

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

NICOLAS RIBEIRO BERTINI

**FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO
PARAMETRIZADO E EXTENSÕES DE
RELATIVIDADE GERAL**

**VITÓRIA
2017**

NICOLAS RIBEIRO BERTINI

**FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO PARAMETRIZADO E
EXTENSÕES DE RELATIVIDADE GERAL**

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues (Orientador)
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Júlio César Fabris
Universidade Federal do Espírito Santo

Dr. Júnior Diniz Toniato
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
Universidade Federal do Espírito Santo

VITÓRIA
2017

**FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO
PARAMETRIZADO E EXTENSÕES DE
RELATIVIDADE GERAL**

NICOLAS RIBEIRO BERTINI

**FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO
PARAMETRIZADO E EXTENSÕES DE
RELATIVIDADE GERAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Física, na área de concentração de Física Teórica

ORIENTADOR: PROF. DR. DAVI CABRAL RODRIGUES

Vitória

26 de fevereiro de 2017

Ribeiro Bertini, Nicolas

D1234p FORMALISMO PÓS-NEWTONIANO
PARAMETRIZADO E EXTENSÕES DE
RELATIVIDADE GERAL / Nicolas Ribeiro Bertini.
— Vitória, 2017
xi, 105 f. : il. ; 29cm

Dissertação (mestrado) — Universidade Federal
do Espírito santo

Orientador: Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues

1. — Dissertações. 2. — Dissertações.
I. Orientador. II. Título.

CDU 000.0*00.00

[Folha de Aprovação]

Quando a secretaria do Curso fornecer esta folha, ela deve ser digitalizada e armazenada no disco em formato gráfico.

Se você estiver usando o `pdflatex`, armazene o arquivo preferencialmente em formato PNG (o formato JPEG é pior neste caso).

Se você estiver usando o `latex` (não o `pdflatex`), terá que converter o arquivo gráfico para o formato EPS.

Em seguida, acrescente a opção `approval={nome do arquivo}` ao comando `\ppgccufmg`.

Se a imagem da folha de aprovação precisar ser ajustada, use:

`approval=[ajuste] [escala] {nome do arquivo}`

onde *ajuste* é uma distância para deslocar a imagem para baixo e *escala* é um fator de escala para a imagem. Por exemplo:

`approval=[-2cm] [0.9] {nome do arquivo}`

desloca a imagem 2cm para cima e a escala em 90%.

Dedicado aos meus avós, filha e esposa.

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente ao Prof. Davi Cabral Rodrigues pela orientação, sempre com paciência, compreensão e sabedoria.
- Ao Dr. Júnior Diniz Toniano, pois sempre se dispôs a sanar minhas dúvidas, de forma sábia e direta, tendo atuado como um co-orientador.
- Ao colega Álefe Freire de Almeida, pois conversando sobre assuntos relacionados a este trabalho me esclarecia pontos importantes.
- À minha esposa, Indianara, pela paciência, amor, dedicação e compreensão em todos os momentos que precisei.
- À minha filha, Kiara, que me proporcionou os melhores momentos de distração sempre que precisei.
- Aos meus amigos de Pós-Graduação.
- Ao Secretário da Pós-Graduação, José Carlos Coutinho da Cruz, sempre disposto a ajudar.
- Agradeço à FAPES pela bolsa de mestrado.

Resumo

É apresentado aqui o Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado (*Parameterized Post-Newtonian (PPN)*) como proposto por Will e Nordtvedt, além de sua aplicação à relatividade geral, teoria de Brans-Dicke e RGGR (*Renormalization Group extended General Relativity*). Este formalismo permite relacionar os coeficientes da expansão pós-Newtoniana de diversas teorias métricas da gravitação com os efeitos gravitacionais observados no sistema solar, permitindo uma análise sistemática das previsões físicas dessas teorias. Além da revisão do formalismo, é detalhada uma parcela de suas bases observacionais. A aplicação do formalismo PPN à teoria RGGR foi feita de forma parcial recentemente, usando a versão de Eddington, onde a fonte gravitacional é pontual e estática, e depende de dois parâmetros. Tratamos aqui da versão mais completa que utiliza dez parâmetros e considera fluidos de matéria ao invés de partículas pontuais. Nesta análise, confirmamos a validade dos resultados anteriores de forma mais clara e robusta, e estendemos esses últimos vínculos para realizações menos restritivas de RGGR (a saber, sem a necessidade de fixar uma função β específica para o parâmetro de acoplamento gravitacional G)

Palavras-chave: Formalismo Pós-Newtoniano parametrizado, Limite Newtoniano, Limite Pós Newtoniano, Desvio do Periélio, Deflexão da luz, Relatividade Geral, Brans-Dicke, RGGR.

Abstract

Here we present the Post-Newtonian Parametrized (PPN) formalism, as developed by Will and Nordtvedt, and we apply it to general relativity, Brans-Dicke and RGGR (Renormalization Group extended General Relativity) theories. This formalism can be applied to several metric theories of gravity. It relates the coefficients of a post-Newtonian expansion to the observed gravitational effects at the Solar System. Besides a review on the PPN formalism, here we detail part of its observational roots. Its application to RGGR was in part recently done, by using the Eddington parametrization, which considers the gravitational source to be a static point particle and depends on two parameters. We present the full PPN formalism application, which depends on ten parameters and consider matter fluids instead of point particles. Through this analysis we confirm the validity of the previous results from a more clear and robust procedure. Moreover, we extend the observational constraints towards less restrictive realizations of RGGR (namely, without specifying a particular β -function to the gravitational coupling parameter G).

Keywords: Parametrized Post-Newtonian Formalism, Newtonian Limit, post-Newtonian Limit, Perihelion Shift, Deflection of Light, General Relativity, Brans-Dicke, RGGR.

Lista de Figuras

2.1	Quantidades geométricas relacionadas à deflexão da luz.	46
2.2	Diagrama sobre a deflexão $\delta\theta$ da luz.	47
2.3	Elementos orbitais.	61

Sumário

Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Elementos da Relatividade Geral	3
1.1 A métrica	3
1.2 Derivada Covariante e Tensor de Curvatura	4
1.3 Equações de Einstein	6
1.3.1 Equação da Geodésica	7
1.3.2 Limite Newtoniano da Relatividade Geral	10
1.3.3 Solução de Schwarzschild	11
2 Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado	16
2.1 Sistema de Coordenadas	19
2.2 Limite Newtoniano	21
2.3 Limite Pós-Newtoniano	22
2.4 Potenciais e Métrica Pós-Newtonianos	25
2.5 Interpretação dos Parâmetros PPN	30
2.5.1 Transformações de Lorentz	30
2.5.2 Leis de Conservação	36
2.6 Testes para os parâmetros γ e β	41
2.6.1 Deflexão da Luz	41
2.6.2 Desvio do Periélio	49

3 Aplicações	67
3.1 Relatividade Geral	69
3.2 Teoria de Brans-Dicke	73
3.3 RGGR	79
Conclusões	92
Apêndice A Solução das integrais relacionadas ao desvio do periélio	94
Apêndice B Cálculo das componentes de $R_{\alpha\beta}$ expandidas	98
Referências Bibliográficas	101

Introdução

A Relatividade Geral, proposta em 1915 por Albert Einstein, estende os conceitos da gravitação de Isaac Newton. Tem por uma de suas bases o Princípio de Equivalência, que afirma a equivalência entre um campo gravitacional e um referencial correspondentemente acelerado, e todos os corpos sentem a influência da gravidade da mesma forma. Isso indica uma possível descrição da gravitação como um efeito da geometria do espaço-tempo, ou seja, a presença de matéria (energia) produz uma curvatura no espaço-tempo. Teorias que aceitam este princípio têm sempre um tensor métrico com o qual a matéria se acopla universalmente, e são por isso denominadas “teorias métricas da gravitação”.

A Relatividade Geral explica e prevê vários fenômenos. Ela descreve satisfatoriamente, por exemplo, a deflexão e o desvio para o vermelho do comprimento de onda da luz ao passar por um campo gravitacional, assim como a precessão do periélio dos planetas interiores e o efeito das lentes gravitacionais. Prevê também a radiação na forma de ondas gravitacionais. Entretanto, apesar das previsões e explicações, ela, junto de todo o conteúdo de matéria que atualmente medimos em laboratório, é incapaz de explicar certos efeitos de caráter astrofísico ou cosmológicos associados à matéria escura. Ademais, embora em plena conformidade com os dados atuais, há significativa controvérsia atualmente sobre o uso da constante cosmológica para explicar o efeito da expansão acelerada do universo atual, ou seja, os efeitos de energia escura [4,21,47,50,53]. A hipótese da Matéria Escura surgiu da tentativa de adequar as previsões da Relatividade Geral na descrição da rotação de galáxias espirais e de efeitos de lentes gravitacionais produzidos por aglomerados de galáxias.

Com intuito de explicar certos fenômenos gravitacionais, como aqueles atribuídos à suposta matéria escura, tudo indica que torna-se necessário ou incluir novo conteúdo material no universo, diferente daquele até o momento observado em laboratório, ou buscar por extensões da Relatividade Geral [15]. A teoria de Brans-Dicke [5] é uma teoria alternativa à Relatividade Geral que tem como proposta descrever a gravitação usando campos extras. Ela apresenta uma “constante

gravitacional variável”, tendo sido motivada por considerações a respeito do Princípio de Mach, o qual relaciona a inércia em um dado lugar do Universo com a influência de corpos distantes.

Será apresentado aqui o Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado (formalismo PPN), que foi baseado nas ideias de Eddington [13], Robertson [35] e Schiff [41] e desenvolvido em sua forma completa por Nordtvedt [27, 28] e C.M. Will [55, 57]. Este formalismo é capaz de analisar diversas teorias métricas para a gravitação, permitindo que elas sejam confrontadas com os resultados de diversos testes observacionais ou experimentais de uma só vez.

Através dos dez parâmetros do formalismo PPN, obtêm-se várias informações sobre a teoria analisada, como: conservação de energia, de momento linear e angular, suas previsões para fenômenos como deflexão da luz, precessão do periélio, quebra do princípio de equivalência, dentre outros.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma revisão do formalismo PPN, explicando tanto como o empregar em RG e outras teorias, quanto como detalhar uma parcela de suas bases observacionais. Apresentamos aqui também a aplicação deste formalismo para Relatividade Geral, Brans-Dicke e RGGR [39] (*Renormalization Group Extended General Relativity*), cuja aplicação se refere a um trabalho em andamento [20]. Esta última é uma descrição clássica de possíveis correções de origem quântica à Relatividade Geral, e baseia-se na estrutura do Grupo de Renormalização aplicado à gravidade.

No primeiro capítulo é apresentada uma introdução à Relatividade Geral, seu limite Newtoniano e a primeira solução exata, desenvolvida por Schwarzschild em 1916. No capítulo dois é introduzido o Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado. No terceiro capítulo é desenvolvida a aplicação desse formalismo à Relatividade Geral, onde são obtidos os valores teóricos previstos por esta. O procedimento serve de base para aplicação às demais teorias abordadas aqui. Por fim, serão dadas as conclusões e discussões do trabalho, bem como as perspectivas para o trabalho em desenvolvimento.

Capítulo 1

Elementos da Relatividade Geral

A Relatividade Geral foi a primeira teoria com a proposta de relacionar a gravidade à geometria do espaço-tempo. Motivado pela ideia essencial de que as coordenadas não existem a priori na natureza, mas são apenas artifícios usados para descrevê-la, Einstein foi inclinado a considerar invariância na forma de leis físicas sob transformações diferenciáveis sob coordenadas arbitrárias, o que equivale considerar que as leis da física devem tomar a mesma forma independente do referencial do observador. Tais considerações ficaram conhecidas como Princípio de Covariância ou Princípio Geral da Relatividade. O ramo da matemática com tais características é a Geometria Riemanniana, e o assunto é abordado de diversas maneiras no contexto da gravitação, como por exemplo em [51], [52], [7] entre outros. Tendo em conta tais fundamentos, serão apresentadas aqui as principais relações relevantes para Relatividade Geral.

1.1 A métrica

O espaço-tempo em Relatividade Geral é representado por uma variedade Riemanniana de quatro dimensões [11]. Por definição, um espaço Riemanniano é dotado de um tensor simétrico não degenerado denominado de métrica e que denotaremos por $g_{\alpha\beta}$. Distâncias nesse espaço são dadas em função da métrica a partir de

$$dl^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.1)$$

que representa o quadrado de um comprimento infinitesimal entre dois pontos. É importante notar que a forma da expressão acima sugere que os pontos entre os quais

dl é distância infinitesimal, devam ser parametrizados. E como as componentes da métrica são funções das coordenadas, a expressão acima é um invariante, isto é, dl representa a mesma distância independente do sistema de coordenadas utilizado.

Como já foi mencionado, o espaço-tempo é associado a uma variedade Riemanniana na qual ao tensor métrico são atribuídas as características: i) é simétrico, ou seja, $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ e ii) é não degenerada, logo o produto $g_{\alpha\beta}X^\alpha Y^\beta = 0$ somente se um dos vetores X^α ou Y^β forem nulos. Sendo assim, o tensor métrico possui dez componentes independentes, e estas se relacionam com as inversas, $g^{\alpha\beta}$, por

$$g_{\alpha\beta}g^{\lambda\beta} = \delta_\alpha^\lambda \quad (1.2)$$

sendo δ_β^α a delta de Kronecker definida na forma usual

$$\delta_\beta^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (1.3)$$

A assinatura adotada para a métrica será $(- + +)$ em todo este trabalho, bem como a seguinte convenção de índices: os índices representados por letras gregas correm de 0 a 3 e as letras latinas i, j, k e l representam índices de coordenadas espaciais e correm de 1 a 3. Além disso, é comum chamar de métrica as componentes $g_{\alpha\beta}$.

1.2 Derivada Covariante e Tensor de Curvatura

A definição usual de derivada de uma função diferenciável em espaços planos (ou variedades planas), é feita avaliando a função em dois pontos infinitesimalmente próximos, e tomando o limite da diferença deste processo quando o intervalo entre os pontos avaliados tende a zero. O problema na definição de derivadas em variedades que não são planas é que não há maneira natural para comparar vetores em diferentes pontos. Tensores gerais possuem componentes definidas nos espaços tangentes e cotangentes a cada ponto da variedade e, em geral, os espaços tangentes em cada ponto diferem dos espaços tangentes em pontos próximos assim como os cotangentes, e isto reflete no fato de a derivada parcial de um tensor não se transformar como um tensor. A verificação deste fato pode ser realizada tomando a lei de transformação de um tensor qualquer e derivando da forma usual.

Para definir derivada em uma variedade curva, de modo que sua aplicação também se transforme como um tensor, deve-se estabelecer uma regra que torne

possível a comparação de tensores definidos em diferentes espaços (tangentes ou cotangentes). Tal regra é descrita pela conexão afim cujas componentes são conhecidas como Símbolos de Cristoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}$. Define-se, então, a derivada covariante na forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma} X^{\alpha\cdots\beta}_{\lambda\cdots\eta} &= \partial_{\sigma} X^{\alpha\cdots\beta}_{\lambda\cdots\eta} + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\alpha} X^{\gamma\cdots\beta}_{\lambda\cdots\eta} + \cdots + \Gamma_{\gamma\sigma}^{\beta} X^{\alpha\cdots\gamma}_{\lambda\cdots\eta} \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\gamma} X^{\alpha\cdots\beta}_{\gamma\cdots\eta} - \cdots - \Gamma_{\eta\sigma}^{\gamma} X^{\alpha\cdots\beta}_{\lambda\cdots\gamma} \end{aligned} \quad (1.4)$$

em que $\partial_{\alpha} \equiv \partial/\partial x^{\alpha}$ e, na expressão acima, parcelas onde aparecem as conexões anulam as partes que não se transformam como um tensor, resultante da transformação na primeira parcela do lado direito. No contexto de geometria diferencial, pode-se ter uma noção de como a conexão afim torna possível a comparação de tensores definidos em diferentes pontos da variedade através do conceito de transporte paralelo, dando origem às geodésicas, que são curvas definidas de modo que um vetor tangente a curva é transportado de um ponto à outro sem que sua direção seja alterada [52].

Em uma variedade Riemanniana, escolhe-se uma conexão que pode ser expressa em termos da métrica e que seja compatível com esta. Ou seja, tomando $\nabla_{\lambda} g_{\alpha\beta} = 0$, e impondo a simetria nos dois índices inferiores da conexão se obtém

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2} g^{\gamma\lambda} (\partial_{\alpha} g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta} g_{\lambda\alpha} - \partial_{\lambda} g_{\alpha\beta}). \quad (1.5)$$

Utilizando a conexão afim, pode-se obter informações sobre a curvatura da variedade, e conseqüentemente do espaço-tempo, através do tensor de curvatura de Riemann. A derivada de um tensor ao longo de uma curva em uma variedade fornece a ferramenta para definir o transporte paralelo de vetores nesta variedade, e o tensor de Riemann é descrito através desta regra. As derivadas parciais comutam, mas o mesmo não ocorre com a derivada covariante, então a diferença $\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}$ utilizando a regra de derivação (1.4) sobre um tensor qualquer X^{σ} , obtendo $\nabla_{\alpha} X^{\sigma} = \partial_{\alpha} X^{\sigma} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\sigma} X^{\lambda}$, não depende das derivadas parciais. Sendo assim,

$$(\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) X^{\sigma} = R_{\lambda\alpha\beta}^{\sigma} X^{\lambda} \quad (1.6)$$

em que

$$R_{\lambda\alpha\beta}^{\sigma} \equiv \partial_{\alpha}\Gamma_{\beta\lambda}^{\sigma} - \partial_{\beta}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\beta\lambda}^{\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\gamma} \quad (1.7)$$

são as componentes do tensor de Riemann que possuem as seguintes propriedades:

- i) Simetria em relação ao primeiro e último par de índices: $R_{\sigma\lambda\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\sigma\lambda}$.
- ii) $R_{\sigma\lambda\alpha\beta} = -R_{\lambda\sigma\alpha\beta} = -R_{\sigma\lambda\beta\alpha}$.
- iii) $R_{\sigma\lambda\alpha\beta} + R_{\sigma\alpha\beta\lambda} + R_{\sigma\beta\lambda\alpha} = 0$.
- iv) identidades de Bianchi: $\nabla_{\eta}R_{\sigma\alpha\beta\lambda} + \nabla_{\lambda}R_{\sigma\alpha\eta\beta} + \nabla_{\beta}R_{\sigma\alpha\lambda\eta} = 0$.

A partir da última propriedade, pode-se obter uma relação de extrema importância para Relatividade Geral. Contraindo os índices σ e β com $g^{\sigma\beta}$ e posteriormente α e λ com $g^{\alpha\lambda}$ se obtém

$$\nabla_{\alpha}(R^{\eta\alpha} - \frac{1}{2}g^{\eta\alpha}R) = 0, \quad (1.8)$$

em que $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ é o escalar de curvatura, também chamado de escalar de Ricci, e $R^{\alpha\beta}$ é o tensor de Ricci definido através da contração $R_{\alpha\sigma\beta}^{\sigma} = R_{\alpha\beta}$. por fim, define-se como sendo o tensor de Einstein $G_{\alpha\beta}$ o termo entre parênteses na relação (1.8).

1.3 Equações de Einstein

O princípio da equivalência postulado por Einstein, que especifica que sistemas acelerados e aqueles sujeitos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes, foi a base para formulação da teoria da Relatividade Geral. Esta faz uso das descobertas a respeito do espaço-tempo, tratadas na Relatividade Restrita, e a generaliza para qualquer geometria Riemanniana, de modo que desvios da geometria com respeito a métrica de Minkowski, em que aqui são escolhidos sistemas de coordenadas cujas componentes são

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (1.9)$$

são interpretados como efeitos gravitacionais. Ou seja, o tensor métrico desempenha o papel do campo gravitacional cujo efeito é interpretado como sendo a alteração da geometria do espaço-tempo causado pela presença de matéria ou energia, e esta

alteração é descrita pelo acoplamento da matéria à métrica. A maneira como a matéria se acopla à métrica é determinada via equação de Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (1.10)$$

em que κ é uma constante de acoplamento a ser determinada¹ e $T_{\alpha\beta}$ são as componentes do tensor energia-momento, que carregam informações a respeito da matéria. A equação de Einstein pode ser derivada da ação

$$S_{RG} = -\frac{1}{2\kappa} \int R \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_m \sqrt{-g} d^4x \quad (1.11)$$

em que g é o determinante da métrica, \mathcal{L}_m é uma lagrangiana funcional da métrica e dos campos de matéria somente e unidades em que a velocidade da luz $c = 1$ é adotada em todo este texto. Sendo assim, o tensor energia-momento é definido por

$$T_{\alpha\beta} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\alpha\beta}} \quad (1.12)$$

o que garante a lei de conservação [22],

$$\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.13)$$

Nenhuma referência a uma ação é fisicamente necessária para formular a teoria da Relatividade Geral; ela poderia apenas conter suas equações de campo sem necessitar de uma formulação Lagrangiana. Entretanto, é mais fácil comparar teorias alternativas de gravidade por meio de uma ação, do que simplesmente por suas equações de campo, pois esta fornece um entendimento físico mais claro ao tratar de campos extras que se acoplam à métrica.

1.3.1 Equação da Geodésica

A equação de Einstein é uma equação de movimento para o campo gravitacional, que se dá através da métrica, e como este se relaciona com a matéria. Na teoria Newtoniana, por exemplo, a equação que descreve a relação entre o potencial

¹A constante κ será determinada logo mais quando for obtido o limite Newtoniano da teoria.

gravitacional Φ_N e a densidade de matéria ρ é $\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho$, em que G é a constante gravitacional. E movimento de partículas sujeitas a força gravitacional gerada por este potencial é a forma matemática da Segunda Lei de Newton. Analogamente, se faz necessário descrever o movimento de partículas através de um espaço-tempo curvo, que é o cenário no qual se trata a Relatividade Geral e as demais teorias geométricas.

Do ponto de vista de teorias geométricas para gravitação, partículas se movem ao longo de geodésicas no espaço-tempo, que podem ser obtidas através da variação da ação

$$S = - \int dl \quad (1.14)$$

em que dl é definido em (1.1). Parametrizando a trajetória da partícula entre dois pontos A e B por um parâmetro p e utilizando a relação (1.1), podemos escrever a expressão acima como

$$S = \int_A^B \sqrt{g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp}} dp. \quad (1.15)$$

A partir daqui basta proceder com a extremização da ação acima de acordo com o cálculo variacional, em que é feita uma pequena variação da trajetória da partícula de $x^\alpha(p)$ para $x^\alpha(p) + \delta x^\alpha$ fixando os extremos de modo que $\delta x^\alpha = 0$ em A e B , como feito a seguir. Tomando a variação da ação acima com relação a $x^\alpha(p)$ temos

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} + 2g_{\alpha\beta} \frac{d(\delta x^\alpha)}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} \right) dp, \quad (1.16)$$

e como

$$\left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{dp}{dl} \implies \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} \right)^{-\frac{1}{2}} dp = \left(\frac{dp}{dl} \right)^2 dl \quad (1.17)$$

a expressão (1.16) pode ser reescrita como

$$\delta S = \frac{1}{2} \int_A^B \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} + 2g_{\alpha\beta} \frac{d(\delta x^\alpha)}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} \right) dl. \quad (1.18)$$

Integrando por partes a segunda parcela entre parênteses na expressão acima, e sabendo que $\delta x^\alpha = 0$ em A e B , ficamos com

$$\delta S = \int_A^B \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} \delta x^\alpha - g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\beta}{dl^2} \delta x^\alpha \right) dl \quad (1.19)$$

$$= \int_A^B \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} - \frac{\partial g_{\lambda\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\lambda}{dl} \frac{dx^\beta}{dl} - g_{\lambda\beta} \frac{d^2 x^\beta}{dl^2} \right) \delta x^\lambda dl. \quad (1.20)$$

Tendo em conta que

$$g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma = \frac{1}{2} g_{\gamma\beta} g^{\gamma\eta} (\partial_\alpha g_{\eta\lambda} + \partial_\lambda g_{\eta\alpha} - \partial_\eta g_{\alpha\lambda}) \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2} (\partial_\alpha g_{\beta\lambda} + \partial_\lambda g_{\beta\alpha} - \partial_\beta g_{\alpha\lambda}), \quad (1.22)$$

e lavando na integral acima juntamente com a condição $\delta S = 0$, obtemos

$$\frac{d^2 x^\beta}{dl^2} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta \frac{dx^\alpha}{dl} \frac{dx^\sigma}{dl} = 0, \quad (1.23)$$

que representa a trajetória de uma partícula livre sujeita a geometria de um espaço tempo curvo, que é determinado por uma métrica $g_{\alpha\beta}$ e se manifesta através das conexões. É comum parametrizar a trajetória de uma partícula utilizando o parâmetro de tempo próprio τ , que é um parâmetro invariante dado por

$$d\tau^2 = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.24)$$

em relação ao qual calcula-se as derivadas temporais dos quadri-vetores, de maneira que continuem se transformando como tal sob uma mudança de coordenadas, de modo que basta tomar $\tau = -l$ em (1.23).

1.3.2 Limite Newtoniano da Relatividade Geral

A Relatividade Geral pode ser vista como uma generalização da teoria da gravitação de Newton, portanto, as equações de Einstein devem ser equivalentes às equações de Newton no limite onde esta última é válida: baixas velocidades, campo fraco e estacionário. Vamos então analisar as equações de Einstein neste limite.

No início do próximo capítulo é demonstrado em detalhes, a partir da equação da geodésica, que teorias geométricas para gravitação apresentam equações de movimento para partículas na forma da segunda lei de Newton desde que

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi_N), \quad (1.25)$$

em que Φ_N é o potencial Newtoniano. Portanto, a única componente relevante para o limite Newtoniano é g_{00} .

Será analisado aqui a relação entre a equação de Einstein e a de Poisson que, como foi comentado na seção anterior, relaciona o potencial gravitacional à densidade de massa ρ de um sistema na gravitação Newtoniana, e a partir desta relação identificar a constante κ em (1.10). Para esta análise, é mais conveniente escrever as equações de campo (1.10) na forma

$$R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T), \quad (1.26)$$

que é obtida tomando o traço da equação (1.10), que fornece $R = -\kappa T$, e substituindo na mesma para eliminar R .

No regime onde é válida a física Newtoniana, as componentes do tensor energia-momento podem ser aproximadas por $T^{\alpha\beta} \approx \rho u^\alpha u^\beta$, em que as componentes da quadrivelocidade são² $u^\alpha \approx (1 - \Phi_N, 0)$, e com isso

$$T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} \approx g_{00}T^{00} \approx -(1 + 2\Phi_N)\rho, \quad (1.27)$$

e como $\rho\Phi_N$ é de ordem superior,

$$T \approx -\rho. \quad (1.28)$$

A consideração de um campo fraco nos permite escrever a métrica do espaço-tempo

²Para unidades em que a velocidade da luz $c = 1$.

como $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, em que $h_{\alpha\beta}$ representa um pequeno desvio com relação a métrica de Minkowski, ou seja, $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Utilizando esta expansão na expressão para a componente do tensor de Ricci R_{00}^σ , obtido a partir de (1.7), e mantendo a primeira ordem em $h_{\alpha\beta}$, observa-se que

$$R_{00} \approx \partial_i \Gamma_{00}^i, \quad (1.29)$$

pois as parcelas que possuem produtos de $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ são de segunda ordem em $h_{\alpha\beta}$, e como a componente essencial é g_{00} não há necessidade de calcular as componentes espaciais e espaço-temporais de $R_{\alpha\beta}$, que são de ordem superior. Utilizando (1.5) obtemos

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_j h_{00}. \quad (1.30)$$

A equação (1.26) para $\alpha = \beta = 0$, juntamente com (1.28) e a expressão acima fornece

$$\eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00} \approx -\kappa \rho. \quad (1.31)$$

podemos identificar através da expressão (1.25), que $h_{00} = -2\Phi_N$, logo a equação acima fica

$$\nabla^2 \Phi_N = \frac{\kappa}{2} \rho, \quad (1.32)$$

e como a equação de Poisson é $\nabla^2 \Phi_N = 4\pi G \rho$, podemos identificar

$$\kappa = 8\pi G. \quad (1.33)$$

1.3.3 Solução de Schwarzschild

Logo após a apresentação final da teoria da Relatividade Geral em 1916, o astrônomo alemão Karl Schwarzschild resolveu as equações de campo de Einstein para um caso bastante particular, simples e de grande alcance quanto às suas possibilidades de aplicações experimental e observacional. Este procedimento foi publicado e sua versão em inglês é [42]. Trata-se da determinação da métrica do espaço-tempo no exterior de uma distribuição de massa M , estática e esfericamente simétrica. A solução de Schwarzschild aplica-se, por exemplo, para o movimento planetário em torno do Sol, e representa um aperfeiçoamento da lei de gravitação universal de Newton quando aplicada no mesmo contexto.

