UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ANDIA RIBEIRO ALVES

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM AULAS DE REFORÇO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA MUNICIPAL DE TEIXEIRA DE FREITAS (BA)

SÃO MATEUS
2018

ANDIA RIBEIRO ALVES

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM AULAS DE REFORÇO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA MUNICIPAL DE TEIXEIRA DE FREITAS (BA)

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica para a obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.
Orientador: Prof. Dr. Lucio Souza Fassarella.

SÃO MATEUS
2018

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

Alves, Andia Ribeiro, 1982-
A474c Contribuições da resolução de problemas em aulas de reforço de matemática para alunos do oitavo ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Teixeira de Freitas/BA / Andia Ribeiro Alves. - 2018.
162 f. : il.

Orientador: Lúcio Souza Fassarella.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Resolução de problemas. 2. Reforço escolar em matemática. 3. Ensino-aprendizagem-avaliação. I. Fassarella, Lúcio Souza. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37

Andia Ribeiro Alves

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM AULAS DE REFORÇO DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL DE UMA ESCOLA PÚBLICA MUNICIPAL DE TEIXEIRA DE FREITAS/BA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 11 de dezembro de 2018.

COMISSÃO EXAMINADORA

Lucio Souza Fassarella

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Universidade Federal do Espírito Santo

Arildo Castelluber

Prof. Dr. Arildo Castelluber
Universidade Federal do Espírito Santo

DEDICATÓRIA

À minha amada mãe Nilzete (*in memoriam*) e ao meu querido pai Euclides, que sempre me apoiaram e se orgulharam de minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que sempre vem à frente de todos os meus esforços, guardando-me e protegendo-me, colocando em meus caminhos pessoas de extremo valor, sem as quais esta caminhada seria muito mais árdua ou mesmo impossível.

Ao meu amado esposo e ao meu querido irmão por compreenderem minhas ausências e me apoiarem em toda esta longa jornada.

À minha irmã escolhida, Ariane, por me apresentar o programa e me acompanhar em várias etapas, torcendo por mim e me apoiando incondicionalmente.

Aos meus colegas de mestrado, em especial Rosiane e Renata, que me acolheram como uma irmã, oferecendo hospedagem, transporte e suporte afetivo numa cidade desconhecida.

Aos professores do mestrado, que fizeram parte da minha vida e me ajudaram nessa constante busca pelo meu crescimento pessoal e profissional.

À equipe gestora e pedagógica da escola, que confiou no meu trabalho, permitindo que a pesquisa fosse realizada com os alunos e cedendo não apenas espaço, como também material, e ajustando meus horários para que eu pudesse estudar e pesquisar.

Aos queridos alunos que tão prontamente aceitaram participar das aulas de reforço, mesmo isso significando um esforço extra em estar na escola em turno oposto.

Finalmente, de modo especial, agradeço ao meu orientador, Dr. Lucio Souza Fassarella, por comprar minhas ideias e dar suporte aos meus “caminhos” com sua atenção e presença constantes.

Os problemas significativos que enfrentamos não podem ser resolvidos no mesmo nível de pensamento em que estávamos quando os criamos.

Albert Einstein

RESUMO

Estudo de caso do tipo etnográfico que trabalha a questão de pesquisa: *de que maneira o uso da metodologia de Resolução de Problemas pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem em um reforço escolar de Matemática para alunos com dificuldade de aprendizagem e defasagem idade-série em uma escola municipal de Teixeira de Freitas (BA)?* O objetivo geral foi analisar as contribuições da Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem de alunos com defasagem de idade-série por meio de um reforço escolar em Matemática pela aplicação da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic, associada aos princípios para a resolução de problemas propostos por Polya. Os sujeitos da pesquisa foram dez alunos do oitavo ano vespertino de uma escola pública de Teixeira de Freitas (BA), com idades entre 16 e 18 anos. As aulas ocorreram entre março e julho de 2018 e abordaram os temas operações com números positivos e negativos, expressões numéricas e equações de 1º grau. Foram aplicadas avaliações diagnósticas inicial e final para comparação e verificação da aprendizagem dos alunos sobre os tópicos abordados. Os instrumentos para a coleta de dados foram a observação participante, a documentação disponível e as entrevistas focalizadas. Os dados foram analisados por meio da Categorização, desenvolvida a partir de três categorias elaboradas *a posteriori*: postura dos alunos diante dos problemas, postura dos alunos relativa ao processo ensino-aprendizagem e relação professor-aluno na resolução de problemas. Os resultados evidenciaram a predileção dos alunos pelos problemas classificados como convencionais e verbais e apontam a importância das interações sociais e das intervenções didáticas direcionadas às necessidades específicas de cada aluno com dificuldade de aprendizagem. Além disso, as aulas de reforço tiveram como resultado uma melhora na confiança dos alunos, além da melhora na compreensão de conceitos relacionados aos tópicos trabalhados.

Palavras-chave: Resolução de problemas; reforço escolar em Matemática; método de ensino-aprendizagem-avaliação.

ABSTRACT

An ethnographic case study that works on the research question: *how the use of the Problem Solving methodology can contribute to the teaching-learning process in a mathematical reinforcement for students with learning difficulties and age-series lag in a municipal school of Teixeira de Freitas (BA)?* The general objective was to analyze the contributions of Problem Solving in the teaching-learning process of students with age-grade lag by means of a mathematical reinforcement by applying the Teaching-Learning-Assessment-Mathematics methodology through Problem Solving proposed by Allevato and Onuchic, associated with the principles for solving problems proposed by Polya. The subjects of the research were ten eighth grade students from a public school in Teixeira de Freitas (BA), aged between 16 and 18 years. The classes took place between March and July of 2018 and covered the topics operations with positive and negative numbers, numerical expressions and equations of 1st grade. Initial and final diagnostic evaluations were used to compare and verify students' learning about the topics covered. The instruments for data collection were participant observation, available documentation and focused interviews. The data were analyzed through categorization, developed from three categories elaborated *a posteriori*: students 'posture in face of problems, students' posture related to the teaching-learning process and teacher-student relationship in problem solving. The results evidenced the students' predilection for the problems classified as conventional and verbal and point out the importance of social interactions and didactic interventions directed to the specific needs of each student with learning difficulties. In addition, reinforcement classes have resulted in improving students' confidence, as well as improved understanding of concepts related to the topics covered.

Key-words: Solving Math problems; monitoring Math classes; teaching-learning-evaluation method.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS/ TABELAS

LISTA DE SIGLAS

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações.

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

DCN – Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica.

LDB – Lei de Diretrizes e Bases.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics.

OBMEP – Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PNE – Plano Nacional da Educação.

PPP – Projeto Político Pedagógico.

RP – Resolução de Problemas.

SAD – Sequências de Atividades Didáticas.

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática surgiu há milhares de anos, a partir da necessidade do homem em resolver situações-problema[1]. Com o passar do tempo, ela se tornou uma ciência sistematizada, com proposições, conjecturas, teoremas, demonstrações e verdades quase absolutas as quais poucos se "atreviam" enveredar por essa ciência. Ao longo do último século, o ensino da Matemática passou por várias mudanças, indo da condição em que o professor era o detentor do saber e transmitia aos alunos o seu conhecimento, passando pelo construtivismo defendido por Piaget, onde se leva em conta os próprios conhecimentos do aluno, chegando até a teoria sócio-histórica-cultural defendida por Vygotsky e outros teóricos, os quais acreditam na aprendizagem por hipótese e que o sujeito constrói seu conhecimento a partir de sua interação com o outro e que, por isso, o professor deve provocar o aluno para que ele pense e formule seus próprios conceitos.

As mudanças ocorridas no processo de ensino-aprendizagem[2] se deram, em geral, a partir de iniciativas acadêmicas de responder questões levantadas ao observar as constantes mudanças nas atuais gerações, por estas estarem expostas a uma grande variedade e fluxo de informação e não terem mais interesse em aprender pelo método tradicional, uma vez que as tecnologias tornaram-se muito mais interessantes e atrativas para elas.

Allevato e Vieira (2016) evidenciam que a Resolução de Problemas tem se destacado cada vez mais no processo de ensino-aprendizagem, bem como vem tornando-se uma mola propulsora do conhecimento em todas as áreas, principalmente na Matemática, podendo, assim, constituir-se como alternativa metodológica adequada ao cenário complexo em que se encontram as escolas públicas atualmente.

---

[1]Situações-problema são problemas que "retratam situações reais do dia-a-dia e que exigem o uso da matemática para serem resolvidos". Usando "conceitos, técnica e procedimentos matemáticos procura-se matematizar uma situação real, organizando os dados em tabelas, traçando gráficos, fazendo operações, ..." (DANTE, 2003, p. 20).

[2]"Processo de ensino-aprendizagem implica a compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é objeto de estudo – no caso, o saber matemático" (ONUCHIC, 2013, p.88).

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) especificam que o ensino da Matemática deve estimular o interesse, a curiosidade, o espírito investigativo e desenvolver a capacidade de resolução de problemas (BRASIL, 2001). Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) admitem que existe uma estreita relação entre os problemas e a investigação matemática, pois esta costuma desenvolver-se em torno de um ou mais problemas.

Sabendo da importância da Resolução de Problemas e da Investigação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, usá-la como metodologia de ensino para facilitar a aprendizagem de alunos com dificuldade é uma opção promissora para que o professor vença obstáculos e modifique a realidade escolar desses alunos.

Essas considerações compõem os pensamentos que emergem da minha atuação como professora de Matemática na Educação Básica em uma escola municipal de Teixeira de Freitas (BA). Diversas situações vivenciadas no espaço escolar provocaram perplexidades e questionamentos e despertaram em mim o desejo de aprofundar meus conhecimentos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, com o intuito de compreender melhor os problemas e melhorar minha performance em sala de aula, principalmente com relação às séries iniciais do Ensino Fundamental II (6º e 7º ano), em que leciono atualmente.

O desenvolvimento dessa pesquisa se deu a partir de uma problemática existente na instituição de ensino em que leciono. Há alguns anos, minha escola vem enfrentando as consequências de uma realidade desafiadora: altos índices de reprovação de alunos nas turmas de 7º ano do Ensino Fundamental II, no turno vespertino. No ano de 2017, três turmas foram formadas à tarde, cada uma com uma média de 37 alunos matriculados. Do total de alunos nas turmas referidas, 72 são repetentes ou bi-repetentes[3], o que tem gerado uma alta defasagem série-idade, contribuindo para a desmotivação, o desinteresse e a indisciplina, que, por sua vez, culmina em novas reprovações, gerando um círculo vicioso e preocupante na educação desses jovens.

---

[3] Termo adotado pelos professores, coordenadoras e diretoras da escola pesquisada ao se referirem a alunos que ficaram retidos mais de um ano na mesma série.

Embora a reprovação se dê em várias disciplinas, Matemática e Português acabam ganhando destaque nesse cenário devido à importância atribuída a elas pelos diversos personagens escolares – diretores, coordenadores, professores, alunos, pais, secretários e tantos outros – e pelas estruturas da organização escolar e da comunidade.

Dessa forma, buscar estratégias[4] didáticas para mitigar esse problema torna-se extremamente necessário. No que tange à Matemática, uma das possíveis estratégias propostas pelos PCN (BRASIL, 2001) e por Zorzan (2007) é o uso das atuais tendências em Educação Matemática: Resolução de Problemas, História da Matemática, a Matemática e Tecnologias e a Educação Matemática, Jogos Matemáticos, a Etnomatemática e a Modelagem Matemática. Outra estratégia pode ser a oferta de um reforço escolar que utilize essas tendências.

Assim, surge o problema condutor de nossa pesquisa: *de que maneira o uso da metodologia de Resolução de Problemas[5] pode contribuir para o processo ensino-aprendizagem num reforço escolar de Matemática para alunos com dificuldade de aprendizagem e defasagem idade-série em uma escola municipal de Teixeira de Freitas (BA)?*

O objetivo geral foi analisar as contribuições da Resolução de Problemas no processo ensino-aprendizagem de alunos com defasagem idade-série por meio de um reforço escolar em Matemática pela aplicação da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014), associada aos princípios para a resolução de problemas propostos por Polya (1995).

Como objetivos específicos, buscou-se:

1) apresentar as diferentes abordagens da resolução de problemas e algumas classificações dos problemas matemáticos, aprofundando a Metodologia Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas, e

---

[4] Plano ou método usado para alcançar um objetivo ou resultado específico (ESTRATÉGIA, 2018).
[5] Usaremos Resolução de Problemas para nos referirmos à disciplina ou à teoria e, a resolução de problemas para nos referirmos ao ato de resolver problemas.

2) sistematizar uma prática de metodologia da Resolução de Problemas no reforço escolar de matemática para alunos com dificuldade de aprendizagem em matemática.

Tudo isso se justifica porquevivemos em um mundo de linguagens, dentre as quais se encontra a linguagem matemática. O domínio dessa linguagem tem importância para a inclusão social, pois está presente em diversas áreas e atividades humanas.

> A Matemática influencia outras áreas do conhecimento e a sua aprendizagem tem um papel relevante para a inclusão social e o exercício da cidadania, na medida em que, justamente, está presente em muitas das vertentes da atividade em sociedade e concorre para o seu desenvolvimento (SOUZA e GUIMARÃES, 2015, p. 135)

A capacidade de resolução de problemas e o domínio da linguagem matemática são algumas das mais requeridas exigências de nossa sociedade. A atividade matemática é um desafio à inteligência, à capacidade de abstração e à criatividade, o que contribui tanto para a leitura de mundo quanto para o desenvolvimento do raciocínio lógico, à construção de esquemas conceituais e projeções, decodificações e resoluções de problemas, autonomia do pensamento e exercício da cidadania.

Assim, buscando oferecer condições para que estudantes com dificuldade de aprendizagem e defasagem idade-série possam se tornar sujeitos críticos, exercendo sua cidadania por meio de uma aprendizagem eficiente, essa pesquisa tem relevância tanto acadêmica quanto social, uma vez que busca vencer barreiras sociais dentro e fora da sala de aula e estabelecer conexões entre teorias e prática.

Para a realização desta pesquisa qualitativa, conforme classificação de Gil (1999), escolhemos como metodologia o estudo de caso do tipo etnográfico.

> A decisão de realizar, ou não, um estudo de caso etnográfico é muito mais epistemológica do que metodológica. E ele explica: se o pesquisador quiser investigar a relação formal entre variáveis, apresentar generalizações ou testar teorias, então ele deve procurar outras estratégias de pesquisa. Mas se ele quiser entender um caso particular levando em conta seu contexto e sua complexidade, então a metodologia do estudo de caso se faz ideal (ANDRÉ, 2013, p. 43)

Reiterando, especificamos nossa metodologia como *pesquisa do tipo etnográfica* por estudarmos uma unidade específica, que preenche alguns requisitos etnográficos, como por exemplo, ter o pesquisador como principal instrumento de coleta e análise dos dados devido à constante interação com o objeto pesquisado. O objeto de estudo foi a Resolução de Problemas Matemáticos e o campo de pesquisa foi uma sala de aula de reforço escolar, selecionada com o objetivo de "compreendê-la como uma unidade", podendo dar atenção ao "seu contexto e às suas inter-relações como um todo orgânico" (ANDRÉ, 2013, p. 25).

Para André, a pesquisa em educação é do tipo etnográfico quando descreve um processo educativo fazendo uso de técnicas etnográficas como "observação participante, entrevista intensiva e análise de documentos" (2013, p. 23), sem necessariamente cumprir com todos os requisitos da etnografia, como a longa permanência do pesquisador em campo.

Assim, para André, uma pesquisa em educação pode ser caracterizada como do tipo etnográfico quando, além de usar técnicas etnográficas, ela tiver o pesquisador como principal instrumento de coleta e análise dos dados; quando der ênfase ao processo e não aos resultados finais; e quando o pesquisador se preocupar "com a maneira própria com que as pessoas veem a si mesmas" (2013, p. 24), usando grande quantidade de dados descritivos coletado sem um trabalho de campo sem pretensão de mudar o ambiente, "introduzindo modificações que serão observadas em sua manifestação natural". Além disso:

> [...] a pesquisa etnográfica busca a formulação de hipótese, conceitos, abstrações, teorias e não sua testagem. Para isso faz o uso de um plano de trabalho aberto e flexível, em que os focos da investigação vão sendo constantemente revistos, as técnicas de coletas, reavaliadas, os instrumentos, reformulados e os fundamentos teóricos, repensados (ANDRÉ, 2013, p. 24)

André (2013, p. 44) delimita que a escolha pelo estudo de caso deve se dar quando:

> [...] as perguntas da pesquisa forem do tipo "como" e "por quê", quando o pesquisador tiver pouco controle sobre aquilo que acontece ou que pode acontecer e quando o foco de interesse for um fenômeno contemporâneo que esteja ocorrendo numa situação de vida real.

Segundo Martins (2008, p. 9), "o trabalho de campo – Estudo de Caso – deverá ser precedido por um planejamento detalhado, feito a partir de ensinamentos advindos do referencial teórico e das características próprias do caso". Além disso, é importante que, após definidos o tema e o problema condutor da pesquisa, bem como as teses ou proposições, seja realizada uma revisão bibliográfica a fim de se estabelecer um aporte teórico para a pesquisa, fazendo “um levantamento de referências que deem suporte e fundamentação teórico-metodológica ao caso” (MARTINS, 2008, p.18).

Corroborando com Martins (2008), André (2013) destaca a necessidade de definição da perspectiva teórica com um enfoque que ajude a captar a dinâmica das relações sociais abrangidas e que oriente a análise e a interpretação dos dados coletados para que o estudo de caso vá além de um retrato do que se passa no cotidiano escolar, o que envolve um processo de reconstrução da prática pedagógica, discussões e questionamentos que utilizem constantemente o referencial teórico escolhido como uma variação de explicitação ao longo do trabalho.

Para alcançar o objetivo da pesquisa e responder à pergunta inicial, foram elaboradas aulas de reforço escolar em Matemática usando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014). A partir dessas aulas, para coletar os dados, foram utilizadas a Observação Participante, a Documentação Disponível e as Entrevistas Focalizadas, apontadas por Gil (1999), Severino (2007) e André (2013) como técnicas de coleta de dados pertinentes às pesquisas qualitativas.

Severino (2007, p. 125) define observação como “todo procedimento que permite acesso aos fenômenos estudados (...), imprescindível em qualquer tipo ou modalidade de pesquisa”. Gil (1999, p. 113) descreve a Observação Participante como aquela em que o observador se coloca como um membro do grupo, “daí por que se pode definir observação participante como técnica pela qual se chega ao conhecimento da vida de um grupo a partir do interior dele mesmo”.

Gil (1999, p. 160) observa que “as fontes de papel muitas vezes são capazes de proporcionar ao pesquisador dados suficientemente ricos para evitar a perda de tempo com levantamento de campo”. Severino (2007, p. 124) define documentação como “toda forma de registro e sistematização de dados, informações, colocando-os em condições de análise por parte do pesquisador”. No caso estudado, os documentos analisados foram as fichas individuais dos alunos, as atas de Conselho de Classe e os registros da coordenação e da direção da escola.

Visando obter dados pertinentes à investigação, a entrevista mostra-se uma “forma de interação social” (SEVERINO, 2007, p. 117). Além disso, quando é uma entrevista focalizada, “o entrevistador permite ao entrevistado falar livremente sobre o assunto, mas quando este se desvia do tema original, esforça-se para a sua retomada” (GIL, 1999, p. 120). Essas foram realizadas com os alunos durante as próprias aulas de reforço, com os pais ou responsáveis no momento da assinatura do termo de consentimento para a pesquisa, com a direção e a coordenação em momentos específicos. A partir delas, foram levantados os dados referentes a características sociais dos alunos e preferências pelos tipos de problemas.

Ao final da coleta, procedeu-se a análise dos dados, trabalhando o material coletado a partir das observações das aulas, das resoluções dos problemas pelos alunos e das entrevistas intensivas, buscando destacar os principais achados da pesquisa baseados nos referenciais teóricos estabelecidos. Para isso, foi construído um conjunto de categorias descritivas, considerando “tanto o conteúdo manifesto quanto o conteúdo latente do material” (LÜDKE, André, 2014, p. 58). A construção dessas categorias para a análise dos dados é chamada por Lüdke e André como Categorização. Segundo elas:

> A categorização, por si mesma, não esgota a análise. É preciso que o pesquisador vá além, ultrapasse a mera descrição, buscando realmente acrescentar algo à discussão já existente sobre o assunto focalizado. Para isso ele terá que fazer um esforço de abstração, ultrapassando os dados, tentando estabelecer conexões e relações que possibilitem a proposição de novas explicações e interpretações (LÜDKE, ANDRÉ, 2014, p. 59)

Esse tipo de análise “tem como objetivo organizar e sumarizar os dados de forma tal que possibilitem o fornecimento de respostas ao problema proposto para investigação” (GIL, 1999, p. 168).

A pesquisa está relatada em cinco capítulos. O primeiro capítulo trata da revisão de literatura, mostrando como outros pesquisadores abordam a temática. O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica, mostrando o que os documentos oficiais falam a respeito do ensino de Matemática e da Resolução de Problemas e descreve a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014). O terceiro capítulo descreve a intervenção, caracterizando a escola e os alunos, e apresenta os relatos das aulas de reforço. O quarto capítulo traz as análises e a avaliação dos dados coletados. Por fim, o último o capítulo apresenta as considerações finais.

1 COMO OUTROS PESQUISADORES ABORDAM A TEMÁTICA

Embora haja muitas pesquisas relacionadas à Resolução de Problemas, muitas de suas vertentes ainda podem ser exploradas e testadas, conforme afirmação de Souza e Guimarães (2015, p. 136).

> No que se refere à Resolução de Problemas, apesar da existência de muitas pesquisas sobre a sua utilização no ensino de Matemática, alguns aspectos desta utilização precisam de ser reforçados e é necessário inspirar novas investigações – na verdade, resolver e formular problemas é grande parte do que se faz com os objetos matemáticos.

Em busca de pares que versam sobre a temática da resolução de problemas, recorreu-se a bancos digitais, como o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e a BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações –, os quais surpreenderam com o vasto número de pesquisas desenvolvidas sobre o tema, mostrando ser necessária uma delimitação maior dos termos pesquisados.

A busca realizada no BDTD ocorreu em novembro de 2017, com os termos “intervenção”, “reforço escolar” e “ensino de matemática através da resolução de problemas”, gerando um resultado de busca de 925 trabalhos, dos quais um chamou a atenção da autora, apesar de ter sido desenvolvido em 2007. Aprofundando a pesquisa, foi necessário delimitar o período considerado entre 2012 e 2017, o que reduziu o número de trabalhos para 193, dos quais muitos não apresentaram qualquer relação relevante com a pesquisa. Foram selecionados, então, trabalhos desenvolvidos no mesmo nível escolar (Educação Básica - Fundamental II), dentro das temáticas “resolução de problemas” e “reforço escolar” nos assuntos “Matemática” e “Aritmética”.

A partir dessa busca, verificou-se que o número de estudos sobre o uso da metodologia de Resolução de Problemas em aulas de reforço escolar de Matemática é pequeno, demonstrando, assim, a importância do trabalho proposto.

Cinco trabalhos abordados na pesquisa mostraram contextos que poderiam contribuir para o desenvolvimento da pesquisa: Moura (2007) avaliou um programa de intervenção em crianças com dificuldades na resolução de problemas matemáticos; Henklain (2012) investigou se a formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação de problemas pode reduzir dificuldades na resolução desses problemas; Silva (2012) analisou, por meio de uma pesquisa qualitativa, as principais elaborações explicitadas por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações; Zequim (2014) analisou se atividades didáticas baseadas na Resolução de Problemas e na Modelagem Matemática contribuem para o desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos; e Queiroz (2014) propoz uma sequência didática que utiliza a metodologia de Resolução de Problemas, seguindo as etapas de George Polya, juntamente com a metodologia do Modelo de Barras, segundo a Filosofia da Matemática de Singapura, para turmas de sétimo ano do Ensino Fundamental II.

Moura (2007) acredita que é dever da escola provocar propositalmente as aprendizagens necessárias e desenvolver as competências de que as pessoas precisam. Para ela, aprender Matemática envolve desenvolver capacidades como a compreensão de conceitos matemáticos em sua linguagem específica além de saber representá-los matematicamente. É tarefa da escola desenvolver as capacidades que permitirão que os alunos continuem aprendendo mesmo fora da escola, possibilitando que utilizem aquilo que aprenderam em sala para viver e conviver em sociedade. Entretanto, as avaliações realizadas por órgãos governamentais de educação brasileira, como o SAEB e a Prova Brasil, indicam que as escolas não têm conseguido concretizar essa intenção e fazer com que os alunos desenvolvam habilidades matemáticas básicas de modo satisfatório. Essas avaliações, inclusive, indicam a resolução de problemas como uma das principais dificuldades de aprendizagem no campo da Matemática.

> Em se tratando da resolução de problemas, muitas são as capacidades envolvidas. No que se refere a problemas escritos, é necessário considerar inicialmente o aspecto da leitura e compreensão de enunciados linguísticos que comportam também uma linguagem matemática. Ao ler o enunciado, a pessoa deve compreender o que está sendo expresso, e a partir desta informação verbal escrita, estabelecer relações matemáticas, elaborar estratégias e planos de ação e tomar decisões escolhendo a melhor opção, ou seja, aquela que dará o melhor resultado (MOURA, 2007, p. 18).

Assim, Moura dedicou boa parte das discussões de sua pesquisa em torno das características linguísticas dos problemas, que para ela “é a compreensão do conteúdo do enunciado expresso na língua materna” envolvendo a escrita, a leitura e a interpretação deste pelos estudantes (MOURA, 2007, p. 19).

Moura (2007) elaborou, aplicou e avaliou um programa de intervenção com crianças da 4ª série do Ensino Fundamental que apresentavam dificuldades na compreensão e na resolução de problemas matemáticos para maximizar as capacidades cognitivas destas crianças. Para isso, ela optou por um delineamentos de comparação entre grupos – um experimental e outro de controle –, aplicando um pré-teste, uma intervenção e dois pós-testes que avaliaram o desempenho dos alunos.

O programa de intervenção foi aplicado aos alunos que obtiveram rendimento igual ou inferior a 40% no pré-teste, procurando ensinar os estudantes a lerem os enunciados dos problemas e encontrarem a representação matemática mais apropriada para resolver a questão. Comparados com os pré-testes dos grupos de controle e experimental Os resultados apresentados foram superiores nos pós-testes do grupo experimental, demonstrando a eficiência da intervenção em aumentar as capacidades cognitivas necessárias à tarefa de resolução de problemas aritméticos.

As contribuições de Henklain (2012) para nossa pesquisa se deram pela escolha do objeto de estudo: a forma de apresentação do problema, a estrutura semântica e a posição da incógnita, que pode contribuir para reduzir dificuldades na aprendizagem de resolução de problemas. Embora o público alvo da pesquisa de Henklain tenha sido composto de alunos do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental I, enquanto o deste trabalho mantenha o foco em alunos do 8º ano do Ensino Fundamental II, a metodologia de aplicação de pré-teste e pós-teste utilizada se aproxima tanto da abordada por Heinklain (2012) como da utilizada por Moura (2007). O número de alunos pesquisados também é semelhante ao dos trabalhos dos autores referidos.

As discussões de Henklain (2012) giram em torno de trabalhos que sinalizam os métodos de ensino comportamentais[6] bastante efetivos e que podem oferecer contribuições à Educação Matemática. Assim, com base na Análise do Comportamento, ele busca oferecer contribuições ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

---

[6]É o método de ensino tradicional, no qual o aluno aprende por memorização e repetição o conhecimento planejado e passado pelo professor. Ideia desenvolvida pelo psicólogo norte-americano Burrhus Frederic Skinner (FERRO; PAIXÃO, 2017).

Baseando-se em Sophian[7] (1996), Henklain (2012) afirma que uma das maiores fontes de confusão e dificuldade na aprendizagem da aritmética básica é a resolução de problemas na forma escrita. Assim, ele revisou pesquisas que apontam para os fatos de que “geralmente as crianças têm dificuldades em resolver problemas aditivos sob a forma escrita”, de que essas dificuldades aumentam a depender da posição da incógnita e das estruturas semânticas e que há diferentes maneiras de diminuir essas dificuldades, “seja pelo ensino de algoritmo, por meio do treino de resolução de problemas representados graficamente na forma de uma balança ou com base na formação de classes de equivalência entre diferentes formas de apresentação dos problemas” (HENKLAIN, 2012, p.17). Como exemplo, pode-se considerar “a formação de classe entre um problema na forma de balança, seu correlato na forma de algarismos e o resultado do problema” (HENKLAIN, 2012, p.17).

A pesquisa de Heinklain (2012) mescla controles típicos das pesquisas feitas em laboratório e aspectos do ambiente escolar, gerando maior averiguação e discussão em torno da formação de classe de equivalência na resolução de problemas sob a forma de balança (aqueles apresentados com uma imagem de uma balança buscando equilíbrio) e no ensino de algoritmo.

Silva (2012) propôs uma pesquisa exploratória e qualitativa, interpretando os fenômenos ocorridos em sala de aula, com foco nas elaborações apontadas por estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, enquanto vivenciam as atividades orientadoras de ensino de números inteiros. A pesquisa foi desenvolvida dentro de uma escola de tempo integral, que tinha um total de 9 aulas por dia, em uma turma de sétimo ano que continha 21 alunos com idades entre 11 e 12 anos, e teve como professora a própria pesquisadora.

Para o desenvolvimento de sua pesquisa, Silva (2012) reelaborou atividades que envolviam números inteiros a partir das necessidades da sala de aula, com o intuito de facilitar a aprendizagem. Ela entende que, em termos de pressão emocional, o ensino é um dos trabalhos mais exigentes, que vai muito além da visão simplista de

---

[7]SOPHIAN, C. *The sum of the parts.In:* SOPHIAN, C. **Children’s numbers**. Colorado: Westview Press, pp. 73-88, 1996.

que basta que o professor saiba o conteúdo e prepare uma boa aula, para que seus alunos alcancem o sucesso. Outras variáveis devem ser levadas em consideração no complexo ambiente da sala de aula, como o conhecimento prévio dos alunos e suas vivências, os recursos pedagógicos, as atividades orientadoras, etc.

Silva propôs quatro atividades envolvendo números inteiros e suas operações. A primeira atividade teve por objetivo "proporcionar aos estudantes a oportunidade de transitar em dois sentidos, para a frente e para trás, e ao mesmo tempo trabalhar com quantidades negativas" (2012, p. 14). A segunda buscou dar significado à manipulação de quantidades envolvendo o estudo de operações com números inteiros. A terceira procurou formalizar as operações do ponto de vista da notação dos sinais de positivo (+) e negativo (–). Por fim, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar os movimentos dos números inteiros, ordenando-os corretamente na reta real. Todas as atividades foram aplicadas após o desenvolvimento das tarefas propostas pelo caderno do aluno, fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo.

Ao fazer a descrição da turma, a pesquisadora chamou a atenção para a baixa autoestima dos alunos, que achavam que a Matemática é muito difícil e que só os inteligentes aprendem. Ela notou que os alunos não apresentaram grandes perspectivas para o futuro, pois não pensavam em fazer faculdade. Alguns nem mesmo pretendiam terminar o Ensino Médio. As aulas eram sempre norteadas pela indisciplina, pois os estudantes não mostravam interesse no que era ensinado, tendo como consequência, uma aprendizagem insatisfatória (SILVA, 2012).

Os instrumentos utilizados por Silva (2012) no desenvolvimento da pesquisa foram:

- a avaliação contínua, com anotações das observações relevantes dos diálogos explicitados pelos alunos com a professora e entre eles;
- a análise documental das atividades produzidas pelos alunos;
- a análise da sugestão trazida pela proposta do programa "São Paulo Faz Escola"; e
- a análise da autoavaliação dos estudantes.

As atividades orientadoras de ensino elaboradas ou adaptadas e aplicadas pela pesquisadora tiveram respaldo teórico de Moura (2010), levando em consideração o ciclo ação-reflexão-ação.

> Quando se planeja uma prática educativa, pode-se tentar prever os resultados dessa prática no que diz respeito ao que é efetivamente aprendido pelos estudantes. Porém, a aprendizagem depende do comprometimento do estudante com a realização das atividades, do seu interesse no que está sendo feito, do motivo que impulsiona a participar e até mesmo do que ele espera ao passar por aquele processo. Assim, não se pode antecipar se uma prática educativa será ou não bem-sucedida (SILVA, 2012, p. 56)

Após a aplicação das atividades orientadoras e partindo das elaborações explicitadas pelos alunos, Silva (2012) chegou à conclusão de que o professor tem um papel fundamental nas escolhas e na adaptação necessária às atividades seguintes porque é ele quem conhece sua sala de aula, seus alunos, e deve ter autonomia na preparação das aulas e nas escolhas das atividades, não devendo estas serem "sugeridas" por terceiros que não fazem parte daquele ambiente, pois esse tipo de procedimento acaba com a individualidade de cada contexto escolar. Silva (2012) ainda chamou a atenção para a necessidade de cada professor planejar a aula de cada turma a partir de suas peculiaridades e de sua unicidade; por isso, ela considera um erro generalizar metodologias de aula como se fossem uma produção em série.

Destacando a importância do diálogo nas trocas de ideias, experiências e compreensões, Silva (2012, p. 92) expõe que:

> Vale ressaltar a importância das rodas de discussões que aconteciam em cada etapa do trabalho. Esse era um momento de extrema importância para nós. Nesse instante, o diálogo era uma porta aberta para o pensamento dos alunos. As elaborações são formuladas no pensamento, e o diálogo é o único caminho. O professor deve estar atento, pois essas elaborações explicitadas tanto no diálogo como com ele, como nas conversas entre os alunos (...)

