escalar Generalizada, dada pela equação (2.07). A mesma Equação da Onda pode ser expressa em termos da densidade e da pressão (Apêndice A - Equação da Acústica para Pressão e Densidade), pela equação:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p \quad (2.39)$$

## 2.2. Solução Harmônica da Equação da Onda

Na análise vibracional buscam-se configurações de equilíbrio associadas a uma determinada frequência de excitação, assim toma-se a Equação da Onda Acústica e, admitindo-se movimento como gerado por uma excitação cuja frequência é conhecida, estabelece-se o campo ou potencial  $U(X, t)$  (que representa a pressão, a massa específica ou a dilatação) em função desta frequência. Para tanto, admite-se que (Prodonoff, 1990):

$$U(X, t) = u(X) e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial U(X, t)}{\partial t} = i\omega u(X) e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 U(X, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 u(X) e^{i\omega t} \quad (2.42)$$

Substituindo as equações (2.40) e (2.42) na equação da acústica (equação 2.39):

$$-\omega^2 u(X) = c^2 \nabla^2 u(X) \quad (2.43)$$

A variação do potencial agora é apenas função da posição, para uma frequência de excitação  $\omega$ ; tal equação define o problema de Helmholtz. Este consiste, em princípio, na determinação das amplitudes  $u(X)$  da resposta. Na realidade, os problemas governados pela Equação de Helmholtz podem ser divididos em três grupos; problemas diretos, problemas de autovalor e problemas inversos.

Nos problemas diretos, objetiva-se determinar as configurações de equilíbrio do potencial  $u(X)$  em função de um conjunto de condições de contorno conhecidas. É o caso abordado neste trabalho.

Nos problemas de autovalor, buscam-se encontrar todos os valores das frequências naturais, denominadas  $\omega_n$ , capazes de gerar as já mencionadas configurações auto-equilibradas no sistema.

Nos problemas inversos, determinam-se propriedades do meio perante o conhecimento das excitações de contorno e da resposta do sistema.

### 3. Método dos Elementos de Contorno com Formulação Direta

O MEC compreende uma formulação integral na qual uma função auxiliar com propriedades especiais é empregada, a solução fundamental. Entre as principais dessas propriedades especiais está o fato de ser solução de um problema correlato à equação que se deseja solucionar numericamente. Sob a ótica do Método dos Resíduos Ponderados (Brebbia & Walker, 1980) é possível associar a causa da exatidão do MEC ao fato da solução fundamental atender satisfatoriamente aos requisitos necessários a uma boa função de ponderação. Esse desempenho permite até usar elementos de contorno de baixa ordem de interpolação, como elementos constantes, e se obter bons resultados.

Existem basicamente duas maneiras de se formular matematicamente o Método dos Elementos de Contorno. A primeira delas alicerça-se na Teoria das Equações Integrais e a segunda fundamenta-se no Método dos Resíduos Ponderados. Esses métodos, embora contenham enfoques distintos, conduzem às mesmas equações, o que permite se construir um entendimento global do MEC a partir de conceitos envolvidos em ambas as formulações.

O MEC tem comprovadamente muito bom desempenho nas aplicações onde o campo de variáveis é escalar e estacionário, e mesmo em casos dependentes do tempo, quando os operadores que caracterizam matematicamente a equação de governo são auto-adjuntos. Tal desempenho está também relacionado ao fato que as formulações mais clássicas do MEC usam a solução fundamental correlata ao próprio problema que se quer resolver. Em alguns casos, como no caso da Teoria de Cascas e problemas anisotrópicos, tais soluções são difíceis de obter ou são muito extensas. Para a Equação de Helmholtz esta solução é conhecida e dependente da frequência de excitação, e é dada através de funções especiais, expressas em função de séries, conforme será apresentado doravante.

Assim, dada a Equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0 \quad (3.01)$$

Na equação (3.01),  $u(X)$  é o potencial escalar,  $\omega$  é a frequência de excitação e  $c$  é referente à velocidade de propagação acústica. Na forma integral forte (Brebbia, 1978), tem-se a equação (3.02):

$$\int u_{,ii} u^* d\Omega = -\frac{\omega^2}{c^2} \int u u^* d\Omega \quad (3.02)$$

Vê-se que no núcleo da formulação integral forte foi introduzida a função auxiliar  $u^*(\xi; X)$ , que é a solução fundamental do problema. Conforme exposto, a solução fundamental é a solução de um problema escalar governado pela equação de Helmholtz, com domínio infinito, no qual uma fonte unitária é concentrada no ponto fonte  $\xi$  e seu efeito em qualquer ponto do domínio  $X$  pode ser avaliado.

Sob a ótica do Método dos Resíduos Ponderados, o valor do potencial  $u$  é calculado aproximadamente, havendo uma diferença entre o valor do potencial obtido e a solução da equação. A minimização desse erro ocorre na forma integral, que ortogonaliza esse erro no espaço funcional gerado pela solução fundamental. A solução fundamental atende melhor a esse quesito do que funções outras como polinômios, empregadas, por exemplo, pelo Método dos Elementos Finitos, por ser a solução analítica de um problema afim.

Com o uso da regra do produto de derivadas, é possível chegar à forma Integral Fraca dada pela equação (3.03):

$$\int_{\Omega} \left[ (u_{,i} u^*)_{,i} - u_{,i} u^*_{,i} \right] d\Omega = -\frac{\omega^2}{c^2} \int u u^* d\Omega \quad (3.03)$$

Igualmente se chega à forma Integral Inversa na equação (3.04):

$$\int_{\Omega} \left[ (u_{,i} u^*)_{,i} - (u u^*)_{,i} + (u u^*_{,ii}) \right] d\Omega = -\frac{\omega^2}{c^2} \int u u^* d\Omega \quad (3.04)$$

Aplicando o teorema da divergência é possível transformar algumas das integrais de domínio da equação (3.04) em integrais de contorno:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = -\int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega - \frac{\omega^2}{c^2} \int_{\Omega} u u^* d\Omega \quad (3.05)$$

Sendo  $q = u_{,i} n_i$ ,  $u^*(\xi, X)$  a solução fundamental e  $q^*(\xi, X) = u^*_{,i}(\xi, X) n_i$ . Então.

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = -\int_{\Omega} u \left[ u^*_{,ii} + \frac{\omega^2}{c^2} u^* \right] d\Omega \quad (3.06)$$

Com base no já exposto, a solução fundamental  $u^*$  neste caso é a solução de um problema governado pela Equação da Onda, mas cuja amplitude de carregamento concentrado ( $b^*$ ) é aplicado no ponto  $\xi$  de um domínio infinito, com uma variação temporal implícita da forma  $\exp[i\omega t]$ :

$$b^* = -\Delta(\xi; X) \quad (3.07)$$

A variação temporal é omitida por ser comum a todos os termos (vide equações 2.40). A função  $\Delta(\xi; X)$  é conhecida como Delta de Dirac e representa a ação externa pontual em  $X = \xi$ . A função Delta de Dirac, ou função impulso, é a representação matemática para uma força intensa que atua em um ponto num curto intervalo de tempo. A equação que rege o problema correlato em domínio infinito pode ser escrita como:

$$\nabla^2 u^* + \frac{\omega^2}{c^2} u^* = -\Delta(\xi; X) \quad (3.08)$$

A solução da equação (3.08), que governa o problema correlato correspondente para ondas divergentes de  $\xi$  pode ser dada pela equação (3.09) (Dominguez, 1993):

$$u^* = \frac{1}{2\pi} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (3.09)$$

Onde  $K_0(z)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero, e  $r = |x - \xi|$  é a distância radial no espaço Euclidiano. Também se tem que:

$$q^* = -\frac{i}{2\pi} \frac{\omega}{c} \frac{\partial r}{\partial n} K_1 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (3.10)$$

Como o raio  $r$  é sempre real e positivo, assim como a frequência  $\omega$  e a velocidade de propagação de onda  $c$ , o argumento da função de Bessel modificada será sempre maior ou igual a zero e é um número complexo, pois nele figura a unidade imaginária  $i$ .

Tal como ocorre nos problemas governados pela Equação de Laplace, a solução fundamental e sua derivada normal, associadas ao Problema de Helmholtz apresentam singularidade para valores do raio  $r$  nulos.

É possível traçar as curvas de comportamento da solução fundamental e sua derivada, equações (3.09) e (3.10), destacando separadamente a parte real e a contraparte complexa. Na Figura 1 mostra-se o gráfico para a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero.

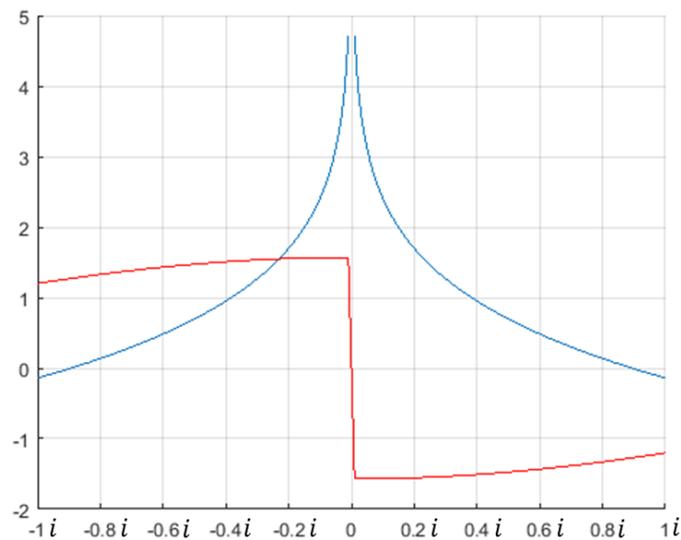


Figura 1 - Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero com argumentos complexos no intervalo  $z = [0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.

Quando o argumento  $z$  tende a zero, a parte real da função é descontínua e tem seu limite tendendo ao infinito:

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_0(z) = \infty \quad (3.11)$$

A função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um aparece na derivada normal da solução fundamental, apresentada na Figura 2. Essa função é descontínua quando o argumento tende a zero, e tem seus limites dados por:

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} K_1(z) = \infty i \quad (3.12)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} K_1(z) = -\infty i \quad (3.13)$$

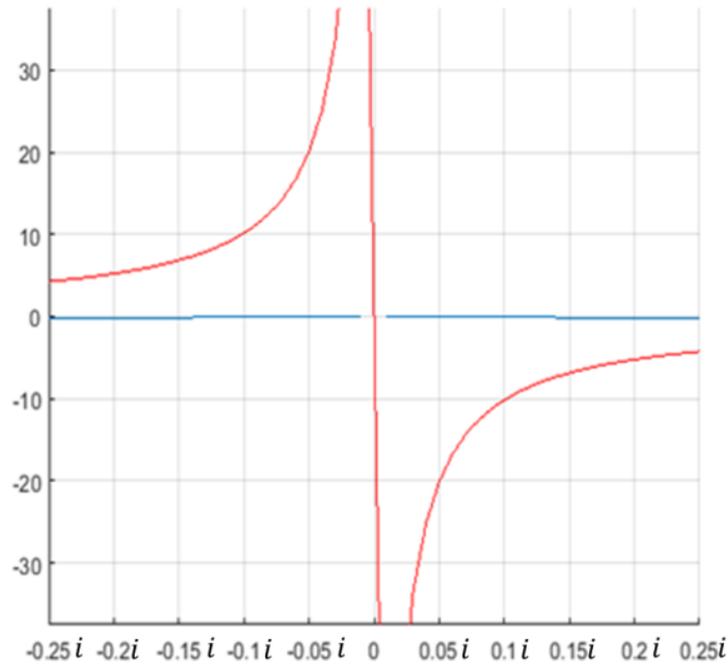


Figura 2 - Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um com argumentos complexos no intervalo  $z = [-0,25i; 0,25i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.

Com base nas propriedades da Função Delta de Dirac, o termo cujo núcleo contém a derivada de segunda ordem da solução fundamental passa a ser:

$$-\int_{\Omega} u \left[ u_{,ii}^* + \frac{\omega^2}{c^2} u^* \right] d\Omega = \int_{\Omega} u \Delta(\xi; x) u d\Omega = C(\xi)u(\xi) \quad (3.14)$$

O valor do coeficiente  $C(\xi)$  depende do posicionamento do ponto  $\xi$  com relação ao domínio físico  $\Omega(X)$  (Brebbia, 1978) e assume diferentes valores em relação à posição na geometria do problema. A equação resultante do MECFD assume a forma:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = 0 \quad (3.15)$$

A solução fundamental também pode ser dada em termos da função de Hankel ( $H_n^{(1)}$ ). Para isso deve-se levar em conta a relação entre função de Bessel modificada e função de Hankel (Abramowitz & Stegun, 1964).

A função de Hankel é uma função complexa também conhecida como função de Bessel da terceira espécie ou função de Weber, e é composta de uma combinação linear das funções de Bessel de primeira espécie ( $J_n$ ) e segunda espécie ( $Y_n$ ). Mais detalhes sobre as funções relacionadas à solução fundamental são apresentados no “Apêndice C - Funções de Bessel” e no “Apêndice D - Funções de Bessel Modificadas”.

No que se refere ao método numérico, o próximo passo consiste na discretização das equações contínuas que regem o problema. A discretização é a aproximação de um meio contínuo e infinito por uma quantidade finita de pontos, denominados nós, que neste caso significam pontos de resíduo mínimo quando se usa o Método de Colocação, aqui empregado (Brebbia, et al., 1984). Os elementos de contorno são aproximações da conformação geométrica do corpo, no caso, a fronteira deste. Quanto maior a quantidade de nós e, conseqüentemente de elementos utilizados para aproximar o meio contínuo, melhor a aproximação do modelo discreto.

$$\int_{\Gamma} d\Gamma \approx \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} d\Gamma_j \quad (3.16)$$

Conforme comentado, o MEC devido à discretização restrita ao contorno requer malhas com uma dimensão menor do que a dimensão do problema tratado. Se o problema é bidimensional, o domínio é composto por uma área, que é substituída por segmentos de linhas que definem o seu contorno. Assim, as malhas são mais simples. Para problemas não esbeltos isso representa uma grande redução na quantidade de nós da malha.

Os elementos utilizados variam em qualidade, pois alteram a representação do domínio físico do problema, podendo variar em tamanho, quantidade ou tipo. Quanto aos tipos de elementos de contorno, os mais utilizados são elementos triangulares para problemas tridimensionais e do tipo linear para problemas bidimensionais. Mas também é frequente o uso de elementos quadráticos, cúbicos e isoparamétricos em geral.

No processo de discretização, os valores da grandeza básica ou da sua derivada normal são dados para pontos particulares situados ao longo dos elementos discretos do contorno da geometria, os nós funcionais. As condições de contorno conhecidas são inseridas como valores prescritos no sistema discreto, e são interpoladas ou extrapoladas para o restante do elemento, dependendo do tipo de elemento de contorno. Assim, a aproximação dos valores dados para todo elemento é feita de acordo com o posicionamento, a ordem e o tipo de interpolação utilizada.

No caso do MEC em duas dimensões, no que tange à aproximação do campo, os tipos de elementos de contorno podem ser, por exemplo: com extrapolação constante, caso haja apenas um nó funcional centralizado e seu valor seja extrapolado para todo o elemento; com interpolação linear, tendo dois nós nas extremidades, com seus valores intermediários definidos linearmente no restante do elemento de acordo com o valor desses dois nós; isoparamétricos quadráticos, onde o campo de variáveis e a geometria

são aproximados por polinômios de segundo grau; e ainda de ordem superior, com aproximações cúbicas, quárticas, etc. Uma maior quantidade de nós funcionais por elemento pode prover melhores resultados, mas um maior refinamento da malha para elementos mais simples oferece resultados satisfatórios com menor custo computacional e programas mais simples.

As integrais de contorno da equação (3.15), até então contínuas, são aproximadas pelo somatório de um número finito de integrais referentes aos elementos discretizados. A Figura 3 mostra um exemplo de um contorno bidimensional discretizado com elementos lineares aplicados ao contorno.

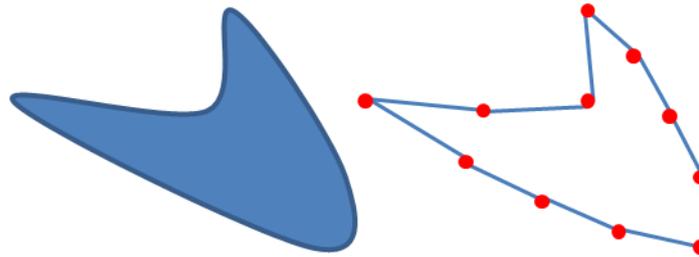


Figura 3 – Contorno dividido em elementos lineares.

Diante do exposto, pode-se, então, escrever que o contorno é aproximado por um número real e finito de  $n$  segmentos. São dois os elementos utilizados para a discretização do contorno neste trabalho: elemento de contorno retilíneo com extrapolação constante da condição de contorno; e elemento de contorno retilíneo com interpolação linear das condições de contorno dos nós funcionais. Devido às implicações das funções de interpolação na integração da solução fundamental, uma atenção especial é dada para cada tipo de elemento.

### 3.1. Elemento com Extrapolação Constante

Os elementos retilíneos com extrapolação constante possuem dois nós geométricos nas extremidades do elemento e um nó funcional comumente centralizado (centralizado neste trabalho). Os valores prescritos para todo elemento são o mesmo do atribuído ao nó funcional, assim como mostrado na Figura 4:

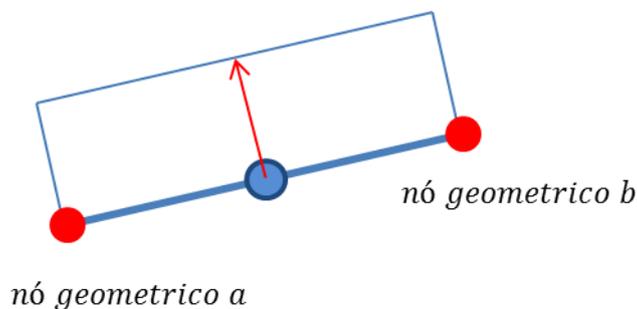


Figura 4 - Elemento retilíneo com extrapolação constante da variável prescrita.

$$u(x) = U \quad (3.17)$$

Para elementos com extrapolação constante os valores da variável de interesse não variam dentro do elemento e podem ser postos para fora da integral de contorno. Portanto a partir da equação (3.15).

$$C(\xi)u(\xi) + Q \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - U \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = 0 \quad (3.18)$$

Na equação (3.18),  $\mathbf{X}$  são pontos base, onde se localizam os nós funcionais. A solução fundamental e sua derivada normal têm integrais dadas (3.19) e (3.20):

$$G = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) d\Gamma \quad (3.19)$$

$$H = \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = -\frac{i}{2\pi} \frac{\omega}{c} \int_{\Gamma} \frac{\partial r}{\partial n} K_1 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) d\Gamma \quad (3.20)$$

As integrais de contorno representadas pelos coeficientes  $H$  e  $G$  podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente. Neste trabalho, as integrais dos elementos singulares (quando a integração é feita sobre o elemento em qual o ponto fonte está localizado) são feitas de forma analítica, enquanto as demais integrais são feitas numericamente pelo método da Quadratura Gaussiana com o uso de 20 pontos de Gauss (Franco, 2007). Essa quantidade elevada de pontos de Gauss busca garantir que os resultados não serão prejudicados pela integração numérica de funções que não são polinomiais, como as soluções fundamentais.

Usando integração numérica e tomando as coordenadas adimensionais comuns ao método da Quadratura Gaussiana,  $-1 \leq \xi \leq 1$  (Figura 5), os termos das matrizes  $G$  e  $H$ , para  $i \neq j$ , onde a integração é numérica, podem ser escritos como nas equações (3.21) e (3.22).

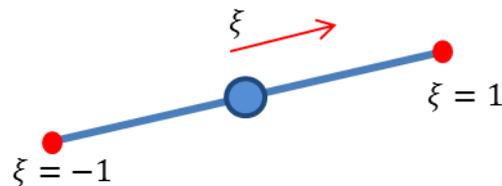


Figura 5 - Coordenadas adimensionais da Quadratura de Gauss.

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^{20} K_0 \left( i \frac{\omega r_a}{c} \right) W(k) \frac{1}{2\pi} |G| \quad (3.21)$$

$$H_{ij} = -\sum_{k=1}^{20} \left( i \frac{\omega}{c} \right) RDN K_1 \left( i \frac{\omega r_a}{c} \right) W(k) \frac{1}{2\pi} |G| \quad (3.22)$$

Nas equações (3.21) e (3.22),  $W$  são os pesos de Gauss para cada ponto,  $r_a$  é a distancia do ponto fonte até a coordenada do correspondente ponto de Gauss do somatório,  $RDN$  é a derivada normal do raio  $r_a$ . Onde  $|G|$  é o Jacobiano da transformação de coordenadas.

$$d\Gamma = |G|d\xi \quad (3.23)$$

Que para os elementos em questão é equivalente a:

$$|G| = \sqrt{\frac{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}{2}} \quad (3.24)$$

As coordenadas de subscrito  $a$  são referentes ao primeiro nó geométrico do elemento sobre o qual ocorre a integração, as de subscrito  $b$  são do segundo nó.

A integração singular, no caso de elementos retilíneos, apresenta a variação radial em relação ao normal nula, pois esses vetores são ortogonais no caso de elementos retilíneos, que são usados no presente trabalho. Portanto os coeficientes  $H_{ii}$  são zero. As integrais dos coeficientes  $G_{ii}$  são:

$$G_{ii} = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \xi) d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) d\Gamma \quad (3.25)$$

Levando em conta a localização centralizada do nó funcional no elemento de extrapolação constante e o fato da solução fundamental ter como argumento a distância radial, Figura 6:

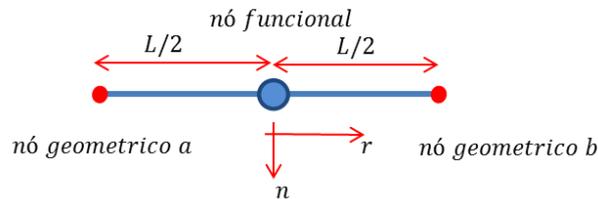


Figura 6 – Elemento linear com extrapolação constante e simetria radial.

Toma-se proveito da simetria do elemento de extrapolação constante na integração do elemento singular, a integral de contorno da equação (3.25) é equivalente a integral dada por (3.26), cujos limites de integração são de  $r = 0$  a  $r = L/2$ .

$$G_{ii} = \int_a^b \frac{1}{2\pi} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) d\Gamma = \int_0^{L/2} \frac{1}{\pi} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) dr \quad (3.26)$$

Fazendo  $t = i \frac{\omega r}{c}$  o argumento da função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero. Os limites de integração da equação (3.26) passam a ser de  $t = 0$  a  $t = \frac{i\omega L}{2c}$  e a variação do raio com a variação do argumento  $t$  se dá através da equação (3.27):

$$dt = i \frac{\omega}{c} dr \quad (3.27)$$

Assim, os coeficientes da diagonal da matriz  $G$  são:

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_0^{L/2} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) dr = \frac{1}{\pi} i \frac{c}{\omega} \int_0^{\frac{i\omega L}{2c}} K_0(t) dt \quad (3.28)$$

A integral da função de Bessel modificada de segunda espécie para pequenos argumentos é definida por (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$\int_0^z K_0(t) dt = - \left[ \gamma + \ln \frac{z}{2} \right] z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)} + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)^2} + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2(2k+1)} \left( \sum_{l=1}^k \frac{1}{l} \right) \quad (3.29)$$

Onde  $\gamma$  é a constante de Euler presente no “Apêndice C - Funções de Bessel”.

Utiliza-se da série em expansão para pequenos argumentos (Dominguez, 1993) uma vez que a velocidade de propagação da onda no meio  $c$  que figura como denominador do argumento  $t$  é um numero de ordem muito maior que o raio de integração  $r$  multiplicado pela frequência de excitação  $\omega$ , que são numerador do argumento.

Vale destacar que, assim como ocorre nos problemas de Laplace e em todos os problemas governados pela Equação de Campo quando modelados pelo Método dos Elementos de Contorno, a solução fundamental correlata ao problema de Helmholtz e sua derivada normal são singulares para  $r = 0$ , mas suas integrais, embora impróprias, são convergentes. Em outras palavras, as integrais existem. No caso da matriz  $H$ , por conta do uso de elementos de contorno retilíneos,  $H_{ii} = 0$ ; para a diagonal  $G_{ii}$ , sua integral não é divergente, conforme mostrado a seguir.

Pode-se visualizar a parte real e complexa da integral da função de Bessel de segundo tipo e ordem zero, como função do argumento  $t$ .

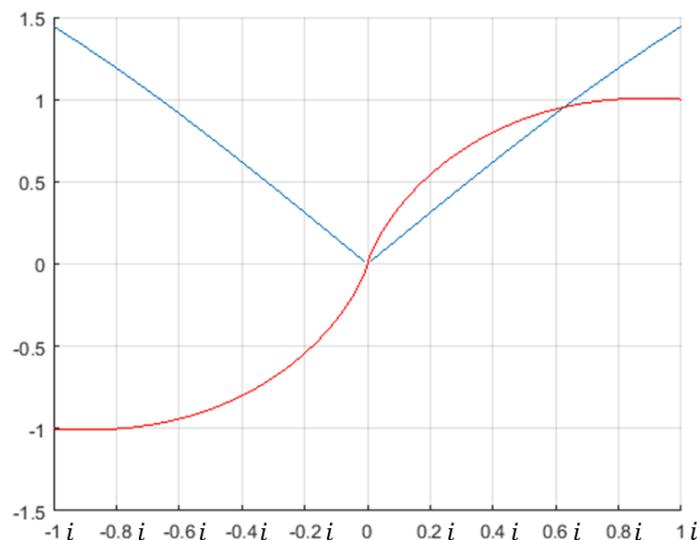


Figura 7 – Integral da Função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero no intervalo  $[0 - 1i; 0 + 1i]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.

Então:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^z K_0(t) dt = 0 \quad (3.30)$$

Alocando os pontos fonte ( $\xi$ ) nos pontos base, como procedimento padrão do MEC, é possível construir um sistema linear determinado. Para contornos não suaves, os valores de  $C(\xi)$  são dados por  $\alpha/2\pi$ , onde alfa é o ângulo em radianos, formado pela parte do contorno em contato com o domínio. Devido à localização dos pontos fonte, no meio do elemento linear,  $C(\xi)$  assume valores de  $1/2$  para os elementos utilizados.

Assim o sistema linear resultante para o MEC com elementos lineares e extrapolação constante fica na forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & \frac{1}{2} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ H_{n1} & H_{n2} & \dots & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

### 3.2.Elemento com Interpolação Linear

Os elementos retilíneos com interpolação linear possuem dois nós geométricos nas extremidades dos elementos e dois nós funcionais, que são tomados coincidentes com os nós geométricos. Os valores intermediários da variável básica para o elemento são aproximados através de uma interpolação linear dos valores dos nós, como mostrado na Figura 8.

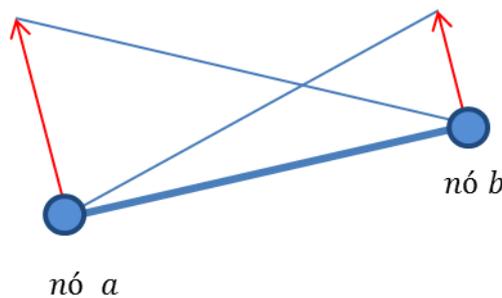


Figura 8 - Elemento retilíneo com interpolação linear das variáveis prescritas.

