

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Física

Tese de Doutorado em Física

**Cosmologia quântica em teorias
escalares-tensoriais: aspectos físicos e
matemáticos**

Carla Rodrigues Almeida

2017

Universidade Federal do Espírito Santo
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Física

**Cosmologia quântica em teorias
escalares-tensoriais: aspectos físicos e
matemáticos**

Carla Rodrigues Almeida

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Física (PPGFis) da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção do grau de Doutora em Física.
Orientador: Júlio César Fabris

Setembro/2017

Aos meus irmãos

Com grandes poderes vêm grandes responsabilidades.
Tio Ben (Stan Lee)

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Prof. Júlio, pela maravilhosa orientação e valiosas discussões, por acreditar em mim e ter paciência quando a física me deixava confusa. Lembro dos primeiros meses, depois de cada seminário e cada Journal Club, quando ele me perguntava se eu tinha entendido algo. Diante das minhas respostas negativas, ele me encorajava a continuar, dizendo que eu iria eventualmente entender, até que finalmente um dia eu consegui e ele comemorou comigo. Obrigada, Júlio, por este trabalho que é metade seu!

Gostaria de agradecer aos professores Antônio B. Batista, Davi C. Rodrigues, José Alexandre Nogueira, Santiago Perez-Bergliaffa, Nelson Pinto Neto e Oliver F. Piattella, por aceitarem participar da minha banca examinadora. Também devo muitos agradecimentos às várias pessoas que ao longo desses anos colaboraram comigo e/ou acreditaram em mim de alguma forma: Prof. Brasil, Prof. Paulo Moniz, Prof. Nelson, Prof. Gazeau, Prof. Hervé Bergeron, meus amigos Arthur Scardua, Fúlvio Sbisá, Yaser Tavakoli, Prof. Dito e Prof. Jean Einsenstaed, por todo suporte que me deram e oportunidades que abriram para mim. As figuras e gráficos desta tese eu devo ao meu irmão Júnior, ao Arthur, ao Rodrigo vom Marttens e ao Prof. Hervé Bergeron. Muito obrigada por elas!

Às pessoas incríveis que dividiram uma casa, muitas dificuldades e suas amizades comigo: Gabriela, Paula (minhas queridas amigas improváveis) e Tays (minha querida amiga mais que provável). Não fazem ideia do quanto eu agradeço pelos bons e maus momentos, por serem tudo que eu precisava, quando eu precisei. Obrigada!

Um agradecimento especial aos meus irmãos de pai/orientador, que formaram comigo uma família unida, que davam suporte uns aos outros, sempre que possível: Denis, Edison, Olesya e Adriano M. Além disso, gostaria de agradecer todo o grupo de Cosmologia da UFES e a meus outros amigos e companheiros de RU e Hebe: Felipe, Sara, Michael, Álefe, Pedro, Eddy, David, William, Mariniel, Rodrigo, Vinícius, Mário, Cássio, Alan, Ingrid, Isaac, Nicolás, Raquel F, Emmanuel, Johnny, Leonardo, Thiago, Fábio e Badke. Gostaria de agradecer também aos meus amigos de longe, cuja a convivência virtual praticamente diária é inestimável: Adriano O, Beto, Bruno, Carla, Geraldo, Lilian, Marcelo, Raquel A e Ricardo.

Agradeço aos professores que me deram aula no doutorado, que são as pessoas res-

ponsáveis por eu ter aprendido física: Prof. Brasil, Prof. José Alexandre, Prof. Oliver, Prof. Davi, Prof. Jorge e Prof. Júlio, muito obrigada! Agradeço ao secretário do PPG-Fis, José Carlos, por me ajudar com a parte burocrática disso tudo e pelas divertidas conversas no corredor. Um agradecimento especial à Renata, a psicóloga da UFES, que tem me ajudado neste último ano. Também agradeço a CAPES pelo financiamento do meu doutorado.

Por fim, não poderia deixar de agradecer à minha família, por todo carinho e suporte nestes tempos: mãe, pai, irmãos, cunhadas e avós. Mãe e pai, vocês são os responsáveis por isso tudo. Júnior e Alexandre, esse trabalho é para vocês. Tchopas.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os aspectos físicos e matemáticos da quantização canônica de teorias escalares-tensoriais, em particular da Teoria de Brans-Dicke, usando um fluido perfeito como componente de matéria do universo, introduzido via formalismo de Schutz. Fazemos um estudo completo do caráter autoadjunto do operador de energia efetivo proveniente da quantização desta teoria. Tal quantização é feita através do vínculo de energia obtido da descrição Hamiltoniana da Relatividade Geral, a equação de Wheeler-DeWitt, de onde recuperamos uma equação do tipo Schrödinger, considerando o parâmetro temporal dado pelo fluido que compõe o universo. Também apresentamos o caso da quantização da Teoria de K -essência para um limite particular, onde recuperamos um comportamento de um fluido perfeito em Relatividade Geral via Schutz. Introduzimos também a noção de quantização afim como alternativa ao método canônico e apresentamos os conceitos matemáticos nos quais ele é baseado, aplicando o método num exemplo cosmológico de um universo dominado por poeira. Também fazemos uma análise semiclássica qualitativa da Teoria de Brans-Dicke.

Palavras Chave: *cosmologia quântica, teorias escalares-tensoriais, Brans-Dicke, quantização afim, operadores autoadjuntos, extensões autoadjuntas.*

Abstract

The proposal of this work is to study the mathematical and physical aspects of the canonical quantization of scalar-tensor theories, Brans-Dicke Theory in particular, using a perfect fluid as the universe's matter component, inserted by Schutz's formalism. We do a thorough analysis of the self-adjointness of the effective energy operator obtained in the quantization of theory. Such quantization is made through the Wheeler-DeWitt equation, the energy constraint from the Hamiltonian description of General Relativity, to obtain a Schrödinger-like equation, taking the temporal parameter to be given by the fluid that permeates the universe. Also, we present the quantization of the K -essence Theory, for a particular limit which we recover a perfect fluid behavior from General Relativity by Schutz. We also introduce the notion of affine quantization as an alternative to the canonical method, and present the mathematical concepts needed for the theory. We apply this method in a cosmological example, of a universe filled with dust. Also, we do a qualitative semiclassical analysis of the Brans-Dicke Theory.

Key Words: *quantum cosmology, scalar-tensor theories, Brans-Dicke, affine quantization, self-adjoint operators, self-adjoint extensions.*

Sumário

Introdução	1
1 Relatividade Geral e Cosmologia	5
1.1 Um pouco de geometria	6
1.2 O espaço-tempo	12
1.3 Relatividade Geral	14
1.4 Formalismo ADM	16
1.5 Cosmologia clássica	21
2 Cosmologia Quântica	25
2.1 A Mecânica Quântica	26
2.2 Quantização de uma teoria clássica	28
2.3 Operadores e extensões autoadjuntos	30
2.4 O problema do tempo	33
2.5 Teoria de K-essência	35
3 Quantização Afim	39
3.1 O grupo afim	40
3.2 Quantização por integração	42
3.3 Interpretação semiclássica	45
3.4 Cosmologia Quântica num universo com poeira	46
4 Teoria de Brans-Dicke	51
4.1 A quantização da teoria	53
4.2 Caráter autoadjunto do operador Hamiltoniano	54
4.3 Análise do caráter autoadjunto de \hat{H}	56
4.3.1 Caso da matéria radiativa	56
4.3.2 Caso da matéria rígida	60
4.3.3 Sobre os resultados matemáticos	62
4.4 Cenários cosmológicos	62

4.5	Os referenciais de Jordan e de Einstein	65
4.6	Quantização Afim: análise semiclássica da teoria de Brans-Dicke	68
	Conclusão	73
	Apêndice: Aspectos Matemáticos do Operador Momento	77

Introdução

A física atualmente é ramificada em duas áreas aparentemente incompatíveis, uma que unifica as forças eletrofraca e forte e uma teoria que fornece uma explicação para a gravidade. Essa divisão é melhor assimilada analisando a grande diferença entre as teorias da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica. Ambas correspondem a teorias muito bem testadas cuja diferença entre elas é o domínio de atuação de cada uma: uma é a física que descreve o universo macroscópico e a outra sistemas microscópicos. No entanto, apesar da aparente dicotomia, presume-se que elas podem ser unificadas numa só e existem várias propostas para tal, embora nenhuma ainda possa ser confirmada, devido ao alto grau de abstração e dificuldades em realizar experimentos que confirmam previsões cosmológicas. Sendo assim, os estudos sobre o assunto resultam em previsões que, ao menos por enquanto, não podem ser testadas. Uma das teorias de unificação mais estudada é a Cosmologia Quântica, que parte do pressuposto que o universo deve ser estudado de acordo com as leis da Mecânica Quântica, em especial em sua fase primordial, onde os efeitos quânticos são mais expressivos. Assim, obtemos informações importantes sobre a origem do universo, incluindo previsões sobre a singularidade inicial e a fase inflacionária.

Além das dificuldades em determinar a natureza da singularidade inicial, outros problemas em Cosmologia continuam em aberto. Por exemplo, os problemas do Horizonte e da Planicidade, que correspondem respectivamente ao fato de haver uma homogeneidade na medição da radiação cósmica de fundo que o modelo padrão não consegue explicar e ao fato do universo observado atualmente ser plano, com a densidade crítica próxima da unidade, que é um problema de condições iniciais. A fase inflacionária foi sugerida para explicar estas observações, mas ainda sem fornecer uma justificativa plausível sobre o porquê dela própria ocorrer. Outra proposta que pode vir a elucidar tais problemas é a de que o universo pode não ter começado de uma singularidade, mas sim da contração de um universo anterior, que atinge um volume mínimo e volta a se expandir. Estes são conhecidos como modelos de ricochete. Além dessas questões supracitadas, ainda há um outro mistério a ser resolvido no cosmo: a atual fase de expansão acelerada. Se considerarmos apenas as componentes conhecidas do universo, a Relatividade Geral não prevê esta aceleração atual. A ideia mais aceita atualmente é que há mais coisas no universo do que podemos observar, apelidadas de componentes escuras de matéria e energia. Estima-se que estas compõem aproximadamente 95% do total de massa-energia do universo e que a

energia escura seria a responsável por esta expansão acelerada.

Dentre as ideias para resolver estas questões, em particular a natureza da inflação e das componentes escuras, algumas propostas de modificação da Relatividade Geral foram criadas. A teoria de Einstein foi inovadora por propor uma explicação sobre o que seria a força gravitacional, introduzida por Isaac Newton há alguns séculos atrás, e afirma que a força da gravidade é um efeito geométrico, dada pela distorção que a matéria causa no espaço-tempo. As modificações sugeridas levam este fato em consideração. Por exemplo, alguns alegam que o espaço-tempo é uma variedade munida de duas métricas, os chamados modelos de bi-gravidade. Outros propõem que a gravitação seja descrita por uma função do escalar de curvatura da quadriedade: as Teorias de $f(R)$. Também pode-se acoplar campos escalares-tensoriais à gravitação, isto é, à geometria do espaço-tempo. Essas são as ditas Teorias Escalares-tensoriais, como Brans-Dicke, K -essência e Horndeski. No caso da Teoria de Brans-Dicke, temos um campo escalar não-minimamente acoplado à parte gravitacional da Lagrangiana de Einstein-Hilbert, cuja estrutura implica na presença de uma constante ω , de forma que fazendo $\omega \rightarrow \infty$, recuperamos a Relatividade Geral.¹ De fato, estima-se que $\omega > 40.000$, o que torna Brans-Dicke virtualmente indistinguível da RG, classicamente. A ideia então seria verificar se quanticamente há uma diferença significativa.

Por outro lado, temos a Mecânica Quântica, que é bastante contraintuitiva em comparação com a física clássica. Observáveis, na física, representam tudo o que pode ser mensurado, como posição, momento e energia. Na Mecânica Quântica, tais observáveis são descritos por operadores num espaço de Hilbert e que atuam em uma função de onda, sendo esta o “objeto” que realmente representa o estado quântico do sistema. Tais operadores devem ser autoadjuntos: eles precisam ser simétricos, isto é, Hermitianos, pois a medida de uma grandeza é dada pelos autovalores do operador e esta tem que sempre ser real e o domínio do operador deve coincidir com o do adjunto a este, pois não deve haver ambiguidade na hora de decidir se é o operador ou seu adjunto que representa o observável físico. No entanto, a quantização de uma teoria clássica pode não levar a um operador (de energia, por exemplo) autoadjunto, como parece ser o caso na quantização de Brans-Dicke, ou mesmo, em alguns casos, até na quantização da própria RG usual. Todavia, podemos tentar estender o operador em questão de forma a torná-lo autoadjunto. Estender, neste caso, significa mudar o seu domínio, isto é, mudar as condições de contorno das funções de onda que descrevem o sistema. Podem haver apenas uma ou infinitas extensões autoadjuntas para o operador, cada uma, obviamente, descrevendo uma dinâmica diferente. A questão de determinar a melhor extensão recai exatamente onde grande parte dos problemas de física recai: determinar condições de contorno adequadas.

Um dos maiores problemas ao tentarmos quantizar um sistema clássico gravitacional é relacionado ao tempo. Classicamente, a descrição Hamiltoniana da gravitação é feita

¹Com exceção ao caso onde o traço do tensor energia-momento é nulo.

através de sistemas vinculados e o principal vínculo que diz que a Hamiltoniana total de um sistema clássico é nula. Um resultado esperado se pensarmos no universo como um todo, já que este é um sistema fechado e a energia total deve ser conservada, mas surpreendente pelo fato de poder ser aplicado a qualquer sistema cosmológico. Já quanticamente, o operador de energia fornece a evolução temporal do sistema estudado, de acordo com a famosa equação de Schrödinger, o que não condiz com a equação de Wheeler-DeWitt. Percebe-se claramente uma abordagem diferente em relação ao tempo nestas duas áreas da física. Macroscopicamente, o tempo é relativo, é uma coordenada do espaço-tempo que buscamos quantizar; já em sistemas microscópicos, o tempo é um parâmetro externo que não tem o status de observável, ou seja, não é um operador quântico. Esse é um dos maiores problemas da Cosmologia Quântica, chamado de problema do tempo, e uma forma de abordar esta questão é identificando um parâmetro interno da teoria clássica como tempo, de forma que a Hamiltoniana efetiva evolua em relação a este de acordo com a equação de Schrödinger. Por exemplo, podemos afirmar que o tempo é dado pela presença de matéria e, neste caso, o universo só evolui se o conteúdo material dele não for nulo.

Em suma, a Cosmologia Quântica é uma proposta de quantização de uma teoria clássica de gravitação, descrita pela sua formulação Hamiltoniana, identificando um parâmetro interno, como por exemplo a componente de matéria, como mecanismo de relógio. Considerando que o domínio da Mecânica Quântica são sistemas microscópicos, a CQ se aplica aos primeiros estágios do universo, onde os efeitos quânticos ainda são relevantes. Porém, ainda precisamos especificar de que forma ela é feita, isto é, explicitar a forma como observáveis clássicos são identificados com operadores quânticos. O método canônico é baseado na quantização feita na Mecânica Quântica usual, transformando posição em um operador de multiplicação e momento em operador de derivação. Fisicamente, a simplicidade desta quantização é uma vantagem e os cenários cosmológicos podem ser estudados através dos valores esperados das variáveis em questão, como é feito na MQ. Com isso podemos fazer algumas previsões sobre o universo primordial e suas condições iniciais, lembrando sempre que, no limite clássico, a teoria deve prever o modelo cosmológico atual. Escolhemos, neste caso, trabalhar no mini-superespaço, uma configuração que possui um número reduzido de graus de liberdade. Assume-se que é uma aproximação viável para o superespaço no qual acredita-se que vivemos, com infinitos graus de liberdade. Esses modelos no mini-superespaço são os mais estudados em Cosmologia Quântica e nos fornecem informações úteis sobre alguns aspectos do universo primordial. Por outro lado, algumas questões matemáticas devem ser consideradas com mais cautela, como aspectos sobre o caráter autoadjunto dos operadores quantizados neste caso. Outro método, chamado de quantização afim, leva em consideração simetrias do espaço de fase (semiplano positivo, no caso da Cosmologia) do sistema para identificar observáveis com operadores a partir de um método integral covariante. Matematicamente bonito, é um

método em que a questão do caráter autoadjunto é resolvida mais naturalmente e a física pode ser estudada pela análise semiclássica, resultante da aplicação inversa do mapa de quantização.

Esta tese é resultado dos trabalhos publicados e/ou aceitos para publicação [1], [2], [3] e dos trabalhos submetidos [4] e [5]. A proposta principal é analisar a quantização canônica da Teoria de Brans-Dicke, investigando os aspectos matemáticos e abordando os cenários cosmológicos que surgem deste sistema quântico. O objetivo é entender se a nível quântico o campo escalar da teoria tem um papel mais evidente do que a nível clássico. A ideia é utilizar um fluido perfeito via formalismo de Schutz como parâmetro temporal. Também quantizamos a Teoria de K -essência e a usamos como exemplo de outras formas de inserirmos o tempo durante a quantização, utilizando o campo escalar da teoria como mecanismo de relógio num caso especial. Além disso, abordamos brevemente o método da quantização afim, não tão conhecido, e apresentamos suas vantagens como método e como fonte de predições. Os Capítulos 1 e 2 são destinados à revisão básica do conteúdo necessário para o objetivo. O Capítulo 3 é uma apresentação dos conceitos básicos sobre a quantização afim e uma análise de um exemplo cosmológico. O Capítulo 4 é o resultado central desta tese, sobre a quantização da Teoria de Brans-Dicke. Apresentamos um apêndice sobre a análise matemática do operador momento na semirreta real, que é, no fundo, a origem dos problemas matemáticos no caso da Cosmologia Quântica. Na Conclusão, descrevemos os resultados de forma mais crítica e comentamos sobre os projetos futuros.

Capítulo 1

Relatividade Geral e Cosmologia

Em 1905, Albert Einstein (1879 - 1955) publicou seu primeiro artigo sobre Relatividade Especial, “Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento”¹, e começou uma revolução na forma como entendemos as leis da física. Neste artigo, Einstein se baseou nas leis de Maxwell do eletromagnetismo, mais precisamente na ideia de que os campos elétrico e magnético são uma só entidade que é diferenciada apenas pelo movimento em relação a um referencial, para afirmar, considerando a constância na velocidade da luz, que o tempo e espaço são relativos ao referencial adotado. Esta ideia original culminou mais tarde na criação da Teoria da Relatividade Geral, que mudou nossa visão sobre o universo. Em 1915, Einstein criou esta teoria revolucionária da gravitação, transformando o problema do movimento dos corpos celestes de uma questão em dinâmica para uma em cinemática, unificando espaço e tempo num único espaço quadridimensional, que é distorcido pela presença de matéria. Essa distorção, isto é, a curvatura do espaço-tempo, é o que entendemos como gravidade.

Para muitos, a Relatividade Geral (RG) é a mais bela teoria física já criada. Matematicamente encantadora, construída a partir de uma geometria recém-criada na época, incorporando a noção de espaços curvos; e fisicamente desafiadora, respondendo a questão deixada por Newton há séculos atrás: o que é a gravidade? Como toda teoria revolucionária, a RG também demorou até conseguir a aceitação que merecia [6], mas pela primeira vez na história foi possível criar teorias consistentes sobre o universo e testá-las, transformando a Cosmologia, antes vista com certo preconceito, num ramo sério da física. A partir de então, com os trabalhos iniciais de Alexander Friedmann (1888 - 1925), George Lemaître (1894 - 1966), George Gamow (1904 - 1968) e as observações de Edwin Hubble (1889 - 1953), o estudo teórico do cosmo passou a ser visto com novos olhos e uma nova era da física se iniciou.

No século anterior ao surgimento da RG, a geometria não-euclidiana ganhou novos contornos com a tese de doutorado do matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann

¹ *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, no original em alemão.

(1826 - 1866), que foi feita fora da área de interesse deste apenas para impressionar seu respeitável orientador Carl Fiedrich Gauss (1777 - 1855). A ideia de que espaços euclidianos podem ser generalizados, de forma que as “retas paralelas” deste espaço possam convergir/divergir, violando o quinto postulado de Euclides, é uma das características da RG. O caminho de mínimo “esforço”, ou seja, de menor resistência, que um corpo pode seguir é uma geodésica (generalização da reta) num espaço curvo e um corpo massivo deforma este espaço de modo que as geodésicas convirjam em sua direção, dando a impressão de que estes corpos estão se atraindo. Não há mais a noção de força de atração que Newton introduziu, o fenômeno se torna apenas uma consequência do movimento de menor resistência dos corpos.

Em nossa apresentação, vamos fazer uma pequena revisão sobre os principais conceitos geométricos e físicos por trás da RG e do Formalismo $3 + 1$, que serão úteis mais a frente. Também faremos uma introdução elementar de Cosmologia, para abordar as terminologias e notações que serão usadas posteriormente. Não iremos estender esta parte de revisão além do necessário para a construção da teoria mais que apresentaremos, para evitarmos a dispersão da atenção e mantermos o foco apenas no que é relevante para esta tese. Para os leitores mais curiosos que se interessarem por uma abordagem mais ampla sobre os assuntos, ver [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13].

1.1 Um pouco de geometria

A grande revolução da Relatividade Geral foi a interpretação geométrica dada para a atração entre dois corpos, em oposição a força de natureza desconhecida introduzida por Newton. O universo é descrito por um espaço quadridimensional, chamado de espaço-tempo, que tem a propriedade de ser “deformado” com a presença de matéria. Esta deformação, representada na geometria diferencial pela curvatura, é o que conhecemos como gravidade. Para entendermos melhor o que é o espaço-tempo e o que significa essa curvatura mencionada, vamos precisar de alguns conceitos geométricos essenciais. Em verdade, qualquer apresentação detalhada sobre os conceitos básicos de geometria diferencial ocuparia muito mais espaço do que um capítulo de tese deveria ter, então a ideia desta seção é apresentar apenas uma noção básica para o entendimento da matemática por trás da RG. Para quem se interessar em um estudo mais completo, sugiro que leiam o segundo capítulo de [7].

A noção de “espaço curvo” é formalizada no conceito matemático de *variedade*. Uma variedade n -dimensional M é um conjunto de pontos que localmente podem ser mapeados em uma vizinhança de \mathbb{R}^n . Topologicamente falando, M é uma colagem de várias vizinhanças do \mathbb{R}^n . Mais formalmente, $M = \bigcup_{\alpha} \{U_{\alpha}, \phi_{\alpha}\}$ tal que

1. U_{α} são conjuntos abertos.

2. As funções ϕ_α são chamadas de mapas e são tais que $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow O_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ são de classe C^∞ e que possuem inversa.
3. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ é uma aplicação de $\phi_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta] \subset O_\alpha$ para $\phi_\beta[U_\alpha \cap U_\beta] \subset O_\beta$.

O mapa ϕ_α é o que nos permite falar de coordenadas de uma variedade; dadas coordenadas $\{x^\mu\}$ de \mathbb{R}^n , então as curvas $\{\phi_\alpha^{-1}(x^\mu)\}$ formam um sistema coordenadas locais de M . Por simplicidade, não vamos fazer distinção entre os conjuntos de coordenadas $\{x^\mu\}$ e $\{\phi_\alpha^{-1}(x^\mu)\}$. A aplicação $\Phi = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ é chamada de *mudança de coordenadas* (ver Figura 1.1).

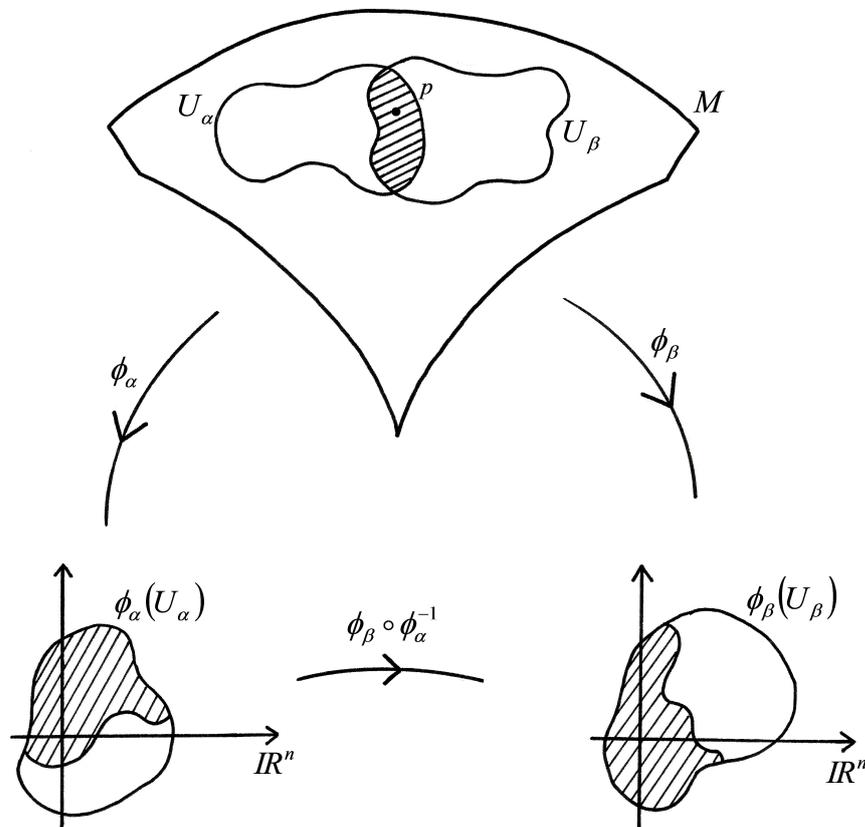


Figura 1.1: As vizinhanças U_α e U_β do ponto $p \in M$ são mapeados em \mathbb{R}^n . O ponto p é mapeado na origem de cada sistema. A aplicação $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ é um difeomorfismo entre os conjuntos hachurados de \mathbb{R}^n .

Dado um ponto p qualquer numa variedade M , a coleção de vetores tangentes à M neste ponto chama-se *espaço tangente* da variedade M no ponto p e é comumente denominado por $T_p M$. O espaço tangente num ponto tem a mesma dimensão n que a variedade

²Contínuas e com todas as derivadas contínuas.

M e é isomorfo a \mathbb{R}^n . Dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ numa vizinhança do ponto p , então

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) = (\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n) \quad (1.1)$$

é uma base para $T_p M$. Os vetores de $T_p M$ serão denotados por X^μ . Um funcional linear $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado de *vetor covariante*, *covetor* ou *forma linear* e o conjunto de todas as formas lineares diferenciais no ponto p formam um espaço vetorial, denotado por $T_p^* M$, que chama-se *espaço dual* ou *espaço cotangente*. Dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ numa vizinhança do ponto p , o conjunto $\{dx^\mu\}$, que também pode ser denotado por $\{e^\mu\}$, forma uma base para $T_p^* M$ de forma que

$$e^\mu e_\nu = \delta_\nu^\mu. \quad (1.2)$$

Os vetores covariantes serão denotados por ω_μ . Ao mudarmos as coordenadas $\{x^\mu\}$ para $\{x^{\mu'}\}$, onde $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^1, \dots, x^n)$, definimos as funções

$$\Phi_\mu^{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \quad ; \quad \Phi_{\mu'}^\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad (1.3)$$

e, com isso, pode-se mostrar que os vetores contravariantes e covariantes se transformam da seguinte forma ³ [7]:

$$X^{\mu'} = \Phi_\mu^{\mu'} X^\mu \quad ; \quad \omega_{\mu'} = \Phi_{\mu'}^\mu \omega_\mu. \quad (1.4)$$

Podemos generalizar esta ideia de vetores e covetores para a noção de tensores. Um *tensor* é uma aplicação multilinear

$$T_r^s : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_{r \text{ times}} \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{s \text{ times}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

que será denotado, especificando um sistema de coordenadas locais, por $T^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r}$. A mudança de coordenadas é feita da seguinte forma

$$T^{\mu'_1 \dots \mu'_s}_{\nu'_1 \dots \nu'_r} = \Phi_{\nu'_1}^{\nu_1} \dots \Phi_{\nu'_r}^{\nu_r} \Phi_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots \Phi_{\mu'_s}^{\mu_s} T^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r}. \quad (1.6)$$

Dizemos que $T^{\mu_1 \dots \mu_s}_{\nu_1 \dots \nu_r}$ é r vezes covariante e s contravariante.

Por enquanto, apresentamos apenas a ideia topológica do que é uma variedade. Para a estudarmos de um ponto de vista geométrico, precisamos inserir um elemento a mais que vai nos fornecer uma forma de medir distâncias neste ambiente. Tal medida é feita através de um tensor covariante bilinear não-degenerado $g_{\mu\nu}$ chamado de métrica, que também pode ser representado pelo elemento de linha

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.7)$$

³Usaremos continuamente a notação de Einstein: índices superiores e inferiores iguais simbolizam um somatório.

Como $g_{\mu\nu}$ é não-degenerado, a sua inversa existe e é tal que $[g_{\mu\nu}]^{-1} = g^{\mu\nu}$, de forma que

$$g_{\mu\eta} g^{\eta\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}. \quad (1.8)$$

Podemos usar a métrica para transformar um tensor covariante em um contravariante e vice-versa da seguinte forma,

$$T^{\nu} = g^{\mu\nu} T_{\mu} \quad \text{ou} \quad T_{\nu} = g_{\mu\nu} T^{\mu}, \quad (1.9)$$

comumente chamado de “subir ou descer índices”.

