UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Joelso Giovanelli

O TEOREMA DA SEPARAÇÃO DE JORDAN-BROUWER

VITÓRIA
2019

Joelso Giovanelli

O TEOREMA DA SEPARAÇÃO DE JORDAN-BROUWER

Dissertação de mestrado apresentada ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Profª Drª Marta Jakubowicz Batoréo

VITÓRIA
2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

Giovanelli, Joelso, 1988-
G512t O Teorema da Separação de Jordan – Brouwer / Joelso Giovanelli. - 2019.
85 f.

Orientadora: Marta Jakubowicz Batoréo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Jordan-Brouwer. 2. Teoria de Interseção Módulo 2. 3. Transversalidade. 4. Variedades. 5. Difeomorfismos. I. Batoréo, Marta Jakubowicz. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

"Teorema da Separação de Jordan-Brouwer"

Joelso Giovanelli

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 06/05/2019 por:

Marta Jakubowicz Batoréo

Profª Drª Marta Jakubowicz Batoréo - UFES

Prof. Dr. Leonardo Meireles Câmara - UFES

Patrícia Desideri

Profª Drª Patrícia Desideri – UFES/Alegre

Alessia Mandini

Profª Drª Alessia Mandini – PUC/RJ

Dedicatória

Para Rayane.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, ao senhor, Deus todo-poderoso, criador do céu e da terra e de todas as coisas visíveis e invisíveis.

Agradeço a minha orientadora, Profª Drª Marta Jakubowicz Batoréo, por ter aceito essa empreitada e por tantas ajudas, conselhos e dicas.

Agradeço a minha banca examinadora pela criteriosa avaliação, pelas sugestões, correções e elogios.

Agradeço aos meus pais e irmãos, pelo apoio e por tornarem essa jornada possível.

Agradeço a Rayane, por tantas ajudas e pelo companheirismo e apoio nas horas mais difíceis.

Agradeço, de modo particular, ao amigo Franco Marchiori Louzada, pelas figuras desenhadas que estão ao longo do texto.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas, em especial, aos amigos e colegas do IC I-UFES e do CT II-UFES que tanto ajudaram e, tão mais leve e prazerosa, tornaram essa responsabilidade.

Agradeço a todos aqueles que, na cumplicidade de um momento, ajudaram-me a crescer profissionalmente e pessoalmente.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação apresenta uma demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Este teorema afirma, *grosso modo*, que uma hiperfície no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ separa o espaço em dois conjuntos: um "interior"e outro "exterior". A demonstração utiliza técnicas de Topologia Diferencial como, por exemplo, transversalidade e números de rotação. A referência principal desta trabalho é [GP74].

Palavras-chave: Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Teoria de Interseção, Módulo 2. Transversalidade. Número de Voltas. Variedades. Variedades com Bordo. Difeomorfismo. Mergulho em Espaços Euclidianos. Teorema da Aplicação Inversa. Submersões. Imersões.

Abstract

This dissertation presents a proof of the Jordan-Brouwer Theorem. This theorem states, roughly, that a hypersurface of the euclidean space $\mathbb{R}^n$ divides the space in two sets: the "inside"and the "outside". The proof relies on techniques from Differential Topology, e.g., transversality and winding numbers. The main reference for this work is [GP74].

Key-Words: The Jordan-Brouwer Separation Theorem. Intersection Theory Mod 2. Transversality. Winding Numbers. Manifolds. Manifolds with Boundary. Diffeomorphism. Embed in Euclidian Space. Inverse Function Theorem. Submersions. Imersions.

Sumário

Sumário **10**

Introdução **10**

1 Variedades Diferenciáveis **13**
1.1 Definições 13
1.2 Derivadas e Espaços Tangentes 17
1.3 Teorema da Aplicação Inversa 21
1.3.1 Imersões 23
1.3.2 Submersões 28
1.4 Aplicações Transversais 35
1.5 Homotopia e Estabilidade 37
1.6 O Teorema de Sard 41
1.7 Mergulhos em Espaços Euclidianos 45

2 Transversalidade e Teoria da Interseção **53**
2.1 Variedades Com Bordo 53
2.1.1 Variedades Unidimensionais e Algumas Consequências 60
2.2 Transversalidade 61
2.3 Teoria da Interseção Módulo 2 68

3 Teorema da Separação de Jordan-Brouwer **72**
3.1 Apresentação e Demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer 72
3.2 Método para Determinar se um Dado Ponto de $\mathbb{R}^n$ Está na Região Interior a uma Hiperfície de $\mathbb{R}^n$ 83
3.3 O Teorema de Borsuk-Ulam 85

Referências Bibliográficas **88**

Introdução

Intuitivamente, sabemos que qualquer curva fechada, suave e simples divide o plano em duas regiões, uma região limitada, a "parte de dentro", e outra não limitada, "a parte de fora". Por séculos, se achava que isso era algo óbvio e não necessitava de demonstração. Apenas em 1865, C.G. Neumann chamou a atenção para a necessidade de se demonstrar a propriedade de "separação do plano"e, no ano de 1897 C. Jordan, em sua obra *Cours d'Analyse* ([Jor09]) apresentou uma demonstração para essa propriedade que, segundo F.C.V. Marinho ([Mar05]), se apresentava com o seguinte enunciado:

Se Γ *é uma curva fechada e simples em* $\mathbb{R}^2$ *então o conjunto* $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ *possui exatamente duas componentes conexas que têm* Γ *como fronteira comum.*

No entanto, esta demonstração foi considerada não satisfatória pela comunidade científica, pois C. Jordan adimitia esse teorema válido para polígonos, gerando discordâncias entre os matemáticos da época. Segundo O. Veblen, essa seria a única, porém relevante, falha na demonstração apresentada por Jordan e no ano de 1905 o próprio O. Veblen deu a primeira demonstração (que foi considerada satisfatória) em seu artigo *Theory of plane curves in non-metrical analysis situs* ([Veb05]). Entretanto, essa demonstração, para o caso de um polígono, era incorreta, sendo esta falha admitida pelo próprio Veblen alguns anos mais tarde. Posteriormente, muitas outras demonstrações foram apresentadas para este Teorema e a versão mais geral, foi dada por L.E.J Brouwer em 1911, no artigo, *Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum* ([Bro12]) que pode ser enunciado da seguinte forma:

Dada uma hiperfície X *de* $\mathbb{R}^n$*, compacta e conexa. O seu complementar* $\mathbb{R}^n \setminus X$ *possui exatamente duas componentes conexas abertas, a "parte de fora"*D_0*, que chamaremos de "exterior", e a "parte de dentro"*D_1*, que chamaremos de "interior". Além disso, o fecho da "parte de dentro"*$\overline{D_1}$ *é uma variedade compacta com bordo* $\partial\overline{D_1} = X$ *.*

Neste trabalho, não faremos a demonstração do caso particular, apresentado por O. Veblen, mas apresentaremos uma teoria a fim de dar uma demonstração do caso geral, chamado de "Teorema da Separação de Jordan-Brouwer"seguindo os passos apresentados por V. Guillemin e A. Pollack ([GP74, p.87-89]).

Segundo a orientação dos mesmos, definiremos e provaremos as propriedades necessárias para demonstrá-lo, construindo, assim, uma escada que nos levará até o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. No Capítulo 1, começaremos por definir variedades diferenciáveis n-dimensionais sem bordo, assim como derivadas e espaços tangentes, por meio do difeomorfismo que estas possuem com algum subconjunto do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Devido à necessidade de aplicação em contextos distintos, daremos algumas

demonstrações para o Teorema da Aplicação Inversa:

(i) Considerando $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave entre variedades e sua derivada no ponto $x \in X$, $df_x\colon T_xX \to T_yY$, onde $y = f(x)$ um isomorfismo.

(ii) Considerando $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave, injetiva numa subvariedade compacta Z, contida em X e $df_x\colon T_xX \to T_yY$ um isomorfismo para cada $x \in Z$. Neste caso, teremos f aplica difeomorficamente uma vizinhança de Z, em X, numa vizinhança de $f(Z)$ em Y.

(iii) Retirando a hipótese de compacidade da subvariedade Z, do item anterior. Neste caso, também obtemos que f aplica difeomorficamente uma vizinhança de Z, em X, numa vizinhança de $f(Z)$ em Y.

Ainda no Capítulo 1, apresentaremos os conceitos, bem como os principais resultados de imersões e submersões, aplicações transversais, homotopia e estabilidade e o Teorema de Sard e mergulhos em espaços euclidianos. Neste último, será dada uma ênfase ao Teorema de Whitney.

No Capítulo 2, definiremos variedade com bordo e estenderemos os conceitos apresentados no Capítulo 1 a estas variedades, bem como, apresentaremos alguns novos, como a Teoria de Interseção módulo 2, por exemplo, que será intensamente usada para demonstrar, o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer.

No Capítulo 3, demonstramos o Teorema da Separação de Jordan Brouwer. Para isso, os conceitos de transversalidade, homotopia e mergulhos em espaços euclidianos, apresentados nos capítulos anteriores, serão bastante úteis. Neste Capítulo, veremos que por meio de relações homotópicas saberemos se dois pontos quaisquer $z_0, z_1 \in \mathbb{R}^n \setminus X$ se encontram na mesma componente conexa, ou não, e por meio da transversalidade, saberemos se um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ se encontra na região "interior"ou "exterior"à hiperfície X.

Capítulo 1

Variedades Diferenciáveis

1.1 Definições

Considere os espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$:

Definição 1.1.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos. Diz-se que a aplicação $f\colon U \to V$ é* suave (ou de classe C^∞) *se f possui derivadas parciais de todas as ordens contínuas.*

De modo geral, se $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ são subconjuntos arbitrários de espaços euclidianos, então diz-se que a aplicação $f\colon X \to Y$ é suave se para cada $x \in X$, existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, contendo x, e uma aplicação suave $F\colon U \to \mathbb{R}^m$ tal que $F|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$.

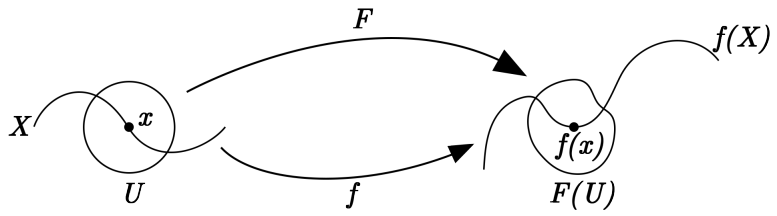

Figura 1.1: *A aplicação F é a extensão da aplicação f numa vizinhança U, de x, contida em $\mathbb{R}^n$.*

Proposição 1.1.2. *[GP74, Exercício 1.1.18] Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $0 < a < b$, e $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Considere as bolas $B(x_0, a)$ e $B(x_0, b)$ contidas em $\mathbb{R}^k$ de centro x_0 e raios a e b, respetivamente. Então existe uma função suave $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = 1$, se $x \in B(x_0, a)$, $F(x) = 0$ se $x \notin B(x_0, b)$ e $0 < F(x) < 1$ nos pontos x do conjunto $B(x_0, b) \setminus B(x_0, a)$.*

Demonstração. Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Afirmamos que esta aplicação f é suave. Com efeito, é claro que f é contínua, para todo $x \neq 0$, e que f é contínua em 0 pois

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0 = \lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Além disso, também é claro que f é suave para todo $x \neq 0$. Para $x < 0$, a derivada de ordem n, $f^{(n)}(x)$, é 0. Para $x > 0$, aplicando a regra da cadeia para funções de uma variável às sucessivas derivadas de f, obtemos um produto de e^{-1/x^2} por um polinômio P, na "variável" $1/x$. No ponto $x = 0$, temos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h - 0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = 0 = \lim_{h\to 0^-} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h - 0}$$

e, portanto, $f'(0) = 0$. Argumentando por indução, concluiremos que $f^n(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Supondo $f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$, temos

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h},$$

onde

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f^{(n)}(0+h) - f^{(n)}(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{P(1/h)\cdot e^{-1/h^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} Q(1/h)\cdot e^{-1/h^2} \\
&= 0 \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo f é suave.

Defina a função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x-a)f(b-x)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$. A função g é suave, pois é dada por um produto de aplicações suaves e observe que $g(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Defina também a aplicação $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, a aplicação h é suave. Agora, como $g(x) = 0$ para $x < a$ ou $x > b$, temos

$$h(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt} = \frac{\int_{a}^{x} g(t)\, dt}{\int_{a}^{b} g(t)\, dt}$$

e, dessa forma, temos que $h(x) = 0$ se $x < a$, $h(x) = 1$ se $x > b$ e $0 < h(x) < 1$ se $x \in (a, b)$.

Por fim, para determinar nossa F, consideramos o fato de que a norma euclidiana $|x|\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função suave. Assim, definindo $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ por $F(x) = 1 - h(|x|)$ é uma função suave tal que $F(x) = 1$ para todo x pertencente à bola de raio a, $F(x) = 0$ para todo x fora da bola de raio b e $0 < F(x) < 1$ para todo ponto $x \in B(x_0, b) \setminus B(x_0, a)$, como queríamos. □

Definição 1.1.3. *Diz-se que uma aplicação suave $f\colon X \to Y$ é um* difeomorfismo *se f é bijetiva e sua inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ também é uma aplicação suave. Quando existe um difeomorfismo entre X e Y diz-se que os conjuntos X e Y são* difeomorfos.

Definição 1.1.4. *Sejam X e Y variedades de dimensões k e l respetivamente, com $k \leq l$, e Z uma subvariedade de Y, de dimensão k. Quando $f\colon X \to Z \subset Y$ é um difeomorfismo, diz-se que f aplica* difeomorficamente *X sobre Z.*

Proposição 1.1.5. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ e $Z \subset \mathbb{R}^l$ conjuntos arbitrários. Se $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ são aplicações suaves então $g \circ f\colon X \to Z$ é uma aplicação suave. Mais ainda, se f e g são difeomorfismos, então $g \circ f$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ aplicações suaves. Para cada $x \in X$, existem um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $x \in U$, um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $y := f(x) \in V$ e aplicações suaves $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ e $G\colon V \to \mathbb{R}^l$ tais que $F|_{U\cap X} = f|_{U\cap X}$ e $G|_{V\cap Y} = g|_{V\cap Y}$. Assim, substituindo U por $U \cap F^{-1}(V) \subseteq U$, se necessário, temos que $G \circ F\colon U \to \mathbb{R}^l$ é suave com $(G \circ F)|_{U\cap X} = (g \circ f)|_{U\cap X}$. Logo $g \circ f$ é suave.

Se f e g são difeomorfismos, então, pelo que foi provado acima, $g \circ f$ é uma bijeção suave, pois f e g são bijeções suaves, e sua inversa $(g \circ f)^{-1}\colon Z \to X$ dada por $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ é também uma bijeção suave, pois f^{-1} e g^{-1} são aplicações suaves. Portanto, $g \circ f$ também é difeomorfismo.

□

Definição 1.1.6. *Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Diz-se que X é uma* variedade de dimensão *k se X é localmente difeomorfo ao $\mathbb{R}^k$. Mais precisamente, dado $x \in X$, existe uma vizinhança V de x contida em X difeomorfa a um conjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$.*

A um difeomorfismo $\varphi\colon U \to V$ chama-se parametrização local em torno de x. *Usualmente, sua aplicação inversa $\varphi^{-1}\colon V \to U$ denota-se por $\varphi^{-1} = (x_1, \ldots, x_k)$, onde $x_1, \ldots, x_k\colon V \to \mathbb{R}$ são as funções coordenadas, e dá-se o nome de sistema de coordenadas locais, em torno de x.*

Observação 1.1.7. *A topologia considerada em X é a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$, ou seja, um subconjunto V de X é aberto em X se existe um conjunto $\hat{V} \subset \mathbb{R}^n$ tal que $V = \hat{V} \cap X$.*

Exemplo 1.1.8. *O círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ é uma variedade de dimensão 1.*

De fato, seja $(x_0, y_0) \in S^1$. Então ou $x_0 > 0$, ou $x_0 < 0$, ou $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$. Se $y_0 > 0$, considere $V_1 := \{(x, y) \in S^1; y > 0\}$ e

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1\colon (-1,1) & \to & V_1 \\ x & \mapsto & (x, \sqrt{1-x^2}) \end{array}$$

A aplicação φ_1 é uma bijeção suave com inversa

$$\begin{array}{rcl} (\varphi_1)^{-1}\colon V_1 & \to & (-1,1) \\ (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

que também é uma aplicação suave. Portanto, φ_1 é um difeomorfismo entre o semi-círculo superior V_1 e o intervalo aberto $(-1,1)$, ou seja, φ_1 é uma parametrização local em torno de (x_0,y_0). Procedendo de maneira análoga, se $y_0<0$, ou $x_0>0$, ou $x_0<0$ considere, respetivamente, as parametrizações

$$\begin{aligned}
&\varphi_2\colon (-1,1)\to\{(x,y)\in S^1\colon y<0\}, \quad \varphi_2(x)=(x,-\sqrt{1-x^2})\\
&\varphi_3\colon (-1,1)\to\{(x,y)\in S^1\colon x>0\}, \quad \varphi_3(y)=(\sqrt{1-y^2},y)\\
&\varphi_4\colon (-1,1)\to\{(x,y)\in S^1\colon x<0\}, \quad \varphi_4(y)=(-\sqrt{1-y^2},y).
\end{aligned}$$

Portanto, o círculo S^1 é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}$, logo S^1 é uma variedade de dimensão 1.

Definição 1.1.9. *Sejam X e Y variedades. Diz-se* gráfico *da aplicação $f\colon X\to Y$ o subconjunto de $X\times Y$, dado por*

$$\mathit{graf}(f)=\{(x,f(x))\in X\times Y\colon x\in X\}$$

Proposição 1.1.10. *Seja $F\colon X\to \mathit{graf}(f)$, dada por $F(x)=(x,f(x))$. Se $f\colon X\to Y$ é suave, então F é suave e $\mathit{graf}(f)$ é uma variedade com a mesma dimensão de X.*

Demonstração. Primeiramente, se $f\colon X\to Y$ é suave, então a aplicação $F\colon X\to \mathrm{graf}(f)$, dada por $F(x)=(x,f(x))$ é suave pois suas funções coordenadas são suaves. Agora, a aplicação $G\colon \mathrm{graf}(f)\to X$, dada por $G(x,f(x))=x$ está bem definida, é suave e, $G\circ F(x)=x$ e $F\circ G(x,f(x))=(x,f(x))$, ou seja, $G=F^{-1}$. Portanto F é um difeomorfismo. Compondo as parametrizações locais $\psi\colon U\to V$ de X, onde U e V são abertos de $\mathbb{R}^k$ e X, respetivamente, com a aplicação F, restrita a V, obtemos que $F\circ\psi$ é uma parametrização local de $\mathrm{graf}(f)$. Logo, $\mathrm{graf}(f)$ é uma variedade de dimensão de k, como queríamos. □

Uma forma de se obter novas variedades a partir de variedades que conhecemos é considerando o produto cartesiano de variedades.

Teorema 1.1.11. *Se $X\subset\mathbb{R}^m$ e $Y\subset\mathbb{R}^n$ são variedades de dimensão k e l, respetivamente, então $X\times Y$ é uma variedade de dimensão $k+l$.*

Demonstração. Suponha que $X\subset\mathbb{R}^m$ e $Y\subset\mathbb{R}^n$ sejam variedades de dimensão k e l, respetivamente. Então $X\times Y\subset\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{m+n}$ e, para $x\in X$ e $y\in Y$, existem parametrizações locais $\varphi\colon W\to X$ e $\psi\colon U\to Y$ em torno de x e y, respetivamente, onde $W\subset\mathbb{R}^k$ e $U\subset\mathbb{R}^l$ são vizinhanças de x e y, respetivamente. Defina a aplicação $\varphi\times\psi\colon W\times U\to X\times Y$ por $(\varphi\times\psi)(w,u)=(\varphi(w),\psi(u))$, onde $w\in W$ e $u\in U$. A aplicação $\varphi\times\psi$ é uma bijeção suave (pois cada função coordenada é suave) com inversa $(\varphi\times\psi)^{-1}=\varphi^{-1}\times\psi^{-1}$ definida por $(\varphi^{-1}\times\psi^{-1})(x,y)=(\varphi^{-1}(x),\psi^{-1}(y))$ também suave. Como $W\times U$ é vizinhança aberta de (x,y) em $X\times Y$, a aplicação $\varphi\times\psi$ é uma parametrização local em torno de $(x,y)\in X\times Y$. □

Definição 1.1.12. *Sejam X e Z variedades em $\mathbb{R}^n$. Diz-se que Z é uma* subvariedade *de X quando $Z\subset X$. Em particular, X é subvariedade de $\mathbb{R}^n$ e X é uma subvariedade de X. Além disso, quando $X\subset\mathbb{R}^n$ e $\dim X=n-1$, diz-se que X é uma* hiperfície.

Proposição 1.1.13. *Se X é uma variedade de dimensão k e U é um aberto de X, então U é uma subvariedade de X, de dimensão k.*

Demonstração. Dado um ponto $x \in U$, como X é variedade de dimensão k, existe uma vizinhança V de x, contida em X, e um difeomorfismo $\varphi\colon V_0 \to V$, onde $V_0 \subset \mathbb{R}^k$ é uma vizinhança da origem e $\varphi(0) = x$. Como U é aberto em X, a interseção $V \cap U$, contida em V, é um aberto em X e a restrição $\varphi|_{\varphi^{-1}(V\cap U)}\colon \varphi^{-1}(V \cap U) \to V \cap U$ é um difeomorfismo. Como $V \cap U$ também está contido em U e é aberto em U, temos que $\varphi|_{\varphi^{-1}(V\cap U)}$ é uma parametrização local de U em torno de x, como desejado. □

1.2 Derivadas e Espaços Tangentes

Definição 1.2.1. *Sejam U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^m$, $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave e $x \in U$. Então para qualquer vetor $h \in \mathbb{R}^m$, a* derivada de f no ponto x, na direção do vetor h *é dada pelo limite*

$$df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t},$$

se o limite existir.

Observação 1.2.2.

(i) Fixado $x \in U$, a aplicação $df_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ atribui a cada vetor $h \in \mathbb{R}^m$, a derivada direcional $df_x(h)$. Assim, quando f possui derivada em todos os pontos de seu domínio U, dizemos que f é derivável *em U.*

(ii) A aplicação $df_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é linear e sua representação matricial com respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é a matriz jacobiana de $f(y) = (f_1(y), \cdots, f_m(y))$ no ponto x, ou seja, $Jf(y) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right]_{m\times n}$.

(iii) Regra da Cadeia: se $f\colon U \to V$ e $g\colon V \to \mathbb{R}^l$ são aplicações suaves, onde U é subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e V é subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$, então, para cada $x \in U$, a derivada de $g \circ f$ é dada por $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$. (Veja, por exemplo, [Lim16a, p. 103].)

(iv) Se a aplicação $f\colon U \to V$ é um difeomorfismo, com U e V subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^m$, então $df_x\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo.

Vamos usar a aplicação derivada num ponto para definir espaços lineares que melhor aproximam uma variedade X perto de um ponto, os espaços tangentes.

Consideremos uma variedade X de dimensão k contida em $\mathbb{R}^n$ e uma parametrização local em torno de um ponto $x \in X$, $\varphi\colon U \to X$, onde $U \subset \mathbb{R}^k$. Sem perda de generalidade, suponha que $\varphi(0) = x$. Diz-se que a melhor *aproximação linear* de $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$, no ponto $\varphi^{-1}(x) = 0$, é a aplicação

$$u \longmapsto \varphi(0) + d\varphi_0(u) = x + d\varphi_0(u).$$

Definição 1.2.3. *Define-se o* espaço tangente *a X no ponto x, como a imagem $d\varphi_0(\mathbb{R}^k)$ da aplicação $d\varphi_0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ e denota-se por T_xX.*

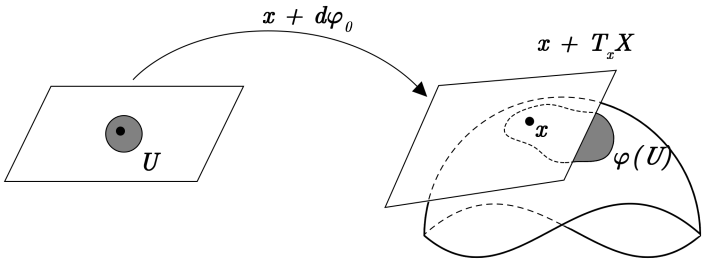

Figura 1.2: *Espaço transladado $x + T_xX$ tangenciando uma superfície.*

Observação 1.2.4. *O espaço tangente T_xX é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k paralelo ao espaço transladado $x + T_xX$.*

Definição 1.2.5. *Um vetor do subespaço vetorial T_xX de $\mathbb{R}^n$ diz-se um* vetor tangente *a X no ponto $x \in X$.*

Proposição 1.2.6. *O espaço tangente a X, num ponto $x \in X$, não depende da escolha da parametrização local.*

Demonstração. Sejam X uma variedade de dimensão k e x um ponto em X. Considere uma parametrização local $\varphi\colon U_0 \to U$ em torno de x, com $\varphi(0) = x \in U$. Agora, considere outra parametrização $\psi\colon V_0 \to V$, com $\psi(0) = x \in V$. A aplicação

$$\xi = \psi^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U\cap V)}\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$$

é um difeomorfismo, com $\psi \circ \xi = \varphi$. Pela regra da cadeia, $d\varphi_0 = d\psi_0 \circ d\xi_0$. Pela Observação 1.2.2 (iv), a aplicação $d\xi_0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é um isomorfismo, donde segue que $d\varphi_0(\mathbb{R}^k) = d\psi_0(\mathbb{R}^k)$. Portanto, o espaço T_xX não depende da escolha da parametrização. □

Observação 1.2.7. *O espaço tangente a um subconjunto aberto U de X no ponto x é igual ao espaço tangente T_xX. Com efeito, sabemos pela Proposição 1.1.13 que U é uma subvariedade de X. Agora, seja $i\colon U \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Dado $x \in U$, pelo mesmo argumento usado na Proposição 1.1.13, temos que se $\varphi\colon V_0 \to V$ é uma parametrização local de X em torno de x, a restrição $\varphi|_{\varphi^{-1}(V\cap U)}$ é uma parametrização local de U em torno de x. Dessa forma, considerando $j\colon \varphi^{-1}(V \cap U) \to V_0$ a aplicação inclusão de $\varphi^{-1}(V \cap U)$ em V_0 obtém-se que $\varphi|_{\varphi^{-1}(V\cap U)} = \varphi \circ j$, donde, pela regra da cadeia,*

$$\begin{aligned} T_xU &= d(\varphi|_{\varphi^{-1}(V\cap U)})_0(\mathbb{R}^k) = d(\varphi \circ j)_0(\mathbb{R}^k) \\ &= d\varphi_0 \circ dj_0(\mathbb{R}^k) = d\varphi_0 \circ Id_{\mathbb{R}^k}(\mathbb{R}^k) \\ &= d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \\ &= T_xX, \end{aligned}$$

como queríamos.

Proposição 1.2.8. *[GP74, Exercício 1.2.9(a)] Se X e Y são variedades quaisquer de dimensão k e l, respetivamente. Então $T_{(x,y)}X \times Y = T_xX \times T_yY$, para todo $(x, y) \in X \times Y$.*

Demonstração. Já sabemos, pelo Teorema 1.1.11, que $X \times Y$ é uma variedade de dimensão $k+l$. Considere a parametrização local $\varphi \times \psi \colon U \times V \to X \times Y$ de $X \times Y$, em torno de (x, y), definida na demonstração do Teorema 1.1.11, onde $\varphi \times \psi(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$.

Pela definição de espaço tangente temos

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}X \times Y &= d(\varphi \times \psi)_0(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l) \\ &= (d\varphi_0(\mathbb{R}^k), d\psi_0(\mathbb{R}^l)) \\ &= d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \times d\psi_0(\mathbb{R}^l) \\ &= T_xX \times T_yY, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Dada uma aplicação $f \colon X \to Y$ entre variedades diferenciáveis X e Y de dimensões k e l, respetivamente, dizemos que f é *suave* se, para todo $x \in X$ e para toda a parametrização ψ em torno de $f(x)$, existe uma parametrização φ em torno de x tal que $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é aplicação suave de um aberto de $\mathbb{R}^k$ sobre um aberto de $\mathbb{R}^l$. Iremos agora definir a derivada de uma aplicação suave num ponto $x \in X$. Suponhamos que $\varphi \colon U \to X$ é parametrização de X em torno de x, com $\varphi(0) = x$ e que $\psi \colon V \to Y$ é parametrização de Y em torno de $y = f(x)$, com $\psi(0) = y$. Assim, tomando abertos contidos em U ou V se necessário, podemos considerar o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow{h=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi} & V. \end{array}$$

As derivadas $d\varphi_0, d\psi_0$ e dh_0 estão definidas como na Definição 1.2.1 e as aplicações $d\varphi_0$ e $d\psi_0$ são isomorfismos, motivando a seguinte definição.

Definição 1.2.9. *A aplicação $df_x \colon T_xX \to T_yY$, onde $y = f(x)$, definida por $df_x = d\psi_0 \circ dh_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ diz-se a* derivada da aplicação $f \colon X \to Y$ no ponto x.