A interpolação dos valores do potencial nos nós funcionais para o elemento se dá através da seguinte função de interpolação:

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) U_a + \frac{x}{L} U_b \quad (3.32)$$

Onde o subscrito  $a$  é referente ao primeiro nó, tanto funcional como geométrico, do elemento sobre o qual é feita a integração, e o subscrito  $b$  ao segundo nó do

elemento. O mesmo pode ser feito com relação aos valores da derivada do potencial  $q(x)$ .

Para elementos com interpolação linear, a partir da equação (3.15).

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q_a + \frac{x}{L} Q_b \right] u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) U_a + \frac{x}{L} U_b \right] q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = 0 \quad (3.33)$$

Pode ser escrito de forma mais conveniente como:

$$C(\xi)u(\xi) + Q_a \int_{\Gamma} \left(1 - \frac{x}{L}\right) u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + Q_b \int_{\Gamma} \frac{x}{L} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - U_a \int_{\Gamma} \left(1 - \frac{x}{L}\right) q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - U_b \int_{\Gamma} \frac{x}{L} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = 0 \quad (3.34)$$

A coordenada de  $x$ , que começa no nó geométrico  $a$ , pode ser levada para o centro do elemento para coincidir com a coordenada adimensional  $-1 \leq \xi \leq 1$  dos pontos de Gauss, conforme a Figura 9.

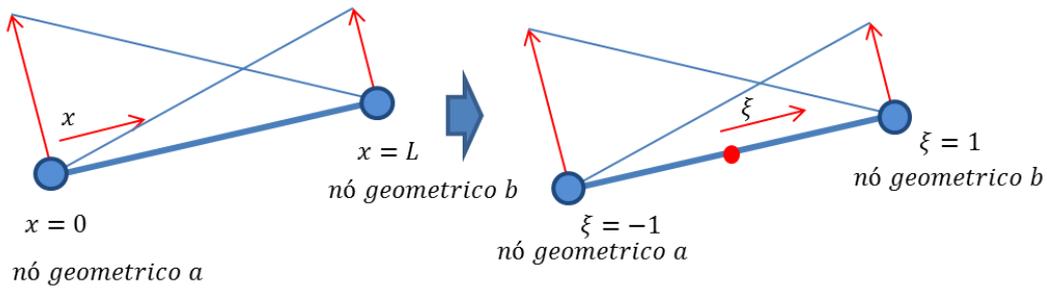


Figura 9 – Representação da transformação de coordenadas para a integração numérica do elemento linear com interpolação retilínea.

Assim a parcela da interpolação referente ao nó  $a$  pode ser transformada para as coordenadas adimensionais de Gauss, ou seja:

$$1 - \frac{x}{L} = \frac{1-\xi}{2} \quad (3.35)$$

De forma similar para o nó  $b$ :

$$\frac{x}{L} = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.36)$$

Fazendo a correspondência de coordenadas:

$$G = \sum_{k=1}^{20} \frac{1-\xi(k)}{2} K_0 \left( i \frac{\omega r_a}{c} \right) W(k) \frac{1}{2\pi} |G| \quad (3.37)$$

$$H = - \sum_{k=1}^{20} \frac{1+\xi(k)}{2} \left( i \frac{\omega}{c} \right) RDN K_1 \left( i \frac{\omega r_a}{c} \right) W(k) \frac{1}{2\pi} |G| \quad (3.38)$$

Onde  $W$  são os pesos de Gauss, conhecidos para cada ponto escolhido,  $r_a$  é o raio do ponto fonte a cada ponto de Gauss do somatório,  $RDN$  é a derivada normal do raio  $r_a$ , e  $\xi(k)$  é a posição de cada ponto de Gauss em seu sistema de coordenadas correspondente.

À medida que os pontos fontes são alocados sobre os nós geométricos, situados nas extremidades dos elementos de contorno, na ausência de nós duplos (Brebbia, et al., 1984) há a geração de coeficientes de influência de um ponto fonte (que se situa na extremidade comum) para dois elementos de contorno. Percebe-se que nos elementos constantes isto não ocorre, pois a extrapolação parte do centro para toda a extensão do elemento. Desta forma, em cada ponto fonte haverá uma integração em elemento singular em relação ao elemento anterior ao ponto em questão e uma em relação ao elemento posterior.

Para a integração singular em relação ao elemento posterior ao ponto fonte, da equação (3.33) tem-se que:

$$C(\xi)u(\xi) + Q_a \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - Q_a \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + Q_b \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - U_a \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + U_a \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - U_b \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = 0 \quad (3.39)$$

Ou de forma mais conveniente:

$$C(\xi)u(\xi) + Q_a \left( \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \right) + Q_b \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - U_a \left( \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \right) - U_b \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = 0 \quad (3.40)$$

Os coeficientes das matrizes  $G$  e  $H$  são:

$$G^a = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \quad (3.41)$$

$$G^b = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \quad (3.42)$$

$$H^a = \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma + \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \quad (3.43)$$

$$H^b = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma \quad (3.44)$$

Para a integração analítica, novamente se tem os coeficientes da matriz  $H$  iguais à zero, pois a distância radial euclidiana é sempre ortogonal ao vetor normal para o elemento singular em elementos de contorno retilíneos, portanto o  $\partial r / \partial n = 0$ .

A primeira integral na equação (3.41) é a mesma que surge na modelagem com elemento constante, tal integral existe e é convergente, não obstante ser imprópria, vide equações (3.28) e (3.29). Também é imprópria integral dada pela expressão (3.42) e que também compõe a segunda integral no lado direito da equação (3.41), essas integrais podem ser escritas por (3.45).

$$\frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = \frac{1}{L} \frac{1}{2\pi} \int_a^b r K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) dr \quad (3.45)$$

Livros especializados como Abramowitz & Stegun (1964), mostram que:

$$\int z K_0(z) dz = -z K_1(z) + cte \quad (3.46)$$

É possível verificar que o produto da função de Bessel de segunda espécie e ordem um pelo argumento  $z$  existe, não obstante a parte real deste não ser definida em  $z = 0$ , que seria um dos limites da integração efetuada ao longo do elemento. No entanto, o produto como um todo existe (parte real versus parte complexa) e procedimentos matemáticos avançados que não podem ser aqui investigados, garantem tal resultado. A Figura 10 ilustra o exposto.

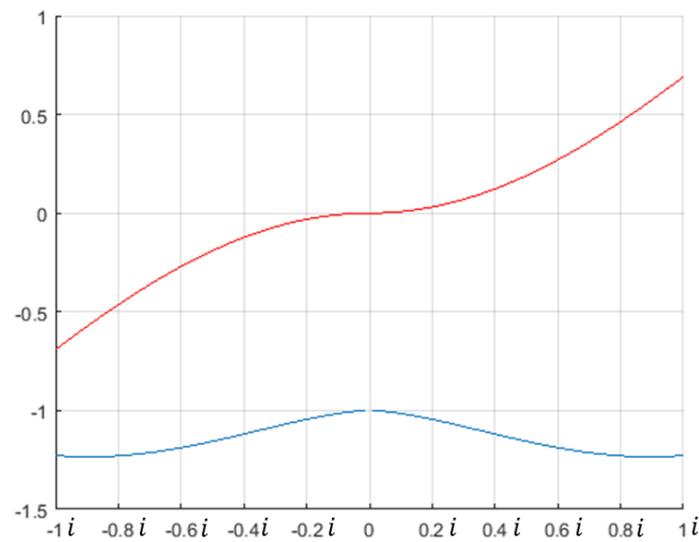


Figura 10 - Integral da função  $-z\mathbf{k}_1(\mathbf{z})$  no intervalo  $[\mathbf{0} - \mathbf{1i}; \mathbf{0} + \mathbf{1i}]$ , a curva azul é a parte real da resposta, e a vermelha a parte complexa.

Então, quando o argumento tende a zero a integral da função:

$$\lim_{z \rightarrow 0} -zK_1(z) = -1 \quad (3.47)$$

Concordando a coordenada cartesiana do elemento com a coordenada polar:

$$\int_a^b r K_0\left(i \frac{\omega r}{c}\right) dr = \frac{c}{i\omega} \int_a^b i \frac{\omega r}{c} K_0\left(i \frac{\omega r}{c}\right) dr = - \left[ \frac{c}{i\omega} i \frac{\omega r}{c} K_1\left(i \frac{\omega r}{c}\right) \right]_a^b = \left[ - r K_1\left(i \frac{\omega r}{c}\right) \right]_a^b \quad (3.48)$$

Assim a segunda integral de (3.41), também presente em (3.42), é dada por (3.49):

$$\frac{1}{L} \int_{\Gamma} r u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma = \left[ \frac{1}{L} \frac{1}{2\pi} r K_1\left(i \frac{\omega r}{c}\right) \right]_a^b \quad (3.49)$$

Para a integração em relação do elemento singular anterior ao ponto fonte, tem-se de forma similar desenvolvida para o elemento posterior:

$$C(\xi)u(\xi) + Q_a \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + Q_b \left( \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right) - U_a \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - U_b \left( \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \right) = 0 \quad (3.50)$$

Os coeficientes das matrizes  $G$  e  $H$  são:

$$G^a = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.51)$$

$$G^b = \int_{\Gamma} u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma - \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x u^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.52)$$

$$H^a = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.53)$$

$$H^b = \int_{\Gamma} q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma + \frac{1}{L} \int_{\Gamma} x q^*(\xi; \mathbf{X}) d\Gamma \quad (3.54)$$

Note que os termos integrais são os mesmo da integração singular para o elemento posterior, se diferenciando em relação ao nó referente.

Os elementos com interpolação linear apresentam dificuldades funcionais que não se apresentam nos elementos de extrapolação constante. Conforme já mencionado, pelo fato dos nós funcionais se localizarem nas extremidades, o mesmo nó funcional pertenceria a dois elementos adjacentes. Naturalmente, se esses elementos apresentassem condições de contorno diferentes, o mesmo nó precisaria ter duas condições diferentes prescritas e o uso do chamado nó duplo seria indispensável, ou seja, seria necessário o uso de mais de um nó nas posições onde há mudança de condições de contorno: um nó para cada condição de contorno em cada elemento, ambos com a mesma posição geométrica.

O uso dos nós duplos soluciona o problema de condições de contorno diferentes para elementos adjacentes, mas pode introduzir outro problema, a singularidade do sistema linear da solução. Quando ambos os nós duplos têm condições de contorno do tipo potencial prescrito (condição de contorno essencial) as linhas do sistema linear originadas por esses nós são iguais, pelo fato deles terem a mesma posição geométrica e a solução fundamental ser de base radial. Assim a matriz  $G$  teria duas linhas iguais, enquanto a vetor dos termos independentes será diferentes para essas duas linhas devido aos valores introduzidos pelo  $C(\xi)$  na matriz  $H$  e tornaria a solução do sistema impossível. Esse fenômeno não ocorre para condições de contorno de tipo diferentes, pois as linhas não serão iguais, ou ambas de fluxo prescrito (condição de contorno natural), pois a matriz  $H$  é alterada para cada linha pelo  $C(\xi)$ .

Uma solução para a singularidade criada pelo uso dos nós duplos é o afastamento desses nós. Ambos os nós são distanciados de sua posição original de modo a não possuírem mais as mesmas coordenadas. Distanciamentos muito pequenos podem persistir com a singularidade, e deslocamentos muito grandes podem descaracterizar o problema, deve-se buscar um distanciamento ideal através de testes.

O sistema linear resultante para os elementos retilíneos com interpolação linear é da forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} & N H_{12}^a & \dots & N H_{1n}^b \\ N H_{21}^b & \frac{\alpha}{2\pi} & \dots & N H_{2n}^a + N H_{2n}^b \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ N H_{n1}^a & N H_{n2}^a + N H_{n2}^b & \dots & \frac{\alpha}{2\pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} SA G_{11}^a + SP G_{11}^a & SP G_{12}^b + N G_{12}^a & \dots & SA G_{1n}^b + N G_{1n}^b \\ N G_{21}^b + SA G_{21}^a & SA G_{22}^a + SP G_{22}^a & \dots & N G_{2n}^a + N G_{2n}^b \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ SP G_{n1}^b + N G_{n1}^a & N G_{n2}^a + N G_{n2}^b & \dots & SA G_{nn}^a + SP G_{nn}^a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

Os coeficientes das matrizes  $G$  e  $H$  são compostos pelos termos integrais referentes a cada nó, como cada nó tem participação em dois elementos cada coeficiente dessas matrizes é composto de dois termos. Os termos com índice  $N$  são obtidos a partir da integração numérica,  $SA$  é referente à integração analítica no elemento singular anterior ao ponto fonte, e  $SP$  à integração analítica do elemento posterior ao ponto fonte. Quando há extrapolação constante no elemento, apenas os elementos da diagonal da matriz são integrados analiticamente, aqui, também os termos dos nós adjacentes ao ponto fonte têm um de seus termos integrados analiticamente, e outro integrado numericamente.

Outra diferença para com os elementos de extrapolação constante se dá pelo  $C(\xi)$ , este assume valores de  $\frac{1}{2}$  quando o ponto fonte se localiza no centro dos elementos retilíneos, pois o ângulo formado é sempre de  $\pi$  radianos. Para elementos retilíneos com interpolação linear este ângulo pode variar para cada ponto fonte e depende do ângulo  $\alpha$  formado entre dois elementos consecutivos.

Uma observação importante com relação ao sistema matricial linear resultante se refere ao fato de que as matrizes  $H$  e  $G$  dependem da frequência. Esta dependência impede que o MECFD se adapte facilmente à solução de um problema de autovalor, ou seja, o problema no qual se busca conhecer para quais frequências surgem configurações de equilíbrio envolvendo apenas as forças de inércia e as forças elásticas, sem excitações externas. Nestas condições, sabidamente, caso a excitação esteja com a mesma frequência que a frequência natural, o sistema responde armazenando continuamente a energia externa, produzindo o fenômeno da ressonância.

### 3.3. Solução do Sistema Linear resultante utilizando apenas parte real da matriz.

No artigo onde compara o MECDR com o MECFD, Zhu & Zhang (2007) fazem uso de duas soluções fundamentais para o MECFD, a solução fundamental que faz uso completo da função de Hankel (já apresentada) e a solução fundamental que faz uso de apenas parte real da função de Hankel (De Mey, 1976), conhecida como a função de Neumann. O argumento da função de Neumann também envolve a frequência de excitação.

A justificativa para a função de Neumann como a solução fundamental se deve a que a função de Hankel é a solução fundamental e sua parte imaginária (envolvendo a função de Bessel de primeira espécie) não possui singularidade no ponto fonte. Além disso, para um problema fechado governado pela equação de Helmholtz, nenhuma condição de contorno no infinito (usualmente algum tipo de condição de radiação, como a condição de Sommerfeld) tem de ser satisfeita pela solução fundamental. Para problemas de Helmholtz com domínio aberto, a função de Neumann deixa de possuir os atributos de uma solução fundamental, pois não atende à condição de radiação no infinito (Shaw, 1979; Tai & Shaw, 1974).

Deve-se notar que se a solução fundamental é complexa (função de Hankel) as matrizes  $H$  e  $G$  também são complexas. Além do mais, se a função de Hankel é usada como função de ponderação, as variáveis  $u$  e  $q$  devem ser assumidas como complexas também (a solução final é tomada como parte real da correspondente variável complexa).

Embora neste trabalho a solução fundamental utilizada seja em termos da função de Bessel modificada e não da função de Hankel, há uma relação entre essas funções dadas pelas equações D.05 e D.06 no “Apêndice D - Funções de Bessel Modificadas”. E entre a função de Hankel e a função de Bessel em C.03, no “Apêndice C - Funções de Bessel”.

O uso da função de Neumann favorece a simplicidade dos cálculos, uma vez que o núcleo das integrais de contorno é real, assim como todos os cálculos subsequentes. O desprezo da parte imaginária do número complexo da solução fundamental torna o espaço funcional gerado pela solução fundamental menos afim com o problema, gerando resultados menos exatos, entretanto o fato de trabalhar com números reais torna os cálculos mais simples e exigem um menor esforço computacional. Para a viabilidade do uso da função de Neumann, espera-se que a perda da exatidão da solução se mostre pequena, e haja uma simplificação dos cálculos numéricos compensatória.

Neste trabalho também se buscará uma alternativa ao uso de apenas parte real da função de Hankel, desprezando-se a parte imaginária do sistema linear final, criado pelas matrizes  $H$  e  $G$ . Assim como com o uso da função de Neumann como solução fundamental, esse procedimento torna a solução numérica completamente real abrindo mão da parte imaginária das matrizes, mas dessa vez em um passo posterior no algoritmo.

O sistema linear com uso de apenas parte real se resume a:

$$\text{real}(Hu - Gq) = 0 \quad (3.54)$$

Com a aplicação das condições de contorno, tem-se um sistema linear com solução única e determinada, onde todos os termos são reais:

$$Ax = f \quad (3.55)$$

O novo sistema linear é similar ao utilizado anteriormente, mas com todos os coeficientes reais.

#### 4. Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta

Funções escalares dependentes da distância de um ponto base a outro ponto no domínio, como as Funções de Base Radial (FBR) têm sido amplamente utilizadas para superar problemas de geração de malhas complicadas e problemas de reestruturação de malhas através de métodos adaptativos, particularmente no contexto do Método dos Elementos Finitos. Tais funções encontram respaldo sob a teoria moderna da aproximação e são eficientes, sobretudo, quando se trata de aproximar dados esparsos em várias dimensões (Buhmann, 2003).

O MEC possui ótimo desempenho em aplicações onde os operadores se caracterizam matematicamente como auto-adjuntos. No entanto, muitos problemas práticos de interesse não são expressos por operadores diferenciais com tais características. Desta forma, se buscam novos métodos para uma melhor solução desses problemas, particularmente para problemas dependentes do tempo ou com cargas no interior do domínio.

Utilizando FBRs como forma de aproximação para chegar a uma forma integral inversa, o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) (Partridge, et al., 1992) resolve equações diferenciais parciais com operadores que não são auto-adjuntos. De forma parecida com o MECDR, o Método dos Elementos de Contorno com Integração Direta (MECID) se utiliza de aproximações com FBR para aproximar o termo integral referente às ações de domínio e discretizá-lo apenas no contorno.

Todavia, diferentemente do MECDR, onde há a formação de duas matrizes auxiliares, na MECID todo o núcleo da integral de domínio do termo de inércia é interpolado e discretizado em termos de integrais de contorno, aplicando o Teorema da Divergência após empregar-se uma função primitiva da FBR. Assim, em razão de sua maior similaridade com um procedimento de interpolação simples, diferentes funções radiais podem ser utilizadas sem problemas de instabilidade numérica, comuns com a MECDR. Na MECID a quantidade de pólos internos tem uma grande importância para a exatidão do resultado, mas sendo necessário que haja uma quantidade mínima deles para o alcance de uma boa interpolação de todo núcleo da integral. Já o MECDR, que interpola apenas a variável potencial e não todo o núcleo da integral apresenta resultados melhores para quantidades pequenas de pontos de informação interna (Loeffler, et al., 2015a).

Ao realizar uma transformação que permite eliminar uma integral de domínio, há uma indiscutível perda de precisão, mas bastante aceitável para aplicações em engenharia. É uma formulação bastante flexível, podendo ser utilizada juntamente com algumas outras técnicas numéricas, tais como o ajuste interno de graus de função radiais para interpolação, através dos quais muitos pólos podem ser removidos, e se chegar a um sistema final de equações mais reduzido sem perda apreciável de precisão, de acordo com os resultados obtidos de um estudo anterior (Loeffler, et al., 2015a).

##### 4.1. Formulação Matemática

Considera-se então a Equação de Helmholtz em sua forma integral forte, conforme a equação (4.01):

$$\int u_{,ii}u^*d\Omega = -\frac{\omega^2}{c^2}\int u u^*d\Omega \quad (4.01)$$

Sua forma integral inversa (Brebbia & Walker, 1980) é dada por:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X})q^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Gamma = -\frac{\omega^2}{c^2}\int_{\Omega} u(\mathbf{X})u^*(\xi; \mathbf{X})d\Omega \quad (4.02)$$

Na MECID, a parte esquerda da equação (4.02), referente ao operador laplaciano, é tratada conforme o procedimento tradicional do MEC para Equação de Laplace e a solução fundamental utilizada nessa formulação é a referente a essa mesma equação e não à Equação de Helmholtz, conforme mostra a equação (4.03) (Brebbia & Walker, 1980).

$$u^*(\xi; \mathbf{X}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r(\xi; \mathbf{X}) \quad (4.03)$$

Naturalmente, isto representa uma perda de exatidão com relação à formulação precedente, pois à luz da análise funcional, o espaço gerado pela solução fundamental de Laplace não é tão eficaz para a minimização de resíduos numéricos num problema de Helmholtz como a sua solução fundamental correlata (vide Eq. 3.10). Entretanto, se o nível de aproximação adicional introduzido por esta simplificação for aceitável aos padrões das soluções de engenharia, há possibilidade de um ganho em flexibilidade e custo computacional, conforme será examinado no capítulo das simulações.

A integral do lado direito da equação (4.02) é referente ao termo de inércia. Nessa formulação todo seu núcleo é interpolado (equação 4.04) por funções de base radial (FBR), de forma diferente de formulações como a Dupla Reciprocidade (Partridge, et al., 1992), onde apenas o potencial é interpolado.

$$u(\mathbf{X})u^*(\xi, \mathbf{X}) = \xi \alpha^e F^e(\mathbf{X}^e; \mathbf{X}) \quad (4.04)$$

As funções utilizadas  $F^e$  são FBR, que tem como argumento a distância Euclidiana  $r(\mathbf{X}^e; \mathbf{X})$ , onde  $\mathbf{X}$  são pontos base, e  $\mathbf{X}^e$  pontos genéricos do domínio usados para as interpolações.

Outras funções que não sejam de base radial podem ser utilizadas; entretanto, as FBR apresentam propriedades vantajosas como a simetria radial e valores sempre positivos. O uso de funções radiais de suporte compacto (Floater & Iske, 1996) pode oferecer economia de processamento considerável para grande número de dados, por tornar o sistema linear correspondente a solução numérica esparsa, mas há também problemas de exatidão significativos (Zamprogno, 2013).

Desta forma, na construção da matriz  $F$ , faz-se o cálculo das funções de base radial tomando todos os pontos de interpolação  $X^e$  e relacionando-os com todos os pontos base  $X$  apenas uma vez.

$$\left[ \begin{matrix} \xi \\ \Lambda \end{matrix} \right] \{u\} = [F] \left\{ \begin{matrix} \xi \\ \alpha \end{matrix} \right\} \quad (4.05)$$

Como os coeficientes da matriz da solução fundamental mudam para cada posição do  $\xi$ , os coeficientes da interpolação radial de todo núcleo da integral de domínio referente à inércia,  $\xi \alpha$ , devem mudar com o reposicionamento de  $\xi$ . Os coeficientes das funções de interpolação de todo núcleo podem então ser obtidos para cada valor de  $\xi$  pela relação (4.06).

$$\left\{ \begin{matrix} \xi \\ \alpha \end{matrix} \right\} = [F]^{-1} \left[ \begin{matrix} \xi \\ \Lambda \end{matrix} \right] \{u\} \quad (4.06)$$

As funções de base radial utilizadas para as interpolações devem ter funções primitivas que respeitem a relação (4.07):

$$\Psi_{,ii}^e(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}) = F^e(\mathbf{X}^e; \mathbf{X}) \quad (4.07)$$

O uso de funções primitivas permite a aplicação do teorema da divergência na integral de domínio restante na equação (4.02).

$$\int_{\Omega} \left( \xi \alpha^e \Psi_{,ii}^e(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \xi \alpha^e \Psi_{,i}^e(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}) n_i(\mathbf{X}) d\Gamma = \xi \alpha^e \int_{\Gamma} \eta^e(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}) d\Gamma \quad (4.08)$$

A equação (4.02) pode ser aproximada da forma:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u(\mathbf{X}^e) q^*(\xi; \mathbf{X}^e) d\Gamma - \int_{\Gamma} q(\mathbf{X}^e) u^*(\xi; \mathbf{X}^e) d\Gamma = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[ \xi \alpha^e \int_{\Gamma} \eta^e(\mathbf{X}^e, \mathbf{X}) d\Gamma \right] \quad (4.09)$$

Para cada ponto fonte  $\xi$  a equação (4.02) se torna, para os  $n$  pontos base e  $l$  pontos interpolantes:

$$C(\xi)u(\xi) + H_{\xi_1} u_1(\xi; x_1) + \dots + H_{\xi_n} u_n(\xi; x_n) - G_{\xi_1} u_1(\xi; x_1) - \dots - G_{\xi_n} u_n(\xi; x_n) = \xi \alpha^1 \left( \int_{\Gamma_1} \eta_1^1 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^1 d\Gamma_2 + \dots + \int_{\Gamma_n} \eta_n^1 d\Gamma_n \right) + \xi \alpha^2 \left( \int_{\Gamma_1} \eta_1^2 d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^2 d\Gamma_2 + \dots + \int_{\Gamma_n} \eta_n^2 d\Gamma_n \right) + \dots + \xi \alpha^l \left( \int_{\Gamma_1} \eta_1^l d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \eta_2^l d\Gamma_2 + \dots + \int_{\Gamma_n} \eta_n^l d\Gamma_n \right) \quad (4.10)$$

Ou, agrupando a soma dos termos integrais.

$$C(\xi)u(\xi) + H_{\xi_1}u_1(\xi; x_1) + \dots + H_{\xi_n}u_n(\xi; x_n) - G_{\xi_1}u_1(\xi; x_1) - \dots - G_{\xi_n}u_n(\xi; x_n) = \xi \alpha^1 N_1 + \xi \alpha^2 N_2 + \dots + \xi \alpha^l N_n \quad (4.11)$$

Com a discretização da equação integral, feita através de procedimentos tradicionais do MEC para o termo laplaciano (Brebbia & Walker, 1980) e o tratamento para o termo referente à inércia pela formulação da Integração Direta (MECID), se obtém o seguinte sistema de equações em forma matricial, já considerando a existência de pontos internos interpolantes, cujas submatrizes estão destacadas na expressão (4.12):

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & O_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} = -\frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} {}^1\alpha^1 & \dots & {}^1\alpha^l \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}^n\alpha^1 & \dots & {}^n\alpha^l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_l \end{Bmatrix} = -\frac{\omega^2}{c^2} \begin{Bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Os índices das submatrizes indicam onde há a locação do ponto fonte  $\xi$  e em relação onde há integração. Na submatriz  $H_{ic}$  por exemplo, há a variação do ponto  $\xi$  entre os pontos do interior do domínio integrando sobre os elementos do contorno. Como não há integração do contorno sobre o interior do domínio, essas submatrizes são nulas, com exceção da matriz  $I_{ii}$  que é a matriz identidade gerada pelos valores de  $C(\xi)$  quando o ponto fonte  $\xi$  está localizado no interior do domínio e tem valor igual a “1”.