O procedimento para esta solução é apresentado de diversas maneiras em dife-

rentes livros bem conhecidos, com abordagens semelhantes a do artigo de Schwarzschild e algumas mais simplificadas, como por exemplo [51], [7] e [52], entre outros. Independente da maneira com é obtida esta solução, todas tem como objetivo utilizar as componentes da métrica que aparecem no elemento de linha

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.34)$$

na equação de Einstein para uma região do espaço-tempo a uma distância r do centro de um objeto esfericamente simétrico e de massa M , em que seu raio é menor que r , e obter as expressões para as funções $f(r)$ e $h(r)$. Em uma região onde não há distribuição de matéria a equação de Einstein assume a forma

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\gamma = 0. \quad (1.35)$$

As conexões $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$, por serem simétricas nos índices inferiores, possuem 40 componentes independentes. Para as componentes da métrica no elemento de linha (1.34)

$$g_{00} = -f(r), \quad (1.36)$$

$$g_{11} = h(r), \quad (1.37)$$

$$g_{22} = r^2, \quad (1.38)$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.39)$$

as componentes não nulas da conexão, tendo em conta que $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi)$, são

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2f(r)} \frac{df(r)}{dr} = \Gamma_{10}^0, \quad (1.40)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2h(r)} \frac{df(r)}{dr}, \quad (1.41)$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2h(r)} \frac{dh(r)}{dr}, \quad (1.42)$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{h(r)}, \quad (1.43)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r \sin^2 \theta}{h(r)}, \quad (1.44)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r} = \Gamma_{21}^2, \quad (1.45)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} = \Gamma_{31}^3, \quad (1.46)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (1.47)$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \Gamma_{23}^3, \quad (1.48)$$

Com as relações acima podemos calcular as componentes da equação de Einstein (1.35). Os cálculos são simples, porém um pouco longos, e mostrá-los distancia o objetivo do texto, portanto serão exibidas aqui as respostas

$$R_{00} = -\frac{f''(r)}{2f(r)} + \frac{1}{4} \left(\frac{f'(r)}{h(r)} \right) \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{f'(r)}{h(r)} \right), \quad (1.49)$$

$$R_{11} = \frac{f''(r)}{2f(r)} - \frac{1}{4} \left(\frac{f'(r)}{f(r)} \right) \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} \right), \quad (1.50)$$

$$R_{22} = -1 + \frac{r}{2h(r)} \left(-\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) + \frac{1}{h(r)}, \quad (1.51)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}, \quad (1.52)$$

em que $f'(r) = df(r)/dr$ e $R_{\alpha\beta} = 0$ para $\alpha \neq \beta$. Vamos então a solução da equações geradas por (1.35), utilizando as expressões acima. Dividindo (1.49) por $f(r)$ e (1.50) por $h(r)$ e somando-as obtemos

$$-\frac{2}{rh(r)} \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{f'(r)}{f(r)} \right) = 0 \quad (1.53)$$

e como $rh(r) \neq 0$ temos

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{h'(r)}{h(r)}, \quad (1.54)$$

cuja integração fornece

$$f(r)h(r) = C. \quad (1.55)$$

em que C é constante de integração. Para fixar o valor de C , basta impor que a métrica seja a de Minkowski quando r é grande, ou seja,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1 \implies h(r) = \frac{1}{f(r)}. \quad (1.56)$$

Levando esta relação em (1.51), obtemos

$$R_{22} = -1 + rf'(r) + f, \quad (1.57)$$

e da relação $R_{\alpha\beta} = 0$ vem

$$rf'(r) + f(r) = 1 \quad (1.58)$$

$$\frac{d}{dr}(rf(r)) = 1, \quad (1.59)$$

logo

$$rf(r) = r + C_1 \quad (1.60)$$

sendo C_1 constante. Com isso

$$f(r) = 1 + \frac{C_1}{r} \quad (1.61)$$

$$h(r) = \left(1 + \frac{C_1}{r}\right)^{-1}, \quad (1.62)$$

e o elemento de linha (1.34) fica

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C_1}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{C_1}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.63)$$

A constante C_1 pode ser fixada identificando a componente g_{00} acima com (1.25). Para uma distribuição esférica de massa M temos $\Phi_N = -GM/r$ [52], logo

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \implies C_1 = -2GM, \quad (1.64)$$

então

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.65)$$

É bastante comum, e em alguns casos mais conveniente, reescrever o elemento de linha acima expresso em um sistema de coordenadas de modo a torná-lo isotrópico. Isto pode ser feito introduzindo a nova coordenada radial

$$r' \equiv \frac{1}{2} \left[r - MG + (r^2 - 2GMr)^{1/2} \right] \quad (1.66)$$

ou na forma

$$r = r' \left(1 + \frac{GM}{2r'} \right)^2, \quad (1.67)$$

que levando em (1.65), obtém-se

$$ds^2 = -\frac{(1 - GM/2r')^2}{(1 + GM/2r')^2} dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2r'} \right)^4 (dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (1.68)$$

Capítulo 2

Formalismo Pós-Newtoniano Parametrizado

A teoria da gravitação de Newton pode explicar os efeitos da gravidade no sistema solar com uma precisão de até 10^{-5} . Isto se deve ao fato de a gravidade, no sistema solar, ser fraca o suficiente para atender as exigências do regime onde vale a teoria newtoniana. Portanto, espera-se que teorias métricas de gravitação sejam equivalentes a teoria newtoniana quando aplicadas a sistemas cujo campo gravitacional é estático e suficientemente fraco, e isto será verificado aqui. Neste Regime um corpo se move de acordo com

$$\mathbf{a} = \nabla U, \quad (2.1)$$

em que \mathbf{a} é a aceleração do corpo e U o potencial Newtoniano dado por¹

$$\nabla^2 U = -4\pi\rho; \quad U(\mathbf{x}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad (2.2)$$

sendo ρ a densidade de massa de repouso que produz o potencial sobre o corpo de teste, e além disso é tomado a partir daqui, unidades em que $G = 1$.

Para corpos que se movem a baixas velocidades pode-se desprezar os termos $dx/d\tau$ com relação à $dt/d\tau$. Ou seja, a equação (1.23) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.3)$$

¹No primeiro capítulo foi utilizado o símbolo Φ_N para o potencial Newtoniano e $\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho$ para a equação de Poisson que tem sinal contrário a (2.2). esta mudança foi feita pois a convenção (2.2) é classicamente utilizada na literatura ao tratar de PPN. A relação entre as duas notações é $U = -\Phi_N$

E ainda, como o campo é estático, as derivadas das componentes da métrica no tempo devem ser nulas, e com isso,

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}g_{00}. \quad (2.4)$$

Com base no argumento de que o campo gravitacional deve ser fraco, podemos escrever a métrica do espaço-tempo em coordenadas tais que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.5)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ são as componentes da métrica de Minkowski, $h_{\mu\nu}$ representa um pequeno desvio de $\eta_{\mu\nu}$ e são as componentes da métrica que descreve a região onde atua o campo, ou seja, $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$ suficientemente longe da origem do campo. Mantendo somente a primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ se obtém, para (2.4)

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\nu}h_{00}. \quad (2.6)$$

Levando na equação (2.3) vem

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\delta^{ij}\partial_j h_{00}, \quad (2.7)$$

ou

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^i}{dt^2} + \frac{d^2t}{d\tau^2}\frac{dx^i}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2\delta^{ij}\partial_j h_{00}. \quad (2.8)$$

Portanto, a equação acima equivale a (2.1) se $h_{00} = 2U$ e

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \quad (2.9)$$

ou seja, t e τ tem uma relação afim. Então, a relação (2.8) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \nabla U, \quad (2.10)$$

que é equivalente a (2.1), e $g_{00} = -1 + 2U$ é a métrica que faz com que teorias geométricas para gravitação tenham equações de movimento para partículas equivalentes segunda lei de Newton.

Atravéz do Teorema do Virial, as velocidades v dos corpos que se movem sujeitos a U se relacionam com este tal que $U \sim v^2$. Para a análise de sistemas cujos constituintes estão em regime newtoniano é suficiente considerar os corpos astronômicos como compostos por fluidos perfeitos, ou seja, as componentes do tensor energia momento são dadas por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \rho\Pi + p)u^\mu u^\nu + g^{\mu\nu}p, \quad (2.11)$$

em que Π é chamada densidade específica (razão entre a densidade de energia e densidade de massa de repouso), p é a pressão e u^α a quadrivelocidade do fluido.

A ordem de “pequenez” das variáveis da matéria podem ser atribuídas em relação a velocidade dos corpos do sistema. Atravéz de (2.2) vemos que $\rho \sim v^2$, a densidade de energia específica e a razão p/ρ também são da mesma ordem de U ($\sim 10^{-5}$ para o sol), em resumo,

$$U \sim \Pi \sim \frac{p}{\rho} \sim \rho \sim v^2, \quad p \sim v^4 \quad (2.12)$$

e também $\partial/\partial t \sim v$. A partir daqui a notação utilizada para rotular ordem de potência de qualquer variável X em relação a velocidade será $X^{(N)}$ se $X \sim v^N$. O objetivo do formalismo PPN é expandir as componentes da métrica nessas ordens, de modo a se obter valores para alguns parâmetros que podem ser usados para comparar diferentes teorias através da interpretação física dos mesmos.

O formalismo PPN foi motivado pelos trabalhos de Eddington [13], Robertson [35] e Schiff [41], onde o sistema solar era idealizado como uma distribuição central de massa em que o sol é esférico e não girante (logo o seu potencial gravitacional $U \sim M/r$) e planetas como corpos de prova que se movem em geodésicas desta métrica. As componentes da métrica nesta versão do formalismo são, em coordenadas isotrópicas, dada por

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2M}{r} - 2\beta\left(\frac{M}{r}\right)^2, \\ g_{ij} &= \left(1 + 2\gamma\frac{M}{r}\right)\delta_{ij} \\ g_{0j} &= 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

em que M é a massa do sol de raio R , γ e β têm valores dados por cada teoria. No caso de Relatividade Geral, pode-se comparar as componentes acima com a expansão das componentes da métrica obtida para solução de Schwarzschild (1.68),

em coordenadas cartesianas, até a ordem $(M/r)^2$,

$$g_{00} = -1 + \frac{2M}{r} - 2\left(\frac{M}{r}\right)^2,$$

$$g_{ij} = \left(1 + 2\frac{M}{r} + \frac{3}{2}\left(\frac{M}{r}\right)^2\right)\delta_{ij} \quad (2.14)$$

$$g_{0j} = 0, \quad (2.15)$$

e verificar diretamente que $\gamma = \beta = 1$.

O parâmetro γ , por exemplo, é o coeficiente do potencial U , ou seja, este determina o quanto a métrica se distancia de Minkowski e pode ser interpretado como a quantidade de curvatura espacial por unidade de massa. O parâmetro β vem como coeficiente de U^2 e pode ser relacionado à não linearidade da teoria em questão. Veremos mais a frente que testes observacionais indicam que γ está relacionado ao desvio da luz e β à precessão do periélio de partículas em movimento.

2.1 Sistema de Coordenadas

Para discutir o limite pós-Newtoniano corretamente é adequado especificar o sistema de coordenadas de forma precisa. No livro [54], mostra-se que é possível juntar a solução local de PPN com a métrica de fundo cosmológica. Esta junção não é de todo realista, pois despreza outras estruturas intermediárias, como nossa galáxia, mas ilustra como inserir os resultados de PPN num espaço-tempo que abarca maiores escalas, e que não é necessariamente assintoticamente plano.

Considere um universo homogêneo e isotrópico e que neste universo existe um sistema Newtoniano isolado. Nas regiões externas ao sistema isolado é de se esperar que a métrica do espaço-tempo pode variar de acordo com

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{(a(t)/a_0)^2}{\left(1 + \frac{kr^2}{4a_0^2}\right)^2} \delta_{ij} dx^i dx^j + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.16)$$

em que os dois primeiros termos correspondem ao elemento de linha de Friedmann-Robertson-Walker apropriado para um modelo cosmológico homogêneo e isotrópico e o terceiro termo representa a perturbação devido ao sistema local. Neste elemento de linha $a(t)$ é o fator de escala cosmológico ($a_0 \equiv a(t_0)$), k é o parâmetro de curvatura ($k = 0, \pm 1$) e r a distância do sistema local até uma região externa onde ainda atua o campo.

Para um determinada distância r_0 em um determinado instante t_0 podemos realizar uma transformação de coordenadas de modo a escrever

$$ds^2 = (\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta})dx'^{\alpha}dx'^{\beta}, \quad \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (2.17)$$

a saber

$$t' = t, \quad x'^j = x^j(1 - kr_0^2/4a_0^2)^{-1}. \quad (2.18)$$

A transformação acima deve ser tomada em uma região onde r_0 seja grande o suficiente para que $\eta_{\alpha\beta}$ possa ser visto como uma forma assintótica de $g_{\alpha\beta}$, isto é, quando os termos de maior ordem em $h_{\alpha\beta}$ forem muito menores que a unidade, isto ocorre onde $M/r_0 \ll 1$ sendo M a massa total do sistema isolado. Além disso, M deve ser tal que o desvio da métrica com relação a $\eta_{\mu\nu}$ para $r \ll r_0$ seja pequeno, e o menor dos termos em $h_{\mu\nu}$ são da ordem $(M/r)^2$.

Para o sistema solar por exemplo, $r_0 \lesssim 10^{11}km$ e uma vez que $a_0 \sim 10^{10}$ anos luz [54], temos que os desvios máximos com relação a $\eta_{\mu\nu}$ são da ordem de $^2 (r_0/a_0)^2 \sim 10^{-24}$, que são muito menores que os desvios pós-newtonianos esperados $(M/r)^2 \gtrsim 10^{-16}$. Assim, podemos considerar a métrica para o espaço-tempo do sistema solar como sendo a métrica de Minkowski em suas regiões exteriores, e com desvios da ordem de M/r e $(M/r)^2$ nas interiores com uma boa precisão. Apesar de o fator de escala cosmológico variar com o tempo, a dinâmica do sistema solar evolui muito mais rapidamente. Portanto, não é necessário levar em conta a variação do fator de escala do universo ao analisar o sistema local.

Para o sistema local de coordenadas é útil definir as seguintes convenções e quantidades:

- Os vetores espaciais são tratados como vetores cartesianos, ou seja, $x^k \equiv x_k$.
- O símbolo $|x|$ denota a norma de x . Por exemplo, $x^k x_k \equiv x_k x_k \equiv |x|^2 \equiv x^k x^k$.

Além disso, vale ressaltar que as componentes da perturbação da métrica $h_{\alpha\beta}$ têm seus índices levantados e abaixados com $\eta_{\alpha\beta}$, isto é, $h_{\nu}^{\mu} = \eta^{\alpha\mu} h_{\alpha\nu}$. O sistema definido com estas propriedades é comumente chamado de quase cartesiano.

²1 ano luz = $9 \cdot 10^{12}Km \sim 10^{13}km$, logo $a_0 \sim 10^{10}$ anos luz $\sim 10^{23}km$. Então $(r_0/a_0)^2 \sim 10^{-24}$.

2.2 Limite Newtoniano

No início deste capítulo foi feita uma análise para estabelecer ordens de potência da velocidade dos corpos do sistema para as variáveis da matéria do mesmo. Pode-se fazer uma análise equivalente a fim de estabelecer ordens de potência da velocidade para as componentes da métrica do espaço-tempo, e isto pode ser feito como se segue.

A ação para uma partícula relativística livre pode ser escrita da seguinte forma

$$S = -m \int \left(-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right)^{1/2} dt = -m \int (-g_{00} - 2g_{0i}v^i - g_{ij}v^i v^j)^{1/2} dt. \quad (2.19)$$

Como já foi visto, para a teoria de Newton bastam os termos da ordem $U \sim v^2$, ou seja, para o limite newtoniano basta conhecer, na ação acima

$$g_{00}^{(2)}, \quad g_{0i}^{(1)}, \quad g_{ij}^{(0)}. \quad (2.20)$$

Para determinar tais termos, deve-se expandir a métrica do espaço-tempo $g_{\alpha\beta}$ em torno de um valor assintótico que seja solução das equações para o espaço plano, pois esta é a primeira aproximação quando o sistema está sob ação de um campo fraco. Como já foi visto, pode-se escrever

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.21)$$

em que $\eta_{\alpha\beta}$ são as componentes da métrica de Minkowski, e $h_{\alpha\beta}$ é um pequeno desvio com relação a $\eta_{\alpha\beta}$. Fica claro que todos os termos além de $g_{\alpha\beta}^{(0)}$ devem estar em $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{(N)}$. Deste modo, a partir da expansão acima e de (2.20) se obtém

$$g_{00} = -1 + h_{00}^{(2)}, \quad g_{0i} = h_{0i}^{(1)}, \quad g_{ij} = \delta_{ij}, \quad (2.22)$$

para ordem Newtoniana. Utilizando esta expansão da métrica, deve-se reproduzir a equação newtoniana para o movimento de partículas sujeitas a um potencial U , e como foi visto anteriormente, espera-se que $h_{00}^{(2)} \propto 2U$. Como a lagrangiana a partir da qual se obtém $\mathbf{a} = \nabla U$ é $\mathcal{L} = (1 - v^2 - 2U)^{1/2}$, e esta pode ser comparada com (2.19) para observar que $g_{0i}^{(1)} = 0$. E com isso

$$g_{00} = -1 + 2\alpha U, \quad g_{0i}^{(1)} = 0, \quad g_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}. \quad (2.23)$$

em que α é função dos parâmetros e constantes de acoplamento de cada teoria ³.

O limite Newtoniano já não é suficiente quando se faz necessário uma precisão superior a 10^{-5} . Ele não pode prever o deslocamento adicional do periélio de mercúrio de $\sim 5 \cdot 10^{-7}$ radianos por órbita, por exemplo. Por isso, é conveniente uma aproximação que vai além do limite Newtoniano para a métrica do espaço-tempo.

2.3 Limite Pós-Newtoniano

Para o limite pós-newtoniano é necessário expandir as componentes da métrica na ação (2.19) até a mesma atingir a próxima ordem de velocidade. Os termos da ordem de v^3 (e conseqüentemente ordem ímpar de derivadas temporais) mudam de sinal sob reversão temporal, e isto representaria dissipação ou absorção de energia pelo sistema. Além disso, a lei de conservação de energia no limite newtoniano impede que os termos v^3 apareçam. Portanto as componentes da métrica devem ser expandidas de modo que a ação atinja ordem v^4 , ou seja, deve-se conhecer as componentes

$$\begin{matrix} (4) & (3) & (2) \\ g_{00'} & g_{0i'} & g_{ij} \end{matrix} \quad (2.24)$$

A análise pós newtoniana não é simples, pois deve ser feita através das equações de campo de cada teoria, por isso também é preciso expandir as componentes do tensor energia momento (2.11) até as ordens necessárias, ou seja

$$\begin{matrix} (4) & (3) & (2) \\ T^{00} & T^{0i} & T^{ij} \end{matrix}. \quad (2.25)$$

As componentes do tensor energia momento (2.11) podem ser reescritas utilizando a expansão $g^{\alpha\beta} = g^{(0)\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\lambda}h_{\lambda}^{\beta} + \dots$, da seguinte forma

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + \rho\Pi + p) \frac{dx^{\alpha}}{dt} \frac{dx^{\beta}}{dt} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + p(g^{(0)\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} + h^{\alpha\lambda}h_{\lambda}^{\beta} + \dots). \quad (2.26)$$

Através do elemento de linha para o espaço-tempo

$$\begin{aligned} ds^2 = -d\tau &= g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = (g_{\alpha\beta}^{(0)} + h_{\alpha\beta}) dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ &= (-1 + h_{00}) dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j + O(v^4), \end{aligned} \quad (2.27)$$

³No caso da Relatividade Geral $\alpha = G = 1$.

e com isso obtém-se, para segunda ordem

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{(2)}^2 = (1 - h_{00}^{(2)} - \delta_{ij}v^i v^j). \quad (2.28)$$

Não há necessidade de expandir as componentes da métrica até ordem pós-Newtoniana nesta etapa pois o termo acima aparece multiplicando variáveis da ordem v^2 ou superior em (2.26). Invertendo esta expressão e tendo conta que $U \sim v^2$, pode-se expandir a expressão acima para obter⁴

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{(2)}^2 = (1 + h_{00}^{(2)} + v^2). \quad (2.29)$$

Levando em (2.26), pode-se escrever as seguintes componentes para a expansão do tensor energia-momento

$$T^{00} = \rho(1 + \Pi + v^2 + h_{00}^{(2)}) + O(v^6), \quad (2.30)$$

$$T^{0i} = \rho v^i(1 + \Pi + v^2 + h_{00}^{(2)} + p/\rho) + O(v^7), \quad (2.31)$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j(1 + \Pi + v^2 + h_{00}^{(2)} + p/\rho) + p(\delta^{ij} - h^{ij}) + O(v^8), \quad (2.32)$$

logo

$$T^{00}{}^{(2)} = \rho, \quad (2.33)$$

$$T^{00}{}^{(4)} = \rho(1 + \Pi + h_{00}^{(2)} + v^2), \quad (2.34)$$

$$T^{0i}{}^{(3)} = \rho v^i, \quad (2.35)$$

$$T^{ij}{}^{(2)} = 0, \quad (2.36)$$

$$T^{ij}{}^{(4)} = \rho v^i v^j + p\delta^{ij}. \quad (2.37)$$

Será preciso, posteriormente, utilizar as componentes do tensor energia momento como descritas acima porém com índices abaixados, e isto é feito da seguinte

⁴Como $U \sim v^2$ é apropriada a expansão $(1 + x)^n \approx 1 + nx$.

forma

$$\begin{aligned} T_{00} = g_{0\alpha}g_{0\beta}T^{\alpha\beta} &= g_{0\alpha}g_{0\beta}T^{\alpha\beta} = \overset{(0)}{g}_{0\alpha}\overset{(0)}{g}_{0\beta}T^{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{g}_{0\alpha}h_{0\beta}T^{\alpha\beta} + O(v^6) \\ &= T^{00} - 2h_{00}T^{00} + O(v^6). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Logo

$$\overset{(2)}{T}_{00} = \overset{(2)}{T}^{00}, \quad (2.39)$$

$$\overset{(4)}{T}_{00} = \overset{(4)}{T}^{00} - 2\overset{(2)}{h}_{00}\overset{(2)}{T}^{00}. \quad (2.40)$$

Utilizando (2.33) e (2.34)

$$\overset{(2)}{T}_{00} = \rho, \quad (2.41)$$

$$\overset{(4)}{T}_{00} = \rho(1 + \Pi + \overset{(2)}{h}_{00} + v^2) - 2\overset{(2)}{h}_{00}\rho = \rho(1 + \Pi - \overset{(2)}{h}_{00} + v^2). \quad (2.42)$$

O procedimento é análogo para as demais componentes:

$$\begin{aligned} T_{0i} = g_{0\alpha}g_{i\beta}T^{\alpha\beta} &= g_{0\alpha}g_{i\beta}T^{\alpha\beta} + g_{0\alpha}h_{i\beta}T^{\alpha\beta} + h_{0\alpha}g_{i\beta}T^{\alpha\beta} + O(v^6) \\ &= -\delta_{ij}T^{0j} + O(v^4), \end{aligned} \quad (2.43)$$

fazendo uso de (2.35), vem

$$\overset{(3)}{T}_{0i} = -\rho v_i. \quad (2.44)$$

Finalmente

$$T_{ij} = g_{i\alpha}g_{j\beta}T^{\alpha\beta} = g_{i\alpha}g_{j\beta}T^{\alpha\beta} + O(v^5) = T^{ij} + O(v^5), \quad (2.45)$$

então, o termo $\overset{(2)}{T}_{ij} = 0$ e

$$\overset{(4)}{T}_{ij} = -\rho v^i v^j + \delta_{ij}p. \quad (2.46)$$

Tendo posse das componentes obtidas acima podemos também calcular o traço do tensor energia-momento dado por,

$$T = g_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}, \quad (2.47)$$

expandido até a ordem pós-Newtoniana. Utilizando a expansão (2.21), a expressão acima se torna

$$\begin{aligned}
T &= \eta_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \\
&= \eta_{00} T^{00} + \eta_{ij} T^{ij} + h_{00} T^{00} + h_{0i} T^{0i} + h_{ij} T^{ij} \\
&= -T^{(4)00} + \eta^{ij} T^{(2)ij} + \eta^{ij} T^{(4)ij} + h_{00} T^{(2)00} + h_{ij} T^{(2)ij} + O(v^6).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Utilizando as componentes (2.33)-(2.37) obtém-se

$$\begin{aligned}
T &= -\rho(1 + \Pi + h_{00}^{(2)} + v^2) + \rho v^2 + 3p + \rho h_{00}^{(2)} + O(v^6) \\
&= -\rho - \rho\Pi + 3p + O(v^6).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

2.4 Potenciais e Métrica Pós-Newtonianos

A métrica pós-Newtoniana mais geral, pode ser obtida escrevendo todos os termos compostos dos possíveis funcionais pós-Newtonianas das variáveis da matéria, cada uma multiplicada por um coeficiente arbitrário que pode depender das condições cosmológicas e outras constantes, e acrescentando a estes termos a métrica de Minkowski. Será considerado que toda a matéria do sistema possa ser tratada como um fluido perfeito. A fim de se obter um formalismo útil deve-se impor algumas restrições sobre os possíveis termos a serem considerados, e que aparecerão na métrica geral. Estas restrições são:

- (i) Os termos que aparecem na métrica devem ser de ordem Newtoniana ou pós-Newtoniana; termos de ordem superior não são considerados.
- (ii) Os termos devem desaparecer quando a distância entre o ponto origem do campo x e um ponto no interior da porção de matéria x' , torna-se grande. Isto garante que a métrica seja Minkowski no sistema de coordenadas escolhido.
- (iii) As coordenadas são escolhidas de modo a deixar a métrica adimensional.
- (iv) A origem espacial e momento inicial do tempo devem ser completamente arbitrários, de modo que estas quantidades não devem aparecer explicitamente na métrica. Esta condição é satisfeita fazendo uso de funções em que o ponto do campo sempre ocorra na combinação $x - x'$ e que a dependência temporal esteja implícita nas variáveis de matéria e parâmetros cosmológicos correspondentes.

- (v) As perturbações da métrica h_{00}, h_{0j} e h_{ij} se transformam, sob transformações espaciais, como um escalar, um vetor e um tensor respectivamente
- (vi) Os funcionais da métrica são gerados por U , ρ , Π , p e v , e não por seus gradientes.

Além das restrições acima, leva-se em conta também que os funcionais devem ser simples. A partir destas considerações, pode-se listar os termos que possivelmente aparecem para cada componente da métrica pós-Newtoniana abaixo:

Como $h_{ij}^{(2)}$ deve se comportar como um tensor tridimensional sob transformações espaciais, os termos a serem considerados são

$$U\delta_{ij}, \quad \chi_{,ij} \quad (2.50)$$

em que $\chi_{,ij}$ é chamado de super-potencial e é definido por

$$\nabla^2 \chi = -2U, \quad \Rightarrow \quad \chi(\mathbf{x}, t) \equiv - \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (2.51)$$

Devendo se transformar como um vetor, $h_{0j}^{(3)}$ deve conter apenas os termos

$$V_j \equiv \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)v'_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \nabla^2 V_j = -4\pi v_j \quad (2.52)$$

e

$$W_j \equiv \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x', \quad (2.53)$$

que podem ser relacionados com o super potencial por

$$\chi_{,0j} = V_j - W_j. \quad (2.54)$$

Utilizando as restrições (i)-(vi) devemos considerar, para a componente $h_{00}^{(4)}$, os seguintes escalares

$$\phi_w \equiv \int \rho' \rho'' \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}''|} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''|} \right) d^3x' d^3x'' \quad (2.55)$$

$$\phi_1 \equiv \int \frac{\rho' v'^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x', \quad \nabla^2 \phi_1 = -4\pi \rho v^2 \quad (2.56)$$

$$\phi_2 \equiv \int \frac{\rho' U'}{|x - x'|} d^3 x', \quad \nabla^2 \phi_2 = -4\pi\rho U \quad (2.57)$$

$$\phi_3 \equiv \int \frac{\rho' \Pi'}{|x - x'|} d^3 x', \quad \nabla^2 \phi_3 = -4\pi\rho \Pi \quad (2.58)$$

$$\phi_4 \equiv \int \frac{p'}{|x - x'|} d^3 x', \quad \nabla^2 \phi_4 = -4\pi p \quad (2.59)$$

$$\mathcal{A} \equiv \int \frac{\rho' [\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (2.60)$$

$$\mathcal{B} \equiv \int \frac{\rho'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \frac{d\mathbf{v}'}{dt} d^3 x'. \quad (2.61)$$

Existem várias relações entre estes potenciais, estas podem ser listadas:

$$\begin{aligned} \partial_0 \partial_0 \chi &= \mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1; & \partial_j V_j &= -\partial_0 U; & |\nabla U|^2 &= \nabla^2 \left(\frac{1}{2} U^2 - \phi_2 \right); \\ U \nabla^2 U &= \phi_2; & \nabla^2 (\phi_w + 2U^2 - 3\phi_2) &= 2\partial^i \partial^j \chi \partial_i \partial_j U. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dados os potenciais definidos acima, a métrica é escrita em função destes com coeficientes arbitrários, que serão os parâmetros parametrizados pós-Newtonianos. Fazendo uso da arbitrariedade das coordenadas incorporada na restrição (ii) e a partir de uma transformação infinitesimal de coordenadas, pode-se escolher um calibre específico no qual a métrica tem uma forma mais simples, e isto é feito abaixo.