Assim como a noção de distância entre dois pontos teve que ser generalizada para a noção de métrica, a noção de derivação também tem que ser adequada para espaços curvos. Para isso introduzimos a ideia de conexão. Uma *conexão* ∇ em um ponto p de uma variedade M é um operador no espaço tangente $T_p M$ que leva um vetor X a um operador diferencial ∇_X , chamado de *derivada covariante na direção X no ponto p* . Esta é a generalização da ideia de derivada direcional em um espaço \mathbb{R}^n . Dado um sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}\}$ numa vizinhança do ponto p , a derivada covariante na direção e_{β} de um vetor Y^{α} é representada por $Y^{\alpha}_{;\beta}$ e é dada por

$$Y^{\alpha}_{;\beta} = \frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} Y^{\gamma}. \quad (1.10)$$

Já a derivada covariante de um covetor ω_{α} na direção e_{β} é dada por

$$\omega_{\alpha;\beta} = \frac{\partial \omega_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} \omega_{\gamma}. \quad (1.11)$$

Podemos generalizar a derivada covariante para um tensor qualquer. Os coeficientes $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ são chamados *Símbolos de Christoffel*. Dada uma métrica $g_{\mu\nu}$, existe apenas uma conexão ∇ tal que $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$, para qualquer α . Esta é dita uma *conexão compatível com a métrica* (*conexão de Levi-Civita*).⁴ Neste caso, os símbolos de Christoffel são escritos da seguinte forma

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} (g_{\mu\beta,\gamma} + g_{\mu\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\mu}), \quad (1.12)$$

sendo $g_{\alpha\beta,\gamma} = \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta}$.

Agora, suponha uma curva parametrizada $\lambda(t)$ em M e $X(t)$ o campo tangente a esta curva. Definimos a *derivada covariante de um campo Y ao longo da curva $\lambda(t)$* como sendo $DY/dt \equiv \nabla_X Y$. Em particular, se escolhermos um sistema de coordenadas $\{x^{\alpha}(t)\}$ tal que $X^{\alpha}(t) = dx^{\alpha}/dt$, temos

$$\frac{DY^{\alpha}}{dt} = \frac{\partial Y^{\alpha}}{\partial t} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} Y^{\gamma} \frac{dx^{\beta}}{dt}. \quad (1.13)$$

⁴Sem torção, isto é, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$. Vamos considerar aqui apenas as conexões livre de torção e compatíveis com a métrica.

Algo importante para se observar é que a derivada covariante não é mais definida num ponto, mas sim ao longo de uma curva na variedade. Definimos o *transporte paralelo* de um tensor T ao longo da curva $\lambda(t)$ pela seguinte propriedade

$$\frac{DT}{dt} = 0. \quad (1.14)$$

O transporte paralelo é definido sobre uma curva, então o resultado do transporte paralelo de um vetor do ponto p ao ponto q pode diferir dependendo da escolha do caminho adotado (ver Figura 1.2). Também, se a conexão é compatível com a métrica, esta sempre será transportada paralelamente, por qualquer caminho.

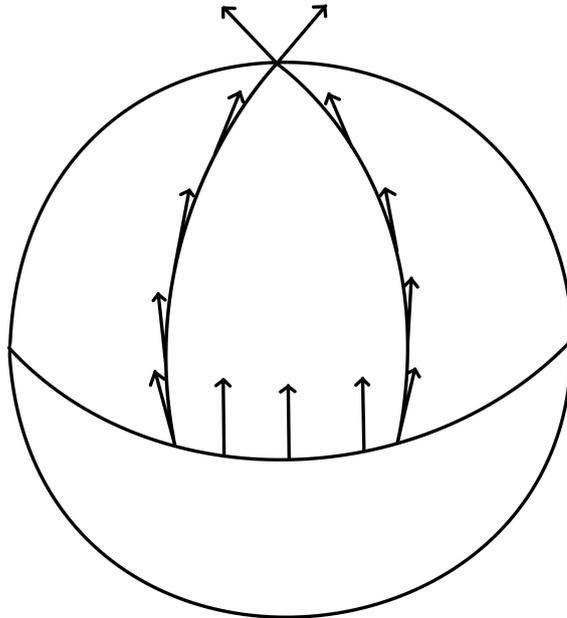


Figura 1.2: Ao fazer o transporte paralelo de um vetor por dois caminhos distintos, obtemos resultados diferentes, como exemplificado na diferença dos vetores no polo norte da esfera. Um caminho é o subindo diretamente da linha do equador para o polo e ou outro é seguindo pelo equador e depois subindo. Nos dois caminhos o ponto inicial e final são os mesmos.

Uma curva $\lambda(t) = x^\alpha(t)$ é dita uma *geodésica* se o seu campo de vetores tangentes $X^\alpha(t)$ for transportado paralelamente ao longo de $\lambda(t)$, isto é, se

$$\frac{DX^\alpha}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} = 0. \quad (1.15)$$

As geodésicas são a generalização de linhas retas do espaço \mathbb{R}^n . Usando (1.13), concluímos que uma curva $x^\alpha(t)$ será uma geodésica se, para um parâmetro afim t , temos

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\beta}{dt} \frac{dx^\gamma}{dt} = 0. \quad (1.16)$$

Esta é conhecida como *Equação da Geodésica*. Esta noção de geodésica é muito importante tanto na matemática quanto na física. Matematicamente, uma geodésica minimiza/maximiza ⁵ a distância entre dois pontos quaisquer de uma variedade; fisicamente, partículas livres percorrem geodésicas, que são o caminho de menor resistência.

Como dissemos, o transporte paralelo de um vetor de um ponto p a um ponto q de uma variedade ao longo de duas curvas diferentes (que passam por ambos os pontos) pode não resultar no mesmo vetor (ver Figura 1.2). Isso se deve ao fato das derivadas covariantes geralmente não comutarem. Uma forma de medir esta “não comutatividade” é através do *tensor de curvatura de Riemann* $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$. A não comutatividade é resultado da deformação do espaço em comparação ao euclidiano, portanto $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ é uma forma de medir a diferença entre a variedade e o espaço euclidiano, por isso recebe o nome de tensor de “curvatura”. Dados vetores X^μ, Y^μ, Z^μ , definimos

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} X^\gamma Y^\delta Z^\beta &= (Z^\alpha_{;\delta} Y^\delta)_{;\gamma} X^\gamma - (Z^\alpha_{;\delta} X^\delta)_{;\gamma} Y^\gamma - Z^\alpha_{;\delta} (Y^\delta_{;\gamma} X^\gamma - X^\delta_{;\gamma} Y^\gamma) \\ &= (Z^\alpha_{;\delta\gamma} - Z^\alpha_{;\gamma\delta}) X^\gamma Y^\delta. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Sendo X^μ, Y^μ vetores arbitrários, temos que:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} Z^\beta = Z^\alpha_{;\delta\gamma} - Z^\alpha_{;\gamma\delta}, \quad (1.18)$$

que expressa a não comutatividade da segunda derivada covariante de Z^μ em termos do tensor de Riemann. Escolhendo um sistema de coordenadas, o tensor de curvatura pode ser escrito como:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\delta\beta,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta,\delta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} \Gamma^\mu_{\delta\beta} - \Gamma^\alpha_{\delta\mu} \Gamma^\mu_{\gamma\beta}. \quad (1.19)$$

O tensor de curvatura possui as seguintes propriedades de simetria:

$$R^\alpha_{\beta(\gamma\delta)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}; \quad (1.20)$$

$$R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} = 0 \quad (1.21)$$

e satisfaz à identidade de Bianchi:

$$R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^\alpha_{\beta\gamma\delta;\epsilon} + R^\alpha_{\beta\epsilon\gamma;\delta} + R^\alpha_{\beta\delta\epsilon;\gamma} = 0. \quad (1.22)$$

⁵Usando a esfera como exemplo, as geodésicas são círculos máximos, dados dos pontos sobre a superfície, a geodésica produz dois caminhos possíveis: um de menor distância e o outro (dando a volta na esfera) de maior distância.

A contração do tensor de curvatura,

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta}, \quad (1.23)$$

é chamada de *tensor de Ricci* e definimos o *escalar de Ricci*, ou *escalar de curvatura*, como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu}. \quad (1.24)$$

1.2 O espaço-tempo

Um dos maiores avanços do século XIX se deve a James Clerk Maxwell (1831 - 1879), que percebeu que os campos elétricos e magnéticos são partes constituintes de um mesmo campo, chamado de eletromagnético, porém observados de referenciais inerciais diferentes. Isso sugere que as leis da física são invariantes por referenciais inerciais. Isto motivou Einstein a questionar as leis da mecânica de Newton, que eram inconsistentes com as equações de Maxwell do Eletromagnetismo. A constância da velocidade da luz sugere que tempo e espaço são uma só entidade, que Einstein chamou de espaço-tempo.

Matematicamente falando, o espaço-tempo é uma variedade quadridimensional *pseudo-riemanniana*. O “pseudo” é referente ao fato da métrica não ser positiva definida. Como um tensor covariante de posto 2, a métrica pode ser representada por uma matriz inversível $n \times n$, onde n é a dimensão da variedade em questão, logo a métrica do espaço-tempo pode ser representada por uma matriz 4×4 . O espaço-tempo tem como coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3) , onde $x^0 = ct$ representa o tempo e x^i as três coordenadas espaciais. Uma das peculiaridades das variedades pseudo-riemannianas é que a métrica neste caso, por não ser positiva definida, tem autovalores positivos e negativos. Chamamos de *assinatura da métrica* a configuração $(- \dots - + \dots +)$,⁶ onde os sinais $+$ e $-$ representam o número de autovalores negativos e positivos desta matriz. A posição dos sinais $-$ e $+$ nos parênteses é definida pela posição dos respectivos autovalores na diagonal da matriz, quando esta é diagonalizada. O espaço-tempo tem assinatura $(+, -, -, -)$,⁷ ou seja, o autovalor referente à parte temporal da métrica é positivo, enquanto os referente às coordenadas espaciais são negativos. Uma métrica com esta assinatura é chamada de *métrica de Lorentz*.

Para uma variedade com métrica de Lorentz, dado um vetor X^{μ} no espaço tangente de um ponto p , teremos três possibilidades:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} > 0 & \Rightarrow X^{\mu} \text{ é um vetor do tipo tempo;} \\ g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} = 0 & \Rightarrow X^{\mu} \text{ é um vetor do tipo luz;} \\ g_{\mu\nu} X^{\mu} X^{\nu} < 0 & \Rightarrow X^{\mu} \text{ é um vetor do tipo espaço.} \end{cases} \quad (1.25)$$

⁶ A Ref. [7] define assinatura como a diferença entre o número de autovalores positivos e negativos.

⁷ Livros clássicos de RG costumam usar a assinatura $(-, +, +, +)$. A assinatura que usaremos $(+, -, -, -)$ é mais comum em livros de Teoria Quântica de Campos.

Assim, o espaço tangente num ponto se divide em três regiões: os vetores nulos, ou do tipo luz, formam um cone duplo em T_pM , chamado de cone de luz, que separa os vetores do tipo espaço dos vetores do tipo tempo (ver Figura 1.3). O cone de luz nos fornece a noção de *causalidade*: um evento só pode afetar o outro se este estiver dentro de seu cone de luz futuro, assim como só poderá ser afetado por eventos dentro do seu cone de luz passado. Em suma, dois eventos só podem interagir se são conectados por um campo de vetores do tipo tempo, em outras palavras, se estão em contato causal.

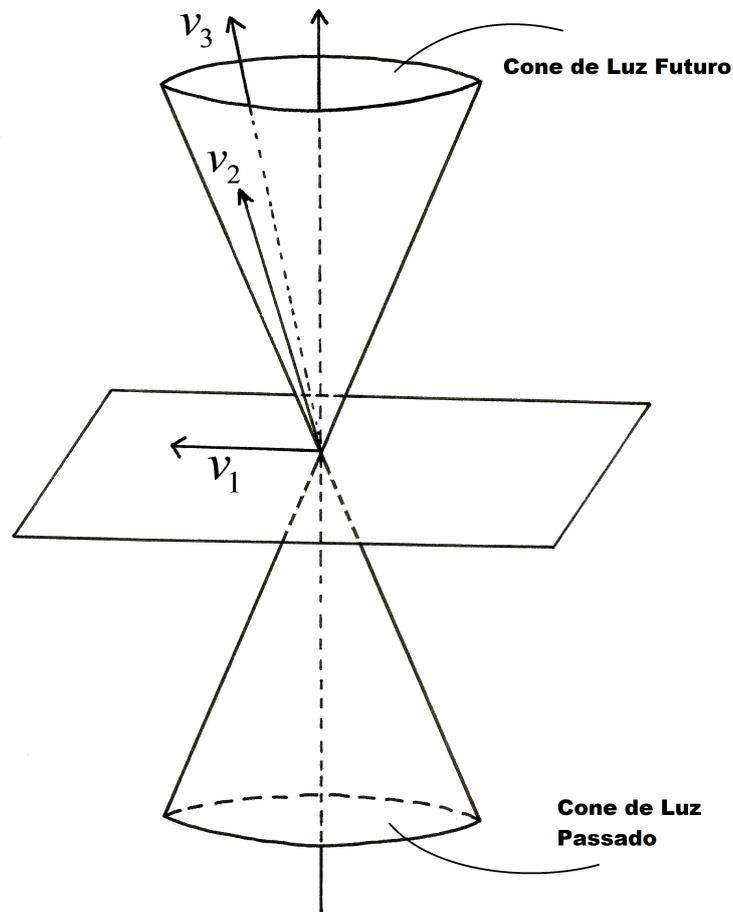


Figura 1.3: O cone de luz de um ponto no espaço-tempo. O vetor v_1 é do tipo espaço, v_2 está sob a superfície do cone, é um vetor do tipo luz e v_3 é um vetor do tipo tempo. Eventos conectados por um campo vetorial do tipo espaço não estão em contato causal.

Apesar de termos introduzido as coordenadas (ct, x, y, z) anteriormente, a mais genial ideia da Relatividade Especial foi perceber que não há um observador privilegiado no espaço-tempo, isto é, não há coordenadas privilegiadas. Um mesmo evento pode ser descrito por outras coordenadas (ct', x', y', z') sem perda de generalidade. Isso implica que não há a noção de “eventos simultâneos” no espaço-tempo, uma vez que a coordenada

temporal não permanece inalterada. No entanto, dados dois eventos, o intervalo entre estes,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2, \quad (1.26)$$

é invariante por transformação de coordenadas. Em outras palavras, se mudarmos o sistema de coordenadas, $(\Delta s)^2$ permanecerá constante. Por isso, dizemos que a Relatividade Especial é uma teoria de um espaço quadridimensional, chamado de *espaço de Minkowski*, cuja *métrica de Minkowski* deste espaço é definida como

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

e o elemento de linha se torna:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.28)$$

Aqui e de agora em diante vamos considerar $c = 1$.

1.3 Relatividade Geral

Na Relatividade Geral, a gravidade deixa de ser uma força de natureza enigmática que atua sobre os corpos e se torna algo intrínseco ao espaço em que vivemos. O espaço-tempo é, então, uma variedade M com uma métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$ que representa a gravidade. O conteúdo material do universo é descrito por campos em M , tal como o campo eletromagnético, e a teoria obtida depende destes campos de matéria inseridos. Mais geralmente, pode-se postular a existência de um campo ainda não detectado, como no caso da Teoria de Brans-Dicke, onde postula-se a existência de um campo escalar de longo alcance que é acoplado à gravidade, ou seja, à curvatura do espaço-tempo, e que pode explicar, por exemplo, as componentes escuras do universo ou o mecanismo de inflação.

Dentre os campos de M , a métrica $g_{\mu\nu}$ se diferencia por seu caráter geométrico. O postulado de causalidade da RG [7] nos diz que um sinal entre dois pontos p e q numa mesma vizinhança convexa $U \subset M$ só pode ser enviado se p e q podem ser conectados por uma curva C^1 inteiramente contida em U , tal que seu campo tangente seja ou do tipo-tempo ou nulo em cada ponto da curva. Isto vem do fato observacional de que nenhum sinal pode ser enviado mais rápido do que a velocidade da luz, que viaja em geodésicas nulas. Então, a métrica é um campo intrínseco que representa o movimento dentro do espaço-tempo e, portanto, as equações de movimento serão todas descritas em função de $g_{\mu\nu}$. Por outro lado, para descrevê-la precisamos de um tensor simétrico $T^{\mu\nu}$, chamado de *tensor energia-momento*, que nos fornece informações sobre a densidade de energia e

pressão da matéria. Uma propriedade fundamental do tensor $T^{\mu\nu}$ é que este deve obedecer à equação de conservação

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0, \quad (1.29)$$

conhecida como *lei de conservação do tensor energia-momento*. O postulado da causalidade nos fornece uma forma de encontrar a métrica a menos de um fator conforme [7], isto é, nos permite encontrar uma classe de equivalência de métricas da forma $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. Com a condição (1.29) podemos encontrar o fator conforme Ω .

Até agora não dissemos como calcular explicitamente a métrica ou o tensor energia-momento. Para isto, vamos utilizar o princípio da mínima ação para encontrar as equações de campo. Seja \mathcal{L} uma função escalar, chamada *Lagrangiana*, que depende do campo $\Phi^i(x^\mu)$, de suas derivadas covariantes e da métrica.⁸ As equações de campo são obtidas variando-se a ação

$$S = \int_D \mathcal{L} dv, \quad (1.30)$$

onde D é o domínio da função \mathcal{L} e dv é a medida do espaço em questão. No caso do espaço-tempo a medida é dada por d^4x . O *princípio da mínima ação* diz que a variação da ação é nula, ou seja, $\delta S = 0$. Desta equação, considerando que a Lagrangiana só depende das derivadas primeiras dos campos, obtemos as *equações de Euler-Lagrange*

$$\frac{\delta S}{\delta \Phi^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \nabla_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_{\mu} \Phi^i)} \right) = 0, \quad (1.31)$$

válidas para todo i , isto é, para todo campo⁹ expresso na Lagrangiana.

Na Relatividade Geral, como já dito, a gravidade é representada pela curvatura R do espaço-tempo e este fato é traduzido na Lagrangiana do campo gravitacional definida como

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{8\pi G} \sqrt{-g} R, \quad (1.32)$$

sendo g o determinante da métrica. O fator $\sqrt{-g}$ é a Jacobiana da métrica; algumas referências definem a medida dv como $\sqrt{-g} d^4x$, mas escolhemos inseri-lo na definição da Lagrangiana, para que esta contenha toda a dependência da métrica que aparece na ação. A constante $(8\pi G)^{-1}$ pode ser deduzida considerando-se o limite Newtoniano das equações derivadas da Lagrangiana; G é a constante gravitacional apresentada por Newton. Vamos daqui em diante usar unidades tais que $G = 1$.¹⁰ Assim, a Lagrangiana da Relatividade Geral é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_M, \quad (1.33)$$

⁸O campo Φ^i pode ter natureza escalar ou tensorial, neste caso.

⁹Estamos considerando apenas campos independentes.

¹⁰O valor de G é dado por $6,67408(31) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Na unidade em que $G = 1$ uma massa de 10^{28} gm é equivalente a 1cm.

em que a Lagrangiana de matéria \mathcal{L}_M depende do campo de matéria inserido na teoria. A variação da ação da RG com relação à métrica $g^{\mu\nu}$ nos fornece as seguintes equações de campo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.34)$$

O tensor $T_{\mu\nu}$ é obtido da Lagrangiana de matéria, enquanto a parte esquerda da equação acima é obtida da Lagrangiana gravitacional. Essas são conhecidas como *Equações de Einstein*, que relacionam a gravidade (curvatura do espaço-tempo) com a matéria.

Observe que até agora não foi necessário explicitar a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, apenas nos baseamos nos postulados da cosmologia para encontrar as Equações de Einstein (1.34), que formam um sistema de equações diferenciais parciais para as componentes da métrica. Dadas condições de simetria para a métrica e especificando a componente de matéria, pode-se, em tese, resolver as equações (1.34) para encontrá-la. Por exemplo, a solução das equações de Einstein para um universo homogêneo e isotrópico em expansão ou contração, é dada por

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (1.35)$$

As funções $N(t)$ e $a(t)$ são positivas e só dependem da coordenada temporal. São chamadas *função lapso* e *fator de escala*, respectivamente. A métrica (1.35) é chamada de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* (FLRW), em homenagem aos físicos que a encontraram de forma independente nos anos '20: Friedmann, Lemaître, Howard P. Robertson (1903 - 1961) and Arthur Geoffrey Walker (1909 - 2001). Esta é a métrica mais simples para um universo em expansão, que atende aos pressupostos básicos da cosmologia de que não há uma posição ou direção privilegiada no universo (homogeneidade e isotropia). Outras condições geram soluções diferentes: dada uma massa pontual, se exigirmos simetria esférica considerando-se a toda ela concentrada no centro da esfera, encontramos a métrica de Schwarzschild, por exemplo.

A formulação da RG está baseada na ideia de que a única fonte para o campo gravitacional é dada pela matéria por meio de sua energia, porém pode-se inferir que o próprio vácuo tenha energia e adicionar na equação (1.34) um termo $(g_{\mu\nu}\Lambda)$ para representá-la. Λ é chamada de *constante cosmológica*. Algumas teorias sugerem que outros campos além do de matéria interferem no campo gravitacional, como é o caso da Teoria de Brans-Dicke e de outras teorias escalares-tensoriais.

1.4 Formalismo ADM

A descrição clássica da Relatividade Geral pode ser toda feita através do Formalismo Lagrangiano, como vimos na seção anterior. Porém, a quantização ¹¹ de um sistema é feita

¹¹A quantização canônica e afim que faremos aqui na tese. Outras teorias de unificação, como a Teoria das Cordas, se baseiam em técnicas de Teoria Quântica de Campos e, neste caso, a descrição da RG pelo

levando-se em consideração a energia deste, ou seja, através de sua *Hamiltoniana*. Então, com o intuito de quantizar a Teoria da Relatividade Geral, precisamos fazer a descrição desta através do *Formalismo Hamiltoniano*. No entanto, por ser invariante por difeomorfismos em geral, para se obter uma formulação Hamiltoniana consistente é necessário desvendar os vínculos na teoria, que eventualmente serão considerados também durante a quantização. Vamos apresentar os conceitos básicos do Formalismo 3 + 1, também chamado de Formalismo ADM, em homenagem aos físicos que desenvolveram o método: Richard Arnowitt (1928 - 2014), Stanley Deser (1931 -) e Charles W. Misner (1932 -); para, posteriormente, comentarmos sobre o formalismo Hamiltoniano de sistemas vinculados. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, recomendamos [10, 11].

A ideia por trás do Formalismo 3 + 1 é decompor o espaço-tempo numa folheação de *hipersuperfícies do tipo espaço*, ou seja, cujos vetores tangentes são todos do tipo espaço. Assim, para cada $t = \text{constante}$, há uma hipersuperfície $\Sigma(t)$ do tipo espaço, chamada de *folha* (para um estudo mais detalhado sobre folheações, veja [14] e [15]). O espaço-tempo M então tem a topologia de um produto cartesiano: $M = \mathbb{R} \times \Sigma$. A métrica $g_{\mu\nu}$ de M induz¹² uma métrica simétrica h_{ij} em Σ , tal que

$$ds^2 = d\tau^2 - h_{ij}dx^i dx^j . \quad (1.36)$$

Observe que escolhemos a assinatura da métrica h_{ij} das hipersuperfícies $\Sigma(t)$ como sendo (+ + +), mesmo considerando que estas são hipersuperfícies do tipo espaço e definindo anteriormente vetores do tipo espaço como tendo norma negativa em (1.25). Esta escolha foi feita convenientemente para que os resultados coincidissem (a menos de um sinal) com os da literatura clássica no assunto, [10, 11], que usam a assinatura (- + + +). Assim, todas as contas podem ser refeitas da mesma forma, tomando apenas o cuidado de subir e descer índices espaciais com a métrica $g_{ij} = -h_{ij}$. Ainda assim, temos $h_{ik} h^{kj} = \delta_i^j$.

Dado um ponto p de uma hipersuperfície $\Sigma(t)$, dois vetores se destacam na imersão do ponto p no espaço-tempo, que são o vetor \mathbf{n} normal à hipersuperfície $\Sigma(t)$ e o vetor tangente ∂_t , referente a variável temporal $\tau = N t$, onde N é uma função real. Dada uma base de vetores $\{e_i\}$ de $T_p\Sigma$, a projeção de ∂_t sob a normal n^α é dada pelo vetor N^α de tal forma que

$$N^\alpha = N n^\alpha + N^i e_i^\alpha , \quad (1.37)$$

sendo N^i funções reais. Geometricamente falando, podemos interpretar a função N como sendo o módulo da distância infinitesimal entre duas folhas $\Sigma(t)$ e $\Sigma(t + dt)$ e as funções N^i mostram o deslocamento do ponto p seguindo o fluxo temporal, como mostra a Figura 1.4. As funções N e N^i são chamadas de *função lapso* e *função shift*, respectivamente. Com esta decomposição 3 + 1, a métrica e sua inversa são da forma

formalismo Hamiltoniano não é necessária.

¹²Essa ideia de indução é melhor formalizada usando-se os conceitos de imersão da hipersuperfície no espaço-tempo, de *pull back* e de *push forward* [10].

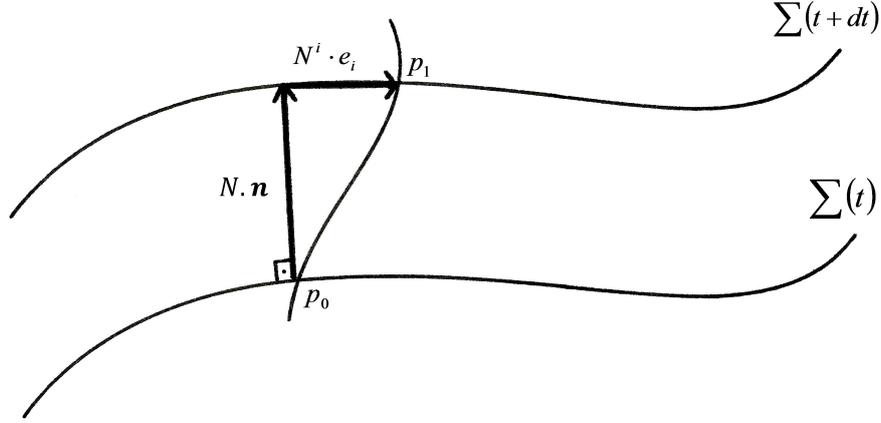


Figura 1.4: O ponto p_0 na folha $\Sigma(t)$ é transportado para o ponto p_1 na folha $\Sigma(t + dt)$ pelo fluxo do tempo cósmico t . As funções lapso N e shift N^i representam o deslocamento do ponto pelas folhas.

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} N^2 - N^k N_k & -N_i \\ -N_j & -h_{ij} \end{bmatrix} ; \quad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N^i}{N^2} \\ -\frac{N^j}{N^2} & \frac{N^i N^j}{N^2} - h^{ij} \end{bmatrix} . \quad (1.38)$$

O elemento de linha é dado da seguinte forma

$$ds^2 = N^2 dt^2 - h_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j) . \quad (1.39)$$

No entanto, apenas escrever a métrica com as chamadas variáveis ADM acima não é suficiente para caracterizar completamente a folheação. É necessário saber como cada folha, isto é, cada hipersuperfície imersa se curva dentro do espaço-tempo. Para isto, definimos o tensor em $\mathbf{K} : T_p\Sigma \times T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, tal que¹³

$$\mathbf{K}(u, v) = -u \cdot \nabla_v \mathbf{n} ; \quad \forall u, v \in T_p\Sigma , \quad (1.40)$$

que mede o desvio da normal n de $T_p\Sigma$ com relação ao vetor \mathbf{u} na direção v . \mathbf{K} é chamado de *segunda forma fundamental* ou *curvatura extrínseca* da superfície Σ . Como usual, fazemos

$$K_{ij} = \mathbf{K}(e_i, e_j) = -e_i \cdot \nabla_{e_j} \mathbf{n} . \quad (1.41)$$

Pode-se mostrar que o tensor K_{ij} é simétrico e, usando a métrica (1.39), suas componentes são dadas por:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ij} - N_{(i;j)} \right) ; \quad K^{ij} = -\frac{1}{2N} \left(\dot{h}^{ij} + N^{(i;j)} \right) , \quad (1.42)$$

¹³Estamos usando a definição de [10], outras referências, como [8], [9], podem definir a curvatura extrínseca positiva.

com $N_{i;j} = N_{i,j} - {}^3\Gamma^k_{ij}N_k$ sendo a derivada covariante de N_i na hipersuperfície Σ . Os coeficientes ${}^3\Gamma^k_{ij}$ são os símbolos de Christoffel da métrica h_{ij} . Também,

$$K_{00} = N^i N^j K_{ij} \quad \text{e} \quad K_{0i} = N^j K_{ij}. \quad (1.43)$$

Com isto, podemos escrever a ação da RG, $S = \int d^4x \mathcal{L}_G$, com \mathcal{L}_G dada em (1.32), em função das quantidades N, N^i, h_{ij} e K_{ij} :

$$S = \int dt d^3x N \sqrt{h} (K^2 - K_{ij}K^{ij} - {}^3R) + 2 \int dt d^3x (\sqrt{h}K) - 2 \int dt d^3x (\sqrt{h}KN^i + \sqrt{h}h^{ij}N_{,j})_{;i}, \quad (1.44)$$

onde $h = \det(h_{ij})$, $K = h^{ij}K_{ij} = K^i_i$ e com 3R sendo o escalar de Ricci da superfície Σ com a métrica h_{ij} . As duas últimas integrais são termos de superfície, então não contribuem para as equações de movimento e, portanto, podemos descartá-las. Das Equações de Euler-Lagrange (1.31), encontramos os vínculos:

$$K^2 - K_{ij}K^{ij} + {}^3R = 0; \quad (1.45)$$

$$2\sqrt{h} (K^{ij} - h^{ij}K)_{;j} = 0. \quad (1.46)$$

Estas duas equações nos dizem que não podemos folhear o espaço-tempo de forma arbitrária; a escolha da decomposição 3 + 1 tem que ser tal que (1.45) e (1.46) sejam satisfeitas.