O diagrama anterior induz o seguinte diagrama comutativo de aplicações lineares:

$$\begin{array}{ccc} T_xX & \xrightarrow{\quad df_x \quad} & T_yY \\ {\scriptstyle d\varphi_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d\psi_0} \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad dh_0 \quad} & \mathbb{R}^l. \end{array}$$

Observação 1.2.10. *A definição de derivada de uma aplicação num ponto não depende das parametrizações φ e ψ consideradas. Com efeito, considere as parametrizações locais em torno de $x \in X$ dadas por $\varphi \colon U_0 \to U$ e $\theta \colon \tilde{U}_0 \to \tilde{U}$ com $\varphi(0) = \theta(0) = x$ e considere também as parametrizações locais em torno de $y \in Y$ dadas por $\psi \colon V_0 \to V$ e $\eta \colon \tilde{V}_0 \to \tilde{V}$ com $\psi(0) = \eta(0) = y$. Com estas parametrizações podemos considerar os seguintes diagramas comutativos:*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U_0 & \xrightarrow{h=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi} & V_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\theta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\eta} \\ \tilde{U}_0 & \xrightarrow{\tilde{h}=\eta^{-1}\circ f\circ\theta} & \tilde{V}_0. \end{array}$$

Para verificar que a definição da derivada de f em x não depende das parametrizações consideradas é suficiente verificar que

$$d\psi_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} = d\eta_0 \circ d(\eta^{-1} \circ f \circ \theta)_0 \circ (d\theta_0)^{-1}.$$

Seguindo um raciocínio análogo ao da demonstração da Proposição 1.2.6, as aplicações $\xi = \theta^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U\cap\tilde{U})}$ e $\tilde{\xi} = \eta^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(V\cap\tilde{V})}$ são difeomorfismos e, pela regra da cadeia, $d\theta_0 \circ d\xi_0 = d\varphi_0$ e $d\eta_0 \circ d\tilde{\xi}_0 = d\psi_0$, onde $d\xi_0$ e $d\tilde{\xi}_0$ são isomorfismos. Além disso, como

$$\begin{aligned} \tilde{\xi} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \xi^{-1} &= (\eta^{-1} \circ \psi) \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ (\theta^{-1} \circ \varphi)^{-1} \\ &= \eta^{-1} \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \theta \\ &= \eta^{-1} \circ f \circ \theta, \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} d\psi_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} &= (d\eta_0 \circ d\tilde{\xi}_0) \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\theta_0 \circ d\xi_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ (d\tilde{\xi}_0 \circ d(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)_0 \circ (d\xi_0)^{-1}) \circ (d\theta_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ (d(\tilde{\xi} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \xi^{-1})_0 \circ (d\theta_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ d(\eta^{-1} \circ f \circ \theta)_0 \circ (d\theta_0)^{-1}, \end{aligned}$$

como desejado.

Observação 1.2.11. *A regra da cadeia também vale para aplicações entre variedades. Mais precisamente, dadas aplicações suaves $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ e pontos $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, vale $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.*

De fato, sejam X, Y e Z variedades de dimensões k, l e m, respetivamente, e $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ aplicações suaves. Considere $\varphi\colon U \to X$, $\psi\colon V \to Y$ e $\eta\colon W \to Z$ parametrizações locais de X, Y e Z, em torno de $\varphi(0) = x, \psi(0) = y = f(x)$ e $\eta(0) = z = g(y)$, respetivamente, com $U \subset \mathbb{R}^k, V \subset \mathbb{R}^l$ e $W \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abertos. Resumimos os dados no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & {\scriptstyle g\circ f}\frown & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \uparrow{\scriptstyle\eta} \\ U & \xrightarrow{h} & V & \xrightarrow{j} & W, \\ & & {\scriptstyle j\circ h}\smile & & \end{array}$$

onde $h\colon U \to V$ é definida por $h = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ e $j\colon V \to W$ é definida por $j = \eta^{-1} \circ g \circ \psi$. Pela Definição 1.2.9, $d(g \circ f)_x = d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$ e, pela

Observação 1.2.2 (iii), $d(j \circ h)_0 = dj_0 \circ dh_0$, pois $h(0) = 0$. Além disso, pela Definição 1.2.9, $dh_0 = (d\psi_0)^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0$ e $dj_0 = (d\eta_0)^{-1} \circ dg_y \circ d\psi_0$. Portanto,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)_x &= d\eta_0 \circ d(j \circ h)_0 \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ (dj_0 \circ dh_0) \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= d\eta_0 \circ ((d\eta_0)^{-1} \circ dg_y \circ d\psi_0) \circ ((d\psi_0)^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0) \circ (d\varphi_0)^{-1} \\ &= dg_y \circ df_x. \end{aligned}$$

Definição 1.2.12. *Diz-se que as variedades X e Y são* difeomorfas *quando existe uma aplicação bijetiva suave $f\colon X \to Y$ com inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ suave. Essa aplicação f é chamada de* difeomorfismo entre X e Y.

Proposição 1.2.13. *Se uma aplicação suave $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo entre as variedades X e Y então, dado um conjunto $A \subset X$ aberto, sua imagem $f(A)$ é um aberto em Y.*

Demonstração. Suponha, primeiramente, que $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo e considere $g = f^{-1}\colon Y \to X$ a inversa de f. A aplicação g é suave, em particular, g é contínua. Assim, temos que dado um aberto $A \subset X$, o conjunto $g^{-1}(A)$ é aberto em Y, mas $g^{-1}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$. Portanto, temos que $g^{-1}(A) = f(A)$ que é aberto em Y, como queríamos. □

1.3 Teorema da Aplicação Inversa

O clássico Teorema da Aplicação Inversa, da Análise Real, tem sua versão para variedades diferenciáveis. Sejam X e Y variedades com $\dim X = k$ e $\dim Y = l$, e $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Como X e Y são variedades, então dados pontos $x \in X$ e $f(x) \in Y$, existem vizinhanças U e V de x e $f(x)$, respetivamente, e vizinhanças $\hat{U}$ e $\hat{V}$ de $0 \in \mathbb{R}^k$ e $0 \in \mathbb{R}^l$, respetivamente, tais que as aplicações $\varphi\colon \hat{U} \to U$ e $\psi\colon \hat{V} \to V$, são parametrizações locais, em torno de x e $f(x)$, respetivamente. Estas aplicações, a princípio, nada têm a ver uma com a outra, nem com a aplicação f, entretanto, veremos no decorrer desta seção que se $\dim X = \dim Y$, a aplicação f é um difeomorfismo local.

Definição 1.3.1. *Sejam X e Y variedades e $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Dado $x \in X$, diz-se que f é um* difeomorfismo local em x *quando existe uma vizinhança U de x tal que a restrição de f a U é um difeomorfismo sobre uma vizinhança W de $y = f(x) \in W$. Quando f é difeomorfismo local em x, para todo $x \in X$, diz-se que f é* difeomorfismo local.

Observação 1.3.2. *[GP74, Exercício 1.3.5] Um difeomorfismo local $f\colon X \to Y$ injetivo é um difeomorfismo sobre um aberto de Y. De fato, como $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo local, para cada $x \in X$ existe uma vizinhança V_x de x, contida em X, tal que f aplica difeomorficamente V_x sobre um aberto W_x de Y, que contém $f(x)$. Dessa forma, podemos escrever*

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x.$$

Como V_x é aberto em X, pela Proposição 1.2.13, o conjunto $f(V_x)$ é aberto em Y, que contém $f(x)$. Assim, temos que

$$f(X) = f(\bigcup_{x \in X} V_x) = \bigcup_{x \in X} f(V_x) = \bigcup_{x \in X} W_x$$

é uma união de abertos. Portanto, $f(X)$ é um aberto de Y.

Agora, como f é injetiva, temos que a aplicação f é bijetiva sobre sua imagem $f(X)$ e, portanto, tem uma inversa global $f^{-1}\colon f(X) \to X$. Para cada $x \in X$, como $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo local, existe uma vizinhança V_x de x, contida em X, tal que $f|_{V_x}\colon V_x \to W_x$ é um difeomorfismo onde W_x é um aberto de Y com inversa $g\colon W_x \to V_x$ diferenciável que coincide com f^{-1} em W_x. A derivada de g em $y = f(x)$ coincide com $d(f^{-1})_y\colon T_yf(X) \to T_xX$. Portanto, $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo sobre um aberto de Y, como desejado.

Proposição 1.3.3. *Uma condição necessária para que $f\colon X \to Y$ seja um difeomorfismo local em torno de $x \in X$ é que $df_x\colon T_xX \to T_yY$, $y = f(x)$, seja um isomorfismo.*

Demonstração. Sejam $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos tais que $f\colon U \to V$ seja um difeomorfismo. Denotando a aplicação inversa $f^{-1}\colon V \to U$ por g tem-se, $g \circ f = id_U$ e $f \circ g = id_V$. Pela regra da cadeia,

$$dg_{f(x)} \circ df_x = Id_{T_xX} \quad \text{e} \quad df_x \circ dg_{f(x)} = Id_{T_{f(x)}Y},$$

para todo $x \in U$, e portanto, $df_x\colon T_xX \to T_yY$, $y = f(x)$, é um isomorfismo, cuja aplicação inversa é $dg_{f(x)}\colon T_yY \longrightarrow T_xX$. □

Esta condição também é suficiente, garantida pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3.4 (Teorema da Aplicação Inversa)**.** *Suponha que $f\colon X \to Y$ seja uma aplicação cuja derivada no ponto x, $df_x\colon T_xX \to T_yY$, é um isomorfismo. Então f é um difeomorfismo local em x.*

Demonstração. Como a aplicação $df_x\colon T_xX \to T_yY$ é um isomorfismo, as variedades X e Y têm a mesma dimensão, digamos k. Considere U_0 e V_0 subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^k$, $\varphi\colon U_0 \to U$ uma parametrização local em torno de $x \in X$, com $\varphi(0) = x \in U$, e $\psi\colon V_0 \to V$ parametrização local em torno de y, com $\psi(0) = y = f(x) \in V$ e $U = \varphi(U_0)$ e $V = \psi(V_0)$.

Observe o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \subset Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U_0 & \xrightarrow{\quad \psi^{-1}\circ f\circ\varphi \quad} & V_0. \end{array}$$

A aplicação $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U_0 \to V_0$ está bem definida, como cada uma das funções é suave, temos que g é suave e aplicando a regra da cadeia, temos

$$dg_0 = d\psi_y^{-1} \circ df_x \circ d\varphi_0.$$

Pela Proposição 1.3.3, as aplicações $d\varphi_0$ e $d\psi_y$ são isomorfismos e, por hipótese, df_x também é um isomorfismo, dessa forma, temos que dg_0 é dada pela composta de isomorfismos, logo dg_0 também é um isomorfismo.

Como U_0 e V_0 estão contidos em $\mathbb{R}^k$, o Teorema da Aplicação Inversa para aplicações entre abertos de $\mathbb{R}^k$ (vide e.g. [Lim16b, p.282]) garante que a aplicação

$$g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon U_0 \to V_0$$

é um difeomorfismo. Agora, como $f|_U = \psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, a aplicação $f|_U$ é uma composição de difeomorfismos.

Portanto $f|_U\colon U \to V$ é um difeomorfismo, como queríamos. □

Na subseção seguinte, o Teorema da Aplicação Inversa aparecerá novamente e outras generalizações e demonstrações serão acrescentadas. Entretanto, a seguir, daremos algumas respostas à pergunta: qual o *comportamento* de f no caso em que $\dim X \neq \dim Y$? O Teorema da Aplicação Inversa é uma ferramenta bastante utilizada, não só na topologia, como também em outras áreas da Matemática. Entretanto, uma das condições de aplicação imposta por ele é que domínio e contra domínio tenham a mesma dimensão (i.e. $\dim X = \dim Y$). Pensando em generalizar essa ideia, pode-se enfraquecer essa hipótese, considerando os seguintes casos: $\dim X > \dim Y$ ou $\dim X < \dim Y$.

1.3.1 Imersões

Definição 1.3.5. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Quando, para um dado $x \in X$, a aplicação $df_x\colon T_xX \to T_yY$ é injetiva, diz-se que f é uma* imersão em x. *Se a aplicação f é uma imersão em x, para todo x pertencente a X, diz-se então que f é uma* imersão.

Observação 1.3.6. *Se $f\colon X \to Y$ é uma imersão, então* $\dim X \leq \dim Y$.

Definição 1.3.7. *A* imersão canônica de $U \subset \mathbb{R}^k$ em $V \subset \mathbb{R}^l$, $k < l$, *é a aplicação $i\colon U \hookrightarrow V$, definida por $i(a_1, \ldots, a_k) = (a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^l$.*

Observação 1.3.8. *A imersão canônica é uma imersão.*

Teorema 1.3.9 (Forma Local Das Imersões)**.** *Suponha que $f\colon X \to Y$ seja uma imersão. Então existem sistemas de coordenadas locais em torno de x e $y = f(x)$ tais que $f(x_1, \ldots, x_k) = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$. Nestas condições, diz-se que f é localmente equivalente à imersão canônica em torno de x.*

Demonstração. Primeiramente, escolhem-se $\varphi\colon U \to X$ e $\psi\colon V \to Y$, parametrizações locais em torno de x e y, respetivamente, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$, de modo que o diagrama abaixo seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow{g=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi} & V. \end{array}$$

Agora iremos "expandir" a aplicação $g\colon U \to V$ e usar o Teorema da Aplicação Inversa. Como a aplicação $dg_0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ é injetiva, pode-se assumir, fazendo uma mudança de base em $\mathbb{R}^l$, se necessário, que sua representação matricial é da forma

$$\begin{bmatrix} Id_k \\ 0 \end{bmatrix}_{l\times k},$$

onde Id_k é a matriz identidade $k \times k$. Defina

$$G\colon U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l \quad \text{por} \quad G(a, z) = g(a) + (0, z),$$

onde $0 \in \mathbb{R}^k$.

Observe que $G(0, 0) = 0 \in \mathbb{R}^l$ e $U \times \mathbb{R}^{l-k}$ é aberto em $\mathbb{R}^l$ pois é o produto cartesiano de conjuntos abertos, logo, G aplica um aberto de $\mathbb{R}^l$ em $\mathbb{R}^l$. Assim a representação matricial de dG_0 é dada pela matriz identidade $l \times l$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, a aplicação G é um difeomorfismo local em

$0 \in \mathbb{R}^l$. Observe que a aplicação G foi definida de modo que se tenha $g = G \circ i$, onde i é a imersão canônica de U em $U \times \mathbb{R}^{l-k}$.

Como ψ e G são difeomorfismos locais em $0 \in \mathbb{R}^l$, então, considerando, se necessário, um aberto contido em $U \times \mathbb{R}^{l-k}$ de forma a que $G(U \times \mathbb{R}^{l-k}) \subset V$, $\psi \circ G$ também é difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^l$. Deste modo, $\psi \circ G$ pode ser usada como uma parametrização de Y em torno de $y \in Y$. Além disso, escolhendo U e V suficientemente pequenos o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi\circ G} \\ U & \xrightarrow[i]{} & V \end{array} .$$

Portanto, f é localmente equivalente à imersão canônica em torno de x. □

Corolário 1.3.10. *Se Z é uma subvariedade de X com $\dim X = k$ e $\dim Z = l$ e $z \in Z$, então existe um sistema de coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_k)$ em torno de z tal que $x_{l+1} = \ldots = x_k = 0$ em $U \cap Z$, onde U é uma vizinhança de z em X.*

Demonstração. Seja $j\colon Z \hookrightarrow X$ a aplicação de inclusão. Agora, considere $\varphi\colon U \to Z$, com $\varphi(0) = z$, e $\psi\colon V \to X$, com $\psi(0) = j(z)$, parametrizações locais em torno de z e $j(z)$, respetivamente, onde $U \subset \mathbb{R}^l$ e $V \subset \mathbb{R}^k$ são conjuntos abertos. Considerando os conjuntos abertos U e V suficientemente pequenos e $\iota\colon U \hookrightarrow V$ a imersão canônica de U em V, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{j} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow[i]{} & V. \end{array}$$

Nestas condições, tem-se $j = \psi \circ i \circ \varphi^{-1}$. Como φ, i e ψ são difeomorfismos sobre as respetivas imagens, a aplicação j é um difeomorfismo local, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa, $dj_z\colon T_zZ \to T_xX$, $x = j(z)$, é um isomorfismo. Assim, tem-se que a derivada dj_z é injetiva e, portanto, j é uma imersão. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, segue o resultado.

□

Observação 1.3.11. *Observa-se diretamente do Teorema da Forma Local das Imersões que se f é uma imersão no ponto x, então f é uma imersão numa vizinhança de x.*

Teorema 1.3.12. *[GP74, Exercício 1.3.10] (Teorema da Aplicação Inversa Generalizado)*

Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave e injetiva em uma subvariedade compacta Z, contida em X. Se para todo $x \in Z$, a aplicação $df_x\colon T_xX \to T_yY$, onde $y = f(x)$, é um isomorfismo, então f aplica difeomorficamente Z sobre $f(Z)$. Além disso, f aplica uma vizinhança de Z, em X, sobre uma vizinhança de $f(Z)$, em Y.

Demonstração. Por hipótese, para cada $x \in Z$, a aplicação $df_x \colon T_xX \to T_yY$ é um isomorfismo, logo, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 1.3.4), existe uma vizinhança U_x de x, contida em Z tal que $f|_{U_x}$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. A reunião U dos conjuntos U_x é um conjunto aberto que contém a subvariedade Z.

Observe que a aplicação $f \colon U \to Y$ é um difeomorfismo local. Então, o trabalho, agora, consiste em mostrar que existe um conjunto aberto V em X, com $Z \subset V$, tal que f seja injetiva em V. Assim, pela Observação 1.3.2, como f é um difeomorfismo local injetivo em $V \cap U$, $f|_{V\cap U} \colon V \cap U \to f(V \cap U)$ é um difeomorfismo da vizinhança $V \cap U$ de Z sobre a vizinhança $f(V \cap U)$ de $f(Z)$.

Suponha, com vista a uma contradição, que tal conjunto aberto V não existe. Considere uma sequência $\{\epsilon_k\}$ a convergir para 0. Para cada ϵ_k, considere o conjunto Z^k dos pontos $x \in X$ tal que a distância de x a Z é menor do que ϵ_k. (Aqui a distância considerada é a distância euclidiana no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde a variedade X está contida). Como, por suposição, f não é injetiva em cada Z^k, para cada k, existem a_k e b_k em Z^k, com $a_k \neq b_k$, mas $f(a_k) = f(b_k)$. As sequências $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ possuem pontos de acumulação em Z, donde os conjuntos $\bigcup_k \{a_k\} \cup Z$ e $\bigcup_k \{b_k\} \cup Z$ são compactos, dado que o conjunto Z é compacto. Como, por hipótese, f é injetiva em Z, então subsequências convergentes de $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ convergem para o mesmo ponto $z \in Z$. De fato, dadas uma subsequência $\{a_{k_i}\}$ de $\{a_k\}$, com $\lim a_{k_i} = z_1 \in Z$ e uma subsequência $\{b_{k_i}\}$ de $\{b_k\}$, com $\lim b_{k_i} = z_2 \in Z$, tem-se $\lim f(a_{k_i}) = f(z_1)$ e $\lim f(b_{k_i}) = f(z_2)$, pela continuidade de f; como $f(a_{k_i}) = f(b_{k_i})$, tem-se $f(z_1) = f(z_2)$ e, portanto, $z_1 = z_2 (= z)$, pela injetividade de f em Z. Agora, por hipótese, df_z é um isomorfismo e, pelo Teorema da Aplicação Inversa, f é difeomorfismo numa vizinhança de z, em particular, f é injetiva nessa vizinhança o que contradiz a existência nessa vizinhança de distintos a_k e b_k tais que $f(a_k) = f(b_k)$. Portanto existe um aberto V em X que contém Z onde a aplicação f é injetiva.

Mais ainda, tem-se que $f \colon V \cap U \to f(V \cap U)$ é um difeomorfismo, como desejado. □

É particularmente interessante a imagem de uma imersão. A imagem da imersão canônica $i \colon \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^l$, $k < l$, é, talvez, o mais simples exemplo de uma subvariedade, entretanto, não se pode afirmar que a imagem de uma imersão arbitrária $f \colon X \to Y$ é uma subvariedade de Y. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3.13. *[GP74, Exercício 1.3.7] Considere a aplicação $g \colon \mathbb{R} \to S^1$ dada por $g(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Vejamos que a aplicação g é um difeomorfismo local.*

Consideremos as parametrizações $\varphi_i \colon (-1, 1) \to V_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, de S^1 como no Exemplo 1.1.8. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, $g(t_0)$ pertence a algum dos abertos V_i. Suponhamos que $g(t) \in V_1$. Nesse caso, t_0 pertence a um intervalo da forma $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$. A função coordenada

$$\begin{aligned} (\varphi_1)^{-1} \circ g|_{(2k\pi,(2k+1)\pi)} \colon (2k\pi, (2k+1)\pi) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \cos 2\pi t \end{aligned}$$

é uma aplicação suave com aplicação inversa suave $x \mapsto \arccos(x)$. Caso $g(t_0)$ pertença a um outro aberto V_i, por um raciocínio análogo ao anterior, mostra-se que, localmente, a função coordenada $(\varphi_i)^{-1} \circ g$ é suave com inversa suave. Dessa forma, temos que g é um difeomorfismo local.

Agora defina a aplicação $G\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$ *por* $G(t,s) = (g(t), g(s))$. *Vejamos que aplicação* G *é um difeomorfismo local do plano* $\mathbb{R}^2$ *no toro* $S^1 \times S^1$. *Dado* $(t_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$, *suponhamos que* $G(t_0, s_0) \in V_1 \times V_1$. *Considerando a parametrização* $\varphi_1 \times \varphi_1\colon (a,b) \mapsto (\varphi_1(a), \varphi_1(b))$ *de* $S^1 \times S^1$ *em torno de* $G(t_0, s_0)$, *a representação local de* G *é dada por*

$$(t,s) \mapsto (\cos 2\pi t, \cos 2\pi s).$$

Nesse caso, a matriz que representa a derivada $dG_{(t,s)}$ *é dada por*

$$2\pi \begin{bmatrix} -\text{sen}2\pi t_0 & 0 \\ 0 & -\text{sen}2\pi s_0 \end{bmatrix}.$$

Como $G(t_0, s_0) \in V_1 \times V_1$, *o determinante da matriz é diferente de* 0, *logo a aplicação* $dG_{(t_0,s_0)}$ *é isomorfismo. Por um raciocínio análogo, prova-se que* $dG_{(t_0,s_0)}$ *é isomorfismo em* (t_0, s_0), *para todo* (t_0, s_0) *em* $\mathbb{R}^2$. *Portanto* G *é um difeomorfismo local.*

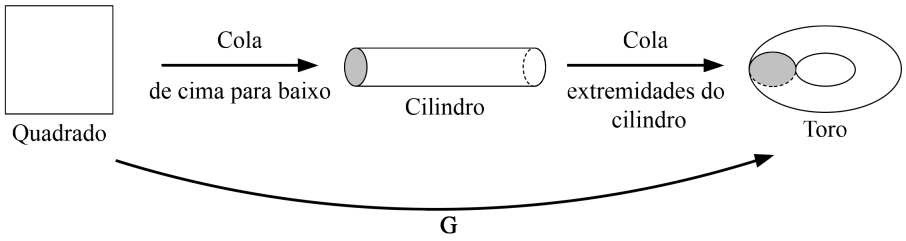

Figura 1.3: *"Transformação"do quadrado num toro.*

Agora defina uma aplicação $f\colon L \to S^1 \times S^1$ *como sendo a restrição de* G *a uma reta* $L = \{(x,y);\, y = \alpha x\}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *que passa pela origem, cuja declividade* α *é um número irracional.*

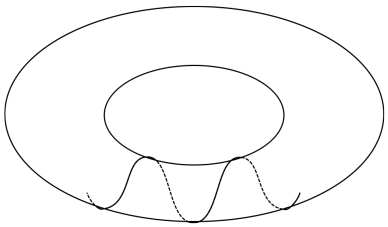

Figura 1.4: *A imagem da curva* $G|_L\colon L \to S^1 \times S^1$, *no toro.*

Como $f = G|_L = G \circ i$, *onde* $i\colon L \to \mathbb{R}^2$ *é a inclusão da reta* L *no plano* $\mathbb{R}^2$ *e as aplicações* G *e* i *são imersões, a aplicação* f *é uma imersão. Além disso, a aplicação* f *é injetiva: de fato, dados* $(t, \alpha t), (s, \alpha s) \in L$ *tais que* $f(t, \alpha t) = f(s, \alpha s)$, *segue que* $\cos(2\pi t) = \cos(2\pi s), \text{sen}(2\pi t) = \text{sen}(2\pi s), \cos(2\pi \alpha t) = \cos(2\pi \alpha s)$ *e* $\text{sen}(2\pi \alpha t) = \text{sen}(2\pi s)$ *e, portanto, como* α *é irracional, tem-se* $(t, \alpha t) = (s, \alpha s)$.

A imagem $f(L)$ *de* f *não é uma subvariedade do toro* $S^1 \times S^1$. *Com efeito, se* $f(L)$ *fosse subvariedade de* $S^1 \times S^1$ *então, para todo* $z \in L$, *existiria uma*

vizinhança U de z tal que $f|_U \colon U \to S^1 \times S^1$ é um difeomorfismo sobre a imagem, em particular, para cada $z \in L$, a imagem de cada vizinhança conexa de z é conexa. No entanto, considerando uma vizinhança conexa U de z, a imagem $f(U) \subset S^1 \times S^1$ contém uma infinidade de segmentos da curva dada por $f(L)$, pois α é irracional e, portanto, não é conexa.

O Teorema da Forma Local das Imersões garante que uma imersão f aplica uma vizinhança W dum ponto x, suficientemente pequena, difeomorficamente em sua imagem $f(W)$. No entanto, para que $f(W)$ seja uma subvariedade de Y é necessário que todos os pontos $y \in f(W)$ possuam vizinhanças parametrizáveis. Para garantir que a imagem de uma imersão é variedade, apresentamos a seguinte definição

Definição 1.3.14. *Diz-se que uma aplicação $f \colon X \to Y$, entre variedades X e Y, é* própria *se a pré-imagem de qualquer compacto contido em Y é um compacto, contido em X. Uma imersão injetiva e própria chama-se* mergulho.

Teorema 1.3.15. *Um mergulho $f \colon X \to Y$ aplica X sobre uma subvariedade difeomorficamente.*

Demonstração. Para mostrar que $f(X)$ é uma variedade, é suficiente mostrar que a imagem de qualquer conjunto aberto W de X é um conjunto aberto de $f(X)$. Com efeito, se f é uma aplicação que leva cada aberto W contido em X num aberto $U = f(W)$ contido em $f(X)$, então temos que dado $y \in U$, existe uma vizinhança V de y, em Y, tal que a aplicação $\varphi \colon V_0 \subset \mathbb{R}^l \to V$ é um difeomorfismo, onde V_0 é um aberto de $\mathbb{R}^l$ contendo a origem e $\varphi(0) = y$. Observe que $U \cap V$ está contido em V e tomando um subconjunto de $U \cap V$, se necessário, temos que a aplicação $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)} \colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to U \cap V$ é um difeomorfismo entre conjuntos abertos. Como $U \cap V$ também está contido em $U = f(X)$, temos que $\varphi|_{\varphi^{-1}(U \cap V)} \colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to U \cap V$ é uma parametrização local, em torno de $y \in f(X)$. Portanto é suficiente mostrar que $f(W)$ é um aberto de $f(X)$.

Se $f(W)$ não é aberto de $f(X)$, então existe uma sequência $\{y_i\}$ em $f(X)$ que não pertence a $f(W)$ mas que converge para algum ponto $y \in f(W)$. Como o conjunto $\{y, y_i\}$ é compacto, a pré-imagem em X também é compacta, pois f é própria. Como f é um mergulho, por definição, f é injetiva e cada ponto y_i é a pré-imagem de um único $x_i \in X$ e y possui precisamente uma pré-imagem $x \in W$. Como $\{x, x_i\}$ é compacto, passando a uma subsequência, se necessário, pode-se assumir que a sequência $\{x_i\}$ converge para um ponto $z \in X$. Então $\lim f(x_i) = f(z)$, mas como $\lim y_i = \lim f(x_i) = f(x) = y$, pela injetividade de f, tem-se $z = x$. Agora, W é aberto e como $\lim x_i = x$, conclui-se que, para $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $x_i \in W$, mas isto contraria o fato de que $y_i \notin f(W)$.

Agora, tendo provado que $f(X)$ é uma variedade, pode-se finalmente, provar que a aplicação $f \colon X \to f(X)$ é um difeomorfismo. Considere V um aberto de $f(X)$ e $V' \subset f(X)$ um conjunto compacto que contém V. Como f é um mergulho, a pré-imagem de V' por f é um compacto U', contido em X. Agora considere a pré-imagem U de V por f. O conjunto U é aberto em X e está contido no compacto U'. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, substituindo os abertos U e V por abertos neles contidos, se necessário, considere parametrizações locais $\varphi \colon U_0 \to X$ e $\psi \colon V_0 \to f(X)$ de X e $f(X)$, respetivamente, com

$\varphi(U_0) = U$ e $\psi(V_0) = V$, onde $U_0 \subset \mathbb{R}^k$ e $V_0 \subset \mathbb{R}^l$ são abertos, tais que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon\ (x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0 \ldots, 0).$$

Agora, pela construção feita, temos que $f|_U : U \to V$ é dada pela seguinte composição $f|_U = \psi^{-1} \circ i \circ \varphi$, onde $i\colon U_0 \hookrightarrow V_0$ é a imersão canônica. Como cada uma das aplicações ψ^{-1}, i e φ é um difeomorfismo, temos assim que $f|_U$ é um difeomorfismo de U sobre V. Como U e V são abertos, temos que f é um difeomorfismo local e, como f é injetiva, por hipótese, temos, pela Observação 1.3.2, que f é um difeomorfismo de X sobre $f(X)$.