A lei de transformação para a métrica, assim como para qualquer tensor de segunda ordem é a usual

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{x}^\lambda) = g_{\mu\nu}(x^\lambda) \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\beta}. \quad (2.63)$$

Considere a transformação infinitesimal de coordenadas

$$\bar{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\nu), \quad (2.64)$$

com isso temos que $\partial_{\bar{\alpha}}x^\mu = \delta_\alpha^\mu - \partial_{\bar{\alpha}}\xi^\mu$, e tendo em conta a expansão

$$g_{\mu\nu}(x^\lambda) = g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda - \xi^\lambda) \approx g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda) - \xi^\gamma \partial_{\bar{\gamma}} g_{\mu\nu}, \quad (2.65)$$

a relação (2.63) fica

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{x}^\lambda) \approx (g_{\mu\nu}(\bar{x}^\lambda) - \xi^\gamma \partial_{\bar{\gamma}} g_{\mu\nu})(\delta_\alpha^\mu - \partial_{\bar{\alpha}}\xi^\mu)(\delta_\beta^\nu - \partial_{\bar{\beta}}\xi^\nu). \quad (2.66)$$

Para a primeira ordem em ξ^α obtém-se

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{x}^\lambda) = g_{\alpha\beta}(\bar{x}^\lambda) - \xi^\gamma \partial_{\bar{\gamma}} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\nu} \partial_{\bar{\beta}} \xi^\nu - g_{\mu\beta} \partial_{\bar{\alpha}} \xi^\mu, \quad (2.67)$$

a barra sobre os índices das derivadas e a dependência das componentes da métrica do lado direito da relação acima foram removidos pois a dependência é clara e isto simplifica a notação. Sabendo que $\nabla_\mu \xi^\nu = \partial_\mu \xi^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu \xi^\lambda$, as derivadas ordinárias podem ser substituídas na expressão (2.67) por derivadas covariantes desde que sejam subtraídas as respectivas conexões, isto é ⁵,

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{x}^\lambda) &= g_{\alpha\beta}(\bar{x}^\lambda) - \xi^\gamma \partial_{\bar{\gamma}} g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma} \nabla_{\bar{\beta}} \xi^\gamma + g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma \xi^\sigma - g_{\gamma\beta} \nabla_{\bar{\alpha}} \xi^\gamma + g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma \xi^\sigma \\ &= g_{\alpha\beta}(\bar{x}^\lambda) - (g_{\alpha\gamma} \nabla_{\bar{\beta}} \xi^\gamma + g_{\gamma\beta} \nabla_{\bar{\alpha}} \xi^\gamma) - \xi^\sigma (\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma - g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma), \end{aligned} \quad (2.68)$$

e como

$$\partial_\sigma g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma} \Gamma_{\beta\sigma}^\gamma - g_{\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\sigma}^\gamma = \nabla_\sigma g_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.69)$$

obtém-se, finalmente

$$\bar{g}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}(\bar{x}^\lambda) = g_{\alpha\beta}(\bar{x}^\lambda) - \nabla_{\bar{\beta}} \xi_\alpha - \nabla_{\bar{\alpha}} \xi_\beta. \quad (2.70)$$

A fim de obedecer as condições para o sistema local de coordenadas já discutido, e também manter o caráter pós-Newtoniano das componentes da métrica, as funções ξ_μ devem ser tais que $\nabla_{\bar{\beta}} \xi_\alpha + \nabla_{\bar{\alpha}} \xi_\beta$ sejam funções pós-Newtonianas e ainda $\nabla_{\bar{\beta}} \xi_\alpha + \nabla_{\bar{\alpha}} \xi_\beta \rightarrow 0$ longe do sistema local. Este sistema garante que o referencial adotado não seja privilegiado e mantenha o caráter descrito na seção (2.1). O funcional pós-

⁵Os índices repetidos nos três últimos termos de (2.67) podem ser mudados, deste modo foi feita a mudança $\nu, \mu \rightarrow \gamma$ nos dois últimos termos.

Newtoniano mais simples que possui estas propriedades é o gradiente do super potencial, então será tomado

$$\xi_0 = \lambda_1 \partial_0 \chi, \quad \xi_j = \lambda_2 \partial_j \chi, \quad (2.71)$$

em que λ_1 e λ_2 são constantes. Pela transformação (2.64), poder-se-ia ter uma liberdade de escolha de quatro constantes; a prescrição acima, no entanto, impõe o mesmo valor para as componentes espaciais, reduzindo o número de constantes para apenas duas. A partir de (2.70) pode-se escrever

$$\begin{aligned} \bar{g}_{00} &= g_{00} - 2\nabla_0 \xi_0 \\ &= g_{00} - 2(\partial_0 \xi_0 - \Gamma_{00}^\alpha \xi_\alpha). \end{aligned} \quad (2.72)$$

Utilizando (2.71) e tendo em conta que a ordem mínima para Γ_{00}^0 e ξ_0 é v^3 (logo $\Gamma_{00}^0 \xi_0 \sim v^6$) pode-se escrever

$$\bar{g}_{00} = g_{00} - 2\lambda_1 \partial_0 \partial_0 \chi + 2\lambda_2 \Gamma_{00}^i \partial_i \chi \quad (2.73)$$

até a ordem necessária. O mesmo deve ser feito para as outras componentes:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{0i} &= g_{0i} - (\partial_0 \xi_i - \Gamma_{0i}^\alpha \xi_\alpha) - (\partial_i \xi_0 - \Gamma_{i0}^\alpha \xi_\alpha) \\ &= g_{0i} - \partial_0 \xi_i - \partial_i \xi_0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

ou ainda, utilizando (2.71)

$$\bar{g}_{0i} = g_{0i} - (\lambda_1 + \lambda_2) \partial_i \partial_0 \chi, \quad (2.75)$$

e também.

$$\bar{g}_{ij} = g_{ij} - 2\lambda_2 \partial_i \partial_j \chi. \quad (2.76)$$

O termo Γ_{00}^i que aparece em (2.73) pode ser calculado diretamente por

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_0 g_{j0} + \partial_0 g_{0j} - \partial_j g_{00}). \quad (2.77)$$

Mas como \bar{g}_{00} deve possuir termos até a ordem de v^4 e $\partial_j \chi$ é da ordem v^2 , a relação acima se reduz a

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \partial_i^{(2)} g_{00} = -\partial_i U. \quad (2.78)$$

Fazendo uso das relações (2.62), e da componente do símbolo de Christoffel calculado acima, as componentes (2.73),(2.75) e (2.76) podem ser reescritas, até a ordem necessária, na forma

$$\bar{g}_{\bar{0}\bar{0}} = g_{00} - 2\lambda_1(\mathcal{A} + \mathcal{B} - \phi_1) + 2\lambda_2(U^2 + \phi_w - \phi_2), \quad (2.79)$$

$$\bar{g}_{\bar{0}\bar{i}} = g_{0i} - (\lambda_1 + \lambda_2)(V_j - W_j), \quad (2.80)$$

$$\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij} - 2\lambda_2\partial_i\partial_j\chi. \quad (2.81)$$

O calibre que será adotado como padrão supõe uma escolha das constantes λ_1 e λ_2 de tal forma que as componentes $\chi_{,ij}$ e \mathcal{B} não aparecem nas componentes $\bar{g}_{\bar{i}\bar{j}}$ e $\bar{g}_{\bar{0}\bar{0}}$ respectivamente, ou seja, a parte espacial da métrica é isotrópica e diagonal. Tendo em vista que as transformações realizadas até então devem ser tomadas em todos os potenciais listados, a notação em que a barra indica a função transformada será abandonada afim de tornar mais simples a notação. Assim, a métrica será escrita em função de nove potenciais pós-Newtonianos e dez parâmetros PPN, que são $\gamma, \beta, \xi, \alpha_i$ e ζ_b ($b = 1, 2, 3, 4$). Em termos destes parâmetros as componentes da métrica são

$$g_{00} = -1 + 2U - 2\beta U^2 - 2\xi\phi_w + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1 + 2(3\gamma - 3\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2 + 2(1 + \zeta_3)\phi_3 + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\phi_4 - (\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A}, \quad (2.82)$$

$$g_{0j} = -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_j - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_j, \quad (2.83)$$

$$g_{ij} = (1 + 2\gamma U)\delta_{ij}. \quad (2.84)$$

Temos agora uma forma geral para a métrica pós-Newtoniana de um fluido perfeito para uma vasta gama de teorias métricas de gravidade, expressa em um sistema de coordenadas local em repouso em relação à estrutura do resto do universo, e em um calibre padrão. Teorias podem ser distinguidas e classificadas de acordo com o valor dos coeficientes que multiplicam cada termo da métrica.

2.5 Interpretação dos Parâmetros PPN

2.5.1 Transformações de Lorentz

A métrica pós-Newtoniana construída na seção anterior, cujas componentes são (2.82)-(2.84), foi obtida em um sistema de coordenadas tais que as regiões exteriores

ao sistema isolado está em repouso em relação ao restante do universo. Este sistema de coordenadas é útil para o cálculo da métrica pós-Newtoniana de uma determinada teoria. Entretanto, este não é conveniente para o cálculo de efeitos com precisão além da Newtoniana em sistemas que se movem em relação a estrutura das regiões exteriores ao sistema isolado, ou seja, do restante do universo, como o caso do Sistema Solar, por exemplo. Os resultados de experimentos para fins de obtenção dos valores dos parâmetros relacionados a cada efeito não podem ser afetados por escolha de um determinado sistema de coordenadas. Contudo, para o caso mencionado acima um sistema de coordenadas melhor pode ser aquele em que o centro de massa do sistema em estudo esteja aproximadamente em repouso. Além disso este procedimento dará algum conhecimento a respeito do significado dos parâmetros α_1, α_2 e α_3 .

Para isto deve-se fazer uma transformação de Lorentz para um novo referencial que se move com velocidade w em relação ao antigo referencial. A transformação completa de Lorentz das coordenadas em repouso (t, x) para as coordenadas em movimento (τ, Ξ) podem ser escritas na forma

$$x = \Xi + \left(\frac{1}{\sqrt{1-w^2}} - 1 \right) \frac{\Xi \cdot w}{w^2} w + \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \tau w, \quad (2.85)$$

e

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} (\tau + \Xi \cdot w). \quad (2.86)$$

A fim de se manter o caráter pós-Newtoniano da métrica, será considerado que o centro de massa do sistema move-se lentamente em relação ao universo exterior, isto é $|w| \sim v$. Deste modo, as transformações acima podem ser expandidas em potências de w até a ordem necessária que, como pode ser visto na referência [9] são $O(w^2)$ e $O(w^4)$ para (2.85) e (2.86) respectivamente. Logo

$$x = \Xi + \left(1 + \frac{1}{2} w^2 \right) w \tau + \frac{1}{2} (\Xi \cdot w) w + O(w^4), \quad (2.87)$$

e

$$t = \left(1 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{3}{8} w^4 \right) \tau + \left(1 + \frac{1}{2} w^2 \right) \Xi \cdot w + O(w^5), \quad (2.88)$$

em que τw é assumido como sendo $O(0)$.

Para escrever a métrica PPN no novo sistema de coordenadas, deve-se utilizar

a lei de transformação padrão para as componentes do tensor métrico ⁶

$$g_{\gamma\lambda}(\tau, \Xi) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \Xi^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \Xi^\lambda} g_{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}), \quad (2.89)$$

e expressar os funcionais da matéria que aparecem em $g_{\alpha\beta}(t, \mathbf{x})$ em termos das novas coordenadas. Como ρd^3x é medido em um referencial de Lorentz local, é invariante sob esta transformação, e por isto permanece inalterado, de modo que

$$\rho(t, \mathbf{x}') d^3x' = \rho(\tau, \Xi') d^3\Xi'. \quad (2.90)$$

A invariância deste termo reflete o simples fato de que $dm = \rho d^3x$ é a massa de repouso conservada em um elemento do fluido, por isto esta não pode ser alterada por uma transformação de coordenadas, ou seja $dm(t, \mathbf{x}) = d\tilde{m}(\tau, \Xi)$. E também porque $d\tilde{m}$ não se altera a medida que o fluido se movimenta. A densidade de energia específica Π e a pressão do fluido p aparecem somente na ordem pós newtoniana, e se transformam como [56]

$$p(t, \mathbf{x}) = p(\tau, \Xi), \quad (2.91)$$

$$\Pi(t, \mathbf{x}) = \Pi(\tau, \Xi). \quad (2.92)$$

Utilizando a transformação de coordenadas dadas em (2.87) e (2.88) deve-se transformar também a quantidade $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ que aparece nos potenciais listados na seção 2.4. Partindo das Eqs. (2.87) e (2.88), tendo em vista que a velocidade da matéria no novo referencial é \mathbf{v} e

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{w} + O(3), \quad (2.93)$$

em que $O(3)$ representa os termos de produtos das velocidades mencionadas, chega-se em

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{|\Xi - \Xi'|} \left[1 + \frac{1}{2}(\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}')^2 + (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}')(\mathbf{v}' \cdot \hat{\mathbf{n}}') + O(4) \right], \quad (2.94)$$

em que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\Xi - \Xi'}{|\Xi - \Xi'|} \quad (2.95)$$

Utilizando (2.90)- (2.92) e (2.94) nos potenciais (2.52), (2.53) e (2.55)-(2.61) obtém-se,

⁶Nesta notação $\Xi^0 = \tau$ assim como $x^0 = t$.

para os potenciais nas novas coordenadas e até a ordem necessária

$$U(t, \mathbf{x}) = \left(1 - \frac{1}{2}w^2\right)U(\tau, \Xi) - w^j V_j(\tau, \Xi) + w^j W_j(\tau, \Xi) + \frac{1}{2}w^i w^j U_{ij}(\tau, \Xi), \quad (2.96)$$

$$\phi_w(t, \mathbf{x}) = \phi_w(\tau, \Xi), \quad (2.97)$$

$$\phi_1(t, \mathbf{x}) = \phi_1(\tau, \Xi) + 2w^j V_j(\tau, \Xi) + w^2 U(\tau, \Xi), \quad (2.98)$$

$$\phi_2(t, \mathbf{x}) = \phi_2(\tau, \Xi), \quad (2.99)$$

$$\phi_3(t, \mathbf{x}) = \phi_3(\tau, \Xi), \quad (2.100)$$

$$\phi_4(t, \mathbf{x}) = \phi_4(\tau, \Xi), \quad (2.101)$$

$$\mathcal{A}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\tau, \Xi) + 2w^j W_j(\tau, \Xi) + w^i w^j U_{ij}(\tau, \Xi), \quad (2.102)$$

$$V_j(t, \mathbf{x}) = V_j(\tau, \Xi) w_j U(\tau, \Xi), \quad (2.103)$$

$$W_j(t, \mathbf{x}) = W_j(\tau, \Xi) + w^k U_{jk}(\tau, \Xi). \quad (2.104)$$

Aplicando as transformações (2.87), (2.88) e (2.89) sobre a métrica pós-Newtoniana cujas componentes são (2.82)-(2.84) e utilizando os potenciais listados acima, obtém-se a métrica PPN para o sistema de coordenadas móvel, e suas com-

ponentes são

$$\begin{aligned}
g_{00}(\tau, \Xi) = & - 1 - 2U(\tau, \Xi) + 2\beta U(\tau, \Xi)^2 + 2\xi\phi_w(\tau, \Xi) + (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1(\tau, \Xi) \\
& + 2(3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2(\tau, \Xi) + 2(1 + \zeta_3)\phi_3(\tau, \Xi) \\
& + 2(3\gamma + 2\zeta_4 - 2\xi)\phi_4(\tau, \Xi) - (\zeta_1 - 2\xi)\mathcal{A}(\tau, \Xi) - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 w^2)U(\tau, \Xi) \\
& - \alpha_2 w^i w^k U_{jk}(\tau, \Xi) + (2\alpha_2 - \alpha_1)w^j V_j(\tau, \Xi) \\
& - (1 - \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)w^j \partial_j \partial_0 \chi,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
g_{0j}(\tau, \Xi) = & - \frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi)V_j(\tau, \Xi) - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)W_j(\tau, \Xi) \\
& - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^j U(\tau, \Xi) - \alpha_2 w^k U_{jk}(\tau, \Xi) \\
& - \frac{1}{2}(1 - \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)w^k \partial_k \partial_j \chi(\tau, \Xi),
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$g_{ij}(\tau, \Xi) = (1 + 2\gamma U(\tau, \Xi)) \delta_{ij}. \tag{2.107}$$

A velocidade do sistema de coordenadas w aparece na métrica como uma variável pós-Newtoniana adicional. Portanto, temos uma liberdade na escolha de um calibre que não altere aquele estabelecido anteriormente.⁷ Com a escolha

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{1}{2}(1 - \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)w^j \partial_j \chi, \tag{2.108}$$

$$\bar{\Xi}^j = \Xi^j \tag{2.109}$$

os termos

$$-(1 - \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)x^j \partial_0 \partial_j \chi, \tag{2.110}$$

$$-\frac{1}{2}(1 - \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi)x^i \partial_i \partial_j \chi, \tag{2.111}$$

são eliminados de g_{00} e g_{0j} respectivamente. Isto então, torna-se parte do calibre (em que g_{ij} é diagonal e isotrópica, e os termos \mathcal{B} e $w^j \partial_j \partial_0 \chi$ não aparecem em g_{00} .) em um sistema de coordenadas se movendo com velocidade w em relação à estrutura do restante do universo.

As componentes da métrica pós-Newtoniana descritas nas coordenadas em

⁷O calibre adotado ao final da seção 2.4 vale quando $w = 0$, já que neste caso as métricas são idênticas.

movimento possuem termos que dependem da velocidade do sistema de coordenadas, o que parece violar o princípio da Relatividade Restrita cuja hipótese é a necessidade de que as leis da física tenham a mesma forma (ou seja, invariantes) em diferentes sistemas inerciais para diferentes observadores. Contudo, a Relatividade Restrita é válida quando os efeitos da gravitação podem ser ignorados. Tais termos sugerem que a gravitação gerada pela matéria pode ser afetada pelo movimento do sistema local com relação ao referencial de repouso do universo, ou seja, sugerem a violação do princípio da equivalência forte que postula a equivalência entre a aceleração de um dado referencial inercial e aquela interpretada por um observador sujeito a um campo gravitacional uniforme de mesmo valor, e também entre as massas gravitacionais e inerciais. No entanto, os resultados das medições físicas não devem depender da velocidade w . Para um sistema como o sol e os planetas, as únicas velocidades que podem ser medidas fisicamente são as velocidades dos elementos de matéria relativas uns aos outros e ao centro de massa do sistema, e também a velocidade do centro de massa em relação ao referencial do universo em repouso w_0 [54]. Portanto, qualquer predição feita a partir do formalismo PPN sobre qualquer fenômeno deve depender somente destas velocidades, nunca de w . Portanto, os termos na métrica PPN que dependem de w devem sinalizar a presença de efeitos que dependem de w_0 , logo é conveniente adotar um sistema de coordenadas em que $w = w_0$.

Os termos adicionais que surgem nas componentes da métrica transformada (2.105)-(2.107), após a fixação do calibre são

$$- (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 w^2)U(\tau, \Xi) - \alpha_2 w^i w^k U_{jk}(\tau, \Xi) + (2\alpha_2 - \alpha_1)w^j V_j(\tau, \Xi), \quad (2.112)$$

$$- \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)w^j U(\tau, \Xi) - \alpha_2 w^k U_{jk}(\tau, \Xi), \quad (2.113)$$

de g_{00} e g_{0i} respectivamente. Estes termos dependem apenas de α_1 , α_2 e α_3 e com isso, conclui-se que estes medem o quanto e a maneira pela qual o movimento relativo ao referencial de repouso do universo afeta a métrica pós-newtoniana e produz efeitos observáveis. Se os três são zero, nenhum desses efeitos está presente, e não há referencial preferencial na teoria em questão (para a ordem pós-Newtoniana). Observe que, mesmo que se trabalhe no referencial de repouso do universo, onde $w = \mathbf{0}$, os efeitos físicos permanecerão inalterados, pois mesmo que α_1 , α_2 e α_3 sejam explicitamente nulos, as velocidades de elementos de matéria v^j que aparecem na

métrica PPN e nas equações de movimento devem ser decompostas de acordo com

$$v = \bar{v} + w_0, \quad (2.114)$$

em que \bar{v} é a velocidade de cada elemento do fluido com relação ao centro de massa do sistema isolado. Por isso, mesmo que se adote o referencial de repouso do universo ($w = 0$) ainda serão obtidos os mesmos resultados dependentes de w_0 se estes efeitos existirem, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0$ mesmo adotando o sistema de coordenadas em repouso.

2.5.2 Leis de Conservação

Algumas teorias métricas de gravitação violam algumas das leis de conservação em regime pós-Newtoniano, a conservação da massa energia e momento para sistemas isolados. O objetivo desta seção é explorar tais violações e determinar os parâmetros pós-Newtonianos relacionados de acordo com a referência [54].

Localmente, no sistema isolado, as leis de conservação são aquelas satisfeitas em qualquer referencial de Lorentz, ou seja, $\partial_\alpha(\rho u^\alpha) = 0$ em que u^α é a quadrivelocidade da matéria, representa a lei de conservação da massa de repouso, e pode ser generalizada para qualquer espaço tempo curvo

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}\rho u^\alpha) = 0. \quad (2.115)$$

Em um sistema de coordenadas (x, t) , a expressão acima é escrita na forma

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho^* v) = 0 \quad (2.116)$$

em que ρ^* é a "densidade conservada" definida por

$$\rho^* = \rho \sqrt{-g} u^0. \quad (2.117)$$

Combinando esta com a equação de movimento $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, e supondo que a matéria seja um fluido perfeito, obtém-se

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.118)$$

que é a lei da conservação da energia local. Em um referencial local de Lorentz,

momentaneamente comóvel com um elemento δV do fluido a equação acima, fica

$$u_0 \partial_0 T^{00} + u_0 \partial_i T^{0i} + u_i \partial_j T^{ij} = 0, \quad (2.119)$$

e com o uso de (2.11)

$$-\partial_0(\rho + \rho\Pi) - \partial_i[(\rho + \rho\Pi + p)v^i] + v^i \partial_i p = 0, \quad (2.120)$$

sabendo que $v^i \partial_i p = \partial_i(pv^i) - p\partial_i v^i$ e também $d/dt = \partial_0 + v^i \partial_i$ a relação acima se torna

$$\frac{d}{dt}(\rho + \rho\Pi) + (\rho + \rho\Pi)\partial_i v^i + p\partial_i v^i = 0, \quad (2.121)$$

Em um referencial comóvel a velocidade da matéria $v = \mathbf{0}$, entretanto $\nabla \cdot v = \delta V^{-1} d(\delta V)/dt \neq 0$ [54], logo

$$\frac{d}{dt}[(\rho + \rho\Pi)\delta V] + p \frac{d(\delta V)}{dt} = 0. \quad (2.122)$$

Isto significa que qualquer alteração na energia total do elemento de volume δV do fluido é compensado pela realização de trabalho $p d(\delta V)$.