Até então, ainda estamos fazendo uma descrição da RG pelo formalismo Lagrangiano usando a decomposição ADM, onde a Lagrangiana gravitacional é dada por

$$\mathcal{L}_G(N, N^i, g_{ij}, \dot{N}, \dot{N}^i, \dot{g}_{ij}, t) = N \sqrt{h} (K^2 - K_{ij}K^{ij} - {}^3R), \quad (1.47)$$

lembrando que $g_{ij} = -h_{ij}$.¹⁴ Vamos, então, passar para o Formalismo Hamiltoniano. Na mecânica analítica, dada uma Lagrangiana $\mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t)$, a *densidade Hamiltoniana* correspondente é dada pela transformação de Legendre

$$\mathcal{H}(q^i, p_i, t) = \sum_i \dot{q}^i p_i - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t), \quad (1.48)$$

sendo o p_i o momento canônico da coordenada q^i , definido por

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i}. \quad (1.49)$$

Porém alguns sistemas possuem Lagrangianas singulares e pode acontecer das velocidades \dot{q}^i não serem unicamente expressas em termos do momento p_i , devido à existência de vínculos entre as coordenadas canônicas, como é o caso da Relatividade Geral. Nestes

¹⁴Consideramos g_{ij} aqui ao invés de h_{ij} para não haver confusão na definição de Hamiltoniana, visto que, por causa da nossa escolha de assinaturas para o espaço-tempo e para a hipersuperfície σ , o sinal da Lagrangiana muda se escrita em termos de h_{ij} , então temos que compensar esta mudança.

casos, para desenvolvermos uma dinâmica Hamiltoniana consistente com o sistema Lagrangiano, adicionamos os vínculos da teoria à Hamiltoniana canônica de forma que a densidade Hamiltoniana total do sistema seja dada por

$$\mathcal{H}_T(q^i, p_i, \lambda^k, t) = \sum_i \dot{q}^i p_i - \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i, t) + \sum_{k=0}^m \lambda^k \Phi_k(q^i, p_i), \quad (1.50)$$

onde $\Phi(q^i, p_i)$ são chamados de *vínculos primários*, m é o total de vínculos primários do sistema e λ^m são multiplicadores de Lagrange. Para um estudo completo sobre sistemas vinculados, recomendamos [11]. De (1.47) e (1.49), encontramos os momentos conjugados.¹⁵ de h_{ij} , N e N^i :

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{h}_{ij}} = \sqrt{h} (K^{ij} - h^{ij} K); \quad (1.51)$$

$$\pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}} = 0; \quad (1.52)$$

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{N}^i} = 0. \quad (1.53)$$

Assim, pela transformação de Legendre, obtemos a densidade Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = (N\mathcal{H}_0 - 2N^i\mathcal{H}_i), \quad (1.54)$$

onde definimos

$$\mathcal{H}_0 := {}^3R\sqrt{h} - G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} = ({}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij})\sqrt{h}; \quad (1.55)$$

$$\mathcal{H}_i := 2\pi^{ij}{}_{;j} = (K^j{}_{i;j} - K_{;i})\sqrt{h}, \quad (1.56)$$

sendo o tensor G_{ijkl} dado por

$$G_{ijkl} := \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \quad (1.57)$$

Das *Equações de Hamilton*, o equivalente a Equação de Euler-Lagrange, obtemos os seguintes vínculos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} = -\mathcal{H}_0 = -\dot{\pi}^N = 0; \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N^i} = \mathcal{H}_i = -\dot{\pi}_i = 0, \quad (1.59)$$

que são consistentes com (1.45) e (1.46). Estas equações (1.58) e (1.59) mostram que as funções lapso e shift são multiplicadores de Lagrange dos vínculos de energia (Hamiltoniana) e de momento, respectivamente. Isto nos diz que as únicas variáveis dinâmicas são h_{ij} e π^{ij} .

¹⁵Sobre a notação do momento, quando tratamos de partículas, o mais usual é que o momento seja representado pela letra p , como na equação (1.49). Porém, ao tratarmos de campos, como é o caso da RG, modificamos a notação para a letra grega equivalente π .

1.5 Cosmologia clássica

A Cosmologia, como o nome sugere, é o estudo do cosmos, isto é, da origem, dinâmica, fase atual e futuro do universo em que vivemos. Desde o começo das civilizações há registro sobre a observação dos corpos celestes e, junto a isto, teorias sobre o que é e como funciona o cosmos. Com o surgimento da Relatividade Geral pode-se estabelecer teorias coerentes e testáveis sobre o universo, que explicavam as observações astronômicas. A teoria de Einstein previu um modelo que o próprio teve dificuldades em aceitar, a princípio, de um universo não-estático. George Lemaître, em meados da década de 20, propôs um universo em expansão, que mais tarde foi confirmado pelas excelentes observações de Hubble. Ele supôs que, se o universo está em expansão agora, então no passado toda a matéria do universo deveria estar contraída num único ponto, que ele chamou de “átomo primordial” e que mais tarde receberia o nome de *Big Bang*. Posteriormente, George Gamow, juntamente com seu então aluno de doutorado Ralph A. Alpher (1921 - 2007), propôs que elementos mais leves, como hidrogênio, hélio e lítio, só poderiam ter sido criados neste cenário do universo primordial, num processo conhecido como *Nucleossíntese do Big Bang*. Em 1964, Arno Penzias (1933 -) e Robert Wilson (1936 -), dois radioastrônomos, acidentalmente detectaram um ruído vindo do céu: uma radiação quase isotrópica que é resquício de um universo jovem, conhecida como *radiação cósmica de fundo* ou CMB¹⁶. Assim, o *Modelo Padrão da Cosmologia* foi criado: uma teoria para o cosmos cujo sucesso reside nas observações de um universo em expansão feitas por Hubble, na explicação para o surgimento de partículas leves dada pela Nucleossíntese do Big Bang e nas observações da radiação cósmica de fundo. Nesta seção, vamos apenas apresentar a terminologia e notação necessárias para o melhor entendimento dos cenários cosmológicos previstos pela quantização. Para um estudo mais completo sobre Cosmologia, recomendamos [12, 13].

A expansão do universo é determinada pelo fator de escala a do universo, que depende do tempo. A dinâmica da expansão é dada pelas Equações de Einstein (1.34). Relembrando:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.60)$$

A homogeneidade e a isotropia exigem que as componentes do tensor energia-momento sejam dadas por

$$T_{00} = \rho(t) \quad ; \quad T_{i0} = 0 \quad ; \quad T_{ij} = a^2 p(t) \delta_{ij}, \quad (1.61)$$

onde ρ e p são a *densidade de energia própria* e a *pressão* do fluido, respectivamente. Com isto, extraímos duas equações independentes de (1.60), conhecidas como *Equações de Friedmann*:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{K}{a^2}, \quad (1.62)$$

¹⁶sigla para *Cosmic Background Radiation*.

derivada da componente 00 de (1.60), e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi}{3}(\rho + 3p), \quad (1.63)$$

derivada a partir da primeira (1.62) e da equação obtida tirando-se o traço de (1.60). O termo K é a curvatura espacial do espaço tempo. Devido a simetria do universo, devemos ter $K = -1$, $K = 0$ ou $K = 1$: um universo *hiperbólico*, *plano* ou *esférico*, respectivamente. Assim, dado ρ e p , depois de especificado K , podemos resolver o sistema (1.62) e (1.63) para encontrarmos o valor de a em função do tempo. Por exemplo, num universo plano dominado por radiação, isto é, $\rho = p/3$, temos que $a \propto t^{1/2}$. Este é o cenário para o universo primordial. Quando há a predominância de matéria não-relativística, posteriormente, temos $a \propto t^{2/3}$.

Para entendermos melhor o significado das Equações de Friedmann, vamos introduzir o *raio de Hubble*, ou *parâmetro de Hubble*, que mede a rapidez que o fator de escala muda,

$$H(t) \equiv \frac{da/dt}{a}. \quad (1.64)$$

Chamamos de *constante de Hubble* o valor H_0 do parâmetro de Hubble hoje. A *densidade crítica do universo* ρ_{cr} , isto é, a densidade necessária para parar a expansão do universo, pode ser dada em função de H :

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi}. \quad (1.65)$$

A curvatura espacial K pode ser determinada comparando-se a densidade atual ρ_0 com ρ_{cr} . Se $\rho_0 > \rho_{cr}$, então a curvatura K é positiva, se $\rho_0 = \rho_{cr}$, então $K = 0$ e para $\rho_0 < \rho_{cr}$, temos um universo hiperbólico. Da equação (1.62), obtemos:

$$\left(\frac{H(t)}{H_0}\right)^2 = \frac{\rho}{\rho_{cr}} - \frac{K}{a^2 H_0^2}. \quad (1.66)$$

Observe que, para $a \rightarrow 0$, podemos desprezar o termo de curvatura e então a densidade crítica ρ_{cr} é essencialmente igual a ρ . Por outro lado, ainda hoje, ρ_0 é um valor muito próximo ao da densidade crítica. Isso é explicado se considerarmos um universo plano, isto é, $K = 0$. Este é conhecido como *problema da planeza* e a pergunta então passa a ser: “Por que temos um universo plano?”.

Recentemente outro modelo cosmológico tem sido considerado, que leva em consideração não apenas os três pilares dos quais o Modelo Padrão é fundamentado, mas também a atual fase de expansão acelerada. Este recebeu o nome de Λ CDM, pois leva em consideração as componentes escuras, supondo que a matéria escura seja fria, isto é, partículas não-relativísticas. Nesta proposta, as Equações de Einstein são modificadas para acomodar a constante Λ . Este modelo também propõe uma fase inflacionária para o universo, que explicaria, dentre outras coisas, as observações sobre a radiação cósmica de fundo. Estima-se que a inflação começou aos 10^{-32} s. O universo, neste modelo, teve então uma

fase dominada pela radiação, seguido de uma fase dominada por poeira e, por fim, a fase atual de expansão acelerada, que é resultado de um universo dominado pela constante cosmológica, que representa a energia escura. Observe que o Big Bang, tanto aqui quanto no Modelo Padrão, é representado por uma singularidade de caráter problemático. A teoria prevê que toda matéria-energia do universo esteve, no momento inicial,¹⁷ contraída num único ponto. Esta ideia é bastante controversa e evoca muitas questões sobre a natureza desta singularidade. Um dos objetivos da Cosmologia Quântica é justamente analisar se fenômenos quânticos “resolvem” esta singularidade, isto é, se propõe a explicar a origem do universo.

¹⁷O tempo também foi criado a partir do Big Bang.

Capítulo 2

Cosmologia Quântica

O início do século XX foi muito especial para a física; paralelamente ao surgimento da Teoria da Relatividade Geral, houve o desenvolvimento de uma outra teoria revolucionária: a Mecânica Quântica. Em 1900, na tentativa de explicar o fenômeno da radiação de corpo negro,¹ Max Planck (1858 - 1947) postulou que a energia deveria ser quantizada em pacotes discretos que ele chamou de *quanta*. Ele propôs que a energia das ondas eletromagnéticas de frequência ν é dada por múltiplos inteiros da quantidade $h\nu$, onde h é conhecida como *constante de Planck*. Em 1905, seguindo as ideias de Planck, Einstein propôs uma explicação para o efeito fotoelétrico,² sugerindo que a luz também devesse ser discretizada em pequenos pacotes de energia, ou pequenas partículas, aos quais ele deu o nome de *fóton*. A partir daí, a ideia de quantização se popularizou e várias outras contribuições importantes foram feitas por nomes como Niels Bohr (1885 - 1962), Arthur Holly Compton (1892 - 1962), Paul Dirac (1902 - 1984), Erwin Schrödinger (1887 - 1961), Werner Heisenberg (1901 - 1976), etc.

A Mecânica Quântica é bastante contraintuitiva se comparado à Mecânica Clássica. Por causa disto, muitos físicos renomados demoraram até aceitá-la, fato bem representado pela famosa frase de Einstein “*Deus não joga dados*”, em alusão à natureza probabilística dada aos sistemas quânticos. A incompatibilidade entre física de micro e macro estruturas é uma questão ainda em aberto e se tornou um dos mais famosos e interessantes problemas da física: a busca pela teoria que vai unificar os desconexos campos da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica. Algumas teorias ganharam força com o passar do tempo, tais como a Teoria das Cordas e a Teoria Quântica de Laços (LQG - sigla em inglês), mas nenhuma pôde ainda ser confirmada. Enquanto a Teoria das Cordas se baseia em técnicas de Teoria Quântica de Campos, LQG é baseada na descrição Hamiltoniana da RG. A Cosmologia Quântica é uma teoria de quantização do cosmos que também é baseada no

¹A radiação eletromagnética térmica emitida por sistemas em equilíbrio termodinâmico, ou por um *corpo negro*: um corpo opaco e não-reflexivo.

²A emissão de elétrons de um material quando luz é lançada sobre este.

formalismo ADM apresentado no capítulo anterior, iniciada com os trabalhos de Bryce DeWitt (1923 - 2004), John Wheeler (1911 - 2008) e Misner no final da década de 60 - início da década de 70 [16]. A Cosmologia Quântica parte do pressuposto de que a física quântica pode ser aplicada a tudo, incluindo o universo [17]. Neste caso, a função de onda Ψ representa o universo e, portanto, a quantização é feita quando este está dentro da escala de Planck, estimadamente $5.4 \times 10^{-44}s$, o tempo de Planck;³ na Cosmologia Clássica, esse seria o período anterior ao da inflação, no universo primordial [18]. E, assim como é feito na Cosmologia Clássica, assumiremos algumas propriedades fundamentais, tais como homogeneidade e isotropia, e reduziremos as variáveis livres para um número finito, gerenciável. Este espaço com graus de liberdade reduzidos, isto é, de dimensão finita, é chamado de *mini-superespaço*. Assim, o modelo se torna uma aproximação da teoria total. Os sistemas considerados no mini-superespaço são comumente chamados de modelos teste; eles abordam aspectos importantes para a teoria, enquanto evitam outros, nos permitindo assim estudar certos comportamentos de forma isolada.

Neste capítulo introdutório sobre o assunto, apresentaremos a ideia por trás da *Quantização Canônica* e de como abordaremos os principais problemas inerentes à Cosmologia Quântica: o caráter autoadjunto do operador energia e o problema do tempo. A primeira seção é uma introdução à Mecânica Quântica e nas seções seguintes apresentamos os elementos básicos para a quantização de uma teoria e como explicamos os problemas que podem aparecer, fechando o capítulo com um exemplo interessante. Para o leitor mais interessado, sugerimos [19, 20, 21].

2.1 A Mecânica Quântica

A interpretação dos resultados de medições quânticas ainda hoje é motivo de debate, em especial com o advento das teorias de unificação. Ao medirmos, por exemplo, a posição de uma partícula, a questão que surge naturalmente é "onde esta se encontrava anteriormente?". Extrapolando este tipo de questionamento para a Cosmologia Quântica, faz sentido quantizar o universo como um todo? Esta é uma questão bastante delicada e controversa dentro da teoria quântica: os problemas de medida de um observável quantizado e a fronteira entre o clássico e o quântico. Em suma, um sistema quântico é descrito por uma função que descreve um comportamento ondulatório de probabilidade. No caso de uma partícula, pode-se considerar que esta é uma onda no espaço, fato conhecido como *dualidade onda-partícula*. O comportamento de onda e de partícula da luz, por exemplo, é bem representado pelo famoso experimento da fenda dupla, feito originalmente por Thomas Young (1773 - 1829), num contexto da ótica ondulatória, no início do século XIX e depois reproduzido num contexto de MQ por Clinton Davisson (1881 - 1958) e Lester Germer (1896 - 1971) em meados da década de 20.

³O tempo de Planck é definido como $t_{Planck} = (G\hbar)^{1/2}/c^{5/2}$.

A Mecânica Quântica usual é baseada na interpretação de Copenhagen, onde podemos prever apenas a probabilidade da ocorrência de certas medidas e a observação de um evento interfere no resultado final, como mencionado. Os princípios da Mecânica Quântica podem ser resumidos em quatro [22]:

- i. Os estados quânticos são descritos por funções de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$, que contêm toda a informação do sistema.
- ii. A função de onda tem uma interpretação probabilística. A densidade de probabilidade de posição da partícula é dada pelo módulo quadrado de $\Psi(\mathbf{r}, t)$, isto é,

$$d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = C |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3x, \quad (2.1)$$

onde C é uma constante de normalização.

- iii. Os observáveis clássicos são descritos quanticamente por operadores (autoadjuntos), que são aplicados na função de onda Ψ . A medida é sempre dada por um autovalor (real) do operador correspondente ao observável a ser medido.
- iv. A equação que descreve a evolução de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ é

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.2)$$

A função $V(\mathbf{r}, t)$ é o potencial do sistema e $\hbar = h/2\pi$, onde h é a constante de Planck. A equação (2.2) é conhecida como *Equação de Schrödinger*.

Para um estudo mais detalhado sobre Mecânica Quântica, sugerimos [22, 23, 24].

No caso da Cosmologia Quântica, a função de onda Ψ representa o universo em que vivemos e toda a informação nele contida. Assumimos um mini-superespaço gerado pela homogeneidade e isotropia, onde a "posição" \mathbf{r} é dada pelo fator de escala a , que representa o volume do universo, $V = a^3$. Assim, a evolução do universo ainda deve ser dada por uma equação do tipo Schrödinger, segundo o postulado (iv) acima, que será obtida a partir da Equação de Wheeler-DeWitt, como veremos nas próximas seções.

Porém, a interpretação de Copenhagen em si não pode ser aplicada à Cosmologia Quântica, pois esta necessita de um observador externo para explicar o colapso da função de onda. Porém, existem abordagens da Mecânica Quântica que buscam um melhoramento desta interpretação neste aspecto e que nos permite entender a CQ ainda considerando estes postulados, que são a base da MQ atual. Podemos utilizar, por exemplo, a teoria de Histórias Consistentes [25, 26, 27], que é uma tentativa de dar uma caráter universal a Mecânica Quântica mantendo os fundamentos da interpretação de Copenhagen [28]. Existem ainda outras interpretações, criadas a fim de resolver essa questão do observador e da medida. Alguns exemplos são a *Interpretação de Vários Mundos*, no qual presume-se que todas as possibilidades de medidas acontecem ao mesmo tempo, criando

mundos paralelos e realidades alternativas [29], e a *Interpretação de Bohm-de Broglie*, cuja premissa é que as partículas seguem trajetórias bem definidas, e o comportamento ondulatório é obtido a partir de outras equações que exploram a dinâmica da função de onda. Esta interpretação tem sido aplicada a muitos modelos de mini-superespaços [30, 31, 32], obtidos pela imposição de homogeneidade das hipersuperfícies espaciais.

Para nossos fins, vamos nos focar nos postulados apresentados anteriormente e evitar a polêmica questão da interpretação utilizada. Nos limitaremos a afirmar que escolhemos usar, por exemplo, a interpretação de Histórias Consistentes para nossa Cosmologia Quântica. Para um aprofundamento no assunto de Interpretação da Mecânica Quântica, recomendamos [28].

2.2 Quantização de uma teoria clássica

A ideia por trás da mecânica quântica, resumida nos postulados apresentados anteriormente, é que um sistema quântico não seria representado pelos observáveis clássicos, como posição, momento e energia; ao invés disso, o estado é descrito por uma função de onda $\Psi(\mathbf{r}, t)$ num espaço de Hilbert e estes observáveis clássicos são representados por operadores que, aplicados sobre a função de onda, nos fornecem um valor para a medida destes, esta sendo um autovalor do operador em questão. Tais operadores devem ser autoadjuntos e seus autovalores são sempre números reais. Outra forma de representar os estados quânticos é através da *notação de Dirac*, ou *notação bra-ket*; com ela, o estado é representado pelo vetor $|\Psi\rangle$, sendo o seu conjugado representado por $\langle\Psi|$, tal que

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \|\Psi\|^2. \quad (2.3)$$

Os vetores $\langle\Psi|$ e $|\Psi\rangle$ são chamados de *bra* e *ket* da função Ψ , respectivamente. Os operadores mais usuais são o operador posição \hat{Q}_i , momento \hat{P}_i e energia \hat{H} , referentes aos observáveis clássicos x_i , p_i e $\mathcal{H}(x_i, p_i, t)$. Os operadores \hat{Q}_i e \hat{P}_i são tais que

$$\hat{Q}_i\Psi(x_i, t) = x_i\Psi(x_i, t) \quad ; \quad \hat{P}_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}\Psi(x_i, t). \quad (2.4)$$

E o operador de energia \hat{H} é tal que

$$\hat{H}\Psi(x_i, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x_i, t). \quad (2.5)$$

Essa é a Equação de Schrödinger dada em (2.2).

A função de onda tem uma interpretação probabilística: a probabilidade de encontrar a partícula numa certa região \mathcal{U} é dada por

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}, t) = \int_{\mathcal{U}} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\nu, \quad (2.6)$$

onde $d\nu$ é o elemento de volume. A probabilidade de encontrar a partícula em todo o espaço deve ser 1, por isso exigimos que as funções de onda sejam normalizadas e, portanto, elas devem ser quadradointegráveis: as funções de onda que descrevem sistemas físicos devem tender a zero nas bordas do domínio. O *valor esperado* de um observável \hat{O} em relação a uma partícula no estado Ψ é definido como

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} | \Psi \rangle = \int_{\mathcal{D}} \Psi^* \hat{O} \Psi d\nu, \quad (2.7)$$

onde \mathcal{D} é o domínio da função Ψ . O valor esperado nos diz que a medida média resultante da observação de várias partículas no estado Ψ será $\langle \Psi \rangle$. As autofunções de energia formam uma base para o espaço de Hilbert e, então, os estados quânticos podem ser escritos como combinações lineares de autoestados de energia. Assim, considerando uma função unidimensional, para simplificar

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}, \quad (2.8)$$

sendo $c_n \in \mathbb{C}$ e E_n os autovalores de energia, ou seja,

$$\hat{H}\psi(x) = E_n\psi(x). \quad (2.9)$$

O módulo quadrado dos coeficientes c_n nos fornece a probabilidade da medição da energia do estado Ψ resultar no valor E_n , em particular temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = 1. \quad (2.10)$$

A Cosmologia Quântica engloba estes conceitos básicos da MQ na tentativa de quantizar o universo. Os operadores da mecânica quântica são, como já dito, representações de observáveis clássicos e, classicamente, a energia do sistema é dada pela Hamiltoniana. Por isso fizemos a descrição da RG com o formalismo ADM, pois o operador Hamiltoniano é essencial para esta formulação: a equação de movimento dos estados quânticos envolve diretamente a energia do sistema. A *Quantização Canônica* de um sistema é feita quantizando-se a Hamiltoniana $\mathcal{H}(x, p_x)$, que é uma função da posição e do momento, através dos operadores (2.4). Assim, encontramos o operador Hamiltoniano $\hat{H}(\hat{Q}, \hat{P})$, que é escrito em função dos operadores \hat{Q} e \hat{P} . No entanto, vimos que, na Relatividade Geral, a Hamiltoniana possui o vínculo (1.58). A quantização deste é chamada de *Equação de Wheeler-DeWitt*:

$$\hat{H} = 0. \quad (2.11)$$

Se comparado com a equação de Schrödinger (2.5), onde o Hamiltoniano da função de onda fornece a evolução temporal desta, há uma discrepância óbvia. Este fato é parte de uma aparente incompatibilidade entre Mecânica Quântica e Relatividade Geral chamado de

problema do tempo. A questão surge por causa do diferente tratamento do tempo nas duas teorias. Na MQ, o tempo não é considerado um observável [21], é apenas um parâmetro externo; enquanto que na RG, o tempo é considerado uma coordenada do espaço-tempo, estando em pé de igualdade com as outras variáveis espaciais. Essa diferença é evidenciada nesta comparação entre a equação de Schrödinger e a equação de Wheeler-DeWitt, em que o tempo parece sumir durante a quantização da teoria clássica. Uma forma de encarar este problema seria considerar que a Hamiltoniana da teoria clássica carrega uma componente que faz o papel do tempo. Sendo assim, ao quantizarmos o vínculo (2.11), obtemos uma equação do tipo-Schrödinger, considerando a evolução da função de onda em relação a este parâmetro. Voltaremos neste problema mais para frente.

Em todo caso, a Cosmologia Quântica se baseia na quantização do vínculo de energia, considerando que a Hamiltoniana carrega um parâmetro T , de forma que

$$\mathcal{H}(x_i, p_i, p_T) = 0. \quad (2.12)$$

O momento deste parâmetro deve aparecer linearmente, tal que a quantização deste vínculo resulte numa equação do tipo (2.2) e então definimos o operador Hamiltoniano \hat{H} de acordo com a equação (2.5). Porém, ao tomarmos esta abordagem, não há garantia nenhuma de que o operador \hat{H} será autoadjunto. Se o operador não for autoadjunto, a teoria não será coerente na Interpretação de Copenhagen, então é preciso verificar esta condição e, caso não seja, se é possível estender o operador de forma que esta extensão seja autoadjunta. Nas próximas seções vamos abordar esta questão e também o problema do tempo.

2.3 Operadores e extensões autoadjuntos

Operadores autoadjuntos têm um papel fundamental na Mecânica Quântica usual, como vimos. Frequentemente confunde-se as noções de operador autoadjunto e simétrico (Hermitiano). De fato, nos domínios mais recorrentes na MQ, estas definições são sinônimas, porém há operadores simétricos que não são autoadjuntos e, então, precisamos distinguir estas duas noções. Em todo caso, para operadores que são apenas simétricos, há a possibilidade deles poderem ser estendidos para um operador autoadjunto; estas são chamadas sugestivamente de extensões autoadjuntas. Nesta seção, vamos definir a diferença entre os operadores simétrico e autoadjuntos e como saber se existem extensões. Para um estudo completo sobre o assunto, recomendamos [33] e [34].

Dados uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} ⁴ e um operador $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, o seu *adjunto* T^* é tal que:

$$\langle T^* \psi, \phi \rangle = \langle \psi, T \phi \rangle \quad , \quad \psi, \phi \in D(T). \quad (2.13)$$

⁴Usamos a notação usual para o espaço de Hilbert \mathcal{H} , que também usamos para representar a Hamiltoniana clássica de um sistema. Entendemos que não haverá confusão por estarem em contexto diferentes.

O domínio de T^* é dado pelas funções ψ que satisfazem a relação (2.13) acima, isto é, $D(T^*) = \{\psi \mid \langle T^*\psi, \phi \rangle = \langle \psi, T\phi \rangle; \forall \phi \in D(T)\}$. Dizemos que T é um *operador simétrico*, ou *Hermitiano*, se

$$\langle T\psi, \phi \rangle = \langle \psi, T\phi \rangle \quad , \quad \forall \psi, \phi \in D(T) , \quad (2.14)$$

isto é, se o operador é igual a seu adjunto restrito ao domínio $D(T)$. Observe que, para um operador simétrico, $D(T) \subset D(T^*)$. Se T é simétrico e

$$D(T) = D(T^*) , \quad (2.15)$$

então dizemos que T é um *operador autoadjunto*. Se um operador é apenas simétrico, há casos em que seu domínio pode ser estendido de forma que ele se torne autoadjunto, ou seja, o operador com o novo domínio tem um adjunto com o mesmo domínio. Este operador com o domínio estendido é chamado de *extensão autoadjunta*. Assim, se \tilde{T} é uma extensão do operador simétrico T , temos que

$$D(T) \subset D(\tilde{T}) = D(\tilde{T}^*) \subset D(T^*) . \quad (2.16)$$

É importante comentar que nem todo operador simétrico pode ser estendido para um operador autoadjunto, mas, quando puder, este pode ter até infinitas diferentes extensões. Essa questão de operadores e extensões autoadjuntos foi minuciosamente estudada por John von Neumann (1903 - 1957) logo após do advento da Mecânica Quântica. Um critério útil para determinar a existência de extensões é dado pelo Teorema de von Neumann [34]:

Seja T um operador simétrico com domínio $D(T)$ denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} e suponha que existe uma aplicação antilinear $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, chamada conjugação, tal que

$$C(D(T)) \subset D(T) \quad , \quad C^2 = Id \quad \text{e} \quad CT = TC . \quad (2.17)$$

Então T admite extensão autoadjunta.

Observe que, usando este teorema, podemos deduzir que todo operador T com coeficientes reais é autoadjunto ou admite extensões autoadjuntas ao considerarmos a aplicação antilinear $C : \phi \mapsto \phi^*$, que é simplesmente tomar o complexo conjugado da função no espaço de Hilbert \mathcal{H} , se considerarmos o domínio tal que $C(D(T)) \subset D(T)$.

O teorema de von Neumann fornece um método para saber se o operador admite ou não extensões, porém não obtemos nenhuma informação sobre a quantidade de extensões ou sobre como encontrá-las. Para solucionar este problema, usaremos um outro método que envolve o cálculo de soluções de uma equação de autovalores imaginários, conhecido como *método de von Neumann* ou *método dos índices de deficiência*. Dado um operador simétrico T com domínio $D(T)$ denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} , vamos denotar por $K_{\pm}(T)$ os espaços gerados pelas soluções ϕ das equações

$$T^*(\phi) = \pm i\phi \quad , \quad \phi \in D(T^*) , \quad (2.18)$$

respectivamente. Os subespaços $K_{\pm}(T)$ são chamados *espaços de deficiência* e suas dimensões $n_{\pm} = \dim K_{\pm}(T)$ são chamadas *índices de deficiência*. Através dos índices de deficiência, von Neumann mostrou que

- i. Se $n_{+} = n_{-} = 0$, então o operador possui uma única extensão autoadjunta, ou seja, ele é essencialmente autoadjunto;
- ii. se $n_{+} = n_{-} = n$, as extensões autoadjuntas são correspondentes um-a-um com os operadores unitários entre K_{+} e K_{-} ;
- iii. se $n_{+} \neq n_{-}$, o operador não possui extensões.

Um operador *essencialmente autoadjunto*, como dito anteriormente, é aquele que é autoadjunto ou possui uma única extensão autoadjunta. Por praticidade, escolhemos daqui em diante ignorar a diferença entre estes e operadores autoadjuntos. A essência deste teorema reside no fato dos autovalores dos operadores autoadjuntos sempre serem reais. Assim, se $n_{+} = n_{-} = 0$, a equação (2.18) não tem solução e isto indica que o operador é autoadjunto. No caso do item (ii), as autofunções que têm autovalores imaginários formam um subespaço que pode ser “excluído” do domínio do operador adjunto, de forma que, restrito ao novo subconjunto, o operador recupera o caráter autoadjunto.

É possível calcular as extensões, se estas existirem, a partir dos operadores unitários entre os espaços K_{+} e K_{-} , porém este é um trabalho longo e, dependendo do operador, pode haver um número infinito destes operadores unitários, o que torna o cálculo analítico impraticável. Apresentamos no Apêndice o cálculo para obter as extensões do operador momento. Por enquanto, vamos apresentar uma extensão para operadores limitados, chamada extensão de Friedrich, cujas características são fisicamente (e matematicamente) convenientes. Dado um operador T , se este for limitado inferiormente e os índices de von Neumann forem iguais, existe uma única extensão, chamada *Extensão de Friedrich*, que é obtida a partir da forma quadrática associada ao operador T .