Portanto, $f(X)$ é uma subvariedade de Y e $f\colon X \to f(X)$ é um difeomorfismo. □

1.3.2 Submersões

Agora, para responder à "outra parte" da pergunta feita antes desta subseção, considera-se o caso em que $\dim X > \dim Y$.

Definição 1.3.16. *Considere variedades X e Y e uma aplicação suave $f\colon X \to Y$. Quando, para todo $x \in X$, $df_x\colon T_xX \to T_yY$, $y = f(x)$, é sobrejetiva, diz-se que f é uma* submersão em x. *Se a aplicação f é uma submersão em x, para todo $x \in X$, f diz-se uma* submersão.

Observação 1.3.17. *Se $f\colon X \to Y$ é uma submersão, então* $\dim X \geq \dim Y$.

De modo análogo ao que foi feito com imersões, também define-se submersão canônica.

Definição 1.3.18. *Chama-se* submersão canônica de $\mathbb{R}^k$ em $\mathbb{R}^l$, $k \geq l$, *à projeção definida por $(a_1, \ldots, a_k) \mapsto (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l)$.*

Observação 1.3.19. *A submersão canônica é uma submersão.*

Teorema 1.3.20 (Forma Local das Submersões)**.** *Suponha que $f\colon X \to Y$ seja uma submersão em x e, seja $y = f(x)$. Então existem sistemas de coordenadas locais em torno de x e y tais que $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$, onde $k = \dim X$ e $l = \dim Y$. Nestas condições, diz-se que f é equivalente à submersão canônica em torno de x.*

Demonstração. Sejam $\varphi\colon U \to X$ e $\psi\colon V \to Y$ parametrizações locais de X e Y, em torno dos pontos x e y, respetivamente, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$ e onde $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ são conjuntos abertos. Definindo $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}$$

Agora, a aplicação g será modificada de modo a poder-se aplicar o Teorema da Aplicação Inversa. Como f é submersão em x, a aplicação $dg_0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva. Fazendo uma escolha conveniente de uma base em $\mathbb{R}^k$, temos que a matriz

$$\left[Id_k|0\right]_{l\times k},$$

representa a aplicação dg_0 com respeito a essa base. Agora defina $G\colon U \to \mathbb{R}^k$ por $G(a) = (g(a), a_{l+1}, \ldots, a_k)$, onde $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Assim, a matriz que representa $dG_0\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é a matriz identidade $k \times k$, donde G é um difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^k$. Como φ e G^{-1} são difeomorfismos locais, então $\varphi \circ G^{-1}$ é difeomorfismo local em $0 \in \mathbb{R}^k$. Deste modo, $\varphi \circ G^{-1}$ pode ser usada como parametrização de X em torno de $x \in X$. Além disso, escolhendo U e V suficientemente pequenos e definindo s como a submersão canônica, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi\circ G^{-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \psi} \\ U & \xrightarrow{s} & V \end{array}$$

Portanto, f é localmente equivalente à submersão canônica em torno de x. □

Novamente fazendo analogia com imersões observa-se que submersão é um conceito local, ou seja, se f é uma submersão no ponto x, então f é submersão em alguma vizinhança de x, ou seja, submersão também é um conceito local.

Definição 1.3.21. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave entre variedades X e Y. Diz-se que um ponto $y \in Y$ é* valor regular de f *se $df_x\colon T_xX \to T_yY$ for sobrejetiva em todo o ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Quando $y \in Y$ não é valor regular de f, diz-se que y é* valor crítico de f.

Na Geometria, quando $f\colon X \to Y$ é uma aplicação suave entre superfícies regulares, e y é valor regular de f, então o conjunto

$$\{x \in X\colon f(x) = y\}$$

é uma superfície regular. A título de informação, consulte, por exemplo, [dC05, p.69]. Sabendo que a ideia de regularidade de superfícies, na Geometria, é bastante similar à ideia de diferenciabilidade em variedades, pode-se pensar num resultado para variedades que generalize este, para superfícies. Partindo desta intuição, obtém-se o seguinte teorema.

Teorema 1.3.22 (Teorema da Pré-Imagem)**.** *Se y é valor regular da aplicação $f\colon X \to Y$, então a pré-imagem $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X, mais ainda,* $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

Demonstração. Como, para todo $x \in f^{-1}(y)$, df_x é sobrejetiva, f é uma submersão em torno de $x \in f^{-1}(y)$. Escolha sistemas de coordenadas locais em torno de x e y, respetivamente, tais que $f(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_l)$, $k = \dim X$, $l = \dim Y$, e faça y corresponder a $(0, \ldots, 0)$. Assim, próximo de x, o conjunto $f^{-1}(y)$ é exatamente o conjunto de pontos da forma $(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_k)$. Mais precisamente, se V é uma vizinhança de x onde o sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_k)$ está definido, então $f^{-1}(y) \cap V$ é o conjunto dos pontos onde $x_1 = 0 = \ldots = x_l$. As funções $(x_{l+1}, \ldots, x_k)$ formam um sistema de coordenadas no conjunto $f^{-1}(y) \cap V$ que é um aberto relativo em $f^{-1}(y)$. Logo, $f^{-1}(y)$ é subvariedade de dimensão $k - l$. Observe a Figura 1.5.

□

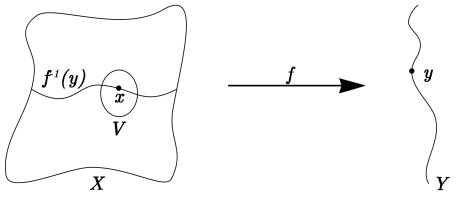

Figura 1.5: *O conjunto* $f^{-1}(y) \cap V$ *é um aberto de* $f^{-1}(y)$.

Uma aplicação interessante do Teorema da Pré-imagem é mostrar que o grupo ortogonal $\mathcal{O}(n)$ é uma variedade. Enunciamos abaixo este exemplo.

Exemplo 1.3.23. *O grupo* $\mathrm{O}(n)$ *das matrizes ortogonais é uma subvariedade do grupo das matrizes* $\mathcal{M}(n)$ *e possui dimensão* $\frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração. Primeiramente, o espaço $\mathcal{M}(n)$ das matrizes, com entradas reais, é uma variedade de dimensão n^2; de fato, reorganizando as entradas de cada matriz ao longo de uma única linha, obtemos o próprio $\mathbb{R}^{n^2}$. O grupo $\mathrm{O}(n)$ é o grupo das matrizes $A \in \mathcal{M}(n)$ tais que $AA^t = I_n$, onde A^t é a transposta da matriz A e I_n é a matriz identidade $n \times n$. Observe que para qualquer matriz A, a matriz AA^t é simétrica pois é igual a sua transposta.

Afirmamos que o espaço vetorial $\mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas é uma subvariedade de $\mathcal{M}(n)$ difeomorfo a $\mathbb{R}^k$, onde $k = n(n+1)/2$. De fato, observe que uma matriz simétrica $n \times n$ fica determinada pelas entradas da diagonal principal e pelas entradas acima dessa diagonal, ou seja, por $n(n+1)/2$ entradas.

Afirmamos também que a aplicação $f\colon \mathcal{M}(n) \to \mathcal{S}(n)$, dada por $f(A) = AA^t$ é suave. De fato, como $\dim \mathcal{S}(n) = n(n+1)/2$, a imagem $f(A) = AA^t$ pode ser identificada com um vetor do espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$, com $k = n(n+1)/2$, onde cada entrada desse vetor é da forma

$$b_{ij}(A) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{kj},$$

onde x_{ik} e x_{kj} denotam as entradas (i,k) e (k,j) da matriz A, respetivamente. Assim, temos que o termo b_{ij} do produto AA^t é dado por um polinômio nas entradas de A. Portanto, f é uma aplicação suave.

Dessa forma, segue que $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(I_n)$. Agora, basta provar que I_n é valor regular de f. Por definição, a derivada $df_A\colon T_A\mathcal{M}(n) \to T_{f(A)}\mathcal{S}(n)$ de f em A é dada por:

$$\begin{aligned}
df_A(B) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(A+sB) - f(A)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{(A+sB)(A+sB)^t - AA^t}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{AA^t + sBA^t + sAB^t + s^2BB^t - AA^t}{s} \\
&= \lim_{s\to 0} BA^t + AB^t + sBB^t \\
&= BA^t + AB^t,
\end{aligned}$$

onde $B \in T_A\mathcal{M}(n)$. Agora é necessário verificar que, de fato, $df_A\colon T_A\mathcal{M}(n) \to T_{f(A)}S(n)$ é sobrejetiva quando $A \in f^{-1}(I) = \mathrm{O}(n)$. Pelas identificações feitas de $\mathcal{M}(n)$ e $\mathcal{S}(n)$ com espaços euclidianos, tem-se $T_A\mathcal{M}(n) = \mathcal{M}(n)$ e $T_{f(A)}\mathcal{S}(n) = \mathcal{S}(n)$. A matriz I_n é valor regular de f se e somente se $df_A\colon \mathcal{M}(n) \to \mathcal{S}(n)$ é sobrejetiva para todo $A \in \mathrm{O}(n)$, isto é, dada $C \in \mathcal{S}(n)$, existe $B \in \mathcal{M}(n)$ tal que $df_A(B) = C$, ou seja, $BA^t + AB^t = C$. Dadas $A \in \mathrm{O}(n)$ e $C \in \mathcal{S}(n)$, tome-se $B = 1/2CA$. Logo

$$df_A(B) = \left(\frac{1}{2}CA\right)A^t + A\left(\frac{1}{2}CA\right)^t = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^t = C$$

Assim, f é uma submersão para todo $A \in f^{-1}(I_n)$ e I_n é valor regular de f. Portando $\mathrm{O}(n)$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}(n)$, mais ainda,

$$\dim \mathrm{O}(n) = \dim \mathcal{M}(n) - \dim \mathcal{S}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

Teorema 1.3.24. *[GP74, Exercício 1.4.7] Se y é valor regular da aplicação $f\colon X \to Y$, onde X é variedade compacta e tem a mesma dimensão de Y, então $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Além disso, existe uma vizinhança U de y, em Y tal que $f^{-1}(U)$ é dado pela união disjunta $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, onde V_i é uma vizinhança aberta de x_i e f aplica cada V_i difeomorficamente sobre U.*

Demonstração. Como y é valor regular de f, pelo Teorema da Pré-Imagem, temos que $f^{-1}(y)$ é uma subvariedade de X, de dimensão 0. Logo, $f^{-1}(y)$ é um conjunto discreto de pontos. Como $f^{-1}(y)$ é fechado em X e X é compacto, temos que $f^{-1}(y)$ é compacto. Logo $f^{-1}(y)$ é um conjunto finito de pontos $\{x_1 \ldots, x_n\}$.

Por fim, como $f\colon X \to Y$ é difeomorfismo local em cada $x_i \in f^{-1}(y)$, para cada $i = 1, \ldots, n$, existe uma vizinhança $\hat{V}_i$ de x_i tal que $f|_{\hat{V}_i}\colon \hat{V}_i \to f(\hat{V}_i)$ é difeomorfismo. Considerando $U = \bigcap_{i=1}^n f(\hat{V}_i)$ e $V_i = \hat{V}_i \cap f^{-1}(U)$, obtém-se o resultado. □

Definição 1.3.25. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. As transformações lineares $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, com valores numéricos, são chamadas* funcionais lineares.

Proposição 1.3.26. *Seja $g = (g_1, \ldots, g_l)\colon X \to \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave e $x \in X$. A derivada $dg_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^l$ de g em x é sobrejetiva se, e somente se, os funcionais lineares $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes em T_xX.*

Demonstração. De fato, se $dg_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva, então uma matriz que representa dg_x tem l linhas linearmente independentes. Como a i-ésima linha dessa matriz é representação de $d(g_i)_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, l$, segue que $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes. Por outro lado, sendo os funcionais lineares $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ linearmente independentes, a matriz jacobiana de $dg_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^l$ possui l linhas linearmente independentes, isto é, $\dim \mathrm{Im} dg_x = l$, ou seja, dg_x é sobrejetiva. □

Definição 1.3.27. *Diz-se que as funções $g_1, \ldots, g_l\colon X \to \mathbb{R}$ são* independentes *em x, quando os funcionais lineares $d(g_1)_x, \ldots, d(g_l)_x$ são linearmente independentes em T_xX, ou equivalentemente, quando $dg_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva.*

Definição 1.3.28. *A* codimensão *de uma subvariedade $Z \subset X$ é dada pela equação*

$$\operatorname{codim} Z = \dim X - \dim Z.$$

A definição de codimensão não depende somente de Z, mas também do ambiente onde ela se encontra, isto é, da variedade X. A próxima proposição afirma que l funções independentes em X determinam uma subvariedade de codimensão l.

Proposição 1.3.29. *Seja $g\colon X \to \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave. Se as funções coordenadas $g_1, \ldots, g_l\colon X \to \mathbb{R}$ são funções independentes em cada ponto onde todas se anulam, então o conjunto*

$$Z = \{x \in X\colon g_1(x) = \ldots = g_l(x) = 0\}$$

é uma subvariedade de X, com $\dim Z = \dim X - l$.

Demonstração. Como as funções coordenadas $g_1, \ldots, g_l\colon X \to \mathbb{R}$ são funções independentes em todo ponto $x \in Z$, os funcionais lineares

$$(dg_1)_x, \ldots, (dg_l)_x\colon T_xX \to \mathbb{R}$$

são linearmente independentes, ou seja, a derivada

$$dg_x\colon X \to \mathbb{R}^l$$

é sobrejetiva em todo ponto $x \in Z$. Dessa forma, temos que 0 é valor regular de g, pois dg_x é sobrejetiva em todo ponto x pertencente a $Z = g^{-1}(0)$. Assim, pelo Teorema da Pré-imagem, temos que Z é uma subvariedade de X, com $\dim Z = \dim X - l$, como queríamos. □

A recíproca da proposição anterior não vale com toda a generalidade. De fato, existe exemplo de uma subvariedade Z de uma variedade X que não é determinada por funções independentes. Veja, por exemplo, a Proposição 2.2.12. Os próximos dois resultados dirão quando é possível determinar uma subvariedade Z de X por funções independentes. Desse modo, estes resultados também garantirão (em parte) a recíproca da Proposição 1.3.29.

Teorema 1.3.30 (Recíproca Parcial 1)**.** *Se y é valor regular de uma aplicação suave $f\colon X \to Y$ então a pré-imagem da subvariedade $f^{-1}(y)$ é determinada por funções independentes.*

Demonstração. Sejam W uma vizinhança de $y \in Y$ e $h\colon W \subset Y \to h(W)$ um difeomorfismo tal que $h(W)$ é aberto de $\mathbb{R}^l$, onde $l = \dim Y$, e $h(y) = 0$. Considere a aplicação $g = h \circ f\colon f^{-1}(W) \subset X \to \mathbb{R}^l$. Afirmamos que 0 é valor regular de $g = h \circ f$. De fato, aplicando a regra da cadeia à aplicação g, obtém-se

$$dg_x = d(h \circ f)_x = dh_y \circ df_x,$$

para todo $x \in f^{-1}(y)$. Como y é valor regular de f, df_x é sobrejetiva em todo ponto $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como $h\colon W \to h(W) \subset \mathbb{R}^l$ é um difeomorfismo, tem-se que dh_y é um isomorfismo, logo é aplicação sobrejetiva e, além disso, $h(y) = 0$. Dessa forma, tem-se $dg_x = dh_y \circ df_x$ sobrejetiva para todo $x \in X$ tal que $g(x) = 0$. Portanto, 0 é valor regular de g, justificando assim a afirmação.

Finalmente, tomando $g_1, \ldots, g_l$ as funções coordenadas de g, tem-se pela Proposição 1.3.26 que estas funções são independentes, pois a sobrejetividade de dg_x é garantida pela afirmação feita acima. Portanto $f^{-1}(y)$ é determinado por l funções independentes. Logo, as funções coordenadas de g garantem o resultado. □

Teorema 1.3.31 (Recíproca Parcial 2)**.** *Toda subvariedade de X de codimensão l é localmente determinada por l funções independentes.*

Demonstração. Sejam Z uma subvariedade de X de codimensão l e z um ponto de Z. Afirmamos que existem l funções independentes $g_1, \ldots, g_l$ definidas em alguma vizinhança W de z, em X, tais que $g_1 = \ldots = g_l = 0$ em $W \cap Z$. De fato, seja $i\colon Z \hookrightarrow X$ a aplicação inclusão. Observe que a inclusão é, na verdade, uma imersão, e assim, pelo Teorema da Forma Local das Imersões, existem parametrizações locais $\varphi\colon V \subset \mathbb{R}^k \to Z$ e $\psi\colon U \subset \mathbb{R}^{k+l} \to X$ em torno de z e de $i(z)$, respetivamente, tais que

$$\psi^{-1} \circ i \circ \varphi\colon (z_1, \ldots, z_k) \mapsto (z_1, \ldots, z_k, 0 \ldots, 0)$$

e $i \circ \varphi(V) = \psi(U)$.

Tomando a vizinhança $W = \psi(U) \subset X$ de $i(z)$ e, para cada $j = 1, \ldots, l$, a aplicação $g_j\colon W \to \mathbb{R}$ definida por

$$g_j = \pi_{k+j} \circ \psi^{-1},$$

onde $\pi_{k+j}\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}$ é a projeção $\pi_{k+j}(x_1, \ldots, x_{k+l}) = x_{k+j}$, temos que $W \cap i(Z) = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1, \ldots, g_l)$. De fato, tomando $w \in W \cap i(Z)$, tem-se $w = \psi(u) = i \circ \varphi(v)$, com $u \in U$ e $v = (v_1, \ldots, v_k) \in V$, e, para cada $j = 1, \ldots, l$,

$$\begin{aligned} g_j(w) &= \pi_{k+j} \circ \psi^{-1}(w) \\ &= \pi_{k+j}(\psi^{-1} \circ i \circ \varphi(v)) \\ &= \pi_{k+j}(v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $w \in g^{-1}(0)$, então, como $i \circ \varphi(V) = \psi(U)$ e $i = \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}$, onde $\iota(z_1, \ldots, z_k) = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots, 0)$, tem-se

$$\begin{aligned} w &= \psi(v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0) \quad \text{onde } (v_1, \ldots, v_k, 0, \ldots, 0) \in U \\ &= \psi \circ \iota(v_1, \ldots, v_k) \quad \text{onde } (v_1, \ldots, v_k,) \in V \\ &= \psi \circ \iota \circ \varphi^{-1}(\varphi(v)) \quad \text{onde } \varphi(v) \in \varphi(V) \subset Z. \end{aligned}$$

Além disso, como a aplicação $d(\pi_{k+j})_{\psi^{-1}(x)} = \pi_{k+j}\colon \mathbb{R}^{l+k} \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva e a aplicação $d(\psi^{-1})_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^{k+l}$ é isomorfismo, a aplicação $dg_x\colon T_xX \to \mathbb{R}^l$ é sobrejetiva e, portanto, $g_1, \ldots, g_l$ são funções independentes. □

Corolário 1.3.32. *[GP74, Exercício 1.4.4] Se $Z \subset X \subset Y$ são variedades e $z \in Z$, então existem funções independentes $g_1, \ldots, g_l$ definidas numa vizinhança W de z, em Y, tais que*

$$Z \cap W = \{y \in W\colon g_1(y) = 0, \ldots, g_l(y) = 0\}$$

e

$$X \cap W = \{y \in W \colon g_1(y) = 0, \ldots, g_m(y) = 0\},$$

onde l é a codimensão de Z em Y e m é a codimensão de X em Y. Além disso, a codimensão de Z em X é $l - m$.

Demonstração. Consideremos parametrizações $\varphi \colon V \to Z$, $\phi \colon V' \to X$ e $\psi \colon U \to Y$ em torno de $z, i_Z(z)$ e $i_X \circ i_Z(z)$, respetivamente, onde $i_Z \colon Z \to X$ e $i_X \colon X \to Y$ são as inclusões naturais e $V \subset \mathbb{R}^k, V' \subset \mathbb{R}^{k'}$ e $U \subset \mathbb{R}^{k+l}$ são abertos (e $k + l = k' + m$). Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi} \\ V & \xrightarrow{g=\phi^{-1}\circ i_Z\circ\varphi} & V'. \end{array}$$

Como i_Z é imersão, pela demonstração do Teorema da Forma Local das Submersões, observa-se que, compondo a parametrização ϕ com uma aplicação conveniente, obtém-se uma parametrização $\hat{\phi} \colon \hat{V}' \to X$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\phi} \\ V & \xrightarrow{\iota} & \hat{V}', \end{array}$$

onde $\iota \colon V \to \mathbb{R}^{k'}$ é a inclusão canônica. Utilizando um argumento análogo ao agora apresentado e considerando a imersão i_X e as parametrizações $\hat{\phi}$ de X e ψ de Y, obtém-se uma parametrização $\hat{\psi} \colon \hat{U} \to Y$ de Y tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{i_Z} & X & \xrightarrow{i_X} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\hat{\phi}} & & \uparrow{\scriptstyle\hat{\psi}} \\ V & \xrightarrow{\iota} & \hat{V}' & \xrightarrow{j} & U, \end{array}$$

onde $j \colon \hat{V}' \to \mathbb{R}^{k+l}$ é a inclusão canônica.

Seguindo a demonstração do Teorema 1.3.31 e diminuindo as vizinhanças $\hat{V}'$ e $W := U$, se necessário, constroem-se as l funções independentes $g_1, \ldots, g_l$ pretendidas.

Como $k + l = k' + m$, obtém-se que a codimensão de Z em X é $l - m$. □

Proposição 1.3.33. *Seja Z a pré-imagem de um valor regular $y \in Y$ por uma aplicação suave $f \colon X \to Y$. Então o núcleo da derivada $df_x \colon T_xX \to T_yY$ em qualquer ponto $x \in Z$ é precisamente o espaço tangente a Z em x, T_xZ.*

Demonstração. Como f é constante em Z, então $df_x(v) = 0$, para todo $x \in Z$ e $v \in T_xZ$. Portanto T_xZ é subconjunto do núcleo $\ker df_x$ de df_x, para todo $x \in Z$. Além disso, como, para $x \in Z$, df_x é sobrejetiva, tem-se

$$\dim \ker df_x = \dim T_xX - T_yY = \dim X - \dim Y$$

Assim, T_xZ é subespaço de $\ker df_x$ com mesma dimensão. Portanto, $T_xZ = \ker df_x$, para todo $x \in Z$. □

1.4 Aplicações Transversais

Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave entre variedades X e Y. Na seção anterior estudamos o conjunto solução da equação $f(x) = y$ quando y é um valor regular de f. Nesse caso, esse conjunto solução é uma subvariedade de X. Estudaremos, agora, o conjunto de pontos de X cujos valores em Y estão sujeitos a uma certa condição, que não será necessariamente tomarem um valor constante. Para esse fim, considere uma aplicação suave $f\colon X \to Y$, uma subvariedade Z de Y e $y = f(x)$ com $x \in X$. Pelo Teorema 1.3.31, se $y \in Z$, então existe uma vizinhança U de y e funções $g_1, \ldots, g_l\colon U \to \mathbb{R}$ (onde l é a codimensão de Z em Y) tais que

$$Z = \{z \in U\colon g_1(z) = \ldots = g_l(z) = 0\}.$$

Assim,

$$f^{-1}(Z) = \{a \in X\colon g_1 \circ f(a) = \ldots = g_l \circ f(a) = 0\} = (g \circ f)^{-1}(0),$$

onde $g = (g_1, \ldots, g_l)$ é uma submersão definida em U.

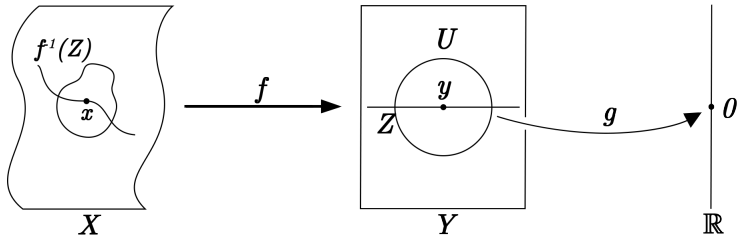

Figura 1.6: *O conjunto $f^{-1}(Z)$ está localmente determinado pela composição $g \circ f(x)$.*

Assim, pelo Teorema 1.3.30, $f^{-1}(Z)$ é subvariedade de X se 0 é valor regular de $g \circ f$. Iremos reescrever esta última condição em termos de f e Z. Com efeito, pela regra da cadeia, tem-se

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x,$$

donde $d(g \circ f)_x$ é sobrejetiva se, e somente se, $dg_y\colon T_yY \to \mathbb{R}^l$ aplica a imagem de df_x sobre $\mathbb{R}^l$. Como a aplicação dg_y é sobrejetiva e tem núcleo $\ker dg_y = T_yZ$, a aplicação dg_y aplica a imagem de df_x, $Im(df_x)$, sobre $\mathbb{R}^l$ se os subespaços $Im(df_x)$ e T_yZ geram todo o espaço T_yY. Conclui-se que $g \circ f$ é uma submersão no ponto $x \in f^{-1}(Z)$ se, e somente se,

$$Im(df_x) + T_yZ = T_yY. \tag{1.1}$$

Definição 1.4.1. *Sejam X e Y variedades. Diz-se que uma aplicação suave $f\colon X \to Y$ é* transversal *a uma subvariedade Z, contida em Y, (denota-se por $f \pitchfork Z$) quando f satisfaz a equação* (1.1) *acima para cada ponto x da pré-imagem de Z.*

O raciocínio feito antes da definição em conjunto com o Teorema 1.3.24 permitem concluir que:

Teorema 1.4.2. *Se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação suave e transversal a uma subvariedade $Z \subset Y$, então a pré-imagem $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X. Mais ainda, codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual à codimensão de Z em Y.*

Exemplo 1.4.3. *Como exemplo de uma aplicação transversal a uma subvariedade, considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x) = (x, x)$ e Z o eixo x em $\mathbb{R}^2$. Já um exemplo de aplicação não transversal a uma subvariedade Z é dado por $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com $f(x) = (x, x^2)$ e Z o eixo x.*

Quando a subvariedade Z é dada por um único ponto (i.e. $Z = \{y\}$), o espaço tangente T_yZ é, na verdade, um subespaço de Y de dimensão zero. Assim, f é transversal a $\{y\}$ se $Imdf_x = T_yY$, para todo $x \in X$ tal que $f(x) = y$, onde diz-se que y é valor regular de f. Dessa forma, observa-se que regularidade é um caso particular de transversalidade.

No caso particular em que a aplicação f é a inclusão i de X em Y, onde X é subvariedade de Y, dizer que um ponto $x \in X$ pertence a $i^{-1}(Z)$, onde Z é subvariedade de Y, significa dizer que $x \in X \cap Z$. Além disso, a derivada $di_x\colon T_xX \to T_xY$ é meramente a aplicação de inclusão do espaço tangente T_xX no espaço tangente T_yY. Então, a aplicação inclusão $i\colon X \to Y$ é transversal à subvariedade Z ($i \pitchfork Z$) se, e somente se, para todo $x \in X \cap Z$,

$$T_xX + T_xZ = T_xY.$$

Definição 1.4.4. *Diz-se que duas subvariedades X e Z de Y são* transversais *(denota-se por $X \pitchfork Z$) quando ambas satisfazem a equação acima, isto é, quando $i_X \pitchfork Z$.*

Teorema 1.4.5. *A interseção de duas subvariedades X e Z transversais em Y também é uma subvariedade de Y e* $\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$.

Demonstração. Seja $i\colon X \to Y$ a aplicação inclusão de X em Y. Como $X \pitchfork Z$ tem-se $i \pitchfork Z$ e, pelo teorema anterior, segue que $i^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X onde a codimensão de $i^{-1}(Z) = X \cap Z$ em X é igual à codimensão de Z em Y. Seja $x \in X \cap Z$. Pelo Teorema 1.3.31, existe uma vizinhança W de x em Y onde X é determinada por $k = \operatorname{codim}(X)$ funções independentes, $g_1, \ldots, g_k$, e Z é determinada por $l = \operatorname{codim}(Z)$ funções independentes, $h_1, \ldots, h_l$. Então $X \cap Z$ é o conjunto onde a coleção combinada das $k + l$ funções, $g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_l$, se anulam. Afirmamos que essas $k + l$ funções são independentes em torno de x. Com efeito, como, para $y \in W$, as aplicações $dg_y\colon T_yY \to \mathbb{R}^k$, onde $g = (g_1, \ldots, g_k)$, e $dh_y\colon T_yY \to \mathbb{R}^l$, onde $h = (h_1, \ldots, h_l)$, são sobrejetivas, a aplicação $d(g, h)_y\colon T_yY \to \mathbb{R}^{k+l}$, onde $(g, h) = (g_1, \ldots, g_k, h_1, \ldots, h_l)$, também é sobrejetiva; portanto, $g_1, \ldots, , g_k, h_1, \ldots, h_l$ são funções independentes. □

Lema 1.4.6. *[GP74, Exercício 1.5.5] Sejam $f\colon X \to Y$ uma aplicação transversal a uma subvariedade Z de Y, $W = f^{-1}(Z)$ e $x \in W$. Então o espaço tangente T_xW é a pré-imagem do espaço tangente $T_{f(x)}(Z)$, pela aplicação linear $df_x\colon T_xX \to T_{f(x)}Y$, i.e. $T_x(f^{-1}(Z)) = (df_x)^{-1}(T_{f(x)}Z)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.3.31, dado um ponto y qualquer em Z, existe uma vizinhança de y em Y tal que $Z \cap V = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1, \ldots, g_l)\colon V \to \mathbb{R}^l$ é a aplicação formada pelas l funções independentes. Pelo Teorema 1.4.2, $W = f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de X e observe que

$$(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = f^{-1}(Z \cap V) = W \cap \tilde{V},$$

onde $\tilde{V} = f^{-1}(V)$ é aberto pois f é suave e contém x tal que $f(x) = y$. Assim temos que $W \cap \tilde{V} = (g \circ f)^{-1}(0)$ e, portanto, W é localmente determinado por $g \circ f \colon \tilde{V} \to \mathbb{R}^l$.