As Leis de conservação discutidas acima não dependem da teoria, pois são válidas em um referencial comóvel no sistema isolado onde efeitos relativísticos e gravitacionais são negligenciáveis. Além disso, não é possível obter leis de conservação mais gerais na forma integral através de $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, pela existência de dos símbolos de Christoffel. Entretanto, como pode ser visto em [24], toda teoria métrica de gravitação covariante que seja baseada numa lagrangiana possui leis de conservação na forma

$$\partial_\beta \Theta^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.123)$$

em que $\Theta^{\mu\nu}$ pode ser deduzido a partir da lagrangiana de cada teoria. Com isso, deve-se obter $\Theta^{\mu\nu}$ que se reduza a $T^{\mu\nu}$ na ausência de gravidade. Desde que $\Theta^{\mu\nu}$ seja simétrico, pode-se definir as quantidades conservadas

$$P^\alpha = \int_\Sigma \Theta^{\alpha\beta} d^3 \Sigma_\beta, \quad (2.124)$$

e

$$J^{\alpha\beta} = 2 \int_\Sigma x^{[\alpha} \Theta^{\beta]\lambda} d^3 \Sigma_\lambda. \quad (2.125)$$

Escolhendo um sistema de coordenadas tal que Σ_α seja hipersuperfície constante no tempo que se estende até as regiões assintoticamente planas do espaço, as quantidades P^α e $J^{\alpha\beta}$ são independentes do tempo e são dadas por

$$P^\alpha = \int_{\Sigma} \Theta^{\alpha 0} d^3x, \quad (2.126)$$

$$J^{\alpha\beta} = 2 \int_{\Sigma} x^{[\alpha} \Theta^{\beta]0} d^3x. \quad (2.127)$$

De acordo com [24, 54], escrevendo $\Theta^{\alpha\beta}$ na forma

$$\Theta^{\alpha\beta} = (1 - aU)(T^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta}), \quad (2.128)$$

em que a é uma constante, deve-se encontrar $t^{\mu\nu}$ (função dos potenciais pós-Newtonianos e suas derivadas bem como w), tal que (2.123) seja possível. Utilizando (2.128), (2.123) e sabendo que $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -\Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta} - \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta T^{\alpha\lambda}$, se obtém para primeira ordem pós-Newtoniana a relação

$$\partial_\beta t^{\alpha\beta} - a\partial_\beta U t^{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\lambda}^\alpha T^{\beta\lambda} + \Gamma_{\beta\lambda}^\lambda T^{\alpha\beta} + a\partial_\beta U T^{\alpha\beta}. \quad (2.129)$$

Após o cálculo das relações acima, utilizando nas conexões as componentes da métrica (2.105)-(2.107), e do tensor energia momento (2.30)-(2.32), se obtém⁸

$$\begin{aligned} \partial_\alpha t^{0\alpha} &= \partial_0 t^{00} + \partial_i t^{0i} \\ &= \partial_0 \left[\frac{1}{2}(6\gamma + 2a - 5)|\nabla U|^2 \right] - \partial_i [2(3\gamma + a - 3)\partial_j U \partial_{[i} V_{j]}] \\ &\quad + (3\gamma + a - 2)\partial_i U \partial_0 U \end{aligned} \quad (2.130)$$

⁸Os cálculos são simples, porém longos e braçais, e fogem do objetivo deste capítulo, alguns detalhes podem ser vistos em [54] e [24].

e

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha t^{i\alpha} &= \partial_0 t^{i0} + \partial_j t^{ij} \\
&= \partial_0 [4\gamma + 4 + \alpha_1 \partial_j U \partial_{[i} V_{j]} + \frac{1}{2} (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\zeta_1) \partial_i U \partial_0 U \\
&\quad - (5\gamma + a - 1) U \nabla^2 V_i + \frac{1}{2} \alpha_1 w^i U \nabla^2 U + \alpha_2 \partial_i U (\mathbf{w} \cdot \nabla U)] \\
&\quad + \partial_j \{ [1 - (\zeta_2 + 4\xi - a) U + \frac{1}{2} (\alpha_3 - \alpha_1) w^2] \Gamma_{ij}(U) - 2\xi \Gamma_{ij}(\phi_w) \\
&\quad + 2\xi \Gamma_{ij}(\nabla \chi \cdot \nabla U) - (\zeta_1 - 2\xi) \Gamma_{ij}(\mathcal{A}) + 2\Gamma_{ij}(\Phi) + (2\alpha_3 - \alpha_1) \Gamma_{ij}(w^k V_k) \\
&\quad - \alpha_2 \Gamma_{ij}(w^k w^l \partial_k \partial_l \chi) - (1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi) \Gamma_{ij}(\partial_0 \partial_0 \chi) \\
&\quad + 2\alpha_2 \Gamma_{ij}(w^k \partial_k \partial_0 \chi) - 2(4\gamma + 4 + \alpha_1) (\partial_{[l} V_{i]} \partial_{[l} V_{j]} - \frac{1}{4} \delta_{ij} \partial_{[l} V_{k]} \partial_{[l} V_{k]}) \\
&\quad + (4\gamma + 4 + \alpha_1) (\partial_{(i} U \partial_0 V_{j)}) - \frac{1}{2} \delta_{ij} \partial_k U \partial_0 V_k \\
&\quad + \xi (8\pi \rho \partial_{(i} \chi \partial_{j)}) U + \delta_{ij} \partial_l (\chi \partial_k \partial_l \psi_k) - \partial_k \psi_k \partial_i \partial_j \chi - \chi \partial_k \partial_i \partial_j \psi_k \\
&\quad - \frac{1}{4} (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\zeta_1) \delta_{ij} (\partial_0 U)^2 + \alpha_2 \delta_{ij} [\frac{1}{2} (\mathbf{w} \cdot \nabla U)^2 \\
&\quad - \partial_0 U (\mathbf{w} \cdot \nabla U)] + (5\gamma + a - 1) U (\rho v^i v^j + p \delta^{ij}) + \tau^{ij} \} + Q^i \tag{2.131}
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2} (2\gamma + 2 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi) \phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi) \phi_2 + (1 + \zeta_3) \phi_3 \\
&\quad + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \phi_4, \tag{2.132}
\end{aligned}$$

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} \alpha_1 w_i U \nabla^2 V_j + \alpha_2 w_j \partial_i U \partial_0 U - \alpha_2 w_j \partial_i U (\mathbf{w} \cdot \nabla U) \tag{2.133}$$

$$\begin{aligned}
Q^i &= \partial_i U [\frac{1}{2} (\alpha_3 + \zeta_1) \rho v^2 + (8\pi)^{-1} \zeta_2 |\nabla U|^2 + \zeta_3 \rho \Pi + 3\zeta_4 p + (8\pi)^{-1} \nabla^2 \mathcal{A} \\
&\quad + \alpha_3 \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}] \tag{2.134}
\end{aligned}$$

e ψ_k é solução da equação $\nabla^2 \psi_j = -4\pi \rho \partial_j U$, além disso $\Gamma_{ij}(f)$ é dado por

$$\Gamma_{ij}(f) = \partial_{(i} U \partial_{j)} f - \frac{1}{2} \delta_{ij} \nabla U \cdot \nabla f. \tag{2.135}$$

Os termos que estão incluídos em Q^j não podem ser escritos como uma combinação de gradientes e derivadas temporais dos campos e variáveis da matéria. Assim, para que seja válido $\partial_\beta \Theta^{\alpha\beta} = 0$, deve-se garantir que seja possível integrar as equações (2.130) e (2.131) (levando a integrais de superfície que desaparecem no

infinito), e isto requer que cada um dos termos em Q^j sejam nulos, ou seja

$$\alpha_3 \equiv \zeta_1 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \equiv \zeta_4 \equiv 0. \quad (2.136)$$

Os parâmetros acima medem a amplitude e a maneira pela qual uma teoria métrica prevê violações na conservação da energia total e do momento, ou seja, se em uma determinada teoria todos os cinco parâmetros são zero, então a energia e momento são conservados. O parâmetro α_3 tem um papel duplo, pode indicar a existência de um sistema de coordenadas preferencial na teoria e também que esta não seja conservativa.

Para garantir a conservação do tensor de momento angular $J^{\alpha\beta}$, definido em (2.127), é necessário que $t^{\alpha\beta}$ seja simétrico. Porém, existem termos não simétricos em τ^{ij} e ainda $t^{0i} \neq t^{i0}$. Os termos que impedem a simetria são [54]

$$2t^{[0i]} = -\frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2)\partial_0 U \partial_i U - \alpha_1 \partial_j U \partial_{[i} V_{j]} - \frac{1}{2}\alpha_1 w^i U \nabla^2 U - \alpha_2 \partial_i U (w \cdot \nabla U), \quad (2.137)$$

e

$$2t^{[ij]} = 2\tau^{[ij]} = \alpha_1 U w_{[i} \nabla^2 V_{j]} - 2\alpha_2 \partial_0 U w_{[i} \partial_{j]} U + 2\alpha_2 w_{[i} \partial_{j]} U (w \cdot \nabla U), \quad (2.138)$$

e para que $t^{\alpha\beta}$ seja simétrico cada termo nas relações acima devem ser nulos, de modo que $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 0$. Ou seja, para uma teoria completamente conservativa, em que haja conservação da energia, do momento angular, movimento uniforme do centro de massa e conservação do momento, os parâmetros PPN devem satisfazer

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \zeta_1 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \equiv \zeta_4 \equiv 0. \quad (2.139)$$

A Tabela 2.1 traz um resumo dos significados dos parâmetros PPN e valores gerais para teorias conservativas (todas as leis de conservação são satisfeitas) e semi-conservativas (não conservação do momento angular). O potencial Φ_w em (2.105) está relacionado a anisotropias na constante gravitacional devido à influência de uma massa externa que, de acordo com a Ref. [57], permite relacionar ξ a um indicador de efeitos de localização preferencial.

PARÂMETRO	INTERPRETAÇÃO	Teorias semi-conservativas	Teorias conservativas
γ	Quanta curvatura espacial é produzida por unidade de massa em repouso.	γ	γ
β	Quanta não-linearidade há no princípio de superposição da gravidade na teoria	β	β
ξ	Efeitos de localização preferencial	ξ	ξ
α_1, α_2	Efeitos de sistemas de coordenadas preferenciais	$\alpha_1 \alpha_2$	0
α_3	Conservação de momento e energia e efeitos de sistema de coordenadas preferenciais	0	0
$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$	Conservação de momento e de energia	0	0

Tabela 2.1. Interpretação dos parâmetros PPN (adaptado de [54])

2.6 Testes para os parâmetros γ e β

Com o formalismo PPN em mãos, precisamos de um mecanismo que auxilie na obtenção dos valores experimentais para os parâmetros PPN para, então, podermos confrontá-los com os valores obtidos por cada teoria. Esta seção é dedicada a testes dos parâmetros γ e β , consistindo na deflexão da luz e no desvio do periélio de corpos que se movem sob a ação de um campo gravitacional. Como o Sistema Solar é amplamente estudado neste âmbito serão feitas considerações a respeito deste na condução dos cálculos básicos para o desenvolvimento dos mecanismos citados.

2.6.1 Deflexão da Luz

A expressão que indica o quanto a luz é desviada pela presença de gravidade é obtida através da equação de movimento para fótons expandida até a primeira ordem pós-Newtoniana. Descrevendo a trajetória do fóton com o parâmetro afim σ ,

a equação da geodésica é

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0, \quad (2.140)$$

que pode ser escrita utilizando a coordenada de tempo $x^0 = t$, ou seja

$$\left(\frac{dt}{d\sigma}\right)^2 \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \frac{d^2 t}{d\sigma^2} \frac{dx^\alpha}{dt} + \Gamma_{\lambda\gamma}^\alpha \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0, \quad (2.141)$$

a partir de equação (2.140), obtém-se

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2} + \Gamma_{\lambda\gamma}^0 \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\gamma}{d\sigma} = 0, \quad (2.142)$$

e como o termo em que o índice $\alpha = 0$ é nulo, a expressão (2.141) assume a forma

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \left(\Gamma_{\alpha\beta}^j - \Gamma_{\alpha\beta}^0 \frac{dx^j}{dt}\right) \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (2.143)$$

Utilizando o fato de que, para a luz $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$, pode-se escrever

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = 0. \quad (2.144)$$

Vamos utilizar a métrica pós-Newtoniana para calcular as componentes das conexões métricas que aparecem em (2.143) e também expandir (2.144).

Na Física Newtoniana, entende-se que a luz se propaga em linha reta e com velocidade constante. Ou seja, sendo $x_N = \hat{n}(t - t_0)$, a coordenada newtoniana para a trajetória da luz, então $|dx_N/dt| = 1$. Descrevendo a posição do fóton por

$$x^j = x_N^j + x_p^j, \quad (2.145)$$

em que x_p representa o desvio do caminho retilíneo feito pela luz, a equação (2.144) fica, para ordem Newtoniana,

$$0 = -1 + 2U + (1 + 2\gamma U)\delta_{ij} \left(\hat{n}^i + \frac{dx_p^i}{dt}\right) \left(\hat{n}^j + \frac{dx_p^j}{dt}\right) + O(4) \quad (2.146)$$

em que foram utilizadas as componentes (2.105)-(2.107). É importante notar que na

expressão acima não existem termos de ordem pós-Newtoniana, pois as coordenadas x_p^j representam coordenadas da trajetória do fóton, logo as derivadas dx_p^j/dt não são pequenas se comparadas com a velocidade de corpos de teste sujeitos ao potencial U . Desprezando correções quadráticas para o desvio do fóton obtém-se

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{dx_p}{dt} = -(1 + \gamma)U. \quad (2.147)$$

Expandindo o segundo termo da expressão (2.143) obtém-se

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma_{00}^j + \Gamma_{kl}^j v^k v^l + 2\Gamma_{0i}^j v^i - \Gamma_{00}^0 v^j - \Gamma_{kl}^0 v^j v^k v^l - 2\Gamma_{0i}^0 v^i v^j = 0, \quad (2.148)$$

com isso podemos calcular as componentes das conexões métricas como é feito abaixo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^j &= -\delta^{ij} \partial_i U + \frac{1}{2} \eta^{jk} (2\partial_0 g_{k0} - \partial_k g_{00}) - \frac{1}{2} h^{jk} \partial_k g_{00} \\ &= \delta^{ij} \partial_i \left[(\beta + \gamma) U^2 + \xi \phi_w - \Phi + \frac{1}{2} (\zeta_1 - 2\xi) \mathcal{A} + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 U \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \alpha_2 w^k w^l U_{kl} - \frac{1}{2} (2\alpha_3 - \alpha_1) w^k V_k \right] - \partial_0 \left[\frac{1}{2} (4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 \zeta_1 - 2\xi) V_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi) W_j + \frac{1}{2} (\alpha_1 - 2\alpha_2) w^j U + \alpha_2 w^k U_{jk} \right], \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$\Gamma_{00}^0 = -\partial_0 U, \quad (2.150)$$

$$\Gamma_{kl}^j = \gamma (\delta_l^j \partial_k U + \delta_k^j \partial_l U - \delta_{kl} \partial^j U), \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^j &= \frac{1}{2} \eta^{jk} (\partial_0 g_{ik} + \partial_i g_{0k} - \partial_k g_{0i}) \\ &= \gamma \delta_i^j \partial_0 U - \frac{1}{2} (4\gamma + 4 + \alpha_1) \partial_{[j} V_{i]} - \frac{1}{2} \alpha_1 w_{[j} \partial_{i]} U, \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = -\partial_i U, \quad (2.153)$$

que foram calculadas utilizando as componentes da métrica (2.105)-(2.107), em que

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2}(2\gamma + \alpha_2\alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi)\phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1 + \zeta_2 + \xi)\phi_2 \\ + (1 + \zeta_3)\phi_3 + (3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi)\phi_4. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Para escrever a equação (2.148) até ordem Newtoniana nos potenciais precisamos de $\Gamma_{kl'}^{(2)} \Gamma_{00}^{(2)}$ e $\Gamma_{0i'}^{(2)}$, pois as demais componentes não possuem termos de ordem Newtoniana. Logo, a expressão (2.148) fica

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = \partial^j U \left(1 + \gamma \left| \frac{dx}{dt} \right| \right) - 2(1 + \gamma) \frac{dx^j}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \nabla U \right), \quad (2.155)$$

utilizando expressão (2.145) equação acima pode se escrita, em forma vetorial, como

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_p}{dt^2} = (1 + \gamma) [\nabla U - 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla U)]. \quad (2.156)$$

Esta, juntamente com a eq. (2.147), são as equações pós Newtonianas para o desvio \mathbf{x}_p dos fótons do movimento retilíneo uniforme.

Considere um sinal de luz emitido de um ponto \mathbf{x}_e no instante t_e na direção definida pelo versor \hat{n} . Incluindo correções pós-Newtonianas \mathbf{x}_p , a trajetória do fóton assume a forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e + \hat{n}(t - t_e) + \mathbf{x}_p(t), \quad (2.157)$$

e por motivos que ficarão claros a seguir é conveniente decompor \mathbf{x}_p nas partes ortogonal, $\mathbf{x}_{p\perp}$, e paralela, $\mathbf{x}_{p\parallel}$, à trajetória da luz da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{p\parallel} &= \hat{n} \cdot \mathbf{x}_p(t), \\ \mathbf{x}_{p\perp}(t) &= \mathbf{x}_p(t) - \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{x}_p(t)) \end{aligned} \quad (2.158)$$

pois com isso, as equações (2.156) e (2.147) ficam

$$\frac{d\mathbf{x}_{p\parallel}}{dt} = -(1 + \gamma)U, \quad (2.159)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_{p\perp}^j}{dt^2} = (1 + \gamma) [\partial_j U - \hat{n}^j(\hat{n} \cdot \nabla U)]. \quad (2.160)$$

Portanto, deve-se integrar (2.160), para se obter a equação de movimento para \mathbf{x}_p

sabendo que

$$\mathbf{x}_p = x_{p\parallel}\hat{n} + \mathbf{x}_{p\perp}, \quad (2.161)$$

e para isto será assumido, por simplicidade, que o potencial Newtoniano é produzido por um corpo esférico e estático de massa m (como são simplificadas as considerações em relação ao sol para osistema solar). Ao longo do caminho do fóton não desviado, U tem a forma

$$U = \frac{m}{r(t)} = \frac{m}{|\mathbf{x}_e + \hat{n}(t - t_e)|}, \quad (2.162)$$

levando na equação (2.160) podemos escrever, em notação vetorial,

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{p\perp}}{dt^2} = (1 + \gamma)m \left[\nabla r(t)^{-1} - \hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla r(t)^{-1}) \right], \quad (2.163)$$

e como $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{d^2\mathbf{x}_{p\perp}}{dt^2} = (1 + \gamma)m \left[\hat{n} \times (\nabla r(t)^{-1} \times \hat{n}) \right]. \quad (2.164)$$

Sabendo que $\nabla r(t)^{-1} = -\mathbf{x}(t)/r(t)^3$ e ainda $\hat{n} \times (\mathbf{x}(t) \times \hat{n}) = \hat{n} \times (\mathbf{x}_e \times \hat{n}) = \mathbf{d}$ a equação acima pode ser integrada ao longo da trajetória do fóton não desviado, o que resulta em

$$\frac{d\mathbf{x}_{p\perp}}{dt} = -(1 + \gamma)\frac{m\mathbf{d}}{d^2} \left(\frac{\mathbf{x}(t) \cdot \hat{n}}{r(t)} - \frac{\mathbf{x}_e \cdot \hat{n}}{r_e} \right), \quad (2.165)$$

que representa uma mudança na direção da trajetória do fóton. Com isso

$$\frac{d\mathbf{x}_p(t)}{dt} = (1 + \gamma)U\hat{n} - (1 + \gamma)\frac{m\mathbf{d}}{d^2} \left(\frac{\mathbf{x}(t) \cdot \hat{n}}{r(t)} - \frac{\mathbf{x}_e \cdot \hat{n}}{r_e} \right). \quad (2.166)$$

Vamos agora a deflexão da trajetória da luz provocada por um potencial U e como este mecanismo pode auxiliar na obtenção de valores experimentais para γ .

Considere um observador em repouso na terra, indicado pelo símbolo \oplus , que recebe um fóton da fonte cuja trajetória pode ser desviada pela presença de um corpo que produza o potencial U (neste caso o sol) e um fóton de uma fonte de referência localizada em x_r , como na fig Fig.2.1).

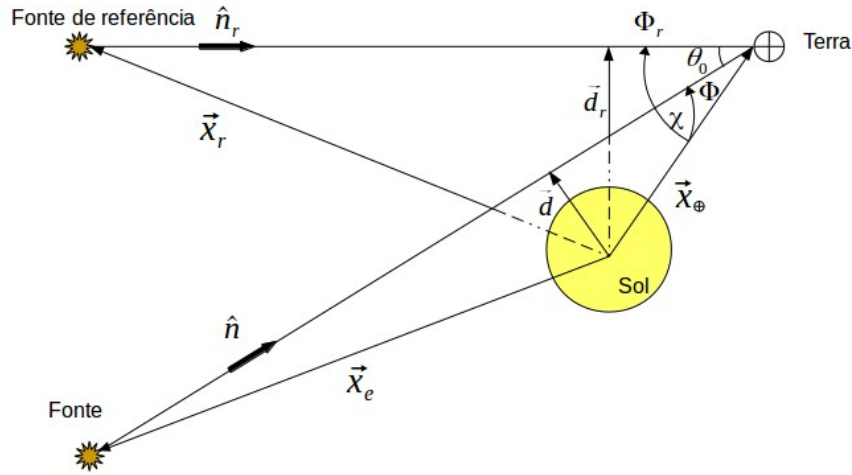


Figura 2.1. Quantidades geométricas relacionadas à deflexão da luz.

O ângulo θ entre as direções dos dois fótons recebidos podem ser relacionados com os quadrivetores tangentes às trajetórias dos dois fótons recebidos $K^\mu = dx^\mu/dt$ e $K_{(r)}^\mu = dx_{(r)}^\mu/dt$ da seguinte forma [54]

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{g_{00}} g_{\alpha\beta} K^\alpha K_{(r)}^\beta, \quad (2.167)$$

que, utilizando (2.166) juntamente com (2.158) fica, para ordem pós-Newtoniana,

$$\cos \theta = \hat{n} \cdot \hat{n}_r - (1 + \gamma) \left[\frac{m}{\bar{d}} \left(\frac{\mathbf{d} \cdot \hat{n}_r}{d} \right) \left(\frac{\mathbf{x}_\oplus \cdot \hat{n}}{r_\oplus} - \frac{\mathbf{x}_e \cdot \hat{n}}{r_e} \right) - \frac{m}{\bar{d}_r} \left(\frac{\mathbf{d}_r \cdot \hat{n}}{d_r} \right) \left(\frac{\mathbf{x}_\oplus \cdot \hat{n}_r}{r_\oplus} - \frac{\mathbf{x}_r \cdot \hat{n}_r}{r_r} \right) \right]. \quad (2.168)$$

em que

$$\mathbf{d}_r = \hat{n}_r \times (\mathbf{x}_r \times \hat{n}_r), \quad (2.169)$$

e além disso, para precisão pós-Newtoniana pode-se verificar que

$$\mathbf{d} = \hat{n}_r \times (\mathbf{x}_\oplus \times \hat{n}_r), \quad \mathbf{d}_r = \hat{n}_r \times (\mathbf{x}_\oplus \times \hat{n}_r). \quad (2.170)$$

Definindo θ_0 como sendo o ângulo entre a direção dos fótons que saem da fonte e não sofrem desvio e a direção dos fótons que saem da fonte de referência (ver Fig. 2.2), fica claro que

$$\cos \theta_0 = \hat{n} \cdot \hat{n}_r, \quad (2.171)$$

logo, a deflexão do ângulo medido em relação ao não perturbado é

$$\delta\theta \equiv \theta - \theta_0. \quad (2.172)$$

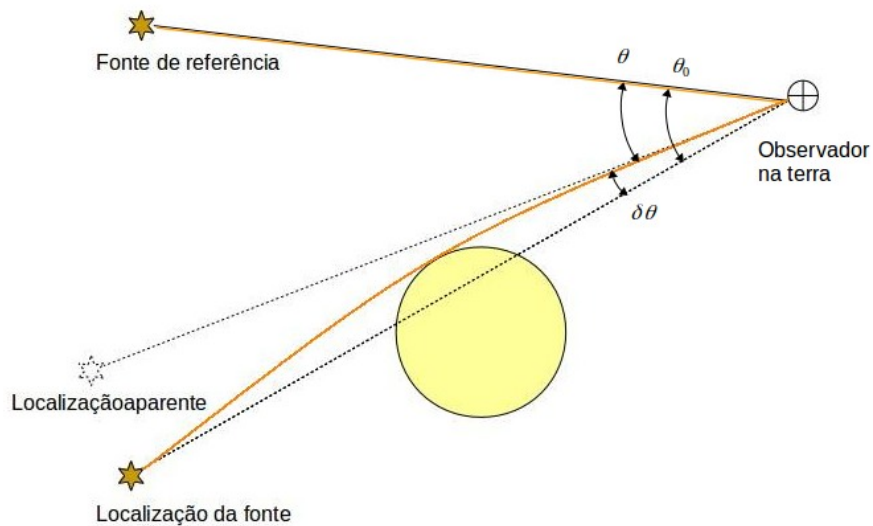


Figura 2.2. Diagrama sobre a deflexão $\delta\theta$ da luz.

Vamos a um caso simples. Tomando o próprio sol como fonte de referência, ou seja $\mathbf{d}_r \equiv 0$, pode-se fazer algumas aproximações que modificam a equação (2.168) tornando-a mais simples. O segundo termo entre colchetes não aparece e ainda

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}||\hat{n}|} \Rightarrow \sin \theta_0 = \frac{\hat{n} \cdot \mathbf{d}}{d}. \quad (2.173)$$

Além disso, para um fóton recebido de qualquer galáxia ou estrela distante $r_e \gg r_\oplus$ e pode-se aproximar $(\mathbf{x}_e \cdot \hat{n})/r_e \simeq -1$ e também $(\mathbf{x}_\oplus \cdot \hat{n})/r_\oplus \simeq \hat{n}_r \cdot \hat{n} = \cos \theta_0$. Logo, a

equação (2.168) fica

$$\delta\theta = \frac{1}{2}(1 + \gamma)\frac{2m}{d}(1 + \cos\theta_0). \quad (2.174)$$

A deflexão é máxima quando a fonte está exatamente atrás do sol, ou seja $d \simeq R_\odot \simeq 6,96 \times 10^5 km$, $m = m_\odot = 1476 km$, e neste caso

$$\delta\theta_{max} = \frac{1}{2}(1 + \gamma)1,75 \text{ arcseg}. \quad (2.175)$$

A confirmação de Eddington da curvatura da luz óptica observada durante um eclipse solar total em 1919, foi um dos grandes sucessos da Relatividade Geral. No entanto, os experimentos tinham pouca precisão, e as experiências posteriores exibiam resultados dispersos entre metade e duas vezes o valor previsto pela Relatividade Geral, e além disso, as precisões eram baixas (ver por exemplo [59] [25]). Como está desenvolvido na referência [49] os dados coletados durante o eclipse de junho de 1973, produziu o valor $\frac{1}{2}(1 + \gamma) = 0,95 \pm 0,11$. Uma medição óptica utilizando dados catalogados que foram coletados pelo telescópio Hipparcos, das localizações de várias estrelas, produziu o valor

$$\gamma = 0,997 \pm 0,003, \quad (2.176)$$

como pode ser visto em detalhes em na referência [17].

O caso que mais se relaciona com o método atual e mais utilizado para medir a deflexão da luz deriva-se escolhendo uma fonte de referência próxima à fonte observada, e utiliza-se as técnicas de radio interferometria, que utiliza a sobreposição de duas ou mais ondas (de entrada, no caso a luz da fonte e da fonte de referência), gerando uma nova onda (diferente das anteriores) que pode ser usada para explorar as diferenças entre as ondas de entrada.

Definindo os ângulos Φ e Φ_r , como indicados na Fig. 2.1, tais que

$$\cos\Phi = \frac{\mathbf{x}_\oplus \cdot \hat{\mathbf{n}}}{r_\oplus}, \quad \cos\Phi_r = \frac{\mathbf{x}_\oplus \cdot \hat{\mathbf{n}}_r}{r_\oplus} \quad (2.177)$$

e assumindo que as duas fontes estão muito distantes a equação (2.168) fica

$$\delta\theta = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \left[\frac{2m}{d} \left(\frac{\cos \Phi_r - \cos \Phi \cos \theta_0}{\sin \Phi \sin \theta_0} \right) (1 + \cos \Phi) - \frac{2m}{d_r} \left(\frac{\cos \Phi_r \cos \theta_0 - \cos \Phi}{\sin \Phi_r \sin \theta_0} \right) (1 + \cos \Phi_r) \right]. \quad (2.178)$$

Considerando que direção da fonte a partir da qual se observa o desvio na trajetória da luz passa muito perto do corpo que produz o potencial, vale a aproximação $\Phi \ll \Phi_r$. E definindo χ como sendo o ângulo entre as direções fonte-sol e sol-referência projetadas no plano do céu como pode ser visto na Figura 2.1, a aproximação acima permite escrever

$$\theta_0 \simeq \Phi_r - \Phi \cos \chi + O(\Phi^2/\Phi_r), \quad (2.179)$$

e a expressão (2.178) se torna

$$\delta\theta = \frac{1}{2}(1 + \gamma) \left[-\frac{4m}{d} \cos \chi + \frac{4m}{d_r} \left(\frac{1 + \cos \Phi_r}{2} \right) \right] \quad (2.180)$$

O desenvolvimento de interferometria de rádio aumentou significativamente a precisão na medição da deflexão da luz, pois as técnicas very-long-baseline interferometric (VLBI) têm a capacidade, em princípio, de medir separações angulares e mudanças de ângulos de até 3×10^{-4} segundos de arco, alguns detalhes a respeito deste método podem ser vistos em [54]. Uma análise de 2004 de quase 2 milhões de observações VLBI de 541 fontes de rádio, feitas por 87 sítios de VLBI chegou a [46]

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma) = 0,99992 \pm 0,00023. \quad (2.181)$$

Até agora, vários grupos determinaram o parâmetro γ usando as observações do VLBI. A Tabela 2.2 expõe mais alguns resultados importantes desde 1974 em que Todos esses testes se concentram nos efeitos impostos pelo Sol.

2.6.2 Desvio do Periélio

A equação para o desvio do periélio de corpos sujeitos a um potencial são obtidas através das equações de movimento para corpos massivos. Tais equações de movimento podem ser formuladas considerando geodésicas em um espaço-tempo

γ	ANO	FONTE
$0.98 \pm 0,06$	1974	[10]
1.0075 ± 0.022	1875	[16]
1.000 ± 0.003	1985	[8]
1.000 ± 0.002	1991	[34]
0.9996 ± 0.0017	1995	[23]
0.99994 ± 0.00031	1997	[14]

Tabela 2.2. Valores obtidos para γ utilizando dados VLBI [19].

cuja métrica PPN é produzida por outros corpos do sistema e também pelo próprio corpo. No entanto, as equações resultantes deste processo dizem respeito ao movimento de partículas, e não de corpos extensos. Estes últimos estão sujeitos a efeitos de maré, e por isso não seguem geodésicas no espaço-tempo. Além disso, sua estrutura interna e composição podem gerar alterações no movimento do centro de massa do corpo.

Portanto, como está feito na referência [54], as equações de movimento são obtidas considerando cada corpo como uma porção auto-gravitante de matéria (sendo suficiente considerá-los compostos por fluido perfeito), e generalizando as definições

$$(m_a)_N \equiv \int_a \rho d^3x, \quad (2.182)$$

da massa inercial em que ρ é a densidade de massa do corpo, e

$$(x_a)_N = m_a^{-1} \int_a \rho x d^3x \quad (2.183)$$

de centro de massa do a -ésimo corpo do sistema ⁹, válidos na teoria Newtoniana, definindo

⁹Na integral o índice indica que os limites de integração devem ser tomados de acordo com cada corpo

$$m_a \equiv \int_a \rho^* \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \bar{U} + \Pi \right) d^3x \quad (2.184)$$

e

$$\mathbf{x}_a \equiv m_a^{-1} \int_a \rho^* \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \bar{U} + \Pi \right) \mathbf{x} d^3x \quad (2.185)$$

sendo m_a a massa-energia total do corpo — massa de repouso das partículas, energias cinética, gravitacional e interna — e \mathbf{x}_a o centro de massa, em que $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{a(0)}$ sendo $\mathbf{v}_{a(0)} = \int_a \rho^* \mathbf{v} d^3x$,

$$\bar{U} = \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (2.186)$$

e ρ^* é dada pela relação (2.117).