#### 4.2. Formação da Matriz de Inércia

Na equação (4.12) cada elemento do vetor A é construído de forma dada por (4.13).

$$A_\xi = \{N_1 N_2 \dots N_l\} \begin{Bmatrix} \xi \alpha^1 \\ \vdots \\ \xi \alpha^l \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Como as funções de base radial fazem aproximação do núcleo da integral de domínio, incluso o potencial, que é uma incógnita de interesse para os problemas de Helmholtz, é necessário explicitar esses valores desconhecidos do potencial nos pontos base, que estão embutidos nos vetores  $A_\xi$ . Através do procedimento proposto, também se explicitará uma matriz que é equivalente a matriz de massa em problemas de dinâmica escalar, como em problemas de acústica.

De acordo com a equação (4.06), os valores de  $A_\xi$  podem ser expressos por (4.14).

$$A_\xi = \{N_1 N_2 \dots N_l\} \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{l1} & \dots & F^{ln} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^1\Lambda^1 & \dots & {}^1\Lambda^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}^n\Lambda^1 & \dots & {}^n\Lambda^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}^a \quad (4.14)$$

Em se tratando da parte direita da equação (4.09), os pontos fonte não podem ser coincidentes com os pontos nodais, que se situam nas extremidades dos elementos de contorno e nos quais se calculam os potenciais e suas derivadas normais para elementos com interpolação linear, pois a solução fundamental é singular quando a distância euclidiana é igual a zero (vide equação 4.03). Daí, os valores do potencial e derivada normal são tomados provisoriamente no centro dos elementos. Assim, no que tange à interpolação, os pontos  $\mathbf{X}^e$  coincidem com os pontos deslocados  $\mathbf{X}$  na aproximação da integral de domínio, por razões de conveniência. Entretanto, montada a matriz de inércia do sistema, os valores do potencial de interesse devem estar explicitados para entrarem em concordância com a parte esquerda da equação (4.12). Desta forma, se utiliza uma matriz de interpolação  $\Phi$ , que estabelece uma relação entre a posição deslocada dos nós funcionais e sua posição original. O vetor de potenciais  $\{u_c, u_i\}$  representa os valores do potencial na sua posição original, no caso dos pontos de contorno, sendo usados os elementos lineares, consiste da extremidade dos elementos; quando nos pontos internos, a posição deles coincide com a posição dos pontos fonte.

$$A_\xi = \{N_1 \ N_2 \ \dots \ N_l\} \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{l1} & \dots & F^{ln} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^1\Lambda^1 & \dots & {}^1\Lambda^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}^n\Lambda^1 & \dots & {}^n\Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{cc} & 0 \\ 0 & \Phi_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

A matriz  $\Phi$  transfere os valores obtidos nos pontos  $\mathbf{X}^e$  para as coordenadas dos pontos fonte  $\xi$ .

A submatriz  $\Phi_{cc}$ , que relaciona os pontos no contorno, tem composição simples para os  $m$  pontos auxiliares de contorno. Tomaram-se os valores centralizados como a média dos valores nodais nos extremos dos elementos para discretização com elementos lineares:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{aux} \\ u_2^{aux} \\ \vdots \\ u_m^{aux} \end{Bmatrix}^{cont} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^\xi \\ u_2^\xi \\ \vdots \\ u_m^\xi \end{Bmatrix}^{cont} \quad (4.16)$$

Para os pontos internos, na submatriz  $\Phi_{ii}$ , foi preciso tomar uma estratégia mais elaborada, na qual foram usadas interpolações com funções de base radial para relacionar os pontos internos que serão usados como ponto fonte (onde é de interesse obter a solução numérica) e os pontos internos auxiliares que serviram apenas como pontos interpoladores. O procedimento para o cálculo da submatriz  $\Phi_{ii}$  consiste das etapas descritas a seguir.

Inicialmente, se determinam os coeficientes  $\alpha$  referentes à interpolação dos  $q$  pontos fontes internos:

$$\begin{pmatrix} u_1^\xi \\ u_2^\xi \\ \vdots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^{int} = \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^{int} \quad (4.17)$$

É possível escrever a relação (4.17) em função dos coeficientes de interpolação dos pontos internos  $\alpha_{int}$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^{int} = \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ u_2^\xi \\ \vdots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^{int} \quad (4.18)$$

De posse dos coeficientes  $\alpha_{int}$  é possível determinar os  $q$  pontos internos auxiliares ou pólos interpolantes:

$$\begin{pmatrix} u_1^{aux} \\ \vdots \\ u_s^{aux} \end{pmatrix}^{int} = \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{s1} & \dots & F^{sq} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}^{int} \quad (4.19)$$

É também possível estabelecer uma relação direta entre os  $s$  pontos fonte do interior com os  $q$  pontos internos auxiliares substituindo a equação (4.18) na (4.19).

$$\begin{pmatrix} u_1^{aux} \\ \vdots \\ u_s^{aux} \end{pmatrix}^{int} = \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{s1} & \dots & F^{sq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1q} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{q1} & \dots & F^{qq} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_1^\xi \\ \vdots \\ u_q^\xi \end{pmatrix}^{int} \quad (4.20)$$

Existem outros processos para fazer a correlação exposta, alguns deles provavelmente mais efetivos, embora este seja bastante simples. A relação entre a quantidade de pontos de interpolação (pólos) auxiliares e pontos fonte internos é arbitrária. Os pólos auxiliam a construir a propriedade de inércia do sistema; os pontos fonte internos auxiliam na inserção de graus de liberdade do sistema. Simulações computacionais preliminares indicam que os pólos têm ligeira supremacia sobre os pontos fonte internos, mas outros fatores podem influir: por exemplo, se todos os graus de liberdade do contorno estão prescritos, a importância dos pontos fonte internos aumenta.

Retomando a equação (4.15), o vetor  $N$  e a inversa da matriz de interpolação  $F$  não se alteram para cada ponto fonte e podem ser transformadas num vetor linha  $S$ .

$$\{S_1 \quad \dots \quad S_n\} = \{N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_l\} \begin{bmatrix} F^{11} & \dots & F^{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ F^{l1} & \dots & F^{ln} \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.21)$$

Assim, cada linha da matriz de massa, referente a um ponto fonte  $\xi$ , interno ou de contorno pode ser gerada como:

$$\begin{Bmatrix} M_{\xi 1} \\ M_{\xi 2} \\ \vdots \\ M_{\xi n} \end{Bmatrix}^T = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} {}^1\Lambda^1 & \dots & {}^1\Lambda^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ {}^n\Lambda^1 & \dots & {}^n\Lambda^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{cc} & 0 \\ 0 & \Phi_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

A matriz completa tem a forma:

$$\begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \cdot u^*(\xi = 1; X^1) & \dots & S_m \cdot u^*(\xi = 1; X^m) \\ S_1 \cdot u^*(\xi = n; X^1) & \dots & S_m \cdot u^*(\xi = n; X^m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{cc} & 0 \\ 0 & \Phi_{ii} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

O sistema de equações lineares em sua forma completa é dado por (4.24).

$$\begin{bmatrix} H_{cc} & 0_{ci} \\ H_{ic} & I_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} G_{cc} & 0_{ci} \\ G_{ic} & 0_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix} = \frac{\omega^2}{c^2} \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{ci} \\ M_{ic} & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_c \\ u_i \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

Fazendo uma análise deste sistema matricial final da MECID, vê-se que há o surgimento explícito de uma matriz associada à inércia do sistema. As matrizes H e G não dependem da frequência, pois a solução fundamental empregada corresponde ao problema de Laplace. Esta independência faz com que a MECID se adapte facilmente à solução de um problema de autovalor, tal como ocorre nos problemas discretizados pelo Método dos Elementos Finitos e mesmo com o MEC, usando a formulação com Dupla Reciprocidade.

Preliminarmente, devido aos bons resultados apresentados em outras aplicações, a função de base radial utilizada para ambos os processos de interpolação foi a função placa fina ou “thin plate radial basis function” dada pela equação:

$$f(r) = r^2 \ln r \quad (4.25)$$

Ressalta-se que outras funções podem ser usadas com o mesmo propósito.

## 5. Simulações Numéricas

Para as simulações dos dois métodos foram utilizados diferentes problemas físicos regidos pela Equação de Helmholtz, mas que possuem solução analítica conhecida. Assim, as configurações geométricas dos problemas são bastante simples. Foram tomadas dimensões unitárias por conveniência. A frequência foi variada de forma a testar os métodos para as diferentes condições de excitação. Foi ainda utilizado o Sistema Internacional de Unidades (SI).

Os experimentos numéricos realizados buscam comprovar a eficiência do MECID através da comparação com o resultado obtido pelo MECFD, uma formulação tradicional e já bem estudada do MEC, e comparar a aproximação dos resultados das simulações com a solução analítica conhecida dos problemas determinados. Os testes foram realizados com programas de Elementos de Contorno construídos em linguagem Fortran e compilados pelo programa Microsoft Fortran PowerStation. O programa linear do MECFD foi implementado pelo autor a partir do material fornecido pelo livro de Dominguez (1993), cujo programa trabalha com elementos constantes.

Considerando os nós duplos nos vértices dos problemas solucionados por elementos de interpolação linear, essas malhas possuem 4 nós funcionais a mais do que as malhas com elementos constantes, usada e testada aqui na MECFD apenas para uma avaliação da melhoria de desempenho produzida pelo uso de elementos lineares. Para a formulação com Integração Direta, é imprescindível a utilização de pontos internos interpolantes e também de pontos fonte no interior, para gerar os graus de liberdade necessários. Este tipo de problema não ocorre, pelo menos na mesma intensidade, com a formulação do MEC dependente da frequência, pois ambas as matrizes H e G são dinâmicas.

Já no caso de um problema de autovalor, a MECFD não pode ser aplicada, primeiramente porque as frequências estão embutidas nas próprias matrizes. No caso da MECID, havendo total prescrição do potencial no contorno, o sistema final de equações fica degenerado, sem graus de liberdade, se não houver pontos internos. Isto não acontece nos métodos de domínio, como o Método dos Elementos Finitos, pois naturalmente há graus de liberdade no interior.

A variação das malhas procura aferir o seguinte: a eficiência do método com o refinamento, os efeitos que resultam do aumento da densidade de pontos de informação; e ainda o efeitos dos pontos de colocação ou pontos fonte, que fornecem os graus de liberdade do sistema.

Para se quantificar a aproximação do resultado exato obtida pelos métodos, os valores obtidos numericamente no contorno do problema foram comparados com os obtidos analiticamente em cada nó, estabelecendo assim um critério de erro. Comparam-se os valores do potencial onde a derivada normal foi prescrita (condições de contorno de naturais) e das derivadas normais onde os potenciais foram prescritos (condições de contorno de essenciais) com os valores analíticos conhecidos. Quando foram prescritas apenas condições de contorno essenciais, o cálculo do erro do potencial foi feito com valores do interior do domínio.

Para essas comparações foram utilizados dois critérios de erro, o erro absoluto e o erro ponderado pelo máximo valor analítico no problema. O erro absoluto é estabelecido como o módulo da diferença entre o valor da variável de interesse (potencial ou derivada normal do potencial) calculada numericamente e calculada analiticamente.

$$erro(\%) = \|u_{numérico} - u_{analítico}\| \cdot 100 \quad (5.01)$$

No critério de erro ponderado a diferença absoluta entre o valor numérico e analítico é dividida pelo módulo máximo do valor analítico da variável de interesse encontrado em todo o domínio do problema, ou seja:

$$erro(\%) = \frac{\|u_{numérico} - u_{analítico}\|}{\|u_{max.analítico}\|} \cdot 100 \quad (5.02)$$

Onde  $u_{numérico}$  é o valor da variável de interesse encontrado através do método numérico para um determinado ponto,  $u_{analítico}$  é o valor analítico para o correspondente ponto e  $u_{max.analítico}$  o máximo valor analítico calculado da através de mil amostras igualmente espaçadas no domínio do problema para cada frequência de excitação. O erro médio para cada frequência excitação foi, então, a média aritmética do erro para cada ponto amostral.

Detalhando o critério exposto: os valores analíticos do potencial, e sua derivada na direção x e na direção y, foram calculados através de suas expressões analíticas, em uma grande quantidade de pontos espalhados homogeneamente pelo domínio, de forma a estabelecer um valor máximo analítico no problema para cada frequência de excitação. Estes máximos calculados em cada frequência de excitação foram utilizados no cálculo do erro ponderado, de forma a normalizar o erro com os valores reais encontrados no problema solucionado.

Para impedir que variações no valor máximo analítico utilizado como denominador da expressão do erro ponderado passe a impressão de um diferente desempenho da aproximação numérica também foi utilizado o conceito de erro absoluto. Este é composta apenas a diferença entre a análise e valores numéricos, dividido pelo número de nós considerados para a medição.

### 5.1.Primeiro Problema

O primeiro problema simulado é uma membrana elástica com geometria e condições de contorno dadas pela Figura 11.

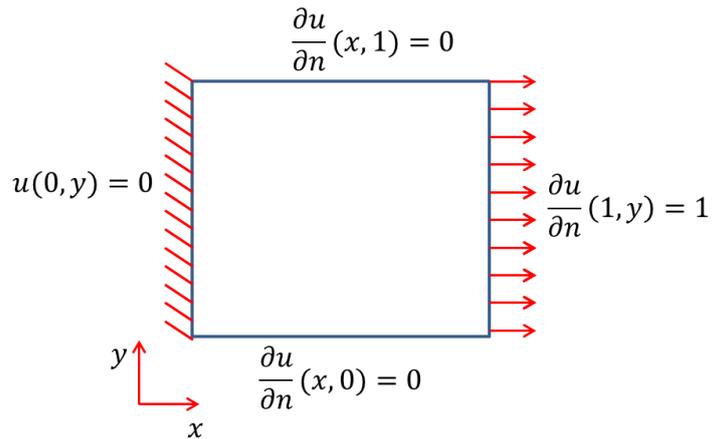


Figura 11 - Condições de contorno para o problema da barra elástica carregada.

Apesar de ser feita uma discretização bidimensional, devido à simetria da geometria, pode ser modelado matematicamente como um problema unidimensional de acordo com a equação (5.03).

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} = -\omega^2 u(x) \quad (5.03)$$

A solução analítica para a equação (5.03) pode ser obtida facilmente, dada pela equação (5.04):

$$u(x) = \frac{\text{sen}(\omega x)}{\omega \cos(\omega)} \quad (5.04)$$

Na equação (5.05) a sua derivada em relação a  $x$  é:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\cos(\omega x)}{\cos(\omega)} \quad (5.05)$$

A solução analítica é válida para quando as frequências de excitação são tais que  $\cos(\omega) \neq 0$ , ou seja, para frequências distintas de  $\omega_n = n\pi/2$ , com  $n$  um número inteiro ímpar, (no intervalo das simulações as frequências naturais são: 1,571; 4,712; 7,854; 10,996; 14,137). Quando a frequência de excitação utilizada na simulação está muito próxima à frequência natural do problema, a solução analítica tende ao infinito e espera-se uma resposta instável do método numérico, obtendo picos de erros.

Frequências utilizadas para as simulações são de 1,00; 1,50; 2,00; 2,50; 3,00; 3,50; 4,00; 4,50; 5,20; 5,50; 6,00; 6,50; 7,00; 7,50; 8,00; 8,50; 9,00; 9,50; 10,20; 10,50; 11,00; 11,50; 12,00; 12,70; 13,00; 13,50; 14,00; 14,50; 15,00 para elementos com interpolação linear. Para os elementos de extrapolação constante, a frequência de 8,00 foi substituída por 8,20, pois na malha menos refinada o algoritmo acusava erro de singularidade por estar muito próxima a uma frequência natural.

Quando a frequência de excitação utilizada na simulação está muito próxima a frequências natural o gráfico do erro apresentará pico de erros devido aos altos valores

analíticos obtidos, ou pode não ser possível obter resposta numérica. Devido ao grande número de frequências de excitação próximas a frequências naturais, espera-se que as curvas de erro geradas possuam muitas oscilações no intervalo de frequências simulado.

Importa destacar que o processo de discretização implica num erro na avaliação das propriedades físicas do problema; comumente, a estrutura fica enrijecida e no caso da dinâmica, há tendência em se ampliar os valores das frequências naturais. Naturalmente, este fenômeno se sobressai nas malhas menos refinadas, pois tem reduzido número de graus de liberdade, e também maiores frequências de excitação.

### 5.1.1 Simulações MECFD com interpolação linear

Na Figura 12, resultados do MECFD com elemento retilíneo e interpolação linear:

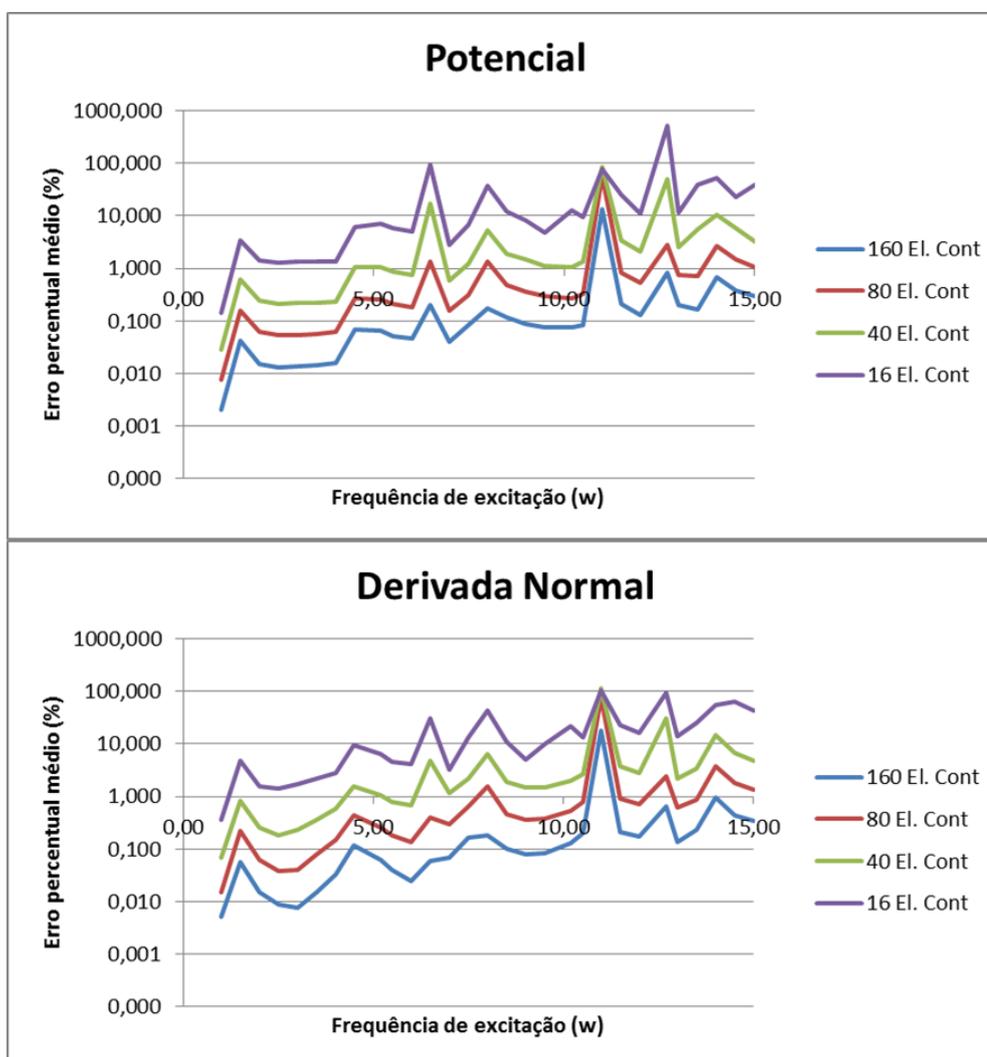


Figura 12 – Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de interpolação linear, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

A Figura 12 traz o comportamento do erro médio ponderado para as frequências simuladas do potencial e sua derivada normal em malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos

com interpolação linear. A variável potencial e sua derivada normal foram calculadas apenas no contorno. Pela comparação desses gráficos, pode-se notar que de forma geral, para as frequências simuladas há uma clara queda do erro médio ponderado com o refinamento das malhas. Nota-se que o erro para a derivada normal da variável básica se encontra muito próximo ao erro do potencial para todas as malhas e frequências.

Todos os gráficos apresentam muitos picos de erro devido ao grande número de frequências naturais que ocorrem próximo às frequências de excitação simuladas e a instabilidade gerada por essas frequências. Mesmo para a malha de 160 elementos que alcançou erros menores que 0,1% para frequências de excitação mais baixas, esses picos elevaram o erro a mais de 10% quando muito próximos à frequência natural de  $\omega_n = 10,996$ . Essa frequência em particular se destaca por estar muito próxima à frequência de excitação utilizada de  $\omega = 11$  e por isso produz grandes picos de erro, mesmo para malhas de alto refinamento como a de 160 elementos. Para malhas de menor refinamento, mesmo as frequências mais distantes da frequência natural podem produzir grandes picos de erro devido às inexactidões do método numérico.

Outra frequência de destaque, que teve instabilidade acentuada nos testes com malhas grosseiras na interpolação linear e em todas as malhas para o cálculo do potencial da extrapolação constante foi a de  $\omega = 6,5$ , próximo a frequência natural  $\omega_n = 6,2831$ .

Ao observar os gráficos, nota-se uma tendência do erro médio em se reduzir localmente, embora haja um aumento da frequência de excitação. Esse fenômeno se origina do fato do erro médio ponderado não depender somente da diferença entre os valores numéricos e analíticos, mas também do máximo valor analítico do problema. Este, por ser dado em termos de funções harmônicas, pode se reduzir ou aumentar conforme a frequência, alterando o denominador da medida de erro e impedindo uma comparação mais equânime entre os erros para diferentes frequências.

Apesar dos picos de erro, devido as frequências de excitação estarem muito próximas das frequências naturais do sistema, para malhas refinadas foram encontrados resultados satisfatórios quando suficientemente refinadas.

Nos gráficos que se seguem, dados na Figura 13, são apresentadas as curvas de erro médio ponderado, erro absoluto e máximo analítico para simulação do potencial com 80 elementos de contorno.

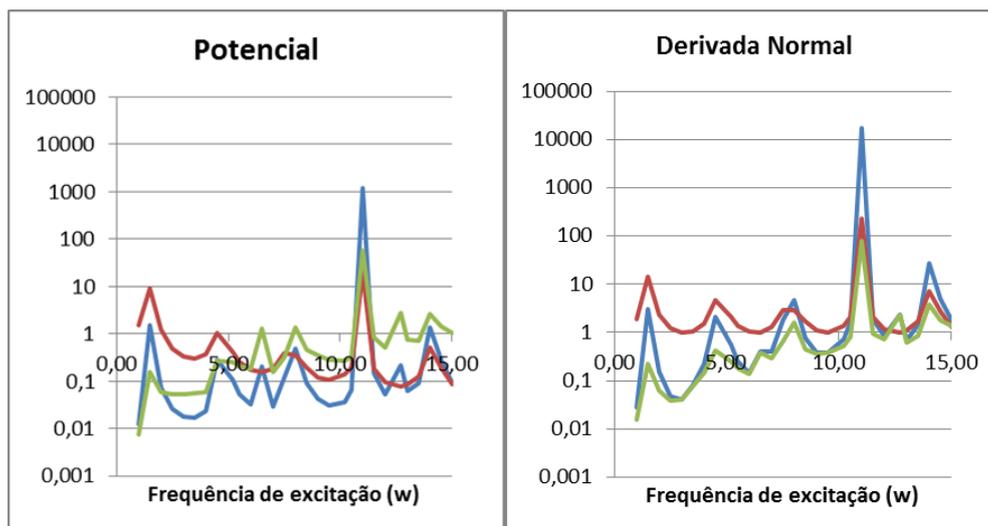


Figura 13 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial e derivada no contorno do problema da barra elástica simulado com 80 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente.

O objetivo destes gráficos é mostrar que efetivamente o valor do denominador da medida de erro altera localmente o perfil da curva, produzindo erros menores em frequências mais altas. A curva de valores máximos analíticos pode diminuir com o aumento da frequência, pois o valor da frequência encontra-se no seu denominador (vide Eq. 5.04).

Ressalta-se que a curva de valores analíticos foi traçada de modo discreto e por isso não foram apresentados os picos referentes à ressonância nas curvas, que ocorreram em 6,50 e 12,70. Mas, mesmo assim, esses picos ocorreram para a curva de erro absoluto e conseqüentemente para o erro ponderado, por estarem próximas as frequências naturais em 6,283 e 12,566, sugerindo que o método é susceptível aos valores próximos, embora não exatos, da ressonância.

Também as frequências de excitação 1,50; 4,50; 8,00; 11,00; 14,00 se aproximaram muito das frequências naturais 1,571; 4,712; 7,854; 10,996; 14,137 e provocaram a instabilidade relativa, com picos de erro.

Ambas as curvas de erro ponderado e absoluto aumentam o erro com o aumento da frequência, mas a curva de erro ponderado sobe a uma taxa maior que a de erro absoluto, devido ao decaimento da curva de valor máximo analítico para o potencial com o aumento da frequência de excitação. Ressalta-se que esse aumento pode dar a impressão de o método ser menos exato para frequências mais altas, apesar de não haver um aumento tão grande no erro absoluto.

No que se refere às derivadas, apesar da captação de picos no entorno dos valores de ressonância, pode-se verificar que a curva do valor analítico máximo tende a permanecer estável (vide Eq. 5.5), próximo a um valor médio fixo um pouco acima da unidade. Isto faz com que a curva do erro ponderado acompanhe a curva do erro absoluto, mas sempre tenha erros menores. Porém, apesar disso, os dois erros – o ponderado e o absoluto – tendem a aumentar para as simulações com frequências mais altas mesmo quando usados os elementos com interpolação linear, sugerindo a esperada

perda de eficiência do método para a simulação da resposta em condições de excitação mais altas.