Agora, pela Proposição 1.3.33, temos $T_y Z = \ker dg_y$ e $T_x W = \ker d(g \circ f)_x$, onde $f(x) = y$. Basta provar que $\ker d(g \circ f)_x = (df_x)^{-1}(\ker dg_y)$. Essa igualdade segue das seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} v \in (df_x)^{-1}(\ker dg_y) &\Leftrightarrow df_x(v) \in \ker dg_y \\ &\Leftrightarrow d(g \circ f)(v) = dg_y(df_x(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow v \in \ker d(g \circ f)_x. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.7. *[GP74, Exercício 1.5.7] Sejam $f \colon X \to Y$ e $g \colon Y \to Z$ aplicações suaves entre variedades. Suponha g transversal a uma subvariedade W contida em Z. Então $f \pitchfork g^{-1}(W)$ se, e somente se, $(g \circ f) \pitchfork W$.*

Demonstração. Fixe um ponto $x \in (g \circ f)^{-1}(W)$ qualquer. Sejam $y := f(x)$ e $z := g(y)$. Por definição, $g \pitchfork W$ significa que $Im(dg_y) + T_z W = T_z Z$.

$f \pitchfork g^{-1}(W) \Rightarrow (g \circ f) \pitchfork W$: Deve-se mostrar que $Im(dg_y \circ df_x) + T_z W = T_z Z$. Como os espaços $Im(dg_y \circ df_x)$ e $T_z W$ estão contidos em $T_z Z$, é suficiente provar que o espaço tangente $T_z Z$ está contido em $Im(dg_y \circ df_x) + T_z W$. Dado $w \in T_z Z$, da hipótese que $g \pitchfork W$, existem $u \in T_y Y$ e $v \in T_z W$ tais que $dg_y(u) + v = w$. Como f é transversal a $g^{-1}(W)$, pelo Lema 1.4.6,

$$T_y Y = Im(df_x) + T_y(g^{-1}(W)) = Im(df_x) + (dg_y)^{-1}(T_z W).$$

Portanto, existem $\tilde{u} \in T_x X$ e $\tilde{v} \in (dg_y)^{-1}(T_z W)$ tais que $df_x(\tilde{u}) + \tilde{v} = u$. Assim, tem-se

$$dg_y \circ df_x(\tilde{u}) + dg_y(\tilde{v}) + v = w,$$

onde $dg_y \circ df_x(\tilde{u}) \in Im(dg_y \circ df_x)$ e $dg_y(\tilde{v}) + v \in T_y W$ e, portanto, $w \in Im(dg_y \circ df_x) + T_z W$, como desejado.

$(g \circ f) \pitchfork W \Rightarrow f \pitchfork g^{-1}(W)$: A recíproca é análoga à primeira implicação. Deve-se mostrar que $Im(df_x) + (dg_y)^{-1}(T_z W) = T_y Y$. Novamente, fixe um vetor $\tilde{w} \in T_y Y$ e perceba que existem $u \in T_x X$ e $w \in T_z W$ tais que $(dg_y \circ df_x)(u) + w = dg_y(\tilde{w})$, garantido por $(g \circ f) \pitchfork W$. Além disso, tem-se $dg_y(df_x(u) - \tilde{w}) \in T_z W$, ou seja, $df_x(u) - \tilde{w} \in (dg_y)^{-1}(T_z W)$ e o resultado segue.

□

As ideias de transversalidade e os conceitos que foram abordados nesta seção serão novamente abordados e estendidos na Seção 2.2.

1.5 Homotopia e Estabilidade

Até agora foram estudadas diversas propriedades das aplicações suaves. Uma pergunta que surge nesse contexto é, se a aplicação sofrer alguma *perturbação*, quais destas propriedades permanecerão. Antes de responder essa pergunta formalizaremos essa ideia de *perturbação*. A definição a seguir fará esse trabalho.

Definição 1.5.1. *Sejam X, Y variedades e $I = [0,1]$. Diz-se que duas aplicações suaves $f_0, f_1 \colon X \to Y$ são* homotópicas *quando existe uma aplicação suave*

$$F \colon X \times I \to Y$$

tal que $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$, para todo $x \in X$. A aplicação F chama-se homotopia *entre f_0 e f_1. Denota-se a homotopia entre f_0 e f_1 por $f_0 \sim f_1$ ou por $F \colon f_0 \simeq f_1$.*

Dada a homotopia $F \colon f_0 \simeq f_1$, para cada $t \in I$, considere a aplicação suave $F_t \colon X \to Y$, dada por $F_t(x) = F(x,t)$. Dessa forma, para cada t define-se uma aplicação suave, isso equivale a definir uma família de aplicações suaves $(F_t)_{t \in I}$ de X em Y. Isto significa que $(x,t) \to F_t(X)$ é uma aplicação suave, mais ainda, $F_0 = f_0$ e $F_1 = f_1$.

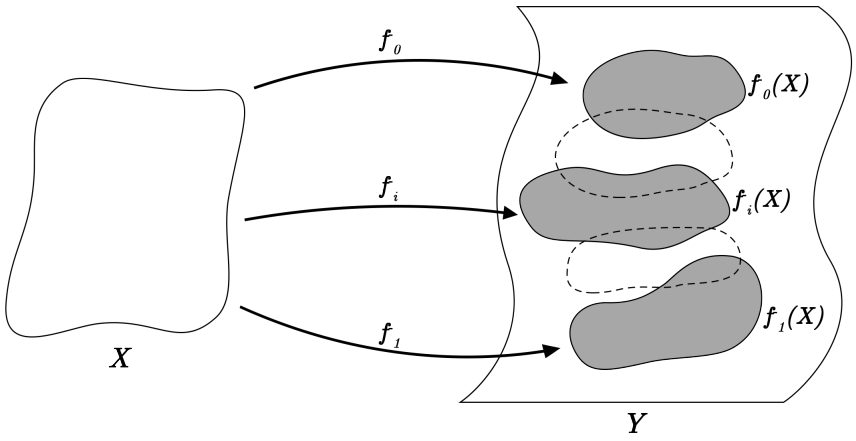

Figura 1.7: *Para cada $t \in I$ define-se uma aplicação suave f_t*

Exemplo 1.5.2. *Se n é ímpar, então a aplicação antípoda $\alpha \colon S^n \to S^n$, dada por $\alpha(x) = -x$, é homotópica à identidade $id \colon S^n \to S^n$, onde S^n é a esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$. De fato, seja $n = 2k-1$, então $S^n \subset \mathbb{R}^{2k}$. Assim pode-se considerar cada ponto*

$$z = (x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$$

de S^n como uma lista $z = (z_1, \ldots, z_k)$ de números complexos $z_j = x_j + iy_j$ tais que

$$|z_1|^2 + \ldots + |z_k|^2 = 1.$$

Identificamos cada elemento em S^1 com um vetor $u \in \mathbb{C}$ unitário. A cada número complexo $u \in S^1$ e a cada vetor $z = (z_1, \ldots, z_k) \in S^n$, o vetor $u \cdot z \in S^n$ é dado por $u \cdot z = (u \cdot z_1, \ldots, u \cdot z_k)$. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} H \colon S^n \times I &\to S^n \\ (z,t) &\mapsto e^{t\pi i} \cdot z \end{aligned}$$

é uma homotopia entre a aplicação antípoda $\alpha(z) = -z$ e a aplicação identidade de S^n, onde $e^{t\pi i}$ é a exponencial complexa $\cos t\pi + i\mathrm{sen}t\pi$.

A título de informação, a aplicação antípoda de S^n não é homotópica à identidade de S^n, quando n é par. (Veja, por exemplo, [Lim12a, p.7]).

Proposição 1.5.3. *Sejam X, Y variedades. A relação de homotopia $f_0 \sim f_1$ é uma relação de equivalência.*

Demonstração.

A relação é reflexiva: de fato, para qualquer aplicação suave $f\colon X \to Y$, a aplicação $F\colon X \times I \to Y$, dada por $F(x,t) = f(x)$, para todo $t \in I$, é uma homotopia entre f e f.

A relação é simétrica: de fato, seja $F\colon X \times I \to Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1. Definindo a aplicação $G\colon X \times I \to Y$, dada por $G(x,t) = F(x, 1-t)$, obtemos que G é uma homotopia entre f_1 e f_0.

A relação é transitiva: de fato, se $F\colon f_0 \simeq f_1$ e $G\colon f_1 \simeq f_2$ são homotopias, defina $H\colon X \times I \to Y$, dada por

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x,2t-1) & \text{se} \quad 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Observe que H é suave exceto, possivelmente, quando $t = 1/2$, entretanto, podemos "consertá-la"da seguinte forma: Fixados $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos, com $0 < \delta < \epsilon$, considere uma aplicação função $\lambda\colon I \to I$ tal que $\lambda(t) = 0$ se $1/2 - \delta \leq t \leq 1/2 + \delta$, $\lambda(t) = 1$ se $t \in [0, 1/2 - \epsilon) \cup (1/2 + \epsilon, 1]$ e $0 < \lambda(t) < 1$ se $t \in (1/2-\epsilon, 1/2-\delta) \cup (1/2+\delta, 1/2+\epsilon)$. Observe que uma construção semelhante à apresentada na Proposição 1.1.2 garante a existência de uma função λ nestas condições. Definindo $\tilde{H}\colon X \times I \to Y$ por $\tilde{H}(x,t) = H(x,t) \cdot \lambda(t)$, temos uma homotopia entre f_0 e f_2. Dessa forma, a relação é transitiva.

Portanto, a homotopia é uma relação de equivalência, como desejado. □

As propriedades fisicamente significativas de uma aplicação são aquelas que permanecem válidas mesmo quando a aplicação sofre pequenas deformações. Dessa forma, consideremos a seguinte definição.

Definição 1.5.4. *Diz-se que uma certa propriedade de uma aplicação $f_0\colon X \to Y$ é* estável *quando existe $\epsilon > 0$ e, para cada $t < \epsilon$, existe uma aplicação $f_t\colon X \to Y$ homotópica a f_0 tal que, f_t possui a mesma propriedade do que f_0. Quando uma coleção de aplicações possui uma mesma propriedade estável, diz-se que esta coleção forma uma* classe de estabilidade.

O teorema, a seguir, provará a estabilidade de algumas classes de aplicações suaves, em domínios compactos.

Teorema 1.5.5. *[GP74, Exercício 1.6.8][Teorema da Estabilidade] As seguintes classes de aplicações suaves de uma variedade compacta X numa variedade Y são classes de estabilidade:*

a) Difeomorfismos locais.

b) Imersões.

c) Submersões.

d) Aplicações transversais a qualquer subvariedade fixada $Z \subset Y$.

e) Mergulhos.

f) Difeomorfismos.

Demonstração. A estabilidade das classes *a*) a *d*) é provada de forma muito semelhante.

Difeomorfismos locais são apenas imersões no caso especial quando $\dim X = \dim Y$, então começamos com *b*). Se f_t é uma homotopia da imersão f_0, devemos produzir um $\epsilon > 0$ tal que $d(f_t)_x$ é injetiva para todos os pontos (x,t) em $X \times [0,\epsilon) \subset X \times I$. Como X é compacto, qualquer vizinhança de $X \times \{0\}$ em $X \times I$ contém $X \times [0,\epsilon)$, se ϵ for suficientemente pequeno. Com isso, para garantir que uma imersão é uma aplicação estável, é necessário apenas provar que cada ponto $(x_0,0) \in X \times \{0\}$ possui uma vizinhança U, em $X \times I$, tal que $d(f_t)_x$ seja injetiva para todo $(x,t) \in U$. Como esta é uma afirmação local, necessitamos apenas provar isto quando X é um aberto de $\mathbb{R}^k$ e Y é um aberto de $\mathbb{R}^l$. A injetividade de $d(f_0)_{x_0}$ implica que a matriz jacobiana,

$$\left[\frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0)\right]$$

de ordem $l \times k$ contém uma submatriz de ordem $k \times k$ com determinante não nulo. Entretanto, cada derivada parcial

$$\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x_0)$$

definida como uma função em $X \times I$ é contínua. Como a função determinante também é contínua, a submatriz de ordem $k \times k$ deve ser não singular para todos os pontos (x,t) em uma vizinhança de $(x_0,0)$ como desejado.

A prova de *c*) é análoga à prova de *b*).

Para provar *d*), considere f transversal a Z. Então, para $x \in f^{-1}(Z)$, $Imdf_x + T_y Z = TyY$ e isso significa que $g \circ f$ é submersão no ponto $x \in f^{-1}(Z)$, onde $g = (g_1, \ldots, g_l)$ é dada pelas l funções independentes que determinam Z numa vizinhança de $y = f(x)$, contida em Z. Dessa forma, temos que a condição de transversalidade se resume, localmente, à existência de uma submersão. Portanto, a prova de *d*) também é similar às anteriores.

Para provar *e*), considerando o que foi visto em *b*), necessitamos somente mostrar que, se $f_0 \colon X \to Y$ é imersão injetiva, então f_t também é injetiva para t suficientemente pequeno. Defina uma aplicação suave $G \colon X \times I \to Y \times I$ por $G(x,t) = (f_t(x), t)$. Suponha, com vista a uma contradição, que *e*) seja falsa, então existe uma sequência (t_i) que converge a 0 e, para cada $i \in \mathbb{N}$, existem pontos distintos $x_i, y_i \in X$ tais que $G(x_i,t_i) = G(y_i,t_i)$. Como X é compacto, pode-se considerar, se necessário, subsequências e obter $\lim x_i = x_0$ e $\lim y_i = y_0$. Como

$$G(x_0,0) = \lim G(x_i,t_i) = \lim G(y_i,t_i) = G(y_0,0)$$

e $G(x_0,0) = f_0(x_0)$ e $G(y_0,0) = f_0(y_0)$, temos x_0 igual a y_0, pois f_0 é injetiva.

Agora, podemos trabalhar localmente no espaço euclidiano. Observe que a matriz de $dG_{(x_0,0)}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} (df_0)_{x_0} & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $(df_0)_x$ é uma submatriz não nula de posto k, pois $d(f_0)_{x_0}$ é injetiva, as coordenadas do vetor coluna $a = (a_1, \dots a_l)$ não são de interesse e 0 é o vetor nulo de $\mathbb{R}^{k-1}$. Portanto, a matriz de $dG_{(x_0,0)}$ tem $k+1$ linhas independentes, assim $dG_{(x_0,0)}$ deve ser uma aplicação linear injetiva. Consequentemente, G é uma imersão em torno de $(x_0, 0)$, logo, G é injetiva em alguma vizinhança de $(x_0, 0)$. No entanto, para i suficientemente grande, (x_i, t_i) e (y_i, t_i) pertencem a esta vizinhança e obtemos uma contradição. Portanto, mergulhos são aplicações estáveis.

Por fim, para provar $f)$ basta observar que um difeomorfismo $f_0 \colon X \to Y$ é, na verdade, uma imersão e uma submersão simultaneamente. Sendo assim, basta seguir os mesmos passos usados em $b)$ e achar um $\epsilon > 0$ tal que $(df_t)_x$ seja bijetiva em todos os pontos (x, t) de $X \times [o, \epsilon) \subset X \times I$ mas agora com o determinante da matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0)\right]$$

não nulo, não sendo necessário verificar o determinante de alguma submatriz. Dessa forma, novamente usando um argumento análogo ao usado em $b)$, temos que cada derivada parcial

$$\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x_0)$$

é não nula em alguma vizinhança de $(x_0, 0)$, devido à continuidade da função determinante. Assim, a matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x_0)\right]$$

tem determinante não nulo. Portanto, a aplicação derivada $d(f_t)_{x_0}$ é um isomorfismo, logo f_t é um difeomorfismo local. Como f_0 é difeomorfismo, temos que este também é um mergulho e, pelo item anterior, f_t é um mergulho. Dessa forma, temos que f_t é um difeomorfismo local injetivo, portanto um difeomorfismo global, como desejado. □

1.6 O Teorema de Sard

A pré-imagem de um valor regular de uma aplicação suave $f \colon X \to Y$ é uma subvariedade de X. Esta ideia pode ser generalizada e, com isso, criou-se o conceito de transversalidade. No entanto, a condição de regularidade dos valores de f é uma condição forte e, por vezes, dificultosa de aplicar. Felizmente, é possível observar e tirar conclusões a respeito de f e das variedades X e Y de outro ponto de vista, olhando o conjunto de valores críticos de f.

Definição 1.6.1. *Chama-se* bloco m-dimensional *ao produto cartesiano*

$$A = \prod_{i=1}^{m} [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^m$$

de m intervalos compactos $[a_i, b_i]$ chamados de arestas *do bloco A.*

Definição 1.6.2. *Chama-se* volume m-dimensional *do bloco A ao produto*

$$Vol(A) = \prod_{i=1}^{m}(b_i - a_i)$$

onde $b_i - a_i > 0$ é o comprimento da i-ésima aresta do bloco A.

Definição 1.6.3. *Diz-se que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tem* medida nula *quando, dado $\epsilon > 0$ existe uma coleção enumerável de blocos $B_1, B_2, \ldots$ tal que A está contido na união destes blocos e*

$$\sum_{i=1}^{\infty} Vol(B_i) < \epsilon.$$

A definição acima, embora seja eficiente, não trata exatamente de variedades. Contudo, podemos reformulá-la da seguinte forma:

Definição 1.6.4. *Seja Y uma variedade de dimensão k. Diz-se que um subconjunto C de Y tem* medida nula *se, para toda parametrização local φ de Y, a pré-imagem $\varphi^{-1}(C)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^k$.*

Definição 1.6.5. *Dado um conjunto X qualquer, diz-se que uma* condição $P(x)$ é satisfeita para quase todo ponto x em X *quando o conjunto $Y \subset X$ dos pontos x onde a condição $P(x)$ não é satisfeita tem medida nula.*

Definição 1.6.6. *Diz-se que um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^k$ é* J-mensurável (mensurável segundo Jordan) *quando, tomando-se um bloco k-dimensional $A \subset \mathbb{R}^k$ que contenha X, a* função característica $\chi_X \colon A \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in X \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{R}^k \setminus X \end{cases},$$

é integrável.

Teorema 1.6.7 (Teorema de Fubini)**.** *Seja $c \in \mathbb{R}^n$, qualquer, e V_c uma vizinhança de c, contida em $\mathbb{R}^n$. Se A é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ tal que $A \cap V_c$ tem medida nula para em V_c, então A tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.*

O leitor pode consultar a prova deste teorema em [GP74, p.202].

Teorema 1.6.8 (Teorema de Sard)**.** *Se $f \colon X \to Y$ é uma aplicação suave entre variedades, então quase todo ponto $y \in Y$ é valor regular de f. Equivalentemente, o conjunto de valores críticos de uma aplicação suave, entre variedades, $f \colon X \to Y$ é um conjunto de medida nula.*

Dessa forma, é garantido que, para quase todo ponto de Y, sua pré-imagem, por f é uma subvariedade de X.

A prova do Teorema de Sard requer, do leitor, conhecimentos básicos da Análise Real em várias variáveis e, até foge um pouco do objetivo deste trabalho. Entretanto, devido a sua importância, este teorema será provado agora. No próximo capítulo, quando se tratar de variedades com bordo, uma nova demonstração, bem mais simples, será apresentada.

Demonstração. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Seja $C \subset X$ o conjunto de pontos críticos de f. Deve-se provar que o conjunto $f(C) \subset Y$, isto é, o conjunto de valores críticos de f tem medida nula. Como X e Y são variedades diferenciáveis, então X é localmente difeomorfo a algum subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^k$ e Y é localmente difeomorfo a algum subconjunto aberto de $\mathbb{R}^l$, onde k e l são as dimensões de X e Y, respetivamente. Assim, é suficiente provar que, se $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ é suave e C é o conjunto dos pontos críticos de f, então $f(C)$ terá medida nula em $\mathbb{R}^l$.

O conjunto C dos pontos críticos de f é o conjunto de todos $x \in X$ tais que *posto* $df_x < k$. A prova será dada por indução em k. Por definição, $\mathbb{R}^0$ consiste em um único ponto, por isso, o teorema é válido para $k = 0$.

Seja $C_1 \subset C$ o conjunto dos $x \in X$ tais que a primeira derivada df_x é nula. De modo geral, para cada $i \in \mathbb{N}$, considere C_i o conjunto dos $x \in X$ tais que todas as derivadas parciais de f de ordem $\leq i$ sejam nulas em x. Assim, tem-se a sequência decrescente de conjuntos fechados

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots.$$

A demonstração do teorema se dará ao provar as três afirmações abaixo:

(i) O conjunto $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula.

(ii) O conjunto $f(C_i \setminus C_{i+1})$ tem medida nula, para $i \geq 1$.

(iii) O conjunto $f(C_k)$ tem medida nula, para k suficientemente grande.

Demonstração de (i): Pode-se assumir $i \geq 2$, pois $C = C_1$ quando $i = 1$. Para cada $\tilde{x} \in C \setminus C_1$, vamos encontrar encontrar uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^k$, de $\tilde{x}$, tal que $f(V \cap C)$ tem medida nula. Como $C \setminus C_1$ possui uma cobertura enumerável por vizinhanças V, isto provará que $f(C \setminus C_1)$ tem medida nula. Como $\tilde{x} \notin C_1$, existe alguma derivada parcial, digamos $\partial f_1/\partial x_1$, não nula em $\tilde{x}$. Considere a aplicação $h\colon U \to \mathbb{R}^k$, dada por

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_k).$$

Como $dh_{\tilde{x}}$ é não singular, h aplica alguma vizinhança V de $\tilde{x}$ difeomorficamente sobre um conjunto aberto V', em $\mathbb{R}^k$. A composição $g = f \circ h^{-1}$ aplica V' injetivamente em $\mathbb{R}^l$. Observe que o conjunto C' de pontos críticos de g é exatamente $h(V \cap C)$; consequentemente, o conjunto $g(C')$ de valores críticos de g é, na verdade, o conjunto $f(V \cap C)$. Para cada $(t, x_2, \ldots, x_k) \in V'$, observe que $g(t, x_2, \ldots, x_k)$ pertence ao hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$. Assim, g leva hiperplanos em hiperplanos. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$g^t\colon (\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V' \to \{t\} \times \mathbb{R}^{l-1}$$

a restrição de g a $(\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V'$. Observe que um ponto de $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ é ponto crítico de g^t se, e somente se, é ponto crítico de g. A matriz da derivada de g tem a forma

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & \left(\frac{\partial g_i^t}{\partial x_j}\right) \end{bmatrix}.$$

De acordo com a hipótese de indução, o conjunto de valores críticos de g^t tem medida nula em $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$. Assim, o conjunto de valores críticos de g intersecta cada hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^{k-1}$ num conjunto de medida nula. Este conjunto $g(C')$ é J-mensurável, uma vez que pode ser expresso como uma união enumerável de subconjuntos compactos e a sua função característica é integrável pelo Teorema de Fubini. Portanto o conjunto

$$g(C') = f(V \cap C)$$

tem medida nula.

Demonstração de (ii): Para cada $\tilde{x} \in C_i \setminus C_{i+1}$ existe alguma $(i+1)$ derivada $\partial^{i+1} f_r / \partial x_{s_1} \dots \partial x_{s_{i+1}}$ não nula. Assim existe uma função

$$w(x) = \frac{\partial^i f_r}{\partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_{i+1}}}$$

é nula em C_i, mas $\partial w / \partial x_{s_1}$ não se anula. Suponha, sem perda de generalidade, que $s_1 = 1$. Então a aplicação $h \colon U \to \mathbb{R}^k$, dada por

$$h(x) = (w(x), x_2, \dots, x_k)$$

leva alguma vizinhança V de $\tilde{x}$ difeomorficamente em algum aberto V' de $\mathbb{R}^k$. Observe que h aplica $C_i \cap V$ no hiperplano $\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}$. Considere novamente a aplicação

$$g = f \circ h^{-1} \colon V' \to \mathbb{R}^l$$

e seja

$$\tilde{g} \colon (\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V' \to \mathbb{R}^l$$

a restrição de g a $(\{0\} \times \mathbb{R}^{k-1}) \cap V'$. Por indução, o conjunto de valores críticos de $\tilde{g}$ tem medida nula em $\mathbb{R}^l$. No entanto, cada ponto de $h(C_i \cap V)$ é, certamente, ponto crítico de $\tilde{g}$, pois todas as derivadas de ordem $\leq i$ são nulas. Assim,

$$\tilde{g} \circ h(C_i \cap V) = f(C_i \cap V)$$

tem medida nula. Como $C_i \setminus C_{i-1}$ possui uma cobertura arbitrária enumerável de conjuntos V, segue que $f(C_i \setminus C_{i-1})$ tem medida nula.

Demonstração de (iii): Seja $I^k \subset \mathbb{R}^k$ um cubo de aresta δ. Se i é suficientemente grande, mais precisamente, se $i > k/(l-1)$ então, $f(C_i \cap I^k)$ tem medida nula. Como C_i pode ser coberto por uma união enumerável de cubos, isto provará que $f(C_i)$ tem medida nula. Pela Fórmula de Taylor (v., por exemplo, [Lim16b, p.261]), a compacidade de I^k e a definição de C_i garantem que

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h)$$

onde

a) $R(x,h)| \leq c|h|^{i+1}$, para $x \in C_i \cap I^k$ e $x + h \in I^k$, onde c é uma constante que depende somente de f e de I^k. Agora, subdividindo I^k em r^k cubos de aresta δ/r. Seja I_1 um cubo da subdivisão que contem um ponto x de C_i, então qualquer ponto de I_1 pode ser escrito como $x + h$, com

b) $|h| \leq \sqrt{k}(\delta/r)$. De (a), temos que $f(I_1)$ está contido num cubo de aresta a/r^{k+1} centrado em $f(x)$, onde $a = 2c(\sqrt{k}\delta)^{i+1}$ é constante. Consequentemente, $f(C \cap I^k)$ está contido na união de, no máximo, r^k cubos, cujo volume total

$$V \leq r^k(a/r^{i+1})^l = a^l r^{k-(i-1)l}.$$

Se $i + 1 > k/l$, então V tende a 0 quando $r \to \infty$. Assim, $f(C_i \cap I^k)$ tem medida nula.

Assim, completa-se a prova do Teorema de Sard.

□

Corolário 1.6.9. *O conjunto de valores regulares de qualquer aplicação suave $f\colon X \to Y$ é denso em Y.*

Demonstração. De fato, como o conjunto dos valores críticos $f(C)$ tem medida nula em Y, então o conjunto $Y \setminus f(C)$ de valores regulares, é denso em Y, onde C é o conjunto de pontos críticos de f, em X. □

Agora, vamos introduzir novos nomes para conceitos já conhecidos.

Definição 1.6.10. *Sejam X e Y variedades e $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Diz-se que um ponto $x \in X$ é* ponto regular de f *se a derivada $df_x\colon T_xX \to T_yY$ é sobrejetiva. Diz-se que f é regular em x quando f é uma submersão em x. Quando df_x não é sobrejetiva, diz-se que x é um* ponto crítico de f.

Observação 1.6.11. *Para evitar confusões, observe que pontos regulares e pontos críticos pertencem ao conjunto X enquanto que valores regulares e valores críticos pertencem ao conjunto Y. Observe também que y é valor regular de f se todo ponto $x \in f^{-1}(y)$ é ponto regular e y é valor crítico de f se pelo menos um ponto $x \in f^{-1}(y)$ é ponto crítico.*

É importante ressaltar que o Teorema de Sard garante que o conjunto dos valores críticos de $f\colon X \to Y$ tem medida nula em Y, mas não garante que o conjunto dos pontos críticos de f, em X tem medida nula. Como contra-exemplo para ilustrar, considere uma aplicação constante qualquer $f\colon X \to Y$, onde $\dim X \geq 1$. Neste caso, o conjunto de pontos críticos de f é todo o conjunto X, mas X não tem medida nula em X.

1.7 Mergulhos em Espaços Euclidianos

Na Seção 1.1, definimos uma variedade X de dimensão k como sendo um conjunto localmente difeomorfo a um subconjunto de algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Entretanto, a dimensão de X pode ser muito menor do que n, tornando assim, $\mathbb{R}^n$ um espaço "muito grande", comparado à dimensão de X. Um fato que observamos é que se X é difeomorfo a algum subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$, então X também é difeomorfo a algum subconjunto de $W \subset \mathbb{R}^p$, onde $p > n$, pois, neste caso, V é difeomorfo a W, mediante a imersão canônica de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$. Em verdade, o que temos é $\mathbb{R}^n$ mergulhado em $\mathbb{R}^p$ e, por isso, também temos uma cópia de X em $\mathbb{R}^p$. A pergunta norteadora (devido a Whitney) desta seção é: Para um certo $k \in \mathbb{N}$ arbitrariamente fixado, qual deve ser a ordem n para que

toda variedade de dimensão k esteja contida em $\mathbb{R}^n$? Uma resposta para essa pergunta é $n = 2k + 1$, dada pelo Teorema de Whitney, provado no final desta seção.