Considere um operador simétrico T e seja $q(\phi, \psi) = \langle \phi, T\psi \rangle$, para $\phi, \psi \in D(T)$. Então, q é uma forma quadrática fechável e seu fecho \tilde{q} é a forma quadrática de um operador autoadjunto único \tilde{T} . \tilde{T} é uma extensão positiva de T e o limite inferior de seu espectro é o mesmo do que de q . Além disso, \tilde{T} é a única extensão autoadjunta de T cujo domínio está contido no domínio da forma \tilde{q} .

Uma forma quadrática é uma aplicação $q : Q(q) \times Q(q) \rightarrow \mathbb{C}$ que é linear na primeira entrada e antilinear na segunda. O conjunto $Q(q)$ é chamado *domínio da forma* e é um subespaço denso do espaço de Hilbert. Uma forma quadrática positiva, isto é, $q(\psi, \psi) \geq 0$, para $\psi \in D(q)$, é dita fechada se $Q(q)$ é completo sob a norma

$$\|\psi\|_{+1}^2 \equiv \|\psi\|^2 + q(\psi, \psi), \quad (2.19)$$

que é chamada de *norma da forma*. Para um operador simétrico e positivo T , podemos definir uma forma quadrática positiva da seguinte maneira

$$q(\phi, \psi) = \langle \phi, T\psi \rangle \quad , \quad (2.20)$$

com $D(q) = D(T)$. O fecho \tilde{q} de q é construído usando-se a norma da forma $\|\cdot\|_{+1}^2$, de acordo com o teorema acima, e ele é associado a uma única extensão autoadjunta \tilde{T} , tal que $D(\tilde{T}) \subset D(\tilde{q})$. Esse teorema é consequência de outro conhecido como Teorema B.L.T [33], que diz que uma transformação linear limitada⁵ sempre possui uma extensão linear e limitada. Nesta caso, apresenta-se uma forma linear que gera uma transformação do tipo, sendo escolhida pertinentemente (2.20) tal que a simetria seja preservada. Apresentamos no Apêndice o cálculo da extensão de Friedrich para o operador $-d^2/dx^2$.

Matematicamente, todas as extensões são viáveis e, fisicamente, cada uma gera uma dinâmica diferente. No entanto, a extensão de Friedrich é compatível com o esperado fisicamente, já que esta tem o mesmo limite inferior que o operador e, além disso, é a única cujo domínio está contido no domínio da forma quadrática definida pelo operador. Em outras palavras, ela preserva o estado fundamental de energia e as condições de contorno são encontradas de forma mais evidente do que usando-se o método de Von Neumann, uma vez que pode ser obtida através da norma da forma quadrática associada.

2.4 O problema do tempo

A incompatibilidade entre a interpretação do tempo na Mecânica Quântica e na Relatividade Geral é um dos grandes motivos pelo qual ainda não temos uma teoria de unificação definitiva. Para as teorias como a Cosmologia Quântica, que são baseadas no formalismo Hamiltoniano da RG, o problema do tempo se concretiza no fato da RG ser um sistema vinculado e, por isso, não ter uma Hamiltoniana efetiva que gere evolução em relação a um parâmetro temporal generalizado. Várias hipóteses sobre a natureza do tempo foram formuladas, dentre elas a de que o próprio tempo pode ser quantizado [35, 36]. Nosso interesse é quantizar o vínculo (1.58), então vamos identificar o tempo com um parâmetro interno do sistema, de forma que a Hamiltoniana em questão gere evolução em relação a este. Porém, no mini-superespaço, usando a métrica (1.35), a única variável dinâmica do universo é o fator de escala, por causa do vínculo (1.58), que nos diz que a função lapso N é um multiplicador de Lagrange. A Lagrangiana gravitacional (1.32), depois de descartado termos de derivadas totais, se escreve como

$$\mathcal{L}_G = \frac{6}{N} a \dot{a}^2 . \quad (2.21)$$

Pela (1.49), encontramos

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot{a}} = \frac{12}{N} a \dot{a} . \quad (2.22)$$

⁵Bounded linear transformation, no inglês - de onde vem a sigla B.L.T.

Então, pela equação (4.95), temos

$$\mathcal{H}_G = \frac{N \pi_a^2}{24 a}. \quad (2.23)$$

Observe que, se tivermos apenas a parte gravitacional da RG, a Hamiltoniana clássica (2.23) é função apenas do fator de escala a e seu momento π_a e, neste caso, a equação de Wheeler-DeWitt, $\hat{H}_G = 0$, implicaria num operador de energia que não evolui, ou seja, não há um parâmetro temporal na teoria. Portanto, é necessário introduzir algo a mais além da parte gravitacional da Relatividade Geral, que fará o papel do tempo.

Das opções mais comuns para a escolha do tempo, estão a introdução de um campo escalar na teoria [3, 37], que pode fazer o papel de tempo como um parâmetro externo, assim como ele é na MQ; ou utilizar o conteúdo material do universo para gerar a evolução temporal desejada [38, 39]. Esta última se baseia na termodinâmica, na ideia de que a entropia dá sentido à seta do tempo. Usar um campo escalar como escolha de tempo é interessante, pois na própria MQ o tempo é um parâmetro externo ao sistema, o mesmo ocorre neste caso. A ideia é considerar uma teoria escalar e linearizar o campo de forma que o seu momento apareça linear na equação. Vamos abordar um exemplo desta situação na próxima seção. Por enquanto, vamos considerar um fluido perfeito como componente material do universo e mostrar como este pode ser usado como parâmetro temporal, através do Formalismo de Schutz. Em 1970, Bernard Schutz (1946 -) desenvolveu um formalismo para descrever a quadrivelocidade de um fluido bariônico perfeito através de seis potenciais [40]:

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{;\nu} + \zeta \xi_{;\nu} + \theta s_{;\nu}). \quad (2.24)$$

Os potenciais μ e s são a massa inercial e a entropia do sistema, ζ e ξ estão relacionados com a rotação do fluido e não estão presentes em modelos do tipo FLRW. Já ϵ e θ não têm um claro significado físico [38]. A quadrivelocidade deve obedecer à condição de normalização

$$U^\nu U_\nu = 1. \quad (2.25)$$

Cada potencial possui sua própria “equação de movimento”, que fornece uma descrição hidrodinâmica equivalente às equações usuais baseadas na divergência do tensor de tensão. Schutz mostrou que essa formulação pode ser resultado do princípio variacional de uma Lagrangiana de matéria dada por $\mathcal{L}_M = \sqrt{-g} p$, onde p é a pressão do fluido.

Assim, para obtermos a Hamiltoniana de matéria \mathcal{H}_M , introduzimos a componente de matéria, definida pela equação de estado $p = \alpha \rho$, usando o formalismo de Schutz, onde a constante α representa o tipo de matéria da qual o fluido é constituído. Como dissemos, para um universo FLRW, a quadrivelocidade do fluido é dada por

$$U_\nu = \frac{1}{\mu} (\epsilon_{;\nu} + \theta s_{;\nu}). \quad (2.26)$$

Depois de algumas considerações termodinâmicas [41], a Lagrangiana de matéria toma a forma

$$\mathcal{L}_M = -\frac{a^3}{N^{\frac{1}{\alpha}}} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}}} (\dot{\epsilon} + \theta\dot{s})^{\frac{1}{\alpha+1}} e^{-\frac{s}{a}}, \quad (2.27)$$

onde já descartamos os termos de superfície. Usando os métodos canônicos descritos na Seção 1.4, a partir desta Lagrangiana obtemos a super-Hamiltoniana de matéria

$$\mathcal{H}_M = -\pi_\epsilon^{\alpha+1} a^{-3\alpha} e^s, \quad (2.28)$$

com $\pi_\epsilon = -N\rho_0 U^0 a^3$, sendo ρ_0 a densidade de repouso do fluido. O próximo passo é linearizar o momento, de forma que a nova coordenada possa assumir o papel de tempo durante a quantização. Vamos usar as transformações canônicas

$$T = -\pi_s e^{-s} \pi_\epsilon^{-(\alpha+1)} \quad ; \quad \pi_T = \pi_\epsilon^{\alpha+1} e^s \quad (2.29)$$

$$\bar{\epsilon} = \epsilon - (\alpha+1) \frac{\pi_s}{\pi_\epsilon} \quad ; \quad \bar{\pi}_\epsilon = \pi_\epsilon. \quad (2.30)$$

Neste caso, a super-Hamiltoniana da componente de matéria se torna

$$\mathcal{H}_M = -\frac{N}{a^{3\alpha}} \pi_T. \quad (2.31)$$

Com isto, a quantização do vínculo da Hamiltoniana total $\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_M = 0$, sendo \mathcal{H}_G a Hamiltoniana da parte gravitacional e \mathcal{H}_M dado por (2.31), pode ser interpretado como uma equação de Schrödinger cujo parâmetro T dado em (2.29) é tomado como tempo. Observe que o parâmetro temporal está totalmente ligado ao tipo de matéria escolhido e à entropia s do fluido.

2.5 Teoria de K-essência

Uma teoria escalar é caracterizada pela introdução de um campo escalar externo à geometria do espaço-tempo, podendo estar acoplado ou não à gravidade, que visam explicar alguns problemas em aberto da cosmologia. Vamos abordar nesta seção a Teoria de K -essência e investigar a possibilidade de obter uma variável temporal de uma forma similar ao emprego das variáveis de Schutz, usando uma lei de potência no termo cinético não-canônico [3]. Dentre várias outras propostas de teorias escalares encontradas na literatura, as *Teorias de K-essência* têm uma posição bastante particular. Criadas inicialmente para descrever a fase inflacionária do universo, estas também têm sido usadas para explicar a fase atual de expansão acelerada. Essa classe de teorias considera termos cinéticos não-canônicos ao invés de um campo escalar autointeragente, como é o caso do caso do campo escalar com um potencial. Em alguns casos, o comportamento de K -essência pode ser recuperado de uma ação de cordas efetiva, como acontece com a ação DBI⁶ [42, 43]. Em

⁶Dirac-Born-Infeld.

um contexto cosmológico, uma das características destas teorias é que, sob algumas hipóteses, elas podem produzir uma dinâmica de fluidos a níveis de fundo e perturbativos. Isso é particularmente verdade para a expressão de lei de potência da energia cinética, que pode reproduzir uma relação linear entre pressão e densidade $p = \alpha\rho$ e a velocidade do som para perturbações adiabáticas do fluido.

A ação da teoria geral de K -essência pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - f(X) + V(\phi)) , \quad (2.32)$$

com $g = \det[g_{\mu\nu}]$, $f(X)$ uma função arbitrária do termo cinético $X = \phi_{;\rho}\phi^{;\rho}$ e $V(\phi)$ um termo potencial. Se $f(X) = X$, a teoria de um sistema minimamente acoplado com um campo escalar autointeragente é recuperada. No que se segue, vamos nos concentrar em leis de potência do modelo de K -essência, para os quais temos $f(X) = \epsilon X^n$, onde n é um número real e $\epsilon = \pm 1$. Com a introdução da constante ϵ , a possibilidade de uma configuração fantasma⁷ é levada em conta; o sistema usual de um campo escalar gravitacional corresponde a $n = 1$ e $\epsilon = 1$. Além disso, vamos considerar $V(\phi) = 0$. Neste caso o cenário de fluido cosmológico com $p = \alpha\rho$ e $\alpha = \text{constante}$ é reproduzido pelo modelo de K -essência, observando-se que

$$\alpha = \frac{1}{2n - 1} . \quad (2.33)$$

Considerando a métrica FLRW (1.35), depois de integrações por partes e descarte das derivadas totais, a ação (2.32) se reduz a

$$S = \int dt \left(\frac{6}{N} \dot{a}^2 a - \epsilon a^3 N^{1-2n} \dot{\phi}^{2n} \right) . \quad (2.34)$$

Observe que, como o n pode ser um número real arbitrário, $(\dot{\phi})^{2n}$ pode não ser sempre positivo. Para garantirmos analicidade do cálculo do momento, vamos considerar $\dot{\phi}$ positivo, mas podemos estender o resultado para toda a reta real.

Os momentos conjugados correspondentes para o fator de escala a e o campo escalar ϕ são

$$\pi_a = \frac{12}{N} a \dot{a} \quad ; \quad \pi_\phi = -2n \epsilon a^3 N^{1-2n} \dot{\phi}^{2n-1} . \quad (2.35)$$

Para expressarmos $\dot{\phi}$ em termos de π_ϕ devemos inverter a relação acima. Para $n = 2k$, onde k é um número natural diferente de zero, o radicando deve ser positivo ($\epsilon = -1$); para $n = 2k + 1$, o radicando não precisa ser positivo, mas a analicidade é perdida na origem $\pi = 0$. Apesar disso, vamos prosseguir de forma mais geral, já que a configuração que nos interessa implica condições diferentes para n . A Hamiltoniana é dada por

$$\mathcal{H} = N \left[\frac{1}{24} \frac{\pi_a^2}{a} + (2n - 1) (-\epsilon a^3)^{-\frac{1}{2n-1}} \left(\frac{\pi_\phi}{2n} \right)^{\frac{2n}{2n-1}} \right] . \quad (2.36)$$

⁷Um sistema cuja energia cinética é negativa. A ideia de que a natureza das componentes escuras do universo seja fantômica é recorrente na Cosmologia [44].

No limite $n \rightarrow \infty$, o momento conjugado associado a ϕ aparece linear na Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = N \left[\frac{1}{24} \frac{\pi_a^2}{a} + \pi_\phi \right], \quad (2.37)$$

então o campo ϕ pode assumir o papel de tempo na quantização desta teoria. Algumas observações importantes: observe que tal limite, $n \rightarrow \infty$, deve ser tratado com cautela no caso de permitirmos valores negativos para $\dot{\phi}$, uma vez que as sequências $(\dot{\phi})^{2k}$ e $(\dot{\phi})^{2k+1}$ divergem para valores opostos, no caso de $\dot{\phi} < 0$. Porém, este problema pode ser facilmente contornado fazendo a análise separadamente para π_ϕ positivo e negativo e considerando-se o sinal correto ao escrevermos $\dot{\phi}$ em relação ao momento π_ϕ . É possível mostrar que a colagem desta separação é suave. Além disso, note que, mesmo que a Hamiltoniana seja bem definida no limite $n \rightarrow \infty$, a Lagrangiana não é, divergindo para o caso limite, o que parece ser uma particularidade para um fluido de pressão nula ($\alpha \rightarrow 0$), como o obtido neste caso.

A quantização é feita canonicamente de acordo com (2.4). Depois de fazermos a redefinição $\phi/24 \rightarrow \phi$, a equação de Schrödinger correspondente⁸ se escreve como

$$-\partial_a^2 \Psi - \frac{q}{a} \partial_a \Psi = ai \partial_\phi \Psi, \quad (2.38)$$

onde introduzimos um fator de ordenamento⁹ q . Esta é essencialmente a mesma equação encontrada com o formalismo de Schutz em [39]. No que segue, vamos considerar $q = 1$. Neste caso é possível mostrar que o operador Hamiltoniano efetivo é autoadjunto [1]. Outras escolhas para q podem ser adotadas sem alteração significativa dos resultados finais. O operador Hamiltoniano obtido da equação do tipo Schrödinger (2.38) é simétrico, ou Hermitiano, se introduzirmos uma medida não trivial na computação do produto escalar no espaço de Hilbert:

$$(\phi, \psi) = \int_0^\infty \phi^* \psi a^2 da. \quad (2.39)$$

Vamos considerar os estados estacionários Φ tais que $\Psi(a, \phi) = \Phi(a)e^{-iE\phi}$. Então a equação (2.38) toma a forma

$$\partial_a^2 \Phi + \frac{1}{a} \partial_a \Phi + aE\Phi = 0. \quad (2.40)$$

Esta equação é limitada inferiormente e é sempre possível escolher a energia como sendo estritamente positiva, isto é, $E > 0$, o que é importante para a estabilidade do sistema. Fazendo $4E/9 \rightarrow E$, (2.40) é uma equação de Bessel cuja solução é dada por

$$\Phi(a) = A(E) J_0 \left(Ea^{\frac{3}{2}} \right), \quad (2.41)$$

⁸Lembrando que $\hbar = 1$.

⁹Relacionado ao fato dos operadores momento e posição não comutarem. Mais detalhes sobre o fator de ordenamento no capítulo seguinte.

onde $A(E)$ é um fator de normalização. Descartamos a segunda solução da equação de Bessel, que é uma função de Neumann, pois esta diverge na origem.

A solução (2.41) pode levar a um cenário cosmológico não-singular, como mostrado em [39]. De fato, vamos considerar um pacote de ondas construído com a seguinte superposição

$$\Psi_\phi(a) = \int_0^\infty ye^{-\alpha y^2} J_0\left(ya^{\frac{3}{2}}\right) dy = \frac{1}{2(\gamma + i\phi)} e^{-\frac{a^3}{4(\gamma + i\phi)}}, \quad (2.42)$$

com $y = \sqrt{E}$ e $\alpha = \gamma + i\phi$, sendo $\gamma > 0$. Agora, calculamos o valor esperado para o fator de escala, considerando ϕ a variável temporal correspondente. O valor esperado é

$$\langle a \rangle_\phi = \int_0^\infty \Psi^* a \Psi a^2 da = C (\gamma^2 + \phi^2)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.43)$$

sendo C uma constante. Isto implica num possível universo com ricochete, sem singularidade, pois $\langle a \rangle \geq C\gamma^{2/3}$. Além disso, assintoticamente, ou seja, quando $\phi \rightarrow \infty$, temos $\langle a \rangle \propto \phi^{2/3}$.

Podemos facilmente verificar que a correspondência com o cenário cosmológico clássico é recuperado assintoticamente. Usando FLRW, encontramos as equações diferenciais (Equações de Friedmann (1.62), (1.63)), fixando o tempo cósmico tal que $N = 1$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{(2n-1)}{6} \epsilon \dot{\phi}^{2n} \quad ; \quad \dot{\phi}^{2n-1} = K a^{-3}, \quad (2.44)$$

onde K é uma constante de integração. Portanto, temos a seguinte equação para o fator de escala:

$$3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \bar{K} a^{-\frac{6n}{2n-1}} =: \rho_\phi, \quad (2.45)$$

sendo \bar{K} uma combinação das constantes anteriores. A solução geral é dada por

$$a \propto t^{\frac{2n-1}{3n}} \quad ; \quad \phi \propto t^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.46)$$

No limite $n \rightarrow \infty$, a solução se torna:

$$a \propto t^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad \phi \propto t. \quad (2.47)$$

Esta última relação confirma a afirmação anterior que ϕ pode essencialmente fazer o papel do tempo no limite $n \rightarrow \infty$. Além disso, neste limite o fator de escala se comporta como num universo dominado por poeira. Classicamente temos a relação $a \propto \phi^{2/3}$, que suporta o resultado encontrado assintoticamente para o modelo quântico. Vale ressaltar que estes resultados são os mesmos encontrados em [39] para um fluido perfeito utilizando o formalismo de Schutz. Assim, do ponto de vista dos resultados, não há originalidade. A novidade está no formalismo utilizado nesta seção.

Capítulo 3

Quantização Afim

A quantização canônica, apesar de simples, apresenta algumas particularidades que podem ser vistas como desvantagens. Por exemplo, o fato da quantização ser feita canonicamente sobre as quantidades clássicas posição e momento, leva a operadores que não comutam, sendo necessário impor “a mão” um fator de ordenamento, como veremos mais a frente. A operação canônica é estendida para os observáveis clássicos $f(q, p)$ de forma que $f(q, p) \rightarrow f(\hat{Q}, \hat{P})$, porém encontramos um problema ao tentarmos quantizar funções singulares ou com domínios não usuais. Inclusive, a questão do caráter autoadjunto abordado no Capítulo 2 é um reflexo deste problema, visto que o sistema cosmológico é sempre definido para valores positivos do fator de escala (que determina o volume do universo), ou seja, na semirreta real. Alguns operadores, que são originalmente autoadjuntos, se definidos na reta real deixam de ser, no caso de restringirmos o domínio para a semirreta por causa da singularidade geométrica na origem. Tendo em vista estas dificuldades de âmbitos físicos e matemáticos do método canônico, outros métodos de quantização ganharam força na tentativa de saná-los. Uma alternativa interessante para sistemas com variáveis dinâmicas estritamente positivas é a *Quantização Afim*, que recebe este nome por ser um método baseado em grupos de simetrias do espaço cotangente, que combina translações e dilatações, o *Grupo Afim*, e que, portanto, preserva tais propriedades (simetrias) durante a quantização.

Podemos atribuir as primeiras ideias por trás deste tipo de método de quantização a Schrödinger, que em 1926 já estudava superposições de estados quânticos com características muito similares aos seus análogos clássicos [45], mas só mais tarde, na década de 60, que a teoria ganharia um formato mais elaborado, com os trabalhos de John R. Klauder (1932 -), Roy J. Glauber (1925 -) e Valentim Bargmann (1908 - 1989). Glauber cunhou o termo “estados coerentes” para esta superposição de estados quânticos na qual a teoria se baseia. Mais recentemente, este método de quantização tem sido aplicado à Cosmologia Quântica com resultados satisfatórios [46, 47, 48]. De fato, existe toda uma classe de quantização covariante por integração baseadas nos grupos de simetria dos espaços de

fase, dependendo da configuração deste. No nosso caso, como já dito, o espaço de fase é um semiplano e o grupo de simetrias é o Afim. A quantização afim é covariante, no sentido que relaciona simetrias clássicas, que são operações geométricas, com quânticas, as transformações unitárias. É uma quantização por integrais, o que nos permite usar todos os recursos do cálculo integral para lidar com funções singulares clássicas e distribuições. Para leitores mais interessados, recomendamos [5, 45, 49].

Neste capítulo, vamos introduzir os conceitos básicos por trás da quantização afim, apresentando as vantagens do método e a interpretação semiclássica resultante desta quantização [5]. O objetivo do capítulo é apresentar uma alternativa interessante à quantização canônica, mostrando suas vantagens sobre esta. A primeira seção é dedicada à introdução do Grupo Afim no qual é baseado o método de quantização. Em seguida definimos a aplicação que leva os observáveis clássicos em operadores. Na Seção 3.3 fazemos o caminho inverso, definindo a aplicação inversa, que leva os operadores quânticos em funções clássicas, que seriam as correções semiclássicas dos observáveis quânticos. Finalmente, a última seção apresenta um exemplo cosmológico para um universo dominado por poeira, onde aplicamos todas as ferramentas da quantização afim, obtendo bons resultados.

3.1 O grupo afim

A quantização afim é utilizada em sistemas definidos num domínio estritamente positivo, ou seja, a evolução temporal da quantidade física é sempre positiva, como, por exemplo, uma partícula se movendo na semirreta real. Neste tipo de sistema, o espaço de fase é dado pelo semiplano positivo $\Pi_+ := \{(q, p) \mid p \in \mathbb{R}, q > 0\}$, equipado com a medida $dq dp$. Definimos o *Grupo Afim* $\text{Aff}_+(\mathbb{R})$ como sendo o conjunto Π_+ munido da operação (multiplicação)

$$(q, p)(q_0, p_0) = \left(qq_0, \frac{p_0}{q} + p \right). \quad (3.1)$$

O elemento inverso é dado por

$$(q, p)^{-1} = \left(\frac{1}{q}, -qp \right) \quad (3.2)$$

e a unidade do grupo é $(1, 0)$. O grupo afim age na semirreta real da seguinte forma:

$$x \mapsto (q, p) \cdot x = \frac{x}{q} + p \quad , \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

O grupo representa dilatações e translações no espaço de fase. Escolhemos a medida $dq dp$ porque ela permanece invariante com respeito à ação pela esquerda do grupo sob ele mesmo $(q, p) \mapsto (q_0, p_0)(q, p) \in \text{Aff}_+(\mathbb{R})$:

$$(q', p') = (q_0, p_0)(q, p) = \left(q_0 q, \frac{p}{q_0} + p_0 \right) \Rightarrow dq' dp' = (q_0 dq) \left(\frac{dp}{q_0} \right) = dq dp. \quad (3.4)$$

Se, ao invés, considerássemos a ação pela direita, ou seja, $(q, p) \mapsto (q, p)(q_0, p_0)$, a medida invariante seria $dq dp/q$.

Vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre grupos, que usaremos em seguida [50]. Uma *representação* de um grupo G é uma função contínua linear $g \mapsto T(g)$, onde, para cada $g \in G$, temos $T(g) : \mathcal{L}(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{V}$, sendo \mathcal{V} um espaço vetorial e $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ o espaço das funções contínuas lineares sobre \mathcal{V} . Da linearidade, seguem as seguintes propriedades:

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2) \quad ; \quad T(e) = Id, \quad (3.5)$$

onde e é a unidade do grupo G e Id é a identidade do espaço \mathcal{V} . Segue que

$$T(g^{-1}) = [T(g)]^{-1}. \quad (3.6)$$

Uma representação é dita *unitária* se os operadores lineares $T(g)$ são unitários com respeito ao produto interno de \mathcal{V} , isto é,

$$\langle T(g)v_1, T(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad , \quad \forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}. \quad (3.7)$$

E, por fim, uma representação é dita *irredutível* se não existir nenhum subconjunto não-trivial $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ tal que, para todo vetor $v_0 \in \mathcal{V}_0$, temos $T(g)v_0 \in \mathcal{V}_0$, para todo $g \in G$. Isto quer dizer que não existe nenhum subconjunto de \mathcal{V} que seja invariante pela ação da representação, a menos do subconjunto trivial $\{Id\}$. Uma propriedade importante das representações unitárias irredutíveis é dada pelo *Lema de Schur*:

Sejam T e T' representações unitárias irredutíveis dos espaços \mathcal{V} e \mathcal{V}' , respectivamente. Se $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ é uma aplicação linear limitada tal que

$$ST(g) = T'(g)S \quad , \quad \forall g \in G, \quad (3.8)$$

então ou S é um isomorfismo de \mathcal{V} para \mathcal{V}' , ou $S = 0$. Em particular, se $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$, temos $S = c Id$, onde c é uma constante real.

Isto nos diz que representações unitárias irredutíveis comutam com isomorfismos e, portanto, podem ser aplicadas tanto antes quanto depois da ação de um grupo.

O grupo afim tem duas representações unitárias irredutíveis não equivalentes U_{\pm} , ambas são quadradointegráveis no espaço Π_+ [51], ou seja,

$$\int_{\Pi_+} |\langle \phi | U(q, p) | \phi \rangle|^2 dq dp < \infty \quad ; \quad \phi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}_+^0). \quad (3.9)$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar apenas a representação $U = U_+$. No espaço de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+^0, dx)$, $U(q, p)$ age da seguinte forma

$$U(q, p) \psi(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{q}} \psi\left(\frac{x}{q}\right). \quad (3.10)$$

As representações unitárias irredutíveis são usadas para construir os estados coerentes sob os quais o método é baseado. Por serem unitárias e irredutíveis, as representações garantem a *resolução da identidade* para os estados coerentes, que é o que nos permite usá-los na quantização, como veremos na próxima seção. A quantização afim foi idealizada de forma a preservar as simetrias do espaço de fase. Simetria, em matemática, está diretamente conectada à ideia de grupos, por isso a parte algébrica mais pesada desta primeira seção.

3.2 Quantização por integração

A identificação do espaço de fase como um grupo oferece uma ampla gama de possibilidades para a quantização integral. A ideia é transformar uma função f clássica em um operador A_f , isto é, quantizar a função f , utilizando uma representação unitária irredutível U do grupo G e o seguinte método de quantização,

$$f \mapsto A_f = \int_G M(g) f(g) d\nu(g), \quad (3.11)$$

onde g é um elemento de G e M é um operador limitado de \mathcal{H} tal que $M(g) = U(g)MU^{-1}(g)$. Pelo Lema de Schur, obtemos

$$\int_G M(g) d\nu(g) = I, \quad (3.12)$$

garantindo assim a *resolução da identidade*, isto é, $A_I = I$. Observe que até agora não especificamos nada sobre o espaço de fase do sistema ou sobre o grupo que age sobre ele. De fato, este tipo de quantização por integração pode ser feito para qualquer sistema cujo espaço de fase possa ser descrito por grupo de simetrias. Para nossos fins, o grupo em questão é $G = \text{Aff}_+(\mathbb{R})$ e, portanto, $g = (q, p)$. Vamos escolher o operador M tal que

$$M = |\psi\rangle\langle\psi| \quad , \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}_+, dx) \cap L^2(\mathbb{R}_+, dx/x). \quad (3.13)$$

A função ψ é escolhida de forma arbitrária, respeitando-se a condição de quadrado-integrabilidade exposta em (3.13), e é chamada de *vetor fiducial*.¹ A ação da representação unitária irredutível U sobre o vetor fiducial $|\psi\rangle$ gera os chamados *estados coerentes afins*:

$$|q, p\rangle = U|\psi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x|q, p\rangle = U\langle x|\psi\rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{q}} \psi\left(\frac{x}{q}\right). \quad (3.14)$$

A arbitrariedade da escolha dos vetores fiduciais é reflexo da liberdade que temos de escolher o operador limitado M na definição de quantização apresentada pela equação (3.11). De fato, essa indeterminação inicial com relação aos estados coerentes não impede de encontrarmos os operadores quânticos, a menos de uma constante, como veremos. Mas,

¹Também chamada, em inglês, de “wavelet”, que se traduz como “ondinha”. Preferimos utilizar apenas a nomenclatura “vetor fiducial”, por estética no português.

é claro, essa liberdade de escolha está vinculada às condições dadas pelas equações (3.12) e (3.13), uma vez que queremos preservar as simetrias do espaço. Para um estudo mais completo sobre estados coerentes, recomendamos [52].