### 5.1.2 Simulações MECFD com interpolação constante

Os resultados das simulações para o MECFD com elemento retilíneo e extrapolação constante seguem na Figura 14:

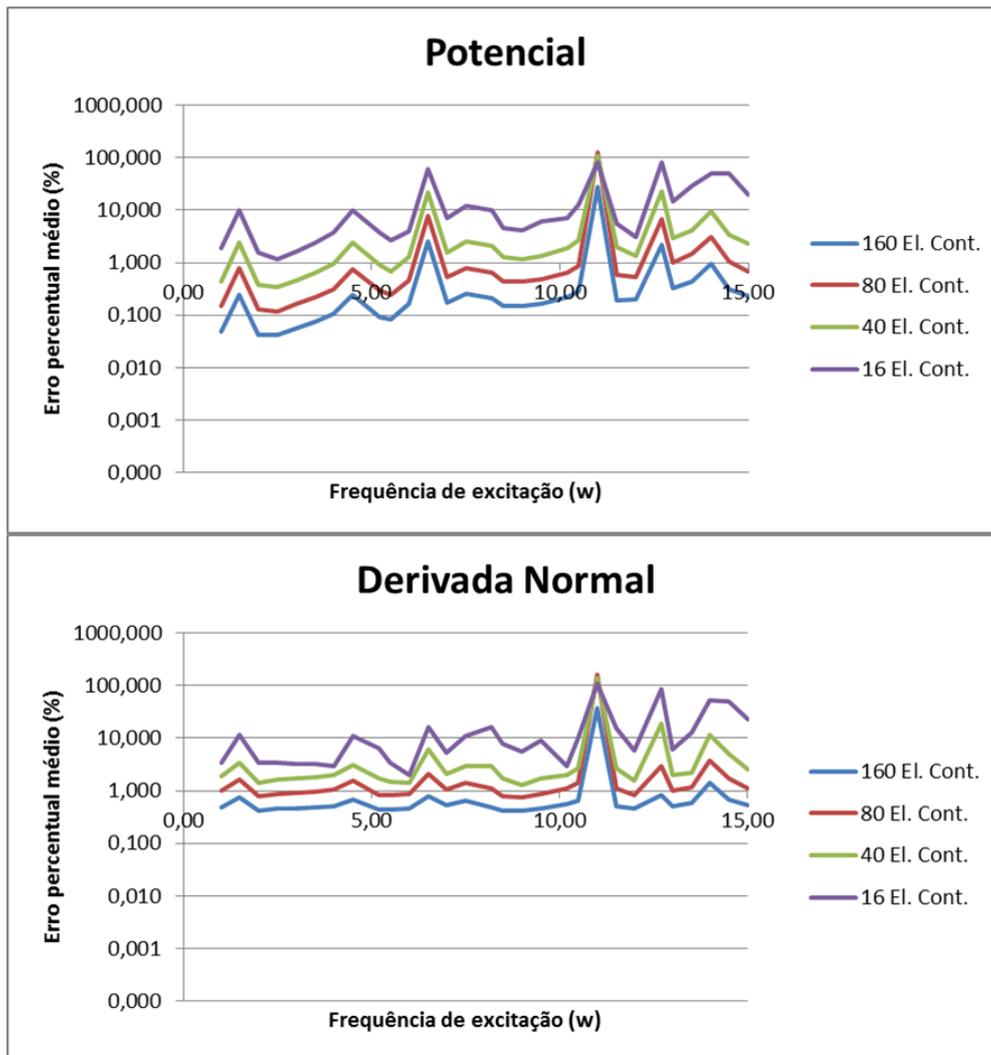


Figura 14 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

É possível notar que há convergência com o refinamento da malha, ou seja, os erros médios ponderados de forma geral diminuiram com o aumento da quantidade de pontos nodais. Também se observa que os picos de erro têm uma amplitude menor e aparecerem com menor amplitude nas malhas mais refinadas. O erro no potencial tem uma taxa de convergência para o valor analítico com o refinamento da malha maior do que o da derivada normal, ou seja, a curva de erro no potencial se reduziu mais que a

curva referente à derivada normal com o refinamento. Se para 16 elementos elas estão com valores de erros relativamente muito semelhantes, com 160 elementos a curva de erro do potencial atinge valores próximos a 0,05% enquanto a da derivada normal atinge valores próximos a 0,7%.

Curiosamente, apesar de apresentar erros maiores, a curva da derivada normal é menos influenciada pelo aumento da frequência, com um aumento menor do erro com o crescimento da frequência, em uma comparação com a curva do potencial, quando desconsiderados os picos. É, portanto, mais suave que a curva do potencial e apresenta menos picos de erro, sendo o único que se destaca para a malha de 160 elementos o de  $\omega = 11$ .

Cabe destacar que por razões já expostas, o denominador da fórmula de erro do potencial pode estar crescendo bastante (comparar eq. 5.04 com 5.05) fazendo com que a aferição equânime do erro entre o potencial e a derivada fique mais difícil.

Comparativamente ao elemento com interpolação linear, os valores obtidos para a interpolação constante somente apresentaram erros significativamente maiores para as frequências mais baixas (comparem-se as Figura 12 e Figura 14). Para as frequências mais altas ou malhas com menos refinamento a diferença já não foi tão significativa.

Tal como foi mostrado anteriormente para o elemento isoparamétrico linear, são mostradas a seguir as curvas de erro médio ponderado, erro absoluto e máximo analítico para simulação da derivada normal da variável básica com elementos retilíneos e extrapolação constante, 80 elementos de contorno, Figura 15:

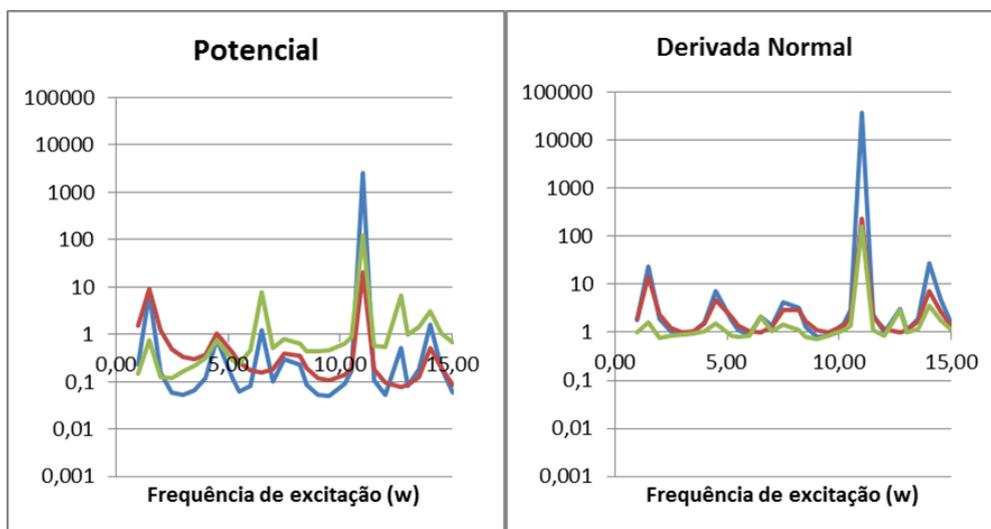


Figura 15 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial e a derivada normal do contorno do problema da barra elástica simulado com 80 elementos de contorno, à esquerda com elementos de extrapolação constante.

### 5.1.3 Simulações MECFD com interpolação linear e parte real da matriz

Os resultados das simulações para o MECFD com uso de apenas parte real da matriz do sistema algébrico final, usando o elemento de contorno com interpolação linear são mostrados na Figura 16:

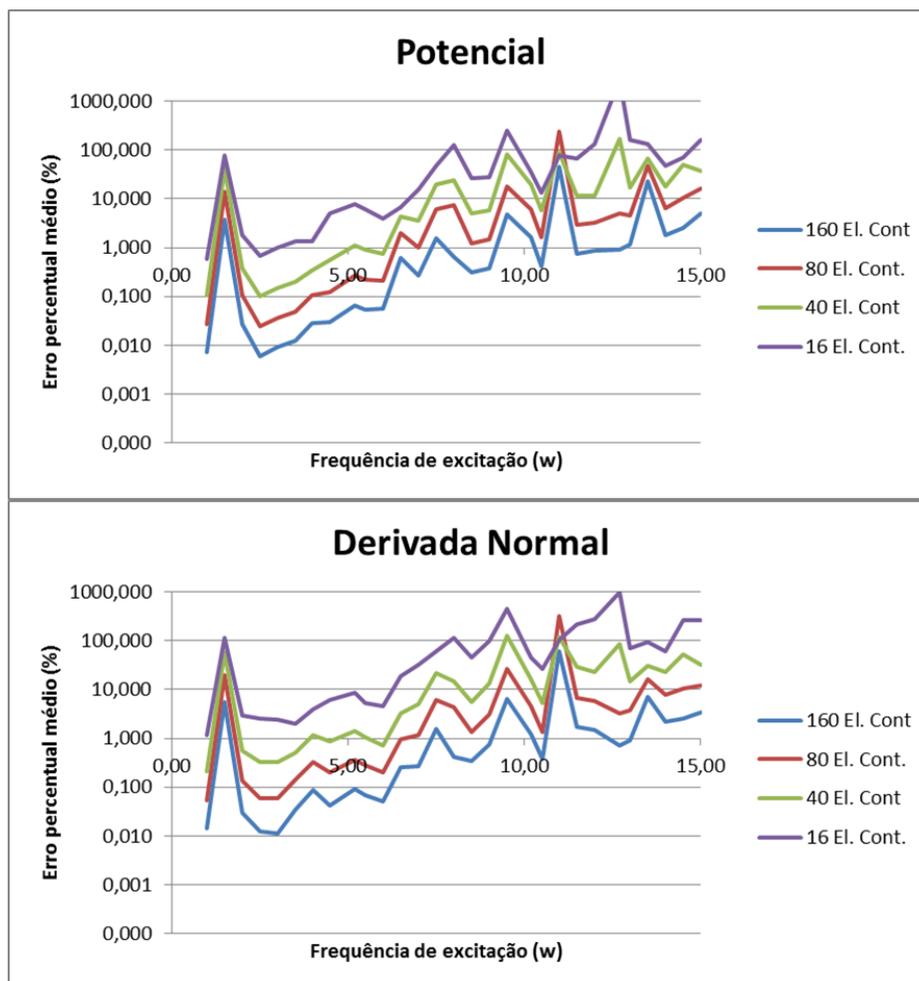


Figura 16 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de interpolação linear utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

As curvas apresentam convergência com o refinamento da malha, erros menores para as frequências mais baixas e as curvas de potencial e derivada normal com erro médio percentual com valores próximos. Contudo, a curva de erro potencial apresentou resultados levemente melhores apenas em frequências de excitação mais baixas.

Destaque para a frequência de excitação de  $\omega = 1,5$  que está próxima à frequência natural  $\omega_n = 1,5707$ , onde ocorre um pico de erro com grande amplitude em todas as malhas.

As curvas de erro com o uso da parte real da matriz linear dos elementos de interpolação linear têm um comportamento similar ao uso do elemento com interpolação linear, mas com picos de erro de maior amplitude. Em especial nas frequências mais altas apresentadas, deixou a desejar quando comparado à interpolação linear com uso de toda a matriz do sistema linear resultante.

Quando comparadas as curvas geradas pelo método com uso de extrapolação constante, obtiveram-se erros menores para as frequências mais baixas, e erros maiores para as frequências mais altas.

#### 5.1.4 Simulações MECFD com interpolação constante e parte real da matriz

Os resultados das simulações para o MECFD com elemento retilíneo e extrapolação constante com uso de apenas parte real da matriz final para a solução do sistema linear são mostrados na Figura 17.

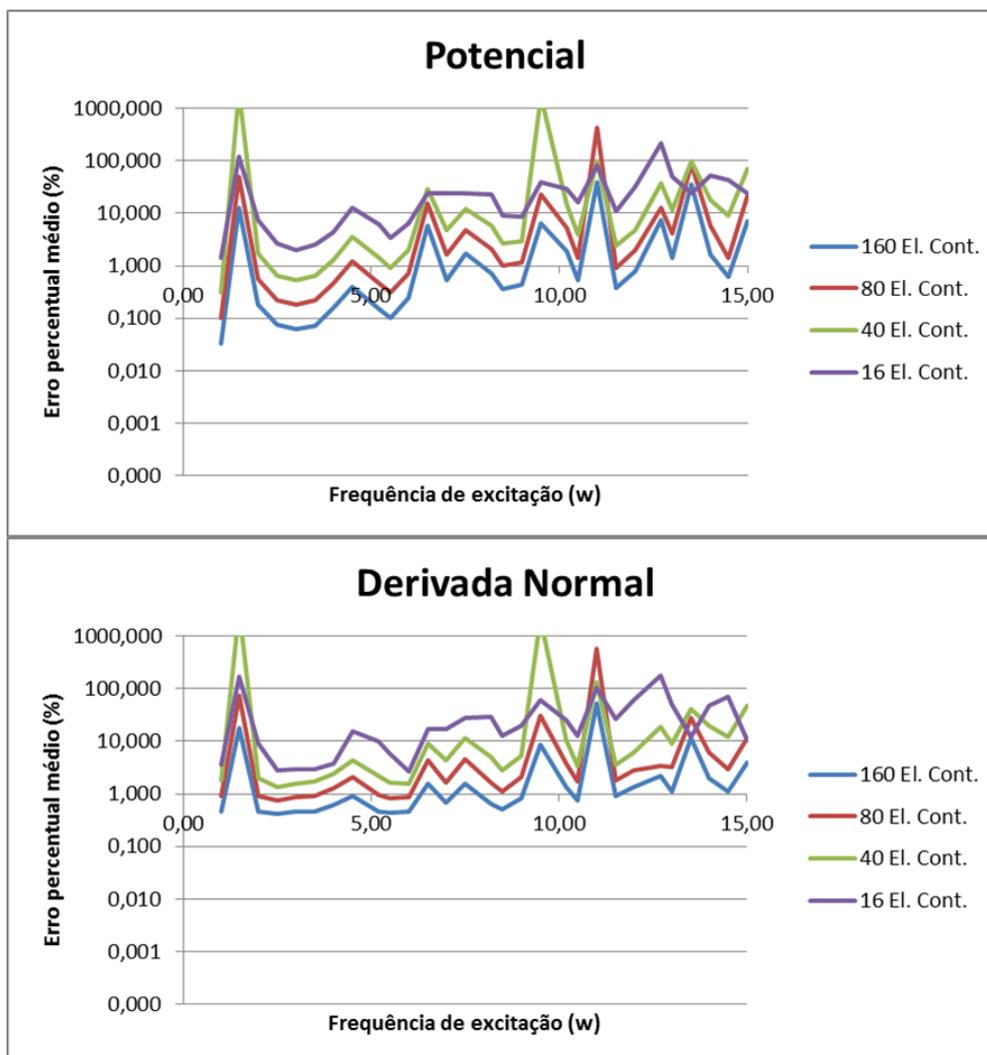


Figura 17 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da barra elástica pelo MECFD com elementos de extrapolação constante utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, malhas de 16, 40, 80 e 160 elementos de contorno. Erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Assim, o uso de apenas parte real do sistema linear do elemento com extrapolação constante a resposta se mostrou pouco consistente em relação aos demais, com grande quantidade de picos de erros com valores máximos muito altos. A curva de erro do potencial apresentou uma convergência maior que a da derivada normal com o refinamento da malha, e apesar de apresentar erros similares para as malhas mais grosseiras, para as malhas mais refinadas chegou a apresentar erros 10 vezes menores para frequências mais baixas. Ou seja, enquanto o modelo com resposta complexa

apresenta a uma melhoria da resposta com o refinamento, o modelo com apenas conteúdo real na matriz final do sistema se mostra pouco sensível ao refinamento neste caso.

Em síntese, essa configuração sem a parte complexa da matriz final do sistema apresentou erros maiores do que a mesma configuração usando o elemento com interpolação linear comum, para a faixa de frequência testada, com muitos picos de erro se sobressaindo na curva de erro. Comparado ao elemento com extrapolação constante simples com parte complexa, apresentou resultados piores e grande perda da suavidade da curva.

### 5.1.5 Simulações MECID com elementos isoparamétricos lineares

Para as simulações do MECID foi utilizada uma quantidade ligeiramente menor de pontos fonte internos do que de pólos internos, uma vez que estes últimos atuam na representação da inércia do sistema e tendem a ser mais importantes para um melhor desempenho. É importante destacar que os pontos fontes internos geram graus de liberdade assim como os nos nós de contorno. Graus de liberdade adicionais são muito importantes em análises dinâmicas, especialmente em técnicas de contorno que prescrevem condições de contorno essenciais e reduzem a quantidade de graus de liberdade.

Para as simulações da Figura 18 foram usadas duas diferentes malhas: com 84 nós de contorno (80 elementos com interpolação linear), 80 pontos fonte internos e 144 pólos internos; e com 164 nós de contorno (160 elementos com interpolação linear), 144 pontos fonte internos e 259 pólos internos.

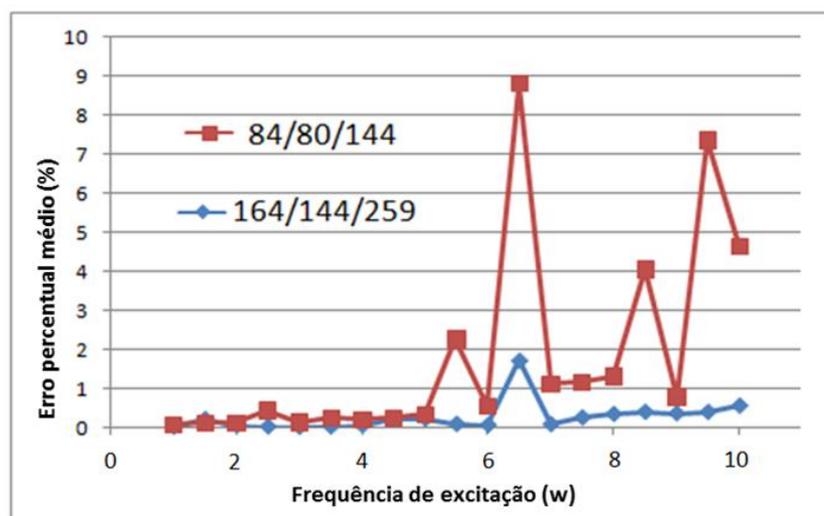


Figura 18 – Simulação da solução do primeiro problema pelo MECID com elemento de interpolação linear e  $f(r) = r^2 \ln(r)$  como função de interpolação radial para o potencial.

Devido ao erro da aproximação da matriz de inércia com funções de base radial, alguns modos de vibração transversal são excitados e, portanto, capturados nas curvas

de erro, provocando picos de erro em frequências diferentes das frequências naturais esperadas.

Para ambas as malhas se percebem o acréscimo do erro com o aumento da frequência de excitação. Comparativamente a MECFD há uma queda mais acentuada de desempenho para frequências mais altas. Esse aumento do erro decorre da multiplicação da matriz de massa pelo quadrado da frequência de excitação. Como tal matriz é construída por funções radiais, os erros de interpolação da matriz de massa se tornam mais acentuados no sistema linear com o aumento da frequência.

Na Figura 19 é exibida a comparação das curvas de erro obtidas com simulações no MECID e MECFD com malhas de 160 elementos de contorno. No MECID foi utilizado 144 pontos fonte internos e 259 pólos internos. Com o aumento da frequência de excitação, pode-se avaliar qualitativamente a perda de precisão da aproximação da matriz de massa construída pelo MECID com relação ao MECFD, um método que não se utiliza de tal aproximação.

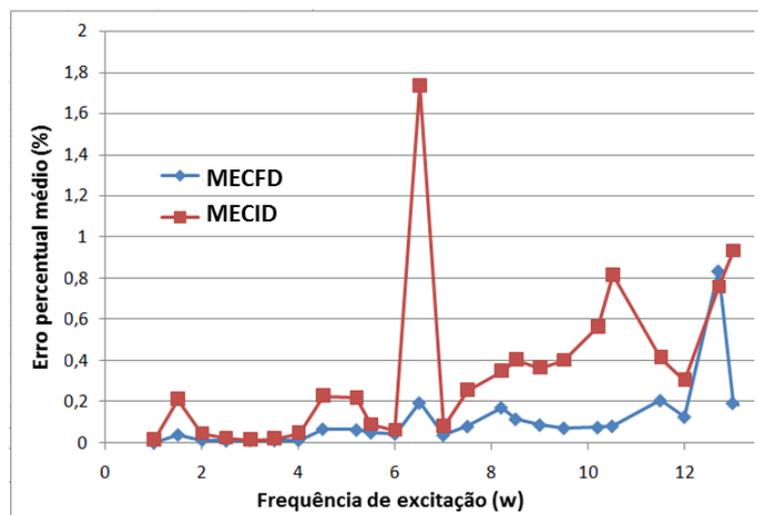


Figura 19 – Comparação entre a curva de erro médio ponderado obtido pelo MECID e o pelo MECFD para o potencial da variável básica nas malhas de 160 elementos.

Desde que a malha seja contemplada com uma quantidade adequada de pólos, o MECID apresentou resultados satisfatórios, com o erro médio ponderado menor que 1% para malha de 160 elementos, quando a frequência de excitação não estava muito próxima à frequência natural.

No geral notam-se menores picos de erro no MECFD para frequências mais altas apesar de ambos os métodos tenderem a apresentar erros maiores nessas frequências. Neste gráfico foi omitida a frequência de excitação de 11 (próxima à frequência natural de 10,99), onde se apresenta um erro muito alto por estar extremamente próximo a uma frequência natural, e se extrapola a escala gráfica apresentada. Apesar dos picos de erros ambos os métodos apresentaram bom desempenho na solução do problema, desde que o MECID tenha uma quantidade adequada de polos internos.

Quanto à questão da alteração dos valores da frequência natural pelo enrijecimento do sistema, a questão fica mais complexa. Há outro fator envolvido. O uso de funções radiais para simular a inércia do sistema induz uma tendência oposta, ou

seja, produz uma redução das frequências naturais devido à má aproximação das propriedades de inércia. Este efeito foi observado em diversas simulações, particularmente no cálculo da área sob superfícies, que usualmente ficavam menores do que o devido (Cruz, 2009). O efeito final, se as frequências são aumentadas ou reduzidas depende, portanto, da magnitude de cada fator.

## 5.2.Segundo Problema

Outro problema harmônico é resolvido, mas agora de natureza efetivamente bidimensional. Trata-se de uma membrana, que é excitada de acordo com as condições de contorno apresentadas na Figura 20:

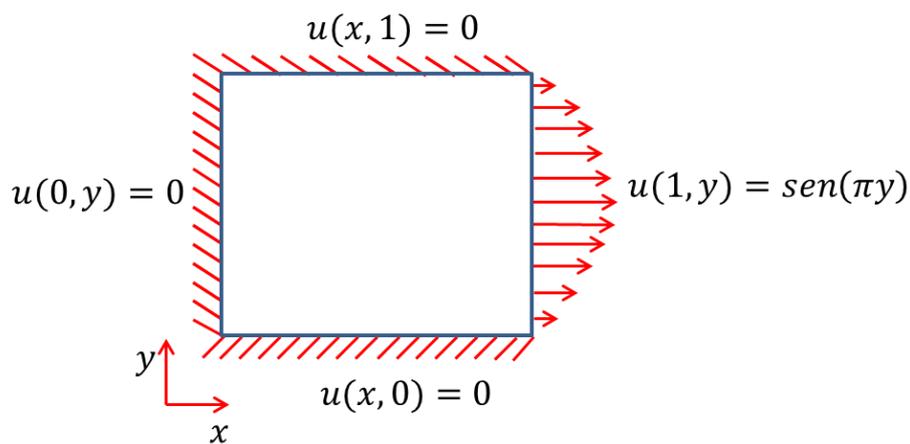


Figura 20 - Condições de contorno para o problema da membrana carregada.

Como todas as condições de contorno são do tipo essencial, para o cálculo do erro serão utilizados os valores das derivadas normais no contorno e os valores de potencial retirados internamente.

A equação que governo o problema da membrana carregada é a equação (5.06):

$$k \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = -w^2 u \quad (5.06)$$

Para este caso, a solução analítica obtida pelo método de separação de variáveis é dada pela equação (5.07):

$$u(x, y) = \frac{\text{sen}(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2})\text{sen}\left(\frac{\pi y}{l}\right)}{\text{sen}(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (5.07)$$

A equação (5.07) pode ser facilmente derivada por  $x$ , em (5.08):

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})\cos(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2})\text{sen}\left(\frac{\pi y}{l}\right)}{\text{sen}(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (5.08)$$

E derivada por  $y$  na equação (5.09):

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right) \text{sen}(x\sqrt{\omega^2 - \pi^2}) \cos\left(\frac{\pi y}{l}\right)}{\text{sen}(\sqrt{\omega^2 - \pi^2})} \quad (5.09)$$

Nas equações (5.07), (5.08) e (5.09), como a função seno não pode ter argumentos imaginários,  $\omega^2 \geq \pi^2$ , as frequências utilizadas para as simulações partiram de 4,0, são: 4,0; 4,5; 5,2; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,5; 9,0; 9,5; 10,2; 10,5; 11,0; 11,5; 12,0; 12,7; 13,0; 13,5; 14,0; 14,5; 15,0.

O potencial tende ao infinito quando:

$$\text{sen}(\sqrt{\omega^2 - \pi^2}) = 0 \quad (5.10)$$

A condição da equação (5.10) é estabelecida quando a frequência de excitação é igual à frequência natural do sistema, dada por (5.11):

$$\omega = \sqrt{(n^2 + 1)\pi^2} \quad (5.11)$$

Com  $n \geq 0$ . As frequências naturais no intervalo de testes são: 4,443; 7,025; 9,935; 12,953. Tais frequências são longitudinais, ou seja, estão associadas ao carregamento imposto, que atua na direção  $x$ . No entanto, devido ao caráter bidimensional do problema e ao fato de se introduzirem aproximações relacionadas ao processo de discretização, erros numéricos se interpõem na resposta e frequências relacionadas ao movimento transversal aparecem no espectro de resposta, sobretudo quando a frequência de excitação está próxima da frequência discreta de ressonância.

Por ser um problema bidimensional, aliado ao fato de apenas condições de contorno do tipo essencial serem prescritas – o que implica em um enrijecimento maior deste caso em comparação com o anterior - amplia consideravelmente o espectro de frequências naturais captadas e proximidade entre elas. Assim sendo, a complexidade numérica deste caso é significativamente maior do que a do caso previamente examinado.

### 5.2.1 Simulações MECFD com elementos isoparamétricos lineares

Os resultados das simulações para o MECFD com elemento retilíneo e interpolação linear em formas de gráficos para o erro médio ponderado estão na Figura 21:

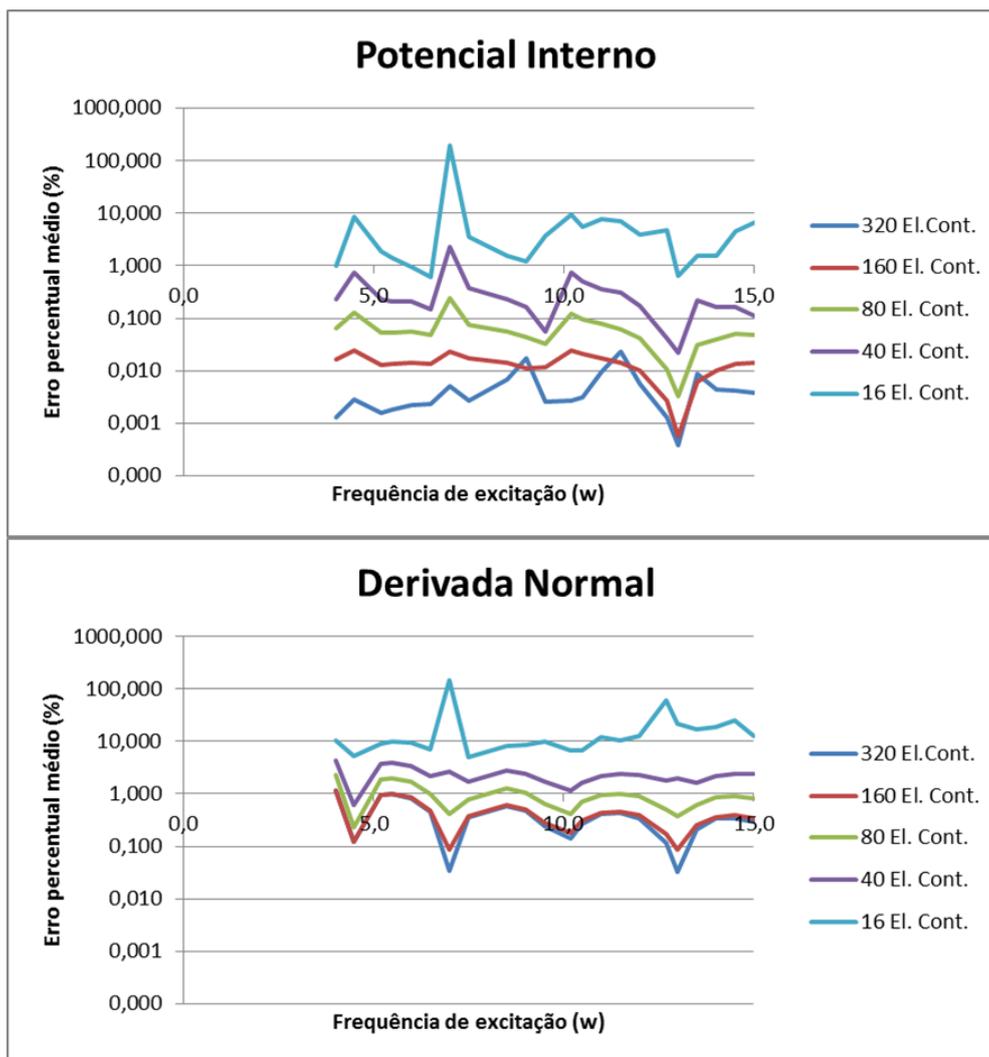


Figura 21 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de interpolação linear, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Não obstante a maior complexidade desse problema, ainda assim foram atingidos bons resultados para o potencial e sua derivada normal, em especial o potencial que com malhas mais refinadas atingiu erros menores que 0,01%. É notável a menor quantidade de picos de erro nesse problema, devido ao menor número de frequências naturais presente no intervalo de frequências simulado.