Definição 1.7.1. *Seja X uma variedade contida em $\mathbb{R}^n$. Chama-se* fibrado tangente *de X ao subconjunto TX de $X \times \mathbb{R}^n$ dado por*

$$TX = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n : v \in T_x X\}.$$

Os espaços tangentes a X em vários pontos são subespaços vetoriais que se se sobrepõem, uns sobre os outros. O fibrado tangente é uma ferramenta usada para separá-los.

Observação 1.7.2. *O fibrado tangente TX contém uma cópia X_0 da variedade X formada pelos pontos da forma $(x, 0)$ com $x \in X$. Na direção perpendicular a X_0, o fibrado tangente TX contém uma cópia de cada espaço tangente $T_x X$, $x \in X$, mergulhado como conjunto $\{(x, v) : v \in T_x X\}$.*

Proposição 1.7.3. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação suave. A aplicação $df : TX \to TY$ induzida nos fibrados tangentes, dada por $df(z, v) = (f(x), df_x(v))$, é uma aplicação suave.*

Demonstração. Primeiramente, observe que se $X \subset \mathbb{R}^n$, então $TX \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Assim, se $Y \subset \mathbb{R}^m$, então df aplica um subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$ em $\mathbb{R}^{2m}$. Agora, para verificar que df é, de fato, uma aplicação suave, observe que se a aplicação $f : X \to \mathbb{R}^m$ é suave, então para cada ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x, em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação suave $F : U \to \mathbb{R}^{2m}$ tal que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$. Dessa forma, temos que $dF : TU \to \mathbb{R}^{2m}$ dada por $dF(x, v) = (F(x), dF_x(v))$ é uma extensão local de df. Agora, o conjunto TU é, na verdade, o conjunto $U \times \mathbb{R}^n$ que é um aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Assim temos que $df : X \to \mathbb{R}^{2m}$ pode ser estendida a uma aplicação suave, num aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Portanto df é suave. □

Proposição 1.7.4. *Dadas aplicações suaves $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, as aplicações $dg \circ df : TX \to TZ$ e $d(g \circ f) : TX \to TZ$ são iguais. Além disso, se $f : X \to Y$ é um difeomorfismo, então $df : TX \to TY$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Com efeito, $d(g \circ f)(x, v) = ((g \circ f)(x), d(g \circ f)_x(v))$ e, pela regra da cadeia, temos que

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(x, v) &= ((g \circ f)(x), d(g \circ df)_x(v)) \\ &= (g(f(x)), dg_{f(x)} \circ df_x(v)) \\ &= dg(f(x), df_x(v)) \\ &= (dg \circ df)(x, v). \end{aligned}$$

Agora, se $f : X \to Y$ é um difeomorfismo, pelo que acabamos de provar $df^{-1} \circ df = Id_{TX}$ e $df \circ df^{-1} = Id_{TY}$. Portanto variedades difeomorfas têm fibrados tangentes difeomorfos, como queríamos. □

Proposição 1.7.5. *O fibrado tangente TX de uma variedade X é também uma variedade, de dimensão* $\dim TX = 2 \dim X$.

Demonstração. Dado um conjunto qualquer $W \subset X$, aberto em X, temos pela Proposição 1.1.13 que W é uma subvariedade de X. Suponha agora que W é a imagem de uma parametrização local $\varphi\colon U \to W$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^k$ e $k = \dim X$. Então $d\varphi\colon TU \to TW$ é um difeomorfismo. Entretanto, $TU = U \times \mathbb{R}^k$ é um aberto de $\mathbb{R}^{2k}$ e $d\varphi$ serve de parametrização do conjunto TW em TX. Dessa forma, temos que $\dim TX = \dim(U \times \mathbb{R}^k) = 2\dim X$, como desejado. □

Teorema 1.7.6 (Primeira Versão do Teorema de Whitney)**.** *Toda variedade de dimensão k admite uma imersão injetiva em $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão k e $n > 2k+1$. O objetivo é proceder indutivamente e construir uma projeção linear $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2k+1}$ que possa restringir-se a uma imersão injetiva de X e provar que se $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ é uma imersão injetiva com $m > 2k+1$, então existe um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^m$ tal que a composição de f com a projeção de $\mathbb{R}^m$ sobre o complemento ortogonal de a, $H = \{b \in \mathbb{R}^m\colon b \perp a\}$, ainda é uma imersão injetiva. Ora, o conjunto H é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensão $m-1$, portanto isomorfo ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{m-1}$. Então feitas as construções acima, obteremos a imersão injetiva desejada.

Consideremos a aplicação $h\colon X \times X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, dada por $h(x,y,t) = t[f(x) - f(y)]$, e também a aplicação $g\colon TX \to \mathbb{R}^m$, dada por $g(x,v) = df_x(v)$. Se $m > 2k+1$, o Teorema de Sard garante que existe um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não pertence a nenhuma das imagens e observe que $a \neq 0$, pois 0 pertence a ambas as imagens.

Agora, considere $\pi\colon \mathbb{R}^m \to H$ a projeção linear de $\mathbb{R}^m$ sobre o complemento ortogonal de a. A composição $\pi \circ f$ é injetiva. De fato, dados $x, y \in X$, suponha, com vista a uma contradição, que $\pi \circ f(x) = \pi \circ f(y)$, mas que $x \neq y$. Pela definição de π, temos que $f(x) - f(y) = ta$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Como $x \neq y$, então $t \neq 0$, pois f é injetiva. Entretanto, disto resulta que $h(x,y,1/t) = a$, o que contradiz o fato de que o ponto a escolhido não pertence à imagem de h.

De modo análogo, temos que $\pi \circ f\colon X \to Y$ é uma imersão. Com efeito, considere $v \neq 0$ um vetor pertencente a T_xX tal que $d(\pi \circ f)_x(v) = 0$, onde $x \in X$. Pela linearidade de π e pela regra da cadeia, temos que $d(\pi \circ f)_x = \pi \circ df_x$. Assim, $\pi \circ df_x(v) = 0$, então $df_x(v) = ta$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Como f é imersão, $df_x(v) = 0$ se e somente se $v = 0$, mas tomamos $v \neq 0$, disto segue que $ta \neq 0$, donde temos que $t \neq 0$. Assim, temos $g(x, v/t) = a$, novamente contradizendo a escolha de a.

Portanto, temos que f é a imersão injetiva desejada. □

Como já foi visto na Seção 1.3.1, para variedades compactas, uma imersão injetiva nada mais é do que um mergulho. Para o caso geral, o que se faz é modificar a imersão de modo que ela se torne um problema topológico e não um problema diferencial. A ideia aqui é apropriar-se do conceito de mergulho para variedades compactas e estendê-lo a variedades arbitrárias.

Definição 1.7.7. *Diz-se que uma cobertura aberta $\{V_\alpha\}$ de uma variedade X é* localmente finita *se cada $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos V_α.*

Lema 1.7.8. *Toda variedade X se escreve como uma reunião enumerável*

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

de compactos K_j tais que $K_j \subset int(K_{j+1})$.

Demonstração. Dado um ponto qualquer $x \in X$, existe uma vizinhança $V_x = \varphi(U_0)$ de x, onde $\overline{V_x}$ é compacto e U_0 é um aberto de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem. Pelo Teorema de Lindelöf (veja, por exemplo, [Lim16b, p.48]), podemos extrair da cobertura

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x$$

uma subcobertura enumerável $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$. Tomando $L_j = \overline{V_j}$, cada L_j é compacto e ainda vale $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$.

Para definir os K_j, usaremos a indução em j. Tomando $K_1 = L_1$ e supondo já tenhamos obtido os conjuntos $K_1, \ldots, K_j$, de modo que $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$, para $i = 1, \ldots, j-1$, e K_j contenha a união $L_1 \cup \ldots \cup L_j$, recobrimos o compacto $K_j \cup K_{j+1}$ com um número finito de conjuntos V_i e tomamos K_{j+1} como sendo a união dos L_i correspondentes. Dessa forma, segue o resultado. □

Teorema 1.7.9 (Partição da Unidade)**.** *Seja X um subconjunto arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Para qualquer cobertura por abertos de X, formada pelos conjuntos abertos U_α, existe uma sequência de funções suaves $\{\theta_i\}$, definidas em X, chamada de partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, com as seguintes propriedades:*

a) $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$, *para todo* $x \in X$ *e para todo* $i \in \mathbb{N}$.

b) Cada $x \in X$ possui uma vizinhança na qual apenas uma quantidade finita de funções θ_i não é identicamente nula.

c) Cada função θ_i é identicamente nula, exceto em algum conjunto fechado contido em algum U_α.

d) Para cada $x \in X$, $\sum_i \theta_i(x) = 1$. (Observe que, por b), essa soma é finita.)

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de X. Cada U_α pode ser escrito como $X \cap W_\alpha$, onde W_α é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Seja $W = \cup_\alpha W_\alpha$, pelo Lema 1.7.8 existe uma coleção enumerável de conjuntos compactos $\{K_j\}$ tais que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = W,$$

onde $K_j \subset \text{int}(K_{j+1})$. Por exemplo, tome

$$K_j = \{z \in W : |z| < j \text{ e distância de } z \text{ a } \mathbb{R}^n \backslash W \geq 1/j\}.$$

Note que a coleção de todas as bolas abertas de $\mathbb{R}^n$ cujos fechos estão contidos em pelo menos um W_α é uma cobertura aberta de W. Selecione um número finito dessas bolas que cobre K_2. Pela Proposição 1.1.2, para cada bola selecionada,

podemos definir funções suaves não negativas, $\eta_1, \ldots, \eta_r \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, em $\mathbb{R}^n$ que são iguais a 1 na bola selecionada e 0 fora de algum conjunto fechado contido em W_α.

Continuando indutivamente, para cada $j \geq 3$, o compacto $K_j \setminus \operatorname{int}(K_{j-1})$ está contido no interior do conjunto $W \setminus K_{j-2}$. A coleção de todas as bolas suficientemente pequenas que têm o seu fecho contido em ambos os conjuntos, $W \setminus K_{j-2}$ e W_α, forma uma cobertura de $K_j \setminus \operatorname{int}(K_{j-1})$. Extraia uma subcobertura finita e então adicionando à nossa sequência $\{\eta_i\}$ uma função para cada bola; essa função deve ser igual a 1 na bola e 0 fora de um conjunto fechado contido em $W \setminus K_{j-2}$ e em algum W_α.

Por construção, para cada j, somente uma quantidade finita de funções η_i é não nula em K_j. Assim, pelo fato de que todo ponto de W pertence ao interior de algum K_j, a soma

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j$$

é finita numa vizinhança de cada ponto de W. Além disso, pelo menos um termo é diferente de zero em todo ponto de W. Assim, a função

$$\frac{\eta_i}{\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j}$$

está bem definida e é suave. Por fim, tomando θ_i a restrição desta função ao conjunto X, tem-se o resultado. □

Corolário 1.7.10. *Toda variedade X possui uma função própria $\rho \colon X \to \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura por conjuntos abertos de X que possuem fecho compacto. Seja θ_i a partição da unidade subordinada à família $\{U_\alpha\}$. Então

$$\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i\theta_i$$

é uma função bem definida e suave. Se $\rho(x) \leq j$, então pelo menos uma das primeiras j funções $\theta_1, \ldots, \theta_j$ são não nulas em x. Sendo assim, $\rho^{-1}([-j, j])$ está contido em

$$\bigcup_{i=1}^{j} \{x \colon \theta_i(x) \neq 0\},$$

um conjunto com fecho compacto. No entanto, todo conjunto compacto, em $\mathbb{R}$, está contido em algum intervalo da forma $[-j, j]$. Assim segue o resultado. □

Voltando agora a discutir sobre o Teorema da Aplicação Inversa. Anteriormente, vimos na Seção 1.3 que este teorema estava condicionado a difeomorfismos locais, em torno de alguma vizinhança de algum ponto do domínio e da imagem, respetivamente. Logo em seguida, na Subseção 1.3.1, ficou provado que este difeomorfismo estende-se à vizinhança de uma variedade compacta Z de X e a uma vizinhança de sua imagem $f(Z)$ em Y. Agora, uma reformulação dessa generalização será apresentada no Teorema 1.7.12, porém retirando a hipótese de compacidade de Z. Primeiro, enunciamos o seguinte lema.

Lema 1.7.11. *[GP74, Exercício 1.8.13] Toda cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade X admite um refinamento localmente finito $\{V_\alpha\}$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.7.8, temos que $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$, onde cada K_i é compacto e $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Todo ponto x do compacto K_2 pertence a algum aberto U_x da cobertura $\{U_\alpha\}$ e também pertence ao conjunto $\text{int}(K_3)$. Sendo assim, podemos arrumar uma vizinhança $(W_2)_x$ de x contida em $\text{int}(K_3)$ e em algum aberto de $\{U_\alpha\}$. Assim, temos

$$K_2 \subset \bigcup_{x \in K_2} (W_2)_x,$$

com $\{(W_2)_x\}$ uma cobertura de K_2 e dela extraímos uma subcobertura finita $\{(W_2)_j\}$.

Procedendo de modo análogo, temos que para cada x do compacto $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$ podemos arrumar uma vizinhança $(W_3)_x$ contida em $\text{int}(K_4)$ e também em algum aberto da cobertura $\{U_\alpha\}$ e é disjunto de K_1, pois $K_1 \subset \text{int}(K_2)$. Assim, como $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$ é compacto e

$$K_3 \setminus \text{int}(K_2) \subset \bigcup_{x \in K_3 \setminus \text{int}(K_2)} (W_3)_x,$$

extraímos uma subcobertura finita $\{(W_3)_j\}$ da cobertura $\{(W_3)_x\}$ de $K_3 \setminus \text{int}(K_2)$.

Procedendo dessa forma para cada $i \geq 3$ obtemos, para cada compacto $K_i \setminus \text{int}(K_{i-1})$, uma cobertura $\{(W_i)_x\}$, da qual podemos extrair uma subcobertura finita, $\{(W_i)_j\}$, onde cada um desses abertos está contido em $\text{int}(K_{i+1})$ e em algum conjunto aberto de $\{U_\alpha\}$ e é disjunto de K_{i-2}. Dessa forma, temos que

$$X \subset \bigcup_{i,j} (W_i)_j.$$

Para cada $x \in X$, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_l$ e $x \notin K_{l-1}$. Assim, x pertence à união finita $\cup_j (W_l)_j$ e x não pertence a mais nenhum aberto $(W_i)_j$. Portanto a cobertura $\{(W_i)_j\}$ é uma cobertura localmente finita de X, como desejado. □

Teorema 1.7.12. *[GP74, Exercício 1.8.14; Teorema da Aplicação Inversa Revisitado]*

Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave entre variedades e Z uma subvariedade de X. Suponha que a derivada $df_x\colon T_xX \to T_yY$ seja um isomorfismo para todo $x \in Z$. Se f aplica Z em $f(Z)$ difeomorficamente, então f aplica uma vizinhança de Z, em X, numa vizinhança de $f(Z)$, em Y.

Demonstração. Por hipótese, para todo x em Z, a derivada $df_x\colon T_xX \to T_yY$, onde $y = f(x)$, é um isomorfismo. Assim, temos pelo clássico Teorema da Aplicação Inversa que existem vizinhanças U_x e V_y de x e y, respetivamente, tais que $f|_{U_x}\colon U_x \to V_y$ é um difeomorfismo. Observe que a coleção $\{V_y\}$ das vizinhanças de cada $y \in f(Z)$ formam uma cobertura de $f(Z)$ que, pelo Lema 1.7.11, admite uma subcobertura $\{V_i\}$ localmente finita.

Considere $g_i\colon V_i \to X$ a inversa local de $f|_{U_i}$. Seja

$$W = \left\{ y \in \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\colon g_i(y) = g_j(y) \text{ sempre que } y \in V_i \cap V_j \right\}.$$

Defina a aplicação $g\colon W \to X$ por $g(y) = g_i(y)$ se $y \in V_i$. A aplicação g está bem definida pois, caso y pertença a algum outro V_j diferente de V_i, a definição do conjunto W faz garantir que $g(y) = g_i(y)$ da mesma forma.

Vejamos que o conjunto $f(Z)$ está contido em W. Seja $y \in f(Z)$. Como $f|_Z\colon Z \to f(Z)$ é, por hipótese, um difeomorfismo, temos que existe aplicação inversa de f em Z, $f^{-1}\colon f(Z) \to Z$. Se $y \in V_i \cap V_j$, então $g_j(y) = f^{-1}(y) = g_i(y)$. Portanto $y \in W$. Disto, também observamos que $g\colon W \to X$ é a inversa de f em W.

Agora, afirmamos que W contém uma vizinhança aberta de $f(Z)$. De fato, dada uma vizinhança B de $y = f(x)$, em $f(Z)$, podemos extrair da cobertura localmente finita $\{V_i\}$ de $f(Z)$ uma subcobertura finita e escolhemos todos os abertos $V_1, \ldots, V_k$ que intersectam B e que contenham o ponto y. O conjunto

$$A_y = \bigcap_{i=1}^{k} V_i$$

é aberto pois é dado por uma interseção finita de abertos e $y \in A_y$. Para concluir nossa afirmação, resta-nos provar que $A_y \subset W$, para todo $y \in f(Z)$. Com efeito, dado $a \in A_y$, temos que $g_i|_{A_y}\colon A_y \to g_i(A_y) \subset U_i$ e $g_j|_{A_y}\colon A_y \to g_j(A_y) \subset U_j$ são difeomorfismos locais e $g_i(a) = g_j(a)$, para todo $i, j = 1, \ldots, k$. Como a é arbitrário, segue que $g_i|_{A_y} = g_j|_{A_y}$ e, portanto temos que $A_y \subset W$. Como A_y é aberto, segue que $\bigcup_{y \in f(Z)} A_y$ é um aberto que contém $f(Z)$.

Por fim, como $g\colon W \to X$ define a inversa do difeomorfismo $f|_Z$ em W, temos que g aplica uma vizinhança de $f(Z)$ numa vizinhança de Z, como queríamos. □

Após todo o caminho ter sido trilhado, podemos finalmente, enunciar e provar o Teorema de Whitney. Como já foi dito no começo desta seção, este teorema irá nos dizer qual deve ser a ordem n para que toda variedade de dimensão k esteja mergulhada em $\mathbb{R}^n$. Entretanto, um fato que devemos ter em mente, é que o conceito de variedade pode ser tratado de forma mais abrangente e abstrata do que a forma abordada neste texto, mas ainda assim, o Teorema de Whitney continua válido para qualquer variedade abstrata de dimensão finita.

Teorema 1.7.13 (Teorema de Whitney)**.** *Toda variedade X de dimensão k está mergulhada em $\mathbb{R}^{2k+1}$.*

Demonstração. Primeiramente, pelo Teorema 1.7.6, considere uma imersão injetiva de X em $\mathbb{R}^{2k+1}$. Compondo essa imersão injetiva com qualquer difeomorfismo de $\mathbb{R}^{2k+1}$ na bola aberta unitária de $\mathbb{R}^{2k+1}$, obtemos uma imersão injetiva $f\colon X \to \mathbb{R}^{2k+1}$ tal que $|f(x)| < 1$, para todo $x \in X$. Pelo Corolário 1.7.10, considere uma função própria $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ e uma nova imersão injetiva $F\colon X \to \mathbb{R}^{2k+2}$ definida por $F(x) = (f(x), \rho(x))$. Agora, para voltar ao espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2k+1}$, usamos a composição de F com uma projeção ortogonal $\pi\colon \mathbb{R}^{2k+2} \to H$, onde H é espaço vetorial perpendicular a um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^{2k+2}$ conveniente.

A aplicação $\pi \circ F\colon X \to H$ é uma imersão injetiva para quase todo $a \in S^{2k+1}$. De fato, observe que $d(\pi \circ F)_x = d\pi_{F(x)} \circ dF_x = \pi \circ dF_x$, pois π é linear. Dessa forma, por um raciocínio análogo ao feito no Teorema 1.7.6, temos que tanto $\pi \circ F$, quanto $d(\pi \circ F)_x$, é injetiva. Dessa forma, podemos escolher um ponto a diferente dos dois polos de S^{2k+1}. Provando que a aplicação $\pi \circ F$ é própria, provaremos, consequentemente, o resultado. Para isto, afirmamos

que, dada uma cota superior c, existe d tal que o conjunto de pontos $x \in X$ onde $|\pi \circ F(x)| \leq c$ está contido no conjunto dos pontos x onde $|\rho(x)| \leq d$. Como ρ é própria, o conjunto dos pontos tais que $|\rho(x)| \leq d$ é um subconjunto compacto de X. Assim, pela afirmação, a pré-imagem de toda bola fechada em H por meio de $\pi \circ F$ é um subconjunto compacto de X, assim tem-se $\pi \circ F$ uma aplicação própria. Provemos a afirmação. Se afirmação for falsa, então existe uma sequência de pontos $\{x_i\}$ em X tal que $|\pi \circ F(x_i)| < c$, mas $\lim \rho(x_i) = \infty$. Lembre que, por definição, para todo $z \in \mathbb{R}^{2k+2}$, o vetor $\pi(z)$ é um ponto de H no qual, $z - \pi(z)$ é múltiplo de a. Portanto, $F(x_i) - \pi \circ F(x_i)$ é um múltiplo de a para cada i, consequentemente o vetor

$$w_i = \frac{1}{\rho(x_i)}[F(x_i) - \pi \circ F(x_i)]$$

também é múltiplo de a. Fazendo $i \to \infty$,

$$\frac{F(x_i)}{\rho(x_i)} = \left(\frac{f(x_i)}{\rho(x_i)}, 1\right) \to (0, \ldots, 0, 1)$$

pois $|f(x_i)| < 1$, para todo i. O quociente

$$\frac{\pi \circ F(x_i)}{\rho(x_i)}$$

tem norma menor ou igual a $c/\rho(x_i)$ que tende para zero, pois $\lim \rho(x_i) = \infty$. Assim, $\lim w_i = (0, \ldots, 0, 1)$, mas cada w_i é múltiplo de a, isto implica que o limite $(0, \ldots, 0, 1)$ também é múltiplo de a. Logo, o vetor unitário a é $(0, \ldots, 0, 1) \in S^{2k+1}$ ou $(0, \ldots, 0, -1) \in S^{2k+1}$, o que é uma contradição, pois, por hipótese, a não é nenhum dos polos de S^{2k+1}. Portanto, a afirmação está provada.

Tendo provado a afirmação tem-se, portanto, que qualquer variedade X está mergulhada em $\mathbb{R}^{2k+1}$. □

Capítulo 2

Transversalidade e Teoria da Interseção

2.1 Variedades Com Bordo

Até agora, em todo estudo feito sobre variedades diferenciáveis, foram consideradas apenas variedades sem bordo, entretanto, para que o objetivo final seja alcançado, que é a demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer, é preciso estender esses conceitos para "os contornos", isto é, o bordo da variedade.

Recorde que o bordo do semi-espaço positivo $H^k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \colon x_k \geq 0\}$ de dimensão k é definido pelo conjunto $\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \colon x_k = 0\}$

Definição 2.1.1. *Diz-se que um subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ é uma* variedade com bordo de dimensão k *se todo ponto x de X possui uma vizinhança V difeomorfa a algum aberto U do semi-espaço H^k. Assim, como antes, tal difeomorfismo $\varphi \colon U \to V$ é chamado de* parametrização de X em torno de x. *O* bordo *de X, denotado por ∂X, é o conjunto dos pontos que pertencem à imagem do bordo de H^k por meio de alguma parametrização local. Seu complementar chama-se de* interior *de X e é denotado por $Int(X) = X \setminus \partial X$.*

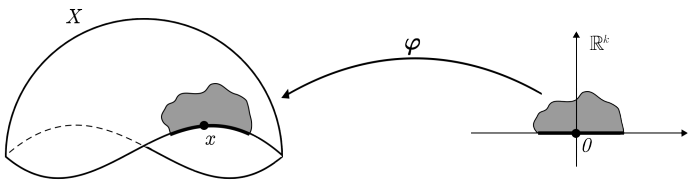

Figura 2.1: *Parametrização local de uma variedade com bordo X em torno de um $x \in \partial X$.*

Proposição 2.1.2. *Toda bola fechada $B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-a| \leq r\}$, centrada em $a \in \mathbb{R}^n$ e de raio r, é uma variedade com bordo. Além disso, $\partial B[a,r] = fr(B[a,r])$, onde $fr(B[a,r])$ é a fronteira de $B[a,r]$.*

Demonstração. De fato, dado $x \in B[a,r]$, se $x \in \text{int}(B[a,r])$, então existe um $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta, $B(x,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n$ está totalmente em contida na bola aberta $B(a,r)$. Considere a aplicação translação

$$\begin{aligned} \psi : B(0,\epsilon) &\to B(x,\epsilon) \\ z &\mapsto z + x. \end{aligned}$$

A aplicação ψ está bem definida e sua derivada $d\psi_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$ é um isomorfismo, portanto pelo Teorema da Aplicação Inversa, temos que, considerando um ϵ mais pequeno, se necessário, $\psi : B(0,\epsilon) \to B(x,\epsilon)$ é um difeomorfismo, tal que $\psi(0) = x$. Assim, temos que ψ é uma parametrização de $B[a,r]$, em torno de x.

Se $x \in \text{fr}(B[a,r])$, então $(x-a)^2 = r^2$. Consideremos o caso onde $a = 0$, $r = 1$ e a última componente de x é maior do que 0. Os restantes casos serão adaptações do que segue. Mostramos que existe um difeomorfismo entre $U = \{x \in \text{H}^n \mid |x| < 1\}$, onde $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, e $V = B[a,r] \cap \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Primeiramente, observamos que U é aberto em H^n e V é aberto em $B[a,r]$ com $x \in V$. Consideremos a aplicação $\varphi : U \to V$ definida por

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_{n-1},\sqrt{1-|x|^2} - x_n).$$

Trata-se de uma aplicação bijetiva suave com inversa suave $\varphi^{-1} : V \to U$ dada por

$$(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_{n-1},\sqrt{1-|x|^2} - x_n).$$

Observe que φ aplica $U \cap \{x_n = 0\}$ em $V \cap \{x_n = \sqrt{1-|x|^2}\}$. Portanto, φ é uma parametrização em torno do ponto x, como queríamos. □

Vamos, agora, estender nossos conceitos de derivada e espaço tangente às variedades com bordo. Seja $g : U \to \mathbb{R}^l$ uma aplicação suave, onde U é um aberto de H^k. Se u é um ponto interior de U, a derivada dg_u está bem definida, não diferindo em nada do que foi feito na Seção 1.2. Agora, se u é um ponto de ∂U, a suavidade de g garante que g pode ser estendida a uma aplicação suave $\tilde{g}$ definida numa vizinhança aberta de u em $\mathbb{R}^k$. A derivada dg_u pode ser definida como sendo a derivada $d\tilde{g}_u : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$. Agora, vamos mostrar que se h é uma outra extensão local de g então $dh_u = d\tilde{g}_u$. De fato, seja $\{u_i\}$ uma sequência de pontos em $\text{Int}(U)$ que converge para u. Pelo fato de as aplicações h e $\tilde{g}$ coincidirem com g em $\text{Int}(U)$, temos $dh_{u_i} = d\tilde{g}_{u_i}$. Fazendo $\lim u_i = u$, a continuidade das derivadas em u_i, garante que $dh_u = d\tilde{g}_u$, como queríamos. Assim, podemos definir.

Definição 2.1.3. *Seja U um aberto de H^k e $f : U \to R^l$ uma aplicação suave. Define-se a* derivada de f, df_x, no ponto $x \in \partial U$ *como sendo a aplicação $dF_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, onde $F : V \to R^l$ é uma aplicação suave definida numa vizinhança V de x em $\mathbb{R}^k$ tal que $F = f$ em $U \cap V$.*

Agora que já definimos a derivada para aplicações do tipo $g : U \subset H^k \to \mathbb{R}^l$, onde U é aberto, podemos definir a derivada da aplicação $f : X \to Y$, onde X e Y são variedades com bordo de dimensões k e l, respetivamente.

Definição 2.1.4. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade com bordo, de dimensão k. Define-se o* espaço tangente T_xX ao ponto $x \in X$ *como a imagem da derivada $d\varphi_x$ no ponto x de qualquer parametrização local φ em torno de x.*

Proposição 2.1.5. *[GP74, Exercício 2.1.7] Sejam X uma variedade com bordo e $x \in \partial X$. Considere $\varphi\colon U \to X$ uma parametrização local em torno de $x = \varphi(0)$, onde U é um aberto de H^k. Então $d\varphi_0\colon \mathbb{R}^k \to T_xX$ é um isomorfismo. O semi-espaço superior H_xX em T_xX, definido como a imagem de H^k por meio da aplicação $d\varphi_0$ (ou seja, $H_xX = d\varphi_0(H^k)$) não depende da escolha da parametrização local.*

Demonstração. Seja $\varphi\colon U \to X$ uma parametrização local, em torno de $x = \varphi(0)$, onde U é um aberto de H^k. Pela Definição 2.1.3, temos que $d\varphi_0 = d\Phi_0$, onde $\Phi\colon V \to X$ é um difeomorfismo sobre a imagem, com V um aberto de $\mathbb{R}^k$ que contém 0, tal que $\Phi|_{V\cap U} = \varphi|_{V\cap U}$. Além disso, $d\Phi_0 = d\varphi_0$, portanto, $d\varphi_0$ é um isomorfismo.