Com isso, utilizando as equações Newtonianas para simplificar e rearranjar os termos pós-Newtonianos de acordo com a seção 2.5.2, a velocidade do centro de massa do a -ésimo corpo é

$$\mathbf{v}_a \equiv \frac{d\mathbf{x}_a}{dt} = m_a^{-1} \int_a \left[\rho^* \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \bar{U} + \Pi \right) \mathbf{v} + p \bar{\mathbf{v}} - \frac{1}{2} \rho^* \bar{\mathbf{W}} \right] d^3x \quad (2.187)$$

sendo

$$\bar{W}_j \equiv \int \frac{\rho(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') (x - x')_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x'. \quad (2.188)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a \equiv \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = m_a^{-1} \left\{ \int_a \rho^* \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 - \frac{1}{2} \bar{U} + \Pi \right) \frac{d\mathbf{v}}{dt} d^3x + v_a^j \int_a \partial_j p \bar{\mathbf{v}} d^3x \right. \\ \left. + \int_a [\partial_0 p \bar{\mathbf{v}} - (p/\rho^*) \nabla p] d^3x - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_a \rho^* \bar{\mathbf{W}} d^3x + \frac{1}{2} \mathcal{T}_a - \frac{1}{2} \mathcal{T}_a^* + \mathcal{P}_a \right\}, \quad (2.189) \end{aligned}$$

em que os termos \mathcal{T}_a , \mathcal{T}_a^* e \mathcal{P}_a dependem apenas da estrutura interna do corpo, e são dados por

$$\mathcal{T}_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \bar{v}^j \bar{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x', \quad (2.190)$$

$$\mathcal{T}_a^{*j} = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \bar{v}^j \bar{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x', \quad (2.191)$$

e

$$\mathcal{P}_a^j = \int_a \frac{\rho^* p (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' \quad (2.192)$$

Utilizando, na equação de movimento $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$, as componentes de $T^{\alpha\beta}$ que já foram calculadas ¹⁰

$$T^{00} = \rho(1 + \Pi + v^2 + 2U), \quad (2.193)$$

$$T^{0i} = \rho v^i (1 + \Pi + v^2 + 2U + p/\rho), \quad (2.194)$$

$$T^{ij} = \rho v^i v^j (1 + \Pi + v^2 + 2U + p/\rho) + p \delta^{ij} (1 - 2\gamma U), \quad (2.195)$$

as expressões para as conexões métricas (2.149)-(2.153), e reescrevendo em termos de ρ^* , pode-se isolar

¹⁰É utilizado aqui $\overset{(2)}{g}_{00} = 2U$, que corresponde à componente obtida para Relatividade Geral. Porém, como será visto mais adiante, sempre se pode fazer uma transformação de modo que limite Newtoniano seja satisfeito para qualquer teoria.

$$\begin{aligned}
\rho^* \frac{dv^j}{dt} = & \rho^* \partial^j U - \partial^j [p(1 + 3\gamma U)] + \partial^j p \left(\frac{1}{2} v^2 + \Pi + \frac{p}{\rho^*} \right) \\
& - \rho^* \frac{d}{dt} \left[(2\gamma + 2) U v^j - \frac{1}{2} (4\gamma + 4 + \alpha_1) V^j - \frac{1}{2} \alpha_1 U w^j \right] \\
& + v^j (\rho^* \partial_0 U - \partial_0 p) - \frac{1}{2} (1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi) \rho^* \partial_0 (V^j - W^j) \\
& - \frac{1}{2} \rho^* [(4\gamma + 4 + \alpha_1) v^k + (\alpha_1 - 2\alpha_3) w^k] \partial^j V_k \\
& + \rho^* \partial^j \left[\Phi - \xi \phi_w - \frac{1}{2} (\zeta_1 - 2\xi) \mathcal{A} - \frac{1}{2} \alpha_2 w^i w^k U_{ik} + \alpha_2 w^k (V_k - W_k) \right] \\
& + \rho^* \partial^j U \left[\gamma v^2 - \frac{1}{2} \alpha_1 v^k w_k + \frac{1}{2} (\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_1 w^2 - (2\beta - 2) U + 3\gamma \frac{p}{\rho^*} \right]. \quad (2.196)
\end{aligned}$$

Substituindo este termo na primeira integral da equação (2.189), e utilizando as equações newtonianas discutidas na seção 2.5.2 para simplificar as integrais quando possível, a aceleração do a -ésimo corpo é dada por [54]

$$\mathbf{a}_a = (\mathbf{a}_a)_{self} + (\mathbf{a}_a)_N + (\mathbf{a}_a)_{ncorpos}. \quad (2.197)$$

O termo $(\mathbf{a}_a)_{self}$ depende apenas da estrutura interna do corpo e, portanto, representa auto-acelerações do centro de massa, e é dada por

$$\begin{aligned}
(a_{self}^j) = & - m_a^{-1} \left[\frac{1}{2} (\alpha_3 - \zeta_1) t_a^j + \zeta_1 (\mathcal{T}_a^j - \frac{3}{2} \mathcal{T}_a^{**j}) + \zeta_2 \Omega_a^j + \zeta_3 \mathcal{E}_a^j + 3\zeta_4 \mathcal{P}_a^j \right] \\
& - m_a^{-1} \alpha_3 (w + v_a)^k H_a^{kj}, \quad (2.198)
\end{aligned}$$

em que

$$t_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \bar{v}'^2 (x - x')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x d^3 x', \quad (2.199)$$

$$\mathcal{T}_a^{**j} = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \bar{v}' [\bar{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')]^2 (x - x')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^5} d^3 x d^3 x', \quad (2.200)$$

$$\Omega_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \rho''^* (x - x')^j}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''| |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' d^3x'', \quad (2.201)$$

$$\mathcal{E}_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \Pi' (x - x')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x', \quad (2.202)$$

e

$$H_a^{kj} = \int_a \frac{\rho^* \rho'^* \bar{\nu}^k (x - x')^j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x'. \quad (2.203)$$

É importante notar que para qualquer teoria semi-conservativa, aquelas em que os parâmetros $\alpha_3 \equiv \zeta_1 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \equiv \zeta_4 \equiv 0$, as auto-acelerações não existem.

O termo $(a_a)_N$ é dado por

$$(a_a^j)_N = m_a^{-1} (m_p)_a^{jk} \partial_k \mathfrak{U} \quad (2.204)$$

sendo

$$\mathfrak{U} = \sum_{b \neq a} \frac{[m_A(\hat{\mathbf{n}}_{ab})]_b}{r_{ab}} \quad (2.205)$$

chamado de potencial quase-Newtoniano, em que $r_{ab} = |\mathbf{x}_{ab}|$, $\mathbf{x}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ e também $\hat{\mathbf{n}}_{ab} = \mathbf{x}_{ab}/r_{ab}$. O termo $(m_p)_a^{jk}$ é chamado tensor de massa gravitacional passiva e $[m_A(\hat{\mathbf{n}}_{ab})]_b$ massa gravitacional ativa, e são dados por [54]

$$(m_p)_a^{jk} = m_a \left\{ \delta^{jk} \left[1 + (4\beta - \gamma - 3 - 3\xi - \alpha_1 + \alpha_2 - \zeta_1) \frac{\Omega_a}{m_a} - 3\xi \hat{n}_{ab}^l \hat{n}_{ab}^m \frac{\Omega_a^{lm}}{m_a} \right] + (2\xi - \alpha_2 + \zeta_1 - \zeta_2) \frac{\Omega_a^{jk}}{m_a} \right\}, \quad (2.206)$$

$$[m_A(\hat{\mathbf{n}})_{ab}]_b = m_b \left\{ 1 + \left(4\beta - \gamma - 3 - 3\xi - \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{2}\zeta_1 - 2\zeta_2 \right) \frac{\Omega_b}{m_b} + \zeta_3 \frac{E_b}{m_b} - \left(\frac{3}{2}\alpha_3 + \zeta_1 - 3\zeta_4 \right) \frac{P_b}{m_b} + \frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\xi) \hat{n}_{ab}^j \hat{n}_{ab}^k \frac{\Omega_{ab}^{jk}}{m_b} \right\}, \quad (2.207)$$

sendo

$$\Omega_a^{jk} = -\frac{1}{2} \int_a \frac{\rho^* \rho'^* (x-x')^i (x-x')^j}{|x-x'|^3} d^3x d^3x', \quad (2.208)$$

$$\Omega_a = -\frac{1}{2} \int_a \frac{\rho^* \rho'^*}{|x-x'|} d^3x d^3x', \quad (2.209)$$

$$E_a = \int_a \rho^* \Pi d^3x, \quad (2.210)$$

e

$$P_a = \int_a p d^3x. \quad (2.211)$$

Como se pode ver através dos parâmetros PPN envolvidos, a massa gravitacional ativa, passiva e massa inercial são diferentes para teorias semi-conservativas e, por outro lado, as expressões possuem a mesma forma para teorias conservativas diferindo pelos valores para β e γ previstos por cada uma.

Finalmente, $(a_a)_{ncorpos}$ é

$$\begin{aligned}
(a_a^j)_{ncorpos} = & \sum_{b \neq a} \frac{m_b x_{ab}^j}{r_{ab}^3} \left\{ (2\gamma + 2\beta) \frac{m_b}{r_{ab}} + \left(2\gamma + 2\beta + 1 + \frac{1}{2} \alpha_1 - \zeta_2 \right) \frac{m_a}{r_{ab}} \right. \\
& + (2\beta - 1 - 2\xi - \zeta_2) \sum_{c \neq ab} \frac{m_c}{r_{bc}} + (2\gamma + 2\beta - 2\xi) \sum_{c \neq ab} \frac{m_c}{r_{ac}} \\
& - \frac{1}{2} (1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1) \sum_{c \neq ab} m_c \frac{\mathbf{x}_{ab} \cdot \mathbf{x}_{bc}}{r_{bc}^3} - \xi \sum_{c \neq ab} m_c \frac{\mathbf{x}_{bc} \cdot \mathbf{x}_{ac}}{r_{ac}^3} \\
& - \gamma v_a^2 + \frac{1}{2} (4\gamma + 4 + \alpha_1) \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b - \frac{1}{2} (2\gamma + \alpha_2 + 2 + \alpha_3) v_b^2 \\
& + \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 + \frac{1}{2} \alpha_1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_a + \frac{1}{2} (\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3) \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_b \\
& \left. + \frac{3}{2} (1 + \alpha_2) (\mathbf{v}_b \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ab})^2 + \frac{3}{2} \alpha_2 (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ab})^2 + 3\alpha_2 (\mathbf{w} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ab}) (\mathbf{v}_b \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ab}) \right\} \\
& - \frac{1}{2} (4\gamma + 3 - 2\xi + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1) \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}} \sum_{c \neq ab} \frac{m_c x_{bc}^j}{r_{bc}^3} \\
& - \xi \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}^3} (\delta_{jk} - 3\hat{n}_{ab}^j \hat{n}_{ab}^k) \sum_{c \neq ba} m_c \left(\frac{x_{ac}^k}{r_{ac}} - \frac{x_{bc}^k}{r_{bc}} \right) \\
& + \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}^3} \mathbf{x}_{ab} \cdot [(2\gamma + 2) \mathbf{v}_a - (2\gamma + 1) \mathbf{v}_b] v_a^j \\
& - \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}^3} \mathbf{x}_{ab} \cdot [(4\gamma + 4 + \alpha_1) \mathbf{v}_a - (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2) \mathbf{v}_b + 2\alpha_2 \mathbf{w}] v_b^j \\
& - \frac{1}{2} \sum_{b \neq a} \frac{m_b}{r_{ab}^3} \mathbf{x}_{ab} \cdot [\alpha_1 \mathbf{v}_a - (\alpha_1 - 2\alpha_2) \mathbf{v}_b + 2\alpha_2 \mathbf{w}] w^j, \tag{2.212}
\end{aligned}$$

A expressão acima contém as correções pós-newtonianas às equações newtonianas de movimento que resultariam de tratar cada corpo como uma “massa pontual” movendo-se ao longo de uma geodésica da métrica PPN produzida por todos os outros corpos, assumidos como massas pontuais.

Com as equações de movimento em mãos, algumas considerações devem ser feitas para o tratamento de sistemas específicos. Será considerado um sistema isolado, que está em repouso em relação ao resto do universo, ou seja $\mathbf{w} = \mathbf{0}^{11}$, de dois corpos cujas massas inerciais são m_1 e m_2 e que o corpo 1 tem um pequeno momento de quadrupolo Q_1^{ij} . Será considerado também que os corpos do sistema são aproximadamente esféricos e a origem do sistema de coordenadas coincide com o centro de massa do sistema, de modo que podemos fazer as simplificações discutidas abaixo.

Nestas condições $(a_a)_{self}$ não aparece, pois os termos $t_a^j, \mathcal{T}_a^j, \mathcal{T}_a^{*j}, \Omega_a^j, \mathcal{E}_a^j$ e \mathcal{P}_a^j são

¹¹Como definido na seção 2.5.1, \mathbf{w} é a velocidade do centro de massa do sistema local em relação ao referencial de repouso do universo.

nulos quando aplicados a corpos cuja simetria é esférica. O termo $(\mathbf{a}_a)_N$, também pode ser simplificado nestas condições, pois a parte isotrópica de Ω_a^{jk} é dominante, e

$$\begin{aligned}\Omega_a^{jk} &= -\frac{1}{2} \int_a \frac{\rho^* \rho'^*(x-x')^i (x-x')^j}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x d^3x' \\ &= \frac{1}{3} \Omega_a \delta^{jk}.\end{aligned}\quad (2.213)$$

Com isso podemos simplificar a expressão para o tensor de massa gravitacional passiva (2.206), reescrevendo o termo

$$3\xi \hat{n}_{ab}^l \hat{n}_{ab}^m \frac{\Omega_a^{lm}}{m_a} = 3\xi \frac{x_{ab}^l x_{ab}^m}{r_{ab} r_{ab}} \frac{\Omega_a^{lm}}{m_a}, \quad (2.214)$$

e massa gravitacional ativa, definida em (2.207), simplificando

$$\frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\xi) \hat{n}_{ab}^j \hat{n}_{ab}^k \frac{\Omega_{ab}^{jk}}{m_b} = \frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\xi) \frac{x_{ab}^l x_{ab}^m}{r_{ab} r_{ab}} \frac{\Omega_{ab}^{jk}}{m_b}, \quad (2.215)$$

ambas utilizando a equação (2.213), de modo a obter

$$(m_p)_a^{jk} = m_a \delta^{jk} \left[1 + (4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\xi - \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 - \frac{2}{3}\zeta_1 - \frac{1}{3}\zeta_2) \Omega_a / m_a \right], \quad (2.216)$$

$$\begin{aligned}(m_A)_b &= m_b \left[1 + (4\beta - \gamma - 3 - \frac{10}{3}\xi - \frac{1}{2}\alpha_3 - \frac{1}{3}\zeta_1 - 2\zeta_2) \Omega_b / m_b + \zeta_3 E_b / m_b \right. \\ &\quad \left. - (\frac{3}{2}\alpha_3 + \zeta_1 - 3\zeta_4) P_b / m_b \right].\end{aligned}\quad (2.217)$$

Portanto

$$(\mathbf{a}_a)_N = \frac{(m_p)_a}{m_a} \nabla \mathcal{U}, \quad (2.218)$$

sendo $(m_p)_a$ equivalente ao lado direito da expressão (2.216) sem a delta de Kronecker, e

$$\mathcal{U} = \sum_{b \neq a} \frac{(m_A)_b}{r_{ab}}. \quad (2.219)$$

As simplificações para o termo $(\mathbf{a}_a)_{ncorpos}$, sob as condições consideradas aqui, são imediatas. Pode-se então, escrever as acelerações para cada um dos dois corpos do sistema em relação ao centro de massa, obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 = & \frac{(m_p)_1}{m_1} (\nabla \mathcal{U})_1 - \frac{m_2 \mathbf{x}}{r^3} \left[(2\gamma + 2\beta) \frac{m_2}{r} + (2\gamma + 2\beta + 1 + \frac{1}{2}\alpha_1 - \zeta_2) \frac{m_1}{r} \right. \\ & - \gamma v_1^2 + \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1) \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}(2\gamma + 2 + \alpha_2 + \alpha_3) v_2^2 \\ & \left. + \frac{3}{2}(1 + \alpha_2)(\mathbf{v}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \right] - \frac{m_2 \mathbf{x}}{r^3} \cdot [(2\gamma + 2)\mathbf{v}_1 - (2\gamma + 1)\mathbf{v}_2] v_1 \\ & + \frac{1}{2} \frac{m_2 \mathbf{x}}{r^3} \cdot [(4\gamma + 4 + \alpha_1)\mathbf{v}_1 - (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2)\mathbf{v}_2] v_2, \end{aligned} \quad (2.220)$$

em que $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ e $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}/r$. A expressão para a aceleração do segundo corpo, \mathbf{a}_2 , é obtido da mesma forma trocando o índice 1 por 2 e \mathbf{x} por $-\mathbf{x}$. O termo que inclui o potencial quase-Newtoniano para o corpo 1 é

$$(\partial_j \mathcal{U})_1 = (m_A)_2 \frac{x^j}{r^3}, \quad (2.221)$$

Devemos incluir ao termo referente à aceleração do corpo 2, a contribuição newtoniana do momento de quadrupolo ao potencial quase-newtoniano produzido pelo corpo 1. Com a contribuição do momento de quadrupolo, o potencial Newtoniano é dado por

$$U = \sum_{b \neq a} \left[\frac{m_b}{r_{ab}} + \frac{1}{2} Q_b^{ij} \frac{x_{ab}^i x_{ab}^j}{r_{ab}^5} \right], \quad (2.222)$$

o primeiro termo já está incluso na expressão para \mathcal{U} , o segundo termo é referente à expansão multipolar até a contribuição do momento de quadrupolo

$$Q_b^{ij} = \int_b \rho (3x^i x^j - |\mathbf{x}|^2 \delta^{ij}) d^3 x. \quad (2.223)$$

Portanto, para a situação em questão

$$\begin{aligned}
(\partial_j \mathcal{U})_2 &= (m_A)_1 \partial_j r^{-1} + \partial_j \left(\frac{1}{2} Q_1^{kl} \frac{x^k x^l}{r^5} \right) \\
&= -(m_A)_1 \frac{x^j}{r^3} + \frac{1}{2} \partial_j Q_1^{kl} \frac{x^k x^l}{r^5} + \frac{1}{2} Q_1^{kl} \partial_j \left(\frac{x^k x^l}{r^5} \right) \\
&= -(m_A)_1 \frac{x^j}{r^3} + \frac{1}{2} \partial_j Q_1^{kl} \frac{x^k x^l}{r^5} + \frac{1}{2} Q_1^{kl} \left(\frac{2\delta^{jk} x^l}{r^5} - 5 \frac{x^k x^l \partial_j r}{r^6} \right). \quad (2.224)
\end{aligned}$$

Como os corpos são esféricos $x^k = r\hat{n}^k$, e Lembrando que $r = |x|$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
Q_1^{kl} &= \int_1 \rho r^2 (\delta^{kl} - 3\hat{e}^k \hat{e}^l) d^3x \\
&= (\delta^{kl} - 3\hat{e}^k \hat{e}^l) \int_1 \rho r^2 d^3x. \quad (2.225)
\end{aligned}$$

em que \hat{e} é um versor na direção do eixo de simetria. A integral na expressão acima é o momento de inércia que deve ser calculado em relação ao centro de massa do sistema (posteriormente este será relacionado ao sistema mercúrio e sol). Pela simetria do sistema o momento de inércia do corpo 1 vai depender de sua massa e raio ao quadrado. Portanto, a expressão acima será escrita como

$$Q_1^{kl} = m_1 R_1 J_{2(1)} (\delta^{kl} - 3\hat{e}^k \hat{e}^l) \quad (2.226)$$

em que $J_{2(1)}$ é adimensional chamado coeficiente de momento de quadrupolo, o subscrito 2 indica que o cálculo leva em consideração 2 corpos. Com isso, a expressão (2.224) se torna

$$(\partial_j \mathcal{U})_2 = -(m_A)_1 \frac{x^j}{r^3} - \frac{1}{2} \frac{Q_1^{kl}}{r^4} (5\hat{n}^k \hat{n}^l \hat{n}^j - 2\delta^{jk} \hat{n}^l) \quad (2.227)$$

Além de o centro de massa do sistema estar em repouso e na origem do sistema de coordenadas, os dois corpos se movem a velocidades baixas, o que nos permite escrever

$$0 = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.228)$$

ou ainda

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{m_2}{m}\mathbf{v} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{m_1}{m}\mathbf{v} \quad (2.229)$$

em que $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ e $m = m_1 + m_2$. Levando estes termos nas expressões para as acelerações de cada corpo, e calculando $\mathbf{a} \equiv \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & -\left(\frac{(m_p)_2}{m_2}(m_A)_1 + \frac{(m_p)_1}{m_1}(m_a)_2\right)\frac{\mathbf{x}}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{m_1 R_1^2 J_{2(1)}}{r^4}[15(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \hat{\mathbf{n}} - 6(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{e}} - 3\hat{\mathbf{n}}] \\ & + \frac{m\mathbf{x}}{r^3}\left[(2\gamma + 2\beta)\frac{\mu}{r} - \gamma v^2 + (2 + \alpha - \zeta_2)\frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}(6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\frac{\mu}{m}v^2\right. \\ & \left. + \frac{3}{2}(1 + \alpha_2)\frac{\mu}{m}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2\right] + \frac{m(\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{r^3}\left[2\gamma + 2 - \frac{\mu}{m}(2 - \alpha_1 + \alpha_2)\right], \end{aligned} \quad (2.230)$$

sendo $\mu = m_1 m_2 / m$.

A expressão acima é a aceleração relativa entre os dois corpos do sistema. Vamos considerar uma órbita planetária, e para isto utiliza-se alguns elementos relacionados à mecânica celestial comumente utilizados na dinâmica orbital. Primeiramente escolhe-se um plano de referência em relação ao plano formado pela órbita dos dois corpos. Em relação a este plano são definidos: o ângulo de inclinação i do plano orbital em relação ao plano de referência, o ângulo Ω medido a partir de uma direção de referência que é escolhida no plano de referência até o nó ascendente, o ângulo ω medido no plano orbital, e compreendido entre a direção nó ascendente e o ponto do periélio, a excentricidade da órbita e e semi-eixo maior a , ver Figura 2.3.

O desvio do periélio da órbita é calculado a partir da variação de ω , que se relaciona aos demais elementos orbitais através de equações de movimento obtidas a partir de um método variação específico. Detalhes a respeito deste procedimento podem ser vistos, por exemplo, em [30]. Para o objetivo deste texto é suficiente expor as equações de movimento resultantes e utilizá-las para o problema em questão. Este método leva em consideração três componentes da aceleração \mathbf{a} : uma componente radial \mathcal{R} , uma componente normal ao plano da órbita \mathcal{W} e uma componente \mathcal{I} , que é ortogonal a \mathcal{R} e a \mathcal{W} . As equações para a variação dos elementos orbitais são

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\mathcal{R}p}{he}\cos\phi + \frac{\mathcal{I}(p+r)}{he}\sin\phi - \frac{\mathcal{W}r\cos i}{h}\frac{\sin(\omega+\phi)}{\sin i}, \quad (2.231)$$

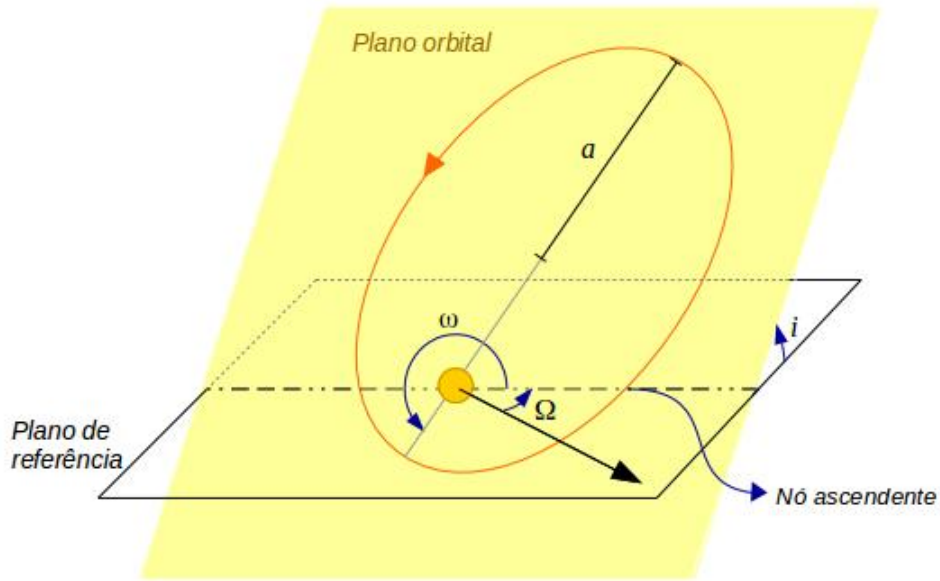


Figura 2.3. Elementos orbitais.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mathcal{W}r \sin(\omega + \phi)}{h \sin i}, \quad (2.232)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{W}r}{h} \cos(\omega + \phi), \quad (2.233)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2}{h} \left(\frac{p\mathcal{I}}{r} + \mathcal{R}e \sin \phi \right), \quad (2.234)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1 - e^2}{h} \left[a\mathcal{R} \sin \phi + \frac{\mathcal{I}}{e} \left(\frac{ap}{r} - r \right) \right], \quad (2.235)$$

em que ϕ é o ângulo medido entre a posição do planeta em sua órbita e a direção do periélio,

$$p = a(1 - e^2), \quad (2.236)$$

$$r = \frac{p}{(1 + e \cos \phi)} \quad (2.237)$$

e

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = h = (mp)^{1/2} \quad (2.238)$$

é o momento angular da órbita por unidade de massa. Como as posições das órbitas dos planetas são medidas tomando como referência coordenadas geocêntricas (em que a terra está em repouso), o periélio medido é relativo à posição do equinócio, cujo ângulo em relação ao nó ascendente $\tilde{\omega}$ é

$$\tilde{\omega} = \omega + \Omega \cos i. \quad (2.239)$$

Diferenciando a expressão acima com relação ao tempo, podemos substituir $d\omega/dt$ na equação (2.231), pois

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} - \frac{d\Omega}{dt} \cos i + \Omega \sin i \frac{di}{dt}. \quad (2.240)$$

Para o sistema solar, o plano de referência é escolhido como sendo o plano formado pela órbita da terra em torno do sol, e a inclinação da órbita de mercúrio (bem como para os outros planetas do sistema) é pequena¹², com isso $\sin i(di/dt) \ll 1$, e o ultimo termo da expressão acima pode ser desprezado. Substituindo (2.240), juntamente com (2.232) e a consideração feita acima em (2.231), chega-se na equação

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -\frac{p\mathcal{R}}{he} \cos \phi + \frac{\mathcal{I}(p+r)}{he} \sin \phi, \quad (2.241)$$

que deve ser integrada ao longo de uma órbita para se obter a expressão para o desvio $\Delta\tilde{\omega}$. Utilizando a relação (2.238), se obtém que $dt = [r^2/(mp)^{1/2}]d\phi$, com isso a equação acima se torna

$$\Delta\tilde{\omega} = -\frac{1}{me} \int_0^{2\pi} \mathcal{R}r^2 \cos \phi d\phi + \frac{1}{em} \int_0^{2\pi} \mathcal{I}(1+r/p)r^2 \sin \phi d\phi. \quad (2.242)$$

Para resolver as integrais acima, devemos estipular quem são as componentes \mathcal{R} e \mathcal{I} , e para isto mais uma observação pode ser feita: o primeiro termo entre parênteses na expressão (2.230) pode ser escrito, tendo em conta as expressões para

¹²Como pode ser visto na referência [1], $i \cong 7,0^\circ$. E também é considerado que a variação deste é pequena a cada órbita.

massa passiva e ativa, na forma

$$\left(\frac{(m_p)_2}{m_2} (m_A)_1 + \frac{(m_p)_1}{m_1} (m_a)_2 \right) = m[1 + \mathcal{M}] \quad (2.243)$$

de modo que os termos de auto energias Ω_1 e Ω_2 estão em \mathcal{M} e são pequenos, da ordem de 10^{-5} para o sol [54]. Portanto, a diferença entre a expressão no lado esquerdo da relação acima e m não são mensuráveis, então a igualdade entre elas será adotada. A parte radial da aceleração relativa (2.230), inclui todos os termos na direção de \hat{n} , logo a componente \mathcal{R} pode ser obtida tomando o produto $\mathbf{a} \cdot \hat{n}$. Desse modo

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & -\frac{m}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{mR^2 J_2}{r^4} [3(\hat{e} \cdot \hat{n})^2 - 3] + \frac{m}{r^2} \left[(2\gamma + 2\beta) \frac{m}{r} - \gamma v^2 + (2 + \alpha_1 - 2\zeta_2) \frac{\mu}{r} \right. \\ & \left. + (2\gamma + 2)(\mathbf{v} \cdot \hat{n})^2 - \frac{1}{2}(6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \frac{\mu}{m} v^2 - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\mu}{m} (\mathbf{v} \cdot \hat{n})^2 \right], \quad (2.244) \end{aligned}$$

e o processo é análogo para obtenção de \mathcal{I} . Basta efetuar o produto $\mathbf{a} \cdot \hat{z}$, sendo \hat{z} um versor contido no plano da órbita e na direção do movimento orbital, o que resulta em

$$\mathcal{I} = -\frac{3mR^2 J_2}{r^4} (\hat{e} \cdot \hat{n})(\hat{e} \cdot \hat{z}) + \frac{m}{r^2} (\mathbf{v} \cdot \hat{n})(\mathbf{v} \cdot \hat{z}) \left[(2\gamma + 2) - \frac{\mu}{m} (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \right]. \quad (2.245)$$

O subscrito 1 em m , R e J foi omitido pois se tratando do sistema Sol-Mercúrio, fica claro que $m \approx m_1$ e as demais grandezas estão relacionadas ao sol.