No nosso caso, $M(g) = U(g)MU^{-1}(g) = U|\psi\rangle\langle\psi|U^{-1} = |q, p\rangle\langle q, p|$ e, então, a equação (3.13) se traduz como

$$\int_{\Pi_+} |q, p\rangle\langle q, p| \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}} = I, \quad (3.15)$$

onde escolhemos $d\nu(g) = dqdp/2\pi c_{-1}$, que é invariante pela ação à esquerda do grupo afim (3.4), e c_{-1} é dado pela fórmula

$$c_\gamma := \int_0^\infty |\psi(x)|^2 \frac{dx}{x^{2+\gamma}}, \quad (3.16)$$

com $\gamma = -1$. Observe que a imposição $\psi \in L^2(\mathbb{R}_+, dx/x)$ dada na definição (3.13) é para garantir a resolução da identidade, já que precisamos que $c_{-1} < \infty$. O mais geral é considerar vetores fiduciais complexos, mas, por simplicidade, vamos utilizar apenas vetores fiduciais reais. Não há perda de generalidade, uma vez que a escolha de ψ é relativamente arbitrária. Ao escolhermos uma ψ normalizada, temos que

$$c_{-2} = \int_0^\infty |\psi(x)|^2 dx = 1. \quad (3.17)$$

Vamos mostrar que o único impacto da escolha dos vetores fiduciais é sobre esses coeficientes c_γ , definidos na equação (3.16).

A quantização afim de uma função clássica $f(q, p)$ por estados coerentes é, então, definida como

$$f(q, p) \mapsto A_f = \int_{\Pi_+} f(q, p) |q, p\rangle\langle q, p| \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}}. \quad (3.18)$$

Os respectivos operadores dos principais observáveis clássicos q e p são dados por A_q e A_p e podem ser obtidos através da equação (3.18). O cálculo dos operadores A_{q^β} , sendo β uma constante real qualquer, e A_p são feitos usando uma função teste ϕ no espaço das posições da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle x | A_{q^\beta} | \phi \rangle &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}} q^\beta \langle x | q, p \rangle \langle q, p | \int_0^\infty dx' x' \langle x' | \phi \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}} \int_0^\infty dx' q^{\beta-1} e^{-ip(x'-x)} \psi\left(\frac{x}{q}\right) \psi\left(\frac{x'}{q}\right) \phi(x') \\ &= - \int_0^\infty \frac{dq}{c_{-1}} q^{\beta-1} \left| \psi\left(\frac{x}{q}\right) \right|^2 \phi(x) \\ &= - \frac{c_{\beta-1}}{c_{-1}} x^\beta \phi(x), \end{aligned}$$

onde usamos a mudança de variáveis $q \mapsto u = x/q$. Para A_p , vamos usar a propriedade

da delta de Dirac $\delta' * f = \delta * f'$:

$$\begin{aligned}
\langle x|A_p|\phi\rangle &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}} p \langle x|q,p\rangle \langle q,p|\int_0^\infty dx' x' \rangle \langle x'|\phi\rangle \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dqdp}{2\pi c_{-1}} \int_0^\infty dx' \frac{1}{q} i \frac{d}{dx'} \left[e^{-ip(x'-x)} \right] \psi\left(\frac{x}{q}\right) \psi\left(\frac{x'}{q}\right) \phi(x') \\
&= -\frac{i}{c_{-1}} \left(\int_0^\infty |\psi(u)|^2 \frac{du}{u} \right) \frac{d}{dx} \phi(x) - \frac{i}{c_{-1}} \left(\int_0^\infty \psi(u) \frac{d}{du} \psi(u) du \right) \phi(x) \\
&= -i \frac{d}{dx} \phi(x).
\end{aligned}$$

Da segunda para a terceira linha usamos a mesma substituição feita no caso anterior e da terceira para quarta usamos que $2 \int \psi'(u)\psi(u)du = |\psi(u)|^2|_0^\infty = 0$, pois as funções ψ são quadradointegráveis. Assim, temos que:

$$A_{q^\beta} = -\frac{c_{\beta-1}}{c_{-1}} \hat{Q}^\beta \quad ; \quad A_p = \hat{P} = -i \frac{d}{dx}, \quad (3.19)$$

sendo \hat{P} e \hat{Q} os operadores canônicos usuais, como definidos em (2.4).

Outras funções clássicas, como o produto qp e a “energia cinética” p^2 podem ser quantizadas da mesma forma, resultando em:

$$A_{qp} = \frac{c_0}{c_{-1}} \frac{\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q}}{2} \quad ; \quad A_{p^2} = \hat{P}^2 + \kappa_\psi \hat{Q}^{-2}, \quad (3.20)$$

onde κ_ψ é uma constante dada por

$$\kappa_\psi = \frac{1}{c_{-1}} \int_0^\infty |\psi'(x)|^2 x dx. \quad (3.21)$$

A quantização por integração resolve, então, dois problemas presentes na quantização canônica e cuja soluções são impostas a mão. O primeiro é o problema do ordenamento na quantização do produto qp , que acontece porque derivada e posição não comutam. Aqui a simetrização $(\hat{Q}\hat{P} + \hat{P}\hat{Q})/2$ acontece naturalmente. O segundo problema é que, como mostrado no Apêndice, a quantização canônica da energia cinética \hat{P}^2 não é essencialmente autoadjunta no domínio $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ e o operador regularizado acima (3.20) é essencialmente autoadjunto² para $\kappa_\psi \geq 3/4$. Essa condição sobre κ_ψ também ajuda a restringir a escolha do vetor fiducial ψ (3.13). Além disso, a reflexão na origem do espaço de fases é substituída por um ricochete suave resultante do potencial quântico $\kappa_\psi q^{-2}$ que aparece. Outra vantagem deste método é a possibilidade de quantizar funções clássicas com certa descontinuidade ou mesmo distribuições, como no caso da função delta de Dirac. A função (distribuição) clássica que representa um ponto (q_0, p_0) no espaço de fase é dada por $\delta_{(q_0, p_0)}(q, p) := \delta(q - q_0)\delta(p - p_0)$. O mapa (3.11) para a função $\delta_{(q_0, p_0)}$ resulta em

$$\delta_{(q_0, p_0)} \mapsto A_{\delta_{(q_0, p_0)}} = \frac{|q_0, p_0\rangle \langle q_0, p_0|}{2\pi c_{-1}}. \quad (3.22)$$

O operador quântico equivalente à delta de Dirac é, então, o Projetor.

²Ver Seção 4.3.1, equação (4.31).

3.3 Interpretação semiclássica

O mapa de quantização $f \mapsto A_f$ apresentado na seção anterior é completado com um retrato semiclássico, a operação inversa, representada pela função $\check{f}(q, p)$, que pode ser interpretado como a correção semiclássica da função clássica original $f(q, p)$. Esta nova função é definida como o valor esperado do operador A_f com relação aos estados coerentes

$$\check{f}(q, p) = \langle q, p | A_f | q, p \rangle. \quad (3.23)$$

De fato, dado um estado $|\phi\rangle$, a sua distribuição de probabilidade no espaço de fase, resultante da resolução da identidade (3.15), é dada por

$$\rho_\phi(q, p) = \frac{|\langle q, p | \phi \rangle|^2}{2\pi c_{-1}}. \quad (3.24)$$

Dadas autofunções de energia de um operador Hamiltoniano \hat{H} , $|\phi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t}|\phi(t_0)\rangle$, por exemplo, quantizado com o método afim $A_{\mathcal{H}} = \hat{H}$ de uma Hamiltoniana clássica $\mathcal{H}(q, p)$, podemos computar a evolução temporal da distribuição de probabilidade do estado no espaço de fase:

$$\rho_\phi(q, p, t) = \frac{1}{2\pi c_{-1}} |\langle q, p | e^{-i\hat{H}t} |\phi\rangle|^2. \quad (3.25)$$

O retrato semiclássico gera equações com trajetórias bem definidas e, como veremos no exemplo da Seção 3.4, o pico da distribuição de probabilidade temporal contorna essa trajetória, como esperado.

Voltando para o mapa semiclássico, das equações (3.18) e (3.23), temos

$$\check{f}(q, p) = \int_{\Pi_+} f(q', p') \langle q, p | q', p' \rangle \langle q', p' | q, p \rangle \frac{dq' dp'}{2\pi c_{-1}}, \quad (3.26)$$

de onde obtemos:

$$\begin{aligned} \check{f}(q, p) = \frac{1}{2\pi c_{-1}} \iint_{\Pi_+} \frac{dq' dp'}{qq'} \iint_0^\infty dx dx' f(q', p') \left[e^{ip(x'-x)} e^{-ip'(x'-x)} \times \right. \\ \left. \times \psi\left(\frac{x}{q}\right) \psi\left(\frac{x}{q'}\right) \psi\left(\frac{x'}{q}\right) \psi\left(\frac{x'}{q'}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Esta função, como dito, representa o valor médio de $f(q, p)$ com respeito à distribuição de probabilidade dos estados coerentes. Talvez esse fato seja melhor exemplificado na análise da função semiclássica do operador $A_{\delta_{(q_0, p_0)}}$, ou seja, a correção semiclássica da função delta de Dirac. Da equação (3.22), temos que

$$\check{\delta}_{(q_0, p_0)}(q, p) = \frac{|\langle q, p | q_0, p_0 \rangle|^2}{2\pi c_{-1}} = \frac{1}{2\pi c_{-1} qq_0} \left| \int_0^\infty dx e^{-ix(p-p_0)} \psi\left(\frac{x}{q}\right) \psi\left(\frac{x}{q_0}\right) \right|^2. \quad (3.28)$$

A nova função (3.28) no espaço de fase, centrado no ponto (q_0, p_0) , regulariza a distribuição de probabilidade original da delta de Dirac. Esta correção ilustra o princípio da incerteza

de Heisenberg: não podemos medir com precisão um ponto do espaço de fase, isto é, posição e momento ao mesmo tempo. A Figura (3.1) mostra a função $\check{\delta}_{(0,0)}$, dada pela equação (3.28), com a escolha do vetor fiducial

$$\psi_\nu(x) = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x}} \exp \left[-\frac{\nu}{2} \left(\ln x - \frac{3}{4\nu} \right)^2 \right], \quad (3.29)$$

onde ν é um número real positivo.

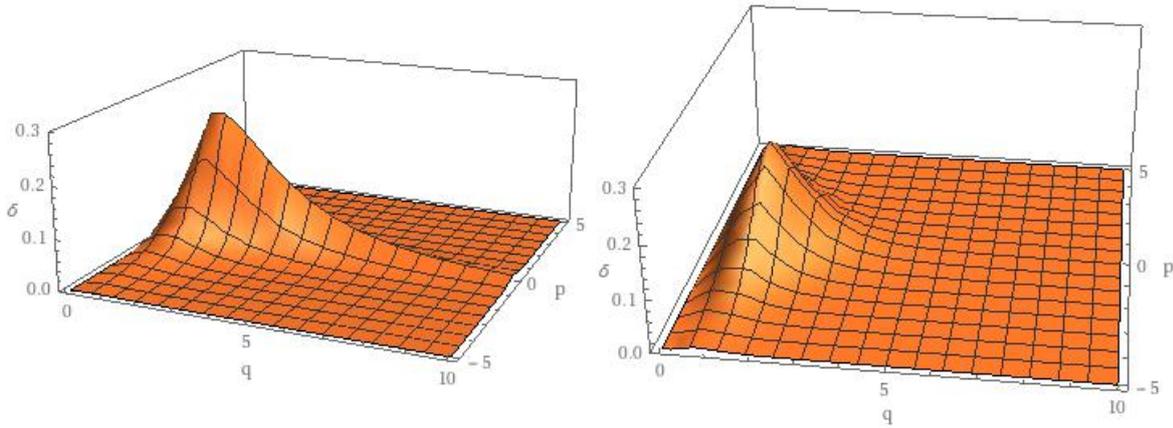


Figura 3.1: Representação em 3D, para diferentes valores de ν , para a δ de Dirac regularizada na origem, com a escolha do vetor fiducial (3.29), que decresce rapidamente. A figura na esquerda é para of $\nu = 2$ e a da direita é para $\nu = 4$.

As correções semiclássicas das funções posição, momento, energia cinética e do produto qp , podem ser facilmente calculadas. Encontramos que

$$\check{q}^\beta = \frac{c_{\beta-1}c_{-\beta-2}}{c_{-1}}q^\beta \quad ; \quad \check{p} = p \quad ; \quad \check{p}^2 = p^2 + \frac{\lambda_\psi}{q^2} \quad \text{e} \quad \check{q}\check{p} = \frac{c_0c_{-3}}{c_{-1}}qp, \quad (3.30)$$

lembrando que c_γ é dado por (3.16) e λ_ψ é uma constante que também depende da escolha do vetor fiducial

$$\lambda_\psi = \int_0^\infty [\psi'(x)]^2 (1 + c_{-1}x) dx. \quad (3.31)$$

Com isto, apresentamos algumas das noções básicas por trás do método da quantização afim, incluindo a correção semiclássica natural ao método. As trajetórias semiclássicas da energia, por exemplo, no espaço de fase “coincidem” com a distribuição de probabilidade prevista pela quantização, no sentido que elas se sobrepõem. Vamos ver um exemplo desta quantização aplicada a um sistema cosmológico [5].

3.4 Cosmologia Quântica num universo com poeira

Vamos aplicar num modelo de dinâmica de poeira em Cosmologia Newtoniana apresentado no Capítulo 1 de [53]. Vamos considerar uma esfera de raio $q(t)$ em um universo

homogêneo e isotrópico preenchido com poeira, isto é, matéria com pressão negligenciável em comparação a sua densidade de energia. A gravitação Newtoniana é aplicável em casos de gravidade baixa e raio pequeno. Também, pelo Teorema de Gauss, pode-se ignorar o efeito gravitacional numa partícula dentro da esfera, por causa da matéria presente do lado de fora, algo que também pode ser justificável dentro da alçada da Relatividade Geral (Teorema de Jebsen-Birkoff [54]). Assim, a equação de Newton aplicada a uma massa de prova m localizada na superfície da esfera é dada por

$$m\ddot{q} = -\frac{GmM}{q^2}, \quad (3.32)$$

onde M é a massa da esfera, que é independente do tempo. Logo, a Hamiltoniana correspondente é dada por,

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{k}{q} \quad ; \quad k = GM. \quad (3.33)$$

A quantização afim deste modelo clássico, considerando vetores fiduciais normalizados, isto é $c_{-2} = 1$ e usando as fórmulas (3.19) e (3.20), resulta no operador Hamiltoniano:

$$A_H = \frac{P^2}{2} + \frac{\kappa_\psi}{2} \frac{1}{Q^2} - \frac{k}{c_{-1}} \frac{1}{Q}, \quad (3.34)$$

sendo κ_ψ definido em (3.21). E, aplicando as fórmulas (3.30), obtemos a equação semi-clássica para energia constante E :

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda_\psi}{2q^2} - \frac{k}{q}, \quad (3.35)$$

onde λ_ψ está definido em (3.31). Essa é a correção semiclássica de (3.33). Note que, neste caso, não há “renormalização” do acoplamento gravitacional k , isto é, a quantização não depende do vetor fiducial, a menos das constantes envolvidas.

O espectro do operador A_H é análogo ao espectro do átomo de hidrogênio obtido da solução da equação radial de Schrödinger com momento angular não-nulo. Então, temos que distinguir entre um espectro pontual, correspondente a estados ligados, ou um espectro contínuo, correspondente a estados espalhados. Neste exemplo, estados ligados representam uma esfera pulsante, enquanto estados espalhados correspondem a um ricochete sem recolapso. Os autovalores E_n das autofunções ϕ_n do operador (3.34) no caso de estados ligados é dada por

$$\frac{1}{2} \left(-\partial_x^2 + \frac{\kappa_\psi}{x^2} - \frac{2}{c_{-1}} \frac{GM}{x} \right) \phi_n = E_n \phi_n. \quad (3.36)$$

Redefinindo os parâmetros

$$\tau_n^2 = -2E_n \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4\kappa_\psi}, \quad (3.37)$$

as soluções quadradointegráveis desta equação são dadas por polinômios de Laguerre associados,

$$\phi_n(x) = N(n, \alpha) e^{-\tau_n x} (\kappa_n x)^\alpha L_n^{(2\alpha-1)}(2\tau_n x), \quad (3.38)$$

com $n \in \mathbb{N}$ e escolhendo $N(n, \alpha)$ dada pela expressão:

$$N(n, \alpha) = 2^\alpha \sqrt{\frac{\tau_n}{(n+\alpha) n! \Gamma(2\alpha+n)}}, \quad (3.39)$$

de forma que os autoestados (3.38) sejam normalizados. Assim, os autovalores da equação (3.38) são dados por

$$\tau_n = \frac{GM}{c_{-1}(n+\alpha)} \Rightarrow E_n = -\frac{G^2 M^2}{2(c_{-1})^2(n+\alpha)^2}. \quad (3.40)$$

Podemos, então, encontrar a função de distribuição de evolução temporal (3.25) escolhendo os vetores fiduciais normalizados $|\psi\rangle$, tais que

$$\psi(x) = \frac{9}{\sqrt{6}} x^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3x}{2}}, \quad (3.41)$$

de forma que as constantes κ_ψ e c_{-1} sejam, respectivamente, $3/4$ e 1 , além de mantermos $c_{-2} = 1$. Isso nos garante que nosso operador Hamiltoniano (3.34) seja autoadjunto. Também, pela equação (3.37), $\kappa_\psi = 3/4$ nos dá $\alpha = 3/2$. Com esta escolha, o coeficiente λ_ψ , equação (3.31), é dado por

$$\lambda_\psi = \frac{27^2}{24} \int_0^\infty (x - 2x^2 + x^3) e^{-3x} (1+x) dx = \frac{15}{8} \quad (3.42)$$

e então a expressão semiclássica de energia (3.35) se torna

$$E = \frac{p^2}{2} + \frac{15}{16} \frac{1}{q^2} - \frac{GM}{q}. \quad (3.43)$$

Essa equação gera uma trajetória bem definida para uma energia E específica no espaço de fase, dados valores para G e M .

Numa outra análise, vamos calcular a distribuição de probabilidade de um estado $|\phi\rangle$. Vamos escolher como estado inicial o estado coerente $|\phi\rangle = |q_0, p_0\rangle$. A distribuição de probabilidade independente do tempo no espaço de fase é, então,

$$\rho_\phi(q, p, t) = \rho_{q_0, p_0}(q, p, t) = \frac{1}{2\pi} |\langle q, p | e^{-iA_H t} | q_0, p_0 \rangle|^2. \quad (3.44)$$

De forma a conseguir uma ideia qualitativa desta distribuição, projetamos o estado inicial no subespaço de dimensão finita \mathcal{H}_m , gerado pelo conjunto ortonormal dos estados ligados $\{|\phi_n\rangle\}_{0 \leq n \leq m}$, de forma que $|q_0, p_0\rangle$ possa ser escrito como uma combinação dos autoestados de energia $|\phi_n\rangle$, que formam uma base neste espaço:

$$|q_0, p_0\rangle \mapsto |q_0, p_0\rangle_m := \sum_{n=0}^m C_n(q_0, p_0) |\phi_n\rangle, \quad (3.45)$$

Truncamos a dimensão m de \mathcal{H}_m para obter uma expressão analítica bem definida para ρ_ϕ . Os coeficientes são definidos como $C_n(q_0, p_0) := \langle \phi_n | q_0, p_0 \rangle$ e então, para um α geral, temos

$$C_n(q_0, p_0) = \int_0^\infty \langle \phi_n | x \rangle \langle x | q_0, p_0 \rangle dx = \int_0^\infty \phi_n^* \frac{e^{ip_0 x}}{\sqrt{q_0}} \psi \left(\frac{x}{q_0} \right), \quad (3.46)$$

onde ϕ_n e ψ são dados por (3.38) e (3.41). Assim, encontramos

$$C_n(q_0, p_0) = \frac{9}{2^{5/2} \sqrt{6}} \frac{\Gamma(\alpha + 5/2)}{\Gamma(2\alpha)} \sqrt{\frac{\Gamma(2\alpha + n)}{(n + \alpha)(n!)^3}} (\kappa_n q_0)^{\alpha+1/2} \\ \times \left(\frac{4}{2\kappa_n q_0 + 3 - 2iq_0 p_0} \right)^{\alpha+5/2} {}_2F_1 \left(-n, \alpha + \frac{5}{2}; 2\alpha; \frac{4\kappa_n q_0}{2\kappa_n q_0 + 3 - 2iq_0 p_0} \right), \quad (3.47)$$

sendo ${}_2F_1(-n, b; c; z)$ um polinomial hipergeométrico de Gauss de grau n . Com o valor $\alpha = 3/2$ e para os pontos $(q_0, p_0) = (1, 0)$, esta expressão se reduz para

$$C_n = \frac{\sqrt{27}}{32\kappa_n^2} \sqrt{\frac{8n!}{\Gamma(5+n)}} \frac{\Gamma(5+n)}{n!} \left(\frac{4\kappa_n}{3+2\kappa_n} \right)^4 F \left(-n, 4; 5; \frac{4\kappa_n}{3+2\kappa_n} \right). \quad (3.48)$$

Então, a evolução temporal (3.25) para $\alpha = 3/2$ escolhendo como estado inicial um estado inicial específico (q_0, p_0) é dada por

$$\rho_\phi(q, p, t) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^m C_n^*(q, p) C_n(q_0, p_0) e^{-iE_n t} \right|^2, \quad (3.49)$$

com C_n dado por (3.47).

A expressão acima (3.49) é válida como boa aproximação somente se os estados iniciais $|q_0, p_0\rangle$ puderem ser representados como uma combinação linear de estados ligados. De fato, esta condição depende da escolha de (q_0, p_0) . Um cálculo numérico feito na convergência da norma resulta em $\lim_{m \rightarrow \infty} 2\pi \rho_\phi(q_0, p_0, t=0) \simeq 1$. Apresentamos na Figura 3.2 um exemplo do comportamento dinâmico com estado inicial dado por $q_0 = 4$ e $p_0 = 0$. Observe na Figura 3.2 que a distribuição de probabilidade tem a evolução do seu pico de densidade contornando a trajetória semiclássica, como esperado. Nos cálculos acima, usamos as fórmulas [55]

$$\int_0^\infty du e^{-u} u^\gamma (L_n^{(\gamma-1)}(u))^2 = (2n + \gamma) n! \Gamma(\gamma + n), \quad (3.50)$$

e também

$$\int_0^\infty du e^{-su} u^\gamma L_n^{(\delta)}(u) = \frac{\Gamma(\gamma + 1) \Gamma(\delta + n + 1)}{n! \Gamma(\delta + 1)} s^{-\gamma-1} {}_2F_1 \left(-n, \gamma + 1; \delta + 1; \frac{1}{s} \right), \quad (3.51)$$

que são válidas para $\text{Re}(s) > 0$, $\text{Re}(\gamma) > -1$.

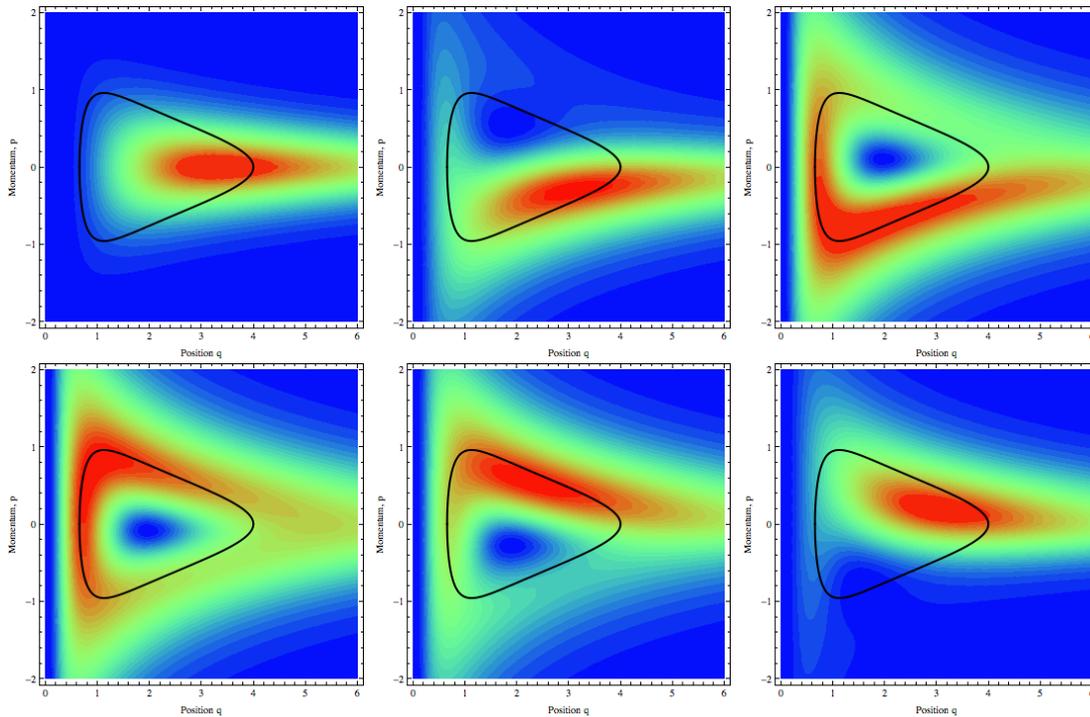


Figura 3.2: A representação do espaço de fase do comportamento dinâmico quântico de um estado coerente inicial $|q_0 = 4, p_0 = 0\rangle$. Escolhemos $G = 1$ e $M = 2$. Em cada figura, a curva com linha definida representa a trajetória semiclássica dada pela equação (3.43) para estes valores particulares, enquanto o gráfico de cores representa o aumento, do azul para o vermelho, da densidade $\rho(q, p)$. As diferentes figuras mostram a evolução da densidade $\rho(q, p)$. O crescimento do tempo está representado nas figuras de cima para baixo, esquerda para direita.

Capítulo 4

Teoria de Brans-Dicke

Uma das mais antigas propostas de modificação da Relatividade Geral é a teoria escalar-tensorial, que supõe um acoplamento não-mínimo de um campo escalar com o escalar de curvatura, com a intenção inicial de inserir a variação temporal no acoplamento gravitacional, mas que foi utilizada também para explicar alguns problemas em aberto da cosmologia, como os mecanismos de inflação e a atual expansão acelerada do universo. Neste tipo de modificação da RG, a gravitação não é dada apenas pela parte geométrica do espaço-tempo, sendo também influenciada por campos escalares-tensoriais externos. No início da década de 60 [56], Carl H. Brans (1935 -) e Robert H. Dicke (1916 - 1997) propuseram uma teoria consistente da gravitação supondo um acoplamento não-mínimo dependente do tempo na parte geométrica. Este é feito através de um campo escalar de longo alcance, que se acopla ao escalar de curvatura. A *Teoria de Brans-Dicke*, como ficou conhecida, também apresenta uma nova constante de acoplamento adimensional ω , a *constante de Brans-Dicke*, introduzida de tal forma que, para um acoplamento gravitacional constante, a RG é recuperada no limite $\omega \rightarrow \infty$ [57], com exceção aos casos em que o tensor energia-momento tem traço nulo [58, 59]. Então, a Lagrangiana gravitacional que define a Teoria de Brans-Dicke é dada por

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} \left[\varphi R - \omega \frac{\varphi_{;p} \varphi^{;p}}{\varphi} \right], \quad (4.1)$$

sendo $\varphi = \varphi(t)$ um campo escalar definido no espaço-tempo.

Hoje em dia a Teoria de Brans-Dicke é bem vinculada. Estima-se que, na ausência de um termo potencial, o valor da constante ω é superior a 40.000 [60, 61]. Ou seja, na prática, a Teoria de Brans-Dicke é indistinguível da Relatividade Geral, ao menos classicamente. No entanto, o campo escalar de Brans-Dicke é predito na teoria cosmológica de Supercordas e corresponde à partícula dilatón, que se acopla diretamente à matéria [62]. O dilatón é o equivalente ao gravitón para uma teoria com um acoplamento gravitacional dinâmico, como esta. Outra motivação para o estudo da teoria vem com o interesse pelas teorias $f(R)$ que, na presença de um potencial escalar de origem gravitacional,

corresponde à Teoria de Brans-Dicke generalizada para $\omega = 0$, no formalismo métrico [63]. No formalismo de Palatini [64], a teoria é equivalente à BD para $\omega = 3/2$. Além disso, a quantização desta teoria pode revelar novas dinâmicas no universo primordial. Partindo deste princípio, vamos quantizá-la utilizando o conteúdo material como provedor do parâmetro temporal do sistema, como sugerido na Seção 2.4.

Para nosso propósito, vamos considerar a Lagrangiana (4.1) mais uma componente de matéria genérica (a princípio) descrita pela Lagrangiana de matéria \mathcal{L}_M . Uma abordagem mais simples do modelo cosmológico quantizado é feita considerando-se a Teoria de Brans-Dicke no mini-superespaço. Para tal, vamos considerar a métrica homogênea e isotrópica FLRW (1.35). Relembrando,

$$ds^2 = N^2(t) dt^2 - a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) . \quad (4.2)$$

Assim, a Lagrangiana pode ser escrita, depois do descarte dos termos de superfície, como

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{N} \left\{ 6 [\varphi a \dot{a}^2 + a^2 \dot{\varphi}] - \omega a^3 \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi} \right\} . \quad (4.3)$$

Neste caso, as variáveis dinâmicas são o fator de escala a e o campo escalar φ . Os momentos conjugados de a e φ são dados por

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} = \frac{1}{N} [6 (2\varphi a \dot{a} + a^2 \dot{\varphi})] \quad ; \quad \pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{N} \left(6a^2 \dot{a} - 2\omega a^3 \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} \right) , \quad (4.4)$$

de onde obtemos as relações

$$\dot{a} = \frac{N}{12\varphi a} \left(\frac{2\omega\pi_a - \pi_\varphi\varphi}{3 + 2\omega} \right) \quad ; \quad \dot{\varphi} = \frac{N}{2a^3} \left(\frac{\pi_a a - \pi_\varphi\varphi}{3 + 2\omega} \right) . \quad (4.5)$$

Assim, a Hamiltoniana gravitacional é dada por $\mathcal{H}_G = \pi_a \dot{a} + \pi_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L}_G$ e, introduzindo a componente de matéria através do formalismo de Schutz (Seção 2.4), reescrevemos a equação (4.3) em termos dos momentos conjugados (4.4), para obtermos a Hamiltoniana total

$$\mathcal{H}_T = N \left\{ \frac{1}{(3 + 2\omega)} \left[\frac{\omega}{12\varphi a} \pi_a^2 + \frac{1}{2a^2} \pi_a \pi_\varphi - \frac{\varphi}{2a^3} \pi_\varphi^2 \right] - \frac{1}{a^{3\alpha}} \pi_T \right\} . \quad (4.6)$$

Nesta equação, π_a e π_φ são os momentos conjugados do fator de escala a e do campo escalar φ , respectivamente. O momento π_T está relacionado com a componente de matéria, de acordo com (2.29). Esta é a Hamiltoniana clássica da Teoria de Brans-Dicke.