É a partir dessas trocas de ideias e dos diálogos entre os alunos que o professor pode perceber em que se encontram suas dificuldades e como ele pode atuar para ajudar na compreensão do que está sendo ensinado. Foi assim que Silva (2012) descobriu, por exemplo, que a maioria dos alunos encarava os números inteiros como "números absurdos"; que é necessário o professor dar significado ao sinal negativo, separando o sinal do número e da operação; e, ainda, que os alunos têm dificuldade em entender que os negativos ficam abaixo, ou antes, do zero. Esses diálogos e essas trocas entre a professora e os alunos tiveram uma mudança positiva de comportamento da turma em querer colaborar para facilitar a aprendizagem, conforme relato da pesquisadora:

> Outro aspecto que esse trabalho não poderia deixar de citar é o exercício de argumentação e confronto de opiniões praticado pelo grupo, trazido sempre por nós a público, a cada questionamento individual. Assim, as ideias puderam ser compartilhadas, dando a todos a oportunidade da mudança de opinião ou confirmação de seu pensamento (SILVA 2012, p. 94)

O diálogo foi um caminho para promover o aprendizado dos alunos.

> As elaborações de seus alunos são o caminho mais seguro para promover a aprendizagem de qualquer conteúdo. Ao mesmo tempo, o diálogo é sempre a porta para o pensamento para que os objetos de ensino se transformem em objetos de aprendizagem (SILVA 2012, p. 96).

Zequim (2014) traz a discussão de como o ensino de Matemática tem se mostrado ineficiente em aproximar os conteúdos escolares do cotidiano dos alunos ao se restringir basicamente ao uso da memorização de fórmulas e da resolução de exercícios repetitivos. A autora defende que, para alcançar bons resultados na aprendizagem dos alunos, é necessário que haja engajamento não só dos professores (ao planejarem suas aulas, se atualizarem profissionalmente e utilizarem das orientações e materiais fornecidos pelo Governo), mas também dos alunos, demonstrando interesse e compreendendo a relevância da educação formal não só para seu futuro pessoal, mas para o profissional também.

Para trazer essa discussão, Zequim (2014) baseou-se no marco legal da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), nas orientações dos PCN e na Proposta Curricular do Estado de São Paulo, além de trazer como aporte teórico a Metodologia da Resolução de Problemas proposta por Soares e Pinto (2001), que trabalha principalmente com os “problemas não rotineiros” apresentados por Polya (1995) e com a Modelagem Matemática.

Zequim (2014) acredita que a metodologia da Resolução de Problemas usando problemas “não rotineiros” possibilita uma aprendizagem mais interessante, mantendo os alunos mais engajados, fazendo com que eles se sintam desafiados, aguçando a criatividade deles e permitindo o desenvolvimento e a aplicação de diferentes estratégias em diversas situações de suas vidas.

> Agindo assim, o professor estará incentivando os alunos a terem ideias inovadoras e produtivas, bem como os levará a raciocinar de forma lógico--dedutiva, e a construírem (*sic*) seus próprios conhecimentos. Consequentemente, o ambiente de trabalho deve ser de cooperação, de busca, de exploração e de descobertas feitas pelos próprios alunos. (ZEQUIM, 2012, p. 13)

Em sua pesquisa, Zequim (2014) buscou trabalhar, de forma aplicada e contextualizada à realidade de seus alunos, conceitos matemáticos, propondo Sequências de Atividades Didáticas (SAD) cujo tema central era “A contaminação do solo e da água pelo óleo de cozinha já utilizado”, propondo aos seus 133 alunos do 7º ano cinco atividades didáticas usando a Resolução de Problemas e Modelagem Matemática como metodologia de ensino, o que, para ela, contribuiu muito para o desenvolvimento das habilidades e competências[8] matemáticas de seus alunos, mesmo enfrentando alguns desafios.

As contribuições de Queiroz (2014) se deram por meio da escolha do conteúdo abordado, da metodologia utilizada e da série escolhida para a aplicação da pesquisa, cujo objetivo era elaborar um material de apoio para professores da Educação Básica, tanto do Ensino Fundamental II quanto do Ensino Médio. Para tanto, ele propôs uma sequência didática contendo 6 (seis) atividades com situações de aprendizagem que utilizam a metodologia de Resolução de Problemas proposta por Polya integrada à metodologia do Modelo de Barras – ou representação pictórica de dados de um problema – segundo a filosofia da Matemática de Singapura[9].

Em sua pesquisa, Queiroz (2014) descreveu as dificuldades dos alunos relacionadas à aprendizagem da álgebra, além de discutir os obstáculos dos professores na escolha e na adoção de uma metodologia que facilite a transição da aritmética para a álgebra, comentando sobre as possíveis causas dos problemas dos estudantes durante esta.

---

[8] “Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (BRASIL, 2017, p.8).

[9] A filosofia da Matemática de Singapura “tem como metodologia central a Resolução de Problemas e promove a aprendizagem de conceitos matemáticos utilizando uma técnica de representação pictórica de dados de um problema conhecia como Metodologia de Modelo de Barras”(QUEIROZ, 2014, p. 37).

Na metodologia, ele descreveu as quatro fases da resolução de problemas propostas por Polya: a compreensão do problema, a elaboração de um plano (estratégia), a execução desse plano e, por fim, o retrospecto (verificação). Para a fase da estratégia, sugeriu a utilização do “Modelo de Barras” adotado pelos livros didáticos de Singapura. Essa integração entre metodologias, segundo o autor, facilita a transição da aritmética para a álgebra. Para a realização das atividades, Queiroz (2014) propôs, ainda, associar a resolução de problemas em si e as atividades de avaliação de erro pelos próprios alunos.

O Modelo de Barras proposto por Queiroz (2014, p. 40) consiste em uma técnica de representação pictórica de dados de um problema que fortalece os conceitos aritméticos e ajuda a entrar mais facilmente na aprendizagem da álgebra, pois, “além de ensinar o aluno a resolver problemas aritméticos, ela também ajuda a compreender a representação simbólica, estimulando o desenvolvimento do raciocínio algébrico”.

> A metodologia do Modelo de Barras é muito importante e útil para os alunos na resolução de problemas que envolvem comparações, parte-todo, razões e proporções fazendo com que os alunos possam aprimorar seus conhecimentos anteriores de aritmética, e adquirirem novos olhares para a abstração da álgebra que virá nos anos seguintes (QUEIROZ, 2014, p. 40).

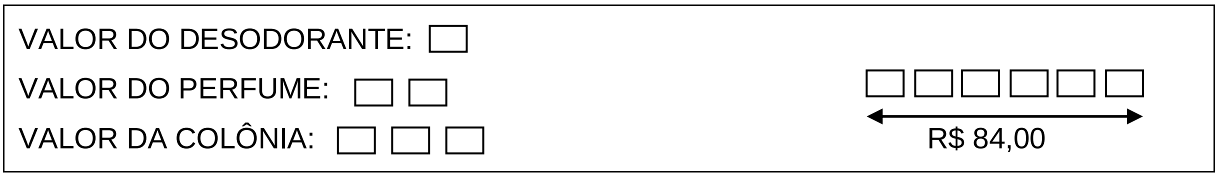
A metodologia do Modelo de Barras permite que o aluno desenvolva o raciocínio algébrico a partir de uma representação pictórica “com os dados interpretados de modo a permitir a visualização global do problema” (QUEIROZ, 2014, p. 44).

Tomemos como exemplo um dos problemas adotado pelo autor:

> Uma loja de produtos de beleza está vendendo um kit com três produtos, sendo um perfume, uma colônia e um desodorante. O kit é vendido por R$ 84,00. O preço do perfume é o dobro do preço do desodorante. Já o preço da colônia é o triplo do preço do desodorante. Qual é o valor de cada produto deste kit? (QUEIROZ, 2014, p.43).

Usando o Modelo de Barras para resolver esse problema, alunos do 6º ano poderiam apresentar o esquema da Figura 1 a seguir:

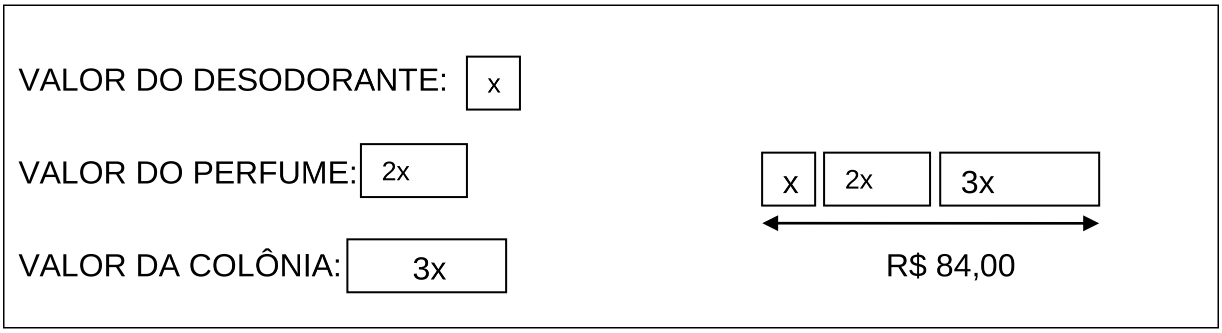
Figura 1 – Representação do problema com Modelo de Barras – 6o ano.



Fonte: QUEIROZ, 2014, p. 43

Já os alunos do 7º ano poderiam começar a utilizar símbolos, obtendo sucesso nessa transição para a Álgebra, conforme Figura 2.

Figura 2 – Representação do problema com Modelo de Barras – 7º ano.



Fonte: QUEIROZ, 2014, p. 44

A junção de metodologias proposta por Queiroz (2014) proporcionou aos alunos um resgate de conhecimentos já trabalhados em anos anteriores e o desenvolvimento do pensamento algébrico, permitindo a mudança da rotina no ambiente didático, o que os tornou mais ativos e participativos na condução de suas aprendizagens.

Além dessas cinco dissertações, analisamos também as contribuições de Fernandes (2016), cujo trabalho pode ser encontrado no banco de teses e dissertações da CAPES e foi desenvolvido no mesmo programa de mestrado da atual pesquisa. Assim como esta, a metodologia adotada por ele foi uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso do tipo etnográfico, embora ele ainda a tenha especificado mais, organizando-a segundo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, o que não aconteceu conosco. Além disso, o objeto de pesquisa também é semelhante, pois ele analisa as contribuições da metodologia da Resolução de Problemas conforme preconizada por Allevato e Onuchic.

Apesar dessas semelhanças, as diferenças entre as duas pesquisas estão no público e no campo pesquisado, além dos conteúdos abordados. Enquanto esta teve como público alvo alunos do 8º ano do Ensino Fundamental numa sala de reforço escolar em Matemática abordando operações com números positivos e negativos, expressões numéricas e equações do primeiro grau, aquela pesquisou alunos do 6º ano do Ensino Fundamental em sua própria sala de aula, abordando a divisibilidade de números naturais.

Fernandes (2016) faz uma breve análise de alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e o Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo (CBEES), assim como o livro didático selecionado para usar como fontes para tratar o assunto divisibilidade. Ele apresenta diversos pontos de vista que a metodologia Resolução de Problemas tem em comum, embora, assim como nós, tenha se baseado na concepção de Onuchic.

A turma pesquisada era composta de 28 alunos com idades entre 11 e 17 anos, alguns repetentes e outros com deficiência. Os alunos eram, em geral, descritos pelos professores como malcomportados, desordeiros e desinteressados. Porém, à medida que as aulas foram realizadas, os alunos foram se adaptando à dinâmica da metodologia Resolução de Problemas e mudaram sua postura, pois passaram a participar mais e a realizar as atividades com mais qualidade, o que indicou um aumento significativo na motivação e no interesse pela aprendizagem.

Fernandes acredita ter sido de “suma importância para esse resultado a seleção de problemas lúdicos ou contextualizados em situações cotidianas [...] e a utilização de material na composição do Plano de Trabalho” (FERNANDES, 2016, p. 195). Ele acredita, ainda, que essa metodologia mudou a percepção dos alunos em relação a aprendizagem da Matemática, pois as “boas notas deixou (*sic*) de ser um objetivo para ser consequência do aprendizado” (FERNANDES, 2016, p. 196). Chama, ainda, a atenção para a importância da plenária, momento em que as discussões e o enfrentamento das ideias contrárias favorecem a compreensão dos conceitos matemáticos construídos na resolução dos problemas solucionados nas etapas anteriores, os quais são consolidados na formalização, ao se fazer o registro das definições pertinentes.

Todas essas pesquisas trouxeram contribuições para o entendimento acerca da utilização da Resolução de Problemas como método e metodologia de ensino capaz de favorecer a aprendizagem matemática. Para além dessas pesquisas, queremos verificar especificamente de que maneira a Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014) pode contribuir para a aprendizagem de alunos com defasagem idade-série em um reforço escolar, trazendo novas discussões envolvendo as interações aluno-aluno e professor-aluno proporcionadas por essa metodologia de ensino.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA DA PESQUISA

Para a fundamentação teórica dessa pesquisa, trouxemos as contribuições de documentos oficiais do Ministério da Educação e de pesquisadores que versam acerca da Resolução de Problemas matemáticos como metodologia de ensino, além de definições do que é um problema matemático e de como alguns autores os classificam, de modo a nortear tanto o planejamento da pesquisa como das aulas de reforço. A seguir, especificamos cada uma dessas contribuições.

2.1 O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS

Os documentos oficiais que norteiam a educação, em especial a Educação Básica, são a Lei de Diretrizes e Bases (LDB), o Plano Nacional de Educação (PNE), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC)[10]. Veremos, a seguir, o que preconizam alguns desses documentos oficiais acerca do ensino da Matemática e do uso da Resolução de Problemas.

A LDB (BRASIL, 1996) é a legislação que regulamenta o sistema educacional do Brasil, tanto público quanto privado. Ela reafirma o direito à educação, garantido pela Constituição Federal, estabelecendo os princípios da educação e os deveres do Estado em relação à educação escolar pública, e define as responsabilidades entre a União, os Estados, o Distrito Federal e os Municípios, em regime de colaboração.

Segundo a LDB, a educação brasileira é dividida em dois níveis: a Educação Básica – compreendida pela Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio – e o Ensino Superior. Estabelece, ainda, algumas modalidades de educação que perpassam todos esses níveis: a Educação Especial, a Educação a Distância, a Educação Profissional e Tecnológica, a Educação de Jovens e Adultos e a Educação Indígena. Em seu Art. 35-A, a LBD estabelece que a Base Nacional Comum Curricular é quem definirá direitos e objetivos de aprendizagem, conforme diretrizes do Conselho Nacional de Educação, nas diversas áreas do conhecimento:

---

[10] A BNCC para Educação Infantil e Ensino Fundamental foi homologada em 20 de dezembro de 2017 e passa a entrar em vigor a partir de 2018. Para tanto, os estados e municípios passam agora por um período de adequação e adaptação.

Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

As Diretrizes Curriculares Nacionais apresentam orientações quanto ao papel do professor nos diferentes níveis de ensino, estabelecendo, entre outras coisas, que, para atuar na Educação Básica, o professor deve:

> [...] saber orientar, avaliar e elaborar propostas, isto é, interpretar e reconstruir o conhecimento. Deve transpor os saberes específicos de suas áreas de conhecimento e das relações entre essas áreas, na perspectiva da complexidade; conhecer e compreender as etapas de desenvolvimento dos estudantes com os quais está lidando. (BRASIL, 2013, p. 58)

Ao propor direitos e objetivos de aprendizagem e desenvolvimento para os alunos da Educação Básica, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017, p. 7) estabelece aprendizagens essenciais e indica conhecimentos e competências que se espera desenvolver em todos os estudantes ao longo da escolaridade. Ela é orientada pelos princípios éticos, políticos e estéticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e soma aos propósitos que direcionam a educação para a “formação humana integral e para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva”.

> O conceito de educação integral com o qual a BNCC está comprometida se refere à construção intencional de processos educativos que promovam aprendizagens sintonizadas com a necessidade, as possibilidades e os interesses dos alunos e, também, com os desafios da sociedade contemporânea, de modo a formar pessoas autônomas, capazes de servir dessas aprendizagens em suas vidas. (BRASIL, 2017, p. 17)

Para nortear o trabalho do professor em sala de aula, a BNCC adota dez competências gerais, assumindo que a “educação deve firmar valores e estimular ações que contribuam para a transformação da sociedade, tornando-a mais humana, socialmente justa e, também, voltada para a preservação da natureza” (BRASIL 2013 *apud* BRASIL, 2017, p. 8).

Segundo a BNCC, no Ensino Fundamental, a área da Matemática, por meio da articulação de seus diversos campos (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade), precisa garantir que os alunos relacionem observações baseados na experiência do mundo real e em representações e associem essas representações a uma atividade matemática, a conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles ampliem a capacidade de identificar oportunidades do emprego da Matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultado para obter soluções e interpretá-las de acordo os contextos das situações.

Para isso, a BNCC propõe cinco unidades temáticas que orientam a formulação de habilidades, recebendo ênfase diferente, a depender do ano de escolarização. As unidades temáticas são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística. Para cada uma delas, são relacionadas habilidades básicas e competências mínimas (raciocínio, representação, comunicação e argumentação), a serem adquiridas de acordo com cada nível.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, para a unidade temática Números, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 225) traz como expectativa que:

> [...] os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos.

Por sua vez, a unidade temática Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análises de relações quantitativas de grandezas e, também de situações e estruturas matemáticas. Para isso, é necessário que:

> [...] identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos [...] para resolver problemas por meio de equações e inequações (BRASIL, 2017, p. 226).

O mais importante a ser destacado aqui é que todas essas ações devem ser desenvolvidas com a compreensão dos procedimentos utilizados.

A Geometria, segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 227), “envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento”, além de ter uma aproximação com a Álgebra e não poder ser reduzida a uma mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e volume.

A unidade temática Grandezas e Medidas favorece a integração da Matemática a outras áreas de conhecimento, como Ciências ou Geografia, ao propor o estudo das médias e das relações entre elas, "contribuindo ainda para a consolidação e a ampliação da noção de números, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico" (BRASIL, 2017, p. 229). Por último, a unidade temática Probabilidade e Estatística estuda a incerteza e o tratamento de dados, propondo a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações--problema[11] da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia.

É interessante notar que todas as unidades temáticas estão relacionadas e se complementam, além de estarem voltadas à finalidade de resolver problemas, quer sejam eles do cotidiano ou das demais ciências. Essa divisão em unidades temáticas proposta pela BNCC serve apenas para facilitar a compreensão dos conjuntos de habilidades e de como elas se inter-relacionam. Mostrando a importância dada à resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem, ela diz que:

> Na definição das habilidades, a progressão ano a ano se baseia na compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas distintas (BRASIL, 2017, p. 273).

Assim como nos PCN, isso mostra a importância dada pela BNCC à resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, ela ainda diz que:

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 254).

Com relação aos recursos didáticos e materiais a serem utilizados no ensino da Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe que se

[11]Embora a BNCC não defina situações-problema, ela estipula como uma das competências específicas do ensino da matemática "enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático utilitário [...]" (BRASIL, 2017, p. 265).

lance mão de uma diversidade de materiais como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica, incluindo a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática, desde que esse recurso e esses materiais estejam "integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos" (BRASIL, 2017, p. 254), que aqui podemos entender como situações-problema.

> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática. No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas. Assim, pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto (BRASIL, 2017, p. 255).

De início, os PCN listam dez objetivos gerais do Ensino Fundamental, dentre os quais destacam-se dois: 1) que os alunos sejam capazes de "utilizar as diferentes linguagens – verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio de produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais" em diversos contextos, e a diferentes intenções e situações de comunicação; e 2) de que sejam capazes de "questionar a realidade, formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimento e verificando sua adequação" (BRASIL, 2001, p. 8).

Os PCN para a área de Matemática estão pautados por princípios, dentre os quais destacamos os de que "a Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização de seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente" e "a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão", de modo que as conexões sejam favorecidas, e que o ensino da Matemática deve "relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras) e relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos" (BRASIL, 2001, p. 19). Para alcançar esses princípios, os PCN orientam o ensino com ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática (a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas) e na importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção de seu conhecimento.

> [...] as orientações sobre abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos (BRASIL, 2001, p. 24).

Os PCN apontam ainda que, tradicionalmente, os problemas não têm conseguido desempenhar seu verdadeiro papel no ensino, pois muitas vezes vêm sendo utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos, quando, na verdade, deveriam ser utilizados como ponto de partida.

> Tradicionalmente, a prática mais frequente no ensino da matemática tem sido aquela em que o professor apresenta o conteúdo oralmente, partindo de definições, exemplos, demonstrações de propriedades, seguido de exercícios de aprendizagem, fixação e aplicação, e pressupõe que aluno aprenda pela reprodução (BRASIL, 1998, p. 37)

Por isso, os PCN (BRASIL, 2001, p. 43) defendem uma proposta em que “conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las”, sendo os problemas muito mais que um “exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório”. Assim:

> [...] a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas (BRASIL, 2001, p. 43).

Na resolução de um problema, presume-se que o aluno prepare um ou vários procedimentos de resolução, confronte seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos, não se resumindo a compreender o que foi proposto e dar respostas aplicando procedimentos adequados. É necessário ir além disso, desenvolvendo “habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos e comparar diferentes caminhos para obter a solução" (BRASIL 2001, p. 44), fazendo com que o processo de resolução tenha mais valor que a resposta correta.

Para fazer isso, o professor deixa de ser o centro do processo educativo e passa a agir como organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem. Assim, quem passa a ser o protagonista desse processo é o aluno, que tem na figura do professor um ponto de apoio que desempenha todos esses papéis, facilitando o processo de aprendizagem e desenvolvimento de competências.

Algumas competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática listados pelos PCN (BRASIL, 2001) são, dentre outras: confirmar aplicações dos conceitos matemáticos apreendidos, apresentando formas distintas: oral, gráfica, escrita, pictórica, etc.; explorar computadores e calculadoras, levantando circunstâncias e autenticando os resultados encontrados; desenvolver a habilidade de investigar, compreendendo novas situações matemáticas e construindo significados a partir delas; desenvolver a habilidade de realizar estimativas e aproximações de resultados e de averiguar a razoabilidade dos resultados em contexto de resolução de problemas.

O PCN de Matemática (BRASIL, 2001) cita, ainda, a importância do professor fazer as transposições didáticas[12], pois a obra e o pensamento do matemático teórico geralmente são difíceis de ser comunicado diretamente aos alunos; assim, tornar o saber matemático acumulado em um saber escolar, passível de ser ensinado/aprendido, exige que esse conhecimento seja transformado pelo professor, o que está em completa consonância com as orientações dadas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais.

Comparando os dois documentos, os PCN e a BNCC, podemos dizer que não há grandes variações entre eles em questões essenciais. Ambos apontam ou recomendam a Resolução de Problemas como uma estratégia metodológica para o ensino da Matemática capaz de favorecer a aprendizagem e desenvolver competências e habilidades. O que as diferencia é que, enquanto os PCN serviram

[12]Chevallard (2013) entende a transposição didática como a transição do conhecimento considerado como uma ferramenta a ser posta em prática para o conhecimento como algo a ser ensinado e aprendido.

de base à BNCC, elencando objetivos mais gerais por ciclo, a BNCC prescreve aquilo que se espera especificamente que o aluno aprenda em cada ano do Ensino Fundamental, dando um sentido maior de equidade ao estipular o mínimo que qualquer aluno deve aprender.

Na prática, o que pode ser observado é que as recomendações desses documentos se mostram muito mais difíceis de aplicar do que é possível imaginar, uma vez que tais recomendações esbarram em realidades desfavoráveis. Como exemplo disso, basta pensar no elevado número de alunos por turma nas escolas públicas[13] e nas suas realidades sociais complicadoras, com alunos que convivem com violência, famílias desestruturada, tráfico de drogas, etc. Nessas circunstâncias, é um desafio para o professor aplicar metodologias que envolvam trabalho em grupo numa sala de aula com mais de trinta alunos, especialmente quando há demandas de aprendizagem diferentes ao mesmo tempo.

2.2 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Onuchic (1999) chama a atenção para o fato de que a resolução de problemas há muito tempo tem ocupado um lugar central no currículo de Matemática, embora com uma visão limitada da aprendizagem. Segundo ela, até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e talvez incluir um exemplo resolvido.

Historicamente, com a mudança nas necessidades da sociedade, ocorreram também mudanças nas concepções dos acadêmicos sobre como deveria ser realizado o ensino e como deveria ocorrer o aprendizado da Matemática. Mesmo assim, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2001), os movimentos de reorientação curricular não tiveram força suficiente para mudar a prática docente, marcada por uma formalização precoce de conceitos e uma excessiva preocupação com o treino de algumas habilidades – como o cálculo mental, por exemplo – e com a mecanização de processos sem a devida atenção para sua compreensão (ONUCHIC, 1999).

[13]Na escola em que leciono, as turmas chegam a ter em média 40 alunos.

Segundo Onuchic (1999), no início do século XX, o ensino de Matemática foi caracterizado pela repetição e memorização, sem um currículo bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho que passava por aritmética, álgebra e geometria. Décadas depois, o aluno deveria aprender com compreensão, mas, nas aulas, o professor ainda falava e o aluno escutava e repetia, sem participar da construção de seu conhecimento. Somente em meados do século XX, com a contribuição de Polya, é que se começou a falar em resolver problemas como um meio de aprender Matemática.

Nas décadas de 1960-1970, sob a influência do Movimento da Matemática Moderna, as reformas anteriores foram deixadas de lado e passou-se a ensinar uma Matemática organizada, apoiada em estruturas lógicas e algébricas topológicas, enfatizando a teoria dos conjuntos e acentuando o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que acabava comprometendo a aprendizagem. Foi somente nas últimas décadas do século XX (a partir de 1980) que os educadores matemáticos passaram a dar mais atenção ao desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas. A tendência hoje é considerar os "estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade" (ONUCHIC, 1999, p. 203).

Nos Estados Unidos, em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicou obras com a recomendação de que a resolução de problemas fosse o foco da Matemática durante aquela década e destacou que "o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio pessoal e nacional da competência matemática" (*apud* ONUCHIC, 1999, P. 214). Recomendava-se, entre outras coisas, que a Resolução de Problemas envolvesse a aplicação da Matemática ao mundo real, sem que esta fosse ensinada somente em função da Matemática necessária para se resolver um dado problema, em um dado momento.

A Educação Matemática passou por movimentos que foram influenciados pelas profundas transformações sociopolítico-econômicas que demandavam formação para uma sociedade plural, informatizada e mais complexa. Para lidar com esse cenário, as orientações oficiais no Brasil "destacam a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimento e transferir para o aluno grande parte da responsabilidade por sua aprendizagem" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 40). O professor deve deixar de ser o centro do processo de ensino e atuar como mediador, disponibilizando uma diversidade de recursos que respeitem as diferentes condições e os estilos de aprendizagem de seus alunos. Essas orientações são sustentadas por ideias socioculturais que partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção de conceitos pelos próprios alunos quando eles são colocados em situações de resolução de problemas, pois a aprendizagem se dá quando o aluno, ao confrontar suas percepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Por isso, recomenda-se que o professor desenvolva a cultura de resolução de problemas em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Com a metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic, os atores (alunos e professores) interagem enquanto realizam determinada atividade. Segundo Carvalho (2009), essa interação tem um papel determinante no funcionamento interpsicológico dos pares. Quando dois ou mais alunos se dedicam ativamente a um confronto sociocognitivo com o objetivo de resolver um problema, estão presentes diferentes pontos de vista – ou seja, o traço cognitivo do conflito. Mas, além disso, é fundamental que eles consigam gerenciar o traço social da interação, presente num contexto colaborativo, a partir do comportamento de um dos atores e das interpretações que o outro faz desse comportamento, havendo, então, a necessidade de gerir uma relação interpessoal ao mesmo tempo que são negociados os diferentes raciocínios, abordagens e estratégias para a resolução de um problema.

> É pelo fato dos dois parceiros terem de justificar o seu ponto de vista, argumentar acerca das suas resoluções para as justificarem ao seu par negociar que faz com que, num contexto de trabalho colaborativo, nenhum imponha o seu ponto de vista, ao contrário do que acontece, por exemplo, numa situação hierárquica (CARVALHO, 2009, p. 17).

Isso está em consonância com o que dizem os PCN (BRASIL, 2001) sobre as relações professor-aluno e aluno-aluno, destacando a necessidade de o professor deixar de ser o protagonista do processo ensino-aprendizagem e dando lugar central ao aluno na construção de sua aprendizagem por meio das diversas interações estabelecidas em sala de aula.

O professor passa, então, a agir como organizador ao escolher os problemas que possibilitam a construção de conhecimentos/procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir após conhecer as condições socioculturais, expectativas e competências cognitivas dos alunos. Ele atua, também, como consultor ao fornecer as informações que os alunos não têm condições de conseguir sozinhos, fazendo explanações, oferecendo materiais, textos, etc. Além disso – e principalmente –, atua como mediador “ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar” (BRASIL, 2001, p. 40), promovendo o debate sobre os métodos utilizados, os caminhos percorridos e os resultados obtidos, orientando as reformulações e valorizando as soluções mais adequadas.

Para Allevato e Onuchic (2014), a importância da Resolução de Problemas no contexto da sala aula passou a se destacar somente nas últimas décadas do século XX. Especialmente na década de 1980, ocorreram relevantes mudanças de perspectivas na Educação Matemática que colocaram reflexões em torno do *quê* se queria atingir e de *como* deveria ser feito o trabalho escolar com Matemática.

Onuchic e Allevato (2005) apontam três caminhos diferentes para abordar a Resolução de Problemas: teorizar sobre a Resolução de Problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Para elas, embora teoricamente essas três concepções possam ser separadas, na prática elas se sobrepõem e acontecem em várias sequências e combinações.

Segundo Allevato e Onuchic (2014), passaram, então, a coexistir três diferentes formas de realizar um trabalho em sala de aula, fundamentadas na Resolução de Problemas: (1) ensino **sobre** Resolução de Problemas – considerado como um novo conteúdo, que aborda temas relacionados à resolução de problemas, com regras e processos gerais independentes do conteúdo abordado, sob a influência das ideias de Polya; (2) o ensino **para** a resolução de problemas – com o eixo de sustentação na Matemática, tendo a Resolução de Problemas como um instrumento, e (3) o ensino **através** da Resolução de Problemas, onde a Matemática e a resolução de problemas são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente, tendo como ponto de partida para as atividades em sala de aula a resolução de problemas, conforme recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

O ponto central em se trabalhar o Resolução de Problemas em Matemática está no fato de que esse tipo de ensino ajuda os alunos a compreenderem conceitos, processos e técnicas operatórias necessárias dentro de cada unidade temática. “Quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando aos alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão” (ONUCHIC, 1999, p. 208), o que, consequentemente, aumenta sua habilidade em usar a Matemática para resolver problemas. Concordando com isso, Carvalho (2009, p. 15) diz que:

> Quando se realizam tarefas de forma colaborativa na sala de aula, mais facilmente se discutem e explicam ideias, se expõe, avaliam e refutam pontos de vista, argumentos e resoluções, ou seja, criam-se oportunidades de enriquecer o poder matemático dos alunos pois cada um dos parceiros está envolvido na procura da resolução para a tarefa que têm em mãos.

Onuchic (1999) entende que, na abordagem de Resolução de Problemas como metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas quanto aprende Matemática para resolver problemas. Busca-se com essa metodologia usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição (na qual a memorização dos fatos básicos, a tabuada, era considerada muito importante), compreensão (em que o aluno devia entender o que fazia, sem necessariamente participar da construção de seu conhecimento), uso da linguagem matemática da teoria dos conjuntos (que apresentava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa), resolução de problemas (que considerava os estudantes como participantes e ativos) e (por que não?), às vezes, até a forma tradicional (que se baseava no treino de habilidades e na mecanização de processos). Embora resolver problemas seja um bom caminho para o ensino da Matemática, eles muitas vezes são utilizados apenas como uma forma de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos. Para que sejam utilizados de maneira mais profícua, é necessário que o professor esteja qualificado e bem preparado, pois:

> Nenhuma intervenção no processo de aprendizagem pode fazer mais diferença do que um professor bem formado, inteligente e hábil. Investir na qualidade de ensino é o que mais importa. A preparação do professor tem um efeito direto na realização dos alunos, pois ninguém dispende tanto

> tempo ou tem tanta influência sobre os alunos quanto os próprios professores(ONUCHIC, 1999, p. 211).

A publicação *Principles and Standards for School Mathematics*, também conhecida como *Standards 2000*, produzida pelo NCTM (2000), indica a Resolução de Problemas como um dos cinco padrões de procedimentos para a Matemática Escolar, considerando-o como um procedimento; por isso, recomenda que o ensino da Matemática se dê através da resolução de problemas.

> A discussão sobre resolução de problemas e sua incorporação ao ensino de Matemática na escola básica como potente ferramenta para aprendizagem representa um marco para as mudanças de orientação. A compreensão de problema apresentada por Polya rompe com a ideia de aprendizagem em Matemática, baseada em exercícios mecânicos e atividades rotineiras, e apresenta elementos que permitem tomar a prática de resolução de problemas como um processo dinâmico, no qual a comunicação entre alunos e professores tem papel preponderante (SANTOS, 2009, p. 119).

Allevato e Onuchic (2009; 2011) propõem dez etapas para o professor organizar os trabalhos com resolução de problemas: (1) proposição do problema, (2) leitura individual, (3) leitura em conjunto, (4) resolução do problema, (5) observação e incentivo, (6) registro das resoluções na lousa, (7) plenária, (8) busca de consenso, (9) formalização do conteúdo e (10) proposição e resolução de novos problemas.

Parte dessas ações deve ser desenvolvida pelos alunos e parte pelo professor. O docente pode, inicialmente, selecionar/elaborar os chamados *problemas geradores* e propô-los aos alunos ou pode aceitar um problema proposto pelos próprios alunos. Ao final das nove etapas, o professor propõe novos problemas relacionados ao problema gerador, possibilitando, assim, analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático foram compreendidos, consolidar as aprendizagens construídas, aprofundar e ampliar as compreensões acerca do conteúdo. Embora esta última etapa tenha fortes características do ensino para a resolução de problemas, ela não desconfigura o ensino da Matemática através da resolução de problemas, pois essa metodologia, na verdade, inclui as demais concepções (sobre e para) (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática deve sempre começar onde estão os alunos, em termos do conhecimento e da experiência deles, com a avaliação do desenvolvimento dos estudantes sendo feita continuamente e integrada ao ensino e à aprendizagem. Assim, o professor tem a oportunidade de perceber continuamente as condições e o conhecimento que os alunos possuem, ajudando-os durante o processo (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

2.2.1 Mas afinal, o que significa um problema matemático?

Os PCN destacam que “um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja: a solução não está disponível de início; no entanto é possível construí-la” (BRASIL, 2001, p. 44). Assim, o que para um aluno pode ser caracterizado como problema, para outro pode ser apenas um exercício de verificação em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos que ele dispõe.