A inclinação da órbita de Mercúrio com relação ao equador do Sol é cerca de $3,38^\circ$. Então o eixo de simetria do Sol é praticamente normal ao plano orbital, de modo que podemos tomar $\hat{e} \cdot \hat{n} \simeq 0$. Com estas condições podemos substituir as expressões (2.244) e (2.245) em (2.242) e escrever

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\omega} = & -\frac{1}{me} \left[-m \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi - \frac{3}{2} m R^2 J_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi + m^2 (2\gamma + 2\beta) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} d\phi \right. \\
& - \gamma m \int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi + m(2\gamma + 2) \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \cos \phi d\phi \\
& + m\mu(2 + \alpha_1 - 2\zeta_2) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} d\phi - \frac{1}{2} (6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \mu \int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi \\
& \left. - \frac{1}{2} \mu (1 - 2\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \cos \phi d\phi \right] \\
& + \frac{1}{e} \left[(2\gamma + 2) - \frac{\mu}{m} (2 - \alpha_1 + \alpha_2) \right] \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}) (1 + r/p) \sin \phi d\phi, \tag{2.246}
\end{aligned}$$

que tem como solução

$$\Delta\tilde{\omega} = \frac{6\pi m}{p} \left[\frac{1}{3} (2 + 2\gamma - \beta) + \frac{1}{6} (2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\zeta_2) \frac{\mu}{m} + \left(\frac{R^2}{2mp} \right) J_2 \right] \tag{2.247}$$

A solução das integrais, bem como o rearranjo dos termos a fim de obter o resultado acima, estão detalhadas no Anexo A. A segunda parcela dentro dos colchetes na expressão acima é nulo para qualquer teoria conservativa, e para o caso de Mercúrio $\mu/m \simeq 10^{-7}$ por isto tal termo pode ser ignorado. Substituindo os elementos orbitais padrão e as constantes físicas para Mercúrio e o Sol

$$a = 57,9 \times 10^6 km \tag{2.248}$$

$$e = 0,205628 \tag{2.249}$$

$$M_\odot = 1,989 \times 10^{30} kg = 1,475 km \tag{2.250}$$

$$R_\odot = 6,9599 \times 10^5 km \tag{2.251}$$

$$\tag{2.252}$$

que são encontrados em [1], obtém-se a taxa de desvio do periélio de Mercúrio em arco segundo por século ¹³

$$\dot{\omega} = 42,9'' \left(\frac{1}{3} (2 + 2\gamma - \beta) + 3 \times 10^{-4} \frac{J_2}{10^{-7}} \right). \tag{2.253}$$

¹³ Como Mercúrio tem um período orbital de 87,969 dias, o mesmo orbita o sol $\sim 414,9$ a cada cem anos. E $6\pi m/p = 0,1034''$ por órbita, logo $0,1034'' \times 414,9 = 42,9''$

É importante notar que alguns fatores podem influenciar na precessão do periélio da órbitas de mercúrio. Assim como a gravidade do sol, a órbita de Mercúrio é influenciada pelas perturbações gravitacionais devido ao movimento dos outros planetas do sistema solar, (os de maior massa e mais próximos, principalmente Vênus, terra e Júpiter) que podem ser calculadas pela teoria de perturbação newtoniana, e contribuem com cerca de 552'' de desvio por século. E também o movimento da Terra, tendo como efeito um desvio de 5025'' por século. Ou seja, a predição Newtoniana para o desvio do periélio de Mercúrio é de

$$\dot{\omega}_N = (5557,62 \pm 0,20)''/\text{século}, \quad (2.254)$$

enquanto que a precessão observada é

$$\dot{\omega}_{OBS} = (5600,73 \pm 0,41)''/\text{século} \quad (2.255)$$

ambos dados em [52]. Ou seja, a diferença observada entre os dois é cerca de 43'', e corresponde ao previsto para o periélio de Mercúrio levando em consideração os efeitos relativísticos.

Um fator que pode influenciar diretamente no valor de β é a medição de J_2 . Durante décadas foi discutido que o fato de o sol ser um esferoide oblato poderia influenciar diretamente no valor de J_2 e, apesar de alguns trabalhos sobre o tema terem sido publicados, um tratamento preciso envolveria física solar de alta complexidade. Uma maneira de contornar tal problema foi mencionada por Clifford Will em 1993 [54], que seria sondando o campo gravitacional do Sol em diferentes distâncias em relação ao mesmo, separando assim os efeitos de J_2 daqueles da gravitação relativística através das diferentes dependências radiais na equação de movimento. Tal método compararia as mudanças do periélio de diferentes planetas. Outro método, também mencionado na mesma referência aproveitaria a excentricidade orbital de Mercúrio mapeando as diferentes perturbações orbitais periódicas induzidas por J_2 pela gravidade relativística. Entretanto, para alcançar precisão suficiente, tais medições exigiriam o rastreamento de uma espaçonave em órbita em torno de Mercúrio. Atualmente J_2 é obtido através de oscilações solares utilizando-se técnicas de Heliogrametria, e como pode ser visto na referência [31], o valor obtido considerando que a superfície do Sol gira uniformemente é $J_2 = 2,2 \times 10^{-7}$. Além disso, em 2014 Will publicou em [58] que os ajustes mais recentes de dados planetários da espaçonave *Messenger* que orbitou Mercúrio fornecem $\beta - 1 = (-4,1 \pm 7,8) \times 10^{-5}$.

Os valores mais atuais para os parâmetros PPN podem ser resumidos na Tabela 2.3

PARÂMETRO	LIMITE
$\gamma - 1$	$2,3 \times 10^{-5}$
$\beta - 1$	$1,0 \times 10^{-4}$
ξ	$4,0 \times 10^{-9}$
α_1	$4,0 \times 10^{-5}$
α_2	$2,0 \times 10^{-9}$
α_3	$4,0 \times 10^{-20}$
ζ_1	$2,0 \times 10^{-2}$
ζ_2	$4,0 \times 10^{-5}$
ζ_3	$1,0 \times 10^{-8}$
ζ_4	—

Tabela 2.3. Limites atuais para os Parâmetros PPN [58]. Testes relacionados às leis de conservação em regime pós-Newtoniano revelam que ζ_4 não é medido diretamente.

Capítulo 3

Aplicações

O objetivo deste capítulo é aplicar o formalismo à algumas teorias de gravitação com a finalidade de obter valores previstos por cada teoria para os parâmetros PPN. Valores teóricos podem ser comparados aos obtidos a partir dos testes, tanto para classificação de cada teoria em relação a diferença dos valores, como para se estabelecer limites para as constantes de cada teoria.

Diferentes teorias podem ter, além da métrica, outras variáveis que geram campo gravitacional, como por exemplo um campo escalar ϕ , campos vetoriais K^α e tensoriais $B^{\alpha\beta}$. Estas variáveis devem ser expandidas nas ordens necessárias de acordo com as componentes da métrica como foi discutido na seção 2.3

$$g_{00} \sim g_{00}^{(4)}, \quad g_{0j} \sim g_{0j}^{(3)}, \quad g_{ij} \sim g_{ij}^{(2)} \quad (3.1)$$

ou seja, para um vetor

$$K^0 \sim k^0^{(4)}, \quad k^j \sim k^j^{(3)} \quad (3.2)$$

para um tensor de *rank* 2

$$B_{00} \sim B_{00}^{(4)}, \quad B_{0j} \sim B_{0j}^{(3)}, \quad B_{ij} \sim B_{ij}^{(2)} \quad (3.3)$$

e para um escalar

$$\phi = \phi_0 + \varphi; \quad \varphi \sim \varphi^{(2)} + \varphi^{(4)}. \quad (3.4)$$

Geralmente, as equações de campo de teorias métricas para gravidade possuem termos envolvendo o tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}$, e para facilitar a obtenção da solução das componentes da métrica de forma direta, é conveniente escrever as equações de campo da teoria de modo a deixá-lo isolado, em um dos lados da igualdade. Como visto acima, deve-se determinar $\overset{(2)}{R}_{00}$, $\overset{(3)}{R}_{0j}$, $\overset{(4)}{R}_{00}$ e $\overset{(2)}{R}_{ij}$. Para isto, basta expressar a métrica como na equação (2.21), ou seja $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, de modo que todos os termos de ordem Newtoniana e pós-Newtoniana estão em $h_{\alpha\beta}$, e calcular as componentes

$$\begin{aligned} R_{00} = & -\frac{1}{2}\nabla^2 \overset{(4)}{h}_{00} - \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0 \overset{(2)}{h}_i^i - 2\partial_i\partial_0 \overset{(3)}{h}_0^i) + \frac{1}{2}\partial_i \overset{(2)}{h}_{00} \left(\partial_k \overset{(2)}{h}^{ki} - \frac{1}{2}\partial^i \overset{(2)}{h}_k^k \right) - \frac{1}{4}|\nabla \overset{(2)}{h}_{00}|^2 \\ & + \frac{1}{2}\overset{(2)}{h}^{ik}\partial_i\partial_k \overset{(2)}{h}_{00} + O(v^6), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 \overset{(3)}{h}_{0j} - \partial_i\partial_j \overset{(2)}{h}_0^i + \partial_j\partial_0 \overset{(2)}{h}_i^i - \partial_i\partial_0 \overset{(2)}{h}_j^i) + O(v^5), \quad (3.6)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 \overset{(2)}{h}_{ij} - \partial_i\partial_j \overset{(2)}{h}_{00} + \partial_i\partial_j \overset{(2)}{h}_k^k - \partial_k\partial_i \overset{(2)}{h}_j^k - \partial_j\partial^k \overset{(2)}{h}_{ik}) + O(v^4), \quad (3.7)$$

cujos detalhes dos cálculos estão no Anexo B. Com as equações de campo expandidas até a primeira ordem pós-Newtoniana, as soluções para $h_{\alpha\beta}$ são obtidas da menor ordem para maior: resolve-se primeiramente para o limite Newtoniano ($\overset{(2)}{g}_{00}$), depois para as componentes $\overset{(2)}{g}_{ij}$, $\overset{(3)}{g}_{0j}$ e por ultimo $\overset{(4)}{g}_{00}$ por depender das demais.

Além disso, as componentes do tensor de Ricci descritas acima, podem ser simplificadas para cada teoria mantendo o calibre padrão, no qual a parte espacial da métrica deve ser diagonal e o potencial \mathcal{B} não aparece. A liberdade na escolha do calibre está relacionada a determinação de $g_{\alpha\beta}$ em diferentes sistemas de coordenadas: as equações de campo para teorias métricas de gravitação (que tem o tensor de Einstein como um dos termos) possuem 10 componentes independentes, assim como um tensor métrico qualquer. O que leva a pensar que as equações de campo seriam o suficiente para determinar $g_{\alpha\beta}$ sem redundâncias. Entretanto, as identidades de Bianchi, que levam a $\nabla_\alpha G_\beta^\alpha = 0$, relacionam as 10 componentes de G_α^β por 4 identidades diferenciais, sendo assim temos 6 equações independentes, restando 4 graus de liberdade. E se $g_{\alpha\beta}$ é solução das equações de campo em um sistema de coordenadas, podemos determinar a $g'_{\alpha\beta}$ através de uma transformação $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha$ que pode envolver 4 funções arbitrárias das coordenadas.

Um calibre diferente do padrão pode ser adotado, mas a comparação direta entre cada teoria só é possível se a métrica dada como solução destas estiver no

mesmo calibre, e como o padrão é adotado na maior parta da literatura, será utilizado aqui também.

3.1 Relatividade Geral

As equações de campo para Relatividade Geral podem ser escritas na forma

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right). \quad (3.8)$$

Como ja foi mencionado, temos uma liberdade de calibre, e vamos antes impor convenientemente

$$\partial_\alpha h_i^\alpha - \frac{1}{2} \partial_i h_\alpha^\alpha = 0, \quad (3.9)$$

$$\partial_\alpha h_0^\alpha - \frac{1}{2} \partial_0 h_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00}. \quad (3.10)$$

que elimina a segunda derivada temporal de R_{00} e simplifica esta, e as demais componentes do tensor de Ricci para

$$R_{00} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}^{(4)} - \frac{1}{2} (\partial_i h_{00}^{(2)})^2 + \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}^{(2)} + O(v^6), \quad (3.11)$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4} \partial_j \partial_0 h_{00}^{(2)} + O(v^5), \quad (3.12)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{ij}^{(2)} + O(v^4). \quad (3.13)$$

Com isso, basta escrever a equação (3.8) para ordem de cada componente da métrica, isto é, para se obter $h_{00}^{(2)}$ precisamos de

$$R_{00}^{(2)} = 8\pi \left(T_{00}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{00} T^{(2)} \right), \quad (3.14)$$

e utilizar a componente do tensor energia-momento (2.41) e (2.49) juntamente com a relação (3.11) até a ordem necessária, obtendo

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}^{(2)} = 8\pi \left(\rho - \frac{1}{2} \rho \right) \implies \nabla^2 h_{00}^{(2)} = -8\pi \rho. \quad (3.15)$$

E como $\nabla^2 U = -4\pi\rho$, obtemos

$${}^{(2)}h_{00} = 2U. \quad (3.16)$$

O procedimento é análogo para as demais componentes. Para obter ${}^{(2)}h_{ij}$, utilizamos novamente a equação de campo para ordem necessária

$$R_{ij} = 8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} \eta_{ij} T \right). \quad (3.17)$$

Tendo em conta as relações (3.13) e (2.49) e sabendo que $T^{ij} = 0$, a equação acima se torna

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 {}^{(2)}h_{ij} = 4\pi\rho\eta_{ij}, \quad (3.18)$$

logo

$${}^{(2)}h_{ij} = 2U\delta_{ij}. \quad (3.19)$$

Para a componente ${}^{(3)}h_{0j}$ a equação de campo (3.8) fica

$$R_{0j} = 8\pi T_{0j}, \quad (3.20)$$

e tendo posse das relações (3.13) e (2.44), temos

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 {}^{(3)}h_{0j} - \frac{1}{4} \partial_j \partial_0 {}^{(2)}h_{00} = -8\pi\rho v^j. \quad (3.21)$$

Como já foi visto na obtenção de (3.16), ${}^{(2)}h_{00} = 2U$ e também $\nabla^2 V_j = -4\pi\rho v_j$ definido em (2.52). Além disso, das relações (2.51) e (2.54) se obtém $\partial_i \partial_0 U = -\frac{1}{2} \nabla^2 (V_j - W_j)$. portanto, a expressão (3.21) se torna

$$\nabla^2 {}^{(3)}h_{0j} - \frac{1}{2} \nabla^2 V_j + \frac{1}{2} \nabla^2 W_j = -4\nabla^2 V_j, \quad (3.22)$$

ou seja,

$$h_{0j}^{(3)} = -\frac{7}{2}V_j - \frac{1}{2}W_j. \quad (3.23)$$

Antes do cálculo de $h_{00}^{(4)}$, vamos reescrever $R_{00}^{(4)}$ de uma forma mais simples a partir das componentes da perturbação da métrica já calculadas. Tendo em conta (3.16) e (3.19), a expressão (3.12) se torna

$$\begin{aligned} R_{00}^{(4)} &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}(\partial_i h_{00}^{(2)})^2 + \frac{1}{2}h^{ij(2)}\partial_i\partial_j h_{00}^{(2)} \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - 2(\partial_i U)^2 + 2U\delta^{ij}\partial_i\partial_j U \\ &= -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - 2(\partial_i U)^2 + 2U\nabla^2 U, \end{aligned} \quad (3.24)$$

e como

$$\partial_i U^2 = 2U\partial_i U \implies \partial_i\partial^i U^2 = \nabla^2 U^2 = 2(\partial_i U)^2 + 2U\nabla^2 U \quad (3.25)$$

e também $U\nabla^2 U = -4\pi\rho U = \nabla^2\phi_2$, a relação (3.24) fica

$$R_{00}^{(4)} = -\frac{1}{2}\nabla^2(h_{00}^{(4)} + 2U^2 - 8\phi_2). \quad (3.26)$$

Vamos agora ao cálculo de $h_{00}^{(4)}$, e para isto escrevemos a equação (3.8) para ordem necessária, ou seja

$$R_{00}^{(4)} = 8\pi\left(T_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}\eta_{00}^{(4)}T - \frac{1}{2}h_{00}^{(2)}T^{(2)}\right) \quad (3.27)$$

e utilizando a componente do tensor energia momento (2.42) e o traço do mesmo (2.49), juntamente com a relação (3.26) e a componente $h_{00}^{(2)}$ já calculada, se obtém

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\nabla^2(h_{00}^{(4)} + 2U^2 - 8\phi_2) &= 8\pi\left(\rho(1 + \Pi - 2Uv^2) + \frac{1}{2}(-\rho - \rho\Pi + 3p) + U\rho\right) \\ \frac{1}{2}\nabla^2(h_{00}^{(4)} + 2U^2 - 8\phi_2) &= -4\pi(\rho + \rho\Pi - 2\rho U + 3p + 2\rho v^2). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Utilizando, na expressão acima, os potenciais pós-Newtonianos definidos na seção 2.4 na forma

$$\nabla^2 \phi_1 = -4\pi\rho v^2 \quad (3.29)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = -4\pi\rho U \quad (3.30)$$

$$\nabla^2 \phi_3 = -4\pi\rho\Pi \quad (3.31)$$

$$\nabla^2 \phi_4 = -4\pi p \quad (3.32)$$

se obtém

$$h_{00}^{(4)} = 2U - 2U^2 + 4\phi_1 + 4\phi_2 + 2\phi_3 + 6\phi_4. \quad (3.33)$$

Podemos, finalmente, escrever as componentes $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ da métrica expandida até a primeira ordem pós-Newtoniana para Relatividade Geral. Utilizando as componentes calculadas aqui

$$g_{00} = -1 + 2U - 2U^2 + 4\phi_1 + 4\phi_2 + 2\phi_3 + 6\phi_4, \quad (3.34)$$

$$g_{0j} = -\frac{7}{2}V_j - \frac{1}{2}W_j, \quad (3.35)$$

$$g_{ij} = (1 + 2U)\delta_{ij}. \quad (3.36)$$

A comparação direta entre as componentes acima e as da métrica PPN geral (2.82)-(2.84) (ou com (2.105)-(2.107), tomando $w = 0$), fornecem

$$\gamma = \beta = 1, \quad (3.37)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0, \quad (3.38)$$

$$\xi = 0. \quad (3.39)$$

Pode-se relacionar os valores obtidos acima, ao que foi visto na seção 2.5 sobre a interpretação dos parâmetros PPN, concluindo que a Relatividade Geral é uma teoria completamente conservativa e não prevê efeitos de referencial preferencial. Além disso, é notável a concordância destes valores com os obtidos experimentalmente fornecidos no capítulo 2 para γ e β .

3.2 Teoria de Brans-Dicke

Em 1961 C. Brans e R.H. Dicke publicaram em [5] a primeira teoria escalar-tensorial para gravitação. Basicamente, o modelo foi proposto com o objetivo de apresentar uma teoria de gravitação relativística alternativa à Relatividade Geral e compatível com o *princípio de Mach*¹, que enuncia que as propriedades inerciais locais são determinadas pela distribuição total de massa do universo. Seguindo esta linha de pensamento Brans e Dicke foram levados a considerar que a constante gravitacional G , deveria ser relacionada ao valor médio de um campo escalar ϕ acoplado à densidade de massa do universo. Na referência [52] é apresentada uma motivação razoável para escrever

$$\langle \phi \rangle \simeq \frac{1}{G} \quad (3.40)$$

Como pode ser visto em [5], a ação que sintetiza a teoria de Brans-Dicke é obtida a partir do acoplamento não mínimo de ϕ com a métrica na ação da Relatividade Geral, de modo que G assume a forma acima, e a adição de um termo cinético para este campo, resultando em

$$S_{BD} = \frac{1}{16\pi} \int \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi \right) \sqrt{-g} d^4x + \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x, \quad (3.41)$$

em que ω é uma constante, que devido a introdução de $1/\phi$ no termo cinético é adimensional. O termo \mathcal{L}_M é a lagrangiana para matéria e tal que as variáveis desta se acoplam somente à métrica.

A partir do princípio variacional obtém-se, variando com respeito a métrica,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi \right) + \frac{1}{\phi} (\nabla_\alpha \nabla_\beta \phi - g_{\alpha\beta} \square \phi), \quad (3.42)$$

em que $\square \equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$. Variando com respeito ao campo ϕ e utilizando o traço da equação acima, pode-se escrever

$$\square \phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T. \quad (3.43)$$

Vamos estender estas equações de campo até a primeira ordem pós-Newtoniana e obter as soluções para a perturbação da métrica de acordo com o

¹No artigo [6] publicado por C.H. Brans em 1962, foram desenvolvidas consequências do princípio de Mach e mostrado que, apesar de o princípio ter inspirado Einstein, a Relatividade Geral não é totalmente compatível com este.

formalismo PPN apresentado, e em passos equivalentes ao que foi feito para Relatividade Geral. Como foi mencionado, é conveniente escrever (3.42) na seguinte forma

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{\phi} \left[T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} T \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega} \right) \right] + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_\alpha \phi \nabla_\beta \phi + \frac{1}{\phi} \nabla_\alpha \nabla_\beta \phi, \quad (3.44)$$

que é obtida utilizando o traço de (3.42) nesta própria equação, juntamente com (3.43). Além disso deve-se escrever o campo ϕ de modo que

$$\phi = \tilde{G}^{-1}(1 + \varphi), \quad \varphi = \overset{(2)}{\varphi} + \overset{(4)}{\varphi}, \quad (3.45)$$

em que \tilde{G} é uma constante da ordem da constante gravitacional, e φ é no espaço-tempo plano (ou seja, longe do sistema local descrito pela métrica PPN). Levando (3.45) em (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} = & 8\pi\tilde{G}(1 - \varphi + \varphi^2 \cdots) \left[T_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} T \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega} \right) \right] + \omega(1 - 2\varphi + 3\varphi^2 \cdots) \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi \\ & + (1 - \varphi + \varphi^2 \cdots) (\partial_\alpha \partial_\beta \varphi - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda \varphi), \end{aligned} \quad (3.46)$$

e em (3.42)

$$\square\varphi = \frac{8\pi\tilde{G}}{3+2\omega} T. \quad (3.47)$$

Observe que é necessário expressar φ em termos do potencial Newtoniano ou alguns dos potenciais pós-Newtonianos para obter as componentes da métrica diretamente, e isto será feito a seguir. Vamos primeiro, impor as condições de calibre

$$\partial_\alpha h_i^\alpha - \frac{1}{2} \partial_i h_\alpha^\alpha = \tilde{G} \partial_i \phi, \quad (3.48)$$

$$\partial_\alpha h_0^\alpha - \frac{1}{2} \partial_0 h_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00} + \tilde{G} \partial_0 \phi, \quad (3.49)$$

que quando levadas nas expressões para as componentes do tensor de Ricci (3.5)-(3.7), juntamente com (3.45) se obtém

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} + \partial_0 \partial_0 \varphi^{(2)} - \frac{1}{2}|\nabla h_{00}^{(2)}|^2 + \frac{1}{2}\partial^i h_{00}^{(2)}\partial_i \varphi^{(2)} + \frac{1}{2}h^{ik}\partial_j \partial_k h_{00}^{(2)} + O(v^6), \quad (3.50)$$

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4}\partial_i \partial_0 h_{00}^{(2)} + \partial_i \partial_0 \varphi^{(2)} + O(v^5), \quad (3.51)$$

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij}^{(2)} + \partial_i \partial_j \varphi^{(2)} + O(4). \quad (3.52)$$

A partir daqui, o procedimento para o cálculo das componentes da métrica é seguido igualando-se as relações acima com o lado direito da equação (3.46) para as ordens necessárias.