Neste capítulo vamos tratar da quantização canônica desta teoria, estudando os aspectos matemáticos do operador de energia de forma a obtermos um modelo quântico consistente, segundo a Interpretação de Copenhagen. Vale lembrar que é possível trabalhar com a Cosmologia Quântica desta teoria em outras interpretações, como, por exemplo, Bohm-De Broglie [65]. Na primeira seção, encontramos o operador Hamiltoniano do sistema quântico proveniente da Teoria Clássica de Brans-Dicke no mini-superespaço, seguindo

para a análise do caráter autoadjunto na segunda seção. A terceira seção é destinada ao estudo do caso particular das escolhas da matéria radiativa, $\alpha = 1/3$, e da matéria rígida, $\alpha = 1$, para o fluido perfeito. Por fim, mostramos o cenário cosmológico proveniente desta quantização e estudamos a equivalência entre os referenciais de Einstein e de Jordan [2, 4].

4.1 A quantização da teoria

Adotando a estratégia traçada no Capítulo 2, vamos quantizar o vínculo (1.58) usando a Hamiltoniana total da Teoria de Brans-Dicke (4.6). A equação de Wheeler-DeWitt quantizada resulta numa equação tipo-Schrödinger, de onde obtemos o operador Hamiltoniano \hat{H} que descreve o sistema quântico e que evolui de acordo com a coordenada T . A quantização canônica $\pi_k \mapsto -i\partial_k$, incluindo os fatores de ordenamento \bar{p} e \bar{q} , nos fornece

$$\frac{\omega}{12\varphi} \left(\frac{1}{a} \partial_a^2 \Psi + \frac{\bar{p}}{a^2} \partial_a \Psi \right) + \frac{1}{2a^2} \partial_a \partial_\varphi \Psi - \frac{1}{2a^3} (\varphi \partial_\varphi^2 \Psi + \bar{q} \partial_\varphi \Psi) = \frac{i(3+2\omega)}{a^{3\alpha}} \partial_T \Psi. \quad (4.7)$$

Os fatores de ordenamento são necessários por causa da não-comutatividade dos operadores posição e momento. Por exemplo, classicamente temos

$$a \pi_a^2 = \pi_a a \pi_a = \pi_a^2 a = a^l \pi_a a^m \pi_a a^n, \quad (4.8)$$

sendo l, m, n números reais genéricos tais que $l + m + n = 1$. Ao quantizarmos a última expressão da igualdade, encontramos o operador

$$(a^l \partial_a a^m \partial_a a^n) \phi = [a \partial_a^2 + (m + n + 1) \partial_a + n(m + n - 1) a^{-1}] \phi, \quad (4.9)$$

onde ϕ é uma função teste qualquer. Como l, m e n são genéricos, podemos escolhê-los de forma a zerar o último termo, isto é, $n(m + n - 1) = 0$. As constantes definidas a partir destas genéricas são chamadas de *fatores de ordenamento*.

Observe que a equação diferencial (4.7) é não separável. Para evitarmos a derivada cruzada $\partial_a \partial_\varphi$, vamos fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$a \rightarrow \varphi^{-\frac{1}{2}} b \quad ; \quad \varphi \rightarrow \varphi. \quad (4.10)$$

Na verdade, esta não é uma mudança de coordenadas qualquer: neste caso ela é equivalente a uma transformação conforme no espaço-tempo, definida por $\tilde{g}_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$, sendo $g_{\mu\nu}$ a métrica (4.2) original. Com isto, estamos mudando do referencial de Jordan, em que o campo escalar está acoplado ao escalar de Ricci, para o de Einstein, cujo campo escalar se acopla ao termo de matéria [66, 67]. Com estas novas coordenadas temos, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial a} = \frac{\partial b(a, \varphi)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial \varphi'(a, \varphi)}{\partial a} \frac{\partial}{\partial \varphi'} = \varphi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial b}; \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial b(a, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial \varphi'(a, \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi'} = \frac{b}{2\varphi} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial \varphi'}. \quad (4.12)$$

Inserimos a linha na variável φ para não haver confusão nas equações (4.11) e (4.12) acima, porém vamos voltar a ignorar a diferença entre φ e φ' . Redefinindo $T \rightarrow T/24$, um cálculo direto mostra que a equação (4.7) se torna

$$-\left\{ \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}}{b} \left[\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right] - \frac{12}{(3+2\omega)} \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{b^3} \left[\varphi \partial_\varphi^2 + q \partial_\varphi \right] \right\} \Psi = \frac{\varphi^{\frac{3\alpha}{2}}}{b^{3\alpha}} i \partial_T \Psi, \quad (4.13)$$

com os novos fatores de ordenamento p e q dados da seguinte forma:

$$p = \frac{2\omega\bar{p} + 9 - 6\bar{q}}{3 + 2\omega} \quad ; \quad q = \bar{q}. \quad (4.14)$$

É a partir desta equação (4.13) que vamos definir o operador Hamiltoniano do sistema, a partir da identificação com a equação de Schrödinger $\hat{H} \Psi = i \partial_T \Psi$. Neste caso, o operador Hamiltoniano da Teoria de Brans-Dicke quantizada, utilizando-se um fluido perfeito para obtenção de um parâmetro temporal, é dado por:

$$\hat{H} = -\frac{b^{3\alpha}}{\varphi^{\frac{3\alpha}{2}}} \left\{ \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}}{b} \left[\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right] - \frac{12}{(3+2\omega)} \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{b^3} \left[\varphi \partial_\varphi^2 + q \partial_\varphi \right] \right\}. \quad (4.15)$$

Uma vez definido o operador Hamiltoniano da teoria (4.15), ainda precisamos verificar as propriedades matemáticas deste, para obtermos uma teoria consistente, como explicado no Capítulo 2. O Hamiltoniano é simétrico, isto é,

$$\langle \phi, \hat{H} \psi \rangle = \langle \hat{H} \phi, \psi \rangle, \quad (4.16)$$

no domínio de funções suaves de suporte compacto $D(\hat{H}) = C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2)$, se definirmos o produto escalar com uma medida não usual,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty (\phi^* \psi) b^{p-3\alpha+1} \varphi^{q+\frac{(3\alpha-5)}{2}} db d\varphi. \quad (4.17)$$

Note que a medida que define o produto escalar depende da escolha dos fatores de ordenamento p e q e do tipo de matéria adotada, representado pela constante α . Como vimos na Seção 2.3, é preciso um pouco mais de cuidado para determinar se o operador é ou não autoadjunto, que deixaremos para a próxima seção.

4.2 Caráter autoadjunto do operador Hamiltoniano

Para verificarmos o caráter autoadjunto do operador de energia (4.15), vamos utilizar a estratégia apresentada na Seção 2.3. Precisamos verificar se o operador (4.15) é autoadjunto, ou, considerando que ele é simétrico, se podemos mudar seu domínio de forma a obtermos uma extensão autoadjunta. Uma observação importante sobre o domínio dos operadores em MQ é que, como vimos no Capítulo 2, eles devem ser de suporte compacto,

isto é, as funções devem ir a zero nas extremidades, uma propriedade proveniente da interpretação probabilística da função de onda, uma vez que a integral desta em todo o domínio deve ser finita. Como \hat{H} é simétrico, se considerarmos o produto interno (4.17), devemos ter que o domínio do Hamiltoniano (4.15) é dado por $D(\hat{H}) = C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2, d\mu)$, onde $d\mu$ é a medida não usual

$$d\mu(b, \varphi) = b^{p-3\alpha+1} \varphi^{q+\frac{(3\alpha-5)}{2}} dbd\varphi. \quad (4.18)$$

Relembrando o Teorema de von Neumann na Seção 2.3, a aplicação $C : \phi \mapsto \phi^*$, que é simplesmente tomar o complexo conjugado no espaço $L^2(\mathbb{R}_+^2, d\mu)$ das funções quadradointegráveis¹ com medida $d\mu$, é tal que

$$C^2 = Id \quad ; \quad C\hat{H}\phi = \hat{H}C\phi \quad , \quad \phi \in D(\hat{H}), \quad (4.19)$$

pois o Hamiltoniano é um operador diferencial com coeficientes reais. Assim, a condição (2.17) do Teorema de Von Neumann é satisfeita e, portanto, o Hamiltoniano (4.15) ou é autoadjunto, ou possui extensões autoadjuntas, se suas autofunções pertencerem ao domínio do operador. Isso quer dizer que sempre vai existir um conjunto de funções com condições de fronteira adequadas no qual o operador (4.15) será autoadjunto, isto é, os resultados de suas medidas serão sempre reais, o que nos garante um sistema físico consistente.

Ainda resta a dúvida sobre para quais casos o Hamiltoniano já é autoadjunto e em que casos admite extensão. Para respondê-la, vamos usar o método de von Neumann, descrito na Seção 2.3, e determinar os índices de deficiência n_\pm de \hat{H} . O método se baseia em encontrar o número de soluções independentes da equação de autovalor

$$\hat{H}^*\Psi = \pm i\Psi, \quad (4.20)$$

dentro do domínio do operador adjunto \hat{H}^* , $D(\hat{H}^*) = \{\psi \in L^2 / \hat{H}\psi \in L^2\}$, sendo $L^2 = L^2(\mathbb{R}_+^2, d\mu)$. Por ter apenas coeficientes reais, o adjunto \hat{H}^* do Hamiltoniano tem a mesma forma de (4.15), portanto a equação de autovalor (4.20) se torna

$$-\frac{b^{3\alpha}}{\varphi^{\frac{3\alpha}{2}}} \left\{ \frac{\varphi^{\frac{1}{2}}}{b} \left[\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right] - \varpi \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{b^3} \left[\varphi \partial_\varphi^2 + q \partial_\varphi \right] \right\} \Psi = \eta \Psi, \quad (4.21)$$

com $\eta = \pm i$ e $\varpi = 12(3 + 2\omega)^{-1}$. Ou, equivalentemente,

$$\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}}{b} \left[\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right] - \varpi \frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{b^3} \left[\varphi \partial_\varphi^2 + q \partial_\varphi \right] \Psi = -\frac{\varphi^{\frac{3\alpha}{2}}}{b^{3\alpha}} \eta \Psi. \quad (4.22)$$

Se usarmos $\Psi(b, \varphi) = X(b)Y(\varphi)$, obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$b^2 \left[\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{p}{b} \frac{\dot{X}}{X} \right] - \varpi \varphi \left[\varphi \frac{Y''}{Y} + q \frac{Y'}{Y} \right] = -\eta \frac{\varphi^{\frac{3\alpha-1}{2}}}{b^{3(\alpha-1)}}, \quad (4.23)$$

¹O espaço das funções $L^2(\mathbb{R}_+^2, d\mu)$ é o fechamento do espaço das funções de suporte compacto $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^2, d\mu)$ [33].

onde o ponto denota a derivação em relação à variável b e a linha em relação à φ . Essa equação é separável apenas para os casos particulares $\alpha = 1/3$ e $\alpha = 1$, isto é, apenas para matéria radiativa e matéria rígida.

Uma vez que a equação diferencial (4.23) é separável, o conjunto L^2 das funções quadradointegráveis com a medida (4.18) é um produto direto dado por

$$L^2(\mathbb{R}_+^2, d\mu(b, \varphi)) = L^2(\mathbb{R}_+, b^{p-3\alpha+1} db) \otimes L^2(\mathbb{R}_+, \varphi^{q+\frac{(3\alpha-5)}{2}} d\varphi). \quad (4.24)$$

Esta é uma informação importante, pois assim podemos separar o domínio do operador Hamiltoniano em um produto direto $D(\hat{H}) = D(\hat{H}_b) \otimes D(\hat{H}_\varphi)$, onde \hat{H}_b e \hat{H}_φ são os operadores com respeito às variáveis b e φ , respectivamente, que compõem o operador Hamiltoniano e, como isso, podemos garantir que o Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{H}_b \otimes \hat{H}_\varphi$ será autoadjunto se ambos \hat{H}_b e \hat{H}_φ forem, de acordo com o Teorema [33]

Sejam T_k operadores autoadjuntos em \mathcal{H}_k . Seja $P(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio de coeficientes reais e grau n_k na k -ésima variável e suponha que D_k^e seja o domínio em que o operador $T_k^{n_k}$ seja essencialmente autoadjunto. Então $P(T_1, \dots, T_n)$ é essencialmente autoadjunto em $D^e = \bigotimes_{k=1}^n D_k^e$.

Isso nos permite, por exemplo, verificar individualmente o caráter autoadjunto de \hat{H}_b e \hat{H}_φ , uma vez que o operador \hat{H} será autoadjunto se ambos os forem. Então, vamos analisar apenas os casos $\alpha = 1/3$ e $\alpha = 1$ para os quais a equação (4.23) é separável, transformando o problema de resolver uma equação diferencial parcial (EDP) para o de solucionar um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO).

4.3 Análise do caráter autoadjunto de \hat{H}

Nesta seção, faremos um estudo do caráter autoadjunto do operador de energia para estes dois casos de fluido radiativo e composto de matéria rígida [2], mas vamos analisar os cenários cosmológicos apenas para o caso $\alpha = 1/3$ [4].

4.3.1 Caso da matéria radiativa

Segundo o modelo padrão da Cosmologia [12, 13], nos estágios iniciais o universo foi dominado por matéria radiativa, que corresponde a $\alpha = 1/3$ na equação de estado do fluido $p = \alpha\rho$, onde p é a pressão do fluido e ρ é a densidade de massa. Classicamente, o fluido é invariante conforme a níveis clássicos. Espera-se que esta propriedade se conserve a nível quântico; vamos verificar isso explicitamente. Para este caso, o operador \hat{H} (4.15) é dado por

$$\hat{H} = -\partial_b^2 - \frac{p}{b} \partial_b + \frac{\varpi}{b^2} [\varphi^2 \partial_\varphi^2 + q \varphi \partial_\varphi]. \quad (4.25)$$

Aplicando este operador na equação de autovalor (4.20) e usando separação de variáveis $\Psi(b, \varphi) = X(b)Y(\varphi)$, obtemos da equação (4.23) o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\hat{H}_b X(b) = \left(-\partial_b^2 - \frac{p}{b} \partial_b + \epsilon \frac{k^2}{b^2} \right) X(b) = \eta X(b); \quad (4.26)$$

$$\hat{H}_\varphi Y(\varphi) = \varpi (\varphi^2 \partial_\varphi^2 + q \varphi \partial_\varphi) Y(\varphi) = \epsilon k^2 Y(\varphi), \quad (4.27)$$

sendo $k^2 \in \mathbb{R}$ a constante de separação e $\epsilon = \pm 1$. Essa imposição sobre a constante de separação está ligada, como veremos mais a frente, à convergência do pacote de ondas. Note que a equação (4.27) permanece a mesma se considerarmos o cálculo dos estados estacionários de energia. Portanto, mesmo antes da análise do caráter autoadjunto da Hamiltoniana, devemos ter a função $Y(\varphi)$ de quadradointegrável para termos um problema fisicamente admissível. Veremos que uma condição necessária para que $Y(\varphi)$ seja quadradointegrável é que $q = 1$. Por enquanto vamos analisar os operadores \hat{H}_b e \hat{H}_φ separadamente.

Considere o operador \hat{H}_b no domínio $D(\hat{H}_b) = C_0^\infty(\mathbb{R}_+, b^p db)$. O operador unitário $U : L^2(\mathbb{R}_+, b^p db) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+, db)$, tal que $U : \phi(b) \mapsto b^{p/2} \phi(b)$, preserva o domínio $D(\hat{H}_b)$ e, consequentemente, as propriedades do operador \hat{H}_b , pelo Lema de Schur, como visto na Seção 3.1. Temos que

$$U \hat{H}_b U^{-1} = b^{\frac{p}{2}} \left(-\partial_b^2 - \frac{p}{b} \partial_b + \epsilon \frac{k^2}{b^2} \right) b^{-\frac{p}{2}} = -\partial_b^2 + \frac{1}{b^2} \left[\frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + \epsilon k^2 \right]. \quad (4.28)$$

Fazendo $\hat{H}'_b = U \hat{H}_b U^{-1}$, a equação (4.26) se resume a

$$\hat{H}'_b X' = \eta X', \quad (4.29)$$

com $X' = UX$. O operador \hat{H}'_b da equação (4.28) é um tipo de Laplaciano bem conhecido na literatura [34, 68]. Podemos garantir uma condição para que este operador seja autoadjunto e, portanto, garantir condições para as quais a equação (4.26) possui solução, usando o Teorema a seguir:

Seja $V(r)$ um potencial contínuo e simétrico em \mathbb{R}_+^ e seja Δ o operador tipo-Laplaciano*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\lambda}{r^2}. \quad (4.30)$$

Então $\Delta + V(r)$ será essencialmente autoadjunto em C_0^∞ somente se $V(r)$ satisfizer

$$V(r) + \frac{\lambda}{r^2} \geq \frac{3}{4} \frac{1}{r^2}, \quad (4.31)$$

onde λ é uma constante real.

Assim, o operador (4.28) é essencialmente autoadjunto se

$$\begin{aligned} \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + \epsilon k^2 \geq \frac{3}{4} &\Rightarrow \epsilon k^2 \geq \frac{3}{4} - \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \\ \Rightarrow \begin{cases} 2|k| \geq \sqrt{-p^2 + 2p + 3} & ; \text{ se } \epsilon = 1 \\ 2|k| \leq \sqrt{p^2 - 2p - 3} & ; \text{ se } \epsilon = -1 \end{cases} . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Para ambos os intervalos serem satisfeitos, os polinômios no interior das raízes devem ser positivos, logo devemos ter $-1 \leq p \leq 3$ para $\epsilon = 1$ e $p \leq -1$ ou $p \geq 3$ para $\epsilon = -1$. Portanto, estabelecemos uma condição sobre o fator de ordenamento p em relação ao caráter autoadjunto do operador Hamiltoniano. Ou seja, garantimos que existe ao menos uma solução $X(b)$ da equação (4.29) - e, conseqüentemente, da equação (4.26) - para ambos os casos $-1 \leq p \leq 3$ se $\epsilon = 1$ e $p \leq -1$ ou $p \geq 3$ se $\epsilon = -1$, tal que $X \in D(\hat{H}_b)$. De fato, as soluções X são combinações de polinômios e funções de Bessel, mas não vamos explicitá-las por enquanto, pois queremos apenas determinar as condições para existência de tais soluções. Vamos nos referir a elas como $X^{(j)}(b, k)$, pois elas também dependem da constante de separação k , o que será importante quando montarmos um pacote de ondas. Para o leitor mais interessado, as soluções são explicitadas em [2].

Uma vez que garantimos as condições para a existência de soluções $X^{(j)}(b, k)$ para a equação de autovalores (4.23) (com $\alpha = 1/3$), ao invés de analisar o caráter autoadjunto do operador \hat{H}_φ , vamos prosseguir com o método de von Neumann para encontrar os índices de deficiência n_\pm para o operador \hat{H} . Para isto, nos resta encontrar as soluções $Y(\varphi)$ da equação (4.27). Lembrando que o objetivo não é explicitar o número de soluções independentes da equação de autovalor, mas sim encontrar condições para que estas existam. Em todo caso, observe que (4.27) é uma equação de Euler de segunda ordem e suas soluções independentes são

$$Y_+(\varphi) = \varphi^{\sigma+\rho} \quad ; \quad Y_-(\varphi) = \varphi^{\sigma-\rho}, \quad (4.33)$$

com σ e ρ da seguinte forma

$$\sigma = \frac{1-q}{2} \quad ; \quad \rho = \sqrt{\sigma^2 + \epsilon \frac{k^2}{\varpi}}. \quad (4.34)$$

Portanto, a solução geral da equação de autovalor (4.23), para um fluido radiativo, é dada pelo pacote de ondas

$$\Psi_\pm^{(j)}(b, \varphi) = \int_{\mathcal{K}} A(k) X^{(j)}(b, k) \varphi^{\sigma \pm \rho} dk. \quad (4.35)$$

O coeficiente $A(k)$ é uma função de renormalização e tem suporte compacto no intervalo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$, onde k é válido. É por esta equação que escolhemos a constante de separação das equações (4.26) e (4.27) somente positiva ou somente negativa (indicado pelo $\epsilon = \pm 1$), porque de outra forma o pacote de ondas descrito acima divergiria, inclusive no caso

de autovalores físicos de energia. Além disso, é importante notar que a constante de separação k , sobre a qual construímos o pacote de ondas, não é completamente arbitrária: ela depende do fator de ordenamento p . Por exemplo, se $\epsilon = 1$, o conjunto \mathcal{K} dos valores de k é dado por

$$\mathcal{K}_+ = \left(-\infty, -\frac{\sqrt{-p^2 + 2p + 3}}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{-p^2 + 2p + 3}}{2}, \infty \right), \quad (4.36)$$

ou seja, é a união dos segmentos de reta de $-\infty$ ao ponto $-P$ com a semirreta positiva de origem em P , sendo $P = (\sqrt{-p^2 + 2p + 3})/2$. Para $\epsilon = -1$, temos

$$\mathcal{K}_- = \left[-\frac{\sqrt{p^2 - 2p - 3}}{2}, \frac{\sqrt{p^2 - 2p - 3}}{2} \right]. \quad (4.37)$$

Nos resta verificar quais soluções (4.35) estão no domínio $D(\hat{H}^*)$ do operador \hat{H}^* . Como são autofunções de \hat{H} , só precisamos determinar se são de quadradointegrável com a medida imposta (4.18). A norma de $\Psi_{\pm}^{(j)}$ é dada por

$$\left\| \Psi_{\pm}^{(j)} \right\|^2 = \iint_{\mathbb{R}_+^2} db d\varphi \iint_{\mathcal{K}^2} dk' dk A'^* A X'^*(j) X^{(j)} b \varphi^{\pm(\rho+\rho^*)-1}, \quad (4.38)$$

onde $A' = A(k')$, $X'^{(j)} = X^{(j)}(b, k')$ e $\rho' = \rho(k')$. Mudando as coordenadas de forma que $\varphi \rightarrow e^u$, a integral em φ se torna:

$$\int_0^{\infty} \varphi^{\pm(\rho+\rho^*)-1} d\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm(\rho+\rho^*)u} du. \quad (4.39)$$

Esta integral diverge para ambos os casos \pm se $(\rho + \rho^*)$ tiver uma componente real. Portanto, pela definição de ρ , equação (4.34), para que $(\rho + \rho^*)$ seja puramente imaginário, devemos ter $\sigma = 0$, ou seja $q = 1$, e $\varpi < 0$ para $\epsilon = 1$ ou $\varpi > 0$ para $\epsilon = -1$. Nestas condições obteremos soluções convergentes. Assim, temos $\rho = i|k|/\sqrt{|\varpi|}$ e, então, a integral sobre u é uma Delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\pm i \frac{(|k| - |k'|)}{\sqrt{|\varpi|}} u \right] du = 2\pi \sqrt{|\varpi|} \delta(\pm|k| \mp |k'|). \quad (4.40)$$

Esta é a condição sobre q que estávamos procurando. É interessante notar também a relação entre ϵ , que é definido como o sinal da constante de integração nas equações (4.26) e (4.27), e o sinal de ϖ , que está relacionada a constante de Brans-Dicke. Depois de integrarmos em k (ou k'), a norma (4.38) se resume a

$$\left\| \Psi_{\pm}^{(j)} \right\|_{D(\hat{H})}^2 = \int_{\mathcal{K}} \|A(k) X^{(j)}(b, k)\|_{D(\hat{H}_b)}^2 dk. \quad (4.41)$$

Já determinamos para quais casos a norma de $X^{(j)}$ converge, então encontramos todas as condições para a existência de soluções quadradointegráveis, isto é, as condições para a existência ou não de extensões autoadjuntas. Em resumo:

1. Se $q = 1$ e $\varpi > 0$, há duas possibilidades:

- i. Para $p \leq -1$ ou $p \geq 3$, o Hamiltoniano (4.25) já é (essencialmente) autoadjunto.
- ii. Caso contrário, para $-1 < p < 3$, não é autoadjunto, mas possui extensões autoadjuntas.

2. Se $q = 1$ e $\varpi < 0$, temos possibilidades similares:

- i. Para $-1 \leq p \leq 3$ o Hamiltoniano (4.25) já é (essencialmente) autoadjunto.
- ii. Para $p < -1$ ou $p > 3$, não é autoadjunto, mas possui extensões autoadjuntas.

Não calculamos explicitamente os índices de deficiência, pois o objetivo é determinar os casos para os quais o operador Hamiltoniano possui extensões e, para isto, precisamos verificar apenas se os índices de deficiência são iguais. No entanto, nosso cálculo sugere que há um número infinito de extensões autoadjuntas. Isso porque o fator de superposição $A(k)$ (de suporte compacto em \mathcal{K}), introduzido na equação (4.38), é arbitrário. Para todos os outros casos não citados na análise acima, os autovalores de energia não são quadradointegráveis e, portanto, estes não representam situações físicas.

4.3.2 Caso da matéria rígida

O caso $\alpha = 1$ é muito similar ao anterior, com análises análogas. Aqui, o operador Hamiltoniano (4.15) se torna

$$\hat{H} = \varpi \varphi \left\{ \partial_\varphi^2 + \frac{q}{\varphi} \partial_\varphi - \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{b^2}{\varpi} \left(\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right) \right] \right\} \quad (4.42)$$

e é simétrico com a medida $b^{p-2} \varphi^{q-1} db d\varphi$, obtida substituindo $\alpha = 1$ na medida (4.18). Neste caso, vamos considerar o operador \hat{H}_1 tal que $\hat{H} = \varphi \hat{H}_1$. Ou seja, o operador Hamiltoniano (4.42) é um produto de dois operadores: $\hat{H} = \hat{Q} \otimes \hat{H}_1$, onde \hat{Q} é o operador posição. O operador \hat{Q} é claramente autoadjunto com o espectro contínuo dado pela reta real, então precisamos verificar se o operador \hat{H}_1 também o é, pois assim teremos que \hat{H} será autoadjunto, pelo teorema apresentado no final da Seção 4.2. Então temos

$$\hat{H}_1 = \varpi \left\{ \partial_\varphi^2 + \frac{q}{\varphi} \partial_\varphi - \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{b^2}{\varpi} \left(\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right) \right] \right\}. \quad (4.43)$$

Observe que (4.43) é muito similar ao operador (4.25) do caso $\alpha = 1/3$, a menos de uma constante multiplicativa, apenas invertendo as variáveis. Portanto, podemos proceder de forma similar ao caso anterior. Vamos considerar um operador unitário $V : L^2(\mathbb{R}_+^2, b^{p-2} \varphi^q db d\varphi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^2, b^{p-2} db d\varphi)$, tal que $V : \phi(b, \varphi) \mapsto \varphi^{q/2} \phi(b, \varphi)$. Logo:

$$V \hat{H}_1 V^{-1} = \varpi \left\{ \partial_\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + \frac{b^2}{\varpi} \left(\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right) \right] \right\}. \quad (4.44)$$

Considerando separações de variáveis, obtemos o seguinte sistema de EDO's:

$$\hat{H}_{1b}X(b) = \frac{b^2}{\varpi} \left(\partial_b^2 + \frac{p}{b} \partial_b \right) X(b) = \epsilon k^2 X(b); \quad (4.45)$$

$$\hat{H}_{1\varphi}Y(\varphi) = \varpi \left\{ \partial_\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + \epsilon k^2 \right] \right\} Y(\varphi) = \eta Y(\varphi). \quad (4.46)$$

Pelas mesmas razões que no caso anterior, vamos fixar p igual a um. O operador

$$\hat{H}_{1\varphi} = \varpi \left\{ \partial_\varphi^2 - \frac{1}{\varphi^2} \left[\frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + \epsilon k^2 \right] \right\} \quad (4.47)$$

é (essencialmente) autoadjunto se

$$\frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1 \right) + \epsilon k^2 \geq \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \epsilon k^2 \geq \frac{3}{4} - \frac{q}{2} \left(\frac{q}{2} - 1 \right) \quad (4.48)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2|k| \geq \sqrt{-q^2 + 2q + 3} & ; \quad \text{se } \epsilon = 1 \\ 2|k| \leq \sqrt{q^2 - 2q - 3} & ; \quad \text{se } \epsilon = -1 \end{cases}. \quad (4.49)$$

Logo, devemos ter $-1 \leq q \leq 3$ se $\epsilon = 1$ e $q \leq -1$ ou $3 \geq q$ se $\epsilon = -1$ para que este intervalo seja satisfeito. Assim, para esses casos, existem soluções $Y(\varphi)$ para a equação (4.46). De fato, $Y(\varphi)$ são combinações de polinômios e funções de Bessel modificadas, que dependem de k . Agora, para achar a restrição mencionada acima sobre p , vamos aplicar a mesma estratégia do caso $\alpha = 1/3$.

A equação (4.45) é uma equação de Euler de segunda ordem, como (4.27), e suas soluções são dadas por (4.33), porém com a variável sendo b ao invés de φ . Portanto, a solução geral para a equação de autovalor $\hat{H}\psi = \pm i\psi$ para \hat{H} dado por (4.42), é da forma

$$\Psi_{\pm}^{(j)} = \int_{\mathcal{K}} A(k) \varphi Y^{(i)}(\varphi, k) b^{\mu \pm \nu} dk, \quad (4.50)$$

com $A(k)$ sendo a função de normalização e

$$\mu = \frac{1-p}{2} \quad ; \quad \nu = \sqrt{\mu^2 + \epsilon \varpi k^2}. \quad (4.51)$$

Comparando (4.50) com a equação (4.35), podemos recuperar a conclusão obtida para o caso $\alpha = 1/3$, sem perda de generalidade. Temos que:

1. Se $p = 1$ e $\varpi > 0$, há duas possibilidades:
 - i. Para $q \leq -1$ ou $q \geq 3$, o operador Hamiltoniano (4.42) já é (essencialmente) autoadjunto.
 - ii. Caso contrário, para $-1 < q < 3$, não é autoadjunto, mas possui extensões autoadjuntas.
2. Se $p = 1$ e $\varpi < 0$, temos possibilidades similares:
 - i. Para $-1 \leq q \leq 3$ o operador (4.42) já é (essencialmente) autoadjunto.
 - ii. Para $q < -1$ ou $q > 3$, não é autoadjunto, mas possui extensões autoadjuntas.