Para Souza e Wrobel (2017), o termo ‘problemas de matemática’ pode levar a diferentes entendimentos. Entretanto, para as pesquisadoras, as pessoas estão diante de um problema quando se interessam em resolver uma questão matemática para a qual não dispõem de um algoritmo ou uma estratégia prévia que a solucione.

> Assumir essa postura leva a diferenças importantes sobre o que seja um problema e um exercício. Um exercício de Matemática exige pouco investimento cognitivo por se traduzir em algo previamente conhecido para executá-lo. O exercício promove automatismos e consolidações mentais essenciais para muitas tarefas, mas que se diferenciam dos estímulos internos que um problema requer (SOUZA; WROBEL, 2017, p. 24)

As concepções acerca do que é resolver um problema sofrem variações entre os pesquisadores, indo desde visões muito simples e ingênuas até sofisticadas teorias. Como exemplos de algumas dessas concepções, Souza e Guimarães têm o mesmo entendimento que Polya (1945): “resolver um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para atingir um objetivo claramente definido, mas não imediatamente atingível” (SOUZA; GUIMARÃES, 2015, p.137).

Stancanelli (2001, p. 104) classifica os problemas em convencionais e não convencionais. Os problemas *convencionais,* segundo a autora, têm como características “frases curtas e objetivas e não exigem um pensamento mais elaborado para sua interpretação e resolução”, já que estão ligados a um conteúdo específico, sempre tendo solução e resposta única – que, em geral, é numérica –, além de apresentar todos os dados de que o resolvedor necessita para sua resolução, e não apresentar dados desnecessários. Em contrapartida, os problemas *não convencionais* rompem com pelo menos uma das características dos convencionais:

> Ao trabalhar com os problemas não-convencionais, os alunos têm contato com diferentes tipos de textos e desenvolvem sua capacidade de leitura e análise crítica, pois, para resolve a situação proposta, é necessário voltar muitas vezes ao texto a fim de lidar com os dados e analisá-los, selecionando os que são relevantes e descartando aqueles supérfluos.[...] isto gera uma atitude que não é passiva e requer uma postura diferenciada frente à resolução de problemas (STANCANELLI, 2001, p. 104).

Stancanelli (2001) ainda faz uma subclassificação dos problemas não convencionais, conforme descrito no quadro a seguir:

Quadro 1 – Tipos de problemas, segundo classificação de Stancanelli.

TIPOS DE PROBLEMAS	
CLASSIFICAÇÃO	**SUBCLASSIFICAÇÃO**
Convencionais	----
Não-convencionais	Problemas sem solução
	Problemas com mais de uma solução
	Problemas com excesso de dados
	Problemas de lógica

Fonte: Stancanelli (2001).

Ao lançar mão dos vários tipos de problemas acima, o professor pode fazer com que os alunos confrontem opiniões e reflitam sobre a adequação, a finalidade e a utilização dos dados apresentados no texto, interpretando e analisando o problema com mais atenção. Essas são ações que, quando bem desenvolvidas, podem auxiliar na interpretação de outros tipos de textos, não apenas matemáticos e não apenas escolares (STANCANELLI, 2001).

Além dessa classificação dos problemas em convencionais e não-convencionais, outros autores, como Souza e Guimarães, ainda classificam os problemas em verbais e não-verbais. Para eles, problemas verbais são aqueles “formulados por escrito, recorrendo, sobretudo, à linguagem natural, eventualmente permeada por elementos da linguagem própria da Matemática” (SOUZA; GUIMARÃES, 2015, p. 137).

Fonseca e Cardoso (2009) destacam, ainda, a existência de uma variedade de tipos de textos matemáticos em que a linguagem verbal não predomina. São textos de poucas palavras, que lançam mão de sinais não só com uma construção própria, mas com uma distribuição de elementos gráficos também diferenciados.

Assim, assumindo a definição de problemas apresentada pelos PCN, para a preparação das aulas de reforço, procura-se escolher problemas dos tipos mais variados possíveis, respeitando as diferentes condições e os estilos de aprendizagem dos alunos. Por se tratar de um reforço para alunos com dificuldade em aprender, a adoção de problemas mais complexos não se mostrou adequada. Embora alguns problemas escolhidos possam ter mais uma aparência de exercício, para esses alunos, eles constituíram um verdadeiro desafio – daí poderem ser considerados problemas.

3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NO REFORÇO ESCOLAR DE MATEMÁTICA: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA DE ENSINO

3.1 DESCRIÇÃO DA INTERVENÇÃO

Damiani (2012, p. 3) usa o termo “intervenção” para denominar interferências realizadas propositadamente por professores/pesquisadores, em suas práticas pedagógicas, baseadas em um determinado referencial teórico que objetiva “promover avanços, melhorias, nessas práticas, além de pôr à prova tal referencial” com o propósito de potencializar as aprendizagens dos alunos participantes. Para Damiani (2012, p. 2), as “intervenções em Educação podem não só “propor novas práticas pedagógicas (ou aprimorar as já existentes)”, como também produzir “conhecimento teórico nelas baseado”.

Posto isso, a intervenção, na forma de um reforço escolar em Matemática com o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014), foi realizada em uma escola municipal de Ensino Fundamental II do município de Teixeira de Freitas (BA), com alunos matriculados em 2018 no 8º ano com defasagem série-idade e dificuldade de aprendizagem em Matemática.

3.1.1 Caracterização da escola

A Escola Municipal onde foi desenvolvida a pesquisa é uma unidade de ensino que oferece 650 vagas para o Ensino Fundamental II, nos turnos matutino e vespertino. Ela está localizada no perímetro urbano do município de Teixeira de Freitas (BA). Por situar-se numa zona central da cidade, recebe alunos de vários bairros, incluindo alunos da periferia e da zona rural, além de ser um polo de inclusão para alunos com diversas deficiências, principalmente auditiva.

A maior parte dos professores tem formação específica na disciplina que lecionam. Um terço deles trabalha 40 horas nesta escola, o que possibilita um maior envolvimento e engajamento nos projetos e nas questões político-pedagógicas. Já a coordenação pedagógica é diferente em cada turno, cada uma com características e estilo próprio de trabalhar.

A estrutura física, em comparação com as demais escolas do município, é bastante diferenciada por se tratar de um prédio de três andares, enquanto as demais são todas com prédios térreos.

Figura 3 – Vista posterior da escola

Fonte: a própria autora

As salas de aula são pequenas para o número de alunos matriculados, principalmente para as turmas de sétimo ano, que possuem mais de 40 (quarenta) alunos. As carteiras ficam muito próximas ao quadro e entre si, o que dificulta a movimentação dos professores. Isso os desencoraja a adotar uma metodologia de ensino diferente do convencional ou uma proposta de trabalho em grupo.

Com um espaço reduzido e todas as salas de aula ocupadas, o único espaço que poderia ser disponibilizado para as aulas de reforço era a biblioteca inativa, que também servia como local de planejamento para os professores. Isso só foi possível porque as aulas aconteceriam às quartas-feiras, e esse era o único dia em que não havia nenhum professor planejando suas aulas ou em reunião com a coordenação. Ter apenas este espaço disponível também trouxe outra dificuldade: a sala não possuía um quadro branco. Foi preciso improvisar usando um quadro móvel, pequeno e antigo, colocado em cima de algumas cadeiras. Como fator positivo, destacou-se a tranquilidade e o silêncio, que só era quebrado quando os alunos trocavam ideias durante a resolução dos problemas.

3.1.2 Caracterização dos sujeitos (alunos)

Por tratar-se de uma pesquisa qualitativa, descrever as características sociais e acadêmicas dos sujeitos envolvidos mostra-se relevante para entendermos de que forma o meio em que os alunos estão inseridos interfere no processo de aprendizagem.

Para preservar a identidade dos participantes, adotaremos aqui a letra A seguida de diferentes números ao nos referirmos a cada aluno. Dito isso, passaremos, então, à descrição da turma de reforço. Ela foi composta de dez alunos, sendo quatro meninas e seis meninos, com idade entre quinze e dezoito anos. Todos já haviam sido reprovados em pelo menos dois anos, tendo oito deles sofrido reprovação em três anos. Com exceção da aluna A1, todos os demais sofreram reprovação no sétimo ano, e desses, apenas dois conseguiram aprovação em 2017 sem passar pelo Conselho de Classe[14] (embora todos tenham realizados as provas finais, ao menos em Matemática).

Essas informações foram obtidas por meio dos relatórios da professora de Matemática e dos registros da coordenação pedagógica, da direção e da secretaria escolar nas fichas individuais de cada aluno, às quais tivemos acesso após a seleção de quem participaria da intervenção.

O que chamou atenção foram as séries em que eles sofreram reprovações. Além do sétimo ano, conforme mencionado anteriormente, cinco deles ficaram retidos no 3º ano do Ensino Fundamental I, em que não é mais obrigatória a aprovação automática caso o aluno não tenha desenvolvido as competências mínimas, e quatro no 6º ano (série inicial do Ensino Fundamental II), onde ocorrem diversas adequações, como o aumento do número de disciplinas, a rotatividade de professores por aula e a necessidade de se adaptar em uma nova escola, tudo isso

[14] Realizado trimestralmente, o Conselho de Classe está fundamentado no Regimento Escolar e no Projeto Político Pedagógico da escola, que reúne coordenação pedagógica, professores, direção e alunos, a fim de analisar o desempenho dos estudantes de cada turma.

enquanto se entra na puberdade – fase do desenvolvimento humano em que o corpo passa por mudanças hormonais que afetam não apenas características físicas, mas emocionais também. Essa descrição está resumida na tabela a seguir, cujo levantamento foi atualizado em outubro de 2018:

Tabela 1 – Caracterização dos participantes das aulas de reforço escolar

Alunos	Idade	Sexo	Reprovação	ACC[15] em 2017
A1 ASC	16 anos e 11 meses	Fem.	8º, 8º, 8º ano	
A2 EFF	18 anos e 2 meses	Masc.	3º, 7º, 7º ano	x
A3 EPS	16 anos e 3 meses	Fem.	4º, 7º ano	
A4 ISP	17 anos e 2 meses	Mas	3º, 6º, 7º	x
A5 KSA	17 anos e 1 mês	Masc.	3º, 7º, 7º ano	x
A6 KSM	16 anos e 11 meses	Fem.	6º, 7º, 7º ano	x
A7KHS	15 anos e 10 meses	Masc.	6º, 7º ano	x
A8 KCS	16 anos e 7 meses	Masc.	3º, 3º, 5º ano	
A9 PAS	15 anos e 9 meses	Masc.	3º, 7º ano	x
A10 SMP	16 anos e 4 meses	Fem.	6º, 7º, 7º ano	x

Fonte: a própria autora.

Um fato interessante é que metade desses alunos, que estavam no turno vespertino, estudavam no turno matutino e tiveram que mudar de turno porque foram reprovados no 7º ano e o número de vagas nessa série no turno matutino é inferior ao número de vagas disponível no turno vespertino. Embora essa realidade constitua um desafio para a direção, a coordenação e os professores, ainda não foi possível chegar a uma solução adequada para o problema da alta reprovação no sétimo ano, principalmente no turno vespertino.

A seguir, são apresentadas as características de aproveitamento escolar dos alunos que participaram do projeto.

A aluna A1, que já estava na escola há seis anos, foi aprovada pelo Conselho de Classe em 2013, quando estava no 6º ano, e transferiu-se para outro município, onde iniciou o 7º ano. Apesar disso, retornou à escola no ano seguinte, no início da segunda unidade – ou seja, em meados de maio –, trazendo resultados insuficientes em Matemática. Ao longo do ano, ela conseguiu melhorar sua nota, mas não a ponto

[15]Aprovado pelo Conselho de Classe.

de impedir que fosse para a recuperação final e precisasse de aprovação pelo Conselho de Classe[16].

Nos três anos seguintes (2015, 2016 e 2017), ela não conseguiu desenvolver as competências mínimas, ou seja, alcançar a média para a aprovação – que na época era de 5,0 pontos[17] – em mais de uma disciplina. Era uma aluna agitada, que conversava muito durante as aulas e tinha diversas ocorrências disciplinares, a ponto de ter uma observação em sua ficha condicionando sua rematrícula a uma conversa dos pais com a direção.

O aluno A2 tinha dezoito anos e, apesar de ter começado a estudar na idade certa, desistiu da escola durante um ano (quando deveria fazer o 3º ano, ou após concluir o 2º ano do Ensino Fundamental I). Foi reprovado no 4º ano, aprovado pelo Conselho de Classe no 6º ano por votação (uma vez que não alcançou as competências em mais de uma disciplina) e ficou retido no sétimo ano por dois anos consecutivos, tendo passado para o 8º ano em 2017 apenas por ter sido aprovado novamente pelo Conselho de Classe.

De acordo com a professora, o aluno é extremamente tímido e se esforça para realizar atividades e trabalhos, embora não alcance bons resultados. É de pouca conversa e quase nenhuma interação com os demais colegas. Com exceção da dificuldade de aprendizagem, não possui nenhum registro de ocorrência em ficha. Tem como responsável o avô paterno, uma vez que seu pai foi assassinado e sua mãe o abandonou junto dos dois irmãos.

A aluna A3 tem dezesseis anos. Ela foi reprovada em 2012, quando estava no 4º ano, e em 2016, quando cursou o 7º ano. Foi aprovada pelo conselho em 2011, em 2013 e em 2015, alcançando sempre média 5,0 em todas as disciplinas, o que comprovou sua dificuldade de aprendizagem. Em 2017, foi aprovada sem passar pelo Conselho de Classe, embora tenha feito a prova final de Matemática. De acordo com a coordenadora, ela é uma aluna tímida, com muita dificuldade de aprendizagem e sofre *bullying* devido a questões de asseio corporal e estética.

[16] Uma das regras do Conselho de Classe dessa escola é que o aluno que estiver reprovado em apenas uma disciplina com média final maior que 4,0 pontos deverá ser aprovado pelo Conselho automaticamente.

[17] Hoje o município trabalha com a divisão do ano letivo em três trimestres e média anual de 6,0 pontos em cada disciplina.

Embora ela morasse com a mãe (os pais são separados), o pai era o responsável por ela na escola. Foi ele quem compareceu à instituição de ensino para saber mais sobre as aulas de reforço e assinar a autorização.

Segundo relato da aluna, sua mãe era muito rígida e prendia muito os filhos em casa. Três de suas irmãs se casaram muito jovens para sair de casa e acabaram não completando os estudos. A aluna ainda relatou que a família tinha sofrido com a sequência de mortes de cinco primos dela, todos irmãos entre si, relacionadas ao tráfico de drogas. Desses, dois foram assassinados em um período de cinco meses, o que resultou em um quadro de depressão profunda da mãe deles, que veio a falecer em decorrência desta doença.

O aluno A4 tinha dezessete anos e morava num bairro extremamente pobre e violento, muito distante da escola. Foi reprovado no 3º ano (2010), no 6º ano (2014) e no 7º ano (2016), série na qual foi aprovado em Matemática pelo Conselho de Classe (2017). Embora seja tímido, não tinha dificuldade em interagir com os colegas ou participar das aulas. Os registros de ocorrência em sua ficha eram apenas da não realização de algumas atividades. Durante as aulas de reforço, demonstrou interesse em fazer as provas do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA), a fim de conseguir o certificado do Ensino Fundamental II e poder adiantar seus estudos à noite, uma vez que, a partir de 2019, ele queria trabalhar o dia inteiro para ajudar a família. Assim, ele foi orientado quanto ao processo de inscrição e a realização das provas.

A aluna A6 tinha dezesseis anos e também morava em um bairro violento e distante da escola, marcado pelo tráfico de drogas. Cursou todo o Ensino Fundamental II numa escola municipal desse bairro. Fez o 1º ano em 2007, desistiu de estudar em 2008 e 2009, retornando aos estudos em 2010 (no 2º ano). Ali, seguiu até o 6º ano, em 2014. Em 2015, mudou-se para São Mateus, onde iniciou o 7º ano, mas retornou para Teixeira de Freitas na metade do 3º bimestre, quando se matriculou na atual escola. Por não trazer notas parciais nem conseguir média no 4º bimestre, ela foi reprovada em todas as disciplinas.

Em 2016, seu rendimento não melhorou. Fez prova final de cinco disciplinas, mas só alcançou nota suficiente em Língua Portuguesa. Por isso, foi reprovada mais uma vez nessa série. Em 2017, fez provas finais em Matemática, História e Inglês, nas quais obteve nota suficiente apenas em História, sendo, então, aprovada pelo Conselho de Classe. Apesar de ser uma aluna participativa, tinha muita dificuldade de aprendizagem, além de faltar bastante, o que acabou comprometendo ainda mais seu desenvolvimento escolar. Conforme relato da coordenação, ela possuía uma família desestruturada, sem apoio materno e exposta à violência doméstica.

Em uma realidade familiar parecida com a da aluna A6, o aluno A7, além de faltar consideravelmente às aulas, era bastante indisciplinado e descompromissado. Havia diversos registros de advertências e suspensões em sua ficha, e sua mãe era constantemente notificada quanto às faltas e à não realização de atividades. De acordo com a direção, no início de 2017, ele ficou ausente por mais de trinta dias. Isso aconteceu porque A7 estava fugindo do padrasto, que o ameaçava de morte por ter sido esfaqueado pelo jovem enquanto este defendia a mãe de ser espancada pelo marido, mesmo que ela o tenha rejeitado como filho em diversas ocasiões. O bairro onde a família residia também era famoso por ser muito carente e permeado pelo crime.

Quando não estava na escola, A7 trabalhava de “flanelinha” ou carregando compras em feiras livres da cidade para ajudar no sustento familiar. Desde que entrou na escola, em 2014, ele foi reprovado duas vezes e aprovado pelo conselho outras duas. Suas notas em todas as disciplinas raramente ultrapassam a média de 6,0 pontos. Esse resultado é reflexo da interferência dos fatores externos e internos à escola em seu processo de aprendizagem.

O aluno A8 tinha dezesseis anos e morava apenas com a mãe e a irmã mais nova. Como a mãe sai para trabalhar, ele ficava responsável por cuidar da irmã menor durante o período matutino e por levá-la à escola no período vespertino (de acordo com relatos da própria mãe, ao vir se informar sobre as aulas de reforço). Segundo os registros da professora de Matemática, ele era um aluno agitado, que conversava muito, não realizava as atividades propostas e constantemente se envolvia em atos de indisciplina. Sua ficha chamou a atenção por ele ter sido reprovado duas vezes no 3º ano (em 2010 e 2011) e uma vez no 5º ano (em 2014). Quando entrou para a atual escola, em 2016, foi aprovado pelo Conselho de Classe no 6º ano e aprovado após recuperação final de Matemática e Inglês em 2017.

Analisando o histórico escolar do aluno A9, foi possível identificar uma desistência no 2º ano do Ensino Fundamental I (2010), uma aprovação pelo Conselho de Classe no 6º ano (2015, quando foi matriculado na atual escola), uma reprovação no 7º ano (2016, quando fez prova final em todas as disciplinas e não conseguiu alcançar média suficiente em cinco delas) e em 2017 (quando foi aprovado pelo Conselho de Classe). Segundo relatório da coordenação, este era um aluno faltoso, pois constantemente se ausentava das aulas para participar de campeonatos de futebol. Também morava em um bairro na periferia, muito distante da escola. Este era o único aluno participante do reforço cuja família não recebia Bolsa Família.

Por fim, a aluna A10 era a única moradora de um bairro central, sem histórico de violência. Ela tinha dezesseis anos e começou a estudar com 7 anos e meio (2010). Desistiu no 2º ano (2011), retomou os estudos em 2012 e matriculou-se no 6º ano na atual escola (2015), tendo sido aprovada pelo Conselho de Classe em Português, Matemática e Educação Física. Em 2016, foi mantida no 7º ano, pois só conseguiu média em História e Educação Física, e no ano de 2017 foi aprovada pelo Conselho de Classe em Português, Matemática e Inglês. Apesar de não ter problemas com indisciplina, era uma aluna faltosa e apática, conforme relatório da professora. Segundo informações da coordenação, a mãe era constantemente chamada à escola para justificar as ausências da filha, mas nunca comparecia, com exceção de quando o pagamento do Bolsa Família foi suspenso.

Conforme percebeu-se a partir das descrições acima, os alunos eram jovens sem estrutura familiar adequada, que não recebiam assistência dos pais e parentes, moravam em comunidades pobres e margeadas pelo tráfico de drogas e, em alguns casos, já eram os responsáveis pelo sustento familiar. A maioria deles era constituída de alunos indisciplinados, com elevado índice de ausência e sem qualquer estímulo aos estudos, o que dificulta a aprendizagem.

A seleção desses alunos foi feita por meio de um levantamento do histórico escolar de cada aluno e de indicações da coordenação pedagógica e da professora da disciplina das turmas. Foram selecionados previamente 20 alunos do turno vespertino, com idades acima de 15 anos.

Após a seleção dos alunos, foi explicada a eles a proposta da pesquisa, o seu objetivo e o tempo de duração, assim como o horário (manhãs de quartas-feiras) e o local (espaço disponível na própria escola, cedido pela direção escolar). Nesse primeiro momento, vários alunos relataram a impossibilidade de participar das aulas de reforço, uma vez que, pela manhã, eles já estariam trabalhando ou ocupados com outros afazeres. O número de alunos que aceitou participar das aulas de reforço caiu pela metade, ficando em apenas 10 alunos.

Antes de iniciar as aulas, foi realizada uma avaliação diagnóstica ou pré-teste (APÊNDICE A), aplicada individualmente, para identificar as principais dificuldades apresentadas por aqueles alunos, a fim de nortear a preparação dos planos de aula e a elaboração do material didático a ser utilizado.

Na intervenção, foi assumido pela professora o papel de “observador como participante”, descrito por André (2013, p. 29) como sendo aquele em que “a identidade do pesquisador e os objetivos do estudo são revelados desde o início”, podendo favorecer o acesso a uma variedade de informações.

A coleta dos dados secundários[18] foi feita no diário escolar, nas fichas individuais dos alunos e em relatórios da coordenação pedagógica. Os dados primários[19] foram obtidos por meio de observação participante das aulas do reforço escolar e da rotina da escola (com uso de gravação de áudio e anotação em diário de bordo); por meio de entrevistas semiestruturadas com os atores envolvidos – professores, alunos, direção, coordenação, secretárias, chefe de disciplina e pais –, utilizando gravação de áudio e posterior transcrição; e por meio de análise das atividades produzidas pelos alunos durante as aulas de reforço. O material obtido em áudio foi submetido a uma análise prévia para a obtenção de recortes significativos e uma análise posterior mais detalhada.

De acordo com Martins (2008, p. 25), a observação participante “é uma modalidade especial de observação na qual o pesquisador não é apenas um observador passivo”; na verdade, ele “torna-se parte de uma estrutura social, e na relação face a face com os sujeitos da pesquisa realiza a coleta de dados e informações”. Desse

[18] Definido por Martins (2008, p. 22) como sendo “os dados já coletados que se encontram organizados em arquivos, bancos de dados, anuários e relatórios”.
[19] Aqueles “colhidos diretamente na fonte” (MARTINS, 2008, P. 22).

modo, ao propor e aplicar a intervenção junto ao grupo de alunos, como professora de Matemática das aulas de reforço, foram observadas as reações, as interações e os resultados frente às mediações feitas no decorrer das aulas, coletando esses dados diretamente.

Os conteúdos escolhidos para abordagem nas aulas de reforço foram sugeridos pela professora da turma por meio de uma entrevista semiestruturada, definida por Martins (2008, p. 27) como "uma técnica de pesquisa para coleta de dados cujo objetivo básico é entender e compreender o significado que os entrevistados atribuem a questões e situações". O conteúdo abordado foi apontado pela professora regular desses alunos em virtude da grande dificuldade que os estudantes demonstravam ao tentar compreender os conceitos e as regras que permeiam o material (a saber: operações com números inteiros, expressões numéricas e equações de 1º grau). A partir dessas sugestões de conteúdo, foi elaborado o pré-teste, que teve como objetivo sondar o conhecimento dos alunos.

Embora os assuntos tenham sido trabalhados em blocos, eventualmente foram associados na busca de possíveis conexões entre eles. Assim, em uma aula cujo foco principal tenha sido as operações com números inteiros, as expressões numéricas ou equações de 1º grau também puderam ser tratadas até mesmo como possíveis estratégias para a resolução de problemas.

Ao propor os problemas e as dinâmicas nas aulas de reforço, buscou-se oferecer diversos tipos de problemas que respeitassem as diferentes condições e os estilos de aprendizagem. Estes puderam ser identificados a partir da avaliação diagnóstica que cada um deles realizou antes do início das aulas, além das expressões verbais dos alunos no decorrer do reforço escolar.

Segundo o PCN, o professor deve organizar os conteúdos analisando: 1) a variedade de conexões que podem ser estabelecidas entre os diferentes blocos; 2) a ênfase maior ou menor que deve ser dada a cada item; e 3) os níveis de aprofundamento dos conteúdos em função das possibilidades de compreensão dos alunos. Ao realizar seu planejamento, o professor deve procurar articular múltiplos aspectos dos diferentes blocos. Além disso, também deve estabelecer ligações entre a Matemática, o cotidiano dos alunos e as outras áreas do conhecimento, além de levar em consideração o nível de aprofundamento adequado a cada ciclo e cada realidade do aluno (BRASIL, 2001). Assim, a escolha dos problemas se deu com intuito de abranger tais características, além de contemplar as diferentes classificações de problemas matemáticos defendidas por Stancanelli (2001), Souza e Guimarães (2015) e Fonseca e Cardoso (2009).

O reforço durou quatro meses e teve um total de 16 aulas, algumas das quais precisaram sofrer ajustes devido a alterações na rotina escolar. O projeto teve início no dia 14 de março de 2018 e encerrou-se no dia 1º de agosto de 2018, acontecendo sempre às quartas-feiras, entre as 07h30min e as 09h30min, na biblioteca inativa da escola, conforme cronograma a seguir:

Quadro 2 – Cronograma das aulas de reforço executado.

CONTEÚDO	**DATAS**															
	14 Março	21 Março	28 Março	04 Abril	11 Abril	18 Abril	25 Abril	02 Maio	23 Maio	06 Junho	13 Junho	20 Junho	27 Junho	27 Junho	04 Julho	11 Julho
Avaliação diagnóstica inicial	X															
Operações com números positivos e negativos	X	X	X	X	X	X	X	X								
Expressões numéricas									X	X	X	X				
Equações de 1º grau													X	X	X	X
Avaliação diagnóstica final																X

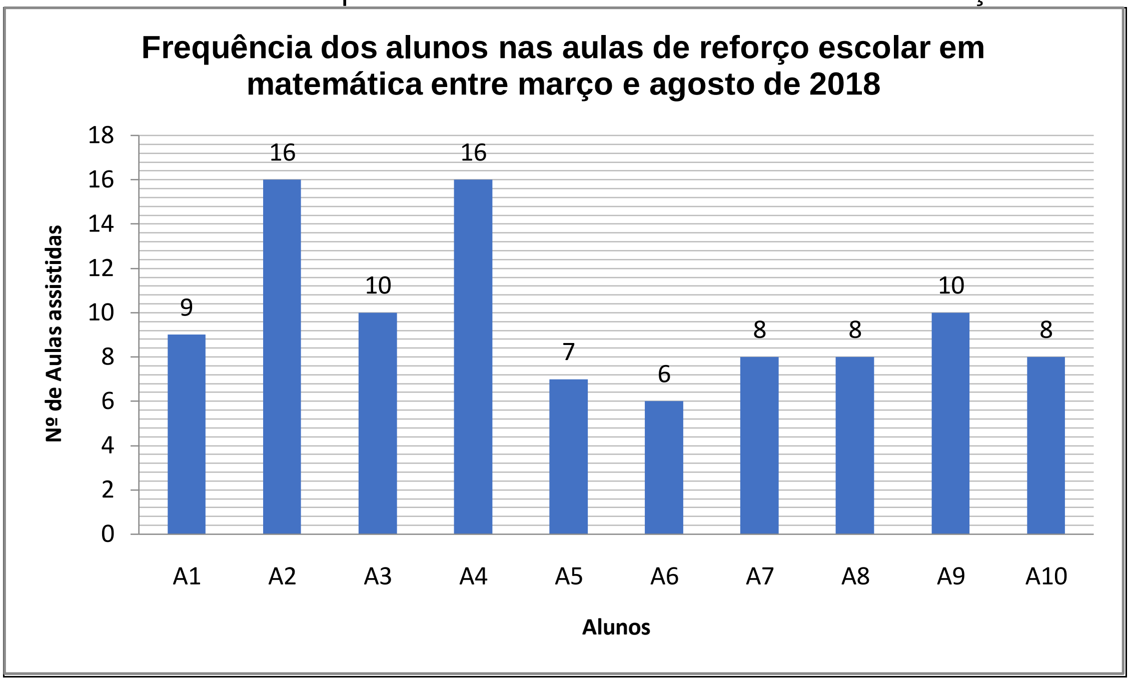
Fonte: Produção da própria autora.

Em cada dia, foram trabalhados problemas de tipos variados, mesclando questões verbais e não verbais, convencionais, de lógica, sem solução, com mais de uma solução ou com excesso de dados, a depender do conteúdo, a fim de identificar quais desses tipos eram preteridos pelos alunos, assim como em quais desses tipos a aprendizagem era facilitada e concretizada. Além disso, as metodologias Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da RP proposta por Allevato e Onuchic (2014) foram combinadas com os princípios para a resolução de problemas apresentados por Polya (1995).

Ao final de cada aula, por meio de uma entrevista focalizada[20], os alunos avaliaram as escolhas de cada problema aplicado, indicando, assim, tipos de problemas mais adequados às suas realidades e possibilitando o alcance de um dos objetivos específicos da pesquisa: a sistematização de uma prática de metodologia da Resolução de Problemas no reforço escolar de Matemática para alunos com dificuldade de aprendizagem em Matemática. O conteúdo dessa avaliação será descrito e analisado no capítulo de Resultados e Discussões.

O comparecimento dos alunos nas aulas de reforço é apresentado no gráfico 1:

Gráfico 1 – Frequência dos alunos durante as aulas de reforço.



Fonte: produção da própria autora.

Este gráfico mostra que, de um total de 16 aulas realizadas, cinco alunos participaram de mais da metade das aulas, três participaram exatamente da metade e dois alunos estiveram presentes em menos da metade das aulas. Para as discussões dessa pesquisa, procurou-se estabelecer uma relação entre essas frequências e o possível desenvolvimento dos alunos no decorrer das aulas de reforço.

3.1.3 Descrição das aulas de reforço

[20] Esse tipo de entrevista é o menos estruturado possível, "todavia, enfoca um tema bem específico, onde o entrevistador permite ao entrevistado falar livremente sobre o assunto, mas quanto este se desvia do tema original, esforça-se para sua retomada" (GIL, 1999, p. 120).

As aulas de reforço contemplaram três conteúdos matemáticos separados em blocos de problemas. O primeiro tratou das operações com números positivos e negativos; o segundo, das expressões numéricas; e o terceiro contemplou as equações de 1º grau. A escolha dos problemas se deu obedecendo não apenas aos conteúdos, mas aos tipos classificados por Stancanelli (2011) e Souza e Guimarães (2015) a partir das predileções apontadas pelos alunos no decorrer das aulas. Cada aula será descrita a seguir, destacando os pontos relevantes para a análise dessa pesquisa.

3.1.3.1 Operações com números positivos e negativos

a) Aula 1 – Dia 14 de março de 2018

A aula teve início às 08 horas da manhã, com a presença de quatro alunos (A1, A2, A3 e A4). Foi explicado novamente do que se tratava o projeto e quais seus objetivos e solicitei que a avaliação diagnóstica inicial (APÊNDICE A) fosse realizada.

A avaliação continha 11 questões, das quais 10 eram problemas matemáticos que abordavam operações com números positivos e negativos, equações algébricas, expressões numéricas, razão, proporção, operações fundamentais e uma questão com comando simples de expressão algébrica com números inteiros. Solicitei que eles se esforçassem em responder a todas as questões, deixando sempre registrados os cálculos, os esquemas ou gráficos utilizados para chegar à resposta. Caso achassem que nunca tinham estudado um determinado assunto, eles deveriam explicitar isso na questão.

Embora não tenha sido estipulado um tempo limite para a resolução, após 40 minutos respondendo à avaliação diagnóstica, os quatro disseram ter feito o que podiam e devolveram as questões. Foi dado início aos trabalhos com a dinâmica da “Ilha Deserta” (ANEXO A), em que cada participante deveria escolher um objeto que levaria para uma ilha deserta e eu diria se ele poderia ou não levar tal objeto seguindo um critério pré-estabelecido – no caso, que o objeto escolhido tivesse seu nome começando com a mesma letra da cor de suas camisas.

Inicialmente, eles tiveram dificuldade em pensar em qualquer objeto. Depois, só falaram de objetos ligados a sobrevivência, que faziam parte de sua rotina ou que estavam às suas vistas. Após a sexta rodada, o aluno A4, que vestia preto, falou que levaria uma pedra; depois uma palha. Achei que ele estivesse começando a entender a lógica, o que não se mostrou real. Foi preciso realizar várias intervenções, como:

> P: Você não levaria, mas outra pessoa do grupo, sim.

Em alguns momentos, pareciam que já tinham compreendido a lógica, mas tinham medo ou receio de falar, demonstrando muita insegurança. A impressão era de que eles achavam que não conseguiam pensar corretamente sem a ajuda de terceiros. Finalizei pedindo que me descrevessem suas blusas e relacionasse isso aos objetos autorizados a levar para a ilha. Só então eles compreenderam a relação oculta. Então mostrei a eles a necessidade de abrir a mente e expandir os pensamentos e o raciocínio para além daquilo que se vê e ao que eles estão habituados.