A curva de erro do potencial mostrou uma redução com o aumento do refinamento das malhas, enquanto a curva da derivada normal apresentou um perfil mais estável para todas as malhas, com uma tímida diminuição do erro no geral. Percebe-se que com o refinamento da malha de 160 elementos para 320, a derivada normal não apresentou uma redução significativa no erro, diferentemente do potencial.

Problemas nos quais apenas condições essenciais são prescritas - sendo assim calculadas as derivadas normais - apresentam maior dificuldade na simulação numérica, relativamente ao alcance de maior precisão nos resultados. As derivadas exigem maior robustez do método de solução, pois se originam da diferenciação da variável básica do problema. Isto justifica a menor precisão no cálculo dessas derivadas no contorno em todas as simulações mostradas na Figura 21.

A captação das já mencionadas frequências naturais transversais se amplia com a discretização, por uma razão não muito clara. Pode-se cogitar que os erros de discretização se reduzem com o refinamento da malha, mas que por outro lado, a sensibilidade do modelo se amplia, parecendo justificar o comportamento da curva de erro do potencial.

### 5.2.2 Simulações MECFD com elementos constantes

As simulações da solução do segundo problema pelo MECFD com elemento retilíneo com extrapolação constante estão na Figura 22

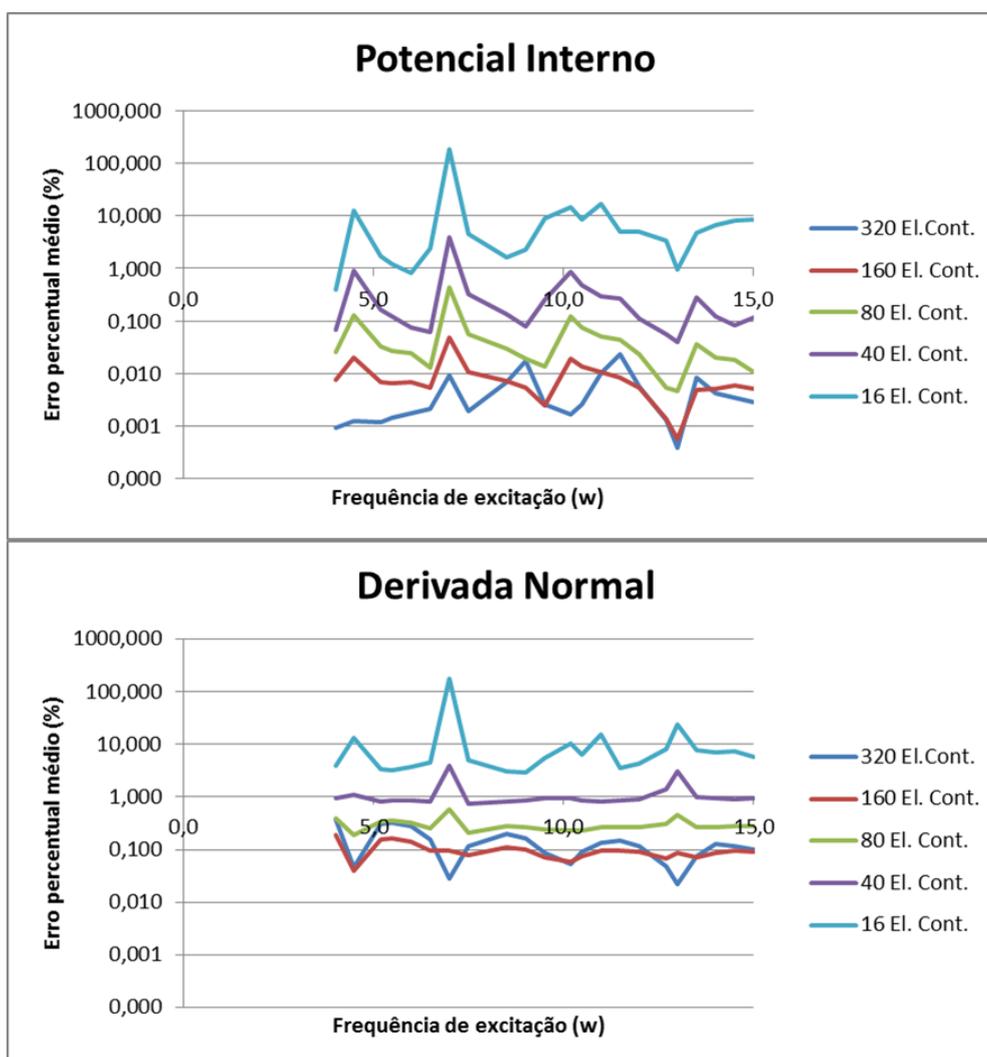


Figura 22 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Nota-se também a maior precisão dos valores de potencial do que para derivadas, sobretudo para as frequências mais baixas, assim como já havia sido detectados com o uso de elementos de interpolação linear. A curva de erro potencial para este tipo de interpolação teve picos de maior amplitude. Entretanto, a de derivada normal fica mais

susceptível à ressonância na malha mais rica de 320 elementos de contorno, aparecendo picos de erro na curva que tinha um comportamento quase constante com as malhas de 80 e 160 elementos de contorno. A convergência para o valor analítico com o refinamento foi alcançado em todas as simulações.

De forma geral, as simulações com malhas utilizando elementos de extrapolação constante alcançaram resultados de erro médio ponderado menor que os erros encontrados para elementos de interpolação linear. Isto é mais perceptível para as malhas mais pobres. Naturalmente, se o espectro de resposta abrangesse um conteúdo mais amplo de frequências, talvez este efeito desaparecesse, em razão da maior potencialidade dos elementos lineares.

### 5.2.3 Simulações MECFD com elementos lineares e parte real

As simulações do MECFD com elemento retilíneo e interpolação linear com uso de apenas parte real do sistema linear resultante consta na Figura 23.

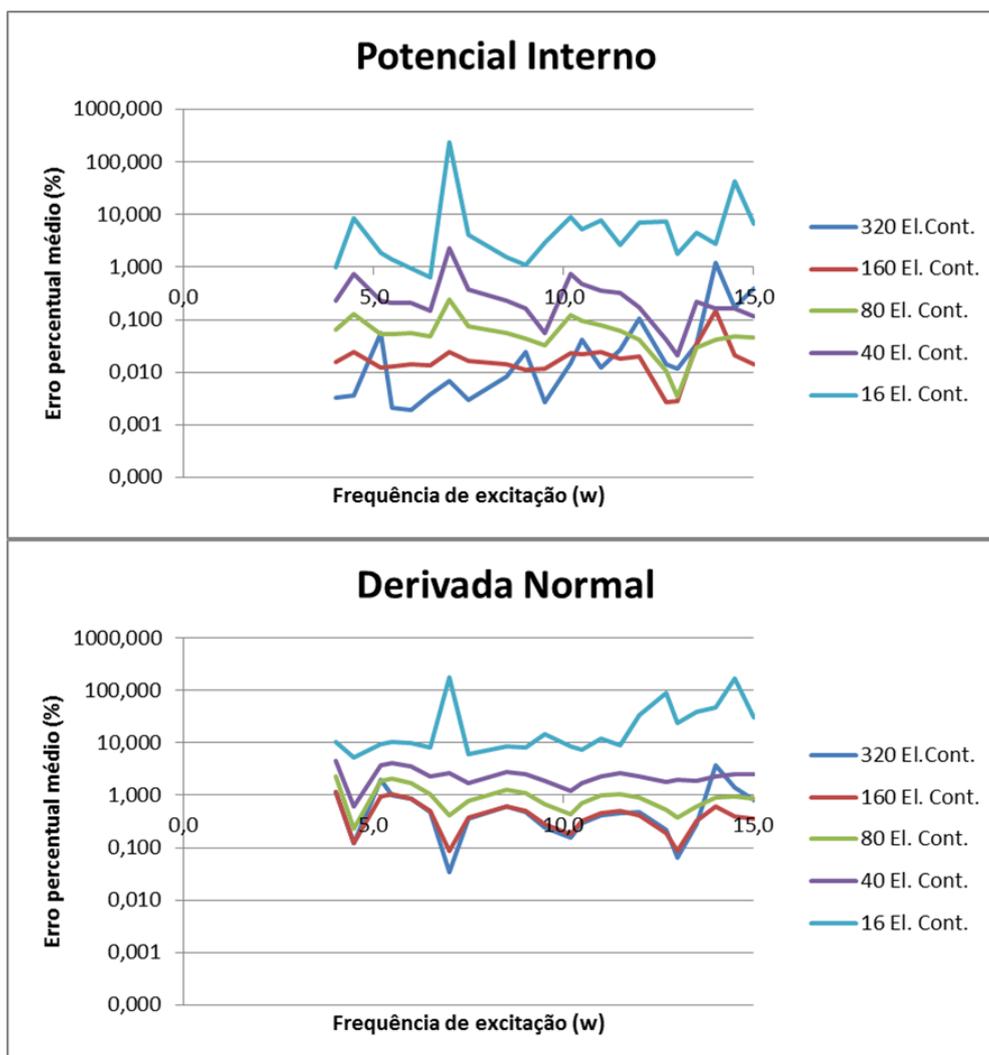


Figura 23 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de interpolação linear utilizando apenas a parte real da matriz do

sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Conforme esperado, o erro no cálculo do potencial se mostrou mais reduzido do que o da derivada normal em todas as configurações de malha. As oscilações devido à captação ou proximidade de uma frequência natural se ampliam e isto é mais pronunciado na determinação da derivada normal.

Os erros são relativamente pequenos, particularmente para o potencial, mas no caso da derivada normal não se reduzem sensivelmente, mesmo com o refinamento da malha. Curvas de erro são muito parecidas com as obtidas com o elemento linear com a parte complexa e real do sistema linear final. Há diferença maior na malha mais refinada, a qual está muito oscilante e com resultados piores para frequências altas.

#### 5.2.4 Simulações MECFD com elementos constantes e parte real

Na Figura 24 estão os resultados obtidos usando o MECFD com de elemento retilíneo e extrapolação constante com uso de somente parte real do sistema linear final.

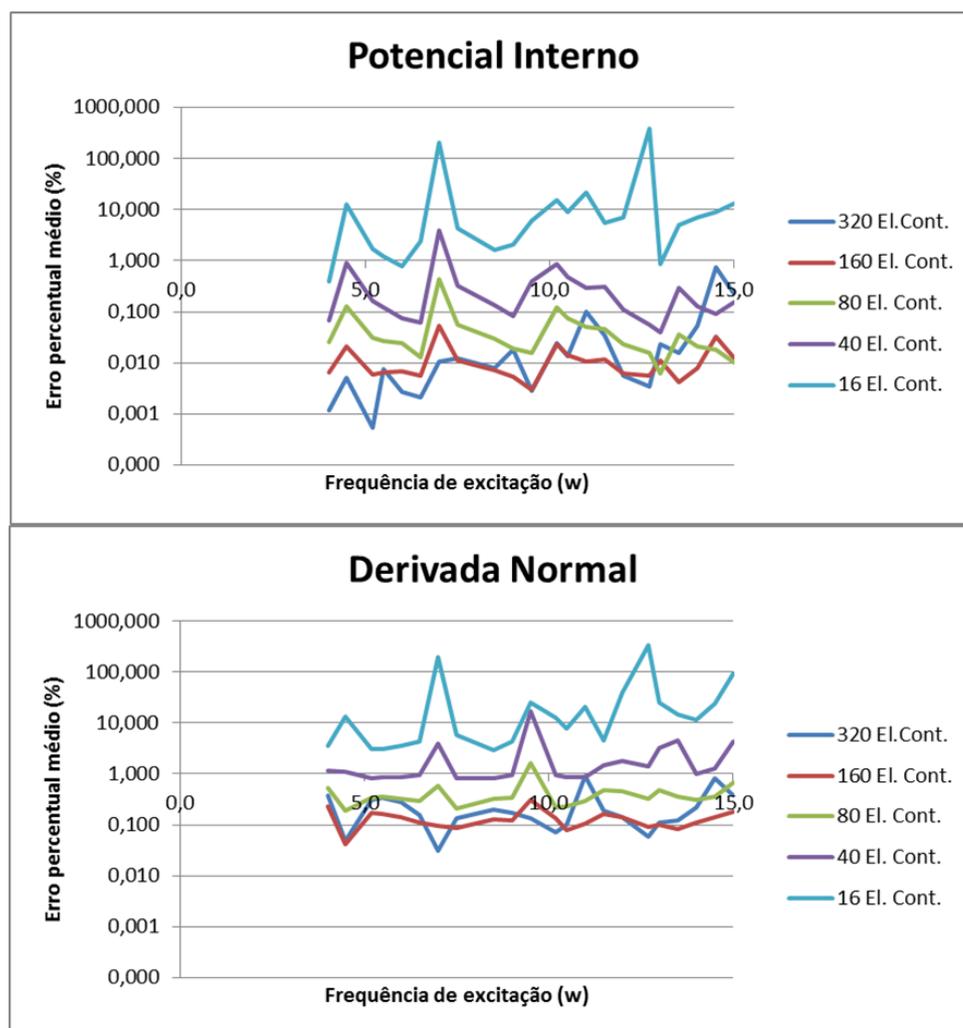


Figura 24 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema da membrana carregada pelo MECFD com elementos de extrapolação constante utilizando apenas a parte real da matriz

do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Em termos gerais, aparentemente todas as configurações de malha oscilam mais que as simulações onde foi utilizado o sistema linear final completo. É preciso notar que este tipo de modelo, que despreza a parte complexa da solução, consiste numa aproximação cujas consequências na precisão da resposta precisam ser mais bem avaliadas.

Assim como observado na simulação com elementos de interpolação linear, o uso apenas da parte real da solução com elementos constantes apresentou resultados com grande oscilação para a malha de 320 elementos, resultados piores do que os obtidos com a malha de 160 elementos. Este é um comportamento fora do esperado. Ainda assim as malhas de 80 elementos ou mais apresentaram grande maioria dos resultados menos que 1%.

Todas as simulações com malhas com refinamento maior igual a 80 elementos de contorno atingiram resultados da ordem de 1% mesmo com os picos de erros relacionados a proximidade as frequências naturais, proporcionando bons resultados para a solução do exemplo considerado pelo MECFD.

#### 5.2.5 Comparativo de entre as medidas de erro

Os erros médio ponderado, absoluto e máximo analítico para simulação do potencial interno com elementos retilíneos e extrapolação constante com 320 elementos de contorno, conforme Figura 25:

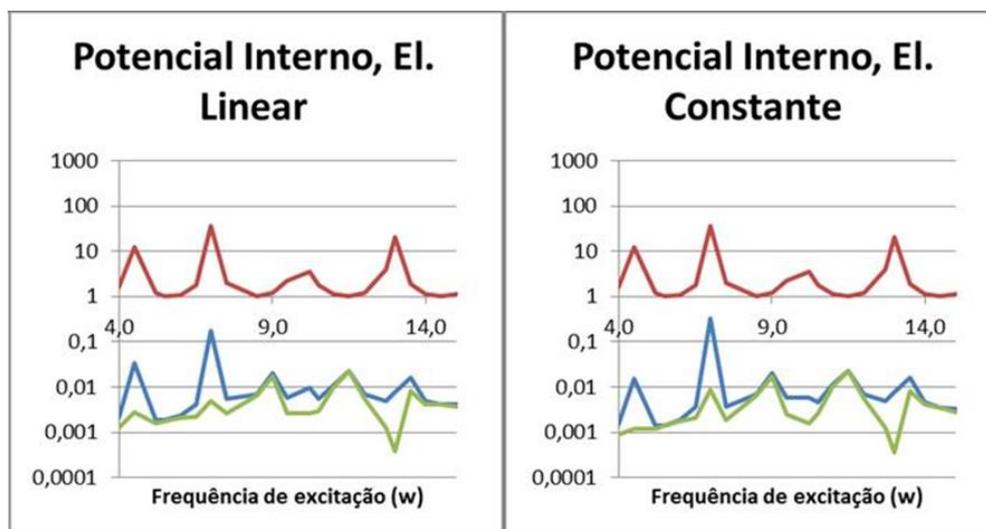


Figura 25 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para o potencial do problema da membrana carregada simulado com 320 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente e a direita com elementos de extrapolação constante.

O valor do potencial analítico é próximo a unidade para a maior parte da curva, aumentando apenas onde ocorrem às frequências naturais. Por esse motivo há pouca diferença entre o erro ponderado e erro absoluto na maior parte da curva.

O erro ponderado tende a aumentar gradativamente com o aumento da frequência, devido a diferença absoluta entre o valor numérico e o analítico com o crescimento da frequência de excitação.

Para a malha de 320, considerada com um alto grau de refinamento nos testes, tanto o uso de interpolação linear quanto constante erros pequenos em ambos os critérios, menores que 0,01% em sua maioria.

O erro médio ponderado, erro absoluto e máximo analítico para simulação da derivada normal com elementos retilíneos e de extrapolação constante, 320 elementos de contorno, está mostrado conforme Figura 26:

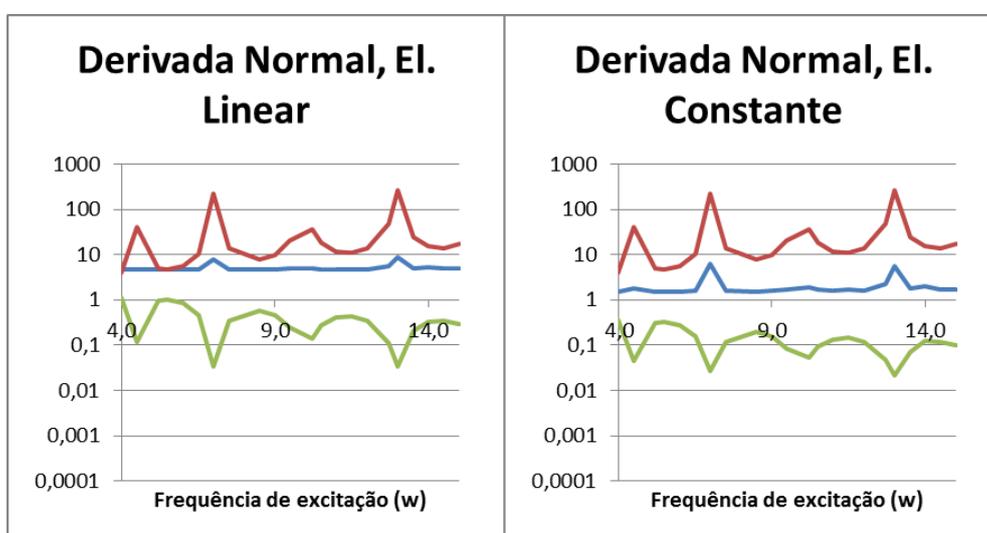


Figura 26 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valores máximos analíticos (curva vermelha) para a derivada normal do problema da membrana carregada simulado com 320 elementos de contorno, à esquerda com elementos interpolados linearmente e a direita com elementos de extrapolação constante.

O erro absoluto é quase constante para a derivada normal. Uma vez que esse erro é a diferença entre o resultado numérico e analítico, o resultado numérico tende a acompanhar os resultados analíticos para as varias frequências de excitação.

Quando a frequência de excitação é próxima a frequência natural do sistema, havendo pouca variação do erro absoluto para essas frequências, o erro ponderado vai apresentar picos de erros “negativos”. Isto ocorre porque o erro ponderado tem uma grande redução, não pela aproximação da simulação numérica estar mais próxima do valor analítico, mas pelo denominador do erro ponderado (o máximo valor analítico encontrado no problema) ter crescido e reduzido o erro ponderado.

A magnitude dos erros do elemento constante são maiores do que os alcançados com o elemento linear, conforme se pode observar na comparação das Figura 25 e Figura 26.

### 5.2.6 Simulações MECID com elementos isoparamétricos lineares

O segundo problema foi solucionado pelo MECID na dissertação de (Barcelos, 2014). Dentre os diversos aspectos de interesse no MECID é de importância se aferir a importância dos pontos internos interpolantes para o resultado. Assim inicialmente foram feitas simulações da solução deste problema com três malhas distintas: uma malha de 84 pontos de contorno (80 elementos) com 49 pontos fonte; malha de 84 pontos de contorno com 81 pontos fonte; e malha de 164 pontos nodais (160 elementos de contorno) com 144 pontos fonte. Nas simulações, a quantidade de pontos internos interpolantes foi tomada como variável de controle e seu valor máximo foi igual a 484. O comportamento das malhas para a frequência de excitação de  $1,5\pi$  segue na Figura 27.

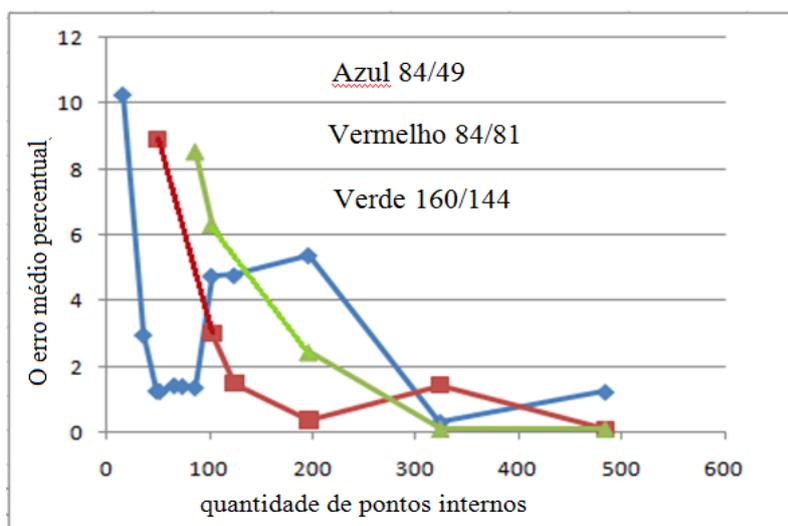


Figura 27 – Erro médio ponderado para diferente quantidade de pontos internos de interpolação utilizando frequência de excitação de  $1,5\pi$  pelo MECID (Barcelos, 2014).

As malhas de contorno mais refinadas precisam de uma maior quantidade de pontos de interpolação para atingirem resultados satisfatórios, mas se aproximam mais da solução exata do que as malhas mais grosseiras uma vez que satisfeita a quantidade satisfatória de pontos interpolantes.

Da Figura 27 também nota-se que de ambas as malhas com 80 elementos de contorno, a malha com um maior número de pontos nodais teve um comportamento mais suave, com uma redução do erro quase monotônica. A curva de 160 elementos de contorno que apresenta monotonicidade possui o maior número de pontos nodais entre as malhas simuladas. Sugerindo que a quantidade de pontos nodais abaixo de um limite impede que uma maior quantidade de pontos internos melhorasse o resultado do método.

De forma geral o aumento do número de pontos internos de interpolação representa uma diminuição do erro médio ponderado, mas não são curvas monótonas. Esse fenômeno pode ter contribuição de diversos fatores, como: a quantidade insuficiente de pontos interpolantes, que pode reduzir o valor da frequência natural por má representação da massa; a redistribuição dos pontos interno (quando uma quantidade

de pontos internos é adicionada os pontos já existentes tem de ser realocados, resultando em uma nova aproximação da carga de domínio, que pode ser pouco inferior a anterior); ou mesmo a proximidade de uma das frequências naturais de oscilação do sistema (frequência natural de 4,443, próxima a frequência de excitação de 4,712) que, como visto nas simulações anteriores, tendem a afetar com maior intensidade as malhas mais pobres.

A análise de malhas determinadas em diferentes frequências de excitação para esse problema foi feita por (Loeffler, et al., 2015). Em que foi utilizado um total de três malhas: de 84 pontos nodais 84 pontos interpolantes e 196 pontos fonte; de 164 pontos nodais 144 pontos interpolantes e 225 pontos fonte; e de 324 pontos nodais 324 pontos interpolantes e 576 pontos fonte. Essas malhas foram utilizadas para a simulação da solução do segundo problema.

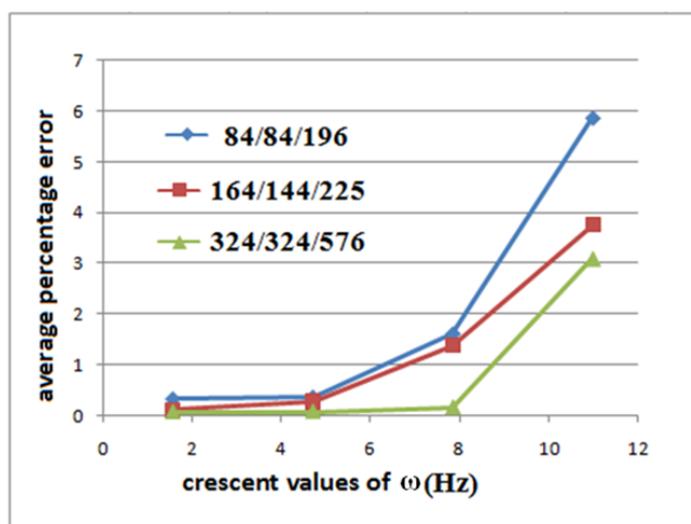


Figura 28 - Erro médio ponderado para malhas de diferentes refinamentos pelo MECID. Simulações realizadas por (Loeffler, et al., 2015).

É possível notar que com o aumento da frequência de excitação há um crescimento significativo no erro médio ponderado em todas as malhas, o que é esperado para o MECID. Para frequências mais baixas há pouca diferença de erro para o refinamento das malhas. As malhas mais refinadas apresentaram erros menores que as mais grosseiras e, conseqüente, representação melhor do resultado para frequências de excitação mais altas.