Para verificar que H_xX não depende da parametrização φ escolhida, suponha, com vista a uma contradição, que existe uma outra parametrização $\psi\colon W \to X$, onde W é um aberto de H^k, contendo a origem, tal que $d\varphi_0(H^k) \neq d\psi_0(H^k)$. Assim, $d\varphi_0(\mathbb{R}^k) \neq d\psi_0(\mathbb{R}^k)$, mas isto contraria a Proposição 1.2.6. Portanto H_xX não depende da escolha da parametrização, como queríamos. □

Definição 2.1.6. *Diz-se que uma aplicação $f\colon X \to Y$ é* suave *se, para todo $x \in X$ e toda parametrização ψ de $f(x)$, existe uma parametrização φ de x tal que a composição $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é uma aplicação suave definida de um aberto de H^k sobre um aberto de* H^l.

Suponha que $\varphi\colon U \to X$ é uma parametrização local de X, com $\varphi(0) = x$ e $\psi\colon V \to Y$, uma parametrização de Y, em torno de $y = f(x)$. Tomando abertos contidos em U ou V, se necessário, podemos considerar o diagrama comutativo abaixo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U \subset H^k & \xrightarrow{\xi=\psi^{-1}\circ f\circ\varphi} & V \subset H^l. \end{array}$$

As derivadas $d\varphi_0$, $d\psi_0$ de $d\xi_0$ estão definidas, como acima e $d\varphi_0$ e $d\psi_0$ são isomorfismos. Dessa forma, podemos definir:

Definição 2.1.7. *A aplicação $df_x\colon T_xX \to T_yY$, onde $y = f(x)$, e X e Y são variedades com bordo, dada por $df_x = d\psi_0 \circ d\xi_0 \circ (d\varphi_0)^{-1}$, diz-se a* derivada da aplicação $f\colon X \to Y$ no ponto x.

Assim, o diagrama acima induz o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_xX & \xrightarrow{\quad df_x \quad} & T_{f(x)}Y \\ {\scriptstyle d\varphi_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d\psi_0} \\ H^k & \xrightarrow{\quad d\xi_0 \quad} & H^l. \end{array}$$

Observação 2.1.8. A regra da cadeia para variedades com bordo também é válida. *Dadas aplicações suaves $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$, onde X, Y e Z são variedades com bordo, e dados os pontos $x \in X$ e $y = f(x) \in Y$, vale $d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x$.*

Se X é uma variedade com bordo, naturalmente, $\mathrm{Int}(X)$ é uma variedade sem bordo, mas a pergunta que surge é: em relação ao bordo de X, o que pode se dizer? A proposição abaixo dará uma resposta.

Proposição 2.1.9. *Se X é uma variedade com bordo de dimensão k, então o bordo ∂X de X é uma variedade de dimensão $k-1$.*

Demonstração. Primeiramente, o bordo de H^k dado por $\partial H^k = \{(h_1, \ldots, h_k) \in H^k\colon h_k = 0\}$ é difeomorfo ao $\mathbb{R}^{k-1}$. Com efeito, a aplicação ψ dada por

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \partial H^k & \to & \mathbb{R}^{k-1} \\ (h_1, \ldots, h_{k-1}, 0) & \mapsto & (h_1, \ldots, h_{k-1}) \end{array}$$

é uma aplicação suave e invertível, cuja inversa

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1}\colon \mathbb{R}^{k-1} & \to & \partial H^k \\ (h_1, \ldots, h_{k-1}) & \mapsto & (h_1, \ldots, h_{k-1}, 0) \end{array}$$

também é suave.

Agora, considere $\varphi\colon U \subset H^k \to V \subset X$, onde U e V são abertos, uma parametrização local de X. Por definição, $\varphi(\partial U) \subset \partial V$ e, com isso, temos que $\varphi|_{\partial U}\colon \partial U \to \varphi(\partial U)$ é difeomorfismo. Assim a aplicação

$$\psi \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(\partial U)}\colon \varphi(\partial U) \to \mathbb{R}^{k-1}$$

é um difeomorfismo local entre ∂X e $\mathbb{R}^{k-1}$. Portanto, ∂X é uma variedade de dimensão $k-1$, como queríamos. □

Observação 2.1.10. *Se $x \in X$, então o espaço tangente $T_x\partial X$ é um subespaço vetorial de T_xX de codimensão 1. Isto decorre imediatamente do fato de que ∂X é uma variedade de dimensão $k-1$. Observe a Figura 2.2.*

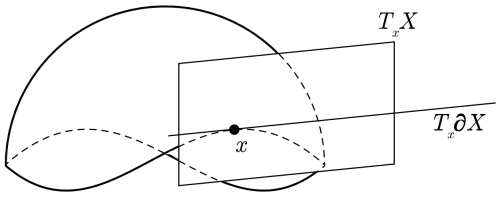

Figura 2.2: O espaço tangente ao bordo de X com codimensão 1.

Observação 2.1.11. *Dada uma aplicação suave $f\colon X \to Y$, usaremos a notação $\partial f\colon \partial X \to Y$ para representar a* restrição de f ao bordo ∂X *de X. A derivada de ∂f no ponto x é justamente a restrição de $df_x\colon T_xX \to T_{f(x)}Y$ ao subespaço $T_x\partial X$.*

Proposição 2.1.12. *[GP74, Exercício 2.1.2] Se $f\colon X \to Y$ é um difeomorfismo entre variedades com bordo, então $\partial f\colon \partial X \to Y$ aplica ∂X difeomorficamente em ∂Y.*

Demonstração. Primeiramente, devemos observar que, como f é difeomorfismo, $\dim X = \dim Y =: k$.

Vejamos que $f(\partial X) = \partial Y$. Seja $x \in \partial X$. Então existe uma parametrização $\varphi\colon U \to \varphi(U)$, onde U é aberto em H^k e $\varphi(0) = x$. Sem perda de generalidade, suponhamos que U é da forma $\mathrm{H}^k \cap B(0,\epsilon)$, para algum $\epsilon > 0$. Vejamos que $y = f(x) \in \partial Y$. Suponhamos com vista a um absurdo que $y \in Int(Y)$. Então existe uma parametrização $\psi\colon V \to Y$ em torno de y tal que V é aberto de $\mathbb{R}^k$, $\psi(0) = y$ e $\psi(V) = f(\varphi(U))$ (onde, se necessário, consideramos um $\epsilon > 0$ mais pequeno). Assim $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é um difeomorfismo entre $\mathrm{H}^k \cap B(0,\epsilon)$ e o aberto V de $\mathbb{R}^k$. Obtivemos uma contradição. Portanto $f(\partial X) \subset \partial Y$. Como f é difeomorfismo, fazendo um raciocínio análogo para f^{-1}, concluímos que $f(\partial X) = \partial Y$.

Vejamos que a aplicação $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ é suave. Em torno de cada $x \in \partial X$, uma representação local de ∂f é dada por $\hat{\psi}^{-1} \circ \partial f \circ \hat{\varphi}$, onde $\hat{\varphi} = \varphi|_{U \cap \{x_k = 0\}}$, $\hat{\psi} = \psi|_{V \cap \{x_k = 0\}}$ e $\varphi\colon U \subset \mathrm{H}^k \to X$ e $\psi\colon V \subset \mathrm{H}^k \to Y$ são parametrizações locais em torno de x e $f(x)$, respetivamente. Como f é difeomorfismo, $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ é difeomorfismo. Logo ∂f é suave, pois sua representação local $\hat{\psi}^{-1} \circ \partial f \circ \hat{\varphi}$ também é suave. Por um raciocínio análogo, a inversa de ∂f^{-1}, $\partial f\colon \partial y \to \partial X$ também é suave.

Portanto, $\partial f\colon \partial X \to \partial Y$ é difeomorfismo. □

Como já vimos na Seção 1.1, o produto de duas variedades sem bordo é uma variedade sem bordo, no entanto, isso não é necessariamente verdade quando considera-se duas variedades com bordo. Por exemplo, o produto cartesiano de dois semi-espaços não é difeomorfo a um semi-espaço.

Exemplo 2.1.13. *O conjunto $[0,\infty)$ é uma variedade com bordo, pois é o próprio H^1, mas o conjunto $S := [0,\infty) \times [0,\infty) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x \geq 0, y \geq 0\}$ não é uma variedade com bordo.*

Se S fosse uma variedade com bordo, existiria uma parametrização local $\psi\colon U \to V$ em torno de $(0,0)$, onde U é aberto em H^2, V é aberto em S e $\psi(0,0) = (0,0)$, tal que $U \cap \{y = 0\}$ é aplicado difeomorficamente em $V \cap (\{0\} \times [0,\infty) \cup [0,\infty) \times \{0\})$. Trata-se de uma contradição.

Apesar de não podermos aplicar o Teorema 1.1.11 da Seção 1.1 para duas variedades com bordo, temos um resultado similar quando consideramos o produto de uma variedade com bordo e uma variedade sem bordo, dado pela proposição a seguir.

Proposição 2.1.14. *O produto cartesiano de uma variedade sem bordo X com uma variedade com bordo, Y, é uma variedade com bordo. Mais ainda,*

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y \text{ e } \dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

Demonstração. Se $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset H^l$ são abertos, então $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times H^l$ é aberto. Observe que

$$\mathbb{R}^k \times H^l = \{(r_1, \ldots, r_k, h_1, \ldots, h_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l\colon h_l \geq 0\} = H^{k+l}.$$

Assim, temos que $U \times V$ é aberto em H^{k+l}. Além disso, se $\varphi\colon U \to X$ e $\psi\colon V \to Y$, com $\varphi(0) = x$ e $\psi(0) = y$ são parametrizações locais, em torno de x e y, respetivamente, então $\varphi \times \psi\colon U \times V \to X \times Y$ definida por $(\varphi \times \psi)(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$ é uma parametrização local em torno de (x, y) e $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y = k + l$. Finalmente, observe que se U e V são abertos de $\mathbb{R}^k$ e H^l, respetivamente, então $U \times V$ é aberto de H^{k+l} e

$$\partial(U \times V) = \{(r_1, \ldots, r_k, h_1, \ldots, h_l) \in U \times V\colon h_l = 0\} = U \times \partial V.$$

Dessa forma, como a aplicação $(\varphi \times \psi)(u, v) = (\varphi(u), \psi(v))$ aplica difeomorficamente $\partial(U \times V)$ sobre um aberto de $\partial(X \times Y)$, temos, portanto, que

$$\partial(X \times Y) = X \times \partial Y$$

como queríamos. □

Assim como o produto cartesiano de variedades com bordo não resulta, necessariamente, numa outra variedade com bordo, a transversalidade de uma aplicação f somente não garante que $f^{-1}(Z)$ seja uma variedade com bordo, nem que $\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$ quando mudamos de "estrutura". Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.1.15. *Considere aplicação $f\colon H^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x_1, x_2) = x_2$ e $Z = \{0\}$. Observe que a aplicação f é transversal a Z, mas $f^{-1}(Z) = \partial H^2$ que é, na verdade, uma variedade sem bordo.*

A condição adicional necessária é que a transversalidade deve ser garantida também no bordo, como veremos no Teorema 2.1.17.

Lema 2.1.16. *Seja S uma variedade sem bordo e $\pi\colon S \to \mathbb{R}$ uma função suave com valor regular 0. Então o subconjunto $\{s \in S\colon \pi(s) \geq 0\}$ é uma variedade com bordo, onde o bordo é dado por $\pi^{-1}(0)$.*

Demonstração. O conjunto $S' = \{s \in S\colon \pi(s) > 0\} = \pi^{-1}(0, \infty)$ é aberto em S e, portanto, uma subvariedade de mesma dimensão do que S. Agora suponha que $\pi(s) = 0$. Como 0 é valor regular de π, temos que $d\pi_s$ é sobrejetiva, consequentemente, π é localmente equivalente à submersão canônica, em torno de s, mas este lema é trivial para a submersão canônica. □

Teorema 2.1.17. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave de uma variedade X com bordo, numa variedade Y sem bordo. Suponha que ambas $f\colon X \to Y$ e $\partial f\colon \partial X \to Y$ são transversais, com respeito a uma subvariedade sem bordo Z de Y. Então a pré-imagem $f^{-1}(Z)$ é uma variedade com bordo onde*

$$\partial f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial X$$

e a codimensão de $f^{-1}(Z)$ em X é igual à codimensão de Z em Y.

Demonstração. A restrição de f à variedade sem bordo $\mathrm{Int}(X)$ é transversal a Z. Pelo Teorema 1.4.5, a intersecção $f^{-1}(Z) \cap \mathrm{Int}(X)$ é uma variedade sem bordo de codimensão dada por $\operatorname{codim} f^{-1}(Z) + \operatorname{codim} \mathrm{Int}(X)$. Agora é preciso, somente, examinar $f^{-1}(Z)$ numa vizinhança U de um ponto $x \in f^{-1}(Z) \cap \partial X$. Para facilitar o raciocínio, consideremos o caso em que Z é um único ponto, introduzindo uma submersão φ de uma vizinhança de $f(x)$ em Y, sobre $\mathbb{R}^l$, tal

que, nesta vizinhança $Z = g^{-1}(0)$, onde $g = (g_1 \ldots, g_l)\colon V \cap Z \to \mathbb{R}^l$, as funções $g_i\colon V \cap Z \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, são funções independentes e $l = \operatorname{codim} Z$. Então $\varphi \circ f$ está definida numa vizinhança de x em X e a interseção de $f^{-1}(Z)$ com esta vizinhança é dada por $(\varphi \circ f)^{-1}(0)$. Agora, escolha uma parametrização local $h\colon U \to X$ em torno de x, onde U é um aberto de H^k e tome-se $g = \varphi \circ f \circ h$. Como $h\colon U \to h(U)$ é um difeomorfismo, o conjunto $f^{-1}(Z)$ é uma variedade com bordo numa vizinhança de x se e somente se $(f \circ h)^{-1}(Z) = g^{-1}(0)$ for uma variedade com bordo em torno de $u = h^{-1}(x) \in \partial U$.

Como no caso sem bordo, a hipótese de transversalidade

$$df_x(T_xX) + T_f(x)Z = T_{f(x)}Y$$

se traduz no fato de que x é um ponto regular de $\varphi \circ f$, ou seja, que u é ponto regular de g. Por definição de suavidade, g se estende a uma aplicação $\tilde{g}$, definida numa vizinhança $\tilde{U}$ de u em $\mathbb{R}^k$. Como $d\tilde{g}_u = dg_u$, temos que $\tilde{g}$ também é regular em u. Como $\tilde{g}$ é uma aplicação entre variedades sem bordo, a pré-imagem $\tilde{g}^{-1}(0)$ intersectada com alguma vizinhança de u é uma subvariedade sem bordo S de $\mathbb{R}^k$.

Como $g^{-1}(0) = S \cap H^k$ numa vizinhança de u, precisamos mostrar que $S \cap H^k$ é uma variedade com bordo. Seja $\pi\colon S \to \mathbb{R}$ a restrição da função $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto x_k$ ao conjunto S. Então

$$S \cap H^k = \{s \in S\colon \pi(s) \geq 0\}$$

Observe que 0 é valor regular de π, pois caso contrário, existiria um ponto $s \in S$ tal que $\pi(s) = 0$ e $d\pi_s = 0$. Claro que $\pi(s) = 0$ significa que $s \in S \cap \partial H^k$. Como $\pi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é linear, então $d\pi_s = \pi$. Assim, o fato de $d\pi_s$ ser zero em T_sS significa somente que a última coordenada de todo vetor em T_sS é nula, isto é,

$$T_sS \subset T_s\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1}.$$

Como $S = \tilde{g}^{-1}(0)$ tem-se que o núcleo de $dg_s = d\tilde{g}_s\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é justamente o espaço T_sS.

Agora, a derivada de ∂g no ponto s é a restrição de $dg_s\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ao $\mathbb{R}^{k-1}$. Assim, se o núcleo de dg_s está contido em $\mathbb{R}^{k-1}$, então as aplicações lineares $dg_s\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ e $d(\partial g)_s\colon \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}$ devem ter o mesmo núcleo. Entretanto, a condição de transversalidade implica que ambas aplicações são sobrejetivas; então o Teorema do Núcleo e da Imagem para Aplicações Lineares garante que o núcleo de dg_s tem dimensão $k-1$ e o núcleo de $d(\partial g)_s$ tem dimensão $k-2$. Trata-se de uma contradição, pois ambos os núcleos devem ter a mesma dimensão. Portanto, 0 é valor regular de g.

Por fim, pelo Lema 2.1.16, segue o resultado. □

O Teorema de Sard segue mais diretamente quando o domínio da aplicação suave $f\colon X \to Y$ é uma variedade com bordo.

Teorema 2.1.18 (Teorema de Sard)**.** *Para qualquer aplicação suave $f\colon X \to Y$ de uma variedade X com bordo para uma variedade Y sem bordo, quase todo ponto de Y é um valor regular das aplicações $f\colon X \to Y$ e $\partial f\colon \partial X \to Y$.*

Demonstração. A derivada de ∂f no ponto $x \in X$ é justamente a restrição de df_x ao subespaço $T_x\partial X \subset T_xX$. É claro que se ∂f é regular em x, então f também é

regular em x. Portanto, o ponto $y \in Y$ não é valor regular de $f\colon X \to Y$, nem de $\partial f\colon \partial X \to Y$ somente quando é valor crítico de $f\colon \mathrm{Int}X \to Y$ ou $\partial f\colon \partial X \to Y$. Como $\mathrm{Int}X$ e ∂X são variedades sem bordo, ambos os conjuntos de valores críticos possuem medida nula. Assim, o complementar do conjunto de valores regulares comuns a f e ∂f é dado pela união de dois conjuntos de medida nula, portanto é um conjunto de medida nula. □

2.1.1 Variedades Unidimensionais e Algumas Consequências

O objetivo desta seção é apresentar algumas propriedades para variedades compactas de dimensão 1. Sem dúvida, um dos resultados mais importantes é a *Classificação de Variedades Unidimensionais*. Embora a ideia deste resultado pareça simples, sua demonstração não é trivial, por isso, ele será apenas enunciado e o leitor pode verificar sua demonstração em [GP74, p.208], ou em [Mil65, p.55].

Teorema 2.1.19 (Classificação de Variedades Unidimensionais)**.** *Toda variedade unidimensional, com bordo, compacta e conexa é difeomorfa ao intervalo* $[0,1]$ *ou ao círculo* S^1*.*

Corolário 2.1.20. *O bordo de qualquer variedade compacta unidimensional, com bordo, consiste num número par de pontos.*

Demonstração. Como X é uma variedade com bordo de dimensão 1 compacta, X tem um número finito de componentes conexas e cada componente conexa é também uma variedade com bordo de dimensão 1 compacta e conexa. Pelo Teorema 2.1.19, cada componente conexa de X é difeomorfa ao intervalo $[0,1]$ ou então é difeomorfa a S^1. Como $\partial[0,1] = \{0,1\}$ e $\partial S^1 = \emptyset$, segue que o bordo de cada componente conexa de X é vazia ou consiste em dois pontos. Portanto, o bordo de X consiste num número par de pontos, como queríamos. □

É claro que "nem só da Classificação de Variedades Unidimensionais vive esta seção". O primeiro uso do Corolário 2.1.20, acima, está em provar o Teorema 2.1.21, a seguir. Além disso, outro resultado importante, que será apresentado na sequência é o *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer*, usado em Equações Diferenciais, sobretudo para garantir a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária.

Teorema 2.1.21. *Se X é uma variedade compacta, com bordo, então não existe uma aplicação suave $g\colon X \to \partial X$ tal que $\partial g\colon \partial X \to \partial X$ é a identidade, isto é, não existe uma retração de X em seu bordo.*

Demonstração. Suponha com vista a uma contradição que exista tal aplicação $g\colon X \to \partial X$. Pelo Teorema de Sard, existe $z \in \partial X$ que é valor regular de g. Então $g^{-1}(z)$ é uma subvariedade, com bordo, de X. Como a codimensão de $g^{-1}(z)$ em X é igual à codimensão de $\{z\}$ em ∂X, ou seja, $\dim X - \dim g^{-1}(z) = (\dim X - 1) - \dim\{z\}$. Dessa forma, temos que $g^{-1}(z)$ é uma variedade compacta de dimensão 1. Como $\partial g = Id_{\partial X}$,

$$\partial(g^{-1}(z)) = g^{-1}(z) \cap \partial X = \{z\},$$

mas isto contradiz o corolário anterior. Portanto, tal aplicação não existe, como queríamos.

□

Teorema 2.1.22 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Qualquer aplicação suave $f\colon B^n \to B^n$, onde B^n é a bola fechada, unitária, contida em $\mathbb{R}^n$, deve ter um ponto fixo. Isto é, $f(x) = x$, para algum $x \in B^n$.*

Demonstração. Suponha com vista a uma contradição que exista uma aplicação $f\colon B^n \to B^n$ que não fixa nenhum ponto. Como, para cada $x \in B^n$, $f(x) \neq x$, os dois pontos x e $f(x)$ determinam um segmento de reta. Seja $g(x)$ um ponto onde o segmento de reta começando em $f(x)$ e passando por x intersecta o bordo ∂B^n. Se $x \in \partial B^n$, temos $g(x) = x$. Portanto a restrição de $g\colon B^n \to B^n$ a ∂B^n é a identidade de ∂B^n.

Afirmamos que a aplicação g é suave. De fato, como x pertence ao segmento de reta e está entre $g(x)$ e $f(x)$, podemos escrever o vetor $g(x) - f(x)$ como um múltiplo do vetor $x - f(x)$, isto é,

$$g(x) - f(x) = t(x - f(x)), \quad t \geq 1,$$

e, assim, temos

$$g(x) - tx = (1 - t)f(x).$$

Agora observe que $|g(x)| = 1$, pois $g(x) \in \partial B^n$. Tomando o produto interno canônico, na expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} 1 &= \langle g(x), g(x)\rangle \\ &= \langle tx + (1-t)f(x), tx + (1-t)f(x)\rangle \\ &= t^2|x - f(x)|^2 + 2t\,\langle f(x), x - f(x)\rangle + |f(x)|^2 \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos uma equação de grau dois, cuja variável é t. Dessa forma, segue que t depende suavemente de $f(x)$ e, portanto, $g(x)$ é suave. Com isso, obtivemos uma aplicação suave $g\colon B^n \to \partial B^n$, contradizendo o teorema anterior.

Portanto, toda aplicação suave $f\colon B^n \to B^n$, onde B^n é a bola fechada unitária de $\mathbb{R}^n$, deixa um ponto fixo.

□

2.2 Transversalidade

Na Seção 1.4 do Capítulo 1, introduzimos o conceito de transversalidade e apresentamos algumas de suas propriedades. Na Seção 1.5, o Teorema 1.5.5 garantiu que a transversalidade é uma propriedade estável desde que o domínio da aplicação em questão seja compacto. Por fim, o Teorema de Sard, garantiu que, dada uma subvariedade $Z \subset Y$, qualquer aplicação suave $f\colon X \to Y$, com o domínio X não necessariamente compacto, pode sofrer pequenas deformações, de modo a transformar-se numa aplicação que seja transversal a Z.

Teorema 2.2.1 (Teorema da Transversalidade)**.** *Seja $f_s\colon X \to Y$ uma família de aplicações suaves, indexada por um parâmetro s que varia em alguma variedade S. Suponha que a aplicação $F\colon X \times S \to Y$, dada por $F(x, s) = f_s(x)$ é*

uma aplicação suave entre variedades, onde apenas X possui bordo e considere Z uma subvariedade sem bordo de Y. Se F e ∂F são transversais a Z, então, para quase todo $s \in S$, as aplicações f_s e ∂f_s também são transversais a Z.

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.17, a pré-imagem $W = F^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de $X \times S$ com bordo onde $\partial W = W \cap \partial(X \times S)$. Seja $\pi\colon X \times S \to S$ a projeção natural. Afirmamos que sempre que $s \in S$ for valor regular da aplicação $\pi\colon W \to S$, então $f_s \pitchfork Z$ e, sempre que $s \in S$ for valor regular de $\partial\pi\colon \partial W \to S$, então $\partial f_s \pitchfork \partial Z$. Vamos fazer o caso em que $f_s \pitchfork Z$, pois o outro caso é análogo.

De fato, seja $x \in X$, tal que $f_s(x) = z$ pertencente a Z. Como $F(x,s) = z$ e $F \pitchfork Z$, tem-se

$$dF_{(x,s)}(T_{(x,s)}(X \times S)) + T_zZ = T_zY,$$

isto é, dado um vetor $a \in T_zY$, existe um vetor $b \in T_{(x,s)}(X \times S)$ tal que

$$dF_{(x,s)}(b) - a \in T_zZ.$$

O objetivo, agora, é exibir um vetor $v \in T_xX$ tal que $df_s(v) - a \in T_zZ$. Lembre que, pela Proposição 1.2.8,

$$T_{(x,s)}(X \times S) = T_xX \times T_sS,$$

assim, temos que $b = (w, e)$, onde $w \in T_xX$ e $e \in T_sS$. Se $e = 0$, não há mais nada a se fazer pois a restrição de F a $X \times \{s\}$ é dada por f_s e, assim, segue que

$$dF_{(x,s)}(w, 0) = df_s(w).$$

Se $e \neq 0$, a aplicação

$$d\pi_{(x,s)}\colon T_xX \times T_sS \to T_sS$$

é justamente a projeção na segunda componente, a hipótese de regularidade que $d\pi_{(x,s)}$ aplica $T_{(x,s)}W$ sobre T_xS diz que existe um vetor da forma (u, e) em $T_{(x,s)}W$. Como $F\colon W \to Z$, então $dF_{(x,s)}(u, e) \in T_zZ$. Consequentemente o vetor $v = w - u \in T_xX$ é o vetor procurado pois

$$df_s(v) - a = dF_{(x,s)}[(w, e) - (u, e)] - a = [dF_(x, s)(w, e) - a] - dF_s(u, e)]$$

e os dois últimos vetores pertencem a T_zZ. Por fim, o Teorema de Sard garante a validade desse resultado para quase todo $s \in S$, como queríamos. □

Seja $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave qualquer. Defina a aplicação $F\colon X \times S \to \mathbb{R}^n$ por $F(x,s) = f(x)+s$, onde S é uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$. Para todo $x \in X$ fixado, a aplicação F é uma translação, consequentemente, uma submersão de $X \times S$ em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, transversal a qualquer subvariedade Z de $\mathbb{R}^n$. O teorema acima mostra que, para quase todo $s \in S$, a aplicação $f_s(x) = f(x) + s$ é transversal a Z. Desse modo, observamos que qualquer aplicação suave f pode ser transformada numa aplicação transversal adicionando a f um pequeno valor s. Logo adiante, o *Teorema da Vizinhança-ϵ* tratará desse assunto considerando qualquer variedade compacta, sem bordo.

Definição 2.2.2. *Dada uma variedade $Y \subset \mathbb{R}^n$, para um ponto $y \in Y$ define-se o* espaço normal *N_yY como sendo o complemento ortogonal de T_yY em $\mathbb{R}^n$. Isto é,*

$$N_yY = \{v \in \mathbb{R}^n\colon \langle v, w\rangle = 0,\ \forall\, w \in T_yY\}.$$

O fibrado normal *é definido pelo conjunto*

$$NY = \{(y, v) \in Y \times \mathbb{R}^n \colon v \in N_y Y\}.$$

Observação 2.2.3. *É importante ressaltar que, ao contrário de TY, o fibrado normal NY não é uma variedade intrínseca de Y, pois depende da relação entre Y e $\mathbb{R}^n$. Observe também que existe uma projeção natural $\sigma \colon NY \to Y$ definida por $\sigma(y, v) = y$.*

A proposição a seguir provará o que intuitivamente já se esperava: o fibrado normal NY de uma variedade $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade com dimensão n.

Proposição 2.2.4. *Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade, então NY é uma variedade de dimensão n e a projeção $\sigma \colon NY \to Y$ é uma submersão.*

Demonstração. Defina Y localmente da seguinte forma: em torno de um ponto qualquer $y \in Y$, seja $\varphi \colon \tilde{U} \to \mathbb{R}^k$ uma submersão, onde $\tilde{U}$ é aberto em $\mathbb{R}^n$ e $k = \operatorname{codim} Y$, tal que $U = Y \cap \tilde{U} = \varphi^{-1}(0)$. O conjunto NU é dado por $NY \cap (U \times \mathbb{R}^n)$, logo, é aberto em NY. Para cada $y \in U$, a aplicação $d\varphi_y \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é sobrejetiva e seu núcleo é dado por $T_y Y$. Assim, a aplicação $(d\varphi_y)^t$, ou seja, a transposta da aplicação $d\varphi_y$, leva $\mathbb{R}^k$ isomorficamente sobre $N_y Y$, pois, como $d\varphi_y$ é sobrejetiva, a aplicação $(d\varphi_y)^t \colon \mathbb{R}^k \to H$ é bijetiva, onde $H \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço de dimensão k, no entanto como $d\varphi_y(T_y Y) = \{0\}$, todo vetor não nulo $w \in \mathbb{R}^k$ é levado, por $(d\varphi_y)^t$ num vetor não nulo de H e como podemos escrever $\mathbb{R}^n = T_y Y + N_y Y$ (vide [Lim12b, p.143]) temos $H = N_y Y$. A aplicação $\psi \colon U \times \mathbb{R}^k \to NU$, dada por $\psi(y, v) = (y, (d\varphi_y)^t(w))$ é bijetiva e também é um mergulho de $U \times \mathbb{R}^k$ em $Y \times \mathbb{R}^n$. Consequentemente NU é uma variedade parametrizada por ψ, com dimensão $\dim NU = \dim U + k = \dim Y + \operatorname{codim} Y = n$. Como o ponto tomado de NY é arbitrário, logo todo ponto de NY possui uma vizinhança da forma NU e, portanto, NY é uma variedade. Como $\sigma \circ \psi \colon U \times \mathbb{R}^k \to U$ é a submersão canônica, então σ é submersão. □

Embora a leitura se torne um pouco exaustiva, a sequência de resultados a seguir traz diversas informações importantes, não somente para a Topologia, como para outras áreas da Matemática, como Equações Diferenciais, ou Geometria Diferencial, onde o Teorema da Vizinhança Tubular e o Teorema da Vizinhança-ϵ são bastante aplicados.