Dando prosseguimento à aula, os alunos foram agrupados em duplas e cada indivíduo recebeu uma cópia do primeiro problema:

> Jô, Pat e Cris resolveram fazer um piquenique e combinaram levar sanduíches para o almoço. Jô levou 3 sanduíches, Pat levou 2 e Cris se esqueceu do combinado e não levou nenhum. Assim, resolveram repartir os sanduíches que tinham levado igualmente entre as três, mas cobraram de Cris R$ 5,00 por sua parte. Que parte dos R$ 5,00 recebeu Jô? E Pat? (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 89)

Expliquei qual seria o procedimento que deveriam usar para resolver o problema. Primeiro, cada aluno faria a leitura individualmente e pensaria em uma maneira de responder. Depois, socializaria seu raciocínio com seu par e, juntos, proporiam uma resolução com a resposta. Em seguida, iríamos para a plenária e um membro de cada dupla exporia, no quadro, como chegaram à sua resposta.

Embora o primeiro problema contivesse valores simples, sua resposta não era tão óbvia e imediata. Eles precisariam entender que as mesmas amigas que levaram os sanduíches também os comeram, além de terem levado quantidades diferentes e, portanto, receberiam valores diferentes. O fato é que nenhum dos quatro alunos conseguiu pensar nisso. As duas duplas não viram sequer necessidade de registrar os cálculos, e ambas deram a mesma resposta: R$ 2,50 para cada uma! Foi então que li para eles a história “A divisão simples, a divisão certa e a divisão perfeita”, do livro “O Homem que Calculava”, de Malba Tahan (2000, p.21) (ANEXO B).

Após a leitura, perguntei se eles viam alguma semelhança entre o problema apresentado e a história. Todos disseram que sim, mas nenhum conseguiu ir ao quadro para fazer os cálculos. Expliquei, usando desenhos e aritmética, como deveria ser a divisão perfeita dos R$ 5,00 entre as duas amigas. Para finalizar a aula, distribuí a cada aluno, uma cópia do segundo problema:

> (OBMEP-2005) As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R$ 43,00 e Aurora, com R$ 68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora, respectivamente?
>
> A) R$18,50 e R$18,50;
> B) R$0,00 e R$37,00;
> C) R$25,00 e R$37,00;
> D) R$12,00 e R$25,00;
> E) R$6,00 e R$31,00.

Este problema exigia um raciocínio semelhante ao do primeiro. Bastava que eles fizessem a conexão, mas apenas uma das duplas o fez.

Quando convidado a ir ao quadro, A4 foi primeiro e registrou seu raciocínio. Ele somou as duas contribuições (68 + 43 = 111) e dividiu o resultado por 3, encontrando corretamente o valor de cada livro. Depois disso, não conseguiu mais saber o que fazer para encontrar a quantia que cada amiga receberia. Ele voltou para o lugar e foi pensar mais um pouco, enquanto A3 ia ao quadro registrar sua resposta. Ela, assim como A4, somou 68 com 43, obtendo como total 111, depois registrou a divisão de 111 por 3 usando o símbolo de porcentagem (%), mas achando o valor correto, que era de R$ 37,00 (só usou o símbolo R$ ao final da conta). Por fim, fez uma subtração de 68 – 37 = 31,00 e anotou que “Aur” (Aurora) receberia R$ 31,00 e que Ana receberia 6,00 (para isso ela não montou mais nenhum algoritmo, fez mentalmente), conferindo com uma das alternativas dadas pela questão. Finalizei o encontro discutindo as semelhanças e diferenças entre os dois cálculos realizados e os equívocos cometidos nos registros desses cálculos, como o uso do símbolo da porcentagem quando deveriam utilizar o símbolo da divisão.

b) Aula 2 – Dia 21 de março de 2018

Os dias que antecederam essa aula mostraram-se agitados e conflituosos devido à ameaça e à concretização de paralisação das aulas por parte dos alunos da escola e de outras duas instituições de ensino do município, que se uniram com o intuito de reivindicar melhores condições de estudos, como o conserto e a reposição de ventiladores nas salas de aula, a recolocação do telhado do pátio, o conserto do piso da quadra, a melhoria na oferta da merenda e a superlotação das salas de aula devido ao reordenamento da rede municipal, que começou a ser feito neste mesmo ano.

Confesso que fiquei apreensiva quanto ao comparecimento dos alunos para a aula de reforço. Qual foi minha surpresa quando não só compareceram, mas o número de presentes aumentou! Desta vez, os 10 alunos selecionados compareceram, mais um que pediu para participar da pesquisa. Assim, formamos três grupos de três e um grupo de dois alunos, procurando mesclar meninos e meninas em todos eles.

Iniciei a aula com a dinâmica "Como salvar os sobreviventes" (ANEXO C). Entreguei a cada aluno uma cópia do texto e pedi que, em grupo, eles lessem, discutissem e propusessem uma ordem de prioridade para os objetos listados no texto, seguindo do mais útil até o considerado desnecessário. As sequências apresentadas foram as mais variadas possíveis, embora nenhum deles tenha colocado como prioridade o espelho como sendo extremamente útil. Metade dos grupos colocou como prioridade máxima a água e a outra metade colocou as lãs de comida. Em segundo lugar, inverteram a ordem desses itens para colocar o mapa da região em terceiro lugar. Os demais itens ocuparam posições variadas por todos os grupos. Chamou minha atenção um grupo que colocou os pacotes de sal em quarto lugar, enquanto todos os outros perceberam que o sal, naquela situação, era extremamente inútil e prejudicial. Quando indagados sobre o porquê dessa escolha, eles disseram que usariam os pacotes de sal para escrever SOS, deixando uma mensagem de socorro para que pudessem ser encontrados. Aí ficou claro que eles desconheciam as informações básicas ou não se atentaram a elas. Comecei a fazer as devidas intervenções e, juntos, pouco a pouco, conseguimos listar todos os itens de acordo com suas prioridades para aquela situação.

Após finalizar a dinâmica, apresentei aos alunos as quatro etapas para a resolução de um problema matemático proposto por Polya, a saber: 1) Compreensão do problema; 2) Elaboração de um plano para resolução; 3) Execução do plano; e 4) Análise retrospectiva. Expliquei cada uma das etapas, procurando adaptar a linguagem de modo a favorecer a compreensão de todos e usando um vocabulário que estivesse o mais próximo possível da realidade deles, a fim de que percebessem a importância desses passos para alcançar o objetivo de encontrar a solução para aquele ou qualquer outro problema.

Pedindo que procurassem sempre se lembrar dessas quatro etapas, distribuí a cada aluno o problema 3 (APÊNDICE B) para que fizessem a leitura individual, socializassem com os demais componentes do grupo sobre o plano que pensaram para a resolução e realizassem a execução e a verificação desse plano. Nesse ínterim, caminhei pela sala – que, a propósito, tornou-se pequena para aquele número de alunos presentes –, estimulando o raciocínio e fazendo pequenas intervenções. Não levou muito tempo até que todos sinalizassem o término. Partimos, então, para o registro das respostas no quadro e, em seguida, abrimos a plenária.

Um grupo não conseguiu descobrir o segredo na colocação dos números e atribuiu valores aleatórios às letras. Os outros três grupos descobriram o segredo, porém cometeram erros ao realizar as adições com números positivos e negativos. Apresentei a eles a opção de utilizar a técnica das bolinhas coloridas que se anulam, em que cada número positivo poderia ser representado por bolinhas azuis e cada número negativo seria representado por bolinhas vermelhas. Cada bolinha vermelha elimina uma bolinha azul e as que sobram são exatamente o resultado da adição. Depois de trabalhar com alguns exemplos, pudemos formalizar o conceito de adição e subtração de números positivos e negativos. Dois alunos perceberam que, quando todas as bolinhas eram da mesma cor, deveriam somar as quantidades e colocar o sinal correspondente à cor, e que quando as bolinhas tinham cores diferentes, deveriam subtraí-las e colocar o sinal correspondente à cor que tinha mais bolinhas.

Assim, chegamos à formalização de que, na adição de números positivos e negativos, quando os números possuem mesmo sinal, devemos adicionar e manter o sinal, e de que quando os números têm sinais diferentes, devemos subtrair e manter o sinal do numeral maior. Os alunos classificaram esse problema como mediano, embora eu o tivesse classificado como fácil.

Então, apresentei a eles o problema 4 (APÊNDICE B). Para a resolução deste, eles deveriam [somar 10 + 50 e subtrair 17] para descobrir que o troco deveria ser de 43 reais. Em seguida, [somar 10 + 10 e subtrair 17], chegando a 3. Comparando os dois resultados, deveria ser feita a operação 43 – 3 para se obter como resultado o prejuízo. Essa era apenas uma das maneiras de resolver. Surpreendi-me quando um dos grupos fez apenas uma operação: 50 – 10 = 40.

Após a explicação dos grupos, os outros alunos também compreenderam o raciocínio e perceberam que podem existir mais de uma maneira de chegar ao resultado correto e que isso depende das conexões que cada um faz.

> Os alunos, ao confrontarem argumento, têm a oportunidade para participarem na negociação de resolução da tarefa ao descentarem as suas posições iniciais com o objectivo de compreender os argumentos do parceiro e, simultaneamente, explicarem a mobilização de competências e os conhecimentos necessários para a elaboração da co-construção da estratégia adaptada. A diversidade das experiências anteriores dos alunos revela-se um recurso fundamental para este processo de negociação e de construção da estratégia a seguir (CARVALHO, 2009, p. 33)

Para finalizar a aula, entreguei a cada aluno de cada grupo um envelope contendo um problema que estava separado em tiras. Eles teriam que organizar as frases numa sequência lógica, de forma a compor um problema e, em seguida, resolver o problema montado.

Os grupos demoraram muito mais tempo do que eu previa nessa questão, pois tiveram dificuldades em traçar um plano para a resolução. Isso aconteceu porque as tiras foram organizadas por eles em uma sequência sem sentido e que não obedecia às regras ortográficas, levando à conclusão de que as dificuldades de aprendizagem poderiam estar associadas às lacunas na aprendizagem da língua materna.

A resolução proposta por um dos grupos surgiu apenas após a socialização dos demais grupos em plenária. Quando tiveram contato com a ordem correta das sentenças, conseguiram resolver o problema corretamente, depois de novas trocas de ideias. Após todos os grupos terem apresentado novamente sua resolução, a aula foi encerrada, pois o tempo já havia acabado.

c) Aula 3 – Dia 28 de março de 2018

Como era véspera de feriado, nem todos os alunos compareceram, mas os que estiveram presentes estavam bastante participativos. Formamos quatro duplas de trabalhos para resolver os problemas 6 a 10, que constam na lista em apêndice.

Demos início à aula com a distribuição do problema 6 (APÊNDICE C). As discussões iniciais giraram em torno da interpretação do enunciado. Percebi que muitos deles (três duplas) buscaram fazer uma representação mental da cena descrita para depois adequar essa representação aos dados da tabela, conforme diálogo a seguir:

> A1: Não entendi porque nas paradas tem registro de números positivos e negativos!
>
> A2: Deve ser porque uns passageiros sobem e outros descem!
>
> A1: Então devemos fazer (+) para quem sobe e (–) para quem desce! Mas o que fazemos primeiro?
>
> A2: Acho que devemos tirar os que descem primeiro, se não o ônibus ficará muito lotado e vai dar confusão!
>
> A1: Então a primeira conta é 45 – 20 = 25, depois a gente faz 25 + 35 = 60. Eita! O ônibus vai para a segunda parada lotado! Muita gente em pé!
>
> A2: Não tem problema! Depois desce de novo!
>
> P: E se for o caso de inverter a ordem? Primeiro colocando os passageiros que sobem e depois os que descem, será que faria diferença? O resultado seria outro?
>
> A2: Aí temos que testar! Então seria 45 + 35 = 80, depois 80 – 20 = 60. O resultado é o mesmo, mas dá muita confusão dentro do ônibus!

Aqui, eles continuavam fazendo a representação mental da cena.

> A1: Então é melhor a gente tirar primeiro e somar depois! Aí fica 60 – 28 = 32 e 32 + 27 = 59. Agora 59 – 12 = 47 e 47 + 5 = 52. Dá 52 pessoas! Gente pra caramba dentro de um ônibus!

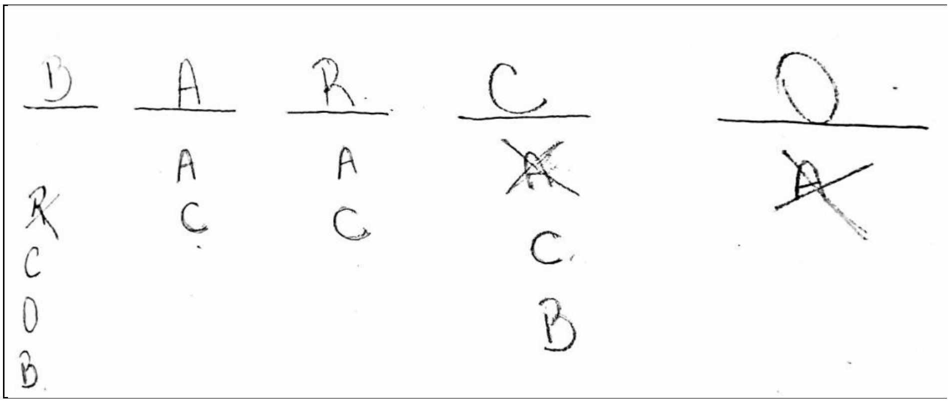
Outra dupla apresentou raciocínio diferente. Encontraram primeiro as diferenças entre os passageiros que subiam e desciam, adicionaram esses resultados e depois acrescentaram a quantidade inicial de passageiros. Poderiam também ter adicionado todos os números positivos, depois todos os números negativos, e por último ter subtraído os valores encontrados, já que seriam de sinais diferentes.

Inicialmente, o problema 7 (APÊNDICE C), que tratava puramente de lógica, causou incômodo.

> A9 – Mas esse negócio não tem número nenhum! Como eu vou fazer conta?
>
> A4 – Talvez a resposta não contenha números, uai!

Nas tentativas de resolução, percebi que eles estavam indo por tentativa e erro. Apresentavam uma solução e perguntavam se estava certo. Estando errado, alteravam a ordem da resposta com o intuito de, em algum momento, chegar à resposta certa. Então também notei que eles não estavam fazendo a retrospectiva proposta por Polya (1995) e precisei fazer intervenções até que conseguissem bolar uma estratégia, como fez uma das duplas, conforme Figura 4.

Figura 4 – Resolução do problema de lógica da dupla A4 e A5.



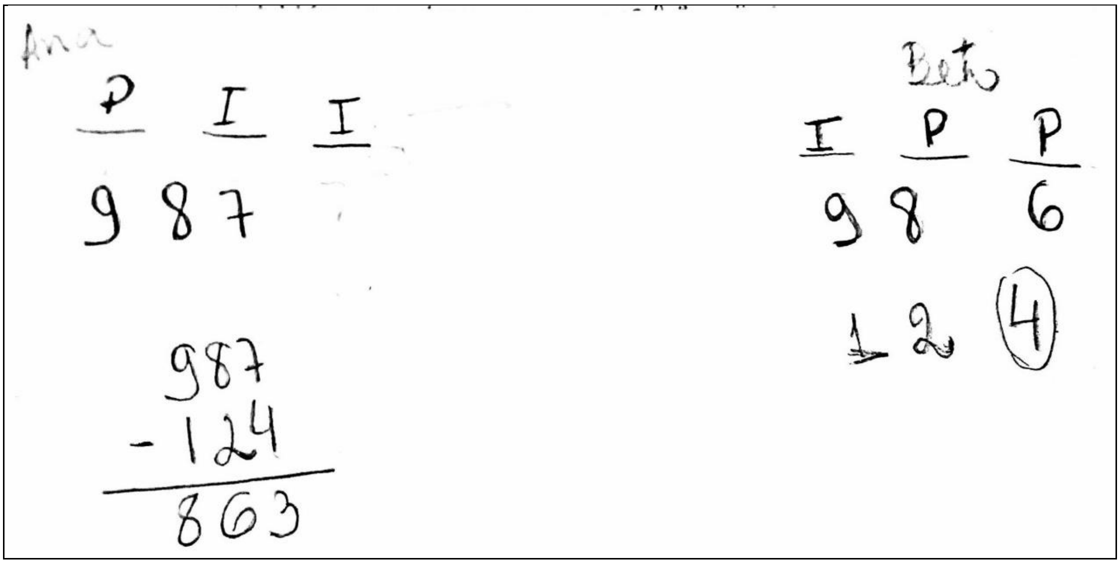
Fonte: a própria autora.

A4 explicou que, para economizar tempo e espaço, adotaria a inicial do nome para representar cada irmão e traços para representar a posição que cada um teria em relação ao outro. Depois, foi seguindo dica por dica e vendo qual posição cada um dos irmãos poderia ou não ocupar. A reação deste aluno após a resolução é descrita a seguir:

> A4: Deu muito trabalho porque a gente tinha que ficar o tempo todo voltando e lendo o problema. Escrevendo, riscando e começando de novo. Demorou muito, mas no final, quando a gente conferiu item por item, tudo pareceu se encaixar. Minha cabeça fundiu!

Os estudantes não tiveram dificuldade para resolver o problema 8 (APÊNDICE C) e o classificaram como fácil. Já com os problemas 9 e 10 (APÊNDICE C) eles tiveram um pouco mais de dificuldade e gastaram mais tempo, necessitando de mais de intervenções, principalmente porque notei que eles não compreendiam claramente a diferença entre número, numeral e algarismo. Quando expliquei a diferença, A4 e A5 perceberam que poderiam usar a mesma estratégia que usaram para resolver o problema de lógica, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Resolução do problema 9 pela dupla A4 e A5.



Fonte: a própria autora.

Para o problema 10 (APÊNDICE C), todas as duplas começaram fazendo todas as multiplicações que ali constavam. Somente uma dupla (A5 e A9) percebeu, ao final das multiplicações, que todos os resultados terminavam em 5 porque um dos fatores era 5. Isso mostra que eles dominavam os múltiplos e divisores e que esse domínio de pré-requisitos facilitava o desenvolvimento de seu raciocino e de novas aprendizagens.

d) Aula 4 – Dia 04 de abril de 2018

Iniciei a aula pedindo que formassem grupos diferentes das aulas anteriores. Houve certa resistência inicialmente, mas aos poucos eles aceitaram a proposta. Foram formados, então, três grupos de três pessoas.

Distribuí o problema 11 (APÊNDICE D) – “Fazendo Sentido” –, que exigia tanto raciocínio lógico quanto o domínio das operações com números positivos e negativos. Os três grupos o classificaram como nível de dificuldade médio e levaram 40 minutos para conseguir responder. A insegurança da parte deles mostrou-se evidente quando eles recorriam a mim a todo momento, tentando se certificar de estarem certos ou errados.

No momento da plenária, houve certa surpresa quando perceberam que existia mais de uma resposta:

> A7: Como pode isso? As duas respostas estão certas! Não é possível! Esse problema está errado!

Isso indica que eles só estão acostumados a problemas convencionais, que possuem resposta única. Foi então que expliquei que existem diversos tipos de problemas, e que por isso é tão importante a etapa da verificação que Polya (1995) propõe.

Quando os três grupos já tinham colocado suas respostas no quadro, pedi que eles observassem as três respostas em busca de algum padrão ou curiosidade. Eles chegaram à conclusão de que existia mais de uma resposta correta para o problema, pois poderiam variar a posição dos números (–5) e 6, assim como a posição superior direita poderia adotar infinitos valores.

Encerradas as discussões, passamos para o problema 12 (APÊNDICE D). Este problema deu realmente muito trabalho e nenhum grupo conseguiu encontrar a resposta. Após 30 minutos de tentativas e mediações, todos os grupos o classificaram como muito difícil e percebi desânimo em todos. Por isso, achei melhor deixar que cada um tentasse encontrar a resposta em casa e trouxesse a solução na próxima aula.

A terceira questão do dia – problema 13 (APÊNDICE D) – tinha a mesma característica de quebra-cabeças, com um enunciado muito curto, o que, segundo eles, nem parecia um problema:

> A7: Para mim, problema tem que ter uma historinha!
>
> A9: Mas isso vai dar trabalho, então é problema! (Risos).

Um grupo repetiu as posições dos sinais em todas as linhas e não conseguiu desenvolver mais nada. A interpretação errada claramente impediu que avançassem. Mesmo que eu chamasse a atenção para isso, eles não compreendiam que a posição dos números e sinais poderia variar. O outro grupo repetia números na mesma coluna ou na linha. Após meia hora, apenas um grupo conseguiu chegar à solução. Eles ficaram nervosos e impacientes uns com os outros, mas quando conseguiram a resposta, ficaram muito satisfeitos.

Ao expor sua resposta, um dos grupos explicou que resolveram por tentativa e erro, mas que só conseguiram adiantar a resposta depois que chamei a atenção para a posição dos sinais (que não precisava ser fixa). Dois grupos – os que não conseguiram resolver – classificaram como muito difícil, e o grupo que conseguiu o classificou como difícil.

Perguntei a eles o que acharam daqueles problemas trabalhados e todos disseram que preferiam os problemas com “historinhas” – os quais classificamos como verbais.

e) Aula 5 – Dia 11 de abril de 2018

Iniciamos a aula retornando ao problema da trilha, com números de 1 a 9, o que eles julgaram ser muito difícil durante a aula anterior e que, devido ao tempo e ao desânimo, não conseguiram completar. Apenas um aluno voltou com a trilha completa, porém incorreta, e relatou:

> A4: Eu quebrei minha cabeça. Tentei, tentei e não consegui! Sei disso porque usei a calculadora e não dá o resultado!

Sugeri, então, que lembrassem sempre das quatro etapas para a resolução de um problema. Quando perguntei se eles haviam compreendido o problema, o aluno A4 disse que sim, mas que não tinha conseguido traçar um plano que desse certo. Foi então que dei algumas sugestões e mesmo assim não alcançaram sucesso. Para não frustrá-los, apresentei a solução. Quando terminei de conferir com eles a sequência correta dos números, um aluno disse:

> A3: Esse é um daqueles problemas que só pode ter uma resposta. Não é, professora?

Nesse momento percebi que, além dos conteúdos matemáticos, eles estavam, mesmo sem perceber, classificando os tipos de problemas. Dando continuidade, distribuí entre os alunos o problema 14 (APÊNDICE E) – “Número do cavaleiro” –, que tratava de uma equação apresentada de forma animada.

Eles não tiveram dificuldades em traçar uma estratégia para a resolução. Dois grupos imediatamente perceberam que, por se tratar de uma adição de três parcelas, o soldado azul só poderia ser o maior número possível (4). Daí a chegar à resposta final, não demoraram nada. Já o terceiro grupo, que não fez essa conexão, precisou de mais tempo, pois foram fazendo por tentativa e erro. Eles classificaram esse problema como fácil e mostraram satisfação em resolvê-lo.

Com ânimos aguçados, apresentei-lhes o problema 15 (APÊNDICE E), que tinha a mesma proposta do problema anterior, porém envolvia adição com números positivos e negativos. Todos os grupos resolveram por tentativa e erro, mas perceberam a aplicação das propriedades da adição e o conceito de oposto de um número. Ao todo, demoraram 30 minutos para encontrar a resposta, permanecendo inseguros a todo momento, sempre perguntando se o que estavam fazendo estava certo ou se os valores encontrados eram os corretos. Eles mostravam se esquecer da quarta etapa de Polya (1995) – a verificação.

O último problema do dia – problema 16 (APÊNDICE E) – demorou mais que o esperado para ser resolvido, mas nenhum grupo ou aluno desistiu até conseguir resolvê-lo. Dois grupos começaram a resolver por tentativa e erro. Um grupo procurou primeiro por alguma lógica e estipulou que a melancia, por ser a mais cara, deveria ser a fruta de que levariam apenas uma unidade.

Um grupo precisou de intervenção para lembrar de que a soma não daria exatamente R$ 15,00, pois receberia troco. O grupo 3 sabia que o valor total daria menos de R$ 15,00, mas deixou para verificar o troco somente no final.

Dentre os três problemas apresentados, o de que eles disseram gostar mais foi o último, classificando-o como de nível médio. Eles classificaram o primeiro como fácil e o segundo como difícil. Quando pedi que explicassem o porquê de gostarem mais do último, eles disseram:

> A7: Porque consegui me ver na feira, fazendo essas contas todas! (Risos)

> A3: Faz mais sentido pra gente!
>
> A4: Porque tem uma certa história... Aí a gente imagina a cena e consegue bolar uma estratégia.

f) Aula 6 – Dia 18 de abril de 2018

Como nas aulas anteriores, os nove alunos presentes relataram ter mais afinidade com os problemas verbais. Procurei trazer para essa aula cinco problemas desse tipo que envolvessem situações diversas de aplicação de números positivos e negativos, como perda e ganho de pontos, movimentação financeira e altura e profundidade.

Um fato que me chamou muito a atenção foi a prontidão dos alunos em formarem os grupos sem o meu comando. Chegando ao local do reforço, eles imediatamente formaram os grupos, como se a metodologia adotada nas aulas anteriores já estivesse internalizada.

Perguntei se era preciso relembrar os passos para a resolução de um problema ou as etapas que o grupo seguiria no desenvolvimento da aula e todos responderam que era desnecessário, pois sabiam o que precisavam fazer. Distribuí, então, a primeira atividade do dia – o problema 17, descrito a seguir:

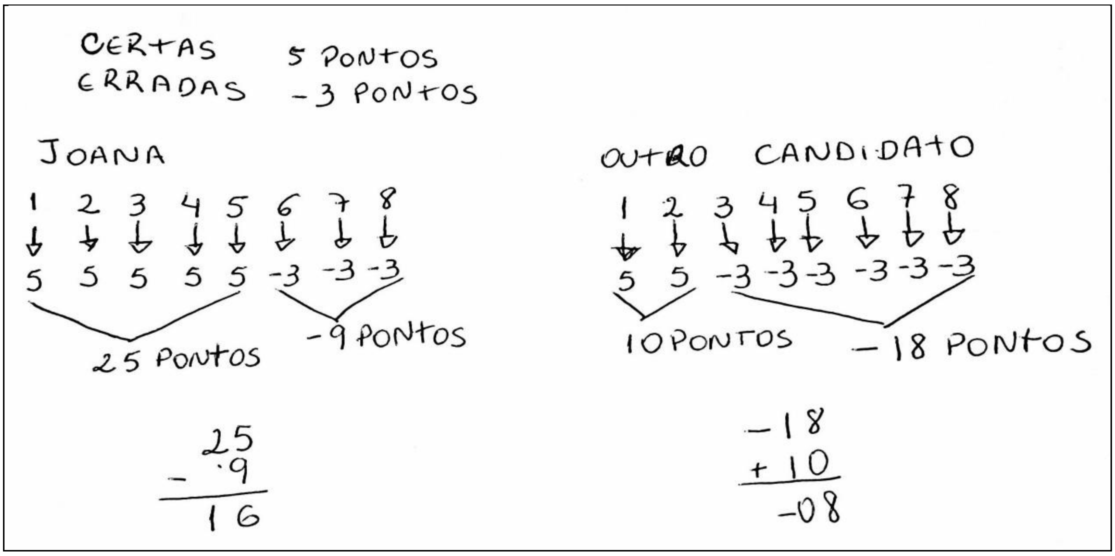
> “Joana participou de um teste seletivo em que as questões respondidas corretamente valiam 5 pontos e as respondidas incorretamente, –3 pontos. Sabendo que, de um total de oito questões, Joana respondeu a 5 questões corretamente e a 3 incorretamente, quantos pontos ela obteve nesse teste? Sabendo que outro candidato respondeu a 2 questões corretamente e a 6 incorretamente, quantos pontos ele obteve no teste? (adaptado)

Ao realizarem a leitura individual e coletiva, percebi que eles tiveram dificuldade para entender de qual operação a questão tratava. Eles discutiam sobre ser adição, subtração ou multiplicação. Sugeri que cada grupo apresentasse um modo diferente de resolução, afinal, cada um tem o seu próprio modo de pensar.

Um dos grupos apresentou uma resolução bem organizada, o que favoreceu o desenvolvimento do pensamento até chegar à resposta correta. O esquema apresentado por eles pode ser observado na Figura 6.

Eles começaram anotando as informações apresentadas no problema, separando as duas situações propostas e buscando uma estratégia, mesmo que esta não envolvesse um algoritmo convencional. Anotaram o número de questões e, para cada questão, foram relacionando a pontuação positiva para os cinco acertos e negativa para as três questões erradas. Depois, perceberam que poderiam somar os pontos positivos, os pontos negativos e depois subtrair um do outro, já que se tratavam de valores com sinais opostos.

Figura 6 – Resolução do problema 17 pelo trio A2, A4 e A7.



Fonte: a própria autora.

O segundo grupo não conseguiu ter a mesma organização do primeiro. Tanto a resolução quanto as explicações ficaram confusas e o resultado alcançado não foi o correto. Tentaram resolver usando algoritmos de adição, subtração e multiplicação, mas, ao final, percebi que alguns valores presentes naquela resolução eram uma cópia dos resultados do outro grupo. Na verdade, eles não conseguiram apresentar uma resposta válida.

O terceiro grupo apresentou uma proposta de resolução mais direta, com multiplicação e adição de números positivos e negativos, conforme formalizações realizadas em aulas anteriores. Primeiro, eles fizeram as multiplicações 5 . (+5) = 25 e 3 . (-3) = –9. Depois, realizaram a adição 25 + (–9) = 16 para chegar aos pontos obtidos por Joana. Para o outro candidato, fizeram 2 . (+5) = 10 e 6 . (–3) = –18 e, por último, 10 + (–18) = –8. Para essa proposta de resolução, o aluno A9 tomou a iniciativa da liderança:

> A9: Já fizemos alguma coisa parecida antes. É fácil, basta fazer multiplicação e adição, lembrando daqueles “lances” dos sinais!

O problema seguinte, embora fosse do tipo verbal, possuía um enunciado mais curto e direto, o que não impediu que ideias fluíssem. O problema 18 era:

> O Banco Fortuna deixou de receber de um determinado cliente seis parcelas de R$ 1200,00 referente a um empréstimo. Desconsiderando os juros, de quanto foi o prejuízo do banco? Como você representaria tal situação usando números positivos e negativos?

O primeiro grupo a ir ao quadro registrou operação: 6 . 1200,00 = 7200,00, acrescentado o sinal negativo apenas quando um colega do outro grupo questionou:

> A9: Mas não devia ser prejuízo? Assim fica parecendo que ele ganhou 7200 reais!

O trio A2, A4 e A7 apresentaram uma resposta mais convencional: 6 . (–1200) = –7200. Explicaram que, de cara, colocaram (–1200) por se tratar de um prejuízo. A dupla A6 e A9 foi além disso quando registrou (–6) . 1200 = –7200. Perguntei por que eles colocaram o 6 como negativo ao invés do 1200 e eles responderam:

> A9: Se eles tivessem recebido as seis parcelas de 1200, teriam um lucro de 7200. Aqui os dois valores são positivos, por isso o resultado deve ser positivo. Mas eles deixaram de receber seis parcelas, por isso achamos que o seis é que deveria ser negativo. De qualquer forma, o resultado dá negativo, o que indica um prejuízo, não é verdade?

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, entreguei-lhes a terceira questão do dia: o problema 19 (APÊNDICE F). Aqui, as discussões giraram em torno da interpretação da situação. Alguns ficaram em dúvida na hora de fazer o registro e o fizeram como se fosse da loja; outros, mais atentos, registraram como sendo o saldo deles mesmo.

O número reduzido de alunos nas aulas de reforço mostrou ser favorável à aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas. A constante troca de ideias gera muita confusão na aula, o que pode ser potencializado com mais alunos. Além disso, quanto maior o número de alunos, menor será a possibilidade de o professor atender às necessidades específicas de cada um, principalmente os que têm mais dificuldades de aprendizagem.

Quanto aos dois problemas seguintes (20 e 21, APÊNDICE F), dois grupos conseguiram resolvê-los adotando os mesmos raciocínios dos problemas anteriores. Um grupo mostrou mais dificuldade e precisou de intervenções tanto para a compreensão do problema e de algumas palavras desconhecidas por eles quanto para a aplicação dos conceitos formulados anteriormente.

No problema do mergulhador, o trio constituído por A2, A4 e A7 se confundiu com a palavra "imergir" e por isso se equivocou quanto ao movimento feito pelo mergulhador – consequentemente, a operação a ser realizada estava errada. Também teve dificuldade com a expressão "um terço". Os alunos não tinham segurança de que isso significava uma divisão de quociente três. Foi preciso relembrá-los do conceito de frações e de que forma isso se aplicava àquele problema. Eles dividiram 27 por 3, chegando ao resultado 9. Mais uma vez, fiz uma intervenção para que eles compreendessem que o resultado deveria ser negativo, uma vez que se tratava de uma imersão.

No último problema, esse mesmo trio (A2, A4 e A7) conseguiu determinar quantos pontos Sandro perdeu nas três primeiras rodadas fazendo apenas o produto 3 . (–30), porém houve dificuldade em determinar com quantos pontos ele ficaria ao fim das três rodadas. Para eles, –90 já seria a resposta a essa pergunta, quando na verdade era necessário fazer a operação 40 + (–90). Ficaram mais confusos ainda ao tentar responder à última pergunta, que envolvia fração e adição.

g) Aula 7 - DIA 25 de abril de 2018

A semana de 23 a 27 de abril foi de provas em toda a escola. Talvez por isso o número de alunos presentes tenha sido bastante reduzido. Apenas dois alunos compareceram: os alunos A2 e A4. Enquanto aguardávamos por alguns minutos a chegada de mais alguém, eles me pediram informações e orientações sobre as provas do ENCCEJA – Exame Nacional de Certificação de Competências de Jovens e Adultos.

Já que na sala onde estávamos existia um computador disponível, pesquisamos a respeito das datas. Descobrindo que o período de inscrição já estava prestes a encerrar, aproveitamos aquele tempo para fazer as duas inscrições e pesquisar sobre modelos de provas dos anos anteriores. Obtivemos, ainda, a autorização da direção para imprimir esses modelos, os quais foram entregues a eles para que pudessem estudar e se preparar para o dia da prova.