Assim como foi feito para Relatividade Geral, para obter $h_{00}^{(2)}$ devemos escrever (3.46) para $R_{00}^{(2)}$, ou seja

$$R_{00}^{(2)} = 8\pi\tilde{G}\left[T_{00}^{(2)} - \eta_{00}T^{(2)}\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\right]. \quad (3.53)$$

Sabendo que $T^{(2)} = -T_{00}^{(2)} = -\rho$ e utilizando (3.50) para ordem necessária a expressão acima se torna

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(2)} = 8\pi\tilde{G}\rho\left[1 - \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\right], \quad (3.54)$$

e como $\nabla^2 U = -4\pi\rho$, então

$$h_{00}^{(2)} = 4\left(\frac{2+\omega}{3+2\omega}\right)\tilde{G}U. \quad (3.55)$$

O termo $2\tilde{G}(2+\omega)/(3+2\omega)$ é equivalente à constante gravitacional, e para mantermos o limite Newtoniano padrão

$$h_{00}^{(2)} = 2U, \quad (3.56)$$

basta escolher

$$2\tilde{G}\left(\frac{2+\omega}{3+2\omega}\right) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right). \quad (3.57)$$

Observe que para $\omega \rightarrow \infty$, $\tilde{G} = G = 1$ que corresponde a Relatividade Geral. Com o valor de \tilde{G} fixado podemos relacionar ϕ e U através de (3.47), pois para ordem newtoniana esta fica

$$\nabla^2 \varphi^{(2)} = \frac{-4\pi\rho}{2+\omega} \quad (3.58)$$

em que foi utilizado o valor de \tilde{G} fixado em (3.57) e também que $T^{(2)} = -\rho$, com isso

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2+\omega}U. \quad (3.59)$$

Voltemos então, ao cálculo das demais componentes da métrica. Para calcular $h_{ij}^{(2)}$ devemos escrever a equação (3.46) para $R_{ij}^{(2)}$, logo

$$R_{ij}^{(2)} = 8\pi\tilde{G}\left[-\eta_{ij}T^{(2)}\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\right] + \partial_i\partial_j\varphi^{(2)}. \quad (3.60)$$

Por outro lado, a relação (3.52) para ordem necessária é

$$R_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij}^{(2)} + \partial_i\partial_j\varphi^{(2)}, \quad (3.61)$$

igualando as duas expressões acima, e utilizando (3.59) bem como o traço do tensor energia momento para ordem necessária, vem

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{ij}^{(2)} = 8\pi\tilde{G}\rho\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\delta_{ij}, \quad (3.62)$$

utilizando novamente $\nabla^2 U = -4\pi\rho$ e também (3.57), obtemos

$$h_{ij}^{(2)} = 2\left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right)U\delta_{ij}. \quad (3.63)$$

Para calcular $h_{0j}^{(3)}$ escrevemos (3.46), para ordem necessária, que é

$$R_{0j}^{(3)} = 8\pi\tilde{G}T_{0j}^{(3)} + \partial_0\partial_j\varphi^{(2)}, \quad (3.64)$$

e a expressão (3.51) para mesma ordem fica

$$R_{0j}^{(3)} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4}\partial_i\partial_0 h_{00}^{(2)} + \partial_i\partial_0\varphi^{(2)}, \quad (3.65)$$

igualando as duas expressões obtemos

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4}\partial_i\partial_0 h_{00}^{(2)} = 8\pi\tilde{G}T_{0j}^{(3)}. \quad (3.66)$$

sabendo que $h_{00}^{(2)} = 2U$ e utilizando (3.57) juntamente com a componente $T_{0j}^{(3)} = -\rho v_j$ demonstrada na seção 2.3, ficamos com

$$\nabla^2 h_{0j}^{(3)} = 8\pi\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)\rho v_j - \partial_j\partial_0 U, \quad (3.67)$$

e assim como foi feito para a mesma componente quando calculada para Relatividade Geral, temos que $\nabla^2 V_j = -4\pi\rho v_j$ e também $\partial_j\partial_0 U = -\frac{1}{2}\nabla^2(V_j - W_j)$, e com isso

$$\nabla^2 h_{0j}^{(3)} = -2\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2 V_j + \frac{1}{2}\nabla^2 V_j - \frac{1}{2}\nabla^2 W_j, \quad (3.68)$$

Logo

$$h_{0j}^{(3)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{10+7\omega}{2+\omega}\right)V_j - \frac{1}{2}W_j. \quad (3.69)$$

O trabalho algébrico para o cálculo de $h_{00}^{(4)}$ é maior, pois esta envolve algumas das componentes calculadas acima e a equação de campo fornece uma expressão mais extensa. Então vamos por partes. A componente do tensor de Ricci (3.50) para $R_{00}^{(4)}$ é

$${}^{(4)}R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} + \partial_0 \partial_0 \varphi^{(2)} - \frac{1}{2}|\nabla h_{00}^{(2)}|^2 + \frac{1}{2}\partial^i h_{00}^{(2)}\partial_i \varphi^{(2)} + \frac{1}{2}h^{jk} \partial_j \partial_k h_{00}^{(2)} \quad (3.70)$$

que, tendo em conta os valores calculados para $h_{00}^{(2)}$, $h_{ij}^{(2)}$ e também a relação entre $\varphi^{(2)}$ e U dadas em (3.56), (3.63) e (3.59) respectivamente, pode ser escrita como

$${}^{(4)}R_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - \nabla^2 U^2 + 2\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)U\nabla^2 U + \frac{1}{2+\omega}\partial_0 \partial_0 U + \frac{1}{2+\omega}|\nabla U|^2, \quad (3.71)$$

em que foi utilizado também que $2|\nabla U|^2 = \nabla^2 U^2 - 2U\nabla^2 U$. Por outro lado, a equação de campo (3.46), fornece

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{00} &= 8\pi\tilde{G}\left[{}^{(4)}T_{00} - \eta_{00}{}^{(4)}T\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right) - h_{00}^{(2)}T\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\right] - 8\pi\tilde{G}\varphi^{(2)}\left[{}^{(2)}T_{00} - \eta_{00}{}^{(2)}T\left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)\right] \\ &\quad + \partial_0 \partial_0 \varphi^{(2)} - \Gamma_{00}^k \partial_k \varphi^{(2)}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

e como pode ser visto no Anexo B, $\Gamma_{00}^k = -\partial^k h_{00}^{(2)}$. Utilizando as expressões para $T_{00}^{(4)}$ e $T^{(4)}$ obtidas em (2.42) e (2.49) respectivamente, juntamente com as relações obtidas nesta seção para $h_{00}^{(2)}$ e $h_{ij}^{(2)}$ que são (3.56) e (3.63) respectivamente, e também a relação entre $\varphi^{(2)}$ e U dada em (3.59), a expressão acima fica

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{00} &= 8\pi\tilde{G}\left[\rho + \rho\Pi - 2\rho U + \rho v^2 + \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)(-\rho - \rho\Pi + 3p) + \left(\frac{1+\omega}{3+2\omega}\right)2\rho U\right] \\ &\quad - \frac{4\pi}{2+\omega}\rho U + \frac{1}{2+\omega}\partial_0 \partial_0 U + \frac{1}{2+\omega}|\nabla U|^2, \end{aligned} \quad (3.73)$$

que de acordo com os potenciais definidos na seção 2.4 pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} {}^{(4)}R_{00} &= -\nabla^2 U^2 - \left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2 \phi_1 + \left(\frac{5+2\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2 \phi_2 - \nabla^2 \phi_3 - 3\left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2 \phi_4 \\ &\quad + \frac{1}{2+\omega}\partial_0 \partial_0 U + \frac{1}{2+\omega}|\nabla U|^2. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Finalmente, igualando (3.71) e (3.74) e sabendo que $U\nabla^2 U = \nabla^2 \phi_2$, obtemos $h_{00}^{(4)}$ dada por

$$h_{00}^{(4)} = 2U - 2U^2 + 2\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)\phi_1 + 2\left(\frac{1+2\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2\phi_2 + 2\phi_3 + 6\left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right)\phi_4. \quad (3.75)$$

Podemos reunir os resultados obtidos nesta seção e escrever as componentes da métrica PPN para teoria de Brans-Dicke

$$g_{00} = -1 + 2U - 2U^2 + 2\left(\frac{3+2\omega}{2+\omega}\right)\phi_1 + 2\left(\frac{1+2\omega}{2+\omega}\right)\nabla^2\phi_2 + 2\phi_3 + 6\left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right)\phi_4, \quad (3.76)$$

$$g_{0j} = -\frac{1}{2}\left(\frac{10+7\omega}{2+\omega}\right)V_j - \frac{1}{2}W_j, \quad (3.77)$$

$$g_{ij} = \left[1 + 2\left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right)U\right]\delta_{ij}. \quad (3.78)$$

Comparando as três componentes acima com as da métrica PPN geral (2.82)-(2.84), se obtém os seguintes valores para os parâmetros PPN

$$\gamma = \left(\frac{1+\omega}{2+\omega}\right), \quad \beta = 1 \quad (3.79)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4 = 0, \quad \xi = 0. \quad (3.80)$$

Com os valores dos parâmetros obtidos, conclui-se que a teoria de Brans-Dicke é conservativa, assim como a Relatividade Geral. Podemos, a partir de um valor para γ obtido através dos testes para o Sistema Solar, restringir o valor de ω utilizando (3.79). Como a Teoria de Brans-Dicke é equivalente à Relatividade Geral se $\omega \rightarrow \infty$, espera-se que esta restrição forneça um valor grande. Para os valores obtidos mais recentemente expostos na tabela 2.2 obtemos sempre $\omega > 10^4$, e na referência [29] é exposto o valor

$$\omega > 4 \times 10^4. \quad (3.81)$$

3.3 RGGR

Efeitos quânticos na gravidade têm sido estudados por um longo tempo dentro de abordagens diversas. Uma vez que a Relatividade Geral é uma teoria perturbativamente não-renormalizável, é comum considerá-la uma teoria efetiva de baixa

energia, portanto, a energias suficientemente altas (ou pequenas distâncias), deve produzir previsões erradas e, portanto, deve ser modificada (por exemplo, [12, 48]).

Um tipo particular de correção quântica, e suas consequências fenomenológicas, vem atraindo um interesse considerável atualmente, a saber, o dos fluxos não triviais do Grupo de Renormalização (GR). Estas correções podem ser relevantes tanto na gravidade quântica quanto na Teoria Quântica de Campos (QFT) no espaço-tempo curvo (por exemplo, ref. [44]). O interesse sobre os fluxos de GR não triviais vem de duas frentes: uma de alta energia e outra de baixa energia. Considerando a primeira, a renormalizabilidade não perturbativa (com unitariedade) pode ser alcançada a partir do programa de segurança assintótica [26]). Considerando o caso de baixa energia, percebeu-se que não há razão para supor que as funções tanto do acoplamento gravitacional G como da constante cosmológica Λ devem rapidamente se aproximar de zero à medida que a escala de energia RG se torna pequena, assim como em eletrodinâmica quântica (QED) ou Cromodinâmica Quântica (QCD). Isso motivou a busca de descrições clássicas consistentes e fenomenológicas pertinentes e eficazes que levam em conta o funcionamento de G e Λ em sistemas que são "grandes" e geralmente considerados como totalmente clássicos. Podem citar-se muitos exemplos para a última categoria (por exemplo, [3, 18, 32, 45]). Alguns trabalhos consideram os efeitos de GR no nível de ação, que é o caso que será considerado aqui (por exemplo, [33, 37, 38, 45]).

As equações de campo e a fenomenologia derivadas da abordagem GR descrita acima dependem de uma certa escala que chamamos μ . Os valores de G e Λ dependem dessa escala (analogamente ao que acontece em experimentos de dispersão dentro de QED, onde a constante de estrutura fina efetiva muda seu valor dependendo de uma certa escala, que neste caso é dada pelos momentos das partículas de dispersão). Assim, qualquer proposta nesta linha deve abordar três questões: i) a relação entre G e μ ou, de forma equivalente, fornecer uma função Beta para G , ii) uma função Beta para Λ , iii) a relação entre μ e outras fisicamente relevantes Quantidades (isto é, um procedimento de definição de escala [2]).

Na referência [36], argumenta-se a favor da seguinte ação capaz de incluir os efeitos de grande escala do Grupo de Renormalização para a gravidade

$$S_{RGGR} = \int \left[\frac{R - 2\Lambda\{\mu\}}{16\pi G(\mu)} + \lambda(\mu - f(g, \gamma, \Psi)) \right] \sqrt{-g} d^4x + S_m, \quad (3.82)$$

para descrever os efeitos de Grupo de Renormalização em grande escala na gravidade. Na expressão acima $S_{RGGR} = S_{RGGR}[g, \gamma, \mu, \lambda, \Psi]$ e $S_m = S[g, \Psi]$ sendo que Ψ

representa os campos de matéria somente, e μ é a configuração de escala do Grupo de Renormalização que se relaciona com os demais campos na forma imposta pelo multiplicador de Lagrange λ . Além disso, o campo γ representa $\gamma_{\alpha\beta}$, e pode ser visto como uma métrica de fundo. O escalar $G(\mu)$ é uma função de μ no sentido usual, é fixada no nível da ação e a esta é atribuída uma função beta na forma [36] $G^{-1}(\mu) = 1 + 2\nu \ln \mu$, sendo ν é uma constante pequena e adimensional. Diferentemente de G , o escalar $\Lambda\{\mu\}$ é dependente do sistema, não é determinada no nível da ação e a forma de sua dependência com μ é obtida a partir das equações de campo². Para o caso em que $\nu = 0$, RGGR corresponde à Relatividade Geral sendo este o único parâmetro da teoria. Assim, caso os fenômenos descritos por RGGR que vão além de Relatividade Geral sejam detectados, estes devem ter origem em GR.

O fato de não ser possível escrever a ação acima de forma que $S_{RGGR} = S[g, \tilde{\Psi}] + S_m[g, \Psi]$, em que $\tilde{\Psi}$ representa os campos de qualquer origem que não aparecem em S_m , faz com que não seja possível a conservação do tensor energia-momento na forma $\nabla_\alpha T^{\beta\alpha} = 0$. Entretanto, ainda em [36] é mostrado que, escrevendo a configuração de escala na forma

$$\mu = f(u^\alpha u^\beta h_{\alpha\beta}), \quad (3.83)$$

em que u^α é o campo de quadrivelocidade e $h_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}$, isto é possível, e explorado a seguir.

A relação (3.83) faz com que a variação da ação (3.82) com relação a $\gamma_{\alpha\beta}$ conduza à

$$\lambda f' u^\alpha u^\beta = 0, \quad (3.84)$$

assim $\lambda = 0$ ou $f' = 0$. Este último faz com que $f = \text{const.} = \mu$, o que leva a Relatividade Geral ($G = \text{const.}$). Portanto, a extensão devido ao GR contempla o caso em que $\lambda = 0$.

A variação de (3.82) com respeito a métrica, e utilizando $\lambda = 0$ no nível das equações de campo leva a

$$G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} G \square G^{-1} - G \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{-1} + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (3.85)$$

² Para evidenciar esta diferença a notação de dependência usada aqui foi introduzida em [36]

em que $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R$, e a partir da qual $\nabla_{\alpha}T^{\beta\alpha} = 0$ é possível desde que [36]

$$\nabla^{\alpha}\left(\frac{\Lambda}{G}\right) = \frac{1}{2}R\nabla^{\alpha}G^{-1}. \quad (3.86)$$

Podemos ainda tomar o traço da equação (3.85) reescrevê-la na forma

$$R_{\alpha\beta} = G\left[8\pi\left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) + \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}G^{-1} + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\square G^{-1}\right] - g_{\alpha\beta}\Lambda. \quad (3.87)$$

Trabalhos relacionados a aplicação de PPN a RGGR foram iniciados, e em [40] foi feita uma análise dos parâmetros utilizados na versão de Eddington-Robertson-Schiff para métrica PPN(ver equação (2.14)). Nesta referência foi utilizado um caso particular para μ na função $G^{-1}(\mu) = 1 + 2\nu \ln \mu$, tendo em conta os efeitos de um potencial externo para a construção de μ em uma forma não covariante.

Neste texto, assim como no trabalho ainda em desenvolvimento [20], será adotada a seguinte forma para G

$$G^{-1}(\mu) = 1 + 2\nu F(\mu) \quad (3.88)$$

sendo $F(\mu)$ uma função arbitrária. Nesta abordagem, vamos considerar também uma versão não covariante para μ em que este é uma função do potencial Newtoniano apenas. Além disso, como pode ser visto em [43] por exemplo, testes relacionados à constante cosmológica revelam que $\Lambda \sim 10^{-36}km^{-2}$ nas escalas do sistema solar e sistemas estelares, e como tal precisão é muito maior que a pós-Newtoniana, Λ será negligenciada aqui. Como já foi mencionado $U \sim v^2$, podemos então escrever

$$\mu \approx \mu_0 + \mu_1 U + \mu_2 U^2, \quad (3.89)$$

em que os μ_n são coeficientes da expansão em série de Taylor de μ . Isso nos leva à expansão

$$F(\mu) \approx F_0 + F_1 U + F_2 U^2, \quad (3.90)$$

e também

$$G \approx G_0 + G_1 U + G_2 U^2. \quad (3.91)$$

em que, utilizando (3.88), podemos facilmente determinar os coeficientes

$$G_0 = \frac{1}{1 + 2\nu F_0'}, \quad G_1 = \left. \frac{dG}{dU} \right|_{U=0} = -\frac{2\nu F_1}{(1 + 2\nu F_0)^2}, \quad (3.92)$$

e

$$G_2 = \left. \frac{d^2 G}{dU^2} \right|_{U=0} = \frac{4\nu}{(1 + 2\nu F_0)^2} \left(\frac{\nu F_1^2}{(1 + 2\nu F_0)} - F_2 \right). \quad (3.93)$$

Com a relação entre G e U estabelecida podemos, em passos semelhantes àqueles seguidos para os dois exemplos anteriores, obter as expressões para as componentes da métrica pós-Newtoniana para RGGR adotando μ na forma não covariante utilizando (3.88) e (3.90). Utilizando (3.88) juntamente com (3.90), temos que

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{-1} &= \partial_\alpha \partial_\beta G^{-1} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \partial_\lambda G^{-1} \\ &= 2\nu \left[F_1 \partial_\alpha \partial_\beta U + 2F_2 (\partial_\alpha U \partial_\beta U + U \partial_\alpha \partial_\beta U) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda (F_1 \partial_\lambda U + 2F_2 U \partial_\lambda U) \right]. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Nesta expressão a última parcela, $2\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda F_2 U \partial_\lambda U$, é pelo menos da ordem v^6 , e por isso será negligenciada. Portanto, a equação (3.87), sabendo que $\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$, fica

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta} &= (G_0 + G_1 U + G_2 U^2) \left\{ 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right) \right. \\ &\quad + 2\nu \left[F_1 \partial_\alpha \partial_\beta U + 2F_2 (\partial_\alpha U \partial_\beta U + U \partial_\alpha \partial_\beta U) - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda F_1 \partial_\lambda U \right] \\ &\quad \left. + \nu g_{\alpha\beta} g^{\sigma\lambda} \left[F_1 \partial_\sigma \partial_\lambda U + 2F_2 (\partial_\sigma U \partial_\lambda U + U \partial_\sigma \partial_\lambda U) - \Gamma_{\sigma\lambda}^\delta F_1 \partial_\delta U \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Por outro lado, podemos fixar as condições de calibre

$$\partial_\alpha h_i^\alpha - \frac{1}{2} \partial_i h_\alpha^\alpha = 2G_0 \nu F_1 \partial_i U, \quad (3.96)$$

$$\partial_\alpha h_0^\alpha - \frac{1}{2} \partial_0 h_\alpha^\alpha = -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00} + 3G_0 \nu F_1 \partial_0 U, \quad (3.97)$$

que como será visto, mantém a métrica PPN no calibre padrão, e as componentes do tensor de Ricci (3.5)-(3.7) se tornam

$$R_{00}^{(4)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}^{(4)} - \frac{1}{2} |\nabla h_{00}^{(2)}|^2 + \frac{1}{2} h^{ik(2)} \partial_i \partial_k h_{00}^{(2)} + 3G_0 \nu F_1 \partial_0 \partial_0 U + G_0 \nu F_1 \partial_i h_{00}^{(2)} \partial_i U, \quad (3.98)$$

$$R_{0j}^{(3)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4} \partial_j \partial_0 h_{00}^{(2)} + \frac{5}{2} G_0 \nu F_1 \partial_j \partial_0 U, \quad (3.99)$$

$$R_{ij}^{(2)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{ij}^{(2)} + 2G_0 \nu F_1 \partial_i \partial_j U. \quad (3.100)$$

Vamos agora ao cálculo das componentes $h_{\alpha\beta}$ da métrica. Analogamente aos casos anteriores, para calcular $h_{00}^{(2)}$ devemos tomar a equação de campo (3.95) na ordem necessária. Logo, de acordo com (3.95)

$$R_{00}^{(2)} = 8\pi G_0 \left(T_{00}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{00} T^{(2)} \right) + G_0 \nu F_1 \eta_{00} \eta^{kl} \partial_k \partial_l U, \quad (3.101)$$

e como $T^{(2)} = -T_{00}^{(2)} = -\rho$, e $\eta^{ij} = \delta^{ij}$, temos

$$R_{00}^{(2)} = 4\pi G_0 \rho - G_0 \nu F_1 \nabla^2 U. \quad (3.102)$$

Por outro lado, da relação (3.98) obtemos $R_{00}^{(2)} = -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}^{(2)}$, e com isso

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}^{(2)} = 4\pi G_0 \rho - G_0 \nu F_1 \nabla^2 U. \quad (3.103)$$

Como $8\pi \rho = -\nabla^2 U$ temos

$$h_{00}^{(2)} = 2G_0(1 + \nu F_1)U, \quad (3.104)$$

e com o intuito de manter o limite Newtoniano padrão, escolhemos

$$G_0(1 + \nu F_1) = 1 \quad \implies \quad h_{00}^{(2)} = 2U. \quad (3.105)$$

Para calcular a componente $h_{ij}^{(2)}$ escrevemos as equações de campo para $R_{ij}^{(2)}$, e a partir de (3.95) obtemos

$$R_{ij}^{(2)} = 8\pi G_0 \left(T_{ij}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{ij} T^{(2)} \right) + 2\nu F_1 G_0 \partial_i \partial_j U + \nu F_1 G_0 \eta_{ij} \eta^{kl} \partial_k \partial_l U \quad (3.106)$$

tendo em conta que $T_{ij}^{(2)} = 0$ e utilizando a componente do tensor de Ricci (3.100) a relação acima se torna

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{ij}^{(2)} &= 4\pi G_0 \rho \delta_{ij} + \nu G_0 F_1 \nabla^2 U \delta_{ij} \\ h_{ij}^{(2)} &= 2G_0(1 - \nu F_1)U \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Com o valor de $G_0 = 1/(1 + \nu F_1)$ fixado em (3.105), pode-se escrever

$$h_{ij}^{(2)} = 2 \left(\frac{1 - \nu F_1}{1 + \nu F_1} \right) U \delta_{ij} \quad (3.108)$$

Escrevendo $R_{0j}^{(3)}$ podemos calcular a componente da métrica $h_{0j}^{(3)}$. Para esta ordem, equação de campo (3.95) fica

$$R_{0j}^{(3)} = 8\pi G_0 T_{0j}^{(3)} + 2\nu G_0 F_1 \partial_0 \partial_j U, \quad (3.109)$$

utilizando a relação (3.99), e tendo em conta que $T_{0j}^{(3)} = -\rho v_j$ obtido no capítulo 3, a equação acima fica

$$-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{0j}^{(3)} - \frac{1}{4}\partial_j \partial_0 h_{00}^{(2)} + \frac{5}{2}G_0 \nu F_1 \partial_j \partial_0 U = -8\pi G_0 \rho v_j + 2\nu G_0 F_1 \partial_0 \partial_j U \quad (3.110)$$

reagrupando os termos semelhantes

$$\nabla^2 h_{0j}^{(3)} = 16\pi G_0 \rho v_j - \frac{1}{2}\partial_0 \partial_j h_{00}^{(2)} + \nu G_0 F_1 \partial_0 \partial_j U. \quad (3.111)$$

Fazendo uso das relações em (3.105), juntamente com $\nabla^2 V_j = -4\pi \rho v_j$ definido em (2.52), obtemos

$$\nabla^2 h_{0j}^{(3)} = -\frac{4}{1 + \nu F_1} \nabla^2 V_j - \frac{1}{1 + \nu F_1} \partial_0 \partial_j U, \quad (3.112)$$

sabendo que $\partial_0 \partial_j U = -\frac{1}{2}\nabla^2 (V_j - W_j)$, a relação acima fornece

$$h_{0j}^{(3)} = -\frac{7}{2(1 + \nu F_1)} V_j - \frac{1}{2(1 + \nu F_1)} W_j. \quad (3.113)$$

Vamos agora ao cálculo de $h_{00}^{(4)}$. A partir da equação de campo (3.95), para ordem necessária, temos

$$\begin{aligned} R_{00}^{(4)} &= 8\pi G_0 \left(T_{00}^{(4)} - \frac{1}{2} \eta_{00}^{(4)} T - \frac{1}{2} h_{00}^{(2)} T \right) + 8\pi G_1 U \left(T_{00}^{(2)} - \frac{1}{2} \eta_{00}^{(2)} T \right) \\ &\quad + 2\nu G_0 F_1 \left(\partial_0 \partial_0 U - \Gamma_{00}^i \partial_i U \right) + \nu G_0 \eta_{00} \left[\eta^{00} (F_1 \partial_0 \partial_0 U - F_1 \Gamma_{00}^i \partial_i U) \right. \\ &\quad \left. + \eta^{ij} (F_1 \partial_i \partial_j U + 2F_2 (\partial_i U \partial_j U + U \partial_i \partial_j U) - F_1 \Gamma_{ij}^k \partial_k U) \right. \\ &\quad \left. - h^{ij} F_1 \partial_i \partial_j U \right] + h_{00}^{(2)} \eta^{ij} F_1 \partial_i \partial_j U + \nu G_1 U \eta_{00} \eta^{ij} F_1 \partial_i \partial_j U. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Na expressão acima serão utilizadas as relações pertinentes para as componentes do tensor energia-momento obtidas no capítulo 2, que são

$$T_{00}^{(4)} = \rho + \rho\Pi - h_{00}^{(2)} + v^2, \quad (3.115)$$

$$T^{(4)} = -\rho - \rho\pi + 3p, \quad (3.116)$$

e também as relações conhecidas para T_{00} e T que podem ser deduzidas das expressões acima, juntamente com as componentes da conexão $\Gamma_{00}^{(2)}$ e $\Gamma_{ij}^{(2)}$ que, calculadas utilizando as componentes da métrica (3.105) e (3.108), são

$$\Gamma_{00}^{(2)} = -\frac{1}{2}\partial^i h_{00}^{(2)} = -\partial^i U \quad (3.117)$$

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = \left(\frac{1 - \nu F_1}{1 + \nu F_1}\right)(\delta_j^k \partial_i U + \delta_i^k \partial_j U - \delta_{ij} \partial^k U). \quad (3.118)$$

O primeiro conjunto de termos entre parênteses no lado direito da igualdade em (3.114) já foi utilizado nos exemplos de Relatividade Geral e Brans-Dicke, e é

$$T_{00}^{(4)} - \frac{1}{2}\eta_{00}\Gamma^{(4)} - \frac{1}{2}h_{00}^{(2)}T^{(2)} = \frac{1}{2}(\rho + \rho\Pi - 2\rho U + 3p + 2\rho v^2), \quad (3.119)$$

do mesmo modo

$$T_{00}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{00}\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\rho. \quad (3.120)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \eta^{ij}\Gamma_{ij}^{(2)}\partial_k U &= \left(\frac{1 - \nu F_1}{1 + \nu F_1}\right)\eta^{ij}(\delta_j^k \partial_i U + \delta_i^k \partial_j U - \delta_{ij} \partial^k U)\partial_k U \\ &= -\left(\frac{1 - \nu F_1}{1 + \nu F_1}\right)|\nabla U|^2. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Levando a relação acima, juntamente com (3.119) e (3.120), em (3.114) e tendo em conta que $\eta^{ij}\partial_i\partial_j \equiv \nabla^2$ se obtém

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{R}_{00} &= 4\pi G_0(\rho + \rho\Pi - 2\rho U + 3p + 2\rho v^2) + 4\pi G_1 U\rho + 3G_0\nu F_1\partial_0\partial_0 U \\
&\quad + 3G_0\nu F_1|\nabla U|^2 - G_0\nu F_1\nabla^2 U - 2G_0\nu F_2(|\nabla U|^2 + U\nabla^2 U) \\
&\quad - G_0^2\nu F_1(1 - \nu F_1)|\nabla U|^2 + \left(4G_0^2\nu F_1 - G_1\nu F_1\right)U\nabla^2 U,
\end{aligned} \tag{3.122}$$

utilizando os potenciais pós Newtonianos definidos na seção 2.4, a relação $2|\nabla U|^2 = \nabla^2 U^2 - 2U\nabla^2 U$ e também $U\nabla^2 U = -4\pi\rho U = \nabla^2\phi^2$, a expressão acima fica

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{R}_{00} &= -G_0(1 + \nu F_1)\nabla^2 U + \left[G_0^2\nu F_1(1 + \nu F_1) - G_0\nu F_2\right]\nabla^2 U^2 - G_0\nabla^2\phi_1 \\
&\quad + \left[2G_0 + 2G_0^2\nu F_1 - 4G_0^2\nu^2 F_1^2 - G_1(1 + \nu F_1)\right]\nabla^2\Phi_2 - G_0\nabla^2\phi_3 - 3G_0\nabla^2\Phi_4 \\
&\quad + 3G_0\nu F_1\partial_0\partial_0 U.
\end{aligned} \tag{3.123}$$

Por outro lado, com as expressões para $h_{00}^{(2)}$ e $h_{ij}^{(2)}$, a componente do tensor de Ricci (3.98) fica

$$\overset{(4)}{R}_{00} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^{(4)} - G_0\nabla^2 U^2 + 2G_0^2(2 + \nu F_1 - \nu^2 F_1^2)\nabla^2\phi_2 + 3G_0\nu F_1\partial_0\partial_0 U \tag{3.124}$$

Igualando (3.123) e (3.124), um cálculo direto leva a

$$\begin{aligned}
\overset{(4)}{h}_{00} &= 2G_0(1 + \nu F_1)U - 2G_0^2(1 + 2\nu F_1 + 2\nu^2 F_1^2 - \nu F_2(1 + \nu F_1))U^2 + 4G_0\phi_1 \\
&\quad + \left[4G_0^2(1 - \nu F_1 + \nu F_1^2) + 2G_1(1 + \nu F_1)\right]\phi_2 + 2G_0\phi_3 + 6G_0\phi_4.
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Podemos reunir os resultados obtidos nesta seção e escrever as componentes da métrica PPN para RGGR. Como $G_0(1 + \nu F_1) = 1$, temos

$$g_{00} = -1 + 2U - 2 \left[1 + \frac{\nu^2 F_1^2 - \nu F_2(1 + \nu F_1)}{(1 + \nu F_1)^2} \right] U^2 + \frac{4}{1 + \nu F_1} \phi_1 + \left[\frac{4(1 - \nu F_1 + \nu^2 F_1^2)}{(1 + \nu F_1)^2} - \frac{4\nu F_1}{1 + \nu F_1} \right] \phi_2 + \frac{2}{1 + \nu F_1} \phi_3 + \frac{6}{1 + \nu F_1} \phi_4 \quad (3.126)$$

$$g_{0j} = -\frac{1}{1 + \nu F_1} \left(\frac{7}{2} V_j + \frac{1}{2} W_j \right) \quad (3.127)$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \left[1 - \frac{2\nu F_1}{1 + \nu F_1} \right] U \delta_{ij} \quad (3.128)$$

Como mencionado no início da seção, a constante ν é pequena, mas não foi estipulada a sua ordem de “pequenez”, pois, assim como a constante de acoplamento na teoria de Brans-Dicke, esta não é uma quantidade dinamicamente dependente do sistema e por isso foram mantidas todas as potências. Os parâmetros PPN podem auxiliar a impor um limite para ν que, além de auxiliar a simplificar a métrica acima, assegura a viabilidade de RGGR em relação a testes no sistema solar.