Em uma simulação com uma malha de 320 elementos com interpolação lineares (324 nós de contorno, pois há nós duplos nas arestas), 324 pontos fonte internos e 576 polos utilizando o MECID foi obtido o erro médio ponderado e erro médio absoluto, que são apresentados na Figura 29, junto à curva com os valores máximos analíticos obtidos para a derivada normal no contorno.

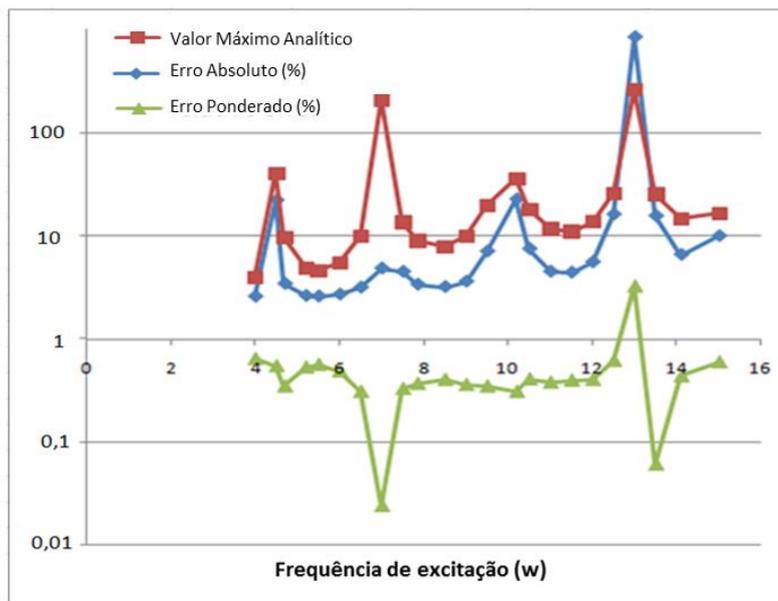


Figura 29 – Erro médio ponderado (verde), erro médio absoluto (azul) e valor máximo analítico (vermelho) para a simulação com uma malha de 320 elementos de contorno pelo MECID, com resultados da derivada normal no contorno do problema.

Na Figura 29 pode-se perceber que o erro médio ponderado parece se estabilizar na MECID, mas os valores no denominador da medida de erro ponderado crescem com o aumento da frequência (valor máximo analítico), numa taxa maior do que o numerador, composto pelo erro absoluto, criando uma impressão de que o método possui uma eficiência igual para toda a faixa de frequência de excitação analisada, quando na verdade a aproximação numérica criada pelo método esta se distanciando do valor analítico real dado pelas equações 5.08 e 5.09.

Na Figura 26 o erro se reduz na MECFD, como era de se esperar, o desempenho numérico da MECFD é melhor, pois a curva de erro absoluto é bem mais estável no espectro de frequências de excitação escolhido, enquanto que na MECID há evidente amplificação desta.

Enquanto a MECID constrói a matriz de inércia a partir de aproximações com funções base radial e usa uma solução fundamental apenas difusiva, a MECFD possui a frequência de excitação na própria solução fundamental, construindo um espaço funcional bem mais completo. Contudo, os resultados da MECID são razoáveis, particularmente tendo em vista a relativa complexidade do problema, envolvendo dinâmica e determinação da resposta em termos de forças de superfície.

### 5.3. Terceiro Problema

Como solucionado no trabalho de Zhu e Zhang (2007), nesta simulação, será resolvido um problema regido pela equação de Helmholtz onde a geometria de contorno é tomada por um círculo unitário com centro na origem do sistema de coordenadas. A velocidade de propagação de onda  $c$  é tomada unitária e as condições de contorno são somente do tipo essencial e são iguais a unidade:  $u = 1$  quando  $r = 1$ .

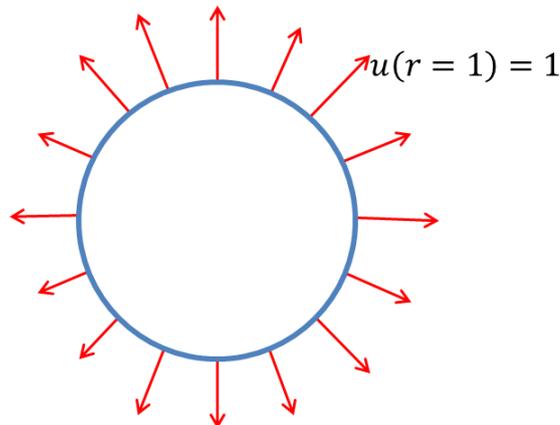


Figura 30 – Condições de contorno para problema da membrana circular carregada.

A solução analítica para o problema proposto é dada pela equação (5.12):

$$u = \frac{J_0(\omega r)}{J_0(\omega)} \quad (5.12)$$

E também conhecida é sua derivada normal:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\omega \frac{J_1(\omega r)}{J_0(\omega)} \quad (5.13)$$

As equações (5.12) e (5.13) são compostas pela equação de Bessel de primeira espécie de ordem zero e ordem um, que estão representadas graficamente na Figura 42, e apresentadas com detalhe no Apêndice D - Funções de Bessel Modificadas. Nota-se que a essas funções cruzam o eixo das abscissas em diversas ocasiões à medida que o argumento cresce. Quando a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero tender a zero, as funções (5.12) e (5.13) tendem ao infinito, nesta ocasião se atinge as frequências naturais do sistema. Isso acontece quando a frequência de excitação assume os seguintes valores no intervalo das simulações: 2,41; 5,52; 8,65; 11,79; 14,93.

Uma vez que a condição de contorno prescrita é do tipo essencial em todo contorno, o cálculo do erro será feito com base em valores internos para o potencial calculados em [0,25;0], [0,5;0], [0,75;0], [0,1;0]. As frequências de excitação usadas nos testes foram: 1,0; 2,0; 3,5; 4,5; 5,2; 6,0; 6,5; 7,0; 7,5; 8,0; 8,5; 9,0; 10,2; 10,5; 11,0; 11,5; 12,0; 12,7; 13,0; 13,5; 14,0; 14,5; 15,0.

Devido ao uso de elementos lineares para interpolar um contorno circular, esperam-se erros de aproximação devido à geometria. Esses erros são maiores quando são utilizadas malhas com poucos elementos, que se representam com menor fidelidade o contorno real quando comparados às malhas com muitos elementos. Nos elementos de extrapolação constante, para malhas pouco refinadas também se espera um erro gerado pela geometria, pois o nó funcional se localiza no meio do elemento, afastado do contorno real do problema. Este erro também se reduz com o refinamento, e pode-se também esperar uma convergência maior das curvas de erro dos elementos de extrapolação constante com o refinamento da malha.

### 5.3.1 Simulações MECFD com interpolação linear

Os resultados das simulações para o MECFD com elemento retilíneo e interpolação linear estão na Figura 31:

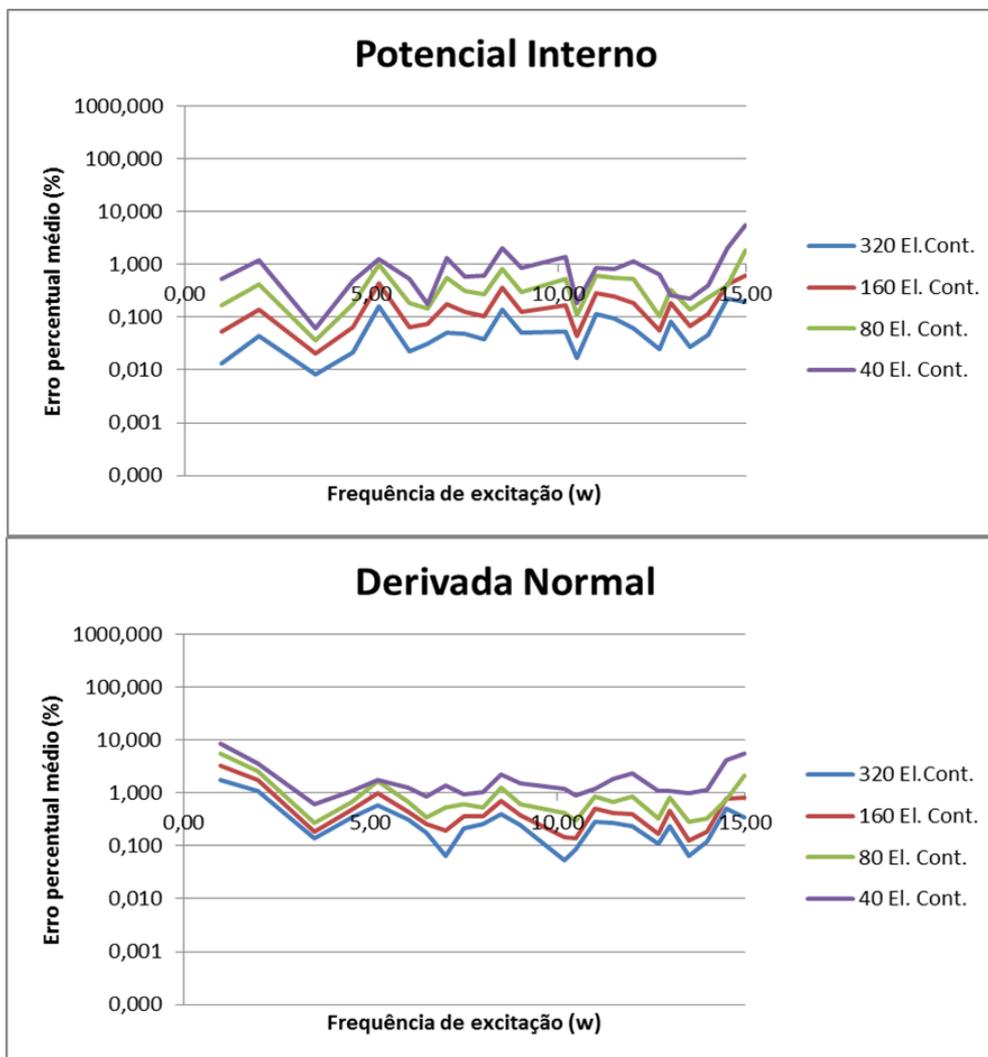


Figura 31 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de interpolação linear, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Dos gráficos na Figura 31 vê-se que os valores de erro do potencial são um pouco menores do que os da derivada normal, e que essa diferença aumenta com o refinamento da malha, uma vez que a convergência para o valor exato da solução é maior na curva do potencial. Ainda assim, ambas as curvas apresentam pouca melhoria nos seus resultados com o refinamento de malha na faixa de frequências testada. Ressalta-se que o nível dos erros foi pequeno, da ordem de 1% para malha mais grosseira, não obstante o erro cometido da geometria do contorno.

Ambas as curvas apresentam oscilações com o aumento da frequência, e apesar de conter cinco frequências naturais no intervalo das simulações, não houve grandes picos de erro como em simulações anteriores.

### 5.3.2 Simulações MECFD com interpolação constante

As simulações do MECFD com uso de elementos de extrapolação constante estão na Figura 32:

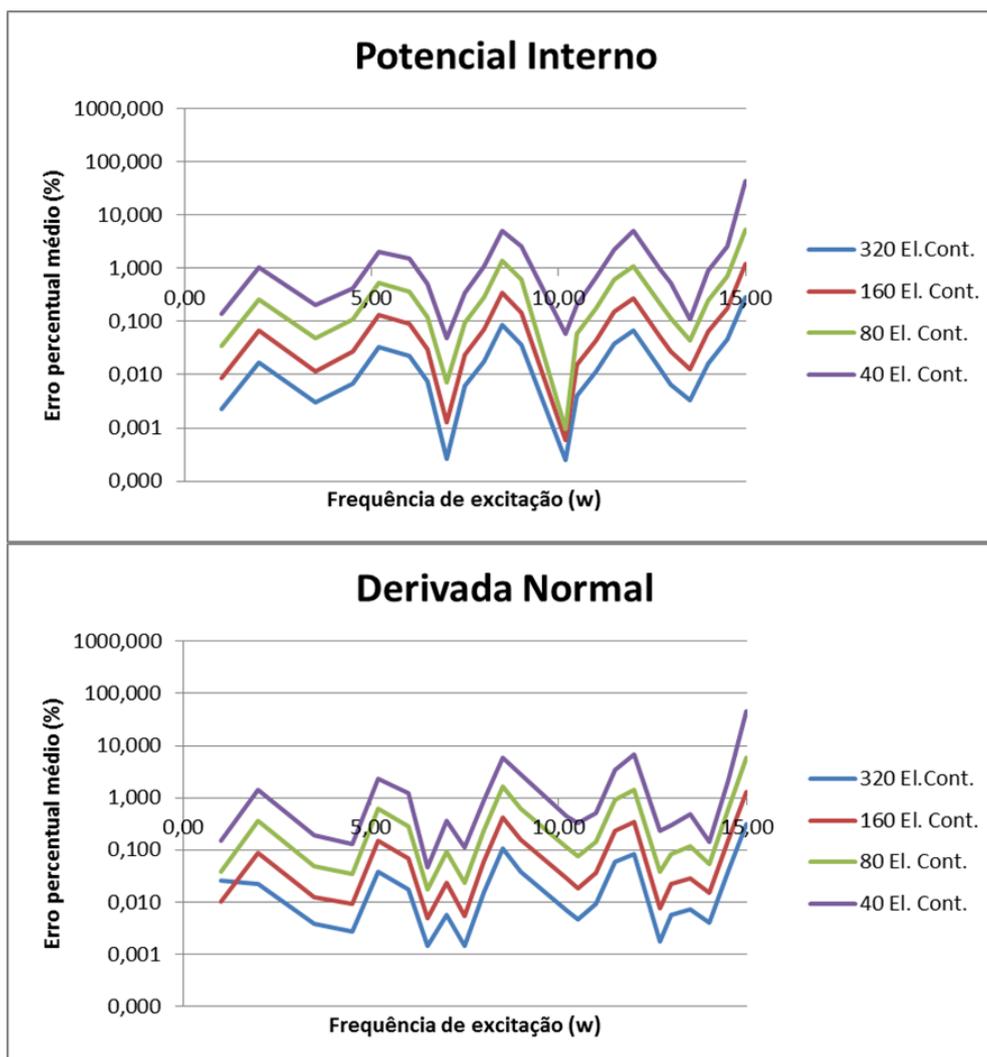


Figura 32 - Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Com o uso da extrapolação constante nos elementos de contorno, as curvas de erro de potencial e derivada normal apresentaram erros ponderados muito próximos para cada malha, mesmo para frequências de excitação próximas das frequências naturais.

Para todos os refinamentos, os erros calculados com essa aproximação foram menores que com o uso de interpolação linear nos elementos de contorno, o que é

surpreendente. Talvez a razão para tal comportamento se deva a indefinição da normal no contorno não suave, que não ocorre no elemento constante. As curvas de erro para esta simulação também tiveram menores oscilações, e apresentaram maior clareza quando se aproximaram das frequências naturais, como também se mostraram com uma maior convergência para o valor exato quando comparada com as simulações com o uso de interpolação linear.

Nota-se que as curvas possuem um perfil similar para os diferentes refinamentos, quase idênticas, com um decréscimo no erro quase constante na escala logarítmica, quando se dobra o número de elementos de contorno.

### 5.3.3 Simulações MECFD com elementos com interpolação linear e parte real

Na Figura 33 os resultados para as simulações com MECFD utilizando elementos retilíneos com interpolação linear nos elementos de contorno e uso de apenas parte real do sistema linear resultante final.

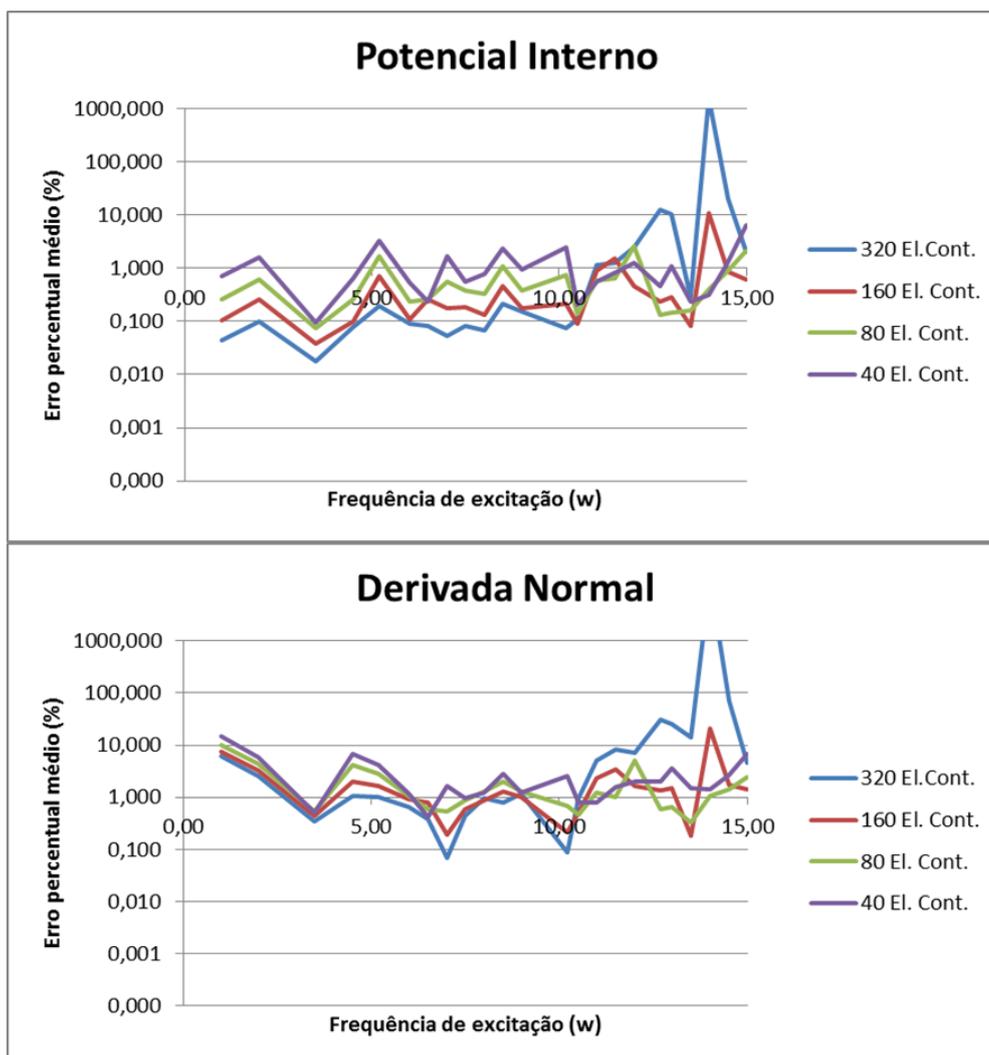


Figura 33 Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de interpolação linear e utilizando apenas a parte real da matriz do

sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Essas simulações tiveram uma baixa convergência da resposta para o valor analítico. O potencial se revelou ligeiramente mais convergente com o refinamento das malhas. Na malha de 320 elementos de contorno se nota uma grande instabilidade, já evidenciada na malha de 160 elementos para as frequências de excitação mais altas.

Em síntese, as simulações para essa configuração do MECFD apresentaram muita instabilidade nas curvas de erros e os piores resultados das simulações até então.

#### 5.3.4 Simulações MECFD com elementos com interpolação constante e parte real

Na Figura 34 estão os resultados obtidos usando o MECFD de elemento retilíneo e extrapolação constante com uso de somente parte real do sistema linear resultante.

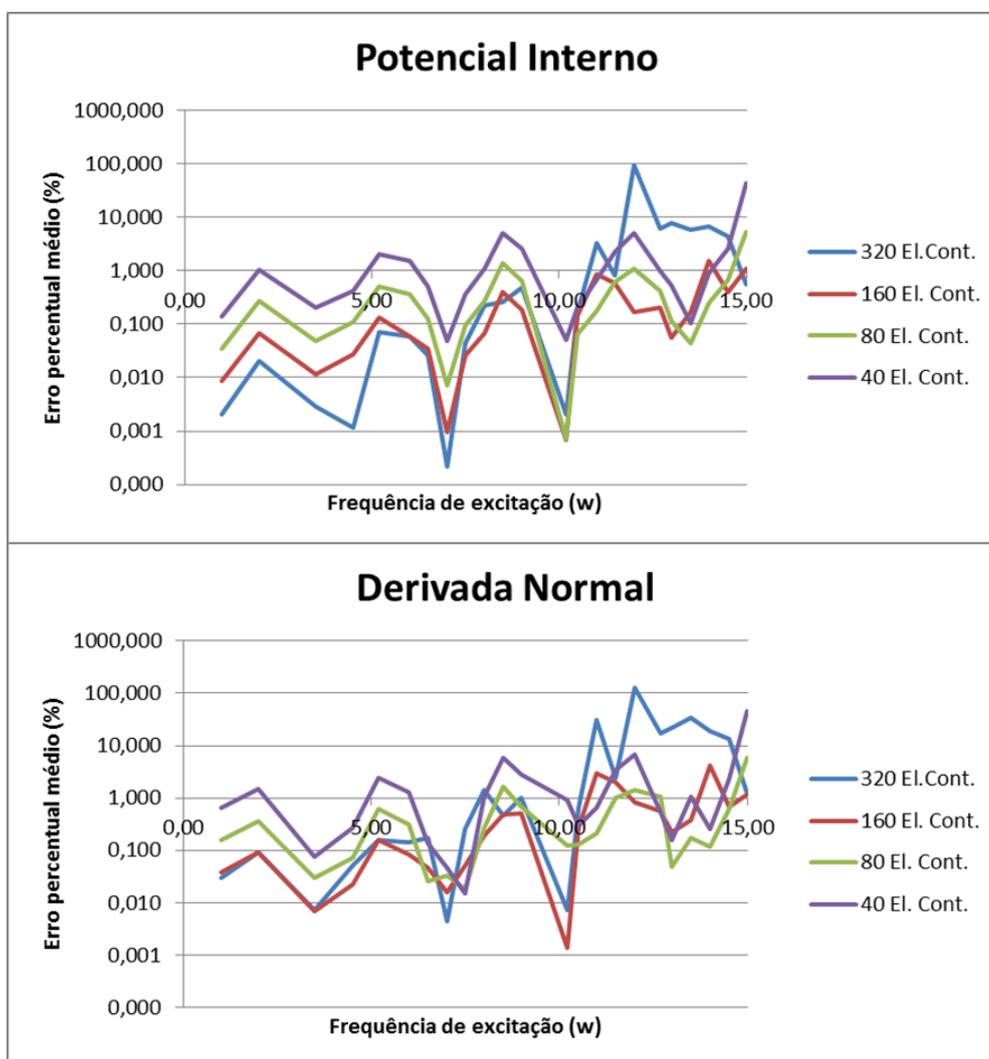


Figura 34 Erro médio ponderado para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e utilizando apenas a parte real da matriz do sistema linear resultante, erro calculado no potencial (gráfico acima) e erro calculado para a derivada normal (gráfico abaixo).

Do mesmo modo que no caso de elementos com interpolação linear, o MECFD nesta configuração apresentou maiores erros com a malha mais refinada, denotando certa instabilidade. Os erros no potencial são próximos aos erros da derivada normal, e em geral, mais baixos do que com o uso da interpolação linear. Foram piores também quando comparados aos resultados obtidos com uso do elemento de extrapolação constante comum, com parte complexa da solução.

### 5.3.5 Comparativo de entre as medidas de erro

Nos gráficos que se seguem, dados na Figura 35, são apresentadas as curvas de erro médio ponderado, erro absoluto e máximo analítico para simulação do potencial com 80 elementos de contorno.

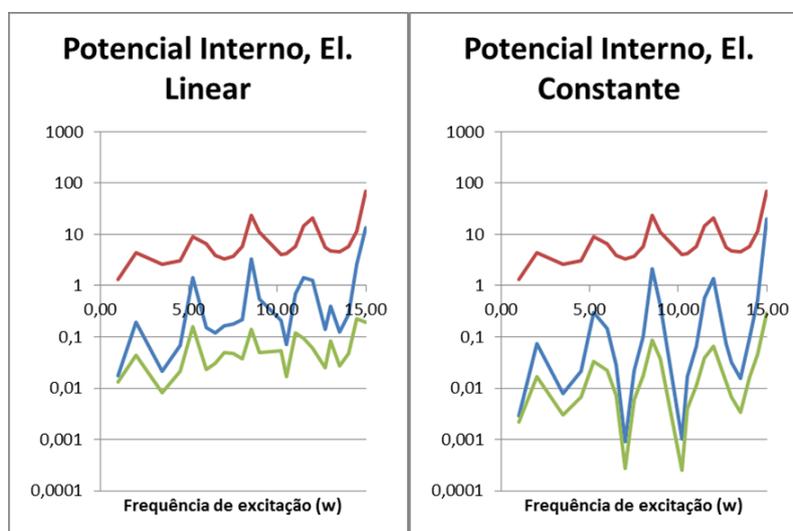


Figura 35 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valor máximo analítico (curva vermelha) dos valores de potencial interno para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e interpolação linear.

Destaca-se nos gráficos a curva do máximo analítico, que sobe com frequência, e aumenta o denominador da equação da curva de erro médio ponderado. Ainda assim o erro médio ponderado tende a ter um leve crescimento causado pelo erro médio absoluto que cresce a uma taxa maior que os valores do máximo analítico, indicando uma possível dificuldade do método a representar o problema para frequências mais altas.

Para o elemento constante os picos de erro ocorrem apenas nas frequências naturais, já para o elemento linear surgem picos fora dessas frequências na curva de erro absoluto, os picos onde ocorrem as frequências naturais são suavizados na curva de erro ponderado pelo alto valor máximo analítico enquanto os picos fora das frequências naturais não são, não ficando totalmente claro onde são as frequências naturais do sistema na curva do erro ponderado que apresenta grande oscilação.

O erro médio ponderado, erro absoluto e máximo analítico para simulação da derivada normal da variável básica com elementos retilíneos e extrapolação constante, 80 elementos de contorno, Figura 36:

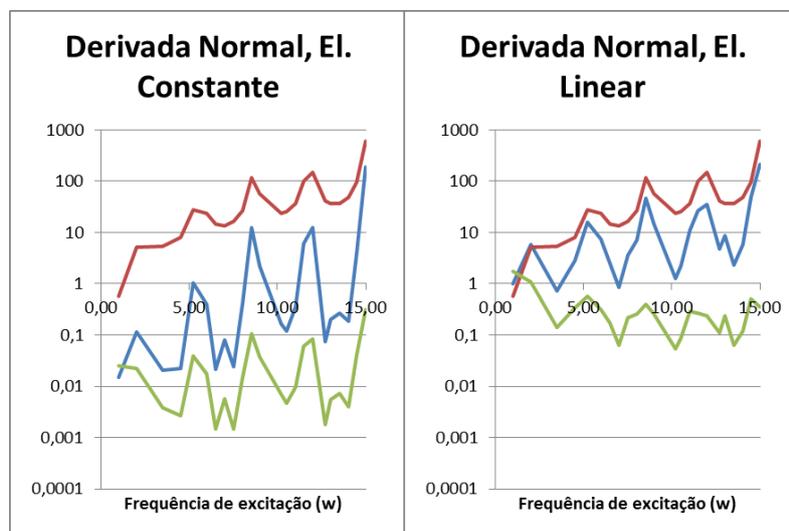


Figura 36 - Erro médio ponderado (curva verde), erro médio absoluto (curva azul) e valor máximo analítico (curva vermelha) dos valores da derivada normal para as frequências simuladas no problema do círculo de raio unitário pelo MECFD com elementos de extrapolação constante e interpolação linear.