Teorema 2.2.5 (Teorema da Vizinhança-ϵ)**.** *Para uma variedade compacta, sem bordo, $Y \subset \mathbb{R}^m$ e um número positivo ϵ, seja Y^ϵ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m$ com $d(Y^\epsilon, Y) < \epsilon$. Se ϵ é suficientemente pequeno, então cada ponto $w \in Y^\epsilon$ possui um único ponto mais próximo em Y denotado por $\pi(w)$. Mais ainda, a aplicação $\pi \colon Y^\epsilon \to Y$ é uma submersão. Quando Y não é compacto, ainda existe uma submersão $\pi \colon Y^\epsilon \to Y$, mas agora ϵ pode ser admitido como uma função suave positiva em Y e Y^ϵ é dado por*

$$\{w \in \mathbb{R}^n \colon |w - y| < \epsilon(y) \text{ para algum } y \in Y\}.$$

Demonstração. Considere a aplicação suave $h \colon NY \to \mathbb{R}^m$, dada por $h(y, v) = y + v$. Observe que todo ponto de $Y \times \{0\}$ em NY é ponto regular de h, pois $(y, 0)$ pertence a duas subvariedades complementares de NY, a saber,

$$Y \times \{0\} \text{ e } \{y\} \times N_y Y.$$

A derivada de h no ponto $(y,0)$ aplica o espaço tangente a $Y \times \{0\}$, no ponto $(y,0)$, sobre $T_y Y$ e aplica o espaço tangente a $\{y\} \times N_y Y$, no ponto $(y,0)$, sobre $N_y Y$. Assim, temos que $dh_{(y,0)}$ aplica o espaço tangente a NY, no ponto $(y,0)$, sobre $T_y Y + N_y Y = \mathbb{R}^m$ e segue que $dh_{(y,0)}$ é sobrejetiva.

Como h aplica difeomorficamente $Y \times \{0\}$ sobre Y e como cada $(y,0)$ é ponto regular de h, pelo Teorema 1.7.12, h aplica difeomorficamente uma vizinhança de $Y \times \{0\}$ numa vizinhança de Y, em $\mathbb{R}^n$. Agora, qualquer vizinhança de Y contém algum Y^ϵ, uma vez que Y é compacto e sem bordo. Assim, a aplicação $h^{-1}\colon Y^\epsilon \to Y$ está bem definida e a aplicação $\pi = \sigma \circ h^{-1}\colon Y^\epsilon \to Y$ é uma submersão, onde $\sigma\colon NY \to Y$ é a projeção natural de NY sobre Y.

Para mostrar a existência e unicidade de $\pi(w)$, onde $w \in Y^\epsilon$, o trabalho é bastante simples: recorde que se $Y \subset X$ é compacto então, dado $x \in X \setminus Y$, existe pelo menos um $y \in Y$ tal que

$$d(x,y) = \inf\{d(x,y)\colon x \in X \setminus Y, y \in Y\}.$$

Por esse resultado, segue a existência do ponto $\pi(w)$ e a unicidade vem do fato de que a aplicação $\pi = \sigma \circ h^{-1}$ é, na verdade, uma bijeção. Portanto existe um único $\pi(w)$ mais próximo de Y, como desejado. □

Corolário 2.2.6. *Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave, sendo Y uma variedade sem bordo. Então existe uma bola aberta S em $\mathbb{R}^m$ e uma aplicação suave $F\colon X \times S \to Y$ tal que $F(x,0) = f(x)$ e, para $x \in X$ fixado arbitrariamente, a aplicação $H\colon S \to Y$, dada por $H(s) = F(x,s)$, é uma submersão. Em particular, F e ∂F são submersões.*

Demonstração. Seja S a bola unitária em $\mathbb{R}^m$. Defina a aplicação $F\colon X \times S \to Y$ como

$$F(x,s) = \pi(f(x) + \epsilon(f(x))s),$$

onde $\pi\colon Y^\epsilon \to Y$ é a aplicação do Teorema da Vizinhança-ϵ. Como π restringe-se à identidade de Y, temos $F(x,0) = f(x)$. Para x fixado, a aplicação $h\colon S \to \mathbb{R}^m$, definida por

$$h(s) = f(x) + \epsilon(f(x))s$$

é uma submersão de S em Y. Como a composição de duas submersões é uma submersão, então $H(s) := F(x,s)$ é uma submersão. Observe que F e ∂F são submersões, pois estas são submersões mesmo quando restritas a subvariedades da forma $\{x\} \times S$, que passam por cada ponto de $X \times S$ e de $\partial X \times S$. □

Para uma subvariedade Z de $Y \subset \mathbb{R}^m$, pode-se falar do fibrado normal a Z em Y, sem necessariamente falar ou trabalhar com o fibrado normal de toda a variedade Z, em $\mathbb{R}^m$. Formalmente:

Definição 2.2.7. *Define-se o* fibrado normal à subvariedade *Z, contida em Y, como sendo conjunto*

$$N(Z;Y) = \{(z,v)\colon z \in Z, v \in T_z Y \text{ e } v \perp T_z Z\}$$

Aqui, $v \perp T_z Z$ significa que v é perpendicular a todo o vetor do espaço $T_z Z$.

Definição 2.2.8. *Para cada $z \in Z$, define-se a* fibra, *$N_z(Z;Y)$, de $N(Z;Y)$, em z, como sendo o conjunto:*

$$N_z(Z;Y) = \{v \in T_zY : v \perp T_zZ\}.$$

Proposição 2.2.9. *[GP74, Exercício 2.3.12] Seja Z uma subvariedade de Y, onde $Y \subset \mathbb{R}^m$. O fibrado normal à subvariedade Z de Y, $N(Z,Y)$, é uma subvariedade com a mesma dimensão de Y.*

Demonstração. Sejam $g_1, \ldots, g_l$ funções independentes definidas em uma vizinhança $\tilde{U}$ de z em $\mathbb{R}^m$ tais que

$$U = Z \cap \tilde{U} = \{y \in \tilde{U} : g_1(y) = 0, \ldots, g_l(y) = 0\}$$

e

$$Y \cap \tilde{U} = \{y \in \tilde{U} : g_{k+1}(y) = 0, \ldots, g_l(y) = 0\}.$$

Estas l funções independentes existem pelo Corolário 1.3.32 do Teorema 1.3.31. Considere a imersão canônica $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$, $i(x) = (x, 0)$, e defina a aplicação

$$\begin{aligned} f : U \times \mathbb{R}^k &\to U \times \mathbb{R}^l \\ (u, x) &\mapsto (u, i(x)). \end{aligned}$$

Observe que f é um difeomorfismo sobre a imagem. Considere, agora, a aplicação $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}^l$, definida por $g = (g_1, \ldots, g_l)$. Sabemos que, para todo ponto y, a aplicação dg_y é sobrejetiva pois as funções coordenadas de g são l funções independentes. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : U \times R^l &\to N(Z;\mathbb{R}^m) \\ (y, v) &\mapsto (y, (dg_y)^t(v)). \end{aligned}$$

Por um argumento análogo ao utilizado na Proposição 2.2.4, temos que $(dg_y)^t : \mathbb{R}^k \to N_y(Z;\mathbb{R}^m)$ é um isomorfismo, e consequentemente ψ é um difeomorfismo. Agora, tomando a aplicação $(\psi \circ f)|_{U\times Y} : U \times Y \to N(Z;Y)$ é um difeomorfismo, pois é a composta de difeomorfismos portanto é uma parametrização de $N(Z;Y)$, como queríamos. □

Teorema 2.2.10 (Teorema da Vizinhança Tubular)**.** *[GP74, Exercício 2.3.16] Se Z é uma subvariedade de Y e $N(Z;Y)$ o fibrado normal de Z em Y, então existe um difeomorfismo entre uma vizinhança aberta de Z em $N(Z;Y)$ e uma vizinhança aberta de Z em Y.*

Demonstração. Primeiramente, considere o caso em que Z é uma subvariedade de Y compacta. Considere a aplicação $h : N(Z;Y) \to \mathbb{R}^m$, dada por $h(z, v) = z + v$. Esta aplicação h é a mesma aplicação usada na demonstração do Teorema da Vizinhança-ϵ e, portanto, uma aplicação regular em todo ponto $(z, 0)$ de $Z \times \{0\}$ que, além disso, também aplica difeomorficamente $Z \times \{0\}$ em Z. Desse modo, segue, pelo Teorema 1.7.12, que h deve aplicar, difeomorficamente, uma vizinhança de $Z \times \{0\}$ numa vizinhança de Z, contida no $\mathbb{R}^m$. Esta última vizinhança é denotada por Z^ϵ. Agora considere a aplicação $\pi : Y^\epsilon \to Y$, do Teorema da Vizinhança-ϵ, restrita a Z^ϵ, isto é,

$$\pi|_{Z^\epsilon} : Z^\epsilon \to Z.$$

Assim, a aplicação $\pi \circ h = \sigma \circ h^{-1} \circ h : W \to Y$, onde $W = h^{-1}(Z)$, está bem definida, sendo que $\pi \circ h = Id_Z$. Portanto, novamente pelo Teorema 1.7.12, segue o resultado.

Para o caso em que Z não é compacta, usamos o $\epsilon(x)$, garantido pelo Teorema da Vizinhança-ϵ para variedades não compactas e aplicamos o mesmo raciocínio. □

Definição 2.2.11. *Seja Z uma subvariedade de codimensão k, de Y. Diz-se que o fibrado normal $N(Z;Y)$ é* trivial *quando existe um difeomorfismo $\Phi\colon N(Z;Y) \to Z \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a cada fibra $N_z(Z;Y)$, $z \in Z$,*

$$\Phi|_{N_z(Z;Y)}\colon N_z(Z;Y) \to \{z\} \times \mathbb{R}^k$$

é um isomorfismo linear.

Proposição 2.2.12. *[GP74, Exercício 2.3.20] O fibrado normal $N(Z;Y)$ é trivial se, e somente se, existem k funções independentes, $g_1, \ldots, g_k$, que definem Z globalmente em algum subconjunto U de Y, isto é*

$$Z = \{y \in U\colon g_1(y) = 0, \ldots, g_k(y) = 0\}.$$

Demonstração. Suponhamos que o fibrado normal $N(Z;Y)$ é trivial.

Pelo Teorema da Vizinhança Tubular, existe um difeomorfismo $\varphi\colon U \to V$ entre uma vizinhança U de Z, em Y e uma vizinhança V de Z, em $N(Z;Y)$. Observe que, em $N(Z;Y)$, a subvariedade Z corresponde ao conjunto $Z \times \{0\}$. Considere as aplicações $\pi\colon U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ dada por $\pi(u,y) = y$ e $g\colon U \to \mathbb{R}^k$ dada por

$$g(u) = \pi\left(\Phi(\varphi(u))\right),$$

onde $\Phi\colon N(Z;Y) \to Z \times \mathbb{R}^k$ é o difeomorfismo cuja existência é dada pela definição de fibrado trivial.

Vejamos que $Z = g^{-1}\{0\}$. Observe que se $u \in Z$, então $\Phi(\varphi(u)) = \Phi(u,0) = (u,0)$, donde,

$$g(u) = \pi\left(\Phi(\varphi(u))\right) = \pi(u,0) = 0.$$

Reciprocamente, se $u \in g^{-1}(0)$, temos,

$$g(u) = \pi\left(\Phi(\varphi(u))\right) = 0.$$

Assim, temos $\Phi(\varphi(u))$ é da forma $(\hat{z}, w)$ com $\hat{z} \in Z$ e $w \in \mathbb{R}^k$ com $w = 0$. Logo, $u = \hat{z} \in Z$.

Como π é submersão e Φ e φ são difeomorfismos, segue que a aplicação g é submersão. Logo, escrevendo $g = (g_1, \ldots, g_k)$, tem-se que as k funções independentes $g_1, \ldots, g_k$ definem Z globalmente em U.

Reciprocamente, se existe uma submersão $g\colon U \to \mathbb{R}^k$, com $g^{-1}(0) = Z$, por um argumento análogo ao usado na Proposição 2.2.4, para cada $z \in Z$ a aplicação $(dg_z)^t\colon \mathbb{R}^k \to T_zY$ aplica $\mathbb{R}^k$ isomorficamente no complemento ortogonal de T_zZ, em T_zY. Dessa forma, temos que $\Phi^{-1}\colon Z \times \mathbb{R}^k \to N(Z;Y)$ fica definida por $\Phi^{-1}(z,a) = (z, (dg_z)^t(a))$. Portanto $N(Z;Y)$ é trivial, como queríamos. □

Teorema 2.2.13. *Para toda aplicação suave $f\colon X \to Y$, sendo Y sem bordo e, para toda subvariedade Z sem bordo, de Y, existe uma aplicação suave $g\colon X \to Y$ homotópica a f tal que $g \pitchfork Z$ e $\partial g \pitchfork Z$.*

Demonstração. Para a família de aplicações F do Corolário 2.2.6, o Teorema da Transversalidade garante que $f_s \pitchfork Z$ e $\partial f_s \pitchfork Z$, para quase todo $s \in S$. Entretanto, cada f_s é homotópica a f, pela homotopia $X \times I \to Y$, dada por $(x,t) \to F(x,ts)$, assim tomando $g := f_s$, para algum s, segue o resultado. □

Definição 2.2.14. *Diz-se que uma aplicação $f\colon X \to Y$ é* transversal a Z, em um subconjunto C *de X se a condição de transversalidade*

$$Im(df_x) + T_{f(x)}Z = T_{f(x)}Y$$

é satisfeita para todo ponto $x \in C \cap f^{-1}(Z)$.

Lema 2.2.15. *Se U é uma vizinhança aberta de um conjunto fechado C, em X, então existe uma função $\gamma\colon X \to [0,1]$ que vale 1 fora de U, mas que é nula numa vizinhança de C.*

Demonstração. Seja C' um conjunto fechado qualquer, contido em U, que contém C em seu interior e seja $\{\theta_i\}$ a partição da unidade subordinada à cobertura aberta $\{U, X \setminus C'\}$ de X. Assim, basta escolher os θ_i que se anulam em $X \setminus C'$ e tomar γ com sendo a soma destes θ_i. Assim, obtém-se a função γ desejada. □

Observação 2.2.16. *A demonstração do Teorema da Partição da Unidade continua sendo válida quando X é uma variedade com bordo.*

Teorema 2.2.17 (Teorema da Extensão)**.** *Suponha que Z é uma subvariedade fechada, sem bordo, contida em Y e C um subconjunto fechado em X. Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave tal que $f \pitchfork Z$ em C e $\partial f \pitchfork Z$ em $C \cap \partial X$. Então existe uma aplicação suave $g\colon X \to Y$ homotópica a f, tal que $g \pitchfork Z$ e $\partial g \pitchfork Z$ e, numa vizinhança de C, tem-se $g = f$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que f é transversal a Z numa vizinhança de C. Se $x \in C$, mas $x \notin f^{-1}(Z)$, então, como Z é fechado, o conjunto $X \setminus f^{-1}(Z)$ é uma vizinhança de x, no qual temos $f \pitchfork Z$, automaticamente. Agora, se $x \in f^{-1}(Z)$, então existe uma vizinhança W de $f(x)$, em Y, e uma submersão $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^k$ tal que $f \pitchfork Z$ num ponto $x' \in f^{-1}(Z \cap W)$ precisamente quando a restrição

$$\varphi \circ f|_{f^{-1}(Z)}\colon f^{-1}(Z) \to \mathbb{R}^k$$

é regular em x'. A composição $\varphi \circ f$ é regular em x, logo também é regular numa vizinhança de x. Dessa forma, temos que $f \pitchfork Z$ numa vizinhança de cada ponto $x \in C$, assim temos $f \pitchfork Z$ numa vizinhança U de C.

Seja $\gamma\colon X \to [0,1]$ a função dada no Lema 2.2.15 e seja $\tau := \gamma^2$. Como $d\tau_x = 2\gamma(x)d\gamma_x$, temos $d\tau_x = 0$ sempre que $\tau(x) = 0$. Agora, modificamos a aplicação $F\colon X \times S \to Y$, dada por $F(x,s) = f_s(x)$, já definida no Teorema 2.2.13, a fim de obter a aplicação $G\colon X \times S \to Y$, dada por $G(x,s) = F(x, \tau(x)s)$. Afirmamos que G é transversal a Z. De fato, suponha que $(x,s) \in G^{-1}(Z)$ e $\tau(x) \neq 0$, então a aplicação $S \to Y$, dada por $r \mapsto G(x,r)$, é uma submersão, pois é dada pela composta de um difeomorfismo $r \mapsto \tau(x)r$ com a submersão $r \mapsto F(x,r)$. Dessa forma, temos que G é regular em (x,s), logo $dG_{(x,s)}$ é sobrejetiva em (x,s) e, com isso, temos que G é transversal a Z, em (x,s). Quando $\tau(x) = 0$, avaliamos $dG_{(x,s)}$ em qualquer elemento

$$(v,w) \in T_xX \times T_sS = T_xX \times \mathbb{R}^m.$$

Defina a aplicação $h\colon X \times S \to X \times S$ por $h(x,s) = (x, \tau(x)s)$ e observe que sua derivada é dada por

$$dh_{(x,s)}(\upsilon, w) = (\upsilon, \tau(x) \cdot w + d\tau_x(\upsilon) \cdot s),$$

onde $\tau(x), d\tau_x(\upsilon) \in \mathbb{R}$ são escalares. Agora, aplicando a regra da cadeia a $G = F \circ h$ e substituindo $\tau(x) = 0$ e $d\tau_x = 0$, temos

$$dG_{(x,s)}(\upsilon, w) = dF_{(x,0)}(\upsilon, 0).$$

Quando restringimos F ao conjunto $X \times \{0\}$, temos $F = f$, devido à definição de F. Substituindo na equação acima, obtemos

$$dG_{(x,s)}(\upsilon, w) = df_x(\upsilon).$$

No entanto, se $\tau(x) = 0$, então $x \in U$, pois $\tau(x) = (\gamma(x))^2$ e, fora de U, a função γ vale 1 e, além disso, $f \pitchfork Z$, em x, pois x pertencente a uma vizinhança de C, em U, recai no caso particular, feito acima. Assim, o fato de df_x e $dG_{(x,s)}$ terem a mesma imagem, implica que $G \pitchfork Z$, em (x,s). Completando a justificação da afirmação.

Para verificar que $\partial G \pitchfork Z$, o procedimento é análogo. Agora, o Teorema da Transversalidade nos permite escolher $s \in S$, de modo que a aplicação $g(x) = G(x,s)$ seja transversal a Z e $\partial G \pitchfork Z$. Como antes, temos g homotópica a f. Além disso, se x pertence a uma vizinhança de C, onde $\tau(x) = 0$, então

$$g(x) = G(x,s) = F(x,0) = f(x),$$

como queríamos. □

Como o bordo ∂X de X é sempre fechado em X, segue o corolário abaixo.

Corolário 2.2.18. *Se para $f\colon X \to Y$, a aplicação $\partial f\colon \partial X \to Y$ é transversal a Z, então existe uma aplicação $g\colon X \to Y$, homotópica a f, tal que $\partial g = \partial f$ e $g \pitchfork Z$.*

2.3 Teoria da Interseção Módulo 2

Definição 2.3.1. *Diz-se que duas subvariedades X e Z, contidas em Y, têm* dimensão complementar *quando* $\dim X + \dim Z = \dim Y$.

Observação 2.3.2. *Se $X \pitchfork Z$, onde X e Z são variedades sem bordo, contidas em Y, o Teorema 1.4.5 garante que $X \cap Z$ é uma variedade. Se, além disso, X e Z têm dimensão complementar, ou seja,* $\dim X + \dim Z = \dim Y$, *então* $\dim(X \cap Z) = 0$. *Agora, assumindo que X e Z sejam ambas fechadas e que pelo menos uma delas, digamos X, é compacta, então $X \cap Z$ é um conjunto finito de pontos. Com efeito, o conjunto $X \cap Z$ é uma variedade compacta de dimensão zero, logo é um conjunto finito.*

Definição 2.3.3. *Diz-se que o número de pontos do conjunto finito $X \cap Z$ é o* número de interseção de X e Z *e denota-se por $\#(X \cap Z)$.*

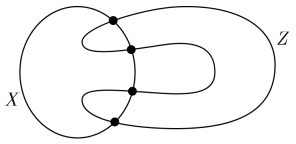

Figura 2.3: $\#(X \cap Z) = 4$.

Para generalizar essa discussão sobre número de interseção de uma variedade compacta X com uma variedade fechada Z, arbitrária, é necessário ter em mente que sem a condição de transversalidade e sem a condição de dimensão complementar, nada pode ser concluído, uma vez que, sem estas hipóteses, a interseção $X \cap Z$ pode ser qualquer conjunto. Entretanto, na Seção 1.5, vimos que podemos deformar ligeiramente o compacto X, de modo que este se torne transversal a Z. Desse modo, podemos definir o número de interseção de X e Z como sendo o número de interseção obtido após a deformação de X.

Um problema encontrado ao se deformar X de modo a obter a transversalidade, com Z, é que deformações diferentes resultam em números de interseção diferentes, mas apesar disso, essa ideia de deformação será bastante utilizada, pois como será mostrado nesta seção, deformações diferentes possuem o mesmo número de interseção, módulo 2.

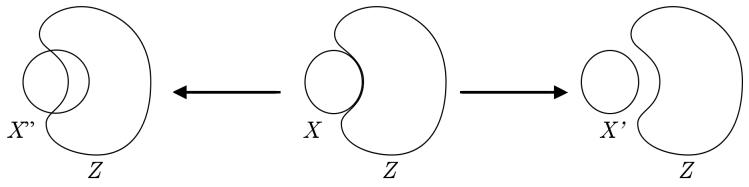

Figura 2.4: *Observe que* $\#(X'' \cap Z) = 2$ *e* $\#(X' \cap Z) = 0$

Para formalizar a ideia de deformação, considere X uma variedade qualquer contida em Y e considere também aplicação inclusão $i\colon X \hookrightarrow Y$, como um mergulho. Sabemos que as deformações da inclusão i podem ser dadas por homotopias. Como mergulhos formam uma classe estável de aplicações, qualquer "pequena homotopia"de i resulta num novo mergulho $X \to Y$. Assim, a imagem desses mergulhos são variedades difeomorfas a X, contidas em Y.

Agora, considere X uma variedade compacta, não necessariamente contida em Y e $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave transversal à variedade fechada Z contida em Y, onde $\dim X + \dim Z = \dim Y$, então $f^{-1}(Z)$ é uma subvariedade fechada de X, de dimensão zero, como X é compacto, $f^{-1}(Z)$ é um conjunto finito. Agora, a definição abaixo, formaliza o conceito de número de interseção de uma aplicação.

Definição 2.3.4. *Define-se o* número de interseção módulo 2 *da aplicação* $f\colon X \to Y$ *com* Z*, como sendo o número de pontos do conjunto* $f^{-1}(Z)$ *módulo 2 e denota-se por* $I_2(f, Z)$*.*

Teorema 2.3.5. *Se* $f_0, f_1\colon X \to Y$ *são homotópicas e ambas transversais a* Z*, então* $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$*.*

Demonstração. Seja $F\colon X \times I \to Y$ uma homotopia entre f_0 e f_1. Como F estende as aplicações f_0 e f_1 no conjunto $X \times I$, o Teorema da Extensão (Teorema 2.2.17) garante que podemos assumir $F \pitchfork Z$. Como

$$\partial(X \times I) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$$

e também $\partial F = f_0$ em $X \times \{0\}$, $\partial F = f_1$ em $X \times \{1\}$, segue que $\partial F \pitchfork Z$. Então $F^{-1}(Z)$ é uma subvariedade de dimensão 1 contida em $X \times I$, com bordo dado por

$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times I) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Pelo Corolário 2.1.20 do Teorema da Classificação de Variedades Unidimensionais (Teorema 2.1.19), segue que $\partial F^{-1}(Z)$ consiste num número par de pontos, logo $\#f_0^{-1}(Z) = \#f_1^{-1}(Z) \mod 2$, como queríamos. □

Como homotopia é uma relação de equivalência, segue o corolário abaixo:

Corolário 2.3.6. *Se $g_0, g_1\colon X \to Y$ são aplicações arbitrárias homotópicas, então $I_2(g_0, Z) = I_2(g_1, Z)$.*

Corolário 2.3.7. *[GP74, Exercício 2.4.4] Seja $f\colon X \to Y$ uma aplicação suave homotópica a uma aplicação constante. Para toda subvariedade fechada Z de Y, onde $\dim X + \dim Z = \dim Y$, tem-se $I_2(f, Z) = 0$, exceto, possivelmente, quando $\dim X = 0$.*

Demonstração. Consideremos o caso em que $\dim X \geq 1$, ou seja, $\dim Z < \dim Y$. Seja y um ponto no aberto $Y \setminus Z$ e seja $g\colon X \to Y$ a aplicação constante dada por $g(x) = y$, para todo $x \in X$. Esta aplicação é, diretamente ou por transitividade, homotópica a f e, como $g^{-1}(Z) = \emptyset$, temos

$$I_2(f, Z) = I_2(g, Z) = \#g^{-1}(\{z\}) = 0, \mod 2$$

(onde $z \in Z$), como queríamos.

Agora, se $\dim X = 0$, então X é um conjunto discreto. Observamos que se tivermos $X = \{x\}$, então $\dim f(X) = 0$, com isso, qualquer aplicação constante $g\colon X \to Y$ terá, sua imagem contida em Z, exceto, possivelmente quando $g(X) = \{g(x) | x \in X\}$ coincidir com $f(X)$, uma vez que $f(X)$ também é dado por um único ponto. Dessa forma, temos que se $g(X) \subset Z$, então $\#g^{-1}(Z) = 1$, pois $X = \{x\}$. Além disso, temos que f e g são transversais a Z pois, neste caso, ambas as aplicações são constantes. Dessa forma, como f e g são, por hipótese, homotópicas, segue que $I_2(f, Z) \neq 0$, como queríamos. □

Até agora, sabemos que se X e Z são subvariedades de Y, onde X é uma subvariedade compacta e Z é uma subvariedade fechada de dimensão complementar, o número de interseção módulo 2 de X com Z é definido como $I_2(X, Z) := I_2(i, Z)$, onde $i\colon X \hookrightarrow Y$ é aplicação inclusão. Quando $X \pitchfork Z$ então $I_2(X, Z)$ é justamente $\#X \cap Z$ módulo 2. Se $I_2(X, Z) \neq 0$ então, não é possível "arrastar" X, totalmente, para "longe" de Z. Uma situação curiosa acontece quando $\dim X = \dim Y/2$, pois podemos então considerar $I_2(X, X)$, o número de auto-interseções módulo 2 de X.

Se acontecer de X ser o bordo de alguma subvariedade W de Y, então $I_2(X, Z) = 0$. De fato, se $Z \pitchfork X$, então podemos dizer que Z "passa fora" de W ou "entra" em W, mas de toda forma $\#(X \cap Z)$ é um número par.

Teorema 2.3.8 (Teorema do Bordo)**.** *Suponha que X é o bordo de alguma variedade compacta W e $g\colon X \to Y$ uma aplicação suave. Se for possível estender g para todo o conjunto W, então $I_2(g, Z) = 0$ para qualquer subvariedade fechada Z, contida em Y, onde X e Z têm dimensão complementar.*

Demonstração. Seja $G\colon W \to Y$ uma extensão de g, tal que $\partial G = g$. Pelo Teorema 2.2.13, obtemos uma aplicação homotópica $F\colon W \to Y$, com $F \pitchfork Z$ e $\partial F \pitchfork Z$. Dessa forma, temos que $f = \partial F$ é homotópica a g e $I_2(g, Z) = \#f^{-1}(Z) \mod 2$. Como $F^{-1}(Z)$ é uma variedade compacta, unidimensional, com bordo, segue pelo Corolário 2.1.20, do Teorema 2.1.19, que $\#\partial F^{-1}(Z) = \#f^{-1}(Z)$ é um número par, assim, $I_2(g, Z) = \#f^{-1}(Z) \pmod 2 = 0$, como queríamos. □

Teorema 2.3.9. *Se $f\colon X \to Y$ é uma aplicação suave de uma variedade compacta X numa variedade conexa Y e $\dim X = \dim Y$, então $I_2(f, \{y\})$ é o mesmo para todo ponto y de Y.*

Demonstração. Dado $y \in Y$ arbitrário, deforme f homotopicamente, se necessário, para obter a transversalidade com $\{y\}$. Agora, pelo Teorema 1.3.24, podemos encontrar uma vizinhança U de y tal que a pré-imagem $f^{-1}(U)$ é dada pela união disjunta $V_1 \cup \ldots \cup V_m$ onde cada V_i é um aberto de X, aplicado difeomorficamente, por f, em U. Assim, $I_2(f, \{z\}) = m \mod 2$ para todo $z \in U$. Consequentemente, a função definida em Y por $y \mapsto I_2(f, \{y\})$ é localmente constante. Como Y é conexo, então essa aplicação é globalmente constante, como queríamos. □

Definição 2.3.10. *Ao valor $I_2(f, \{y\})$, dado no teorema acima, chama-se* grau módulo 2 *de f e denota-se por* $\text{grau}_2(f)$.