Trabalhamos os problemas 22 a 25 em dupla. As quatro questões eram do tipo verbal e trabalhavam com números positivos e negativos, embora a última também contemplasse frações. No problema 25, os alunos apresentaram maior dificuldade, indicando outra fragilidade da aprendizagem.

Na primeira questão do dia, a 22 (APÊNDICE G), foi preciso pelo menos três leituras, inclusive com a minha intervenção, para que eles começassem a entender o que se pedia. Disseram estar com dificuldade por não conseguirem visualizar mentalmente a cena do problema, já que isso não faz parte da realidade deles. Desconsideraram a informação de que os valores da tabela indicavam milhões de reais, também por serem valores que fogem à suas realidades. Outra dificuldade também apresentada foi trabalhar com os dados em tabela. Eles se confundiam com as linhas e as colunas. Por exemplo, para responder quais setores teriam lucro no primeiro trimestre, ao invés de adicionar os valores de cada linha, eles somaram os valores de cada coluna. Por isso, houve a necessidade de algumas intervenções, a partir das quais conseguiram fazer os cálculos corretamente e determinar qual setor teria lucro, prejuízo ou mesmo nenhum dos dois. Para responder ao item b, perceberam que bastavam adicionar os resultados que já haviam sido encontrados anteriormente.

Na resolução do problema 23 (APÊNDICE G), eles só tiveram dificuldade em associar os pronomes aos personagens do problema. Após a leitura coletiva e mais algumas intervenções, não houve maiores dificuldades. Somaram primeiro os valores positivos de cada uma, depois os valores negativos e, por fim, subtraíram os valores encontrados, determinando que a equipe vencedora era aquela com pontuação positiva. Porém, para encontrar a diferença entre as pontuações, tiveram dificuldade em determinar a operação correspondente, uma vez que esta envolvia um termo positivo e outro negativo.

No problema 24 (APÊNDICE G), houve dificuldade apenas no momento de redigir a expressão numérica envolvendo os valores. Eles compreenderam o problema e fizeram as operações corretamente, mas, na hora de transformar essas contas em uma simples expressão, necessitaram de mais intervenções.

Como tínhamos pouco tempo restante e eles demonstraram muita dificuldade no último problema devido ao envolvimento de frações, distribuí a questão 24 (APÊNDICE G) e optei por explicar uma das resoluções, deixando que encontrassem uma resposta para a última pergunta do problema em casa.

h) Aula 8 – Dia 02 de maio de 2018

A aula teve início com um número reduzido de alunos: apenas seis estavam presentes. Como percebi que alguns já estavam se acostumando com os outros, intervim na escolha das duplas, procurando ao máximo formar pares que ainda não tinham trabalhado juntos, o que permitiu que eles tivessem uma maior troca de experiência e conhecimento entre si.

Distribuí o problema 26 (APÊNDICE H) e observei as discussões em torno da interpretação. A dupla A2 e A6 se confundiu sobre quais números apresentados no problema deveriam ser usados. Foi preciso que eu os estimulasse a ler com mais atenção a última frase e os ajudasse a retirar dela a dica necessária para a resolução. Depois disso, outra dúvida ainda recorrente era sobre qual número ou temperatura seria menor ou maior.

As respostas que surgiram mostraram que eles ainda faziam muita confusão com o uso dos sinais, pois fizeram a operação 70,7 – 93 = 22,3, esquecendo de registrar o negativo da temperatura menor, além do negativo do resultado.

Sem aprofundar nas discussões em torno do problema 26, passamos para o problema seguinte, pois este ajudaria na formalização do conceito de subtração de números positivos e negativos. O problema 27 (APÊNDICE H) também tinha como temática a variação de temperatura. Assim, eles poderiam usar a mesma estratégia adotada no problema anterior – e foi o que fizeram, porém após diversas intervenções.

Quando conseguiram chegar à conclusão adequada acerca de como realizar a operação para solucionar aquele problema, formalizei a regra dos sinais para adição e subtração com números positivos e negativos e passamos para o problema 28. Após a primeira leitura, um dos alunos exclamou que este era um problema de História e não de Matemática.

Ao caminhar pela sala, percebi que, antes de estipular um algoritmo ou operação a ser realizada, uma das duplas grifou as informações necessárias para a resolução e interpretou corretamente os sinais que cada número teria. Associado a isso, os componentes fizeram um esquema de linha do tempo para ajudar na operação. Com essa estratégia, facilmente chegaram à operação 1949 – (–1500) = 1949 + 1500 = 3449. Indagados sobre o porquê da soma, eles disseram que aplicaram a mesma ideia do primeiro problema do dia: que, para subtrair um número negativo, na verdade teriam que adicioná-lo. Isso, na verdade é a formalização da adição de número oposto.

Os demais grupos levaram mais tempo para alcançar o resultado correto, mas todos conseguiram. Julgaram o problema como fácil, principalmente depois de já terem feito outros parecidos antes.

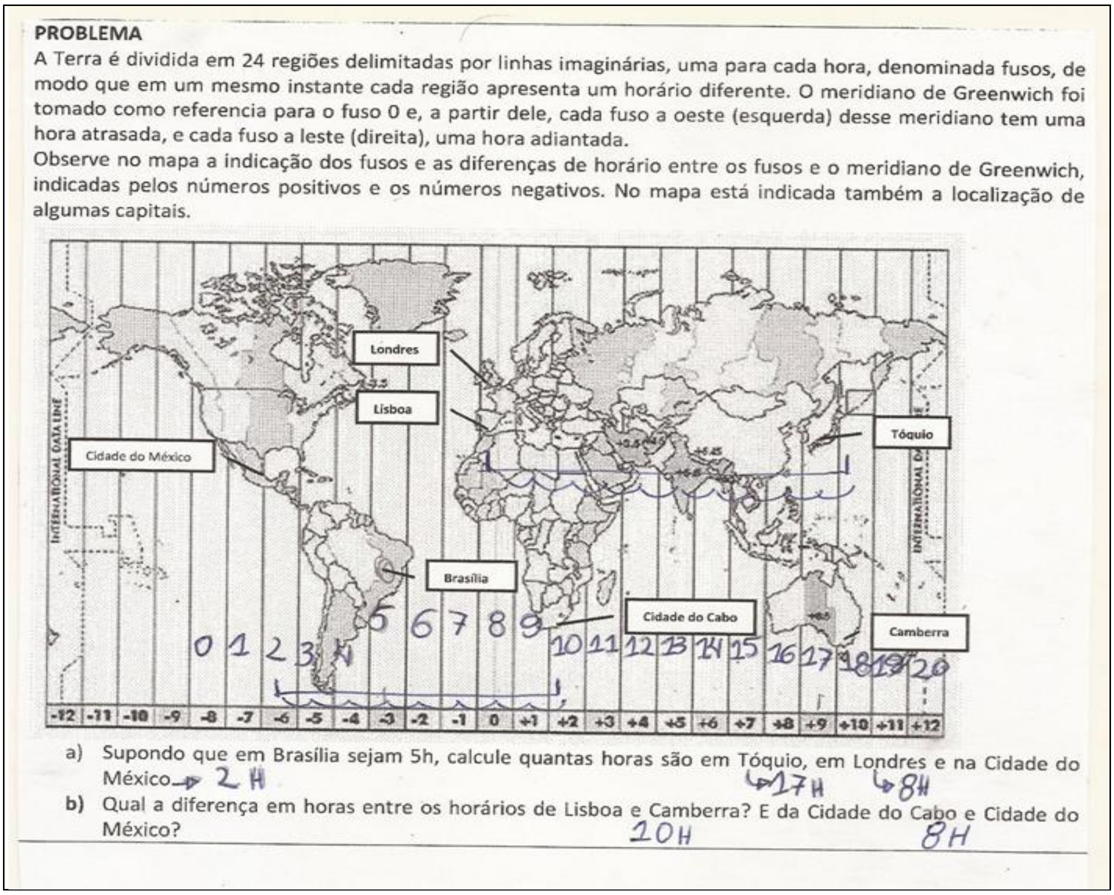
Para o problema 29 (APÊNDICE H), percebi que todos esbarraram no termo “média”. Foi preciso que eu os explicasse o que é e como calcular a média de valores. Depois disso, os incentivei a determinar quais operações deveriam fazer e qual seria a ordem de realização destas operações. Eles apresentaram duas maneiras diferentes de resolução, ambas chegando ao resulto certo.

O último problema do dia, a questão 30 (APÊNDICE H), causou verdadeiro alvoroço. De imediato a acharam muito longa e, por conter conceitos de Geografia, precisariam de ajuda extra para entender o que seria fuso horário e tentar fazer os cálculos. Por isso, classificaram-no como difícil.

Sugeri que fizéssemos uma leitura coletiva da primeira parte do problema e, com o auxílio do mapa, expliquei do que se tratava, dando alguns exemplos de como calcular os fusos. Depois disso, deixei que eles traçassem suas próprias estratégias.

Usando o próprio mapa para responder ao quesito a), um dos grupos colocou o número 5 no fuso que continha Brasília e, a cada fuso seguinte, acrescentava 1 hora. Ao término dos fusos, eles procuravam pelas capitais listadas e anotavam a qual hora ela correspondia, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Resolução do problema 30.



PROBLEMA

A Terra é dividida em 24 regiões delimitadas por linhas imaginárias, uma para cada hora, denominada fusos, de modo que em um mesmo instante cada região apresenta um horário diferente. O meridiano de Greenwich foi tomado como referencia para o fuso 0 e, a partir dele, cada fuso a oeste (esquerda) desse meridiano tem uma hora atrasada, e cada fuso a leste (direita), uma hora adiantada.

Observe no mapa a indicação dos fusos e as diferenças de horário entre os fusos e o meridiano de Greenwich, indicadas pelos números positivos e os números negativos. No mapa está indicada também a localização de algumas capitais.

a) Supondo que em Brasília sejam 5h, calcule quantas horas são em Tóquio, em Londres e na Cidade do México → 2 H 17H 8H

b) Qual a diferença em horas entre os horários de Lisboa e Camberra? E da Cidade do Cabo e Cidade do México? 10H 8H

Fonte: CHAVANTE, 2015 b, p. 36.

Para responder qual a diferença em horas entre as duas cidades, os estudantes fixaram os fusos onde eles se encontravam e contavam quantos fusos havia entre uma cidade e outra. Outro grupo, após muita troca de ideias, conseguiu determinar operações matemáticas necessárias para chegar à resposta correta. Para as cidades localizadas à direita de Brasília, eles adicionaram um valor numérico correspondente ao fuso horário da cidade em questão; para cidades à esquerda, subtraíram o valor numérico. No entanto, também poderiam encontrar a diferença entre o maior e o menor fuso horário e adicionar a hora em questão. Assim, se em Brasília são 5 horas e queremos descobrir o horário correspondente em Tóquio, devemos considerar o fuso horário de Tóquio (+9) e o de Brasília (-3) e fazer a subtração (+9) – (–3) = 12 e, a partir daí, adicionar as 5 horas em questão (12 + 5), encontrando as 17 horas em Tóquio. O mesmo procedimento deve ser adotado para as demais localidades.

Para responder ao quesito b), eles fizeram uma subtração entre o fuso da cidade mais à direita e o fuso da cidade mais à esquerda utilizando os conceitos formalizados anteriormente. Após a exposição das resoluções em plenária, todos compreenderam e concordaram com os cálculos, embora continuassem julgando aquele problema como difícil.

3.1.3.2 Expressões Numéricas

a) Aula 9 – Dia 23 de maio de 2018

Com a greve dos caminhoneiros deflagrada e a ameaça de paralisação das aulas por falta de transporte e merenda escolar, iniciamos a aula com a presença de apenas seis alunos.

Distribuí uma cópia do problema 31 (APÊNDICE I) e pedi que, após a resolução, eles avaliassem e classificassem o problema como fácil, médio ou difícil. Embora o problema desse um comando e em seguida apresentasse um exemplo de resolução, a maioria das duplas se prendeu ao fato de ser uma questão da OBMEP – Olimpíadas Brasileiras de Matemáticas das Escolas Públicas, julgando-a como difícil antes mesmo de tentar resolver.

Incentivei a todos para que realizassem mais de uma leitura, se fosse preciso, até conseguirem pensar em uma estratégia para a resolução. Passados dez minutos, começaram a surgir as primeiras ideias. A dupla A2 e A4 colocou toda a sequência de 1 a 9 e, entre todos os números, colocou um sinal de adição. Fizeram a primeira soma e chegaram ao valor 45. Viram que faltavam nove unidades para chegar em 54. A partir daí, foram testando a retirada de um sinal por vez. O primeiro sinal que tiraram foi o que ficava entre o 1 e o 2, formando agora 12 unidades ao invés de 3. Quando somaram tudo novamente, chegaram ao resultado 54, totalizando a quantidade de sete sinais de adição utilizados. Mesmo conferindo ou testando as respostas, eles pareciam precisar da minha confirmação para a resposta. Ainda não haviam desenvolvido a autoconfiança para determinar que aquela era a resposta certa.

O problema 32 (APÊNDICE I) teve um nível de dificuldade a mais, pois, além da adição, a expressão envolvia também multiplicação. Eles deveriam se lembrar das propriedades das duas operações para que conseguissem colocar corretamente os sinais de adição e multiplicação de modo a obter o maior valor possível. Duas duplas o classificaram como difícil e uma dupla, como fácil. A dupla que achou fácil resolveu mais rapidamente, pois se lembrou das propriedades dessas operações, em especial a do elemento neutro da adição, e considerou o zero como elemento nulo da multiplicação.

A dupla A8 e A9 descobriu que, para obter o maior valor possível da expressão, deveria fazer o produto entre os maiores valores possível. Para isso, foi determinado que não poderiam colocar o sinal de vezes próximo ao zero, pois este anulava a multiplicação. Assim, deixaram definidas inicialmente as posições de dois sinais de adição. Em seguida, por julgarem que o resultado da multiplicação é sempre maior que o da adição, completaram os demais espaços com o sinal de vezes, ficando 2 . 3 + 0 + 8 .9 . 1 = 78.

Seguindo o mesmo raciocínio da posição dos sinais, porém com ordem de operações diferentes, a dupla A1 e A5 chegou ao resultado 126, pois resolveram as operações na ordem em que apareciam. Isso gerou discussões acerca de qual deveria ser a ordem correta de resolução de uma expressão numérica. Eles tinham dúvida se deveriam realizar primeiro os produtos e depois a adição, como feito pelos alunos A8 e A9, ou realizar as operações seguindo a ordem de ocorrência, conforme feito pelos alunos A1 e A5. Chegaram à conclusão de que a primeira dupla estava correta ao realizar primeiro os produtos e depois as adições.

A dupla A2 e A4 lembrou que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação. Dessa forma, perceberam que, se colocassem um sinal de mais antes deles, acrescentariam uma unidade ao resultado, obtendo o maior valor possível. Assim, a resposta apresentada por eles foi2 . 3 + 0 + 8 . 9 + 1 = 79.

Após a plenária, todos concordaram que esta era a resposta mais adequada. Registramos a sequência correta de resolução de uma expressão numérica em um cartaz e partimos para o problema seguinte.

O problema 33 (APÊNDICE I) exigia, antes da resolução da expressão numérica, uma interpretação da situação para que pudessem estabelecer qual deveria ser a ordem de resolução das operações. Outro fator que mostrou elevar o nível de dificuldade desse problema foi a necessidade da realização da divisão. Todas as duplas demonstraram extrema dificuldade em realizar a divisão, pois não se lembravam da tabuada. Tentando efetuar a divisão, eles perderam tempo e esforço valiosos, que poderiam ter utilizado para traçar as estratégias de resolução. Além disso, a necessidade do uso de mais de um símbolo que agrupasse as operações impediu que chegassem a uma proposição de expressão numérica adequada à situação.

Duas duplas não conseguiram sequer chegar à quantidade de chuteiras vendidas, e nenhuma dupla conseguiu estabelecer a expressão que determinasse quantos pares de chuteiras restavam no estoque. Isso me levou a realizar várias intervenções que os fizessem raciocinar corretamente para que chegassem à resposta certa. Se a loja tinha 2871 pares de chuteiras, recebeu uma nova coleção com 400 pares de chuteiras e depois vendeu a sexta parte, a expressão deveria começar adicionando as chuteiras que tinha com as que chegaram e depois dividindo o resultado por seis, ficando da seguinte forma: $(2871 + 400) / 6 = 545{,}1\overline{6}$. Porém, deveriam considerar como resultado apenas o 545, já que se tratava da quantidade de chuteiras vendidas e essa é uma variável discreta.

Achei que, após todas as discussões ocorridas, ficaria fácil de resolver o problema 34 (APÊNDICE I). Estava enganada, pois além das dificuldades com os símbolos e a ordem de resolução das expressões numéricas, a dificuldade com a tabuada mostrou-se preocupante. Eles demoraram muito tempo até descobrirem a posição dos parênteses nas expressões, pois esbarravam o tempo todo na tabuada, mesmo que os valores ali utilizados fossem pequenos.

b) Aula 10 – Dia 06 de junho de 2018

Como a greve dos caminhoneiros continuou, o transporte escolar foi suspenso por completo, assim como as aulas em todas as escolas públicas do município. Como não pude lembrá-los do reforço no dia, apenas dois alunos compareceram. Eles vieram a pé de casa até a escola, já que não tinham dinheiro para pagar pelo transporte coletivo, mas estavam dispostos a continuar aprendendo.

Para esta aula, estavam preparados quatro problemas envolvendo expressões numéricas, mas não houve tempo de trabalhar todos. Resolvemos apenas dois, pois eles tiveram muita dificuldade com a interpretação, os valores muito grandes e as porcentagens.

Ao entregá-los o problema 35 (APÊNDICE J), eles reclamaram do tamanho do texto. Isso porque esse foi o único problema que ocupou uma página inteira e continha uma imagem com muitas informações. Estimulei-os a lerem com calma todas as informações e questionamentos que estavam fora da imagem para depois esmiuçar as informações contidas na imagem, sempre destacando os termos desconhecidos e as informações que julgavam relevantes para responder às perguntas do problema.

De imediato, perguntaram o que era infográfico. Quando expliquei do que se tratava, disseram que tinham aprendido apenas sobre os gráficos convencionais e que não se lembravam de ter vistos outros tipos de gráficos, até mesmo em Geografia.

Além disso, tiveram dificuldades para separar as informações válidas das desnecessárias à resolução e para calcular porcentagens. Também houve confusão na tentativa de calcular quantas toneladas a mais o Brasil precisaria ter produzido para atingir a maior produção. Para eles, esse termo “a mais” necessariamente era indicativo de uma operação de adição, quando na verdade indicava uma operação de subtração. Isso sugere uma fragilidade na base da aprendizagem das operações fundamentais.

Para responder à terceira pergunta desse problema, o aluno A4 lembrou que poderiam utilizar a mesma técnica usada na aula anterior – ou seja, fazer todas as contas necessárias e depois escrevê-las na ordem em que foram resolvidas. Entretanto, não sabiam por onde deveriam começar os cálculos.

Após várias intervenções, eles chegaram à conclusão de que deveriam adicionar todas as porcentagens presentes no infográfico. Em seguida, perceberam que poderiam subtrair o resultado de 100%, chegando à porcentagem correspondente aos países que faltavam. Foi aí que surgiu a dúvida de como calcular porcentagens.

Como o objetivo da aula não era formalizar o conceito de porcentagem, ensinei-os a calcular utilizando a calculadora, uma vez que os valores eram bem grandes. Assim eles fizeram, registrando numa folha de papel as multiplicações realizadas na calculadora que alguns deles tinham no celular.

Para chegar à resposta do item c), a dupla levou um tempo significativo e precisou de várias intervenções. Como alcançaram um resultado satisfatório, as intervenções direcionadas mostraram-se eficazes e necessárias, indicando novamente que o número de alunos na sala de aula pode interferir significativamente na qualidade do ensino ofertado e na aprendizagem deles.

Já o problema 36 (APÊNDICE J) foi considerado mais difícil do que o primeiro por não ter nenhuma imagem ou desenho. Aparentemente, além da forma como o problema é apresentado, os recursos extras que alguns deles trazem podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio.

Como estratégia de resolução, os dois alunos optaram por destacar todos os valores apresentados no texto para que, em seguida, pudessem se concentrar em qual ou quais operações deveriam fazer para chegar à resposta correta. Antes de determinar a expressão numérica capaz de gerar o resultado do lucro da empresa, os alunos fizeram desenhos representativos das frações indicadas no texto do problema.

c) Aula 11 – Dia 13 de junho de 2018

Passadas as restrições causadas pela greve dos caminhoneiros, as aulas voltaram à normalidade e o número de alunos presentes no reforço aumentou novamente. Nesta aula, foram trabalhadas expressões numéricas por meio de quatro problemas, uns com enunciados mais elaborados, outros com enunciados mais simples e curtos. Mais uma vez, todos os alunos relatam preferência pelos problemas verbais, com enunciados que continham um roteiro ou história.

Para trabalhar o problema 37 (APÊNDICE K), mais uma vez sugeri que eles destacassem as informações relevantes e procurassem manter o máximo de organização possível para que isso os ajudasse no desenvolvimento de seus raciocínios. Porém, mesmo com essa recomendação, dois grupos tentaram a resolução de modo desorganizado. Um deles chegou ao resultado correto; o outro, não. A dupla que procurou se organizar minimamente não necessitou de muitas intervenções, chegando sem problemas ao resultado correto.

Para isso, eles organizaram as informações e os cálculos por série. Em seguida, circularam os dados que deveriam fazer parte da conta final, identificando as operações relacionadas e estabelecendo a ordem e os agrupamentos. Ao determinar a expressão numérica, eles separaram as operações de cada série. Até chegar a essa resposta, a dupla discutiu várias ideias e retornou ao problema diversas vezes, mas não precisou de qualquer intervenção minha. O mesmo não aconteceu com as demais duplas. Uma delas, mesmo com as intervenções, apresentou uma resolução incorreta.

Para a resolução do problema 38 (APÊNDICE K), houve a necessidade de um número maior de intervenções. De início, eles se confundiam com a ordem em que deveriam realizar as operações. Mesmo realizando diversas trocas de informações, um dos grupos não chegou à resposta certa porque não levou em conta a ordem correta de resolução. A dupla A1 e A4, mostrando muita organização, chegou à resposta certa mesmo tendo dificuldades com as operações de multiplicação e divisão, pois não dominava a tabuada.

Ao distribuir o problema 39 (APÊNDICE K), notei uma certa animação entre os alunos. Quando perguntei por que estavam tão animados, eles responderam:

> A3: Esse é pequeno e não uma expressão numérica enorme. Então deve ser fácil de resolver!

Essa impressão não se mostrou verdadeira, uma vez que os dois levaram bastante tempo até que um dos grupos conseguisse propor uma resolução. Os demais grupos não conseguiram resolver esse problema.

No momento da plenária, percebendo que foram os únicos a conseguirem resolver o problema, a dupla A1 e A4 demonstrou muita satisfação em explicar o raciocínio deles.

Para finalizar a aula, passamos para o problema 40 (APÊNDICE K), que, além de expressões numéricas, também envolvia operações com números positivos e negativos. Todos os grupos conseguiram resolver o problema, embora um dos grupos tenha se confundido com os sinais na hora de propor a expressão numérica.

Quando o último grupo expôs sua resposta aos demais colegas, perguntei se eles percebiam algo de diferente. A2 achou que o erro estava na segunda conta realizada e A4 achou que equívoco estava na expressão final:

> A4: Acho que o sinal antes do 110 deveria ser positivo, para que precisasse fazer uma conta de menos, já que todos os sinais dentro dos parênteses são negativos. Do jeito que está, deveria somar tudo, já que todos os sinais são iguais.

Essa percepção indica que o aluno A4 compreendeu corretamente a regra dos sinais das operações com números positivos e negativos.

d) Aula 12 – Dia 20 de junho de 2018

Nesta aula, estiveram presentes sete alunos. Eles estavam todos agitados além do normal e disseram estar assim por que era véspera das festividades de São João na escola. Trabalhamos quatro problemas, dos quais, dois foram classificados por eles como fáceis ou muito fáceis, um como médio e o último como mais difícil.

Todos os alunos julgaram o problema 41 (APÊNDICE L) como fácil e todos apresentaram maneiras diferentes de chegar ao mesmo resultado. Quando foi proposto o problema 42 (APÊNDICE L), eles o resolveram mais rápido ainda, usando as mesmas estratégias adotadas no problema anterior, que foi de juntar os valores positivos, depois os valores negativos e, por fim, subtrair os dois valores encontrados, ou ir realizando sucessivas adições ou subtrações na medida em que iam aparecendo. Podemos presumir que, por essa razão, julgaram o problema como muito fácil. Nos dois problemas citados, as únicas operações realizadas foram de adição e subtração; essa é a razão pela qual acharam tão fácil estabelecer uma expressão numérica para as duas situações.

Os estudantes tiveram mais dificuldade no problema 43 (APÊNDICE L), devido à realização da multiplicação, além das adições e subtrações. Mais uma vez, a tabuada mostrou ser uma dificuldade extra à aprendizagem desses jovens. Eles faziam contas nos dedos e se confundiam com os sinais que deveriam atribuir ao resultado. De qualquer forma, após muitas trocas de ideias e informações, conseguiram determinar a expressão correta para o problema.

No problema 44 (APÊNDICE L), mostraram ter dificuldades também com o termo indicativo de divisão. Dois grupos perguntaram o que significava a palavra “quociente”. Para que entendessem, pedi que relessem a primeira parte do problema em busca de informações que os ajudassem com isso. A2 identificou a palavra “média” e lembrou que eu já os havia ensinado como calculá-la. Assim, relacionaram a palavra “quociente” à operação de divisão.

Como a resolução necessitava de divisão, o que implicava no uso da tabuada, mais uma vez eles acharam esse problema difícil. Debateram por muito tempo até conseguirem efetuar a divisão sem o uso da calculadora, reclamando o tempo todo por perceberem a necessidade de saberem a tabuada. Ao final, apresentaram duas maneiras diferentes de resolução.

Na resolução de um dos grupos, foram somados os valores positivos, depois os negativos e o resultado da diferença entre os valores encontrados. Então, o total foi dividido por 5 para encontrar a média negativa. Na resolução de outro grupo, eles foram efetuando sucessivas adições e subtrações e, ao final, fizeram a divisão do resultado encontrado por 5 para encontrar a média, errando apenas o sinal da resposta final.

Ao terminarem este problema, eles pediram que fossem dispensados 15 minutos mais cedo para irem ensaiar a quadrilha da festa junina. Permiti, pois notei o tamanho da agitação deles, mas avisei que na semana seguinte a aula seria dobrada para repor uma das aulas canceladas anteriormente.

3.1.3.3 Equações de primeiro grau

a) Aulas 13 e 14 – Dia 27 de junho de 2018

As duas aulas ocorreram no mesmo dia, uma antes e outra depois do recreio. Os problemas trabalhados foram todos sobre equações de primeiro grau. Como os alunos tiveram muita dificuldade em compreendê-los, não conseguiram resolver mais do que quatro problemas. Assim, as questões resolvidas foram as de número 45 a 48.

Logo na leitura individual do problema 45 (APÊNDICE M), eles demonstraram extrema dificuldade. Suas exclamações indicavam que haviam tido contato com o conteúdo há pouco tempo:

> A7: Ai, meu Deus! Isso aqui é aquele negócio que a professora está tentando ensinar!
>
> A3: É o lance das letras, que eu não entendi nada!
>
> P: Uma coisa de cada vez! De repente vocês conseguem achar uma outra maneira de resolver!

Assim começaram as discussões, as trocas de ideias, as tentativas de resoluções e algumas frustrações. Passado algum tempo, um dos grupos conseguiu propor uma resolução, após eu ter-lhes esclarecido o significado de “u.m.”. Quando descobriram que se tratava de valores em dinheiro, compreenderam que precisavam descobrir qual locadora cobrava mais barato. Somente após algumas intervenções é que conseguiram determinar uma expressão algébrica. As colocações foram feitas a fim de que percebessem que existiam valores que se repetiam e outros não, para que, a partir daí, estabelecessem a expressão algébrica adequada.

Perguntei-lhes qual seria a distância que faria com que os valores fossem iguais nas duas locadoras. Para chegarem à resposta, eles fizeram diversas substituições até encontrarem o valor que satisfizesse essa condição. O grupo 2 percebeu que este valor deveria ser menor do que 100 e, por isso, investigou valores dentro de um intervalo numérico menor que os dos demais grupos. Todos esses testes consumiram bastante tempo da aula, o que me levou a indagá-los se não existiria uma maneira mais rápida de resolução. Nenhum grupo conseguiu pensar numa resposta plausível para isso.

O problema 46 (APÊNDICE M) mostrou-se mais complicado ainda para eles. Isso porque, para muitos ali, aquela situação descrita no problema não fazia parte da realidade. Mesmo já tendo percebido ou tomado consciência de que alguns problemas apresentavam situações diferentes da realidade deles, insisti neles a fim de verificar até que ponto esses problemas poderiam ou não contribuir para a aprendizagem dos alunos, o que assim como Fernandes (2016) e Zequim (2014), levou à conclusão de que a eficácia maior da aprendizagem se dá ao lançarmos mão de problemas mais próximos da realidade do aluno.

Além disso, a questão 46 exigia conhecimento sobre outros conceitos matemáticos que eles não dominavam, como razão e proporção. Por isso, antes que seguissem com as estratégias de resolução, dei uma breve explicação para ajudá-los a lembrar de como calcular uma razão. Após essa explanação, o mesmo grupo 2, baseado no modelo do problema anterior, elaborou uma estratégia, embora isso não tenha sido feito tão rapidamente, principalmente porque eles se confundiam sobre quais valores deveriam usar: se seria o 157 ou o 247. Passaram-se alguns minutos até que o aluno A4 percebeu que o número 247 deveria ser usado apenas para determinar a razão constante do número de veículos com desconto. Quando finalmente conseguiram determinar qual seria a função do desconto, responder o item b) do problema não foi mais tão difícil.

No problema 47 (APÊNDICE M), apareceu novamente a expressão “constante”, o que indicava que a resolução poderia ser a mesma usada no problema 46. Porém, o surgimento do termo “teste psicotécnico” – que era desconhecido para eles – desviou suas atenções e dificultou o desenvolvimento de seu raciocínio, o que me levou a intervir mais uma vez para explicar do que se tratava. Situados quanto ao cenário do problema, um dos grupos conseguiu perceber a semelhança com o problema anterior e buscou aplicar a mesma linha de raciocínio e estratégia utilizada anteriormente, mas desconsideraram o termo “decréscimo”, propondo uma adição ao invés de subtração.

No momento da plenária, os outros dois grupos que não conseguiram resolver anteriormente perceberam que o erro cometido foi usar o sinal da adição quando, na verdade, deveriam ter usado o sinal negativo. Outra dificuldade foi que o quociente da média já estava estabelecido no problema anterior, e eles deveriam efetuar mais uma subtração neste para encontrá-lo. Mesmo assim, conseguiram chegar a uma resposta e, no momento da plenária, as discussões os levaram a perceber outras maneiras de resolução.

Faltando 40 minutos para acabar a aula, distribuí o problema 48 (APÊNDICE M). De imediato, perceberam que a resolução poderia ser parecida com a do problema 45, mas levaram bastante tempo até conseguirem chegar à resposta. Dois grupos concluíram que seria melhor o clube A se precisassem de muitas aulas de natação, e o clube B se precisassem de poucas aulas.

Os estudantes relataram dificuldade em efetuar a divisão com números decimais, visto que eles já têm muita dificuldade com essa operação com números inteiros.

O tempo dobrado de aula não se mostrou favorável. Todos reclamaram de cansaço devido ao longo período pelo qual estiveram envolvidos nos estudos. Decorridas duas horas, eles ficaram mais agitados do que o normal.

b) Aula 15 – Dia 04 de julho de 2018.

Esta aula foi posterior ao feriado prolongado de São Pedro, padroeiro da cidade, e da independência da Bahia. Talvez por isso tenha havido um número reduzido de alunos presentes.

Trabalhamos apenas os problemas 49 e 50 (APÊNDICE N), pois o conteúdo de equações de primeiro grau mostrou-se mais complexo para eles, principalmente pela dificuldade que eles têm em dominar as quatro operações (mais especificamente a multiplicação e a divisão).

O problema 49, em especial, deu mais trabalho e gerou mais confusão dentro dos grupos, pois apresentava um erro no enunciado. Os dados numéricos não batiam. Isso poderia ser identificado de imediato se eles apenas dominassem a tabuada, o que não ocorreu. Cada grupo optou por escolher aleatoriamente os dados que julgava serem corretos para chegar a uma resposta.

A intenção era de que eles discutissem a viabilidade do problema. Que, ao identificarem os dados, fizessem uma comparação entre o que era pedido e o que era ofertado. Eles deveriam chegar à conclusão de que nem sempre os dados apresentados estão corretos ou são suficientes para chegar a uma resposta, o que não ocorreu. Continuaram achando que todos os problemas devem ter solução e que todos os dados do problema são corretos.

Passados quarenta minutos de aula, abri a plenária e cada grupo apresentou sua resolução. A dupla A2 e A4 considerou os 450 alunos em 5 horas, estipulando que, por hora, deveriam ter sido matriculados 90 alunos, e por isso em 4 horas, o número de alunos matriculados seriam 360 alunos. Já o trio A8, A9 e A10 considerou a informação inicial de que o número de alunos que poderiam ser matriculados por hora era 40. Assim, determinaram que, após quatro horas, deveriam ter sido matriculados 160 alunos.

Quando indaguei sobre o porquê de eles terem usado dados diferentes, não houve uma justificativa plausível para isso. Disseram que escolheram os números que faziam mais sentido para eles, ou que fossem mais fáceis de calcular. Perguntei, então, se eles conseguiam ver a diferença entre os valores que cada grupo havia escolhido para calcular. Os jovens só perceberam a divergência nas informações quando os alertei para isso. Propus, então, que reelaborassem o problema de maneira que os dados não ficassem confusos.