A curva de máximo analítico da derivada normal aumenta a uma taxa ainda maior que o do potencial e o erro absoluto também cresce para os dois tipos de interpolação, entretanto, devido à alta taxa de crescimento da curva de máximo analítico a curva de erro ponderado se mantém constante para a extrapolação constante e até mesmo apresenta uma leve taxa de decréscimo para a interpolação linear.

### 5.3.6 Simulações com função de Neumann

Em uma simulação de interesse a esse trabalho, Zhu & Zhang (2007) fazem uma comparação entre o MECFD utilizando a função de Hankel como solução fundamental (Abordagem 1, equivalente a utilizar a função de Bessel modificada), o MECFD utilizando a função de Neumann (Abordagem 2) e o Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade (MECDR) (Abordagem 3) (Partridge, et al., 1992).

O contorno foi discretizado em 32 elementos de contorno constantes iguais para o MECFD e com 24 elementos de contorno constantes iguais para o MECDR, esse último com  $24 \cdot 7 + 1$  pontos internos dispostos em oito círculos concêntricos com raios: 0,875; 0,75; 0,625; 0,5; 0,375; 0,25; 0,125; e 0.

Nesta simulação Zhu & Zhang (2007) utilizam os valores da derivada normal da variável básica no contorno para o cálculo do erro, e utiliza o valor máximo do erro encontrado em todo contorno para os gráficos da Figura 37 e da Figura 38, diferente dos dados apresentados nesse trabalho, onde se usa a média do erro nos pontos amostrais.

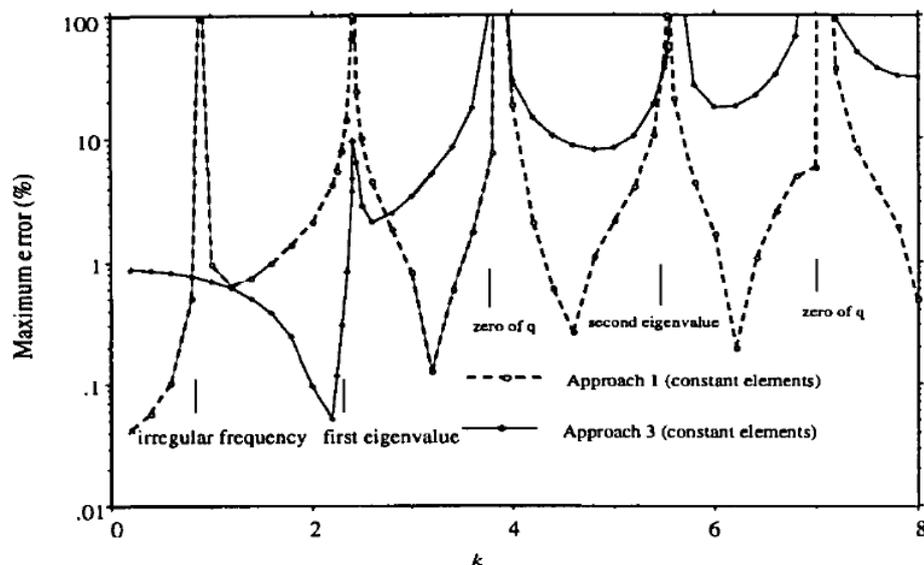


Figura 37 - Máxima porcentagem de erros nas Abordagens 1 e 3 versus frequência de excitação (Zhu & Zhang, 2007).

A curva da Abordagem 1 (solução fundamental de Hankel) apresenta bons resultados para boa parte das frequências de excitação, mesmo para uma malha com poucos elementos de contorno. Destacam-se as frequências naturais, onde o erro tende a crescer. Nota-se que para a Abordagem 3 (MECDR), que tem menor capacidade de representar frequências de excitação mais altas, assim como o MECID, devido a formação de matrizes associadas a aproximações radiais multiplicadas a frequência natural, o erro cresce com o aumento da frequência enquanto o erro da Abordagem 1 pouco se altera fora das frequências naturais.

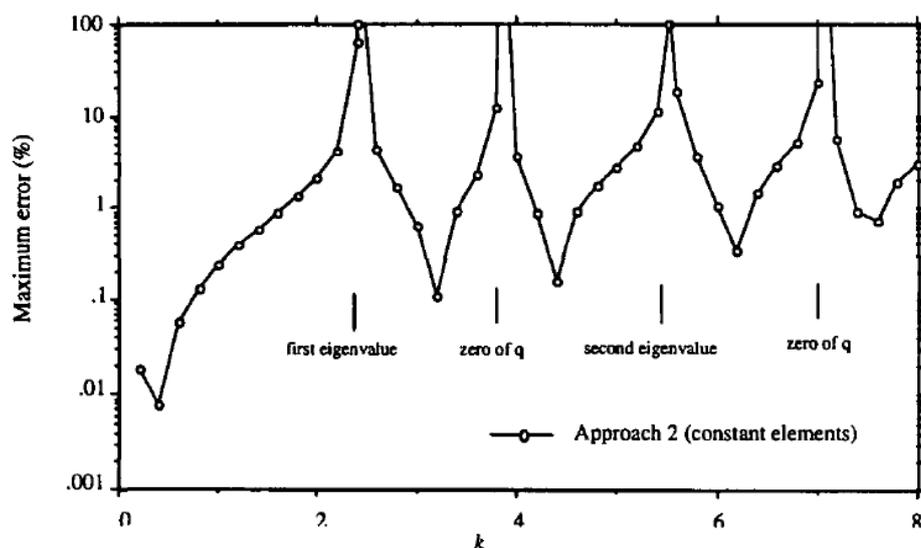


Figura 38 - Máxima porcentagem de erros da Abordagem 2 versus frequência de excitação (Zhu & Zhang, 2007).

Utilizando a função de Neumann como solução fundamental observam-se resultados semelhantes ao uso da função de Hankel, apesar da Abordagem 2 aparentar

uma leve queda de desempenho quando a frequência de excitação cresce. Também se pode notar que a Abordagem 2 se mostra mais influenciável pelos zeros de  $q$ , e principalmente pelas frequências naturais do sistema, uma vez que seu erro cresce nas proximidades dessas frequências muito antes do que é notado na Abordagem 1. Isso denota uma maior sensibilidade dessa abordagem a frequências naturais.

Destaca-se também para as simulações de Zhu & Zhang (2007) grandes picos de erro em valores onde não há frequências naturais, mas há outro fenômeno de interesse devido à natureza da equação analítica da solução do problema. Os valores da derivada normal obtidos analiticamente sendo zero quando a equação (5.11) tem  $J_1(\omega r) = 0$  e em suas proximidades faz com que os erros calculados pontualmente tenham seus denominados tendendo à zero, levando a curva do erro a tender ao infinito. Nas simulações feitas nesse trabalho foi utilizado o maior valor absoluto analítico do problema como denominador em todos os cálculos dos erros para uma frequência de excitação, assim o denominador do erro dificilmente teria o valor de zero e consequentemente o erro não tenderia ao infinito se não por estar próximo a uma frequência natural. Por essa razão os picos de erro referentes aos zeros de  $q$  não aparecem nas simulações deste trabalho.

### 5.3.7 Simulações com a MECID

Por simples questão de conveniência, particularmente relacionada ao fato de que duas nuvens de pontos internos são utilizadas, uma referente aos pontos de interpolação e outros ligados aos pontos fonte, utilizou-se da simetria radial, onde o fluxo normal é nulo entre secções da circunferência. Logo para as simulações foi utilizada a metade de um círculo, de acordo com a Figura 39:

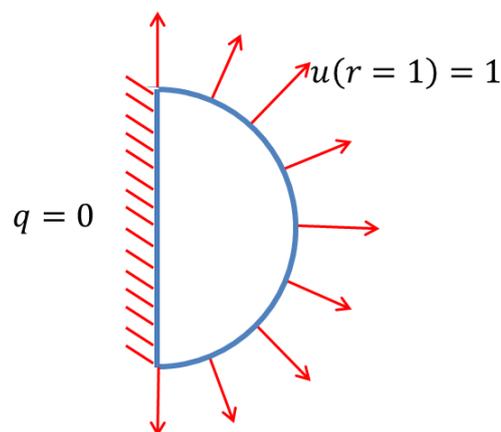


Figura 39 – Geometria simplificada do terceiro problema para a solução pelo MECID.

As simulações foram realizadas levando em conta as considerações geométricas apresentadas anteriormente. Para o intervalo de variação das frequências de excitação foi tomado um valor inteiro, variando de 1 a 15. Foram utilizados apenas elementos

isoparamétricos com interpolação linear e a função radial  $f(r) = r^2 \ln r$  (placa fina). A figura 40 mostra os resultados de potencial e derivada normal para diversas malhas:

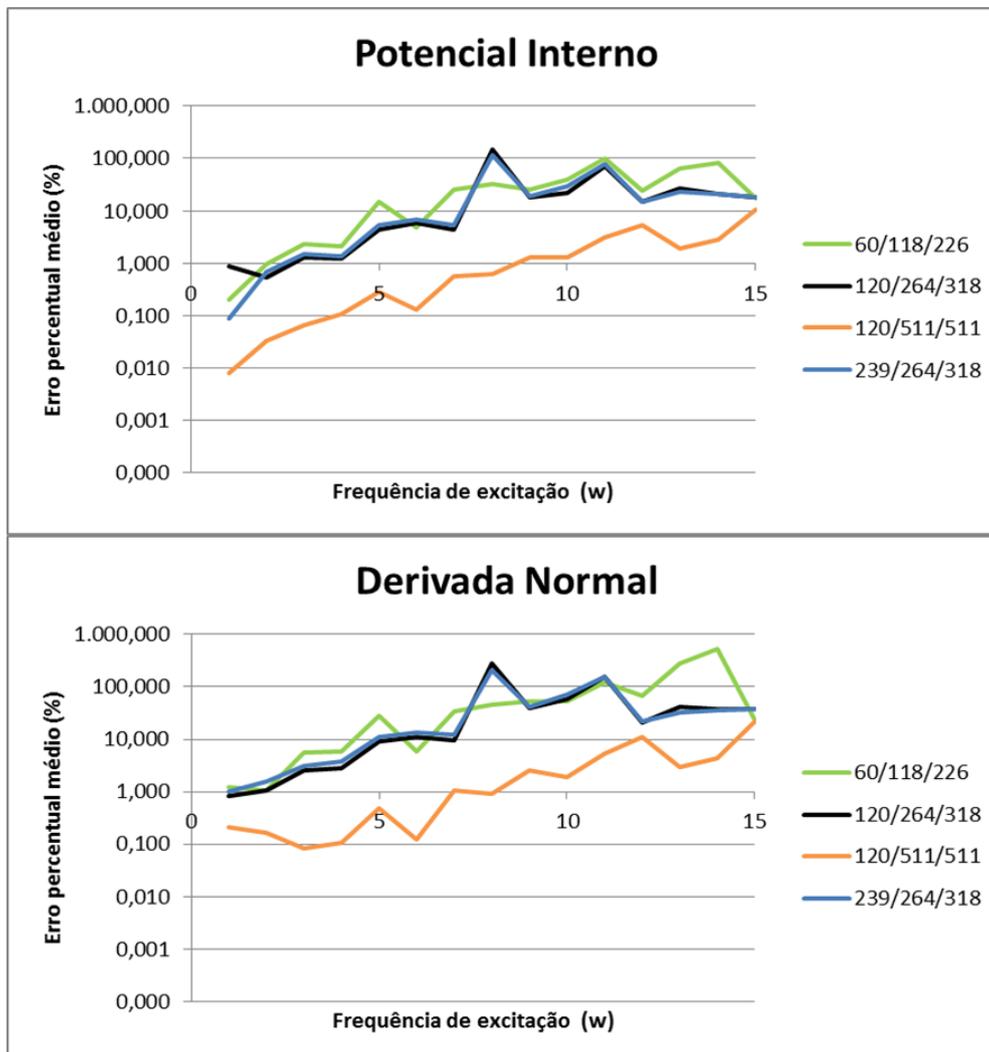


Figura 40 - Erro médio ponderado calculado para o MECID com o uso de malhas de: 60 elementos de contorno, 118 pontos fonte internos e 226 polos internos (curva verde); 120 elementos de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva preta); 120 elementos de contorno, 511 pontos fonte internos e 511 polos internos (curva laranja); e 239 elementos de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva azul).

Para frequências mais baixas, o método alcançou resultados com erros ponderados baixos, entretanto o erro cresce com o aumento da frequência atingindo valores superiores a 100% em alguns poucos casos. As curvas tiveram comportamento semelhante, e picos de erro com baixa amplitude e próximos a frequências naturais.

Nota-se neste caso que o refinamento do contorno parece ter pouca influência no erro ponderado para as malhas testadas, comparativamente ao efeito da introdução de pontos no interior. Isto se percebe facilmente quando se toma as malhas de 120/264/318 e 239/264/318, sendo que a última possui refinamento de contorno quase duas vezes maior, mas apresenta uma curva de erro quase idêntica a menos refinada.

A questão parece se explicar pelo efeito mais significativo da introdução de pontos no interior, num caso em que acontece o fenômeno da divergência geométrica.

Sabe-se que uma maior exatidão na aproximação do domínio por funções de interpolação deve ser alcançada por dois fatores: com uma distribuição interna dos pontos de forma mais eficiente, acompanhando o formato do contorno; e com a adição, com um maior número de pontos internos, ou seja, dando mais informação sobre a ação de domínio. Nos casos em que há a chamada divergência geométrica, é muito difícil alocar numerosos pontos próximos do centro, ou melhor, fazer com que a densidade deles no entorno no centro (pensando em termos de um sistema polar de coordenadas) seja a mesma nas proximidades do contorno. Assim, tais problemas são efetivamente desvantajosos quando se usam pontos internos.

A prova disso é que a malha de 120/511/511 foi feita diferentemente das demais, alocando os pontos fonte internos em circunferências concêntricas de tal forma que a distância entre uma circunferência e a próxima, seja aproximadamente a distância entre os pontos que ocupam a mesma circunferência, procurando homogeneidade na distribuição dos pontos fonte internos. Desta forma, essa malha possui maior homogeneidade e número de pontos internos que as outras malhas simuladas, e como resultado apresentou os melhores resultados para todas as frequências de excitação.

Em uma comparação dos resultados obtidos com MECID e MECFD, as curvas de erro ponderado para algumas malhas desses dois métodos estão na Figura 41:

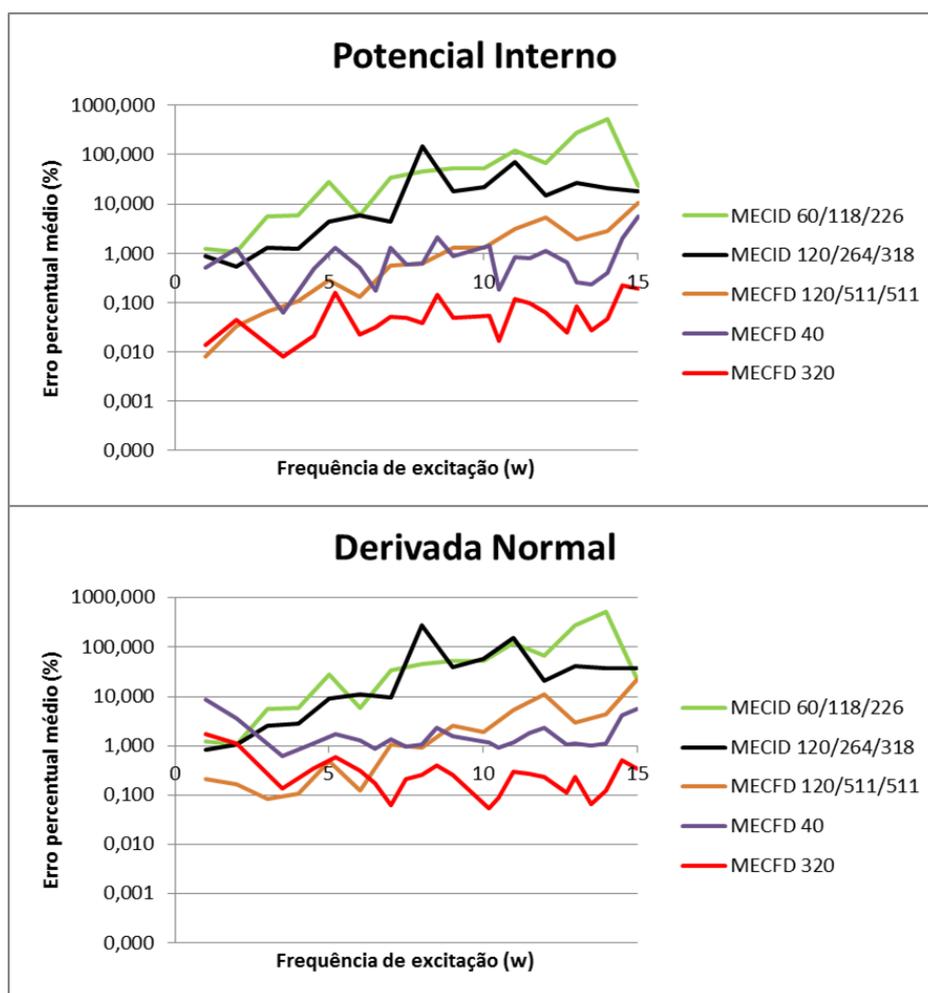


Figura 41 – Comparativo do erro médio ponderado do MECID com o MECFD com uso de malhas de 60 elementos de contorno, 118 pontos fonte internos e 226 polos internos (curva verde); 120 elementos

de contorno, 264 pontos fonte internos e 318 polos internos (curva preta); e 120 elementos de contorno, 511 pontos fonte internos, e 511 polos internos (curva laranja) para o MECID e 40 elementos de contorno (curva roxa) e 320 elementos de contorno (curva vermelha) para o MECFD.

Embora para as frequências mais baixas de excitação o MECID apresente erros pequenos menores, à medida que se aumenta a frequência de excitação os erros do MECID crescem a uma taxa muito alta enquanto o MECFD não apresenta um aumento significativo nos erros, como explicado anteriormente devido à multiplicação da matriz de massa pelo quadrado da frequência de excitação, aumentando o impacto dos erros que são cometidos pela aproximação com funções radiais na construção da matriz de massa.

O MECID, além da qualidade da malha de contorno, também é susceptível ao posicionamento e a quantidade de pontos internos. Uma distribuição insuficiente de pontos internos limita exatidão da solução para malhas mais refinadas, assim o refinamento da malha de contorno deve ser acompanhado por uma melhor representação do domínio, como pode ser notado na curva de 120/264/318 que tem valores de erro semelhantes à de 60/118/226, enquanto a curva de 120/511/511 possui resultados superiores, de forma que se pode esperar uma convergência a solução exata quando, além do refinamento da malha de contorno, se oferecer uma maior quantidade de pontos internos e boa alocação destes.

Assim, pode-se afirmar que os resultados do MECID são de ordem semelhante aos do MECFD quando utilizados parâmetros favoráveis em frequências mais baixas.

Outra característica da MECID durante os testes realizados é que devido a solução fundamental não depender da frequência de excitação como no MECFD, as matrizes H, G e M permanecem inalteráveis.

## 6. Conclusões

Nas simulações construídas pelo MECFD com elementos constantes no primeiro problema, as curvas de erros tiveram picos próximos às frequências naturais bem definidos e erros abaixo de 0,1 para malhas mais refinadas. Os erros aumentaram para frequências mais altas, apesar da curva de máximo analítico não apresentar crescimento, evidenciando uma dificuldade do método para representar frequências mais altas. Com o uso de interpolação linear houve uma maior convergência à solução analítica, como esperado de uma função de interpolação de ordem superior.

O uso do sistema linear sem a parte complexa apresentou resultados menos exatos que o modelo completo, principalmente próximo a frequências naturais e para frequências mais altas, onde o método apresenta dificuldades de representação numérica. Os maiores erros nessas regiões podem estar associados a uma maior sensibilidade a frequências transversais.

O MECID também se apresentou sensível às frequências mais altas e frequências naturais, especialmente com uso de malhas mais grosseiras, apresentando comportamento similar ao MECFD. Quando comparadas as simulações para esse problema, notam-se resultados ligeiramente melhores para o MECFD.

No segundo problema, o MECFD alcançou erros muito baixos para a malha mais refinada, próximo a 0,001 para o potencial e 0,1 para a derivada normal. Os resultados piores para o cálculo da derivada normal são esperados devido ao fato de se estar representando uma grandeza que é uma derivada normal do potencial. Além disso, há o maior efeito da magnitude das frequências mais altas sobre as derivadas.

Curiosamente, as simulações feitas com a MECFD refinando a malha com extrapolação constante convergiram mais rápido para o resultado exato, mas para as baixas frequências. Espera-se, contudo, que para frequências mais altas, mesmo com um aumento no refinamento das malhas nas simulações, o método com extrapolação constante apresente menor eficiência nos resultados do que a interpolação linear.

Com a técnica de se retirar a parte imaginária do sistema linear final do MECFD, se obteve uma resposta muito similar ao sistema completo, com resultados ligeiramente piores e uma pequena instabilidade nas curvas para frequências mais altas.

Ainda neste segundo problema, o MECID forneceu bons resultados quando utilizada uma quantidade adequada de informação do domínio. De forma geral, o aumento do número de pontos internos de interpolação resulta num menor erro, até que se atinja seu ponto de saturação. Para frequências mais altas na faixa de simulação, o erro se eleva em todas as malhas, ainda que as mais refinadas atinjam resultados melhores. Nas frequências mais baixas todas as malhas encontram erros pequenos, com número de erro próximo para os diferentes refinamentos utilizados.

O terceiro problema também apresentou uma maior convergência para o valor exato das curvas de erro com extrapolação constante, nesse problema além da maior convergência natural de malhas grosseiras com elementos de interpolação mais simples, ocorreu a melhor aproximação do modelo numérico com a equação analítica à medida que se refina a malha do MECFD para elemento de extrapolação constante, como dito anteriormente na seção 5.3.

As simulações do terceiro problema com o MECFD já ofereceram resultados com erro menor que 1% para a malha mais grosseira, as malhas com uso de extrapolação constante atingiram resultados muito superiores aos obtidos por malhas com interpolação linear, sugerindo que possa ser usado um refinamento superior para atingir resultados ainda melhores para os elementos com interpolação linear. Com o uso de somente parte real das H e G foram obtidos resultados muito próximos aos obtidos pelo método tradicional para as frequências mais baixas, mas para as frequências mais altas, sobretudo para malhas mais refinadas, foram obtidos erros muito maiores.

Mesmo com o uso de malhas pouco refinadas Zhu & Zhang (2007) conseguiram alcançar resultados abaixo de 1% de erro quando não próximo a frequências naturais de excitação, a função de Neumann se mostrou tão eficiente quanto a função de Hankel para a solução do problema, com a ressalva de a função de Hankel se comportar melhor próximo a singularidades do problema.

A difícil locação de pontos internos na geometria se torna um empecilho ao uso do MECID, entretanto com maior atenção a distribuição de pontos internos o método se mostrou capaz de alcançar resultados tão bons quanto os do MECFD para frequências mais baixas, e mesmo em frequências mais altas deixou pouco a desejar.

De forma geral nas simulações realizadas, o MECFD se mostrou superior ao MECID quanto à aproximação ao resultado exato, mas para frequências não muito altas o desempenho do MECID é bastante satisfatório. Conforme se pode observar, mesmo o MECFD apresentou problemas de desempenho para frequências mais altas.

Não só nos problemas de Helmholtz aqui abordados, mas também em problemas difusivo-advectivos, problemas de propagação de ondas e outros, quando resolvidos usando a respectiva solução fundamental como função auxiliar na formulação integral comumente o desempenho tem exatidão superior a de outras formulações e métodos numéricos. Mas, apesar de apresentar resultados superiores, o uso de soluções fundamentais correlatas tem limitações que vão além da dificuldade matemática ou do custo computacional. Tais formulações tendem a ser pouco flexíveis. Surgem então formulações alternativas como a MECDR, que permitem uma abordagem numérica a problemas de autovalor e análise inversa.

Levando em conta as limitações da solução com uso da solução fundamental correlata ao problema, percebe-se que é válido investir em novas modelagens do MECID de forma a se chegar a uma consolidação de mais uma ferramenta de solução com o MEC ao alcance dos profissionais de engenharia.

Vale ressaltar que todas as técnicas aqui apresentadas trabalham com matrizes cheias e não simétricas. O problema do custo computacional é, de fato, um problema sério, mas as formulações propostas não visam alcançar soluções menos custosas computacionalmente.

O objetivo deste trabalho foi comparar uma formulação robusta e clássica do MEC, que tem como principal deficiência a ausência de flexibilidade. A MECID é uma alternativa importante no sentido de suprir esta lacuna com o MEC. Atualmente, uma quantidade enorme de técnicas numéricas usando funções radiais são propostas no contexto do Método dos Elementos Finitos. A técnica com Dupla Reciprocidade foi proposta há mais de 30 anos e também usa funções radiais. Contudo, os grandes

programas comerciais que usam o MEC não a empregam de modo geral, devido a problemas de eficiência, que precisam ser resolvidos por adaptações ou proposição de outras técnicas. A necessidade de novas formulações usando uma técnica de aproximação semelhante, com funções radiais, é um caminho importante,

Além disso, nem todos os problemas de engenharia se resumem a problemas de grande porte. A indústria deseja programas computacionais simples de interagir que demonstrem eficiência. O que se buscou aqui foi, exatamente, avaliar uma técnica mais eficiente para resolver o problema em questão e também outros problemas; e o ponto focal em seu início de desenvolvimento são as avaliações de precisão numérica e, particularmente, seu estudo comparativo com uma formulação clássica e robusta como a MECFD.

## 7. Referências

- Abramowitz, M. & Stegun, I., 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publ..
- Atkin, R. J. & Fox, N., 1980. *An Introduction to the Theory of Elasticity*. London: Longman.
- Banaugh, R. P. & Goldsmith, W., 1963a. *Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape*. s.l.:J. Acoust. Soc. Am..
- Banaugh, R. P. & Goldsmith, W., 1963b. *Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape*. s.l.:J. Appl. Mech..
- Barcelos, H. M., 2014. *Comparação de Desempenho entre a Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno com Funções Radiais e o Método dos Elementos Finitos em Problemas de Poisson e Helmholtz*. Vitória(Espirito Santo): Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica.
- Brebbia, C. A., 1978. *The Boundary Element method for Engineers*. London: Pentech Press.
- Brebbia, C. A., 1978. *The Boundary Element Method for Engineers*. London: Pentech Press.
- Brebbia, C. A. & Ferrante, A. J., 1975. *The Finite Element Technique*. Porto Alegre: URGS.
- Brebbia, C. A., Telles, J. C. & Wrobel, L. C., 1984. *Boundary element Techniques*. Berlin: Springer-Verlag.
- Brebbia, C. A. & Walker, S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*. London: Newnes-Butterworths.
- Buhmann, M., 2003. *Radial Basis Function: Theory and Implementations*. s.l.:Cambridge Press.
- Butkov, E., 1968. *Mathematical Physics*. 1ª ed. Massachusetts: Addison-Wesley Co..
- Chapman, A. J., 1967. *Heat Transfer*. s.l.:The MacMillian Co..
- Cole, D. M., Kosloff, D. D. & Minster, J. B., 1978. A Numerical Boundary Integral Equation Method for Elastodynamics, I. Volume 68, pp. 1331-1357.
- Cruse, T. A., 1968. *A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem, II*. s.l.:J. Math Anal. Appl..
- Cruse, T. A. & Rizzo, F. J., 1968. *A Direct Formulation and Numerical Solution for the General Transient Elastodynamic Problem, I*. s.l.:J. Math Anal. Appl..
- Cruz, Á. L., 2009. *Análise do Desempenho de Funções de Base Radial na Aproximação de Superfícies*. Vitória(Espirito Santo): Projeto de Fim de Curso, Departamento de Engenharia Mecânica UFES.
- De Mey, G., 1976. A simplified integral equation method for the calculation of the eigenvalues of Helmholtz equation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 10 ed. s.l.:s.n., pp. 1340-1342.
- Domínguez, J., 1978a. Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations.
- Domínguez, J., 1978b. Response of Embedded Foundations to Travelling Waves.
- Dominguez, J., 1993. *Boundary Elements In Dynamics*. Sevilla: Computational Mechanics Publications.