Comparando as componentes da métrica obtida aqui com as da métrica PPN geral (2.82)-(2.84), vemos que os parâmetros γ e β podem ser obtidos diretamente. Por simplicidade podemos utilizar γ para impor um limite superior à νF_1 utilizando o valor correspondente da Tabela 2.3, pois

$$|\gamma - 1| \lesssim 2,3 \times 10^{-5} \quad \implies \quad \nu F_1 \lesssim 10^{-5}, \quad (3.129)$$

e para νF_2 , podemos utilizar $\beta - 1$, em que encontramos

$$\nu F_2 \lesssim 10^{-4}. \quad (3.130)$$

Apesar de ν ser pequeno, F_1 e F_2 podem ser grandes, o que será discutido a seguir. A partir dos limites discutidos acima podemos simplificar as expressões (3.126)-(3.128) tomando $\nu F_1 \ll 1$ e $\nu F_2 \ll 1$ e obter

$$g_{00} = -1 + 2U - 2(1 - \nu F_2)U^2 + 4(1 - \nu F_1)\phi_1 + 4(1 - 4\nu F_1)\phi_2 + 2(1 - \nu F_1)\Phi_3 + 6(1 - \nu F_1)\phi_4, \quad (3.131)$$

$$g_{0j} = -\frac{1 - \nu F_1}{2}(7V_j + W_j), \quad (3.132)$$

$$g_{ij} = [1 + 2(1 - 2\nu F_1)U]\delta_{ij}. \quad (3.133)$$

Comparando as componentes acima com (2.82)-(2.84) obtemos

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 - 2\nu F_1, & \beta &= 1 - 2\nu F_2, & \xi &= 0, \\ \alpha_1 &= \alpha_3 = 0, & \alpha_2 &= -\nu F_1, \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = -2\nu(F_1 + F_2), \quad \zeta_3 = -\zeta_4 = -\nu F_1.$$

É importante notar que, de acordo com os parâmetros acima, se $\nu = 0$ RGGR é equivalente a Relatividade Geral, como era de se esperar. Além disso, algumas explicações podem ser feitas a partir dos valores dos parâmetros. Como foi discutido na seção 2.5 do capítulo 2, os parâmetros α_i estão relacionados a efeitos de referenciais preferenciais na teoria, e o formalismo PPN é capaz de identificá-los caso estes não sejam nulos. Sendo assim, não é estranho que $\alpha_2 \neq 0$, pois foi considerado uma formulação não covariante para a configuração de escala μ . Os parâmetros $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ e α_3 dão indicações a respeito da conservação do momento total, cuja conservação é violada se algum destes não for nulo, e aqui obtemos ζ_2, ζ_3 e ζ_4 não nulos. A razão para isto, deve estar no fato de negligenciarmos os efeitos da “constante” cosmológica, o que leva a uma não-conservação do tensor energia-momento.

Dos parâmetros não nulos o que implica na restrição mais “forte”, como pode ser visto na Tabela 2.3, é $\alpha_2 \lesssim 10^{-9}$. Logo, se F_1 e F_2 forem da ordem da unidade isso implica em $\nu \lesssim 10^{-9}$.

Como mencionado, na referência [40], foi estudada a formulação PPN de dois parâmetros de Eddington-Robertson-Schiff para RGGR, com partículas pontuais como fonte e levando em consideração efeitos do potencial gerado pela galáxia no Sistema Solar Φ_0 . Foi obtido para os parâmetros PPN

$$\gamma = 1 - \frac{2\nu\alpha}{\Phi_0}, \quad \beta = 1 + \frac{\nu\alpha}{\Phi_0^2} \quad (3.135)$$

em que α é um parâmetro do modelo e $\Phi_0 \sim 10^{-6}$ fornecendo, a partir do valor de β o resultado $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$, sendo $\bar{\nu} = \alpha\nu$. O resultado da referência pode ser reproduzido para valores específicos de F_1 e F_2 , a saber $F_1 = \alpha/\Phi_0$ e $F_2 = -\alpha/2\phi_0^2$ e o modelo contínuo de fluido perfeito analisado aqui fornece, para ζ_2 , o valor para $\bar{\nu} \lesssim 10^{-17}$.

Conclusões

Neste trabalho foi feita uma apresentação do formalismo pós-Newtoniano parametrizado abrangendo alguns dos mecanismos teóricos que possibilitam obter valores para dois dos parâmetros PPN a partir de dados observacionais. Foi feita a parametrização de acordo com o formalismo de três teorias, Relatividade Geral, Teoria de Brans-Dicke e RGGR.

O formalismo PPN fornece uma receita de como uma teoria métrica deve ser analisada, extraindo informações através da interpretação dos parâmetros e permitindo a obtenção de valores que podem ser comparados com aqueles obtidos através de dados observacionais. A Relatividade Geral, quando proposta, causou um grande impacto prevendo fenômenos nunca imaginados ou explicados, como a deflexão da luz e a contribuição relativística para precessão de periélios. Além disso, como visto na seção 3.1 do capítulo 4, ela prevê bem esses fenômenos, concordando satisfatoriamente com os dados experimentais. Qualquer teoria alternativa da gravitação deve, então, ser rigorosamente comparada à Relatividade Geral nas áreas em que essa obtém sucesso.

Assim como a apresentação do formalismo e os aspectos citados, uma parte importante para este trabalho é a análise feita para RGGR. A contribuição deste trabalho está relacionada à consistência da teoria, já que para ser no mínimo viável, ela deve ter como limites em casos específicos a Relatividade Geral e a mecânica newtoniana, concordando com dados experimentais com os quais esses dois ramos da Física se saem muito bem.

Os cálculos da seção 3.3 conduzem aos resultados (3.134) que, como visto, são análogos aos valores para Relatividade Geral se $\nu = 0$. Os parâmetros α_2 , ζ_2 , ζ_3 e ζ_4 são diferentes de zero e isto ocorreu pois uma configuração de escala não covariante foi adotada, e além disso os efeitos de uma “constante” cosmológica foram negligenciados, o que, para RGGR, afeta a conservação do tensor energia-momento. Na referência [40], foi estudada a formulação PPN de dois parâmetros de Eddington-Robertson-Schiff para RGGR, com partículas pontuais como fonte e levando em consideração efeitos do potencial gerado pela galáxia no Sistema Solar, e

foi obtido $\bar{\nu} \lesssim 10^{-16}$, sendo $\bar{\nu} = \alpha\nu$ em que α é um parâmetro do modelo. O resultado da referência pode ser reproduzido na formulação apresentada aqui para valores específicos de F_1 e F_2 , e este fornece, para ζ_2 , que $\bar{\nu} \lesssim 10^{-17}$.

Uma continuação natural para este, e também o trabalho ainda em desenvolvimento [20], é analisar o formalismo PPN em RGGR para uma configuração de escala covariante de modo a obter informações mais completas a respeito dos parâmetros e analisar as restrições que estes impõem a ν nesta nova formulação.

Apêndice A

Solução das integrais relacionadas ao desvio do periélio

Para resolver a equação

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\omega} = & -\frac{1}{me} \left[-m \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi - \frac{3}{2} m R^2 J_2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi + m^2 (2\gamma + 2\beta) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} d\phi \right. \\ & - \gamma m \int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi + m(2\gamma + 2) \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \cos \phi d\phi \\ & + m\mu(2 + \alpha_1 - 2\zeta_2) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} d\phi - \frac{1}{2}(6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\mu \int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi \\ & \left. - \frac{1}{2}\mu(1 - 2\alpha_1 - \alpha_2) \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \cos \phi d\phi \right] \\ & + \frac{1}{e} \left[(2\gamma + 2) - \frac{\mu}{m}(2 - \alpha_1 + \alpha_2) \right] \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})(1 + r/p) \sin \phi d\phi, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

completamente, precisamos determinar os termos $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ e conseqüentemente v^2 . No sistema Sol-Mercúrio, podemos considerar que o centro de massa coincide com o centro do sol devido a grande massa do mesmo. Como a trajetória de Mercúrio tem a forma de uma elipse, do ponto de vista do centro de massa existem duas componentes para \mathbf{v} , uma radial $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}$ e outra na direção do movimento orbital $(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{z}}$, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{(1 + e \cos \phi)} \right), \\ &= \frac{e}{p} r^2 \sin \phi \frac{d\phi}{dt},\end{aligned}\tag{A.2}$$

e sabendo que

$$r^2 \frac{d\phi}{dt} = (mp)^{1/2}\tag{A.3}$$

então

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = e \left(\frac{m}{p} \right)^{1/2} \sin \phi.\tag{A.4}$$

A componente da velocidade relativa na direção do movimento orbital é

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{d\phi}{dt} r,\tag{A.5}$$

em que $d\phi/dt$ representa a velocidade angular de mercúrio em sua órbita. Utilizando novamente (A.3), podemos expressar a relação acima como

$$\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \frac{(mp)^{1/2}}{r}. \quad r = p(1 + e \cos \phi)^{-1}\tag{A.6}$$

Com isso, podemos expressar a velocidade relativa ao centro de massa como

$$\mathbf{v} = e \left(\frac{m}{p} \right)^{1/2} \sin \phi \hat{\mathbf{n}} + \frac{(mp)^{1/2}}{r} \hat{\mathbf{z}}, \quad r = p(1 + e \cos \phi)^{-1}\tag{A.7}$$

portanto

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = e^2 \frac{m}{p} \sin^2 \phi + \frac{mp}{r^2}. \quad r = p(1 + e \cos \phi)^{-1}\tag{A.8}$$

Vamos agora ao cálculo das integrais. A primeira integral em (A.1) é nula, e a seguir estão os cálculos das demais:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi &= \frac{1}{p^2} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \phi)^2 \cos \phi d\phi \\
&= \frac{2e}{p^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\
&= \frac{2e}{p^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi) d\phi \\
&= \frac{2\pi e}{p^2},
\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r} d\phi &= \frac{1}{p} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \phi) \cos \phi d\phi \\
&= \frac{e}{p} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \\
&= \frac{\pi e}{p},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \left(e^2 \frac{m}{p} \sin^2 \phi + \frac{mp}{r^2} \right) \cos \phi d\phi, \tag{A.11}$$

e como

$$\int_0^{2\pi} e^2 \frac{m}{p} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi = 0, \tag{A.12}$$

então

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} v^2 \cos \phi d\phi &= mp \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi}{r^2} d\phi \\
&= \frac{2\pi me}{p}.
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Temos ainda

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} e^2 \frac{m}{p} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi = 0 \tag{A.14}$$

e

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})(1 + r/p) \sin \phi d\phi = em \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{r}{p}\right) \frac{\sin^2 \phi}{r} d\phi, \quad (\text{A.15})$$

em que foi utilizado (A.4) e (A.6). separando as integrais acima temos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi}{r} d\phi = \frac{1}{p} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \phi) \sin^2 \phi d\phi \quad (\text{A.16})$$

e

$$\frac{1}{p} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi, \quad (\text{A.17})$$

portanto

$$\int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})(1 + r/p) \sin \phi d\phi = \frac{em}{p} \left[2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + e \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi \right]. \quad (\text{A.18})$$

A segunda integral no lado direito da expressão acima é nula, assim

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{z}})(1 + r/p) \sin \phi d\phi &= \frac{2em}{p} \int_0^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi \\ &= \frac{2\pi me}{p}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Levando (A.9),(A.10),(A.13),(A.14) e (A.19) em (A.1) se obtém

$$\begin{aligned} \Delta\omega &= -\frac{1}{me} \left[-\frac{3}{2}mR^2 J_2 \left(\frac{2\pi e}{p^2} \right) + m^2(2\gamma + 2\beta) \left(\frac{\pi e}{p} \right) - \gamma m \left(\frac{2\pi me}{p} \right) \right. \\ &\quad \left. + m\mu(2 + \alpha_1 - 2\zeta_2) \left(\frac{\pi e}{p} \right) - \frac{1}{2}(6 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \right] \\ &\quad + \frac{1}{e} \left[(2\gamma + 2) - \frac{\mu}{m}(2 - \alpha_1 + \alpha_2) \right] \frac{2\pi me}{p}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Agrupando os termos semelhantes, podemos escrever

$$\Delta\tilde{\omega} = \frac{6\pi m}{p} \left[\frac{1}{3}(2 + 2\gamma - \beta) + \frac{1}{6}(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + 2\zeta_2) \frac{\mu}{m} + \left(\frac{R^2}{2mp} \right) J_2 \right]. \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

Cálculo das componentes de $R_{\alpha\beta}$ expandidas

O tensor de Ricci é dado por

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\lambda \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\lambda}^\lambda + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \Gamma_{\lambda\gamma}^\gamma - \Gamma_{\alpha\lambda}^\gamma \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda \quad (\text{B.1})$$

e o simbolo de Christoffel

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\gamma} (\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta}), \quad (\text{B.2})$$

que devem ser calculados de acordo com a métrica $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ e levados em (B.1).

Seguem os cálculos para as componentes $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} (\eta^{0\alpha} - h^{0\alpha} + \dots) (\partial_0 h_{0\alpha} + \partial_0 h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_0 h_{00} + O(v^5) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^i &= \frac{1}{2} (\eta^{i\alpha} - h^{i\alpha} + \dots) (\partial_0 h_{0\alpha} + \partial_0 h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{00}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_0 h_0^i + \partial_0 h_0^i - \partial_i h_{00}) + \frac{1}{2} h^{ik} \partial_k h_{00} + O(v^5) \\ &= -\frac{1}{2} \partial^i h_{00} - \partial_0 h_0^i + \frac{1}{2} h^{ik} \partial_k h_{00} + O(v^5) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}(\eta^{0\alpha} - h^{0\alpha} + \dots)(\partial_0 h_{i\alpha} + \partial_i h_{\alpha 0} - \partial_\alpha h_{i0}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_0 h_{i0} + \partial_i h_{00} - \partial_0 h_{i0}) - \frac{1}{2}h^{00}\partial_i h_{00} + O(v^5) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} - \frac{1}{2}h^{00}\partial_i h_{00} + O(v^5)
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}(\eta^{i\alpha} - h^{i\alpha} + \dots)(\partial_0 h_{\alpha j} + \partial_j h_{0\alpha} - \partial_\alpha h_{0j}) \\
&= \frac{1}{2}\eta^{ik}(\partial_0 h_{kj} + \partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}) + O(v^5)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{kl}^j &= \frac{1}{2}(\eta^{j\alpha} - h^{j\alpha} + \dots)(\partial_k h_{l\alpha} + \partial_l h_{k\alpha} - \partial_\alpha h_{kl}) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_k h_l^j + \partial_l h_k^j - \partial^j k_{kl}) - \frac{1}{2}h^{jm}(\partial_k h_{lm} + \partial_l h_{km} - \partial_m h_{kl}) + O(v^6)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}(\eta^{0\alpha} - h^{0\alpha} + \dots)(\partial_i h_{j\alpha} + \partial_j h_{\alpha i} - \partial_\alpha h_{ij}) \\
&= -\frac{1}{2}(\partial_i h_{j0} + \partial_j h_{0i} - \partial_0 h_{ij}) + O(v^5)
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Com isso podemos calcular as componentes do tensor de Ricci. Ao efetuar a soma nos índices repetidos da expressão (B.1) alguns termos se cancelam, e serão exibidos os termos restantes, ou seja,

$$R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0i}^i + \Gamma_{00}^i \Gamma_{ij}^j - \Gamma_{0i}^0 \Gamma_{00}^i - \Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j, \tag{B.9}$$

e utilizando as componentes do símbolo de Christoffel calculada acima

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{1}{2}\partial_i \partial^i h_{00} + \partial_i \partial_0 h_0^i + \frac{1}{2}\partial_i h^{ik} \partial_k h_{00} + \frac{1}{2}h^{ik} \partial_i \partial_k h_{00} - \frac{1}{2}\partial_0 \partial_0 h_0^i \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial^i h_{00} \left(\frac{1}{2}\partial_i h_j^j \right) - \frac{1}{4}\partial^i h_{00} \partial_i h_{00} + O(v^6),
\end{aligned} \tag{B.10}$$

reorganizando a expressão acima, se obtém

$$\begin{aligned}
R_{00} = & -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} - \frac{1}{2}(\partial_0\partial_0 h_i^i - 2\partial_i\partial_0 h_0^i) + \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \left(\partial_k h^{ki} - \frac{1}{2}\partial^i h_k^k \right) - \frac{1}{4}|\nabla h_{00}|^2 \\
& + \frac{1}{2}h^{ik}\partial_i\partial_k h_{00} + O(v^6)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

A menor ordem para as componentes $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ calculadas acima é $O(v^2)$, portanto, para R_{ij} é suficiente escrever

$$R_{ij} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{i0}^0 - \partial_j \Gamma_{ik}^k + O(v^4). \tag{B.12}$$

Utilizando as componentes adequadas da conexão métrica

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\partial_k(\partial_i h_j^k + \partial_j h_i^k - \partial^k h_{ij}) - \partial_j \left(-\frac{1}{2}\partial_i h_{00} \right) - \frac{1}{2}\partial_j(\partial_i h_k^k + \partial_k h_i^k - \partial^k h_{ik}) + O(v^4). \tag{B.13}$$

O segundo termo e o penúltimo são iguais (ou os dois últimos), portanto se cancelam, e reorganizando a expressão acima

$$R_{ij} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{ij} - \partial_i\partial_j h_{00} + \partial_i\partial_j h_k^k - \partial_k\partial_i h_j^k - \partial_j\partial^k h_{ik}) + O(v^4). \tag{B.14}$$

Para R_{0j} temos

$$\begin{aligned}
R_{0j} &= \partial_0 \Gamma_{0j}^0 + \partial_i \Gamma_{0j}^i - \partial_j \Gamma_{00}^0 - \partial_j \Gamma_{0i}^i + O(5) \\
&= -\frac{1}{2}\partial_0\partial_j h_{00} + \frac{1}{2}\partial_i(\partial_0 h_j^i + \partial_i\partial_j h_0^i - \partial^i h_{0j}) + \frac{1}{2}\partial_j\partial_0 h_{00} - \frac{1}{2}\partial_j\partial_0 h_i^i + O(5),
\end{aligned} \tag{B.15}$$

que simplificando fica

$$R_{0j} = -\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{0j} - \partial_i\partial_j h_0^i + \partial_j\partial_0 h_i^i - \partial_i\partial_0 h_j^i) + O(v^5) \tag{B.16}$$

Referências Bibliográficas

- [1] C. W. Allen. *Astrophysical Quantities*. University Of London The Athlone Press, 1976.
- [2] A. Babic, B. Guberina, R. Horvat, and H. Stefancic. Renormalization-group running cosmologies. A Scale-setting procedure. *Phys.Rev.*, D71:124041, 2005.
- [3] O. Bertolami, J. M. Mourao, and J. Perez-Mercader. Quantum gravity and the large scale structure of the universe. *Phys. Lett.*, B311:27–33, 1993.
- [4] E. Bianchi and C. Rovelli. Why all these prejudices against a constant? 2010.
- [5] C. Brans and R. H. Dicke. Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935, Nov 1961.
- [6] C. H. Brans. Mach’s Principle and the Locally Measured Gravitational Constant in General Relativity. *Phys. Rev.*, 125(1):388, 1962.
- [7] S. M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.
- [8] W. E. Carter, D. S. Robertson, and J. R. MacKay. Geodetic Radio Interferometric Surveying: Applications and Results. *Journal of Geophysical Research*, 90:4577–4587, 1985.
- [9] S. Chandrasekhar and G. Contopoulos. On a Post-Galilean Transformation Appropriate to the Post-Newtonian Theory of Einstein, Infeld and Hoffmann. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 298:123–141, Apr. 1967.
- [10] C. C. Counselman, S. M. Kent, C. A. Knight, I. I. Shapiro, T. A. Clark, H. F. Hinteregger, A. E. E. Rogers, and A. R. Whitney. Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Measured by Very-Long-Baseline Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 33:1621–1623, 1974.
- [11] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, 5^a edition, 2015.

- [12] J. F. Donoghue. Leading quantum correction to the Newtonian potential. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2996–2999, 1994.
- [13] A. A. Eddington. *The mathematical theory of relativity*. 1922.
- [14] T. M. Eubanks, J. O. Martin, B. A. Archinal, F. J. Josties, S. A. Klioner, S. Shapiro, and I. I. Shapiro. Advances in Solar System Tests of Gravity. *American Physical Society, APS/AAPT Joint Meeting*, pages 18–21, Apr. 1997.
- [15] V. Faraoni and S. Capozziello. *Beyond Einstein Gravity*, volume 170. Springer, Dordrecht, 2011.
- [16] E. B. Fomalont and R. A. Sramek. A confirmation of Einstein’s general theory of relativity by measuring the bending of microwave radiation in the gravitational field of the Sun. *The Astronomical Journal*, 199:749–755, 1975.
- [17] M. Froeschlé, F. Mignard, and F. Arenou. Determination of the PPN parameter gamma with the Hipparcos data. *Proceedings of the ESA Symposium Hipparcos Venice Symposium*, pages 49–52, July 1997.
- [18] J. T. Goldman, J. Perez-Mercader, F. Cooper, and M. M. Nieto. The Dark matter problem and quantum gravity. *Phys. Lett.*, B281:219–224, 1992.
- [19] R. Heinkelmann and H. Schuh. Very long baseline interferometry: accuracy limits and relativistic tests. *Relativity in Fundamental Astronomy: Dynamics, Reference Frames, and Data Analysis, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium*, 261:286–290, 2010.
- [20] J.D.Toniato, A. de Almeida, N. Bertini, and D.C.Rodrigues. The parametrized post-Newtonian formalism applied to renormalization group extended general relativity. *trabalho em andamento*.
- [21] O. Lahav. 100 years of the Cosmological Constant: what’s next? 2017.
- [22] L.D.Landau and E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Univesity of Minnesota: Traduzida do russo por Morton Hamermesh, 1975.
- [23] D. E. Lebach, B. E. Corey, T. A. Herring, I. I. Shapiro, M. I. Ratner, J. C. Webber, A. E. E. Rogers, and J. L. Davis. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometry. *Physical Review Letters*, 75:1439–1442, 1995.
- [24] D. L. Lee, A. P. Lightman, and W. T. Ni. Conservation laws and variational principles in metric theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 10:1685–1700, Sep 1974.

- [25] P. Merat, J. C. Pecker, J. P. Vigier, and W. Yourgrau. Observed Deflation of Light by the Sun as a Function of Solar Distance. *Astronomy and Astrophysics, Vol. 32*, p. 471, Mar. 1974.
- [26] M. Niedermaier and M. Reuter. The Asymptotic Safety Scenario in Quantum Gravity. *Living Rev. Rel.*, 9:5, 2006.
- [27] K. Nordtvedt. Equivalence Principle for Massive Bodies. II. Theory. *Phys. Rev.*, 169:1017–1025, May 1968.
- [28] K. Nordtvedt. Equivalence Principle for Massive Bodies Including Rotational Energy and Radiation Pressure. *Phys. Rev.*, 180:1293–1298, Apr 1969.
- [29] L. Perivolaropoulos. PPN Parameter γ and Solar System Constraints of Massive Brans-Dicke Theories. *Phys. Rev.*, D81:047501, 2010.
- [30] H. Pollard. *Celestial Mechanics*. The Mathematical Association of America, 1976.
- [31] M. Redouane, T. Abdelatif, A. Irbah, J. Provost, and G. Berthomieu. New values of gravitational moments J_2 and J_4 deduced from helioseismology. *Solar Phys*, Nov 2009.
- [32] M. Reuter and C. Wetterich. Time Evolution of the Cosmological 'Constant'. *Phys. Lett.*, B188:38–43, 1987.
- [33] M. Reuter and H. Weyer. Renormalization group improved gravitational actions: A Brans-Dicke approach. *Phys. Rev.*, D69:104022, 2004.
- [34] D. S. Robertson, W. E. Carter, and W. H. Dillinger. New measurement of the solar gravitational deflection of radio signals using VLBI. *Nature*, 349:768–770, 1992.
- [35] H. P. Robertson. Relativity and Cosmology, em Space age astronomy, ed. A.J. Deutsch and W. B. Klemperer. ., pages 228–235, 1962.
- [36] D. C. Rodrigues, B. Chauvineau, and O. F. Piattella. Scalar-Tensor gravity with system-dependent potential and its relation with Renormalization Group extended General Relativity. *JCAP*, 2015.
- [37] D. C. Rodrigues, P. L. de Oliveira, J. C. Fabris, and G. Gentile. Modified gravity models and the central cusp of dark matter haloes in galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 445(4):3823–3838, 2014.

- [38] D. C. Rodrigues, P. S. Letelier, and I. L. Shapiro. Galaxy rotation curves from General Relativity with Renormalization Group corrections. *JCAP*, 1004:020, 2010.
- [39] D. C. Rodrigues, P. S. Letelier, and I. L. Shapiro. Galaxy Rotation Curves from General Relativity with Infrared Renormalization Group Effects. *Proceedings of the International Conference on Two Cosmological Models, ed.: Plaza y Valdés, S.A. de C.V.*, pages 151–159, 2011.
- [40] D. C. Rodrigues, S. Mauro, and Á. O. F. de Almeida. Solar System constraints on Renormalization Group extended General Relativity: The PPN and Laplace-Runge-Lenz analyses with the external potential effect. *Phys. Rev.*, D94(8):084036, 2016.
- [41] L. I. Schiff. Comparison of theory and observation in general relativity. In *Relativity Theory and Astrophysics. I. Relativity and Cosmology*, ed. J. Ehlers, American Mathematical Society, Providence. , 1967.
- [42] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1916:189–196, 1916.
- [43] M. Sereno and P. Jetzer. Solar and stellar system tests of the cosmological constant. *Phys. Rev.*, D73:063004, 2006.
- [44] I. L. Shapiro. Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach. *Class.Quant.Grav.*, 25:103001, 2008.
- [45] I. L. Shapiro, J. Solà, and H. Stefancic. Running G and Lambda at low energies from physics at M(X): Possible cosmological and astrophysical implications. *JCAP*, 0501:012, 2005.
- [46] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979–1999. *Phys. Rev. Lett.*, 92:121101, Mar 2004.
- [47] J. Sola. Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas. *J. Phys. Conf. Ser.*, 453:012015, 2013.
- [48] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D16:953–969, 1977.

- [49] T. M. E. Team. Gravitational deflection of-light: solar eclipse of 30 June 1973 I. Description of procedures and final results. *Astronomical Journal*, 81, June 1976.
- [50] H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens, and W. Zimdahl. Aspects of the cosmological “coincidence problem”. *Eur. Phys. J.*, C74(11):3160, 2014.
- [51] R. M. Wald. *General Relativity*. University Of Chicago Press, 1984.
- [52] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., July 1972.
- [53] S. Weinberg. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, 1989.
- [54] C. Will. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 1993.
- [55] C. M. Will. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity II: Parametrized post-newtonian hydrodynamics and the Nordtvedt effect. *Astrophys.J.*, 1971.
- [56] C. M. Will. Theoretical frameworks for testing relativistic gravity III. Conservation Laws, Lorentz Invariance, And Values of the PPN Parameters. *Astrophys.J.*, 1971.
- [57] C. M. Will. Relativistic Gravity in the Solar System III: Experimental Disproof of a Class of Linear Theories of Gravitation. *Astrophys. J.*, 185:31–42, 1973.
- [58] C. M. Will. The Confrontation between General Relativity and Experiment. *Living Rev. Rel.*, 17:4, 2014.
- [59] L. Witten. *Gravitation: an Introduction to Current Research*. John Wiley & Sons, Jan. 1962.