4.3.3 Sobre os resultados matemáticos

É possível identificar uma similaridade entre o caso de radiação e o de matéria rígida. Talvez a diferença mais notável seja o fato de que há uma troca de papéis entre o fator de escala e o campo escalar, de um caso para o outro. E, embora não tenhamos calculado explicitamente o número de extensões autoadjuntas possíveis, para ambos os casos nós estimamos que hajam infinitas extensões, por causa da arbitrariedade do fator de superposição $A(k)$. Apesar do conteúdo apresentado nesta seção ser original, os resultados para o caso de matéria radiativa podem ser obtidos de uma forma alternativa [69], com a análise da quebra de simetria no espaço de fase do sistema.

Assim, matematicamente a teoria é bem consistente se tomarmos um certo cuidado com o espaço de Hilbert escolhido. Devemos definir uma métrica não trivial para garantir simetria. Embora tenhamos concluído que sempre pode haver extensões autoadjuntas, só encontramos condições específicas para a existência dessas para os casos das matérias radiativa e rígida, que geram uma equação diferencial separável. Lembrando que as condições são dadas em função dos fatores de ordenamento introduzidos, que, a princípio, são arbitrários. A escolha deles não influencia nos resultados, uma vez que a medida $d\mu$ do espaço de Hilbert é escrita em função deles de forma a anular a dependência deles. Com a parte matemática garantida, podemos analisar os cenários cosmológicos que surgem desta teoria.

4.4 Cenários cosmológicos

Para esta parte, assumiremos que o universo primordial foi dominado por radiação. A quantização da Teoria de Brans-Dicke com um fluido perfeito de matéria radiativa resulta, como vimos, num sistema cujo estados estacionários de energia $\psi(b, \varphi)$ satisfazem a equação de autovalor

$$\left\{ \partial_b^2 + \frac{p}{b} - \varpi \frac{\varphi}{b^2} \left[\partial_\varphi^2 + \frac{1}{\varphi} \partial_\varphi \right] \right\} \psi = -E\psi. \quad (4.52)$$

A solução geral da equação de Schrödinger (4.13) é dada por $\Psi(b, \varphi, T) = \psi(b, \varphi) e^{iET}$. Vamos definir

$$\varpi = \varepsilon |\varpi| \quad ; \quad \sigma = \frac{\ln \varphi}{\sqrt{|\varpi|}}, \quad (4.53)$$

onde $\varepsilon = 1$ se $\varpi > 0$ e $\varepsilon = -1$ se $\varpi < 0$.² Assim, a equação (4.52) se torna

$$\left[\partial_b^2 + \frac{p}{b} - \varepsilon \frac{1}{b^2} \partial_\sigma^2 \right] \psi = -E\psi. \quad (4.54)$$

²Não confundir esse novo ε com o das seções ε anteriores.

De forma similar ao da Seção 4.3.1, pelo método de separação de variáveis, fazemos $\psi(b, \sigma) = X(b)Y(\sigma)$ e, então, a solução para a equação diferencial (4.54) é dada por

$$X(b) = b^{\frac{1}{2}(1-p)} \left[A_1 J_\nu(\sqrt{E}b) + A_2 Y_{-\nu}(\sqrt{E}b) \right]; \quad (4.55)$$

$$Y(\sigma) = B_1 e^{ik\sigma} + B_2 e^{-ik\sigma}, \quad (4.56)$$

sendo $A_{1,2}$ e $B_{1,2}$ constantes de integração e J_m e Y_m são funções de Bessel de primeira e segunda ordem, respectivamente. Fixamos a constante de separação $-k^2$, para termos soluções quadrado integráveis, como explicado na seção anterior. Também definimos

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - \varepsilon k^2}. \quad (4.57)$$

Porém, observe que as soluções acima são soluções de ondas planas, que não são quadra-dointegráveis. A condição de normalização não é atendida para uma onda plana, porém é satisfeita se construirmos um pacote de ondas. Assim, a função de onda é representada pela superposição de ondas planas de autovalor $A(k, E)$. Para construirmos nosso pacote de ondas $\Psi(b, \sigma, T)$, vamos descartar a função de Bessel de segunda ordem, ou seja, vamos fazer $A_2 = 0$, uma vez que esta diverge na origem [70]. Sem perda de generalidade, vamos escolher também $B_2 = 0$. A análise para o caso $B_1 = 0$ é análoga. Logo,

$$\Psi(b, \sigma, T) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty b^{\frac{1}{2}(1-p)} A(k, E) J_\nu(\sqrt{E}b) e^{ik\sigma} e^{iET} dk dE. \quad (4.58)$$

Escolhemos o fator de normalização

$$A(k, E) = e^{-k^2} \left(\sqrt{E}\right)^{\nu+1} e^{-\gamma E}, \quad (4.59)$$

com $\gamma > 0$ um número real. Desta forma, fazendo $E = x^2$, o pacote de ondas se torna

$$\Psi(b, \sigma, T) = b^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-k^2} x^{\nu+1} e^{-\beta x^2} J_\nu(xb) e^{ik\sigma} dk dx, \quad (4.60)$$

com $\beta = \gamma - iT$. Integrando em x [71], obtemos

$$\Psi(b, \sigma, T) = b^{\frac{1}{2}(1-p)} \int_{-\infty}^\infty e^{-k^2} e^{ik\sigma} e^{-\beta x^2} \frac{b^\nu}{(2\beta)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}} dk, \quad (4.61)$$

Este é o pacote de ondas do modelo quantizado de Brans-Dicke. Note que, por enquanto, ainda não especificamos p , mas deixamos implícito que o valor dele está determinado de forma que o operador seja autoadjunto, seguindo a conclusão da seção anterior.

Como estamos mantendo p genérico, não vamos resolver a integral em k na equação (4.61) por enquanto. Neste caso, a norma $\mathcal{N} = \|\Psi\|^2$ é dada por

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-k^2 - k'^2} e^{i(k-k')\sigma} \frac{b^{\nu+\nu'+1}}{(2\beta)^{\nu+1} (2\beta')^{\nu'+1}} e^{-\gamma \frac{b^2}{4\beta\beta'}} db d\sigma dk dk', \quad (4.62)$$

onde $\nu' = \nu(k')$. A norma foi calculada de acordo com o produto interno (4.17), introduzido na seção 4.1, para $\alpha = 1/3$. Lembrando que a integração em σ gera uma delta de Dirac, equação (4.40), a integração em σ e em k' resulta em

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2k^2} \frac{b^{\nu+\nu'+1}}{(2\beta)^{\nu+1} (2\beta^*)^{\nu'+1}} e^{-\gamma \frac{b^2}{4\beta\beta^*}} db dk. \quad (4.63)$$

Vamos nos concentrar no caso $\varepsilon = -1$, no qual o operador Hamiltoniano é limitado inferiormente e é essencialmente autoadjunto para $-1 \leq p \leq 3$. Para o caso $\varepsilon = 1$, há uma ambiguidade para o espectro das coordenadas, devido ao fato da energia não ter um limite inferior. Teríamos problemas, por exemplo, para montar o pacote de ondas, uma vez que consideramos apenas valores positivos de E em (4.58). Para $\varepsilon = -1$, temos que $\nu \in \mathbb{R}$ e a expressão acima (4.63) é dada por

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2k^2} \frac{b^{2\nu+1}}{(4\beta\beta^*)^{\nu+1}} e^{-\gamma \frac{b^2}{4\beta\beta^*}} db dk. \quad (4.64)$$

Definindo novas variáveis como

$$B = \beta\beta^* = \gamma^2 + T^2 \quad ; \quad y = \frac{b}{\sqrt{B}}, \quad (4.65)$$

a norma se torna

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2k^2} \frac{y^{2\nu+1}}{4^{\nu+1}} e^{-\gamma(\frac{y}{2})^2} db dy, \quad (4.66)$$

que é independente do tempo, como queríamos.

Podemos agora computar os valores esperados de b e de σ . Para b , fazemos de forma similar ao cálculo da norma. Seguindo os mesmos passo, encontramos

$$\langle b \rangle = \frac{\sqrt{\gamma^2 + T^2}}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-2k^2} \frac{y^{2\nu+2}}{4^{\nu+1}} e^{-\gamma(\frac{y}{2})^2} db dy. \quad (4.67)$$

Isto significa que o fator de escala b se comporta como

$$\langle b \rangle \propto \sqrt{\gamma^2 + T^2}, \quad (4.68)$$

em acordo com [1]. Observe que, como $\gamma > 0$, b é sempre uma quantidade positiva. Isso quer dizer que o universo nunca encolhe até um volume zero, o que nos diz que a singularidade inicial não é esperada neste modelo: um ricochete é formado no universo primordial, onde temos o comportamento de um universo em contração, atingindo um volume mínimo e iniciando uma fase em expansão. Este resultado é válido para qualquer fator de ordenamento p . O cálculo do valor esperado de σ é um pouco mais elaborado. Temos que

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-k^2 - k'^2} \sigma e^{i(k-k')\sigma} \\ &\times \frac{b^{\nu+\nu'+1}}{(2\beta)^{\nu+1} (2\beta^*)^{\nu'+1}} e^{-\frac{\gamma}{4} \frac{b^2}{\beta\beta^*}} db d\sigma dk dk'. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Considere a identidade

$$\sigma e^{i(k-k')\sigma} = -i\partial_k e^{i(k-k')\sigma}. \quad (4.70)$$

Com isto, a integral sobre σ resulta numa delta de Dirac (4.40) e, usando a propriedade da função delta $\delta' * f = \delta * f'$, a expressão acima se reduz a

$$\langle \sigma \rangle = -\frac{i}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{4} \frac{b^2}{\beta\beta^*}} e^{-k^2} \frac{b^{\nu+1}}{(2\beta)^{\nu+1}(2\beta^*)} \left[\frac{d\nu}{dk} \ln\left(\frac{b}{2\beta^*}\right) - 2k \right] db dk. \quad (4.71)$$

Observe que, neste caso, ν é dado pela equação (4.57), o que nos diz que a integral acima é ímpar em k e, portanto, é igual a zero, $\langle \sigma \rangle = 0$. Portanto, temos que o valor esperado de σ é zero. No entanto, esse resultado depende diretamente da escolha do fator de superposição $A(k)$, em especial ao fato de termos escolhido uma função par. Se tivéssemos escolhido uma função ímpar, ao invés, o resultado seria diferente. Por exemplo, escolhendo $A(k) = e^{-k-k^2}$ encontramos a expressão

$$\langle \sigma \rangle = -\frac{i}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2k-2k^2}}{4^{|k|+1}} y^{2|k|+1} e^{-\frac{\gamma}{4}y^2} \frac{k}{|k|} \ln\left[\frac{y}{4} \left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right)^{\frac{1}{2}}\right] dy dk. \quad (4.72)$$

O ntegrando não tem paridade definida, neste caso. Fazendo

$$\alpha = \gamma + iT = Re^{i\theta}, \quad R = \sqrt{\gamma^2 + T^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{T}{\gamma}\right), \quad (4.73)$$

o valor esperado de σ se torna,

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_0 + \sigma_1 \arctan\left(\frac{T}{\gamma}\right), \quad (4.74)$$

onde σ_0 e σ_1 são constantes. Notavelmente, estas mudanças na superposição não afetam o comportamento do valor esperado do fator de escala no referencial de Einstein b .

4.5 Os referenciais de Jordan e de Einstein

Retornando para a equação de Schrödinger no referencial de Jordan, vamos discutir sobre as condições que devem ser impostas sobre o operador Hamiltoniano efetivo para que este seja autoadjunto neste referencial. Também veremos as consequências disto para os cenários cosmológicos. A transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi^{-1}g_{\mu\nu}$ feita na Seção 4.1, representada por (4.10), leva as coordenadas do referencial de Jordan, de variáveis a e φ , para o referencial de Einstein, com as coordenadas b e σ . Assim, podemos sempre transformar as coordenadas na solução (4.61) de forma que esta se torne uma solução também no referencial de Jordan. No entanto, não é suficiente garantir a equivalência entre as soluções nos dois referenciais. Ainda é preciso verificar as condições para que o operador Hamiltoniano no referencial de Jordan [4]

$$\hat{H}_J = \frac{\omega}{12(3+2\omega)} \left\{ \frac{1}{\varphi} \left[\partial_a^2 + \frac{\bar{p}}{a} \partial_a \right] + \frac{6}{\omega} \left[\frac{1}{a} \partial_a \partial_\varphi - \frac{1}{a^2} (\varphi \partial_\varphi^2 + \bar{q} \partial_\varphi) \right] \right\} \quad (4.75)$$

seja autoadjunto, lembrando que os fatores de ordenamento \bar{p} e \bar{q} se relacionam com p e q de acordo com (4.14). De fato, [72] mostrou a equivalência entre as soluções dos dois referenciais em um modelo anisotrópico e reconheceu a importância dos fatores de ordenamento para assegurar a equivalência entre os dois referenciais.

O primeiro passo é determinar para qual medida o Hamiltoniano (4.75) é simétrico. Vamos supor que o produto interno no referencial de Jordan tenha a forma

$$(\xi, \Psi) = \int \xi^* \Psi a^r \varphi^s da d\varphi, \quad (4.76)$$

Os parâmetros r e s devem ser obtidos de forma que o operador (4.75) seja simétrico. Isto é,

$$(\xi, \hat{H}_J \Psi) = \int \xi^* (\hat{H}_J \Psi) a^r \varphi^s da d\varphi = \int (\hat{H}_J \xi^*) \Psi a^r \varphi^s da d\varphi = (\hat{H}_J \xi, \Psi). \quad (4.77)$$

Calculando explicitamente, considerando que funções no domínio de \hat{H}_J , isto é, funções cujo termos de superfície são nulos, temos

$$\begin{aligned} (\xi, \hat{H}_J \Psi) &= (\hat{H}_J \xi, \Psi) \\ &+ \int \xi^* \Psi \left\{ (r - \bar{p})(r - 1) + \frac{6}{\omega} s \left[(r - 1) - (s + 1 - \bar{q}) \right] \right\} \\ &\times a^{r-2} \varphi^{s-1} da d\varphi \\ &+ \int (\partial_\varphi \xi^*) \frac{6}{\omega} \left[(r - 1) - 2(s + 1 - \bar{q}) \right] \Psi a^{r-2} \varphi^s da d\varphi \\ &+ \int (\partial_a \xi^*) \left[2(r - \bar{p}) + 6 \frac{s}{\omega} \right] \Psi a^{r-1} \varphi^{s-1} da d\varphi. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Portanto, o operador \hat{H}_J é simétrico se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\begin{cases} (r - \bar{p}) + 3 \frac{s}{\omega} = 0; \\ (r - 1) - 2[(s + 1) - \bar{q}] = 0; \\ (r - \bar{p})(r - 1) + \frac{6}{\omega} s [(r - 1) - (s + 1) + \bar{q}] = 0. \end{cases} \quad (4.79)$$

Este sistema tem solução única dada por

$$r = \frac{2\bar{p} - 2(3 - 2\bar{q})}{(3 + 2\omega)} + (3 - 2\bar{q}) \quad ; \quad s = \frac{\bar{p} - (3 - 2\bar{q})}{(3 + 2\omega)}. \quad (4.80)$$

Como no caso do referencial de Einstein, a medida depende dos fatores de ordenamento \bar{p} e \bar{q} , além da constante ω .

Assim, concluímos que, no referencial de Jordan, o operador Hamiltoniano (4.75) é simétrico com a medida $d\mu_J = a^r \varphi^s da d\varphi$, onde r e s são dadas por (4.80). Se quisermos ter soluções quadradointegráveis, devemos fixar $\bar{q} = 1$, como fizemos nas seções anteriores, e a equação (4.80) se torna,

$$r = \frac{2(\bar{p} + \omega) + 1}{3 + 2\omega} \quad ; \quad s = \frac{\bar{p} - 1}{3 + 2\omega}, \quad (4.81)$$

onde consideramos a transformação $da d\varphi = \varphi^{-\frac{1}{2}} db d\sigma$. No entanto, é mais conveniente trabalhar com as coordenadas (b, σ) ao invés de (a, φ) . A medida $d\mu_J$ se transforma como

$$a^r \varphi^s da d\varphi \mapsto b^r e^{-r\sigma/2} e^{s\sigma} e^{\sigma/2} db d\sigma = b^r e^{\sigma(2s-r+1)/2} db d\sigma = b^r db d\sigma. \quad (4.82)$$

Observe que suprimimos as linhas nas expressões contendo σ . Assim, temos

$$d\mu_J = b^r db d\sigma, \quad (4.83)$$

que é equivalente a $d\mu_E$ apenas para $r = \bar{p} = p = 1$. Para um r arbitrário, o pacote de ondas Ψ dado por (4.61) não é quadradointegrável. De fato:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi^* \Psi b^r db d\sigma \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2k^2} \frac{b^{2\nu+1-p+r}}{(4\alpha\alpha^*)^{\nu+1}} e^{-\gamma \frac{b^2}{4\alpha\alpha^*}} db dk, \end{aligned} \quad (4.84)$$

onde já integramos em σ e em k' . Mudando as variáveis de forma similar ao feito na seção anterior, obtemos

$$\mathcal{N} = B^{\frac{p-r}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2k^2} \frac{y^{2\nu+1-p+r}}{4^{\nu+1}} e^{-\gamma \left(\frac{y}{2}\right)^2} dy dk. \quad (4.85)$$

Lembrando que $B = \gamma^2 + T^2$, temos que a norma \mathcal{N} é independente do tempo somente para $\bar{p} = p = r = 1$. Consequentemente, o operador Hamiltoniano no referencial de Jordan só é autoadjunto se esta condição for válida, que é a mesma condição para a equivalência entre as medidas nos dois referenciais.

Também podemos verificar a equivalência calculando a transformação inversa de (4.82), ou seja, escrevendo $d\mu_E$ nas coordenadas (a, φ) . Neste caso, temos

$$b^{\bar{p}} db d\sigma \mapsto a^{\bar{p}} \phi^{\bar{p}/2} \phi^{-1/2} da d\phi = a^{\bar{p}} \phi^{(\bar{p}-1)/2} da d\phi, \quad (4.86)$$

que é equivalente a $d\mu_J$ apenas se $\bar{p} = p = 1$, ou seja, para $r = 1$ e $s = 0$. Então, a equivalência entre os referenciais de Jordan e Einstein implica numa escolha privilegiada do fator de ordenamento imposto durante a quantização. Devemos ter $\bar{p} = 1$ (implicando $p = 1$ no referencial de Einstein) para obtermos um operador Hamiltoniano autoadjunto também no referencial de Jordan.

Vamos agora calcular os valores esperados do fator de escala a no referencial de Jordan. Como dito acima, é mais conveniente usarmos as coordenadas (b, σ) , então vamos considerar a medida $d\mu_J$ dada em (4.83). Deixando um r arbitrário a priori, temos

$$\langle a \rangle = \langle b e^{-\frac{\sigma}{2}} \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty \Psi^* b e^{-\frac{\sigma}{2}} \Psi b^r db d\sigma. \quad (4.87)$$

Substituindo o pacote de ondas (4.61), a expressão (4.87) se torna,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-k^2 - k'^2} e^{[i(k-k') - \frac{1}{2}]\sigma} \\ &\times \frac{b^{\nu+\nu^*+1-p+r}}{(2\alpha)^{\nu+1}(2\alpha^*)^{\nu^*+1}} e^{-\gamma \frac{b^2}{2\alpha\alpha^*}} db d\sigma dk dk', \end{aligned} \quad (4.88)$$

que diverge por causa da integração em σ . Isto é, $\langle a \rangle$ diverge em ambos os referenciais, em Einstein e em Jordan. Para o campo escalar original φ , temos

$$\langle \varphi \rangle = \langle e^{\sqrt{|\varpi|\sigma}} \rangle = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \Psi^* e^{\sqrt{|\varpi|\sigma}} \Psi b^r db d\sigma, \quad (4.89)$$

que também diverge devido a integral em σ . No entanto, as quantidades $\langle b \rangle$ e $\langle \sigma \rangle$ convergem em ambos os referenciais. De fato, para o valor esperado de σ a integral em k continua sendo ímpar, mesmo para um valor arbitrário de r . Então, no referencial de Jordan também obtemos

$$\langle \sigma \rangle = 0. \quad (4.90)$$

No entanto, como observado na seção anterior, esse resultado depende da forma (ou melhor, da paridade) do fator de superposição $A(k)$. Por outro lado, de forma muito similar ao que fizemos em (4.67) e usando a norma (4.85), obtemos o valor esperado de b no referencial de Jordan

$$\langle b \rangle \propto \left(\sqrt{\gamma^2 + T^2} \right)^{1+p-r}, \quad (4.91)$$

que se reduz para $\langle b \rangle \propto \sqrt{\gamma^2 + T^2}$ quando $p = 1$ ($\bar{p} = 1$), reproduzindo (4.68), como esperado. Assim, segundo nossa análise, uma conclusão plausível seria que, além de um ordenamento privilegiado, também temos observáveis privilegiados, isto é, as quantidades que observamos são, na verdade, b e σ .

4.6 Quantização Afim: análise semiclássica da teoria de Brans-Dicke

A proposta desta seção é aplicar o método afim do Capítulo 3 na Teoria Clássica de Brans-Dicke, apresentada no início deste capítulo. Vamos nos limitar a análise semiclássica da teoria, buscando fazer uma análise qualitativa do problema. Assim, não faremos a quantização *per se* da teoria, mas estudaremos as correções quânticas proveniente da quantização afim. Relembrando a Hamiltoniana clássica da Teoria de Brans-Dicke (4.6), considerando o fluido perfeito composto de matéria radiativa $\alpha = 1/3$:

$$\mathcal{H}_T = \frac{N}{a} \left\{ \frac{1}{(3+2\omega)} \left[\frac{\omega}{12\varphi} p_a^2 + \frac{1}{2a} p_a p_\varphi - \frac{\varphi}{2a^2} p_\varphi^2 \right] - p_T \right\}, \quad (4.92)$$

4.6. QUANTIZAÇÃO AFIM: ANÁLISE SEMICLÁSSICA DA TEORIA DE BRANS-DICKE69

onde trocamos a notação para o momento de π para p por conveniência. As variáveis a e φ são estritamente positivas e então podemos fazer a quantização afim para elas, como demonstrado nas seções passadas. Já a variável de Schutz T associada ao fluido pode assumir qualquer valor real, logo o grupo de simetria do espaço de fases não é mais o grupo afim, como no caso das variáveis estritamente positivas. É possível fazer uma quantização por integração também para casos como este, usando, por exemplo, o grupo de Weyl-Heisenberg de simetrias do plano [52], ou mesmo usar a quantização canônica neste caso, que funciona perfeitamente bem para o caso em que a variável percorre toda a reta real, livre de singularidades e, portanto, sem problemas de caráter autoadjunto. Os estados coerentes $|a, p_a\rangle$ e $|\varphi, p_\varphi\rangle$ são dados por

$$|a, p_a\rangle = U_a|\psi_a\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x|a, p_a\rangle = U_a\langle x|\psi_a\rangle = \frac{e^{ip_a\pi}}{\sqrt{a}}\psi_a\left(\frac{x}{a}\right) \quad (4.93)$$

$$|\varphi, p_\varphi\rangle = U_\varphi|\psi_\varphi\rangle \quad \Rightarrow \quad \langle x|\varphi, p_\varphi\rangle = U_\varphi\langle x|\psi_\varphi\rangle = \frac{e^{ip_\varphi\pi}}{\sqrt{\varphi}}\psi_\varphi\left(\frac{x}{\varphi}\right). \quad (4.94)$$

Note que estamos considerando, a princípio, vetores fiduciais diferentes ψ_a e ψ_φ para as variáveis a e φ , respectivamente.

O vínculo de Wheeler-DeWitt, $\mathcal{H}_T = 0$, resulta na seguinte equação

$$\frac{\omega}{12\varphi}p_a^2 + \frac{1}{2a}p_ap_\varphi - \frac{\varphi}{2a^2}p_\varphi^2 = (3 + 2\omega)p_T. \quad (4.95)$$

Observe que o ordenamento não é mais um problema no caso da quantização afim, então podemos fatorar os termos $Na^{-1}(3 + 2\omega)^{-1}$ da equação sem perda de generalidade, restando apenas a equação clássica simplificada (4.95). Seguindo o mapa (3.11) e lembrando das equações (3.19) e (3.20), a quantização das outras componentes da Hamiltoniana se dá da seguinte forma:

$$f_1(a, p_a) = a^{-1}p_a \quad \mapsto \quad A_{f_1} = -\frac{i}{c_{-1}(a)}\left(\frac{1}{a}\partial_a - \frac{1}{2a^2}\right); \quad (4.96)$$

$$f_2(\varphi, p_\varphi) = \varphi p_\varphi^2 \quad \mapsto \quad A_{f_2} = \frac{c_0(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)}\varphi\partial_\varphi^2 + \frac{c_0(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)}\partial_\varphi - \frac{c_{-2}^{(1)}(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)}\frac{1}{\varphi}, \quad (4.97)$$

com as constantes $c_\gamma^{(j)}(a)$ e $c_\gamma^{(j)}(\varphi)$ definidas por

$$c_\gamma^{(j)}(a) = \int_0^\infty [\psi_a^{(j)}(x)]^2 \frac{dx}{x^{2+\gamma}} \quad ; \quad c_\gamma^{(j)}(\varphi) = \int_0^\infty [\psi_\varphi^{(j)}(x)]^2 \frac{dx}{x^{2+\gamma}}. \quad (4.98)$$

Então, fazendo a quantização, encontramos a seguinte equação do tipo Schrödinger:

$$\frac{1}{(3 + 2\omega)}\left(\lambda_1\omega\frac{1}{\varphi}\partial_a^2 + \lambda_2\omega\frac{1}{\varphi a^2} - \lambda_3\frac{1}{a}\partial_a\partial_\varphi - \lambda_4\frac{\varphi}{a^2}\partial_\varphi^2 + \lambda_5\frac{1}{a^2}\partial_\varphi\right)\Psi = i\partial_T\Psi \quad (4.99)$$

que é uma equação diferencial parcial não separável. As constantes λ_j são dadas por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{12c_{-1}(\varphi)} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{c_{-3}^{(1)}(a) + 6c_{-3}(a)c_{-2}^{(1)}(\varphi)}{12c_{-1}(\varphi)c_{-1}(a)}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2c_{-1}(a)} \quad ; \quad \lambda_4 = \frac{c_0(\varphi)c_{-3}(a)}{2c_{-1}(\varphi)c_{-1}(a)} \quad ; \quad \lambda_5 = \frac{c_{-3}(a)}{2c_{-1}(a)} \left[\frac{c_0(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)} - \frac{1}{2c_{-3}(a)} \right],$$

que dependem somente da escolha dos vetores fiduciais ψ_a e ψ_φ . O operador do sistema quântico, então, é dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{(3+2\omega)} \left[\lambda_1 \omega \frac{1}{\varphi} \partial_a^2 + \lambda_2 \omega \frac{1}{\varphi a^2} - \lambda_3 \frac{1}{a} \partial_a \partial_\varphi - \lambda_4 \frac{\varphi}{a^2} \partial_\varphi^2 + \lambda_5 \frac{1}{a^2} \partial_\varphi \right]. \quad (4.100)$$

Ao invés de tentarmos encontrar as soluções desta equação (4.99), que é não separável, como vimos, vamos fazer a análise semiclássica do problema. Identificamos p_T com os possíveis níveis de energia do sistema e, então, a correção semiclássica da equação (4.95) se torna

$$\omega \kappa_1 \frac{1}{\varphi} p_a^2 + \omega \kappa_2 \frac{1}{\varphi a^2} + \frac{1}{2a} p_a p_\varphi - \kappa_3 \frac{\varphi}{a^2} p_\varphi^2 = (3+2\omega) p_T \quad (4.101)$$

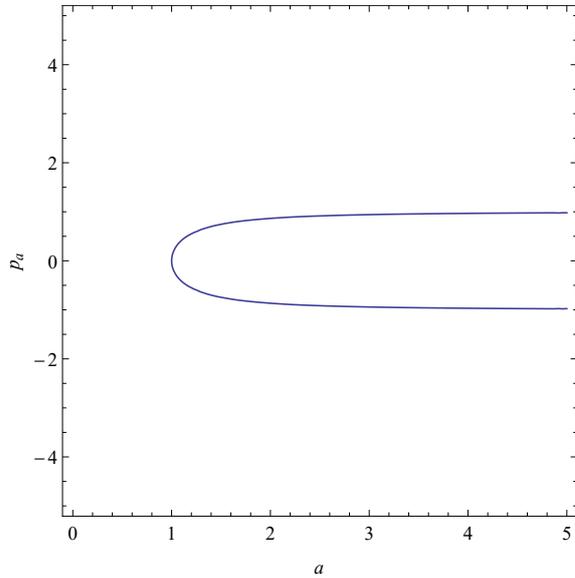
onde as constantes κ_j são dadas por

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{c_{-3}(\varphi)}{12c_{-1}(\varphi)}; \\ \kappa_2 &= \frac{c_{-3}(\varphi)}{12c_{-1}(\varphi)} \left(\frac{c_0(a)c_{-3}^{(1)}(a)}{c_{-1}(a)} + c_{-2}^{(1)}(a) \right) - \frac{c_{-3}(a)c_{-4}(a)}{2c_{-1}(a)} \left(\frac{c_0(\varphi)c_{-3}(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)} + c_{-2}^{(1)}(\varphi) \right); \\ \kappa_3 &= \frac{c_{-3}(a)c_{-4}(a)}{2c_{-1}(a)} \frac{c_0(\varphi)c_{-3}(\varphi)}{c_{-1}(\varphi)}. \end{aligned}$$

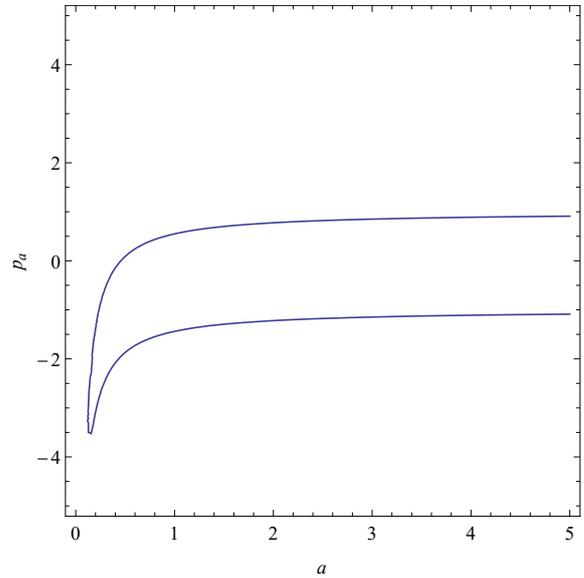
Ao invés de escolhermos vetores fiduciais específicos, vamos fazer uma análise qualitativa desta equação. Com a liberdade de escolha, podemos supor sem perda de generalidade que κ_1, κ_2 e κ_3 são positivos. Então, tomando $\omega > 0$, podemos analisar o comportamento do fator de escala em relação à evolução do campo escalar. Assim, qualitativamente, escolhemos $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = E = 1$, sendo $E = (3+2\omega)p_T$ a energia do sistema, e plotamos o espaço de fase do fator de escala para diferentes tipos de comportamento do campo escalar.