- Floater, M. & Iske, A., 1996. *Multistep Scattered Data Interpolation Using Compactly Supported Radial Basis Function*. s.l.:J. Compt. and Applied Mathematics.
- Fox, R. W., McDonald, A. T. & Pritchard, P., 2014. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 8ª ed. s.l.:LTC.
- Franco, N. M. B., 2007. *Cálculo Numérico*. s.l.:Prentice Hall.
- Fredholm, I., 1905. *Solution d'un Problème Fondamental de la Theorie de L'élasticité*. s.l.:Arch. Mat. Astronom. Fysik.
- Friedman, M. B. & Shaw, R. P., 1962. *Diffraction of pulses by cylindrical obstacles of arbitrary cross-section*. s.l.:J. Appl. Mech..
- Hadley, G., 1972. *Linear Algebra*. s.l.:Addison Wesley Publishing Company.
- Jaswon, M. A., 1963. *Integral Equation Methods in Potential Theory. I*. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser A.
- Jaswon, M. A. & Ponter, A. R., 1963. *An Integral Equation Solution of the Torsion Problem*. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser A..
- Kreyszig, E., 1968. *Advanced Engineering Mathematics*. s.l.:John wiley & Sons.
- Kythe, P. K., 1995. *An Introduction to Boundary Element Methods*. Boca Raton: CRC Press.
- Loeffler, C. F., 1988. *Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar*. Rio de Janeiro(RJ): Tese D. Sc. em Engenharia Civil UFRJ.
- Loeffler, C. F., 1992. Modelos Mecânicos Derivados da Educação de Campo Escalar Generalizada. *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, Jan/Mar, pp. 24-38.
- Loeffler, C. F., Cruz, A. L. & Bulcão, A., 2015a. *Direct Use of Radial Basis Interpolation Functions for Modelling Source Terms with the Boundary Element Method*. s.l.:Eng. Analysis with Boundary Elements.
- Loeffler, C. F. & Mansur, W. J., 1987. *Analysis of time integration schemes for boundary element applications to transient wave propagation problems*. s.l.:C.A. Brebbia (Ed.), Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer, Computational Mechanics Publishing.
- Loeffler, C. F., Mansur, W. J., Barcelos, H. M. & Bulcão, A., 2015. Solving Helmholtz Problems with the Boundary Element Method Using Direct Radial Basis Function Interpolation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, December, Volume 61, pp. 218-225.
- Loeffler, C. F., Pereira, P. V. M., Lara, L. O. C. & Mansur, W. J., 2015b. Comparação da Formulação do Método dos Elementos de Contorno com Solução Fundamental Dependente da Frequência e Formulação com Integração Direta de Funções Radiais na Solução do Problema de helmholtz..
- Manolis, W. J. & Beskos, D. E., 1983. *Boundary Element Methods in Elastodynamics*. s.l.:Ph. D. Thesis, University of Southampton.
- Mansur, W. J., 1983. *A Time-Stepping Technique to Solve Wave Propagation Problems Using the Boundary Element Method*. s.l.:Ph. D. Thesis, University of Southampton.
- Mansur, W. J. & Brebbia, C. A., 1982a. *Numerical Implementation of the Boundary Element Method for Two-Dimensional Transient Scalar Wave Propagation Problems*. s.l.:Appl. Math. Modelling.
- Mansur, W. J. & Brebbia, C. A., 1982b. *Formulation of the Boundary Element Method for Transient Problems Governed by the Scalar Wave Equation*. s.l.:Appl. Math. Modelling.

- Mansur, W. J. & Brebbia, C. A., 1983. *Transient Elastodynamics Using a Time-Stepping Technique*. s.l.:Springer-Verlag.
- Mansur, W. J. & Brebbia, C. A., 1985. *Transient Elastodynamics*. Berlin: Springer-Verlag.
- Moon, P. & Spencer, D. E., 1988. *Field Theory Handbook*. Princeton(New Jersey): s.n.
- Moran, M. J. & Shapiro, H. N., 2013. *Princípios de Termodinâmica para Engenharia*. 7ª Edição ed. s.l.:LTC.
- Nardini, D. & Brebbia, C. A., 1983. *A New Approach to Free Vibration Analysis Using Boundary Elements*. s.l.:Appl. Math. Modelling.
- Nardini, D. & Brebbia, C. A., 1985. *Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis*. In Topics in Boundary Element Research, C. A. Brebbia (Ed) ed. Berlin: Springer-Verlang.
- Niwa, Y., Kobayashi, S. & Azuma, N., 1975. *A Analysis of Transient Stress Produced Around Cavities of Arbitrary Shape During Passage of Travelling Waves*. s.l.:Mem. Fac. Engng., Kyoto Univ..
- Niwa, Y., Kobayashi, S. & Fukui, T., 1976. Applications of Integral Equation Method to Some Geomechanical Problems. Issue In Numerical Methods In Geomechanics, C. S. Desai (Ed).
- Özisik, M. N., 1977. *Basic Heat Transfer*. Tokyo: McGraw Hill Kogakusha.
- Özisik, M. N., 1980. *Heat Conduction*. s.l.:John Wiley & Sons.
- Partridge, P. W., Brebbia, C. A. & Wrobel, L. C., 1992. *The Dual Reciprocity, Boundary Element method*. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier.
- Pereira, P. V. M., 2014. *Uso de Funções de Base Radial de Suporte Pleno na Solução das Integrais de Domínio da equação de Poisson Usando o Método dos Elementos de Contorno*. Vitória(ES): Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica UFES.
- Prodonoff, V., 1990. *Vibrações Mecânicas*. Rio de Janeiro: Maity.
- Rizzo, F. J., 1967. *An Integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*. s.l.:Quart. Appl. Math.
- Schuster, G. T. & Smith, L. C., 1985. *A comparison among four direct boundary integral methods*. s.l.:J. Acoust. Soc. Am..
- Shaw, R. P., 1979. *Boundary Integral Equation Method Applied to Wave Problems*. London: Applied Science Publisher Ltd..
- Stewart, J., 2013. *Cálculo*. 7ª ed. s.l.:Cengage Learning.
- Symm., G. T., 1963. *Integral Equation Methods in Potential Theory. II*. s.l.:Proc. Roy. Soc. Ser. A.
- Tai, G. R. C. & Shaw, R. P., 1974. *Helmholtz equation eigenvalues and eigenmodes for arbitrary domains*. s.l.:s.n.
- Wasley, R. J., 1973. *Stress Wave Propagation in Solids*. s.l.:Marcel Dekker, Inc..
- Weisstein, E. W., 2016. *Bessel Function of the First Kind*. [Online]  
Available at: <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheFirstKind.html>  
[Acesso em 30 Abril 2016].

Weisstein, E. W., 2016. *Bessel Function of the Second Kind*. [Online]  
Available at: <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheSecondKind.html>  
[Acesso em Abril 2016].

Wheeler, L. T. & Sternberg, E., 1968. *Some Theorems in Classical Elastodynamics*. s.l.:Arch. Rational Mech. Anal..

Zamprogno, L., 2013. *Utilização de funções Radiais de Base Compacta na Modelagem Direta de Integrais de Domínio com o Método dos Elementos de Contorno*. Vitória(ES): Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica UFES.

Zhu, S.-P. & Zhang, Y., 2007. *A Comparative Study of the Direct Boundary Element Method and the Dual Reciprocity Boundary Element Method in Solving the Helmholtz Equation*. s.l.:ANZIAM J..

Zienkiewicz, O. C., 1977. *The finite element method*. 3rd ed. London: Mcgraw-Hill.

## Apêndice A - Equação da Acústica para Pressão e Densidade

A mudança relativa na densidade  $\delta$  obedece à equação da onda homogênea, a mesma equação da onda é satisfeita pela densidade e a pressão. Rearranjando a equação (2.27) em função de delta, temos a equação (A.01).

$$\delta = \frac{p}{p_0\gamma} - \frac{1}{\gamma} \quad (\text{A.01})$$

Substituindo a equação (A.01) na equação da onda escalar (equação 2.38c).

$$\frac{\partial^2 \left( \frac{p}{p_0\gamma} - \frac{1}{\gamma} \right)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \left( \frac{p}{p_0\gamma} - \frac{1}{\gamma} \right) \quad (\text{A.02})$$

Como  $1/\gamma$  é uma constante, sua derivada é nula.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p \quad (\text{A.03})$$

A equação (A.03) é a equação da onda escalar com a pressão como o potencial. Para a densidade, considere a equação (2.25):

$$\delta = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (\text{2.25})$$

Substituindo a equação (2.25) em (2.38c).

$$\frac{\partial^2 \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) \quad (\text{A.04})$$

Com pequena manipulação matemática a equação (A.04) chega à forma:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho \quad (\text{A.05})$$

## Apêndice B - Demonstração que a Solução Fundamental para o Problema de Helmholtz atende a Solução da Equação do Problema Correlato

Sendo  $K_1(z)$  a função de Bessel modificada de segunda espécie e primeira ordem. A derivada radial de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial r} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) = -\frac{i\omega}{c} K_1 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (\text{B.01})$$

E a derivada radial de segunda ordem da solução fundamental é dada por (B.02).

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ -K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) - \frac{c^2}{i\omega r} K_1 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \right] \quad (\text{B.02})$$

É fácil checar se a solução fundamental atende a equação correlata com a carga pontual que governa o problema da solução fundamental (equação 3.08). O operador laplaciano para coordenadas polares pode ser escrito em coordenadas radiais como:

$$\nabla^2 u^* = \frac{d^2 u^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^*}{dr} \quad (\text{B.03})$$

Substituindo as equações (B.01) e (B.02) em (B.03).

$$\nabla^2 u^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) \quad (\text{B.04})$$

Com a equação (B.04) e (3.10) na equação (3.08).

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\omega^2}{c^2} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{2\pi} K_0 \left( i \frac{\omega r}{c} \right) + \Delta(\xi; x) = 0 \quad (\text{B.05})$$

A equação é satisfeita para  $r \neq 0$ , quando a função de Bessel modificada de segunda espécie não é singular. Para  $r \cong 0$  é necessário se fazer a integração da equação (3.08) em um círculo de domínio  $\Omega_\varepsilon$  de raio  $\varepsilon$  e tender  $\varepsilon$  para zero.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* d\Omega_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\omega^2}{c^2} u^* d\Omega_\varepsilon + \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta(\xi; x) d\Omega_\varepsilon = 0 \quad (\text{B.06})$$

Usando o teorema da divergência, a primeira integral é levada ao contorno dado circunferência  $\Gamma_\varepsilon$ , e como o raio e o vetor normal possuem a mesma direção e sentido, temos que:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* d\Omega_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{du^*}{dr} d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{B.07})$$

Quando o raio  $\varepsilon$  tende a zero:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* d\Omega_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{du^*}{dr} d\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} -\frac{i\omega}{c_2} K_1 \left( \frac{i\omega r}{c_2} \right) d\Gamma_\varepsilon \quad (\text{B.08})$$

Levando em conta o limite da função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero:

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_0(z) = -\ln(z) \quad (\text{B.09})$$

E o limite da função de Bessel modificada de segunda espécie e primeira ordem:

$$\lim_{z \rightarrow 0} K_1(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{B.10})$$

O limite do termo laplaciano da equação (3.08) dado pela equação (B.08) é então:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla^2 u^* d\Omega_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Gamma \frac{du^*}{dr} d\Gamma = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_\Gamma -\frac{1}{r} d\Gamma = -1 \quad (\text{B.11})$$

E o limite do termo potencial restante da equação (3.08).

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega^2}{c_2^2} \int_\Omega u^* d\Omega &= \frac{\omega^2}{c_2^2} \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega K_0 \left( i \frac{\omega r}{c_2} \right) d\Omega = \\ \frac{\omega^2}{c_2^2} \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega -\ln \left( i \frac{\omega r}{c_2} \right) d\Omega &= \frac{\omega^2}{c_2^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_r -r \ln \left( i \frac{\omega r}{c_2} \right) dr = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Logo, a solução fundamental satisfaz a equação (3.08) também para  $r = 0$ .

A solução acima corresponde a uma variação harmônica do tipo  $\exp[i\omega t]$ . Se for  $\exp[-i\omega t]$ , a solução é o complexo conjugado da expressão.

### Apêndice C - Funções de Bessel

A equação diferencial de Bessel é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, dada por (C.01) (Abramowitz & Stegun, 1964).

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0 \quad (\text{C.01})$$

As soluções são as funções de Bessel de primeira espécie  $J_{\pm\nu}(z)$  (algumas vezes chamada de funções cilindro ou harmônicos cilíndricos), de segunda espécie  $Y_\nu(z)$  (também conhecida como função de Weber), e a de terceira espécie  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$  (também conhecida como funções de Hankel).

Na Figura 42 a representação gráfica das funções  $J_\nu$  e  $Y_\nu$  para as primeiras ordens inteiras.

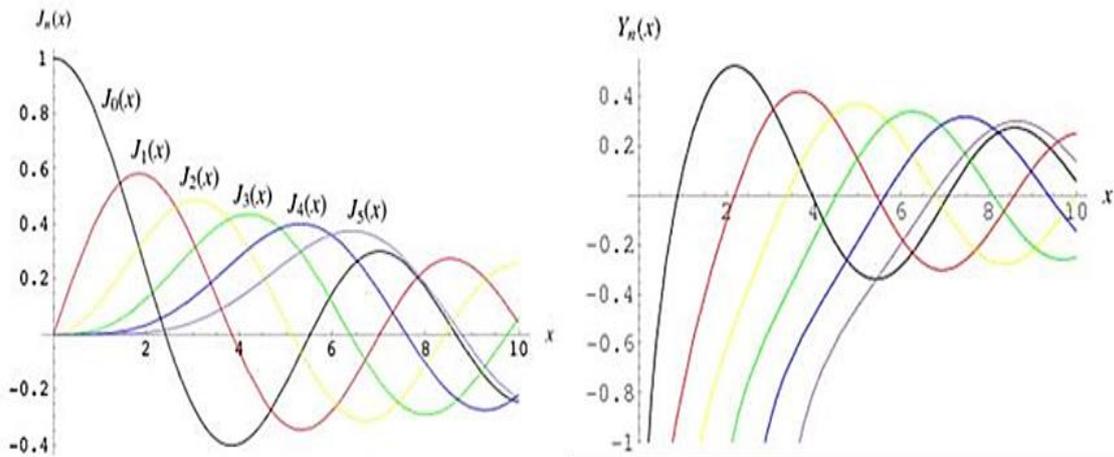


Figura 42 - Gráficos das funções de Bessel de primeira espécie (esquerda) e segunda espécie (direita) para as primeiras ordens, gerados na página do Wolfram (Weisstein, 2016).

As soluções da equação de Bessel, as funções de Bessel, possuem relações entre si, algumas delas dadas pelas equações (C.02) a (C.08).

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{C.02})$$

A direita da equação (C.02) é substituída pelo seu valor limite se  $\nu$  é um inteiro ou zero.

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = icsc(\nu\pi)\{e^{-\nu\pi i} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\} \quad (\text{C.03})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) = icsc(\nu\pi)\{J_{-\nu}(z) - e^{\nu\pi i} J_\nu(z)\} \quad (\text{C.04})$$

$$J_{-n}(z) = (-)^n J_n(z) \quad (\text{C.05})$$

$$Y_{-n}(z) = (-)^n Y_n(z) \quad (\text{C.06})$$

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z) \quad (\text{C.07})$$

$$H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z) \quad (\text{C.08})$$

Limitando as formas das funções de Bessel para pequenos argumentos. Quando  $\nu$  é fixo e  $z \rightarrow 0$ .

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu / \Gamma(\nu + 1) \quad (\nu \neq -1, -2, -3, \dots) \quad (\text{C.09})$$

$$Y_\nu(z) \sim -iH_\nu^{(1)}(z) \sim iH_\nu^{(2)}(z) \sim -\left(\frac{1}{\pi}\right) \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (\Re \nu > 0) \quad (\text{C.10})$$

Em particular para a ordem zero a função de Bessel de segunda espécie:

$$Y_0(z) \sim -iH_0^{(1)}(z) \sim iH_0^{(2)}(z) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right) \ln z \quad (\text{C.11})$$

Onde  $\Gamma$  é a função Gamma, que pode ser dada pela equação (C.12).

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} \quad (z \neq 0, -1, -2, \dots) \quad (\text{C.12})$$

As series ascendentes das funções de Bessel para qualquer ordem inteira são dadas pelas funções (C.13) e (C.14).

$$J_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{C.13})$$

$$Y_n(z) = -\frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}z^2\right)^k + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2z}\right) J_n(z) - \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\} \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{C.14})$$

Onde para valores inteiros a função  $\psi$  (psi) é dada por:

$$\psi(1) = -\gamma \quad (\text{C.15})$$

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (n \geq 2) \quad (\text{C.16})$$

E  $\gamma$  é conhecida como a constante de Euler:

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m\right] \quad (\text{C.17})$$

$$\gamma = 0,5772156649 \quad (\text{C.18})$$

Em um caso particular, as series ascendentes para as funções de Bessel de ordem zero:

$$J_0(z) = 1 - \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{C.19})$$

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma \right\} J_0(z) + \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} - \dots \right\} \quad (\text{C.20})$$

As Relações de Recorrência para as funções de Bessel de diferentes ordens são dadas pelas equações de (C.21) a (C.24).

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(z) + \mathcal{C}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \quad (\text{C.21})$$

$$\mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \mathcal{C}_{\nu+1}(z) = 2\mathcal{C}'_\nu(z) \quad (\text{C.22})$$

$$\mathcal{C}'_\nu(z) = \mathcal{C}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \quad (\text{C.23})$$

$$\mathcal{C}'_\nu(z) = -\mathcal{C}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} \mathcal{C}_\nu(z) \quad (\text{C.24})$$

Onde  $\mathcal{C}$  denota  $J, Y, H^{(1)}, H^{(2)}$  ou qualquer combinação linear dessas funções, um caso particular de interesse da equação (C.24) para  $\nu = 0$  é:

$$J_0'(z) = -J_1(z) \quad (\text{C.25})$$

$$Y_0'(z) = -Y_1(z) \quad (\text{C.26})$$

Outras equações diferenciais e suas soluções a partir das funções de Bessel estão nas equações (C.27) a (C.34).

$$w'' + \left( \lambda^2 - \frac{v^2-1}{z^2} \right) w = 0 \quad w = z^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_v(\lambda z) \quad (\text{C.27})$$

$$w'' + \left( \frac{\lambda^2}{4z} - \frac{v^2-1}{4z^2} \right) w = 0 \quad w = z^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_v(\lambda z^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{C.28})$$

$$w'' + \lambda^2 z^{v-2} w = 0 \quad w = z^{\frac{1}{2}} \mathcal{C}_{\frac{1}{p}}(2\lambda z^{\frac{1}{2}v}/p) \quad (\text{C.29})$$

$$w'' - \frac{2v-1}{z} w' + \lambda^2 w = 0 \quad w = z^v \mathcal{C}_v(\lambda z) \quad (\text{C.30})$$

$$z^2 w'' + (1-2p)zw' + (\lambda^2 q^2 z^{2q} + p^2 - v^2 q^2)w = 0 \quad w = z^v \mathcal{C}_v(\lambda z^q) \quad (\text{C.31})$$

$$w'' + (\lambda^2 e^{2z} - v^2)w = 0 \quad w = \mathcal{C}_v(\lambda e^z) \quad (\text{C.32})$$

$$z^2(z^2 - v^2)w'' + z(z^2 - 3v^2)w' + \{(z^2 - v^2)^2 - (z^2 + v^2)\}w = 0 \quad w = \mathcal{C}'_v(z) \quad (\text{C.33})$$

$$w^{(2n)} = (-)^n \lambda^{2n} z^{-n} w \quad w = z^{\frac{1}{2}n} \mathcal{C}_n(2\lambda \alpha z^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{C.34})$$

Onde  $\alpha$  é qualquer das  $2n$  raízes da unidade

## Apêndice D - Funções de Bessel Modificadas

Dada a equação diferencial de segunda ordem (D.01) (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + v^2)w = 0 \quad (\text{D.01})$$

São soluções, as funções de Bessel modificadas de primeira ordem  $I_{\pm v}(z)$ , de segunda ordem  $K_v(z)$  e combinações lineares destas. Figura 43.

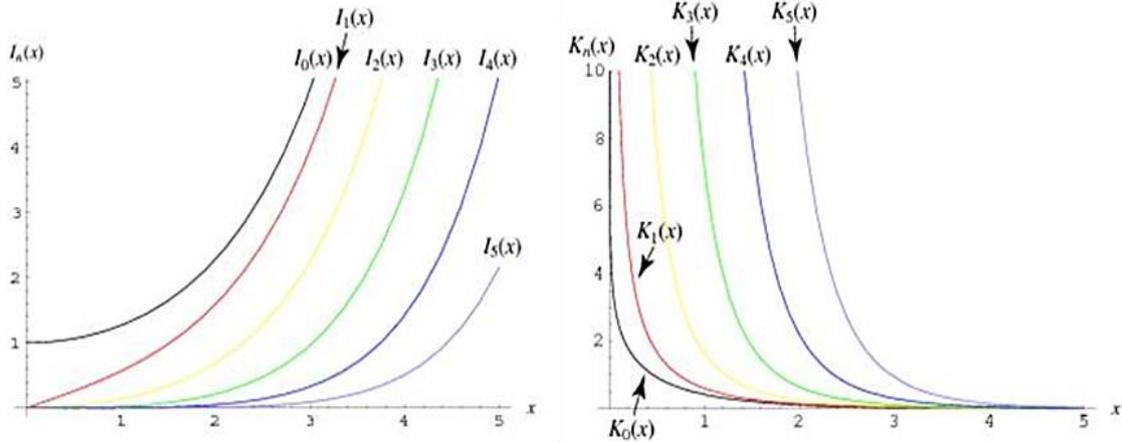


Figura 43 - Gráficos das funções de Bessel modificada de primeira espécie (esquerda) e segunda espécie (direita) para as primeiras ordens (Weisstein, 2016).

As relações entre as soluções estão nas equações (D.02) a (D.09).

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\text{D.02})$$

A parte direita da equação é substituída por seu limite se o valor de  $\nu$  é um integral ou zero.

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu\left(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) \quad \left(-\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi\right) \quad (\text{D.03})$$

$$I_\nu(z) = e^{3\nu\pi i/2} J_\nu\left(ze^{-3\pi i/2}\right) \quad \left(\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi\right) \quad (\text{D.04})$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right) \quad \left(-\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi\right) \quad (\text{D.05})$$

$$K_\nu(z) = -\frac{1}{2}\pi i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}\left(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}\right) \quad \left(-\frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi\right) \quad (\text{D.06})$$

$$Y_\nu\left(ze^{\frac{1}{2}\pi i}\right) = e^{\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} I_\nu(z) - \left(\frac{2}{\pi}\right) e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z) \quad \left(-\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi\right) \quad (\text{D.07})$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z) \quad (\text{D.08})$$

$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z) \quad (\text{D.09})$$

A maioria das propriedades das funções de Bessel modificadas pode ser deduzida através das propriedades das funções ordinárias de Bessel (Apêndice C - Funções de Bessel) pela aplicação destas relações.

Para pequenos argumentos ( $\nu$  é fixo e  $z \rightarrow 0$ ), as funções de Bessel modificadas podem ser aproximadas de acordo com as equações (D.10) a (D.12)

$$I_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu / \Gamma(\nu + 1) \quad (\nu \neq -1, -2, \dots) \quad (\text{D.10})$$

$$K_0(z) \sim -\ln z \quad (\text{D.11})$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{1}{2}\Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (\Re \nu > 0) \quad (\text{D.12})$$

As series ascendentes para as funções de Bessel modificadas são (D.13) e (D.14).

$$I_\nu(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \quad (\text{D.13})$$

$$K_n(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}z\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k + (-)^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}z\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)\} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{D.14})$$

Onde  $\psi$  é a função Psi, dada pela equação (C.15) e (C.16) do Apêndice C. Para o caso particular de ordem zero, as funções assumem a forma:

$$I_0(z) = 1 + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^3}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{D.15})$$

$$K_0(z) = -\left\{\ln\left(\frac{1}{2}z\right) + \gamma\right\}I_0(z) + \frac{\frac{1}{4}z^2}{(1!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^2}{(3!)^2} + \dots \quad (\text{D.16})$$

As relações de recorrência dada entre as ordens das funções de Bessel modificadas são dadas pelas relações (D.27) a (D.20).

$$\mathcal{B}_{\nu-1}(z) - \mathcal{B}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} \mathcal{B}_\nu(z) \quad (\text{D.17})$$

$$\mathcal{B}'_\nu(z) = \mathcal{B}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{B}_\nu(z) \quad (\text{D.18})$$

$$\mathcal{B}_{\nu-1}(z) + \mathcal{B}_{\nu+1}(z) = 2\mathcal{B}'_\nu(z) \quad (\text{D.19})$$

$$\mathcal{B}'_\nu(z) = \mathcal{B}_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} \mathcal{B}_\nu(z) \quad (\text{D.20})$$

Onde  $\mathcal{B}_\nu$  denota  $I_\nu$ ,  $e^{v\pi i}K_\nu$  ou qualquer outra combinação linear dessas funções. Para  $\nu = 0$  a relação (D.20) é.

$$I'_0(z) = I_1(z) \quad (\text{D.21})$$

$$K'_0(z) = -K_1(z) \quad (\text{D.22})$$

Outras equações diferenciais com a solução associada às funções de Bessel modificadas é dada pela equação (D.23).

$$z^2 w'' + z(1 \pm 2z)w' + (\pm z - \nu^2)w = 0 \quad (w = e^{\pm z} \mathcal{B}_\nu(z)) \quad (\text{D.23})$$

Algumas equações diferenciais da função de Bessel ordinária também são validas para as funções de Bessel modificadas, se quantidade  $\lambda^2$  na equação (C.27) a (C.32) e (C.34) for substituída por  $by - \lambda^2$  e ao mesmo tempo o símbolo  $\mathcal{C}$  na solução dada é substituído por  $\mathcal{B}$ .