Houve outra rodada de discussões para a elaboração do novo enunciado. O trio A8, A9 e A10 propôs um enunciado que repetia os erros numéricos, mas eliminava a dúvida quanto ao período a ser considerado. A dupla A2 e A4 propôs um problema que incluía termos que eles conheceram nas aulas anteriores, como “proporção” e “constante”. O problema reelaborado por eles, com adequações da professora, foi:

> Em certa escola é possível matricular alunos durante o verão. Após as férias, haverá um período de uma semana para isso, antes de iniciar as aulas. No primeiro dia, em 5 horas já haviam se matriculado 450 alunos. Se as matrículas fossem feitas numa proporção constante, quantos alunos teriam se matriculados em 4 horas? Quantos alunos foram matriculados durante essa semana, se considerarmos 8 horas diárias de trabalho?

Com este novo problema proposto, todos conseguiram estabelecer o número de alunos matriculados em 4 horas, assim como o número de alunos matriculados na semana, mas levaram mais alguns minutos até conseguirem identificar uma equação de primeiro grau que pudesse ser usada para isso.

No problema 50 (APÊNDICE N), eles se identificaram com a situação, mas esbarraram no termo “reduzido linearmente”. Nenhum deles conseguiu seguir adiante na resolução porque eles não compreendiam o que esse termo significava. Mesmo após várias intervenções, eles não conseguiam avançar nas estratégias. Foi preciso que eu explicasse tanto o significado do termo quanto a proposição da equação que solucionava aquele problema. Ao terminar todas essas explicações, perguntei-lhes como eles avaliavam aqueles problemas propostos. Os cinco alunos presentes julgaram os problemas difíceis, pois viram muitos termos desconhecidos e dados divergentes, o que os confundiu bastante.

c) Aula 16 – Dia 11 de julho de 2018.

Esta foi uma semana que antecedeu o recesso de julho, além de ter sido a semana de avaliações. Talvez por isso estivessem presentes apenas cinco alunos. Como um dos objetivos da aula também era a aplicação da avaliação diagnóstica final, trabalhamos apenas um problema.

O problema 51 (APÊNDICE O) mostrou-se outro desafio para eles. Uma hipótese para isso ocorresse era que a situação proposta ali – a produção de uma fábrica – não fazia parte da realidade deles, pois os jovens nunca estiveram em uma fábrica para compreender como ela funciona. Estão mais acostumados com trabalhos em feiras livres ou lojas da cidade. Isso foi um empecilho para que eles imaginassem a situação e pudessem elaborar uma estratégia. Houve a necessidade de várias intervenções até que fosse possível chegar a uma resposta.

O item a) do problema perguntava quantas unidades eles precisavam vender a fim de alcançarem o equilíbrio. Como eles não tinham certeza de como iniciar a resolução, perguntei:

> P: O que o equilíbrio indica?

A4: Que o custo para produzir o produto deve ser igual ao preço de venda.

P: E como vocês acham que podem descobrir isso?

Eles passaram a trabalhar em uma nova estratégia, efetuando várias operações de adição e divisão, conforme o esquema a seguir:

Esquema 1 – Resolução do item a do problema 51 pela dupla A4 e A8.

1 item → 7500 + 600 = 8100 ÷ 1 = 8100

2 itens → 7500 + 1200 = 8700 ÷ 2 = 4350

3 itens → 7500 + 1800 = 9300 ÷ 3 = 3100

4 itens → 7500 + 2400 = 9900 ÷ 4 = 2475

5 itens → 7500 + 3000 = 10500 ÷ 5 = 2100

Ao chegarem ao 5º item, perceberam que seguir com aquela estratégia poderia levar muito tempo até que alcançassem o resultado esperado.

A4: Desse jeito, vai levar muito tempo e vai dar um trabalhão! Achei que ia chegar logo no resultado. Os primeiros diminuíram muito rapidamente, mas depois não mais.

P: Mas, com esse esquema, vocês não conseguem observar um padrão acontecendo aí?

A2: O 7500 se repete em todas. Mas depois não sei mais.

P: De onde surgiu a segunda parcela da soma?

A4: Da multiplicação de 600 pela quantidade de itens.

P: E se você substituir a segunda parcela por essa multiplicação?

A4: Aí o 600 também será comum a todas as contas. Fica 7500 + 600 . x.

P: E acaba por aí?

A4: Não. Ainda tenho que descobrir o que eu faço com a divisão!

A2: Uai! A divisão é sempre feita pelo número de itens, que chamamos de x!

P: Certo, e como fica a equação então?

A4: Fica 7500 + 600 . x ÷ x. Só não sei se devemos colocar os parênteses e onde devemos colocar eles.

P: Vocês fizeram a divisão depois de que?

> A4: Depois de somar 7500 com a multiplicação de 600 pelo número de itens.
>
> P: Então vocês já sabem onde deve abrir e fechar os parênteses.
>
> A4: Sim. Deve ficar $(7500 + 600 \cdot x) \div x$.

Para encontrar o número de itens, eles precisavam igualar a equação a 1100 em vez de substituir a variável e resolver a expressão numérica. Assim, muito tempo foi gasto até que eles desistissem e pedissem ajuda na resolução. Foi preciso repetir várias vezes o processo até que alguém sinalizasse compreensão.

Não houve maiores dificuldades para resolver o item b), já que bastava substituir a variável pelo valor estipulado. A única dificuldade demonstrada foi na realização das multiplicações e das divisões com valores maiores. No item c), era preciso empregar a mesma técnica utilizada no item a), mas mesmo após minhas explicações anteriores, eles não conseguiram resolver. Mais uma vez, foi preciso que eu mostrasse como resolver, indicando que aquela técnica não havia sido internalizada ou devidamente compreendida.

Com o intuito de verificar se houve avanços na aprendizagem dos alunos após a realização das aulas de reforço, apliquei a avaliação diagnóstica final. Esta continha as mesmas questões que foram aplicadas na avaliação diagnóstica inicial. Dessa vez, eles demonstraram mais afinco na resolução. Poucos alunos deixaram alguma questão sem resolver. Isso porque, durante as aulas de reforço, trabalhamos conceitos importantes relacionados a operações com números positivos: as regras de sinais, tanto de adição e subtração como de multiplicação e divisão. Além disso, exploramos bastante a importância da colaboração do “outro” no desenvolvimento do raciocínio, e pude verificar como as etapas de Polya contribuíram no processo de resolução dos problemas. Como nem todos os alunos que participaram do reforço estavam presentes nessa aula, foi necessário reaplicar esta avaliação aos alunos ausentes em um momento posterior.

4 ANÁLISE E AVALIAÇÃO DOS DADOS DA PESQUISA

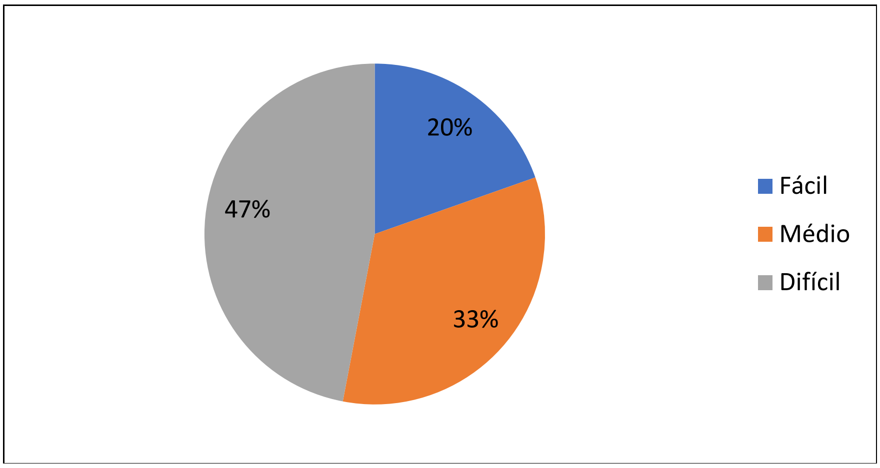
Após a aplicação das aulas de reforço, o material coletado durante esse processo sofreu uma análise baseada na Categorização, conforme definido por Lüdke e André (2014). Assim, como já havia uma ideia clara das direções teóricas do estudo, os conteúdos que surgiram foram agrupados em três categorias elaboradas *a posteriori*, levando em consideração a frequência com que ocorreram e sua relevância para a pesquisa: *postura dos alunos diante dos problemas, postura dos alunos relativa ao processo ensino-aprendizagem e relação professor-aluno na resolução de problemas*. As características específicas de cada uma delas serão mais bem descritas ao longo do capítulo, à medida que forem discutidas.

4.1 POSTURA DOS ALUNOS DIANTE DOS PROBLEMAS

Nesta categoria trataremos das comunicações que demonstram a aceitação dos problemas pelos alunos, assim como das variações nas estratégias desenvolvidas na resolução dos problemas. Isso inclui as comunicações que demonstram iniciativa ou não dos alunos em resolver os problemas propostos, mesmo que chegassem a uma resposta errada; a opinião dos alunos quanto a preferência pelos tipos de problemas e como julgaram o nível de dificuldade.

Ao longo das aulas de reforço, foram trabalhados 51 problemas de tipos variados e de diferentes níveis de dificuldades. Apenas dez deles foram classificados pelos alunos como fáceis, os quais, em sua maioria, foram resolvidos após a apresentação de um raciocínio semelhante em um problema anterior. Dezessete foram classificados como de dificuldade média porque os alunos se sentiram inseguros durante a resolução. Já 24 foram considerados difíceis ou muito difíceis por possuírem termos desconhecidos ou necessitarem de pré-requisitos que eles não dominavam. O Gráfico 2 mostra o comparativo entre essas classificações:

Gráfico 2 – Classificação dos problemas pelos alunos quanto ao nível de dificuldade.



Fonte: a própria autora.

Os problemas fáceis para eles eram aqueles em que conseguiam encontrar a resposta apenas com as interações entre si, sem ajuda externa. Dos dez considerados fáceis, seis envolviam operações com números positivos e negativos, quatro envolviam expressões numéricas e nenhum continha equações de 1º grau. Em três deles, cada grupo apresentou uma maneira diferente de resolução. Por considerarem fáceis, alguns dos jovens não viam a necessidade de registro dos cálculos, sendo necessário estimulá-los quanto a isso.

À medida que as aulas iam ocorrendo, a avaliação dos problemas feita pelos alunos indicava a predileção por questões classificadas como verbais por Fonseca e Cardoso (2009) e como convencionais, segundo Stancanelli (2001).

> A7: Para mim, problema tem que ter uma historinha!
>
> A4: Gosto desses porque têm uma certa história, aí a gente imagina a cena e consegue bolar uma estratégia.
>
> A4: Eu prefiro os outros tipos de problemas, aqueles da aula passada. Eles nos dão mais dicas do que fazer! (Referindo-se aqui aos problemas da aula 3, em APÊNDICE C)

Buscando oferecer uma aula estimulante para eles, foi utilizado um número maior desses dois tipos de problemas em relação aos demais, já que eram os que eles mais gostavam. Mesmo assim, também foram trabalhadas questões não verbais (FONSECA; CARDOSO, 2009), problemas sem solução, com mais de uma solução, com excesso de dados e de lógica (STANCANELLI, 2001). No entanto, estes causaram mais estranhamento e dificuldades. Com relação ao problema 7, por exemplo, um aluno exclamou:

> A9: Mas esse negócio não tem número nenhum! Como eu vou fazer conta?

Após a resolução do mesmo problema, outro aluno expressou:

> A4: Deu muito trabalho porque a gente tinha que ficar o tempo todo voltando e lendo o problema. Escrevendo, riscando e começando de novo... Minha cabeça fundiu! Prefiro os que têm números.

Outro tipo que causou muita estranheza foi o problema 11, que continha mais de uma resposta:

> A7: Como pode isso? As duas respostas estão certas! Não é possível! Esse problema está errado!

No problema 49, que não tinha solução, eles queriam determinar uma resposta de qualquer forma. Como cada grupo encontrou uma resposta diferente, todos achavam que a resposta do colega estava errada, mas não percebiam que, da maneira como foram expostos os dados, era impossível determinar uma resposta. Para que pudessem entender melhor a situação, foi proposta a reescrita do problema de modo que este fosse resolvido; depois disso, os jovens seacalmaram, mas acharam a atividade confusa e sem lógica:

> A4: Eu achei muito confuso! Não faz sentido ser um problema se não tem como resolver!

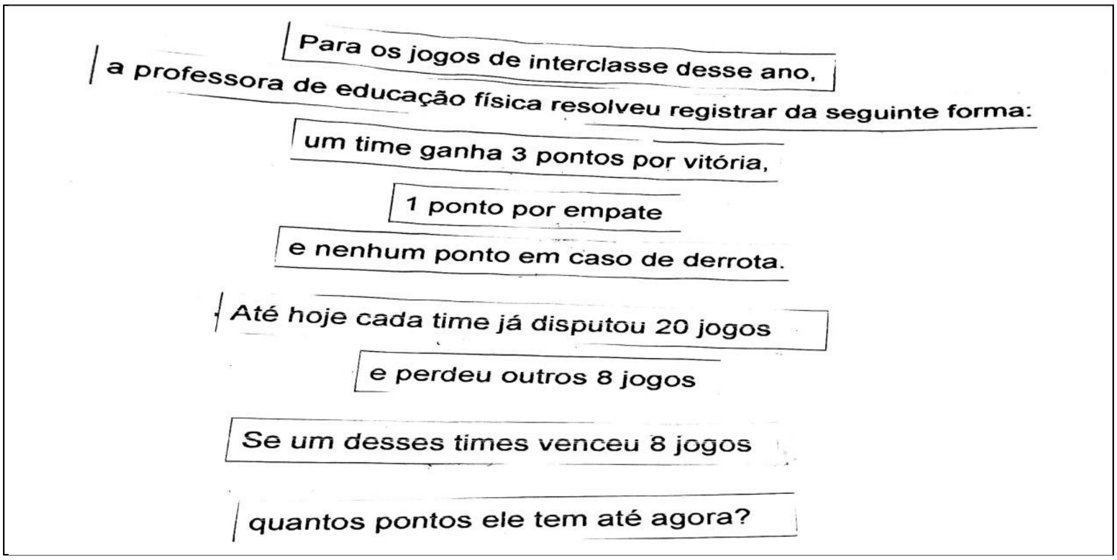
Demonstraram, também, que não gostavam de problemas muito grandes:

> A2: Esses problemas grandes têm muita coisa que a gente nem usa para resolver e acaba deixando a gente confuso. Eu começo a ler, daí logo me perco!

Essa fala foi reafirmada pelos outros colegas presentes. Foi percebido que, na verdade, a dificuldade deles também estava na leitura e na interpretação. Alguns deles liam errado as palavras e não prestavam atenção à pontuação, dificultando a compreensão do enunciado. Um exemplo disso foi o que ocorreu no problema 3, conforme a Figura 8, que foi entregue a eles em tiras. Eles teriam que organizar as frases em uma sequência lógica antes de resolvê-lo. Devido a essa dificuldade com a língua portuguesa, eles montaram um problema completamente desconexo que não conseguiram resolver.

Os problemas classificados como difíceis tinham algumas características em comum, entre elas a presença de termos ou palavras desconhecidas, a descrição de uma realidade diferente da que estão acostumados e a necessidade de pré-requisitos que eles não dominavam, como multiplicação, divisão, fração e média, além de raciocínio lógico.

Figura 8 - Problema montado com erros gramaticais e de concordância.



Fonte: a própria autora.

Foram poucos os problemas em que houve desistência por impossibilidade de solução, mesmo com a ajuda da professora – mais especificamente as questões 12, 13 e 25. Nestas, foi necessário explicar como deveria ser a resolução. Em 38 problemas, os grupos apresentaram a mesma resposta. Em apenas nove problemas (4, 6, 10, 16, 17, 29, 30, 41 e 44), os grupos apresentaram estratégias ou cálculos diferentes, como no problema 16, cujas estratégias podem ser observadas no Quadro 3:

Quadro 3 – Diferentes resoluções do problema 16 pelos grupos 1, 2 e 3.
(Continua)

GRUPO 1:					
15,00 -0,25 14,75	14,75 -4,85^{M} 9,90	9,90 -0,45^{B} 9,45	9,45 -2,28^{A} 7,17	7,17 -0,42^{L} 6,75	6,75 -0,45^{B} 6,30
6,30 -2,28^{A} 4,02	4,02 -0,42^{L} 3,60	3,60 -0,45^{B} 3,15	3,15 -2,28^{A} 0, 87	0,87 -0,42^{L} 0,45	0,45 -0,45^{B} 0,00

(Continuação)

R: 1 melancia; 4 bananas; 3 abacaxis; 3 laranjas

GRUPO 2

$$\begin{array}{r} 15{,}00 \\ \underline{-\ 0{,}25} \\ 14{,}75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \times 4{,}85 = 4{,}85 \\ 3 \times 2{,}28 = 6{,}84\ + \\ 3 \times 0{,}42 = 1{,}26 \\ 4 \times 0{,}45 = \underline{1{,}80} \\ 14{,}75 \end{array}$$

GRUPO 3

1 Melancia = 4,85
4 Bananas = 1,80
3 Abacaxis = 6,84
3 Laranjas = 1,26

$$\begin{array}{r} 15{,}00 \\ \underline{-14{,}75} \\ 0{,}25 \end{array}$$

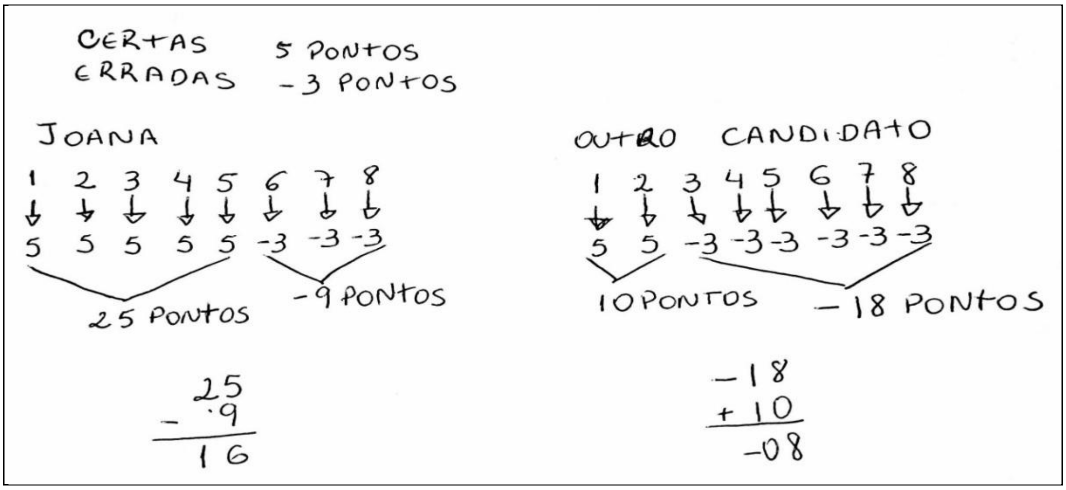
4,85 + 1,80 + 6,84 + 1,26 = 14,75

Fonte: a própria autora.

O grupo 1 optou por realizar sucessivas subtrações dos valores de cada fruta até chegar ao valor zero, anotando ao lado do valor subtraído a inicial da fruta em questão. Após chegarem ao valor zero, contaram quantas vezes subtraíram o valor de cada fruta, determinando, assim, quantas frutas de cada deveriam comprar. O grupo 2 subtraiu primeiro o troco do valor pago para determinar o valor gasto. Depois, foi fazendo diversas multiplicações e somando esses produtos até conseguir chegar ao valor estipulado no primeiro momento. O grupo 3 fez o caminho inverso do grupo dois, deixando para realizar a subtração entre o valor pago e os produtos das multiplicações somente ao final e verificando se teria de troco o valor estipulado pelo problema. Embora seguissem caminhos diferentes, as soluções foram alcançadas por tentativa e erro. Todos fizeram muitas contas até chegarem àquelas respostas. Nenhum grupo conseguiu pensar, por exemplo, em usar álgebra para resolver.

Ao longo das aulas, os estudantes passaram a traçar estratégias diferenciadas para as resoluções. Perceberam que existem caminhos diversos, além dos algoritmos costumeiros. A Figura 9 mostra o esquema adotado por um dos grupos.

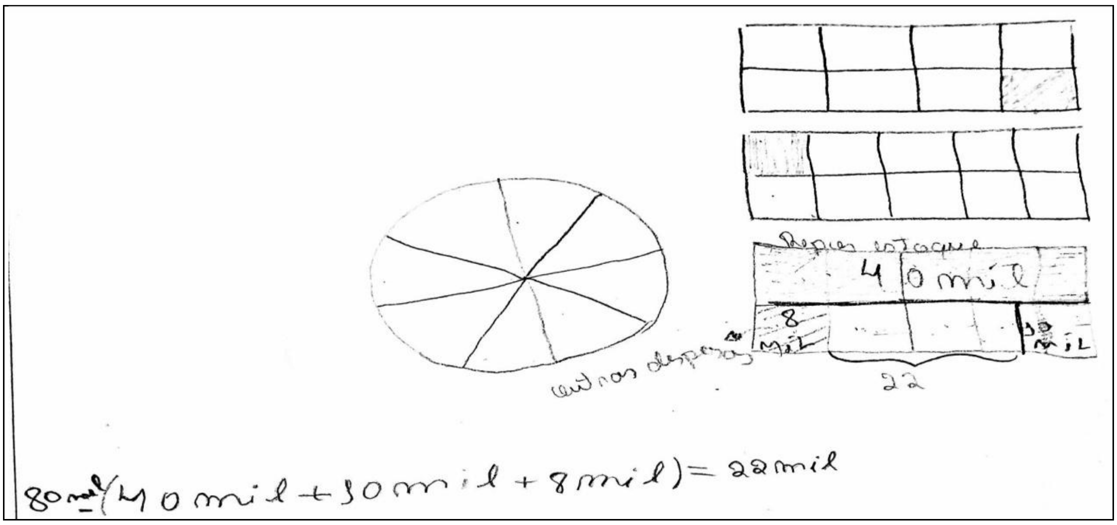
Figura 9 – Resolução do problema 17 pelo trio A2, A4 e A7.



Fonte: a própria autora.

Em outros momentos, os mesmos alunos A4 e A2 também lançaram mão de meios alternativos para resolver determinados problemas, indicando, provavelmente, que eles ampliaram as possibilidades de estratégias conforme o exemplo da Figura 10, em que foi utilizada uma representação geométrica das frações a fim de determinar os valores de cada parte e montar a expressão numérica. Eles começaram usando um círculo e perceberam que, com esse tipo de figura, ficaria mais difícil realizar as comparações do todo com as partes, já que as frações possuíam denominadores diferentes. Então, eles optaram pelos retângulos, que facilitariam essa comparação e, consequentemente, a determinação de quanto valeria cada parte.

Figura 10 – Esquema para a resolução do problema 36 pelos alunos A2 e A4.



Fonte: a própria autora.

Com as partes determinadas, eles registraram a adição de todas e depois perceberam que deveriam subtrair o valor encontrado dessa adição do valor total da receita para determinar o lucro. Por isso, colocaram os parênteses para separar as operações e anotaram os 80000 somente ao final.

Para esse problema, eles poderiam calcular separadamente as frações de cada valor, encontrando ½ de 80000 (= 40000), depois 1/8 de 80000 (= 10000) e 1/10 de 80000 (= 8000), para depois estabelecer a expressão 80000 – (40000 + 10000 + 8000), sem necessariamente utilizar a representação pictórica dessas frações. Porém, a representação pictórica foi um artifício utilizado por eles para facilitar a compreensão do que o problema pedia e como poderiam chegar a uma resposta satisfatória.

Com as observações feitas nessa categoria, pode-se identificar a predileção desses alunos pelos problemas verbais e convencionais; que a presença de termos desconhecidos no enunciado dos problemas e a falta de pré-requisitos podem aumentar a dificuldade na busca de estratégias diferenciadas e, até mesmo, em conseguir chegar à resposta certa; e que as interações entre os alunos contribuíram para que eles encarassem os problemas como fáceis.

4.2 POSTURA DOS ALUNOS RELATIVAS AO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

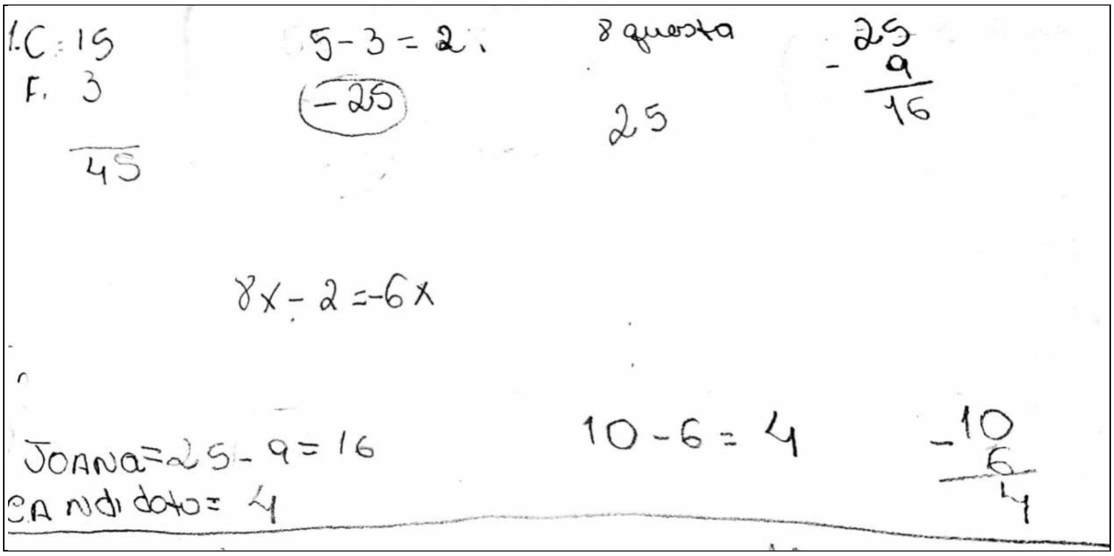
Aqui, abordaremos o comportamento dos alunos diante da metodologia ensino-aprendizagem através da resolução de problemas – ou seja, se houve resistência em trabalhar em grupo, se as trocas de ideias foram ou não válidas, como os jovens se comportaram em cada etapa da metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2011) e os resultados das avaliações diagnósticas.

Inicialmente, o trabalho em grupo enfrentou algumas resistências tanto na formação dos grupos quanto na leitura dos problemas e no compartilhamento das ideias. Nas primeiras aulas, eles realizavam a leitura individual e, a partir daí, cada um tentava resolver sozinho. Foi preciso lembrá-los diversas vezes sobre como deveriam proceder durante o estudo. Porém, com o decorrer das aulas, a metodologia parecia ter sido internalizada, pois a partir de um certo momento não foi mais necessário mencionar as dez etapas. Por conta própria, eles se organizavam em trios ou em duplas, conforme o número de alunos presentes. Porém, algumas vezes foi necessário que eu alterasse os grupos formados devido à tendência que eles tinham em socializar sempre com os mesmos colegas, o que, embora não fosse ruim, poderia limitar as diversas possibilidades de aprendizagem.

A leitura dos problemas continuou necessitando de estímulos até o final do reforço. Eles liam uma vez e, como não entendiam o problema, pediam logo a minha ajuda. Foi preciso muita insistência até que eles entendessem a importância de repetir a leitura para facilitar a compreensão dos problemas, destacando os termos desconhecidos para que eles mesmos procurassem pelos significados.

Na resolução dos problemas, eles inicialmente demonstravam muita insegurança de como fazer e se o que estavam fazendo era o certo. Por diversas vezes, foi necessário atentá-los para as etapas de resolução de um problema proposta por Polya (1995), principalmente a etapa da verificação. Eles também tiveram muita resistência em registrar os cálculos e as estratégias, e quando o faziam, era de forma desorganizada – um exemplo disso pode ser visto na Figura 11. Entretanto, com o passar das aulas, a necessidade de organização foi percebida tanto para facilitar o entendimento do problema quanto para diminuir a probabilidade de erros, embora estes não sejam empecilhos à aprendizagem se forem explorados adequadamente pelo professor ao rever e discutir os conceitos envolvidos, apresentando ou estimulando o uso de outras estratégias de resolução e até mesmo “planejando a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido” (BRASIL 2001, p. 59).

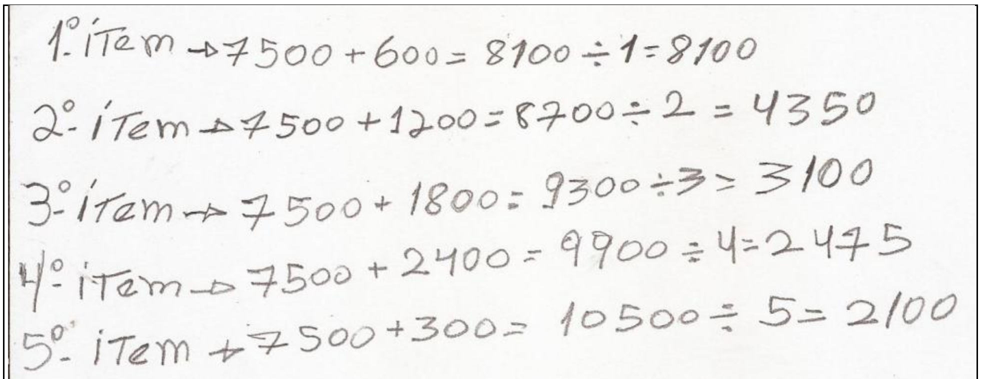
Figura 11 – Resolução do problema 17 pelo trio A1, A3 e A9.



Fonte: a própria autora.

A Figura 12 ilustra o avanço no quesito registro e organização de uma dupla ao propor uma resolução para o problema 51, mesmo contendo equívocos no esquema. Foi a partir dessa "organização" que após as intervenções realizadas, eles conseguiram chegar à equação correta, conforme explanado na parte final do capítulo anterior.

Figura 12 – Resolução do item a do problema 51 pela dupla A4 e A8.

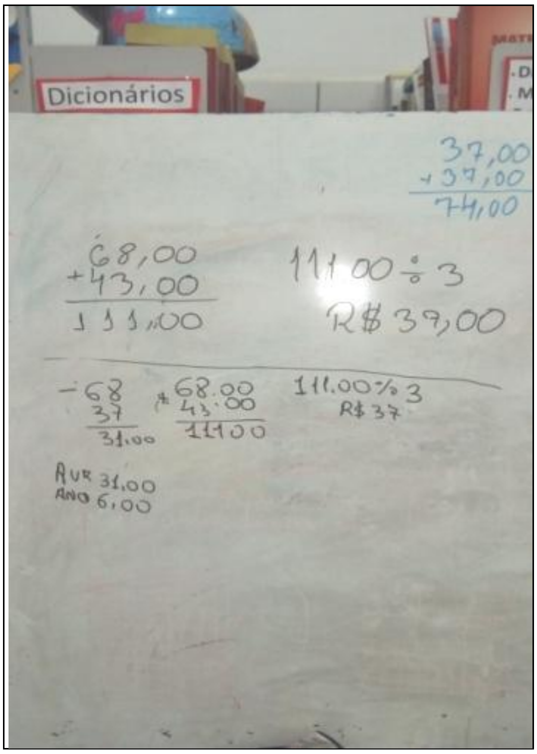


Fonte: a própria autora.

O registro das resoluções na lousa também se mostrou um desafio, principalmente nas primeiras aulas, em que ninguém se voluntariava a ir ao quadro, sendo necessário escolher quem do grupo faria o registro. Ao passar do tempo, essa etapa ficou mais natural; porém, os alunos que se disponibilizavam a ir ao quadro eram sempre os mesmos, apesar da insistência da docente para que os colegas também participassem desses registros.

As anotações na lousa, em sua maioria, eram feitas pelos alunos A2, A3, A4 e A9. Estes também foram os alunos com maior frequência nas aulas. A justificativa dada para essa resistência era a vergonha de falar à frente da sala. Entretanto, o aluno A2, que era o mais tímido de todos, segundo a descrição da coordenadora e a observação nas aulas de reforço, foi um dos alunos que mais foi ao quadro expor suas resoluções. Isso aconteceu gradativamente, indicando que a compreensão do conteúdo e as interações com os colegas do grupo contribuíram para a confiança na exposição de ideias. A Figura 13, na página seguinte, mostra um dos registros da resolução na lousa nas aulas iniciais.

Figura 13 – Resolução na lousa do problema 2.



Fonte: acervo da autora.

O momento da plenária, a depender do número de alunos presentes, era uma verdadeira confusão nas aulas iniciais. Todos queriam falar ao mesmo tempo, não conseguindo escutar aos colegas, o que dificultava a interação e a discussão das ideias. Era necessário mediar boa parte da aula para que eles se entendessem e compreendessem o processo de resolução para a formalização do conceito envolvido. Quando havia mais de uma maneira de resolução, a busca pelo consenso era feita através de várias indagações da docente até que o resultado esperado fosse alcançado.

Após a formalização do conteúdo, a proposição de novos problemas mostrou ser bastante favorável não só pela concretização do que aprenderam, mas também para melhorar a confiança deles em suas capacidades, uma vez que, quando não precisavam tanto das minhas intervenções, eles percebiam que estavam aprendendo e sentiam-se mais autoconfiantes, o que comprova as ideias defendidas por Allevato e Onuchic (2011).

A frequência dos alunos mostrou estar estritamente relacionada ao desenvolvimento deles ao longo das aulas. A partir das avaliações diagnósticas inicial e final, pode-se ver o avanço de cada um, conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Resultado inicial e final das avaliações diagnósticas por aluno.

ALUNO	ACERTOS		ERROS		EM BRANCO	
	Início	Fim	Início	Fim	Início	Fim
A1	0	2	7	9	4	0
A2	0	9	5	2	6	0
A3	0	6	9	5	2	0
A4	4	11	6	0	1	0
A5	1	1	6	8	4	2
A6	0	3	5	6	6	2
A7	2	4	8	7	1	0
A8	1	7	8	4	2	0
A9	3	8	7	3	1	0
A10	1	4	8	6	2	1

Fonte: a própria autora.