Na Figura (4.1a), o campo escalar é constante ($\varphi = 1$, neste caso), isto é, $p_\varphi = 0$, ou seja, recuperamos a Relatividade Geral. Neste caso, como esperado, observamos um ricochete nos primórdios do universo, com um valor mínimo não-nulo para o seu volume. Para um campo com “baixa” velocidade, Figura (4.1b), além do ricochete, observamos a presença de uma fase inflacionária, gerada pela evolução do campo. Porém, a partir de um certo limite de velocidade para o campo escalar, representado pelas Figuras (4.2), a continuidade é quebrada e perdemos o ricochete, embora o fator de escala nunca atinja o zero. Isto parece não corresponder a um sistema físico. Desta análise, conclui-se que o campo escalar da Teoria de Bras-Dicke deve ter uma evolução limitada, de modo a gerar uma configuração fisicamente estável. Neste caso, ele se apresenta como um modelo de ricochete, gerador de uma fase inflacionária, Gráfico (4.1b), onde o momento cresce rapidamente para pequenos valores do fator de escala. Observe, no entanto, que para a muito grande, a curva semiclássica coincide com o previsto pelo modelo padrão. Os

4.6. QUANTIZAÇÃO AFIM: ANÁLISE SEMICLÁSSICA DA TEORIA DE BRANS-DICKE71

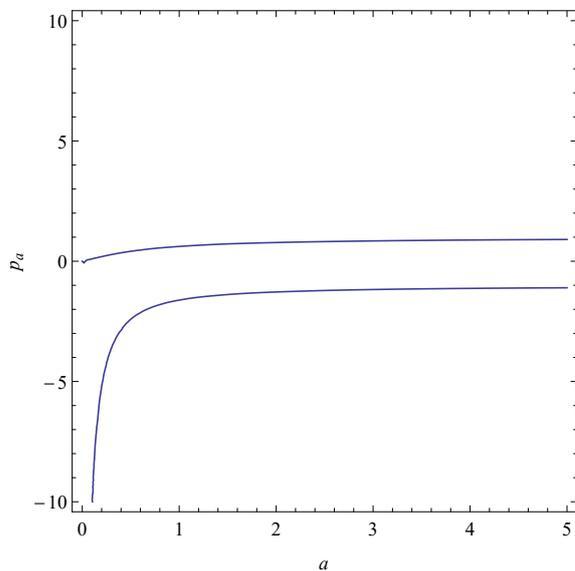


(a) Campo escalar constante

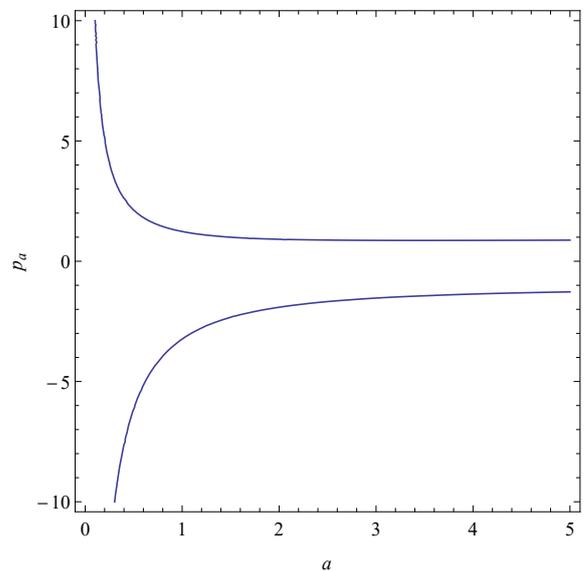


(b) Campo escalar com baixa velocidade

Figura 4.1: A abscissa corresponde ao fator de escala a e a ordenada ao seu momento p_a . A Figura (4.1a) indica um ricochete no universo primordial, enquanto a Figura (4.1b) indica, além de um ricochete, uma fase inflacionária.



(a) Campo escalar (aprox.) na velocidade limite



(b) Campo escalar com alta velocidade

Figura 4.2: A abscissa corresponde ao fator de escala a e a ordenada ao seu momento p_a . A Figura (4.2a) mostra uma quebra de continuidade ao cruzar uma certa velocidade limite para o campo escalar. Ao considerarmos "altas" velocidades, Figura (4.2b), a descontinuidade fica mais evidente. Esta configuração parece não descrever uma situação física coerente.

gráficos são curvas representadas no espaço de fase do sistema, então a inclinação da curva é a aceleração do parâmetro a . Observe nos Gráficos (4.1b), (4.2a) e (4.2b) as curvas apresentam uma inclinação característica de uma fase inflacionária.

Conclusão

A proposta principal da tese foi estudar os aspectos matemáticos e físicos da quantização canônica da Teoria de Brans-Dicke, introduzindo um fluido perfeito via formalismo de Schutz para usar matéria como parâmetro temporal. Devido ao fato das variáveis envolvidas na configuração, o fator de escala do universo e o campo escalar de Brans-Dicke, serem estritamente positivas, o método canônico deve ser tratado com mais cautela, uma vez que, no domínio da semirreta real positiva, os operadores que representam observáveis podem não ser autoadjuntos. O nosso estudo sobre o caráter autoadjunto do operador Hamiltoniano obtido da teoria clássica mostrou que sempre é possível obter extensões autoadjuntas para este, caso ele já não seja essencialmente autoadjunto. Nossos cálculos sugerem, no entanto, a existência de uma infinidade de extensões, sendo que temos uma privilegiada, que preserva o estado fundamental de energia, apenas para o caso em que o operador é limitado inferiormente, que corresponde a escolha de campos fantasmas. A condição de ser autoadjunto ou ter extensões é determinada pela constante de Brans-Dicke e pela escolha do ordenamento imposto no Hamiltoniano, devido ao fato dos operadores momento e posição não comutarem. Para que o operador seja simétrico, precisamos definir uma medida não trivial para o espaço de Hilbert das funções de onda, que também depende dos ordenamentos escolhidos. Isso é, de certa forma, esperado, uma vez que é possível fazer uma analogia entre o operador de energia com o Laplaciano, que “exige” uma medida não trivial se escrito em coordenadas polares. A imposição de que o pacote de onda seja quadradointegrável, naturalmente nos força a escolher um ordenamento privilegiado para posição e momento relativos ao campo escalar, no entanto o ordenamento com relação ao fator de escala pode ser considerado arbitrário, matematicamente falando.

A princípio, classicamente, consideramos um fluido perfeito de conteúdo material genérico, mas eventualmente demos preferência para as matérias radiativas e rígida. Matematicamente falando, apenas com estes tipos de matéria poderíamos encontrar soluções separáveis para a equação de Schrödinger. Fisicamente, consideramos mais plausível analisar o caso apenas para matéria radiativa, uma vez que supõe-se que o estágio inicial do universo seja dominado por radiação e que esta é invariante conforme, o que é importante, já que fazemos uma transformação conforme de coordenadas. Alguns aspectos curiosos surgiram ao fazermos o estudo do cenário cosmológico proveniente desta quantização. Ao montarmos um pacote de ondas cuja norma resultasse numa expressão analítica indepen-

dente do tempo, o cálculo do valor esperado do fator de escala resulta numa quantidade positiva que nunca se anula. Isso indica um ricochete no universo primordial, evitando a singularidade inicial. Este resultado indica que um ricochete é esperado deste modelo, gerando um universo em contração, seguido de uma fase em expansão, na qual no encontramos. Por outro lado, encontramos que o valor esperado do campo escalar, descrito em escalas logarítmicas, é nulo.

Porém, como mencionado, para obtermos um sistema mais tratável, de forma analítica, fazemos uma transformação conforme de coordenadas, sendo o fator conforme definido pelo próprio campo escalar. Isso implica em sairmos do referencial de Jordan original, em que a Teoria de Brans-Dicke é definida, para o referencial de Einstein, cujo campo escalar passa a se acoplar minimamente à gravidade. Até então, mantivemos arbitrário o ordenamento com relação aos operadores momento e posição referentes ao fator de escala. O caráter autoadjunto do operador Hamiltoniano também foi analisado no referencial de Jordan. Encontramos que a norma da função de onda só é independente do tempo para um valor específico do parâmetro de ordenamento. Esse valor coincide com o que resulta na equivalência das medidas dos dois referenciais, Einstein e Jordan. Também, os valores esperados do fator de escala e do campo escalar convergem apenas para as variáveis definidas no referencial de Einstein. Isso sugere que, a nível quântico, Einstein é o referencial físico, o que é um resultado surpreendente. Porém, esta é apenas uma indicação, este ainda é um resultado que precisa ser verificado mais afundo.

Ainda apresentamos dois objetivos secundários. O primeiro foi a introdução do estudo da quantização canônica da Teoria de K -essência, onde mostramos que, para um caso particular, podemos tomar o campo escalar da teoria para definirmos o parâmetro temporal, recuperando um comportamento similar ao obtido através da quantização da Relatividade Geral com o formalismo de Schutz. Entretanto, este caso particular envolve um limite peculiar, onde temos uma Hamiltoniana bem definida e simples, mas perdemos a consistência na descrição Lagrangiana. A quantização deste sistema também prevê um ricochete esperado. Outra meta secundária foi a introdução das noções básicas sobre a quantização afim, feita no Capítulo 3. Com uma teoria matemática mais densa, envolvendo Teoria de Grupos, este método ganhou uma revitalização recentemente e destaque em trabalhos em Cosmologia Quântica. Mostramos que alguns problemas do método de quantização canônica são naturalmente resolvidos. Com o método afim, a quantização da função clássica do produto entre momento e posição resulta num operador simetrizado, evitando o problema da não-comutação dos operadores canônicos de posição e momento, que no método canônico exige a inserção a mão de fatores constantes de ordenamento. O caráter autoadjunto dos operadores também se torna mais evidente, transformando o problema numa questão da escolha adequada dos vetores fiduciais, necessários para a quantização.

O método afim também é completo com uma descrição semiclássica, dada pela aplica-

ção inversa do mapa de quantização. Apesar de utilizar estados coerentes para definirmos a quantização, o papel destes na teoria é apenas determinar algumas constantes que os operadores carregam. Sendo assim, obedecendo à imposição de que os vetores fiduciais que definem os estados coerentes devem ser de quadradointegráveis em duas medidas distintas, há uma arbitrariedade na escolha destes, que pode ser interpretado como um ajuste adequado para as constantes que aparecem nos operadores. Fechamos o capítulo sobre o tema com um exemplo da quantização de um universo (Newtoniano) dominado por poeira, onde aplicamos os conceitos inseridos durante a apresentação do conteúdo e finalizamos mostrando o ricochete gerado pela quantização, bem como a distribuição de probabilidade da energia no espaço de fase do sistema, cujo pico evolui no tempo seguindo a trajetória semiclássica prevista pelo método. Aproveitamos essa liberdade na escolha dos vetores fiduciais para fazer uma descrição semiclássica qualitativa da Teoria de Brans-Dicke pelo método afim. Encontramos uma previsão de ricochete para um campo escalar constante, assim como no caso da quantização canônica. No entanto, pudemos supor um campo escalar que variasse com o tempo e concluímos que, para velocidades baixas, há a presença de uma fase inflacionária, além do ricochete. Todavia, há uma quebra de continuidade no volume do universo para casos de alta velocidade, o que parece indicar que o campo escalar tem que ter um momento limitado.

Para trabalhos futuros, vamos continuar explorando este cenário, investgando, por exemplo, o caso $\varepsilon > 0$, que é um campo não-fantômico. Pretendemos explorar as possibilidades do método afim para o caso de teorias escalares-tensoriais, fazendo a quantização no referencial de Einstein para tentar obter soluções separáveis e comparar os dois referenciais, analisando se há equivalência entre eles também neste modelo e o que isso acarreta na teoria. Também almejamos estender a análise pelo método canônico para outras teorias escalares-tensoriais e também para teorias do tipo $f(R)$, como continuação do trabalho feito na tese. Outra possibilidade a ser explorada é a análise da equivalência entre os referenciais de Einstein e Jordan para outros tipos de matéria, como corpo rígido, por exemplo, que também gera soluções separáveis no referencial de Einstein. Dentre as possibilidade que podemos explorar ainda na Cosmologia Quântica estão a mudança na interpretação da Mecânica Quântica, considerando DeBroglie-Bohm ao invés de Copenhaga, e o estudo de mecanismos de relógio, um assunto interessante e ainda em aberto.

Apêndice: Aspectos Matemáticos do Operador Momento

Os problemas de caráter autoadjuntos apresentados no Capítulo 2 aparecem por um motivo em especial: o domínio considerado para as variáveis do mini-superespaço é a semirreta real, isto é, as variáveis são estritamente positivas. Neste domínio, o operador momento \hat{P} , no caso, o operador de derivação, não é autoadjunto. Este problema é herdado pelo operador Hamiltoniano, que é, como visto, escrito em função dos operadores posição. Neste apêndice, vamos fazer uma análise matemática sobre este operador e sobre \hat{P}^2 , seguindo as referências [33] e [34]. No mini-superespaço que consideramos para uma teoria escalar tensorial, temos $a > 0$ e $\varphi > 0$, sendo a o fator de escala e φ o campo escalar da teoria. Porém, para apresentar um melhor exemplo de como as ferramentas matemática apresentadas na Seção (2.3), vamos considerar neste apêndice o operador momento no segmento $[0, 1]$.

Seja $\hat{P} = i d/dx$ o operador momento, com o domínio sendo os conjuntos de todas as funções ϕ absolutamente contínuas que se anulam na fronteira. Isto é:

$$D(T) = \{ \phi \mid \phi \in AC[0, 1], \phi(0) = 0 = \phi(1) \} ,$$

sendo $AC[0, 1]$ é o conjunto das funções absolutamente contínuas, em outras palavras, contínua a menos de um número enumerável de pontos, de forma que seu fecho é contínuo. O operador \hat{P} é simétrico neste domínio. De fato:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{P}\phi \rangle &= i \int_0^1 \psi^* \left(\frac{d}{dx} \phi \right) dx = i [\psi^* \phi]_0^1 - i \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \psi^* \right) \phi dx \\ &= \int_0^1 \left(\hat{P}\psi \right)^* \phi dx = \langle \hat{P}\psi, \phi \rangle . \end{aligned}$$

Assim, temos que $\hat{P}^* = \hat{P}$. Aplicando o método de von Neumann, vamos encontrar as soluções linearmente independentes da equação de autovalor

$$\hat{P}^* \phi = i \frac{d}{dx} \phi = \pm i \phi .$$

Essa equação tem duas soluções linearmente independentes para o segmento $[0, 1]$:

$$\phi_+ = e^x \quad ; \quad \phi_- = e^{-x} .$$

Portanto, os índices de deficiência deste operador são $n_+ = n_- = 1$ e então este operador possui extensões autoadjuntas.

As extensões \hat{P}_α são dadas pelo conjunto das funções ψ que satisfazem

$$\langle \phi, \hat{P}\psi \rangle = \langle \hat{P}\phi, \psi \rangle,$$

com $\phi = \phi_+ + \lambda\phi_-$, sendo λ um número real qualquer. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \phi, \hat{P}\psi \rangle &= i \int_0^1 (e^x + \lambda e^{-x}) \left(\frac{d}{dx} \psi \right) dx \\ &= i [(e^x + \lambda e^{-x}) \psi]_0^1 - i \int_0^1 (e^x - \lambda e^{-x}) \psi dx \\ &= i \left[\left(e + \frac{\lambda}{e} \right) \psi(1) - (1 + \lambda) \psi(0) \right] + \langle \hat{P}\phi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, devemos ter

$$\left(e + \frac{\lambda}{e} \right) (1 + \lambda)^{-1} \psi(1) - \psi(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) = \alpha \psi(1),$$

com $\alpha = (e + \lambda e^{-1})(1 + \lambda)^{-1}$. Portanto, as extensões \hat{P}_α são tais que seus domínios são dados pela condição acima. Como α é arbitrário, temos que o operador momento possui infinitas extensões.

O caso para o operador \hat{P}^2 foi apresentado na Seção 4.3.1, onde vimos que o operador $-d^2/dx^2 + k/r^2$ só é essencialmente autoadjunto para $k \geq 3/4$ (equação (4.31)). Em particular, para $k = 0$ o operador possui extensões autoadjuntas. Como este é um operador limitado inferiormente, vamos encontrar a extensão de Friedrich dele, que preserva o estado fundamental. Seja $\hat{P}^2 = -d^2/dx^2$ com domínio $C_0^\infty(0, 1)$ das funções contínuas no intervalo $(0, 1)$. Lembrando que a extensão é construída a partir da forma quadrática (2.20), $q(\phi, \psi) = \langle \phi, \psi \rangle$, e seu domínio $Q(q)$ deve ser fechado sob a norma (2.19). Relembrando:

$$\|\psi\|_{+1}^2 = \|\psi\|^2 + q(\psi, \psi).$$

Isso significa que, dada uma sequência de funções $\{\psi_n\} \subset Q(q)$ convergentes tais que $\psi_n \rightarrow \psi$ na norma $\|\cdot\|_{+1}$, então $\psi \in Q(q)$. Em outras palavras,

$$\|\psi - \psi_n\|_{+1}^2 \rightarrow 0.$$

Neste caso, a norma da forma é dada por

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= - \int_0^1 \psi^* \left(\frac{d^2}{dx^2} \psi \right) dx + \|\psi\|^2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d}{dx} \psi \right)^2 dx + \|\psi\|^2 = \|\psi'\|^2 + \|\psi\|^2. \end{aligned}$$

Assim, tomando funções $\psi_n \in Q(q)$, a condição $\|\psi - \psi_n\|_{+1}^2 \rightarrow 0$ nos diz que precisamos ter

$$|\psi_n(a) - \psi(a)| \rightarrow 0,$$

para todo $a \in (0, 1)$, já que função e derivada, neste caso, devem convergir. Em particular, devemos ter $\psi(0) = 0 = \psi(1)$, já que as derivadas tem que convergir suavemente também. Assim, a extensão de Friedrich do operador $-d^2/dx^2$ é a extensão autoadjunta que possui condições de fronteira $\psi(0) = 0 = \psi(1)$. O espectro desta extensão é $\{(n\pi)^2; n \in \mathbb{N}\}$, que correspondem aos autofunções $\{\text{sen}(n\pi x)\}$. Como o operador é limitado inferiormente por π , a extensão também o é.

Introduzimos apenas o básico sobre este rico assunto neste apêndice. Para um estudo mais completo, por exemplo, sobre as extensões do operador $-d^2/dx^2 + 1/x^2$, também recomendamos [68].

Referências Bibliográficas

- [1] C.R. Almeida, A.B. Batista, J.C. Fabris, P.R.L.V. Moniz; *Quantum Cosmology with Scalar Fields: Self-Adjointness and Cosmological Scenarios*, Gravitation & Cosmology, vol.1, no.3 (2015)
- [2] C.R. Almeida, A.B. Batista, J.C. Fabris, P.R.L.V. Moniz; *Quantum cosmology of scalar-tensor theories and self-adjointness*, Journal of Mathematical Physics 58, 042301 (2017)
- [3] C.R. Almeida, J.C. Fabris, F. Sbisá; *Quantum cosmology with K-Essence theory*, accepted for publication in the proceedings of the 31st International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics. Rio de Janeiro, Brazil (2016)
<https://arxiv.org/abs/1604.00624>
- [4] C.R. Almeida, A.B. Batista, J.C. Fabris, N. Pinto Neto; *Cosmological scenario in quantum cosmology of Brans-Dicke theory of gravity on Einstein and Jordan frames* (2017)
<https://arxiv.org/abs/1709.05579>
- [5] C.R. Almeida, H. Bergeron, J.P. Gazeau, A.C. Scardua; *Three examples of quantum dynamics on the half-line with smooth bouncing* (2017)
<https://arxiv.org/abs/1708.06422>
- [6] J. Eisenstaedt; *The Curious History of Relativity - How Einstein's Theory of Gravity Was Lost and Found Again*, translated by Arturo Sangali, Princeton University Press, New Jersey (2006)
- [7] S.W.Hawking and G.F.R. Ellis; *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, New York (1973)
- [8] R.M. Wald; *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984)
- [9] S. Carroll; *Spacetime and Geometry: an Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, San Francisco (2004)

- [10] E.ourgoulhon; *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*, Lecture Notes in Physics, 846, Springer-Verlag (2012)
arXiv:gr-qc/0703035v1
- [11] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim; *Constrained Hamiltonian Systems*, Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare di Scienze Matematiche e Loro Applicazione n.22, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma (1976)
- [12] S. Dodelson; *Modern Cosmology*, Academic Press, San Diego (2003)
- [13] S. Weinberg; *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford (2008)
- [14] C. Camacho and A. Lins Neto; *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, Boston (1985)
- [15] C.R. Almeida; *Classificação de Estruturas de Nambu Lineares e p-formas Singulares*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas (2012)
- [16] J.J. Halliwell; *Introductory Lectures on Quantum Cosmology*, Center for Theoretical Physics, Laboratory for Nuclear Science, Massachusetts Institute of Technology (1990)
arXiv:0909.2566v1
- [17] M. Bojowald; *Quantum Cosmology: a review*, Reports on Progress in Physics, Volume 78, Number 2 (2015)
arXiv:1501.04899v1
- [18] D.L. Wiltshire; *An Introduction to Quantum Cosmology*, "Cosmology: The Physics of the Universe", Proceedings of the 8th Physics Summer School, Australian National University, Canberra (2003)
arXiv:gr-qc/0101003v2
- [19] B.S. DeWitt; *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Physical Review, Volume 160, Number 5 (1967)
- [20] D. Atkatz; *Quantum Cosmology for Pedestrians*, American Journal of Physics **62** 7 (1994)
- [21] C.J. Isham; *Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time*, Proceedings of the 19th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics. Salamanca, Spain (1992)
- [22] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe; *Quantum Mechanics, Vol.1*, John Wiley & Sons, New York (1977)

- [23] D.J. Griffiths; *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey (1994)
- [24] N. Zettili; *Quantum Mechanics - Concepts and Applications*, John Wiley & Sons, United Kingdom (2009)
- [25] R.B. Griffiths, *Consistent histories and the interpretation of quantum mechanics*, Journal of Statistical Physics 36, 219 (1984)
- [26] R. Omnés; *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, New Jersey (1994)
- [27] M. Gell-Mann, J.B. Hartle; *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, Califórnia (1990)
- [28] N. Pinto Neto; *Teoria e Intepretação da Mecânica Quântica*, Livraria da Física, Rio de Janeiro (2010)
- [29] B. DeWitt and N. Graham; *Many Worlds Intepretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, (1973)
- [30] D. Bohm; *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables*, Physical Review 85, 166 (1952)
- [31] P.R. Holland; *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [32] N. Pinto Neto, J.C. Fabris; *Quantum Cosmology from the de Broglie-Bohm Perspective*, Classical and Quantum Gravity, Volume 30, Number 14 (2013)
- [33] M. Reed and B. Simon; *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego (1980)
- [34] M. Reed and B. Simon; *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-adjointness*, Academic Press, San Diego (1975)
- [35] C.N. Yang; *On Quantized Space-Time*, Physical Review, vol. 72, Issue 9 (1947)
- [36] R.H.A. Farias, E. Recami; *Introduction of a Quantum Time ("chronon") and its Consequences for the Electron in Quantum and Classical Physics*, Advances in Imaging and Electron Physics, Volume 163, Pages 33-115, Elsevier (2010)
- [37] B. Valiki; *Scalar Field Quantum Cosmology: A Schrödinger Picture*, Physics Letter B 718 (2012)

- [38] P. Pedram, S. Jalalzadeh, S.S. Gousheh; *Stephani-Schutz Quantum Cosmology*, Physics Letter B 655 (2007)
- [39] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos and G. A. Monerat; *Quantum Cosmological Perfect Fluid Models*, General Relativity and Gravitation 34, 651 (2002)
- [40] B.F. Schutz; *Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle*, Physical Review D, Volume 2, Number 12 (1970)
- [41] V. G. Lapchinskii and V. A. Rubakov; *Quantum Gravitation: Quantization of Friedmann Model*, Theoretical and Mathematical Physics, Volume 33, Issue 3 (1977)
- [42] R.G. Leigh; *Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model*, Modern Physics Letters A 4, 2767 (1989)
- [43] J. Polchinski; *Dirichlet Branes and Ramond-Ramond Charges*, Physical Review Letters 75, 4724 (1995)
- [44] A. Krause, S.P. Ng; *Ghost Cosmology: Exact Solutions, Transitions Between Standard Cosmologies and Ghost Dark Energy/Matter Evolution*, International Journal of Modern Physics A 21, 1091-1122 (2006)
- [45] J.P. Gazeau; *Coherent States in Quantum Physics*, WILEY-VCH, Weinheim (2009)
- [46] H. Bergeron, A. Dapor, J.P. Gazeau, P. Malkiewicz; *Smooth Big Bounce from Affine Quantization*, Physical Review D 89, 083522 (2014)
- [47] H. Bergeron, E. Czuchry, J.P. Gazeau, P. Malkiewicz, W. Piechocki; *Smooth quantum dynamics of the mixmaster universe*, Physical Review D 92, 061302 (2015)
- [48] J.P. Gazeau; *Covariant Integral Quantizations and their Applications to Quantum Cosmology*, Acta Polytechnica, Vol. 56, No 3 (2016)
- [49] E.H. Lieb; *Inequalities*, Edited by M. Loss and M.B. Ruskai, Springer, Berlin (2003)
- [50] A. O. Barut and R. Rączka; *Theory of Group Representations and Applications*, Polish Scientific Publishers, Warsaw (1977)
- [51] E.W. Aslaksen, J.R. Klauder; *Unitary Representation of the Affine Group*, Journal of Mathematical Physics, Volume 9, Number 2 (1968)
- [52] S. T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau; *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations*, Springer, Berlin (2014)
- [53] V. Mukhanov; *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press (2005)

- [54] J. L. Synge; *Relativity: the General Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1960)
- [55] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. Pal Soni; *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, Berlin (1966)
- [56] C. H. Brans and R. H. Dicke; *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Physical Review 124, 925 (1961)
- [57] J.C. Fabris, B. Chauvineau, D.C. Rodrigues, C.R. Almeida, O.F. Piattella; *New views on classical and quantum Brans-Dicke theory*, Contribution to the Festschrift of Philippe Spindel for the occasion of his 65th birthday (2016)
<https://arxiv.org/abs/1603.01314>
- [58] V. Faraoni; *The $\omega \rightarrow \infty$ limit of Brans-Dicke Theory*, Physics Letters A, 245 (1998)
- [59] B. Chauvineau; *On the limit of Brans-Dicke Theory When $\omega \rightarrow \infty$* , Classical and Quantum Gravity 20 (2003)
- [60] C.M. Will; *The Confrontation Between General Relativity and Experiment*, Living reviews in Relativity 17:4 (2014)
- [61] A. Avilez, C. Skordis; *Cosmological Constraints on Brans-Dicke Theory*, Physical Review Letters 113, 011101 (2014)
- [62] J.E. Lidsey, D. Wands, E.J. Copeland; *Superstring Cosmology*, Physics Reports 337 (2000)
- [63] A. De Felice, S. Tsujikawa; *$f(R)$ Theories*, Living Reviews in Relativity 13:3 (2010)
- [64] T.P. Sotiriou, V. Faraoni; *$f(R)$ Theories of Gravity*, Reviews of Modern Physics 82 (2010)
- [65] R. Colistete, J.C. Fabris, N. Pinto Neto; *Gaussian Superpositions in Scalar-tensor Quantum Cosmological Models*, Physical Review D 62, 083507 (2000)
- [66] V. Faraoni and E. Gunzig; *Einstein Frame or Jordan Frame?*, International Journal of Theoretical Physics, Volume 38, Issue 1 (1999)
- [67] A. Macías, A. Garcia; *Jordan Frame or Einstein Frame?*, General Relativity and Gravitation, Volume 33, Number 5 (2001)
- [68] A.M. Essin, D.J. Griffiths; *Quantum Mechanics of the $1/x^2$ Potential*, American Journal of Physics 74 (2006)

- [69] S. Pal; *Quantized Brans-Dicke Theory: Phase Transition, Strong Coupling Limit, and General Relativity*, Physical Review D 94, 084023 (2016)
- [70] G.N. Watson; *Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge (1922)
- [71] I.S. Gredshcheyn, I.M. Ryzhik; *Table of Integrals, Series and Products*, 7th edition, Academic Press, San Diego (2007)
- [72] S. Pandey, S. Pal, N. Banerjee, *Equivalence of Einstein and Jordan frames in quantized cosmological models*, arXiv:1611.07043 (2016)