A avaliação diagnóstica inicial continha onze questões, das quais quatro abordavam operações com números positivos e negativos, duas eram sobre razão e proporção, duas traziam expressões numéricas e três tratavam de equações de 1º grau. Ela foi aplicada aos alunos presentes no início da primeira aula (A1, A2, A3 e A4) e aos demais alunos no início da segunda aula. A avaliação diagnóstica final continha as mesmas questões da inicial e também precisou ser aplicada em dois momentos. Na última aula (dia 11 de julho de 2018), os alunos A2, A4, A8, A9 e A10 realizaram o pós-teste. Para atestar o desempenho dos demais estudantes, foi necessário pedir a colaboração da professora titular da turma para aplicar a avaliação no retorno do recesso escolar, em 1º de agosto de 2018.

A Tabela 2 apresenta o levantamento do número de acertos, erros e questões deixadas em branco tanto na avaliação inicial quanto final, dando um comparativo acerca da condição dos alunos nos dois momentos.

De modo geral, é possível notar um aumento no número de acertos na avaliação final em comparação com a inicial. Em alguns casos, houve queda no número de erros. As questões deixadas em branco também tiveram uma queda significativa em todos eles. Os três alunos que ainda deixaram alguma questão sem resolver na avaliação final foram os que tiveram as menores frequência nas aulas, indicando que o comparecimento está relacionado ao avanço dos alunos e que as aulas com a metodologia aplicada contribuíram para a melhoria da autoconfiança deles.

É preciso destacar os dois alunos que frequentaram todas as aulas: A2, que tem dezoito anos e ainda estava cursando o 8º ano após ter repetido o 7º ano três vezes; e A4, que, embora tenha repetido de ano várias vezes, não tinha na escola registros de indisciplina além daqueles referentes à não realização de atividades. O avanço deles foi notável não apenas em conteúdo, mas também em relação ao comportamento. Ambos eram alunos tímidos, inseguros, sem muitas perspectivas, mas que, ao longo das aulas, foram adquirindo autoestima e confiança, a ponto de demonstrarem interesse em realizar as provas do ENCCEJA para adiantar seus estudos. O aluno A4 conseguiu aprovação nessa prova em todas as disciplinas e o aluno A2 só conseguiu aprovação em História, Geografia e Matemática, tendo que refazer as provas das demais disciplinas no ano seguinte.

Quando comparamos o avanço dos alunos em relação às avaliações diagnósticas, observamos que as questões com o maior número de acertos foram aquelas relacionadas às operações com números positivos e negativos. Esse também foi o conteúdo com o maior número de aulas (8) e de problemas trabalhados (30).

Já o último conteúdo – equações de 1º grau – teve um número menor de aulas (4) e problemas (7), além da necessidade de que duas dessas aulas ocorressem no mesmo dia, o que não se mostrou favorável, uma vez que os alunos demonstraram agitação e cansaço. Talvez por isso o rendimento nas questões relacionadas a esse conteúdo tenha sido baixo. As questões 5, 8 e 11 foram as que tiveram maior número de erros e mais foram deixadas em branco na avaliação final. A seguir, a Tabela 3 apresenta o número geral de acertos, erros e questões deixadas em branco pelos alunos nas duas avaliações diagnósticas.

Tabela 3 – Resultado inicial e final das avaliações diagnósticas por questões.

QUESTÕES	ACERTOS		ERROS		EM BRANCO	
	Início	Fim	Início	Fim	Início	Fim
01	2	5	6	5	2	0
02	2	7	8	3	0	0
03	2	6	8	4	0	0
04	0	7	8	3	2	0
05	0	3	7	6	3	1
06	4	9	5	1	1	0
07	1	6	6	4	3	0
08	0	2	5	7	5	1
09	1	7	9	3	0	0
10	0	6	7	3	3	1
11	0	2	0	7	10	2

Fonte: a própria autora.

Diante desses resultados, é possível concordar com Silva (2012) quanto à importância do comprometimento do estudante com a realização das atividades e seu interesse no conteúdo ensinado para que seja alcançado um resultado positivo no planejamento elaborado. Embora tente-se prever os resultados dessa prática em relação ao que o aluno aprende, o desejo dele em aprender é requisito essencial para que ele se desenvolva.

4.3 RELAÇÃO PROFESSOR-ALUNO NA RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS PROPOSTOS

Lembrando da importância de o professor adotar uma postura de facilitador e mediador do processo de ensino-aprendizagem conforme o PCN (BRASIL, 2001), busca-se analisar em quais situações as interferências nesse sentido se mostraram mais necessárias no momento da resolução dos problemas e de que maneira elas ocorreram.

Conforme relatado no item 4.1, poucos problemas foram classificados pelos jovens como “fáceis” porque não precisaram de ajuda durante a resolução. Na grande maioria, essa ajuda se mostrou necessária com pouca ou maior intensidade, a depender da dificuldade apresentada pelos alunos.

As intervenções ocorriam sempre na forma de perguntas diretas, que os ajudassem a raciocinar sobre que o problema pedia. Por exemplo, na resolução do problema 10, em que o aluno A5 percebeu que, ao final das multiplicações, todos os resultados terminavam em 5 porque um dos fatores era 5, foi perguntado:

> P: E porque você tem certeza de que o resultado das multiplicações terá como valor de unidade 5? Não poderia terminar em zero?
>
> A5: Só terminaria em zero se um dos números fosse par. Como todos são ímpares, então tem que terminar em 5!

Em alguns problemas, poucas perguntas eram suficientes para ajudá-los a raciocinar corretamente; em outros, as intervenções eram mais prolongadas. O número de perguntas utilizadas nessas intervenções variava, dependendo se a dúvida deles precisava apenas de interpretação do problema, se era falta de algum pré-requisito ou se havia o desconhecimento de algum conteúdo necessário para a resolução.

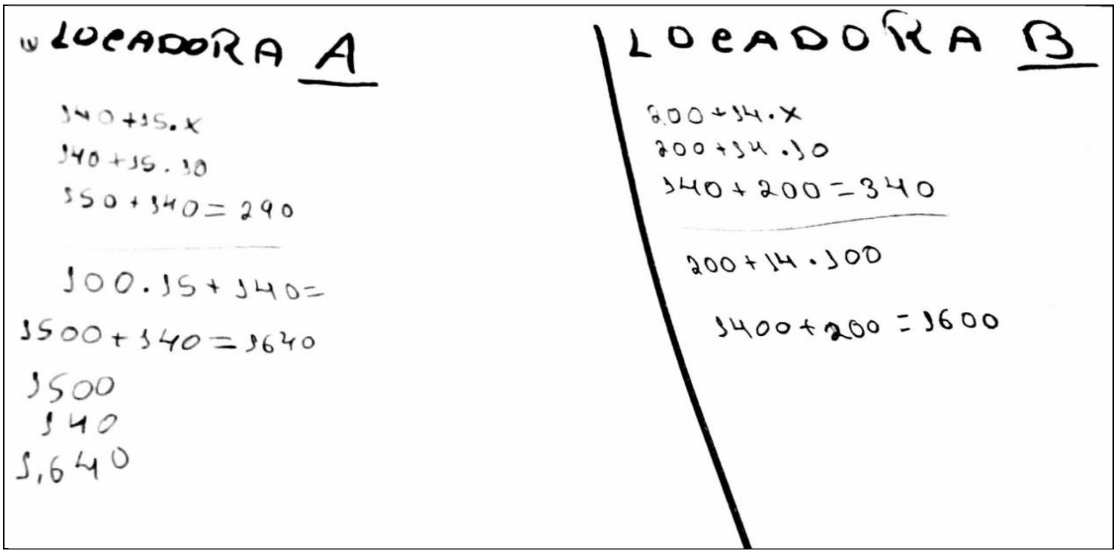
Inicialmente, quando demonstravam alguma dúvida ou faziam uma pergunta, os jovens esperavam por uma resposta direta. Não gostavam de ser respondidos com outra pergunta, até porque tinham muito medo de responder errado. O processo para que se acostumassem com isso foi relativamente rápido: a partir da terceira aula, já não havia estranhamento ou reclamações das perguntas. Eles perceberam que aquelas perguntas eram, na verdade, um bate-papo que os ajudava a raciocinar, a avançar e a aprender coisas novas.

Durante essas intervenções, foram realizadas avaliações do processo para perceber as dificuldades em leitura, tabuada, divisão, frações e termos técnicos (como, por exemplo, média e fuso horário).

Também eram necessárias intervenções para estimulá-los a resolver os problemas em vez de perderem tempo com conversas desnecessárias ou descontextualizadas. Além disso, no momento da plenária, principalmente nas aulas iniciais, a intervenção mostrou-se necessária ora para colocar um pouco de ordem nas falas, ora para fazer com que falassem. Depois de algum tempo, já sabendo como funcionava a metodologia da aula, isso não foi mais necessário.

Alguns dos problemas que mais exigiram intervenções foram os de equações de 1º grau. Elas se destacam no problema 45, quando os alunos, após muitas discussões entre si, determinaram que precisavam descobrir qual locadora cobrava mais barato. Para isso, eles anotaram as regras de cobrança de cada locadora e passaram a fazer vários testes, conforme a Figura 14.

Figura 14 – Resolução do problema 45 pelos alunos A3, A4 e A8.



Fonte: a própria autora.

A expressão algébrica apresentada no topo de cada resolução só foi estabelecida após as intervenções:

> P: Vocês determinaram uma expressão numérica corretamente. Mas assim vocês teriam que calcular para cada quilômetro que ele rodar. Como poderíamos determinar uma expressão que valesse para encontrarmos os valores pagos para qualquer distância percorrida?
>
> A3: Aí não sei não! Já deu muito trabalho fazer essas contas todas! É muita multiplicação!
>
> P: Existem valores que se repetem em todas as contas?

> A4: Tem sim. Mas tem também valores que mudam!
>
> P: Esses valores que mudam se referem a que?
>
> A4: Aos quilômetros rodados.
>
> P: E se, no lugar dos quilômetros, colocássemos uma letra, como ficaria?
>
> A4: Que letra?
>
> P: Qualquer letra. Vocês podem escolher. É só para ela representar os valores que vão mudar sempre.
>
> A4: Na maioria das vezes se usa o x, não é?
>
> P: Sim, mas pode ser qualquer uma que queira.

Em seguida, explicaram a que conclusão chegaram com os valores encontrados:

> A4: Comparando os dois lados, se o pai for rodar pouco, é melhor ele usar a locadora A, mas se ele for pra longe, ele deve usar a locadora B.

Mesmo com um nível elevado de dificuldade no assunto, eles compreenderam o processo – tanto é que utilizaram a mesma estratégia e linha de raciocínio no problema seguinte (46), apesar dessa relação entre os problemas não lhes ter ocorrido imediatamente.

Embora o problema 40 apresentasse em seu enunciado palavras homônimas, isso não foi empecilho para sua interpretação e resolução. A palavra “deve” aparece primeiro na sentença com o sentido de dívida e posteriormente com o sentido de ter. Assim, para a determinação da expressão numérica correspondente àquela situação, os alunos atribuíram o sinal negativo aos três primeiros valores e positivo ao quarto valor, uma vez que este era o valor que a pessoa deveria/teria que receber. A partir da leitura compartilhada, os grupos já entenderam o sentido das duas palavras e fizeram as associações de positivo e negativo após algumas trocas de ideias entre os próprios integrantes do grupo, sem precisar de intervenções mais específicas da professora, embora os cálculos não tenham sido realizados tão prontamente, pois ainda houve a necessidade de relembrar o raciocínio de como realizar adição com números positivos e negativos.

Ao final das aulas, foi possível perceber que alguns deles conseguiam fazer conexões com o que já haviam aprendido, reafirmando o que Allevato e Vieira

(2016) dizem sobre o ensino através da resolução de problemas: que ele possibilita a construção de conceitos matemáticos pelos próprios alunos ao confrontarem antigos e novos conhecimentos.

A aplicação da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da Resolução de Problemas exigiu muito esforço físico e mental da professora-pesquisadora: físico porque foi preciso permanecer em pé e caminhando entre os grupos durante todo o tempo de aula e, muitas vezes, elevar o tom da voz a fim de fazer-se ouvir em meio às trocas de ideias entre os alunos; e mental porque a todo momento era preciso buscar meios alternativos para fazer as intervenções para que elas pudessem ser eficientes e se ajustassem às necessidades individuais dos alunos. Isso era exaustivo ao final das aulas. Mesmo assim, ao perceber o envolvimento dos alunos e seu desenvolvimento gradativo (mesmo que pequeno), havia alegria e satisfação em poder contribuir de alguma forma para isso.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, foi possível verificar a importância da adoção do papel de mediador ou facilitador no processo de ensino-aprendizagem e do respeito às diferentes condições e estilos de aprendizagem dos alunos, a fim de favorecer a aprendizagem da Matemática.

Com a Resolução de Problemas como base para as atividades nas aulas de reforço, os alunos tiveram a possibilidade de construir os conceitos matemáticos que ainda não haviam sido aprendidos, pois a dinâmica intrínseca da Resolução de Problemas oferece a problematização antes da conceituação, obtida por meio das mediações do professor e das relações interpessoais entre os alunos. Ao resolverem os problemas em grupo, de forma colaborativa, eles têm a oportunidade de discutir, explicar suas ideias, validar ou descartar argumentos e resoluções, enriquecendo, assim, seu poder matemático (CARVALHO, 2009).

As recomendações dos documentos oficiais para os professores na adoção da resolução de problemas como meio de ensinar Matemática, e não como meros exercícios, são condizentes com a metodologia proposta por Onuchic (1999). É através das diversas e constantes interações entre os alunos e das mediações do professor, proporcionadas pela metodologia de Resolução de Problemas, que o conhecimento vai sendo construído.

Respondendo ao problema de pesquisa, pode-se afirmar, a partir dos dados coletados e analisados, que a metodologia de Resolução de Problemas contribuiu tanto para a construção de conceitos novos quanto para reafirmar conceitos anteriormente aprendidos de modo favorável ao desenvolvimento da autonomia dos alunos no processo de sua aprendizagem, tornando-os mais confiantes.

Os alunos com maior índice de frequência demonstraram melhor rendimento, principalmente no conteúdo *operações com números positivos e negativos*, o qual teve maior número de aulas e problemas resolvidos. Pode-se dizer que o conceito desse conteúdo foi compreendido pelos alunos, sanando as dificuldades apontadas pela professora regular deles e identificada na avaliação diagnóstica, o que indica que o tempo disponibilizado para cada conteúdo influencia na sua compreensão. Os conteúdos *expressões numéricas* e *equação de 1º grau* não foram trabalhados tão longamente e nem tão bem compreendidos quanto o primeiro. Assim, para se propor um programa de reforço escolar, é preciso levar em consideração a possibilidade de selecionar conteúdos-chave (ao invés de abarcar vários conteúdos) e trabalhá-los mais exaustivamente do que em uma aula convencional.

Outro ponto que deve ser levado em consideração é o número de alunos em sala, pois naquelas aulas em que estiveram presentes uma quantidade menor de alunos, a professora pôde dar maior assistência às dificuldades específicas de cada um deles. Isso ocorreu devido à dinâmica da metodologia adotada. As atividades em grupo geram muita confusão e diversos conflitos que precisam ser mediados pelo professor. Se existe um número maior de alunos ou grupos, esses conflitos também aumentam e um professor pode não ter condições de arbitrá-los satisfatoriamente. De fato, o papel do professor em mediar as interações de modo a estimular a participação e potencializar o aprendizado mostra-se fundamental, pois é a partir das intervenções do professor que as posturas dos alunos entre si e diante dos problemas vão se alterando.

Pode-se dizer que o objetivo geral de pesquisa foi alcançado ao verificar no caso estudado que a Resolução de Problemas contribuiu para a melhora do processo de ensino-aprendizagem dos alunos com defasagem idade-série, provavelmente por estimular a troca de conhecimentos e ideias tanto entre os alunos quanto por meio das mediações da professora. A partir das categorias de análise emergidas, das observações das aulas de reforço e do material produzido pelos alunos, é possível identificar que os tipos de problemas preferidos por eles, os quais surtiram melhores resultados, foram os classificados como convencionais e verbais, talvez pela forma de apresentação, pela estrutura semântica e pela posição da incógnita, contribuindo para reduzir dificuldades na aprendizagem de resolução de problemas, conforme defendido por Henklain (2012). Assim, em aulas de reforço de Matemática, principalmente para alunos com defasagem de aprendizado, esses problemas convencionais e verbais mostram-se os mais indicados.

As categorias *postura dos alunos diante dos problemas, postura dos alunos relativa ao processo ensino-aprendizagem e relação professor-aluno na resolução de problemas*,analisadas no capítulo 4,possuem relação uma com a outra. Por exemplo, dizer que os alunos não tiveram muita resistência em resolver os problemas remete à postura do professor em estimulá-los, assim como a variação das estratégias propostas por eles remete à mediação e ao estímulo do professor para que buscassem novos caminhos diferentes daqueles costumeiros – ou que, em ambas as situações, os alunos já desenvolveram sua autonomia e/ou dominam o conteúdo.

Embora a metodologia de ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas proposta por Allevato e Onuchic (2014) tenha sido elaborada pensando numa sala de aula regular, assim como as orientações dadas pelos PCN, seu uso também mostrou ter grande relevância em aulas de reforço para alunos com dificuldade de aprendizagem, talvez até com uma facilidade maior de aplicação dessa metodologia por ter um número menor de alunos para o professor dar assistência individual e fazer as devidas intervenções/mediações nas discussões em grupo e em plenária. Há concordância com Fernandes (2016) em dizer que o uso dessa metodologia estimula a participação dos alunos e favorece a mudança no comportamento deles.

A condição social dos alunos pode não ter emergido claramente nas aulas, mas a baixa frequência de alguns é indício de desmotivação ou das dificuldades na dedicação aos estudos – situação típica daqueles com famílias desestruturadas ou em situação de risco social. Por fim, acredita-se que a realidade social em que esses alunos estão inseridos influencie o modo como eles se portam diante de seus estudos e repercuta no seu rendimento escolar, assim como crê-se que isso repercuta nos resultados do reforço escolar. Entende-se que essa é uma questão que merece ser tratada mais profundamente, porém esta não será abordada neste trabalho.

REFERÊNCIAS

AVILA, Maria Aparecida Esteves. Produção Didática Pedagógica: Estratégias de leitura na linguagem matemática. In: **Os Desafios da Escola Pública Paranaense. PDE. Vol. III**. Paraná: 2013. Versão Online ISBN 978-85-8015-075-9.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes Novais; ONUCHIC, Lurdes De La Rosa. **Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, ano 33, n. 55, p. 133- 156, jul./dez. 2009.

______. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas?.*In:* ONUCHIC, L. R.; *et. al.* (org.). **Resolução de Problemas: Teorias e Práticas**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p.35-52.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes Novais; VIEIRA, Gilberto. **Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem**. *In:* Quadrante: Revista da Educação Matemática. Vol XXV, nº 01, 2016.

ANDRÉ, M. E. D. A.; **Etnografia da Prática Escolar**. São Paulo: Papirus, 2013.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática, 7**. 3ª ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. Diário Oficial da República Federativa do Brasil, Brasília, DF, 1996.

______. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC, 2001.

______. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2013.

______. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC 3ª versão**. Brasília, DF, 2017.

CAMPBELL, Guy; MORAN, Paul. **Ginástica Cerebral: Jogos para estimular o raciocínio e deixar os neurônios em forma**. Rio de Janeiro: Ediouros, 2012.

CARVALHO, Carolina. Comunicações e interações sociais nas salas de Matemática. In: LOPES, C. A. E. & NACARATO, A. M. (Orgs.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1 ed.; Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José. **Matemática nos dias de hoje, 7º ano: na medida certa**. 1. Ed. São Paulo: Leya, 2015.

CHAVANTE, Eduardo. **Convergências: Matemática 6º ano,** anos finais, Ensino Fundamental. 1ª ed. São Paulo: Edições SM, 2015 a.

______. **Convergências:Matemática 7º ano, anos finais**, Ensino Fundamental. 1º ed. São Paulo: Edições SM, 2015 b.

CHEVALLARD, Yves. **Sobre a Teoria da Transposição Didática: algumas considerações introdutórias.** Revista de Educação, Ciência e Matemática, v. 3, n. 2, maio/ago. 2013.

DAMIANI, Magda Floriana. **Sobre pesquisas do tipo intervenção**. XVI Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino. UNICAMP: Campinas, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática:** 1ª a 5ª série para estudantes do curso de Magistério e professores do 1º grau. 12ª ed. São Paulo: Ática, 2003.

DINÂMICA da ilha deserta. c 2018. Disponível em: <http://e1conceito.com.br/site/dow-dinamicas/dinamica_da_ilha.doc>. Acesso em: 26 fev. 2018.

DINÂMICAS passo a passo. c 2016. Disponível em <www.dinamicaspassoapasso.com.br/2016/05/dinamica-raciociio-logico-tomda-de.html>. Acesso em 01 mar. 2018.

ESTRATÉGIA. c 2018. Disponível em <www.significados.com.br/estrategia>. Acesso em 27 out. 2018.

FERNANDES, José Aparecido da Silva. **Ensino e aprendizagem de divisibilidade através da resolução de problemas:** experiência com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental. 2016. 220 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, UFES: São Mateus, 2016.

FERRO, Maria da Glória Duarte; PAIXÃO, Maria do Socorro Santos Leal. **Psicologia da aprendizagem**: Fundamentos teóricos-metodológicos dos processos de construção do conhecimento. Teresina: EDUFPI, 2017.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis; CARDOSO, Cleusa de Abreu. Educação Matemática e letramento: textos para ensinar Matemática, Matemática para ler o texto. In: LOPES, C. A. E. & NACARATO, A. M. (Orgs.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1 ed.; Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 1999.

HENKLAIN, Marcelo Henrique Oliveira. **Efeitos da formação de classes de equivalência sobre a solução de problemas de adição e subtração**. 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) – Programa de Pós-Graduação em Psicologia, UFSCar: São Carlos, 2012.

HERCUN, Deborah. **Aumente seu QI: Testes desafiadores para desenvolver sua capacidade**. São Paulo: Marco Zero, 2004.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. 2ª edição. Rio de Janeiro: EPU, 2014.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Estudo de Caso: Uma Estratégia de Pesquisa**; 2. Ed.; São Paulo: Atlas, 2008.

MOURA, Graziela Ribeiro Soares. **Crianças com dificuldades em resolução de problemas matemáticos: avaliação de um programa de intervenção**. 2007. 156 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Especial, UFScar: São Carlos, 2007.

NASCIMENTO, Sebastião Vieira do. **A Matemática do Ensino Fundamental e Médio Aplicada à Vida**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2011.

ONUCHIC, Lurdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In:* BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora da UNESP, cap.12, pp. 199-220.1999.

______. **A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? Para onde iremos?** Espaço Pedagógico: Passo-Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan./jun. 2013. Disponível em www.upf.br/seer/index.php/rep.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novais Reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas. *In:* BICUDO, M. A. V.; BORBA, M de C. (org). **Educação matemática: pesquisa e movimento**. São Paulo: Cortez, 2005, p. 213 - 231.

______. As diferentes personalidades do número racional. BOLEMA. Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, 2008, p. 79 a 102.

______ (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)**, UNESP – IGCE. – v.5, n. 41, Dezembro de 2011.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; BOTTA, Luciene Souto. **Reconceitualizando as quatro operações fundamentais**. Revista da Educação Matemática, Ano 6, nº 4, 1998.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 3ª ed. revi. e ampl. 1ª reimpressão. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

QUEIROZ, Jonas Marques dos Santos. **A resolução de problemas da pré-álgebra e álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras**. 2014. 144 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, UFSCar: São Carlos, 2014.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1997.

RESOLUÇÃO de problemas. c 2011. Disponível em: <HTTPS://ensinodematematica.bogspot.com/2011/02/resolucao-de-problemas-para-5-serie.html>. Acesso em: 15 mai. 2018.

SANTOS, Vinício de Macedo. Linguagem e comunicação na aula de Matemática. In: LOPES, C. A. E. & NACARATO, A. M. (orgs.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1 ed.; Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. Ver. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, Luiz Paulo Moreira. **Exercícios de Matemática**. c.2018. Disponível em <https://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-problemas-envolvendo-expressoes-numericas.html>. Acesso em: 15 mai. 2018.

SILVA, Maristela Alves. **Elaboração de estudantes do 7º ano do ensino fundamental sobre números inteiros e suas operações**. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, UFSCar: São Carlos, 2012.

SOUZA, Maria Alice Vieira Ferreira de; GUIMARÃES, Henrique Manoel. **A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como**. Quadrante, Lisboa, v. XXIV, n.2, p.135-162, 2015.

SOUZA, Maria Alice Veiga Ferreira de; WROBEL, Julia Schaetzle. **Café, leite e Matemática**. Vitória: Edifes, 2017.

STANCANELLI, Renata. Conhecendo Diferentes tipos de problemas. *In:* SMOLE, K. S. & DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática**. Porto Alegre: Artmed, pp. 101-120, 2001.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 52ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2000.

ZEQUIM, Katia Cristina. **A resolução de problemas, a modelagem matemática e o desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos do 7º ano do ensino fundamental**. 2014. 106 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, UFSCar: São Carlos, 2014.

ZORZAN, Adriana Salete Loss. **Ensino-Aprendizagem: Algumas Tendências na Educação Matemática**. Revista de Ciências Humanas. V.8. n. 10. p. 77 – 93. Junho de 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A -

Avaliação diagnóstica inicial e final

Reforço Escolar em Matemática com a Utilização da Metodologia de R P

PESQUISADORA: Andia Ribeiro Alves

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA INICIAL

ALUNO(A):____DATA: ____/____/____

1) Carla trabalha como digitadora numa editora de livros. Para entregar um trabalho em 12 dias, Carla digita 20 páginas por dia. Quantas páginas ela precisa digitar por dia para entregar o mesmo trabalho em 10 dias?

2) No quadro abaixo estão registradas as temperaturas máximas e mínimas, em graus Celsius, da cidade de Porto Alegre durante uma semana no período de inverno.

DIA	MÍN(°C)	MAX(°C)
DOMINGO	0	10
SEGUNDA	-1	7
TERÇA	-8	0
QUARTA	-6	-1
QUINTA	-8	7
SEXTA	2	8
SÁBADO	-7	7

Em que dia da semana ocorreu a maior variação de temperatura nessa cidade?

3) Caminhoneiros marcam greve e ameaçam parar rodovias.

Segundo a concessionária Autopista, a pista sentido São Paulo está bloqueada no quilômetro 513, em Igarapé, Região Metropolitana de Belo Horizonte. Eram três quilômetros de filas de congestionamento às 3h30.

O segundo bloqueio ocorre desde as 19 horas de quinta-feira, também na pista sentido capital paulista, no quilômetro 545, em Itatiaiuçu. Lá são 13 quilômetros de trânsito parado. No quilômetro 589, em Carmópolis de Minas, a rodovia também está bloqueada pelos caminhoneiros, mas em ambos os sentidos.

São 9 quilômetros de congestionamento em direção a Belo Horizonte e três quilômetros no sentido São Paulo.

Qual a quilometragem total de trânsito parado provocada pelos caminhoneiros?

4) McDonald's abre em Londres o maior restaurante da rede no mundo.

A unidade fica no Parque Olímpico e vai atender visitantes, atletas, autoridades e a imprensa internacional nos 29 dias de Jogos Olímpicos e Paraolímpicos.

São 3 mil metros quadrados de área, dois andares, lugar para 1500 clientes, 26 caixas registradoras. A cozinha equivale a quatro cozinhas de restaurantes comum e vai produzir aproximadamente 1,75 milhão de refeições durante todo o período.

Todo o material usado no restaurante será reciclado, inclusive o mobiliário e os equipamentos, que serão realocados para outros restaurantes da rede no Reino Unido. Qual a quantia aproximada de refeições produzidas por dia durante esse período?

5) A campanha Criança Esperança é um dos projetos apoiados pela UNESCO e foi lançada em 1986, em um programa de televisão com duração de 9 horas.

Em 23 anos de existência, a campanha já recebeu mais de 200 milhões de reais em doações, que foram investidos em mais de 5 mil projetos sociais brasileiros apoiados por essa campanha.

Em 2006, 73 mil telespectadores contribuíram para a campanha. As doações eram feitas por telefone, nos valores de 7 reais, 15 reais e 30 reais.

Suponha que em 2006, em um determinado momento do programa, a situação era a seguinte:

- 200.000 ligações para doação de 7 reais;
- 100.000 ligações para doação de 15 reais;
- 4.400.000 reais arrecadados com todas as ligações.

Nesse momento, qual o número de ligações para doação de 30 reais?

6) Em uma cidade do Alasca, o termômetro marcou –15°C pela manhã. Se a temperatura descer mais 13°C, quanto o termômetro irá marcar?

7) Amanda, Bianca, Carolina, Diana, Érica e Flávia gostariam de dançar com Leo. Ele queria escolher uma para dançar valsa e outra para dançar tango. Qual a quantidade de escolhas distintas que Leo poderia fazer?

8) Dom Pedro II foi aclamado segundo imperador do Brasil com x anos de idade e iniciou um reinado que só terminaria com a República, y anos depois. Determine com que idade D. Pedro II iniciou seu reinado e quantos anos reinou, resolvendo as equações:

$$x - y = -52 \qquad e \qquad 10x - y = 2$$

9) Vamos examinar a tabela de lucros e prejuízos dos vários setores do supermercado Custoso S.A., em dois semestres:

Lucro e prejuízo (em mil reais)		
Setor	**1º semestre**	**2º semestre**
Alimentos	50	70
Roupas	30	–30
Eletrodomésticos	–50	80
Brinquedos	–30	10
Utilidades	–30	–20

a- A partir da tabela acima, qual dos setores obtiveram os maiores lucros? E os maiores prejuízos?

b- Qual o resultado financeiro do supermercado ao final do ano?

c- Se você fosse dono do Supermercado Custoso S.A, que medidas tomariam para aumentar seu lucro?

10) Uma empresa que dispunha de 500000 reais de saldo bancário, devido à crise financeira, passou a perder 50000 reais por mês. Nesse mês, a empresa ainda tem reservas de 300000 reais. Se este é o mês zero, um mês atrás seria o –1, dois meses atrás seria o –2 etc.

a) Usando os números 300000, –4 e –50000, escreva e calcule a expressão que dá as reservas da empresa no mês –4, isto é, quatro meses atrás.

b) Escreva e calcule uma expressão semelhante à anterior que dê as reservas da empresa no mês 4, isto é, daqui a quatro meses.

11) Encontre os valores dos números a, b e c nas sentenças:

a) [(256 : 16) : 2] : a= –2

b) [(256 : b) : 4] : 2 = –2

c) [(256 : 8) : c] : 4 = –2

APÊNDICE B –

Problemas trabalhados na aula 2

PROBLEMA 3

(CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015, p. 32) “Theo colocou os números na pirâmide mágica usando um segredo. Veja:

T				
H	E			
–2	O	–5		
–4	+2	+1	–6	
–1	–3	+5	–4	–2

a) Qual o segredo na colocação dos números?

b) Qual o valor dos números representados pelas letras?”

PROBLEMA 4

(OBMEP 2005) Marina, ao comprar uma blusa de R$ 17,00, enganou-se e deu ao vendedor uma nota de R$ 10,00 e outra de R$ 50,00. O vendedor, distraído, deu o troco como se Marina lhe tivesse dado duas notas de R$ 10,00. Qual foi o prejuízo de Marina?

PROBLEMA 5

Problema em tiras: Para os jogos de intercalasse desse ano, a professora de educação física resolveu registrar da seguinte forma: um time ganha 3 pontos por vitória, 1 ponto por empate e nenhum ponto em caso de derrota. Até hoje, cada time já disputou 20 jogos. Se um desses times venceu 8 jogos e perdeu outros 8 jogos, quantos pontos ele tem até agora?

Para os jogos de interclasse desse ano,	um time ganha 3 pontos por vitória,
a professora de educação física resolveu registrar da seguinte forma:	
1 ponto por empate	e nenhum ponto em caso de derrota.
Até hoje cada time já disputou 20 jogos	Se um desses times venceu 8 jogos
e perdeu outros 8 jogos	quantos pontos ele tem até agora?

Formulado pela pesquisadora.

APÊNDICE C –

Problemas trabalhados na aula 3

PROBLEMA 6

Um ônibus da empresa Santa Clara, com capacidade para 45 passageiros sentados está na rodoviária de Teixeira de Freitas, se preparando para ir até Alcobaça no dia de carnaval. O cobrador anota os passageiros que sobem em cada ponto de parada com um sinal (+) positivo e os que descem com o sinal (**–**) negativo, conforme tabela abaixo:

Partida				**Chegada**
Rodoviária	1ª parada	2ª parada	3ª parada	4ª parada
+45	+35	+27	+5	?
	–20	**–**28	**–**12	

Quantos passageiros desembarcaram na cidade de Alcobaça? Discuta com os colegas o resultado obtido. O que ele significa?

Formulado pela pesquisadora.

PROBLEMA 7

(AVILA, 2013, p. 38). Alice, Bernardo, Cecília, Otávio e Rodrigo são irmãos.
Sabemos que:

- Alice não é a mais velha;
- Cecília não é a mais nova;
- Alice é mais velha que Cecília;
- Bernardo é mais velho que Otávio;
- Rodrigo é mais velho que Cecília e mais moço que Alice.

Você pode descobrir a ordem em que nasceram esses 5 irmãos?

PROBLEMA 8

(OBMEP 2017) Artur deu duas notas de cem reais para pagar uma conta de R$ 126,80. Qual é o valor do troco que ele deve receber?

A) R$ 71,20
B) R$ 71,80
C) R$ 72,20
D) R$ 72,80
E) R$ 73,20

PROBLEMA 9

(OBMEP 2017) Ana listou todos os números de três algarismos, em que um dos algarismos é par e os outros dois são ímpares e diferentes entre si. Beto fez outra lista com todos os números de três algarismos em que um dos algarismos é ímpar e os outros dois são pares e diferentes entre si. Qual é a maior diferença possível entre um número da lista de Ana e um número da lista de Beto?

A) 795
B) 863
C) 867
D) 873
E) 885

PROBLEMA 10

(OBMEP 2017) Qual é o algarismo das unidades do número:

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19 - 2015?$$

A) 0
B) 1
C) 5
D) 6
E) 8

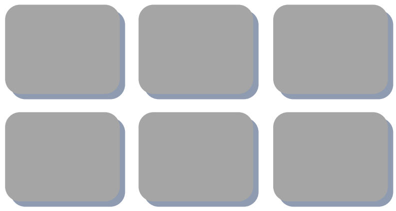
APÊNDICE D –

Problemas trabalhados na aula 4

PROBLEMA 11

Fazendo sentido: Os azulejos abaixo foram rearrumados. Você consegue descobrir a nova sequência a partir das dicas a seguir?

- A soma dos números do meio é 4.
- O número –5 fica imediatamente à esquerda do número 6.
- Os dois numeros à esquerda tem a mesma soma dos da linha de baixo.



Adaptado de Campbell e Moran (2012, p.35)

PROBLEMA 12

(HERCUN, 2004, p. 115). Insira os números de 1 a 9 (inclusive) na trilha de números para obter a resposta.

		10	–	43		20
+		X		÷		=
				11		
X		+		+		÷
				12		
÷		–		–		X

PROBLEMA 13

(HERCUN, 2004, p. 67). Utilizando os números e símbolos que aparecem na linha de cima em cada linha e coluna, complete este quebra-cabeça:

6	x	3	–	7	+	4	=	15
							=	27
							=	25
							=	29
=		=		=		=		
27		13		16		13		

APÊNDICE E –

Problemas trabalhados na aula 5

PROBLEMA 14

Fonte: Campbell e Moran (2012, p.19)

PROBLEMA 15

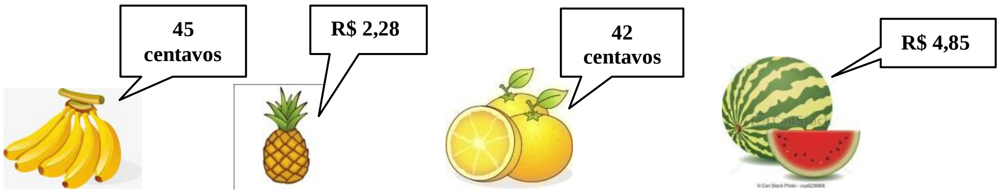
Valores das Letras: Que número é representado por qual letra? Substitua o ponto de interrogação.

B	A	A	C	2
B	B	C	C	–4
D	C	A	D	14
C	C	A	D	–1
?	6	0	+6	

Adaptado de Campbell e Moran (2012, p.30).

PROBLEMA 16

(CAMPBELL, MORAN, 2012, p. 33). **Ida ao mercado:** Você está em uma mercearia comprando ingredientes para uma farta salada de frutas. Você comprou 11 pedaços de frutas, pagou R$ 15,00 e recebeu 25 centavos de troco. O que comprou?



APÊNDICE F –

Problemas trabalhados na aula 6

PROBLEMA 19

A Loja Big Big está realizando uma promoção para comemorar seu aniversário de inauguração. Nessa promoção ela irá sortear um cliente que tenha efetuado a compra no crediário no mês de abril e abrirá mão de todas as prestações registradas dessa compra. Você fez uma compra, parcelando em 4 vezes de R$ 68,00 e foi contemplado nessa promoção. Usando números negativos, como você representaria essa situação? Levando em consideração apenas essa movimentação financeira, você ficará com saldo positivo ou negativo em seu orçamento?

Formulado pela pesquisadora.

PROBLEMA 20

Um mergulhador pretende imergir a –27 metros a fim de visualizar os destroços de um navio naufragado. Em sua primeira tentativa conseguiu descer até um terço da distância pretendida. A quantos metros esse mergulhador conseguiu descer na primeira tentativa?

Formulado pela pesquisadora.

PROBLEMA 21

Sandro começou um jogo com 40 pontos e nas 3 primeiras rodadas, de um total de 5, ele perdeu 30 pontos por rodada.

a) Quantos pontos Sandro perdeu nas 3 primeiras rodadas?
b) Com quantos pontos Sandro estava no fim das 3 primeiras rodadas?
c) Sabendo que nas duas últimas rodadas Sandro recuperou dois terços dos pontos que perdeu na primeira, determine com quantos pontos ele terminou o jogo.

Adaptado de Chavante (2015 b, p. 35)

APÊNDICE G –

Problemas trabalhados na aula 7

PROBLEMA 22

(CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015, p. 50). A famosa loja de roupas X & Y mostra sua previsão de lucros para o primeiro trimestre do ano.

	JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO
Roupa masculina	–3	–1	3
Roupa feminina	–4	–3	5
Roupa infantil	–1	0	1
Calçados, cintos, etc.	–2	–1	4

Como as pessoas compram muito no Natal, deixam de comprar em janeiro e fevereiro. Mas a loja terá grandes lucros nos outros meses. Sabendo que os números do quadro indicam milhões de reais, responda:

a) Quais setores terão lucro no primeiro trimestre? Quais terão prejuízo?
b) Considerando todos os setores, a loja terá lucro ou prejuízo no primeiro trimestre? De quanto?

PROBLEMA 23

(CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015, p. 52). Num jogo de cartas, eu e meu primo formamos uma dupla e passamos a tarde jogando contra meu pai e minha irmã. No começo, tivemos azar: ficamos devendo pontos. Depois, viramos o jogo, como você pode ver nesse quadro:

RODADA	NÓS	ELES
1ª	–125	315
2ª	–150	220
3ª	300	–110
4ª	420	–260
5ª	510	–200
6ª	280	–75

Qual a soma dos pontos do pai e da irmã?

Qual a soma dos pontos dos meninos?

Qual foi a diferença entre as pontuações?

Indique a operação que responde à pergunta do item anterior.

PROBLEMA 24

Ítalo e Julia, juntos, têm R$ 225,00. Marcos e Tânia estão no negativo. Juntos, os dois têm – R$ 82,00.

a) Quanto Ítalo e Júlia passarão a ter se Ítalo ganhar R$ 66,00 e Júlia gastar R$ 91,00?

b) Indique a resposta do item a com uma expressão envolvendo os números 225, 66 e 91.

c) Quanto Marcos e Tânia passarão a ter se Marcos gastar R$ 229,00 e Tânia ganhar R$ 285,00?

d) Indique a resposta do item c com uma expressão envolvendo os números (–82), 299 e 285.

Adaptado de Centurión e Jakubovic (2015, p. 38)

PROBLEMA 25

(CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015, p. 66). Dona Ester foi trabalhar e deixou dinheiro para seus 3 filhos com este bilhete: “Dividam igualmente o dinheiro. Beijos”.

O primeiro filho chegou, pegou 1/3 do dinheiro e saiu. O segundo chegou e não viu ninguém. Pensando que era o primeiro, pegou 1/3 do dinheiro que tinha pela frente e saiu.

O terceiro encontrou 4 notas de R$ 5,00. Achou que era o último, pegou tudo e saiu.

a) Que fração do dinheiro deixado pela mãe o segundo filho pegou?
b) Que fração do dinheiro deixado pela mãe sobrou quando o segundo filho saiu?
c) Quanto dona Ester deixou?
d) Devido ao engano do segundo filho, alguém foi beneficiado? Alguém foi prejudicado? Quem?

APÊNDICE H –

Problemas trabalhados na aula 8

PROBLEMA 26

(CHAVANTE, 2015 b, p. 36). “O lugar mais quente da Terra é o deserto de Lut, no Irã. Em 2005, a temperatura nesse local chegou a 70,7°C. Já a menor temperatura registrada na Terra ocorreu na Antártida, no dia 10 de Agosto de 2010, quando os termômetros marcaram –93°C. Qual a diferença de temperatura entre a maior e a menor temperatura registrada na Terra?”

PROBLEMA 27

(CHAVANTE, 2015 b, p. 36). Durante certo dia, em um torneio de jogos de inverno, os termômetros marcaram –4°C exatamente ao meio-dia. No período da noite do mesmo dia a temperatura caiu bruscamente, e às 23h a temperatura era 9°C menor que a registrada ao meio-dia. Qual foi a temperatura registrada às 23h?

PROBLEMA 28

(CHAVANTE, 2015 b, p. 37). Por volta de 1500 a.C. os egípcios criaram o relógio do sol. Esse relógio utilizava a posição da sombra causada pela projeção da luz do Sol sobre ele para determinar as horas. Em 1949 foi construído o relógio atômico, que utiliza as vibrações dos átomos para medir o tempo. O relógio atômico é muito preciso, de maneira que levaria cerca de 3 milhões de anos para atrasar ou adiantar 1 segundo. Qual a diferença, em anos, entre a invenção desses relógios?

PROBLEMA 29

(CHAVANTE, 2015 b, p. 37). Em um campeonato de pontaria na escola, cada equipe deve atirar bolinhas de jornal em pilhas com latinhas azuis e vermelhas com o objetivo de derrubar a maior quantidade de latinhas azuis sem derrubar as vermelhas. A cada latinha azul derrubada ganham-se 10 pontos e a cada latinha vermelha derrubada perdem-se 8 pontos. Vence a equipe que conseguir a maior pontuação média entre os quatro integrantes da equipe. Observe nos quadros a pontuação das equipes A e B.

Equipe A	
Jogador	**Pontos**
Mateus	28
Kátia	–34
Márcia	42
Antony	–12

Equipe B	
Jogador	**Pontos**
Evandro	58
Manuela	18
Michel	–26
Catarina	–14

Qual é a média de pontos de cada uma das equipes? Qual foi campeã?

APÊNDICE I –

Problemas trabalhados na aula 9

PROBLEMA 31

(OBMEP 2018) Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com sinais de adição: 123 + 4 + 56 + 7 + 89 = 279. Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 54?

PROBLEMA 32

(OBMEP 2018) Cada quadradinho na figura deve ser preenchido com um sinal de adição (+) ou de multiplicação (x). Qual é o maior valor possível da expressão obtida depois de preenchido todos os quadrinhos?

2 ☐ 3 ☐ 0 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 1

PROBLEMA 33

(CHAVANTE, 2015 a, p. 43). Uma loja de produtos esportivos tinha em seu estoque 2871 pares de chuteiras e recebeu uma nova coleção com 400 pares. No fim de uma semana após ter recebido a nova coleção, essa loja vendeu a sexta parte do total de chuteiras do estoque mais 32 chuteiras.

Considerar a sexta parte de um conjunto de dados significa organizar esse conjunto em seis partes, com a mesma quantidade de elementos cada, e considerar uma. Por exemplo, a sexta parte de 180 elementos é igual a 180 : 6 = 30, ou seja, 30 elementos.

a) Escreva e resolva uma expressão numérica que determine quantos pares de chuteiras restam no estoque.

b) Quantos pares de chuteiras foram vendidos durante esse fim de semana?

PROBLEMA 34

(CHAVANTE, 2015 a, p. 41). Nos itens apresentados a seguir, temos as operações de adição, multiplicação e subtração. Insira convenientemente os parênteses, para obter o resultado indicado

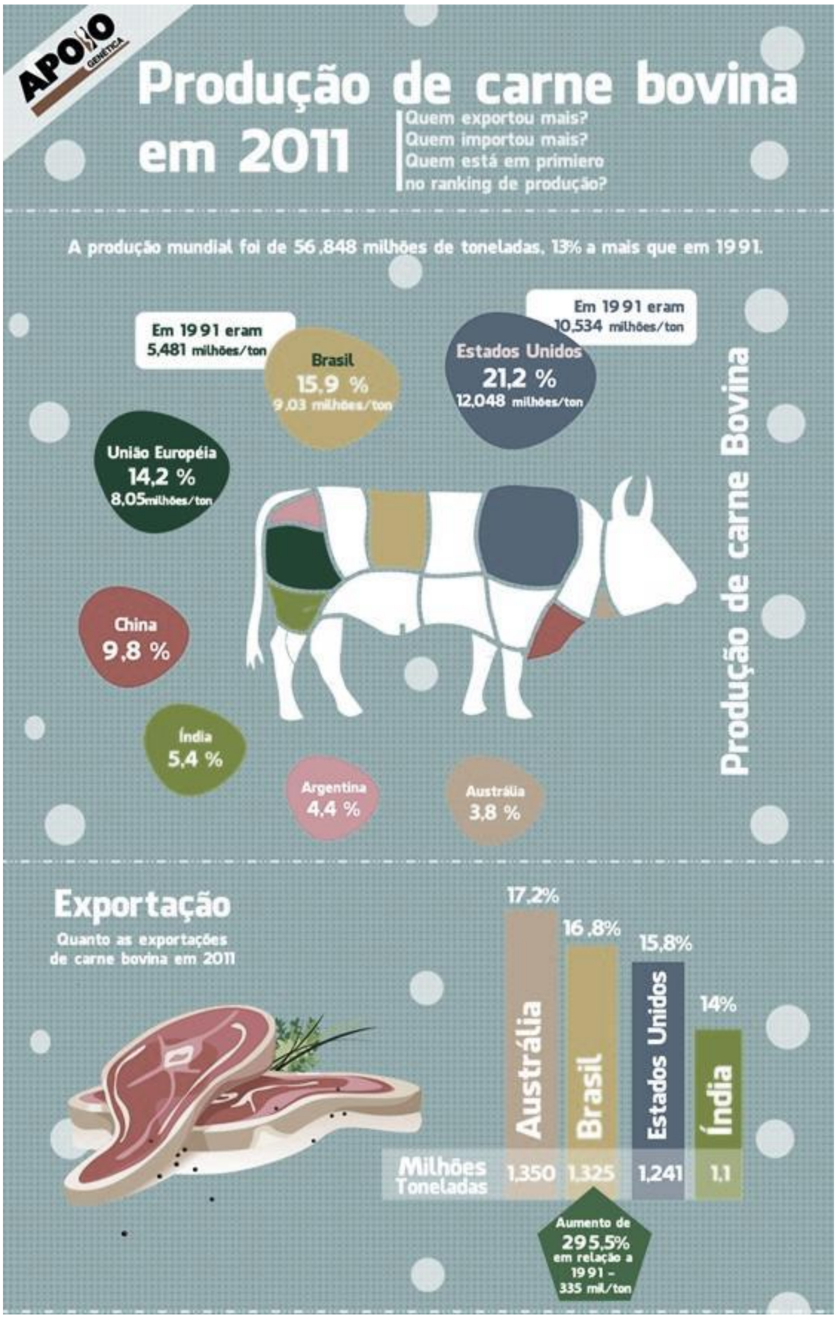
a) 3 . 5 – 2 + 1 , com resultado igual a 10.
b) 5 + 3 – 3 .5 , com resultado igual a 5.
c) 3 + 2 .4 , com resultado igual a 20.
d) 6 – 1 . 3 + 2 , com resultado igual a 25.
e) 9 + 3 . 5 – 1 , com resultado igual a 21.

APÊNDICE J –

Problemas trabalhados na aula 10

PROBLEMA 35

Observe o infográfico a seguir. Nele estão apresentadas a produção, em milhões de toneladas, de carne bovina em algumas localidades no ano de 2011.



a) Qual é a diferença de produção, em toneladas, entre o maior e o menor dos produtores de carne bovina?

b) Quantas toneladas a mais o Brasil precisaria ter produzido para atingir a maior produção?

c) Sabendo que, em 2011, a produção mundial foi de 56848000 t, escreva e resolva uma expressão numérica que determine a quantidade de carne bovina produzida pelos outros produtores, que não foram indicados no infográfico.

Adaptado de Chavante (2015 a, p. 34)

PROBLEMA 36

(CHAVANTE, 2015 a, p. 44). Durante um mês, certa empresa arrecadou R$ 80.000,00. Metade de toda essa arrecadação foi utilizada para repor o estoque, a oitava parte foi usada para pagar os funcionários, a décima parte pagou outras despesas e o restante foi o lucro dessa empresa.

a) Escreva e resolva uma expressão numérica que permita calcular o lucro desse mês na empresa.
b) Qual foi o total, em reais, pago:
    - aos funcionários?
    - para repor o estoque?

APÊNDICE K –

Problemas trabalhados na aula 11

PROBLEMA 37

(SILVA, 2018) Os professores de determinada escola precisavam fazer a contagem dos alunos vencedores dos jogos internos a fim de adquirir as medalhas para premiação. No sexto ano, são 50 alunos no total. Apenas a quinta parte deles recebeu medalhas no vôlei, e a metade recebeu medalhas no futebol. No sétimo ano, com 30 alunos, apenas as meninas, que representam um terço dos alunos da sala, foram premiadas no vôlei e todos os meninos foram premiados no futebol. Já no oitavo ano, foram 7 medalhas de ouro, 4 de prata e 3 de bronze. Por fim, o nono ano não participou da competição. Quantas medalhas foram compradas?

PROBLEMA 38

(SILVA, 2018) Que número representa metade do resultado da expressão numérica abaixo?

$$[(4 \cdot 5 - 6 \cdot 3):(5 \cdot 13 - 9 \cdot 7)]:[(12^2:6 \cdot 4):(6 \cdot 8 - 6 \cdot 7)]$$

PROBLEMA 39

(RESOLUÇÃO, 2011) Duas pessoas têm juntas 70 anos. Subtraindo-se 10 anos da idade da mais velha e acrescentando-se os mesmos 10 anos à idade da mais jovem, as idades ficam iguais. Qual é a idade de cada pessoa?

PROBLEMA 40

Edson é uma pessoa descuidada com dinheiro. Ele deve R$ 45,00 para Joana, R$ 43,00 para Joaquim e R$ 39,00 para Lorena. Disse que vai pagar a todos, porque deve receber R$ 110,00 por um trabalho de digitação de textos. Escreva uma expressão numérica que represente a condição final de Edson e depois especifique o seu saldo final.

Adaptado de Centurión e Jakubovic (2015, p. 49).

APÊNDICE L –

Problemas trabalhados na aula 12

PROBLEMA 41

Um camelô fez cinco vendas. Na primeira, teve prejuízo de R$ 8,00; na segunda, teve prejuízo de R$ 16,00; na terceira, teve lucro de R$ 23,00; na quarta, teve lucro de R$ 11,00, e na última, teve lucro de R$ 9,00. Pode-se calcular o saldo resultante desses quatro negócios efetuando quais cálculos? Mostre por meio de uma expressão numérica.

Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012, p.69).

PROBLEMA 42

(ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 81). Lúcio participou cinco vezes de um jogo no computador. Aconteceu o seguinte:

GANHOU 4	**PERDEU 3**	**GANHOU 8**	**PERDEU 5**	**GANHOU 13**

A) Qual a pontuação final?

B) Escreva uma expressão que traduza essa situação

PROBLEMA 43

Num torneio de xadrez foi combinado que cada vitória deveria valer 5 pontos, empate 2 pontos e derrota – 2 pontos. Perto do final do torneio Jeremias estava com 63 pontos. Caso Jeremias obtenha, até o final do torneio, 4 vitórias, 2 empates e 3 derrotas, qual o número de pontos com que ele terminará o torneio?

Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 84).

PROBLEMA 44

O saldo médio bancário é dado pelo quociente entre a soma dos saldos diários e o número de dias. Durante os cinco primeiros dias do mês de junho, o senhor Alfredo teve os seguintes saldos bancários:

Primeiro dia: + R$ 170,00

Segundo dia: + R$ 280,00

Terceiro dia: – R$ 780,00

Quarto dia: – R$ 100,00

Quinto dia: – R$ 120,00

Qual é o saldo médio do senhor Alfredo nesses cinco dias?

Adaptado de Andrini e Vasconcellos (2012, p. 83).

APÊNDICE M –

Problemas trabalhados nas aulas 13 e 14

PROBLEMA 45

(NASCIMENTO, 2011, p. 9). Pedro trouxe o seguinte problema:

Papai é viajante e precisa fazer uma viagem. Ele pretende alugar um carro numa das locadoras existentes na cidade. Ele visitou as duas locadoras e anotou o aluguel cobrado por cada uma. Na locadora A, o aluguel de um carro é de 140 u.m. mais 15 u.m. por cada quilômetro rodado; na B, o aluguel é de 200 u.m. mais 14 u.m. por quilômetro rodado. Qual locadora papai deverá escolher?

PROBLEMA 46

(NASCIMENTO, 2011, p. 27). Para encorajar as pessoas ao uso do sistema de transporte solidário, o Departamento de Trânsito de certa região ofereceu um desconto especial no pedágio para veículos transportando 4 ou mais pessoas. Há trinta dias, durante o horário matinal de maior movimento de carros, apenas 157 veículos obtiveram o desconto. Desde então, o número de veículos com direito ao desconto aumentou numa razão constante. Hoje, por exemplo, 247 veículos receberam o desconto.

a) Expresse o número de veículos com direito ao desconto, em cada manhã, como função do tempo.
b) Daqui a 14 dias, quantos veículos terão direito ao desconto?

PROBLEMA 47

(NASCIMENTO, 2011, p. 33) Suponha que você é proprietário de uma empresa. Nela foi realizado um teste psicotécnico, e a média dos pontos obtidos, nos últimos anos, tem sofrido um decréscimo constante. Em 1984, a média foi 582 pontos, enquanto que em 1989, foi apenas 552 pontos. Qual será a média de pontos em 1991?

PROBLEMA 48

(NASCIMENTO, 2011, p. 71) Suponha que na sua cidade existem dois clubes, e você é sócio dos dois. Há um curso de natação nos dois clubes. No clube A, a taxa de inscrição é 100 u.m. e o filho do sócio pode utilizar a piscina pagando 1 u.m. por hora. No clube B, a taxa de inscrição é de 88 u.m. e cobram, para filhos de sócios, 1,75 u.m. por hora para usar a piscina. Levando-se em consideração apenas a questão financeira, que clube você escolheria para inscrever seu filho?

APÊNDICE N –

Problemas trabalhados na aula 15

PROBLEMA 49

(NASCIMENTO, 2011, p. 34). Em certa escola, é possível matricular alunos durante o verão. Após o verão, haverá um período de matrícula durante a primeira semana de aula. Nesse período, pode-se matricular 40 alunos por hora. Após 5 h, 450 estudantes haviam sido matriculados. Qual é o número de alunos matriculados após 4 h? Quantos foram matriculados no verão?

PROBLEMA 50

(NASCIMENTO, 2011, p. 35). A taxa de inscrição numa escolinha de futebol é de 100 u.m. para o curso de 10 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início das aulas, a taxa é reduzida linearmente. Quanto uma pessoa pagará a se inscrever 4 semana após o início do curso?

APÊNDICE O –

Problemas trabalhados na aula 16

PROBLEMA 51

(NASCIMENTO, 2011, p. 35). Você é proprietário de uma fábrica e vende certo produto por 1100 u.m. O custo total, para fabricação de produto, consiste de uma taxa fixa de 7500 u.m. mais o custo de produção que é de 600 u.m por unidade fabricada. Pergunta-se:

a) Quantas unidades você precisa vender a fim de que exista equilíbrio?
b) Se forem vendidas 120 unidades, você terá lucro ou prejuízo?

ANEXOS

ANEXO - A

Dinâmica "Ilha Deserta"

OBJETIVOS - Promover concentração
- Promover atenção
- Iniciativa e Curiosidade
- Criatividade
- Análise e Solução de Problemas

TAMANHO DO GRUPO - 5 ou mais participantes. Sem limite máximo se o Instrutor conhece bem o grupo.

MATERIAIS - Não é necessário.

PROCEDIMENTO - O instrutor deverá passar ao grupo as seguintes informações: "Todos vocês têm uma passagem paga de ida para uma ilha deserta e têm direito a levar 3 (três) objetos para esta ilha, porém esses objetos somente poderão ser levados depois de um critério de avaliação que eu adotei.

Faremos algumas rodadas entre todos e cada um apresentará o que pretende levar, um a um, e eu informarei, segundo o critério que adotar para cada um de vocês, se poderão ou não levar o objeto que apresentaram.

A tarefa de vocês consiste em descobrir qual critério utilizado por mim para a aprovação dos objetos.

Dadas as instruções, iniciam-se as rodadas de apresentação dos objetos. Cabe ao instrutor encerrar quando achar que a maioria já tenha compreendido a missão.

OBS.: O Instrutor poderá utilizar o critério que quiser para aprovar os objetos, só não pode mudar em meio à Dinâmica. Por exemplo:

- A Inicial do nome de cada participante pode coincidir com a inicial do nome do objeto.
- A Inicial da cor da roupa principal que o participante está usando (camisa, calça, vestido) pode coincidir com a inicial do nome do objeto.

Se os participantes demonstrarem dificuldades em descobrir o critério adotado, pode-se dar algumas dicas. Ex.: Se o critério adotado for a inicial do nome do participante, pode-se dizer:

– O Carlos pode levar um cachorro para a ilha.

A Dinâmica termina quando a maior parte dos participantes descobrirem o critério adotado.

(DINÂMICA, 2018)

ANEXO B –

“A divisão simples, a divisão certa e a divisão perfeita”

“Três dias depois, aproximava-nos das ruínas de pequena aldeia denominada Sippar – quando encontramos, caído na estrada, um pobre viajante, roto e ferido.

Socorremos o infeliz e dele próprio ouvimos o relato de sua aventura.

Chamava-se Salém Nasair e era um dos mais ricos mercadores de Bagdá. Ao regressar, poucos dias antes, de Báçora, com grande caravana pela estrada de el-Hilleh, fora atacado por uma chusma de nômades persas do deserto. A caravana foi saqueada e quase todos os seus componentes pereceram nas mãos dos beduínos.

Ele – o chefe – conseguira, milagrosamente escapar oculto na areia, entre os cadáveres dos seus escravos.

E, ao concluir a narrativa de sua desgraça, perguntou-nos com voz angustiosa:

— Trazeis por acaso, ó muçulmanos, alguma coisa que se possa comer? Estou quase, quase a morrer de fome!

— Tenho, de resto, três pães – respondi.

— Trago ainda cinco! – afirmou a meu lado, o Homem que Calculava.

— Pois bem – sugeriu o xeique –, juntemos esses pães e façamos uma sociedade única. Quando chegar a Bagdá prometo pagar com 8 moedas de ouro o pão que comer!

Assim fizemos. No dia seguinte, ao cair da tarde, entramos na célebre cidade de Bagdá, a pérola do Oriente.

Ao atravessarmos vistosa praça, demos de rosto com aparatoso cortejo. Na frente marchava em garboso alazão, o poderoso Ibrahim Maluf, um dos vizires.

O Vizir ao avistar o xeique Salém Nasair em nossa companhia, chamou-o, e, fazendo parar a sua poderosa guarda, perguntou-lhe:

— Que te aconteceu, ó meu amigo? Por que te vejo chegar a Bagdá, roto e maltrapilho, em companhia de dois homens que não conheço?

O desventurado xeique narrou, minuciosamente, ao poderoso ministro, tudo o que lhe ocorrerá em caminho, fazendo a nosso respeito os maiores elogios.

— Paga sem perda de tempo a esses dois forasteiros – ordenou-lhe o grão-vizir.

E, tirando de sua bolsa 8 moedas de ouro, entregou-as a Salém Nasair, acrescentando:

— Quero levar-te agora mesmo ao palácio, pois, o Comendador dos Crentes deseja com certeza ser informado da nova afronta que os bandidos e beduínos praticaram, matando nossos amigos e saqueando caravanas dentro de nossas fronteiras.

O rico Salém Nasair disse-nos, então:

— Vou deixar-vos, meus amigos. Antes, porém, desejo agradecer-vos o grande auxílio que ontem me prestastes. E para cumprir a palavra dada, vou pagar já o pão que generosamente me destes!

E dirigindo-se ao Homem que Calculava, disse-lhe:

— Vais receber pelos 5 pães, 5 moedas!

E voltando-se para mim, ajuntou:

— E tu, ó bagdali, pelos 3 pães, vais receber 3 moedas!

Com grande surpresa, o calculista objetou respeitoso:

— Perdão, ó xeique. A divisão, feita desse modo, pode ser muito simples, mas não é matematicamente certa! Se eu dei 5 pães devo receber 7 moedas; o meu companheiro bagdali, que deu 3 pães, deve receber apenas uma moeda.

— Pelo nome de Maomé! – interveio o vizir Ibrahim, interessado vivamente pelo caso. – Como justificar, ó estrangeiro, tão disparatada forma de pagar 8 pães com 8 moedas? Se contribuíste com 5 pães, por que exiges 7 moedas? Se o teu amigo contribuiu com 3 pães, por que afirmas que ele deve receber uma única moeda?

O Homem que Calculava aproximou-se do prestigioso ministro e assim falou:

— Vou provar-vos, ó Vizir, que a divisão das 8 moedas, pela forma por mim proposta, é matematicamente certa. Quando durante a viajem, tínhamos fome, eu tirava um pão da caixa em que estavam guardados e repartia-o em três pedaços, comendo cada um de nós, um desses pedaços. Se eu dei 5 pães, dei é claro, 15 pedaços; se o meu companheiro deu 3 pães, contribuiu com 9 pedaços. Houve, assim, um total de 24 pedaços, cabendo, portanto, 8 pedaços para cada um. Dos 15 pedaços que dei, comi 8; dei na realidade, 7; o meu companheiro deu, como disse, 9 pedaços, e, comeu também, 8; logo, deu apenas 1. Os 7 pedaços que eu dei e que o bagdali forneceu formaram os 8 que couberam ao xeique Salém Nasair. Logo, é justo que eu receba 7 moedas e o meu companheiro, apenas uma.

O grão-vizir, depois de fazer os maiores elogios ao Homem que Calculava, ordenou que lhe fossem entregues sete moedas, pois a mim me cabia, por direito, apenas uma. Era lógica, perfeita e irrespondível a demonstração apresentada pelo matemático.

— Esta divisão – retorquiu o calculista – de sete moedas para mim e uma para meu amigo, conforme provei, é matematicamente certa, mas não é perfeita aos olhos de Deus!

E tomando as moedas na mão dividiu-as em duas partes iguais. Deu-me uma dessas partes (4 moedas), guardando para si, as quatro restantes.

— Esse homem é extraordinário – declarou o vizir. – Não aceitou a divisão proposta de 8 moedas em duas parcelas de 5 e 3, em que era favorecido; demonstrou ter direito a 7 e que seu companheiro só devia receber uma moeda, acabando por dividir as 8 moedas em 2 parcelas iguais, que repartiu, finalmente com o amigo.

E acrescentou com entusiasmo:

— Mac Allah! Esse jovem além de parecer-me um sábio e habilíssimo nos cálculos e na Aritmética, é bom para o amigo e generoso para o companheiro. Tomo-o hoje mesmo para meu secretário!

— Poderoso Vizir – tornou o Homem que Calculava –, vejo que acabais de fazer 32 vocábulos, com um total de 143 letras, o maior elogio que ouvi em minha vida, e eu, para agradecer- vos, sou forçado a empregar 64 palavras nas quais figuram nada menos que 286 letras. O dobro, precisamente! Que Alá vos abençoe e vos proteja!

Com tais palavras, o Homem que Calculava deixou a todos nós maravilhados com sua argúcia e invejável talento. A sua capacidade de calculista ia ao extremo de contar as palavras e as letras de uma frase que acabara de ouvir" (TAHAN, 2000, p. 21-23)

ANEXO C –

Dinâmica “Como salvar os sobreviventes”

“Esta dinâmica leva os participantes do grupo a conhecerem suas capacidades individuais, quando submetidos à pressão, quanto a solução de problemas emergenciais e tomada de decisão.

Objetivos: Este teste foi adaptado de um teste utilizado pela NASA para avaliar a capacidade de superação de seus potenciais candidatos a astronautas em situações difíceis e inusitadas.

Nº de Participantes: Não há limites

Material: Cópia do texto e caneta para cada participante.

Desenrolar: O facilitador entrega a cada participante uma folha do texto abaixo e uma caneta. Individualmente os participantes tentarão resolver o que se pede no texto:

Você está em um voo de aproximadamente 5 horas de duração. Sai do ponto de partida às 9:00 h. No meio do caminho, o piloto anuncia que desviou da rota aproximadamente 150 km e que está em sérias dificuldades. Em seguida o avião cai em um deserto e todos os tripulantes morrem. Somente os cem passageiros sobrevivem. Ao olhar-se do alto, o avião se confunde com a areia do deserto. Sua missão é salvar todos os passageiros. No avião, todo quebrado, você encontra:

- 100 óculos – sem utilidade prática. Se fosse na neve, eles protegeriam a visão.
- 3 bússolas – idem, já que todos devem permanecer nas proximidades do avião.
- 100 pacotes de sal – extremamente prejudicial à saúde. Sal e sol é uma mistura explosiva.
- 30 canivetes suíços – sem utilidade aparente.
- 100 garrafas de água – útil; o ser humano sobrevive poucos dias sem ela.

- 50 cobertores – à noite, no deserto o frio facilmente atinge a temperatura abaixo de zero.
- 1 grande lona cor de areia – útil para proteger do sol escaldante do dia.
- 1 espelho de maquiagem – extremamente útil para dar sinal em caso de aproximação de socorro.
- 100 latas de comida – útil, uma vez que o socorro deverá chegar em breve.
- 2 mapas da região – desnecessário, uma vez que todos deverão permanecer juntos, aguardando o socorro.

Descreva em poucas palavras a sua estratégia de ação para salvar a todos. Enumere em ordem decrescente de prioridade os objetos acima relatados que serão utilizados nesta missão de salvamento, sendo o nº 1 o mais importante e o nº 10 o menos importante.

Atenção: não fale sobre a utilidade de cada item. Deixe que as pessoas descubram e usem sua criatividade.

Resposta:

Em termos aéreos, 150 km representa apenas poucos minutos. Em pouco tempo o avião será encontrado. Rapidamente será sentida a falta do avião. No máximo em 5 horas, que era o tempo previsto para o voo, as buscas começarão.

A estratégia é manter todos juntos, próximos do avião, e aguardar o socorro.

É fundamental:

- estar preparado e orientar o resgate;
- manter-se vivo;
- manter a sobrevivência por um período maior, se for necessário.

Assim, a ordem mais ou menos correta é:

1. Espelho
2. Lona
3. Cobertor

4. Água
5. Comida
6. Canivete
7. Óculos
8. Bússola
9. Mapa
10. Sal

(DINÂMICAS, 2016)