Observe que calcular o grau módulo 2 de uma aplicação suave f é uma tarefa relativamente simples, basta conhecer um y que seja valor regular da aplicação f e contar os pontos de sua pré-imagem (i.e. $\text{grau}_2(f) = \#f^{-1}(y), \mod 2$). Contudo, vale enfatizar que o grau módulo 2 de $f\colon X \to Y$ está definido somente quando X é uma variedade compacta e Y é conexo. Sempre que falarmos de grau módulo 2 de f ou quisermos calcular $\text{grau}_2(f)$, estaremos assumindo estas duas hipóteses.

Como $\text{grau}_2(f)$ está definido como um número de interseção, então seguem imediatamente os seguintes resultados:

Teorema 2.3.11. *Aplicações homotópicas possuem o mesmo grau módulo* 2.

Teorema 2.3.12. *Se $X = \partial W$ e $f\colon X \to Y$ pode ser estendida a toda variedade com bordo W, então* $\text{grau}_2(f) = 0$.

Apesar de bem simples, estes dois últimos teoremas serão bastante usados no próximo capítulo.

Capítulo 3

Teorema da Separação de Jordan-Brouwer

Degrau após degrau, estamos subido uma longa escada! Abordamos conceitos que envolvem Análise Real, Geometria Diferencial e Topologia, provamos diversos resultados ao longo do texto com o objetivo de construir essa escada necessária para alcançarmos nosso objetivo principal, provar o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Contudo, alguns degraus ainda faltam para chegarmos ao topo. Na próxima seção, completaremos a demonstração e chegaremos ao nosso objetivo.

3.1 Apresentação e Demonstração do Teorema da Separação de Jordan-Brouwer

O clássico Teorema da Curva de Jordan diz que toda curva fechada e simples, em $\mathbb{R}^2$, divide o plano em duas partes, "interior"e "exterior"da curva. Um resultado aparentemente óbvio, no entanto, conforme a complexidade da curva, percebemos que identificar essas duas regiões do plano pode ser mais difícil do que parece. (Observe a Figura 3.1.) Nesta seção, provaremos uma versão generalizada do Teorema da curva de Jordan para hiperfícies em $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, mostraremos o seguinte resultado: "O conjunto complementar de uma hiperfície X compacta em $\mathbb{R}^n$ é constituído por duas componentes conexas abertas, D_0 e D_1, onde o fecho $\overline{D_1}$ é variedade compacta com bordo $\partial\overline{D_1} = X$."

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade compacta e conexa, de dimensão $n-1$ e $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave (em particular, f pode ser a aplicação inclusão de uma hiperfície em $\mathbb{R}^n$). Desejamos estudar como f "envolve"X em $\mathbb{R}^n$. Para isso, tomamos um ponto qualquer z, de $\mathbb{R}^n$, não pertencente ao conjunto $f(X)$. Para ver como $f(x)$ se "enrola"em torno de z, quando x varia em X, analisaremos quantas vezes o vetor unitário

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}, \tag{3.1}$$

que indica a direção de z para $f(x)$, aponta para uma direção dada.

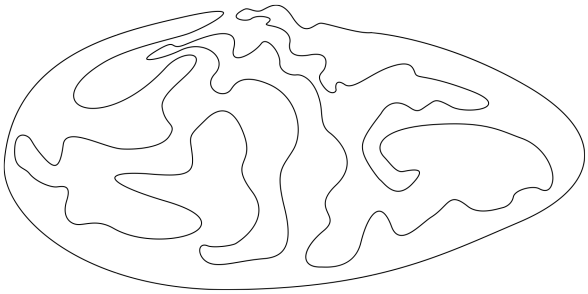

Figura 3.1: *Curva plana, fechada e simples.*

Sabemos, da Teoria de Interseção, que $u\colon X \to S^{n-1}$ atinge quase todos os vetores direcionais a mesma quantidade de vezes módulo 2, denominada $grau_2(u)$. Então aproveitando este invariante, damos a seguinte definição:

Definição 3.1.1. *Define-se o* número de voltas módulo 2 *de uma aplicação suave $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, em torno de um ponto z, de $\mathbb{R}^n$, que não pertence a $f(X)$, como $W_2(f,z) := \text{grau}_2(u)$.*

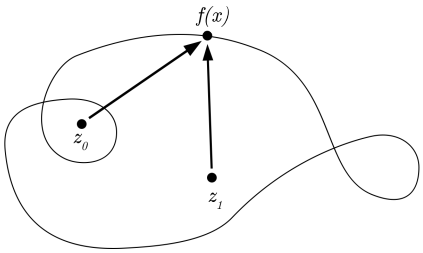

Figura 3.2: *Uma curva fechada dando uma volta em torno dos pontos z_0 e z_1.*

O número de voltas módulo 2 de uma aplicação suave $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ será usado para estabelecer o Teorema 3.1.14, mas, antes, alguns lemas desenvolverão o Teorema 3.1.2, enunciado abaixo, que terá grande importância para desenvolver essa generalização do Teorema da Curva de Jordan.

Teorema 3.1.2. *Suponha que X é o bordo de uma variedade compacta D com bordo e seja $F\colon D \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave que estende f, isto é, $\partial F = f$. Suponha que z é um valor regular de F, que não pertence à imagem de f. Então $F^{-1}(z)$ é um conjunto finito e $W_2(f,z) = \#F^{-1}(z)$ módulo 2. Em outras palavras, f envolve X em torno de z, tantas vezes quantas F atinge z, módulo 2.*

Os lemas a seguir ajudarão a construir a demonstração deste teorema.

Lema 3.1.3. *[GP74, Exercício 2.5.1] Se $z \notin F(D)$, então $W_2(f,z) = 0$.*

Demonstração. Como $z \notin F(D)$, considere a aplicação $\widetilde{u}\colon D \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$\widetilde{u}(x) = \frac{F(x) - z}{|F(x) - z|}.$$

Observe que $\tilde{u}$ é suave, pois $F(x)$ é suave e $|F(x)-z| \neq 0$ para todo $x \in D$. Como $\partial F = f$, então $\tilde{u}|_X = u$, onde u é a aplicação definida em (3.1), e $|f(x)-z| \neq 0$, pois $z \notin F(D)$. Assim, temos uma aplicação suave u, definida em $X = \partial D$, que pode ser estendida a aplicação suave $\tilde{u}\colon D \to \mathbb{R}^n$. Pelo Teorema 2.3.12, temos que $\text{grau}_2(u) = 0$, como queríamos. □

Lema 3.1.4. *[GP74, Exercício 2.5.2] Suponha que $F^{-1}(z) = \{y_1, \ldots, y_l\}$. Para cada $i = 1, \ldots, l$ e, em torno de cada y_i, seja B_i a imagem de uma bola em $\mathbb{R}^n$, via alguma parametrização de D (por simplicidade, também chamaremos B_i de bola). Suponha que as bolas B_i sejam disjuntas duas a duas e, também, disjuntas de $X = \partial D$. Se $f_i\colon \partial B_i \to \mathbb{R}^n$ é a restrição de F a ∂B_i, onde $i = 1, \ldots, l$, então $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_l, z)$, módulo 2.*

Demonstração. Primeiramente, observamos que os conjuntos B_i, dados no enunciado, existem. Com efeito, para cada $i = 1, \ldots, l$, tome-se ψ_i uma parametrização de X, em torno de y_i, tal que $\psi_i(0) = y_i$. Considere a bola aberta $\overline{B(0, \epsilon_i)}$, de centro 0 e raio ϵ_i, onde ϵ_i é suficientemente pequeno, para que $\overline{\psi_i(B(0, \epsilon_i))} \subset \text{int}(D)$, para todo $i = 1, \ldots, l$,e $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $i \neq j$, onde $B_i = \psi_i(B(0, \epsilon_i))$.

Seja

$$\hat{D} = D \setminus \bigcup_{i=1}^{l} B_i,$$

considere a aplicação $\hat{F} = F|_{\hat{D}}\colon \hat{D} \to \mathbb{R}^n$ e observe que $z \notin \hat{F}(\hat{D})$.

Afirmamos que

$$\partial \hat{D} = X \cup (\bigcup_{i=1}^{l} \partial B_i).$$

Com efeito, observe, primeiramente, que $X \subset \hat{D}$ e, para todo $i = 1, \ldots, n$, também temos $\text{fr}(B_i) \subset \hat{D}$, pois retiramos de D apenas as bolas abertas B_i e, pela Proposição 2.1.2, temos igualdade $\text{fr}(B_i) = \partial B_i$. Observe que se $x \in X$ ou $x \in \partial B_i$, então, por definição, $x \in \varphi(\partial U)$, onde $\varphi\colon U \to D$ é uma parametrização local de D, em torno de x e U é aberto de H^n. Entretanto, restringindo U a algum subconjunto aberto próprio, se necessário, contendo x, temos que φ é também uma parametrização de $\hat{D}$, pois é um difeomorfismo, logo leva abertos de H^n em abertos de $\hat{D}$. Dessa forma, temos que um dado ponto $x \in \hat{D}$, tal que $x \in X$ ou $x \in \partial B_i$, onde $i = 1, \ldots, l$, este é, também, um ponto pertencente a $\partial \hat{D}$, pois continua sendo imagem, por meio de uma parametrização local φ de $\hat{D}$, de um ponto $y \in \partial H^n$ qualquer. Dessa forma, temos que

$$X \cup (\bigcup_{i=1}^{l} \partial B_i) \subset \partial \hat{D}.$$

Por outro lado, como $\hat{D} = D \setminus \bigcup_{i=1}^{l} B_i$, temos que pontos de ∂H^n são, por definição de variedade com bordo, aplicados, em ∂B_i, ou em X, por meio de parametrizações locais, pois estes estão contidos em $\hat{D}$. Dessa forma temos que

$$\partial \hat{D} \subset X \cup (\bigcup_{i=1}^{l} \partial B_i).$$

Portanto, tendo provado as duas inclusões, provamos a afirmação.

Agora, considere a restrição de $\hat{F}$ ao bordo de $\hat{D}$, dada por,

$$\hat{f} = \hat{F}|_{\partial\hat{D}} = F|_{X\cup(\bigcup_{i=1}^{l}\partial B_i)}.$$

Como $z \notin \hat{F}(\hat{D})$, pelo Lema 3.1.3, temos que $W_2(\hat{f}, z) = 0$.

Agora, considere a aplicação $u\colon \partial\hat{D} \to S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{\hat{f}(x) - z}{|\hat{f}(x) - z|}$$

e considere também, para cada $i = 1, \ldots, l$, a aplicação $u_i\colon \partial B_i \to S^{n-1}$, dada por,

$$u_i(x) = \frac{f_i(x) - z}{|f_i(x) - z|}.$$

Observe que $u|_{\partial B_i} = u_i$ e que

$$u|_X(x) = \frac{f(x) - z}{|f(x) - z|}.$$

Com isso, temos

$$W_2(\hat{f}, z) = \#u^{-1}(z) = \#(u|_X)^{-1} + \#u_1^{-1}(z) + \ldots + \#u_l^{-1}(z) \mod 2$$

e desse modo, temos

$$0 = W_2(\hat{f}, z) = W_2(f, z) + W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_l, z) \mod 2.$$

Assim,

$$-W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_l, z) \mod 2$$

donde,

$$W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_l, z) \mod 2,$$

como desejado. □

Lema 3.1.5. *[GP74, Exercício 2.5.3] Se z é valor regular de F, então é possível escolher as bolas B_i, do lema anterior, tais que $W_2(f_i, z) = 1$.*

Demonstração. Como z é valor regular de F, então, para cada $i = 1, \ldots, l$, a aplicação $dF_{y_i}\colon T_{y_i}D \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva, mas observe que $\dim D = n$, pois D é a região delimitada pelo bordo $\partial D = X$ que tem dimensão $n - 1$. Com isso, temos que $\dim T_{y_i}D = n$ e, dessa forma, temos que dF_{y_i} é um isomorfismo.

Pelo Teorema 1.3.24, existe uma vizinhança U, de z, contida em $\mathbb{R}^n$, tal que $f^{-1}(U) = V_1 \ldots, V_l$, onde V_i é vizinhança de y_i e $f|_{V_i}\colon V_1 \to U$ é difeomorfismo. Para cada $i = 1, \ldots, l$, considere uma bola fechada $A_i \subset U$, centrada em z, tal que $y_i \in F^{-1}(A_i) \subset V_i$ e $F|_{F^{-1}(A)}\colon F^{-1}(A) \to A_i$ é difeomorfismo.

Pela Proposição 2.1.12, a restrição $f_i := F|_{\partial(F^{-1}()A_i)}$ é um difeomorfismo sobre a fronteira de A_i, ∂A_i. Como o conjunto ∂A_i é uma esfera contida em $\mathbb{R}^n$ e centrada em z, escrevemos $\partial A_i = rS^{n-1}(z)$, onde S^{n-1} é a esfera unitária, centrada em z e $r > 0$. Defina $B_i := F^{-1}(A_i \setminus \partial A_i)$ e observe que $\overline{B_i} = F^{-1}(A_i)$. Considere a aplicação $u_i\colon \partial B_i \to S^{n-1}$, dada por

$$u_i(x) = \frac{f_i(x) - z}{|f_i(x) - z|}.$$

Afirmamos que a aplicação $u_i \colon \partial B_i \to S^{n-1}$ é injetiva. Dados $a, b \in \partial B_i$, temos

$$f_i(a) = z + r_i \upsilon \text{ e } f_i(b) = z + r_i w,$$

com υ e w são vetores da esfera unitária S^{n-1}, centrada em 0. Agora,

$$\begin{aligned} u_i(a) = u_i(b) &\Leftrightarrow \frac{f_i(a) - z}{|f_i(a) - z|} = \frac{f_i(b) - z}{|f_i(b) - z|} \Leftrightarrow \frac{\upsilon}{|\upsilon|} = \frac{w}{|w|} \\ &\Leftrightarrow \upsilon = w \Leftrightarrow z + r_i \upsilon = z + r_i w \\ &\Leftrightarrow f_i(a) = f_i(b) \Leftrightarrow a = b, \end{aligned}$$

onde a terceira equivalência segue de υ e w serem vetores unitários de S^{n-1} e a última equivalência segue do fato de $f_i \colon \partial B_i \to \partial A_i$ ser difeomorfismo. Portanto, u_i é injetiva.

Por fim, da injetividade de u_i, segue que $\#u_i^{-1}(\{z\}) = 1 \mod 2$. Portanto, segue, por definição, que $W_2(f_i, z) = 1 \mod 2$ como desejado.

□

Finalmente, após demonstrar os três lemas, podemos dar início à demonstração do Teorema 3.1.2.

Demonstração do Teorema 3.1.2. Primeiramente, se $z \notin F(D)$, pelo Lema 3.1.3, temos $W_2(f, z) = 0$ e, obviamente, temos também que $F^{-1}(z) = \emptyset$. Logo um conjunto finito. Agora, se $F^{-1}(z) \neq \emptyset$, como z é valor regular de F e D é variedade compacta, o Teorema 1.3.24, garante que $F^{-1}(z)$ é um conjunto finito $\{y_i, \ldots, y_l\}$. Tomando, para cada $i = 1, \ldots, l$, uma bola B_i em torno de cada y_i, como no Lema 3.1.4, temos, por esse lema, que $W_2(f, z) = W_2(f_1, z) + \ldots + W_2(f_l, z) \mod 2$, onde $f_i \colon \partial B_i \to \mathbb{R}^n$ é a restrição de F a ∂B_i. Pelo Lema 3.1.5, temos $W_2(f_i, z) = 1$, donde $W_2(F, z) = l = \#F^{-1}(z) \mod 2$. Em todo caso, temos $F^{-1}(z)$ finito com $W_2(F, z) = \#F^{-1}(z) \mod 2$. □

Agora, assuma que X seja, de fato, uma hiperfície compacta e conexa em $\mathbb{R}^n$, isto é, uma variedade compacta e conexa de dimensão $n-1$. Se X realmente separa $\mathbb{R}^n$ em "interior"e "exterior", então X deve ser o bordo de uma variedade com bordo, compacta, n-dimensional, que a chamaremos de"interior". Neste caso, o Teorema 3.1.2 diz que se $z \in \mathbb{R}^n$ é um ponto qualquer, tal que $z \notin X$, então $W_2(X, z)$ deve ser 1 ou 0, dependendo se z está "dentro"ou "fora"de X.

Observação 3.1.6. *Aqui estamos considerando $W_2(X, z) = W_2(i_X, z)$, onde $i_X \colon X \to \mathbb{R}^n$ é a aplicação inclusão.*

Os lemas 3.1.7 a 3.1.13, a seguir, ajudam a reverter o argumento para a provar o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer. Consideramos, então, uma hiperfície X, compacta, contida em $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.1.7. *[GP74, Exercício 2.5.4] Seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Se x é um ponto qualquer de X e U é qualquer vizinhança de x em $\mathbb{R}^n$, então existe um ponto de U que pode ser conectado a z por uma curva que não intersecta X.*

Demonstração. De fato, seja S o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que, para toda vizinhança U de x, existe um ponto $y \in U$ conectado a z por um caminho que não intersecta X. Vamos verificar que S é não-vazio: Com efeito, dado $x \in X$, como X é hiperfície compacta de $\mathbb{R}^n$, para toda vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x existe um ponto $x_0 \in X$ tal que

$$d(x_0, z) = \inf\{d(x, z) \colon x \in X \cap U\}.$$

Para todo $t \in (0, 1)$, consideremos o caminho $c \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, definido por

$$c(t) = tx_0 + (1 - t)z.$$

Se existisse $t_0 \in (0, 1)$ tal que $c(t_0) \in X \cap U$, então teríamos

$$d(x_0, z) = d(x_0, c(t_0)) + d(c(t_0), z),$$

pela definição da curva c. Donde $d(c(t_0), z) < d(x_0, z)$, mas isto contradiz o fato de que $d(x_0, z) \leq d(c(t_0), z)$, pela definição de x_0. Como c é caminho contínuo, existe $s \in (0, 1)$ tal que $y := c(s) \in U$. Portanto, $x \in S$, logo S é não-vazio, como queríamos.

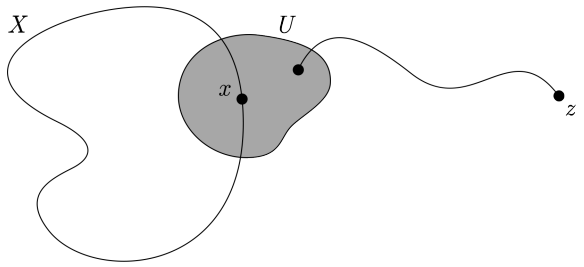

Figura 3.3: *Qualquer vizinhança U de x contém um ponto que pode ser conectado a z por um caminho que não intersecta X.*

□

Lema 3.1.8. *[GP74, Exercício 2.5.5] O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui no máximo duas componentes conexas.*

Demonstração. Dado $x \in X$, pelo Teorema da Forma Local das Imersões, existem parametrizações $\varphi \colon U \to X$ em torno de x, com $\varphi(0) = x$ e $\psi \colon V \to \mathbb{R}^n$ em torno de $i(x)$, com $\psi(0) = i(x)$, tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad i \quad} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\varphi}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi} \\ U & \xrightarrow{\quad i_{can} \quad} & V, \end{array}$$

onde $i \colon X \to \mathbb{R}^n$ é a inclusão de X em $\mathbb{R}^n$ e $i_{can} \colon U \to V$ é a imersão canônica, $i_{can}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

Consideremos a bola aberta $B(0, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que se tenha $B(0, \epsilon) \subset V$. Consideremos as duas componentes conexas de $B(0, \epsilon) \setminus \{x_n = 0\}$

$$C_+ = B(0,\epsilon) \cap \{x_n > 0\} \quad \text{e} \quad C_- = B(0,\epsilon) \cap \{x_n < 0\}.$$

Definimos $B := \psi(B(0,\epsilon))$, $B_+ := \psi(C_+)$ e $B_- := \psi(C_-)$. Observamos que B_+ e B_- são conexos e $B \setminus X = B_+ \cup B_-$. Fixamos $x_0 \in B_+$ e $x_1 \in B_-$.

Agora, dado $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, pelo Lema 3.1.7, existe $y \in B$ que se conecta a z por uma curva que não intersecta X. Agora, o ponto y também conecta-se a x_0 ou a x_1 por uma curva que não intersecta X, pois o ponto y é um ponto pertencente a B_+ ou a B_-. Dessa forma temos, por justaposição de curvas que z conecta-se a x_0, ou a x_1, por um caminho que não intersecta X. Logo $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui, no máximo, duas componentes conexas, como queríamos. □

Lema 3.1.9. *[GP74, Exercício 2.5.6] Se z_0 e z_1 pertencem à mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus X$, então $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.*

Demonstração. Sejam z_0 e z_1 pontos da mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus X$ e seja $i_X \colon X \to \mathbb{R}^n$, a aplicação de inclusão. Considere as aplicações $u_0 \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u_0(x) = \frac{i_X(x) - z_0}{|i_X(x) - z_0|} = \frac{x - z_0}{|x - z_0|}$$

e $u_1 \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u_1(x) = \frac{i_X(x) - z_1}{|i_X(x) - z_1|} = \frac{x - z_1}{|x - z_1|}.$$

Observe que u_0 e u_1 estão bem definidas, pois $z_0, z_1 \notin X$. Como z_0 e z_1 pertencem à mesma componente conexa C, considere uma curva

$$\begin{aligned} z \colon [0,1] &\to C \\ t &\mapsto z(t), \end{aligned}$$

cuja imagem pertence a essa componente e $z(0) = z_0$ e $z(1) = z_1$. Considere $u_t \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u_t(x) = \frac{x - z(t)}{|x - z(t)|}.$$

A aplicação $H \colon X \times [0,1] \to S^{n-1}$, dada por $H(x,t) = u_t(x)$ é uma homotopia entre u_0 e u_1. Assim, temos, pelo Teorema 2.3.11, que $\text{grau}_2(u_0) = \text{grau}_2(u_1)$ e, dessa forma, segue da definição que $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$, como queríamos. □

Lema 3.1.10. *[GP74, Exercício 2.5.7] Dado um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e um vetor direcional $\vec{v} \in S^{n-1}$, considere o raio r, partindo de z, na direção de $\vec{v}$, dado por*

$$r = \{z + t\vec{v} \colon t \geq 0\}.$$

O raio r é transversal a X se, e somente se $\vec{v}$ é valor regular da aplicação direção $u \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{i_X(x) - z}{|i_X(x) - z|} = \frac{x - z}{|x - z|}.$$

Em particular, quase todo raio, partindo de z, intersecta X transversalmente.

Demonstração. Seja $i_X\colon X \to \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão e considere as aplicações $u\colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u(x) = \frac{i_X(x) - z}{|i_X(x) - z|} = \frac{x - z}{|x - z|},$$

onde $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e, $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{z\} \to S^{n-1}$, dada por

$$g(y) = \frac{y - z}{|y - z|}.$$

Observe que $g \circ i_X = u$ e, observe também que, como $g\colon \mathbb{R}^n \setminus \{z\} \to S^{n-1}$, podemos expressar o raio r da seguinte forma:

$$r = g^{-1}(\{\vec{v}\}) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon g(x) = \vec{v}\}.$$

O raio r ser transversal a X é equivalente a $g^{-1}(\{\vec{v}\})$ ser transversal à inclusão i_x. Pelo Teorema 1.4.7, $i_X \pitchfork g^{-1}(\{\vec{v}\})$ se, e somente se, $g \circ i_X \pitchfork \{\vec{v}\}$, ou seja, $u \pitchfork \{\vec{v}\}$.

Para provar o resultado enunciado, basta verificar que $u \pitchfork \{\vec{v}\}$ se, e somente se, $\vec{v}$ é valor regular de $u\colon X \to S^{n-1}$. Como as duas afirmações são equivalentes a

$$Im(du_x) + T_w\{\vec{v}\} = T_w S^{n-1},$$

para todo $x \in X$ e $w = u(x)$, o resultado segue.

Por fim, pelo Teorema de Sard, quase todo $\vec{v}$ é valor regular da aplicação u, portanto quase todo raio partindo de z é transversal a X, como queríamos. □

Lema 3.1.11. *[GP74, Exercício 2.5.8] Suponha que r é o raio partindo de z_0 que intersecta X transversalmente em um conjunto não vazio, necessariamente finito. Suponha que z_1 é qualquer outro ponto de r, mas não pertence a X. Se l o número de vezes que r intersecta X entre z_0 e z_1 então, $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2$.*

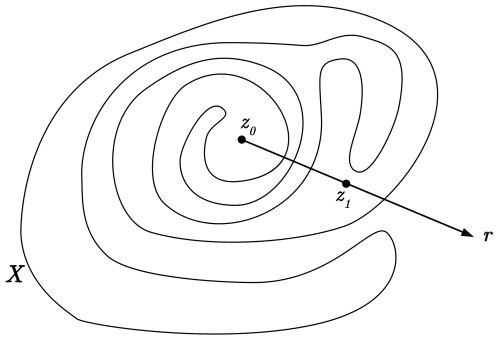

Figura 3.4: $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + 3 \mod 2$.

Demonstração. Seja r o raio partindo de z_0, dado por

$$r = \{z_0 + t\vec{v}\colon t \geq 0\}.$$

O conjunto $r \cap X$ é um conjunto finito de pontos $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Por hipótese z_1 é um ponto de r que não pertence a X, então $z_1 = z_0 + t_0\vec{v}$, para algum $t_0 \geq 0$. Além disso, existem l pontos de $r \cap X$, $0 \leq l \leq m$, entre z_0 e z_1. Considere as aplicações $u_0 \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u_0(x) = \frac{x - z_0}{|x - z_0|}$$

e $u_1 \colon X \to S^{n-1}$, dada por

$$u_1(x) = \frac{x - (z_0 + t_0\vec{v})}{|x - (z_0 + t_0\vec{v})|}.$$

Observe que $u_0 = u_1$, se $t_0 = 0$. Como r é transversal a X temos, pelo Lema 3.1.10, que $\vec{v}$ é valor regular de u_0 e de u_1. Assim, temos

$$W_2(X, z_0) = \#u_0^{-1}(\{\vec{v}\}) \mod 2 \quad \text{e} \quad W_2(X, z_1) = \#u_1^{-1}(\{\vec{v}\}) \mod 2.$$

O conjunto $u_1^{-1}(\{\vec{v}\})$ está contido no conjunto $u_0^{-1}(\{\vec{v}\})$, pois todos os valores regulares de u_1, são valores regulares de u_0, uma vez que o mesmo raio que parte de z_0 e intersecta X transversalmente, também intersecta X transversalmente a partir de z_1, na direção de $\vec{v}$. Contudo, ainda estão contidos em $u_0^{-1}(\{\vec{v}\})$ os pontos, da interseção $r \cap X$, que estão entre z_0 e z_1, pois r intersecta X transversalmente nesses pontos. Assim, temos

$$\#u_0^{-1}(\{\vec{v}\}) = \#u_1^{-1}(\{\vec{v}\}) + l$$

onde l é a quantidade de vezes que r intersecta X entre z_0 e z_1, e como $\vec{v}$ é valor regular de u_0 e u_1, temos

$$W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \mod 2,$$

como desejado.

□

Lema 3.1.12. *[GP74, Exercício 2.5.9] O conjunto $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui exatamente duas componentes conexas, a saber:*

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \colon W_2(X, z) = 0\} \quad e \quad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \colon W_2(X, z) = 1\}.$$

Demonstração. De fato, já sabemos do Lema 3.1.8 que $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui, no máximo, duas componentes conexas e sabemos do Lema 3.1.9 que dois pontos x e y pertencentes à mesma componente conexa possuem o mesmo número de voltas. Assim, se $z_0 \in D_0$ e $z_1 \in D_1$, então estes não podem estar na mesma componente conexa, pois $W_2(X, z_0) = 0$ e $W_2(X, z_1) = 1$.

Agora, vamos provar que, de fato, D_0 e D_1 são não-vazias. Com efeito, dado $z_o \in \mathbb{R}^n \setminus X$, considere o raio r, partindo de z_0 e intersectando X transversalmente, cuja existência é garantida pelo Lema 3.1.10. Seja y um outro ponto de r, mas que não pertence a X, tal que entre z e y exista apenas um ponto $x \in r \cap X$. Pelo Lema 3.1.11, temos que $W_2(X, z) = W_2(X, y) + 1 \mod 2$. Com isso, temos que z e y estão em componentes conexas distintas e, além disso, temos que se $W_2(X, z)$ é par, então $W_2(X, y)$ é ímpar e vice-versa. Dessa forma, temos que D_0 e D_1 são não-vazias.

Sejam C_0, a componente conexa de z_0 e C_1, a componente conexa de z_1, contidas em $\mathbb{R}^n \setminus X$. Pelo Lema 3.1.9, temos que $D_0 \subseteq C_0$ e $D_1 \subseteq C_1$. Por outro lado, considere, $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e C sua componente conexa, pelo Lema 3.1.8, temos que $C = C_0$ ou $C = C_1$, mas observe que $C_0 \subseteq D_0$ e $C_1 \subseteq D_1$. Dessa forma, temos que D_0 e D_1 são as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus X$, como queríamos.

Portanto, essas são precisamente as duas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus X$. □

Lema 3.1.13. *[GP74, Exercício 2.5.10] Se $z \in \mathbb{R}^n$ é suficientemente grande, em norma, então $W_2(X, z) = 0$.*

Demonstração. Como X é compacta, X está contida numa bola fechada, centrada na origem e de raio $M > 0$. Denotaremos essa bola por $B := B[0, M]$.

Seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus B$, ou seja $|z| > M$. Aqui estamos considerando uma norma no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Consideremos $y = z/|z|$ e vejamos que $u_z^{-1}(y) = \emptyset$, onde $u_z \colon X \to S^{n-1}$ é dada por

$$u_z(x) = \frac{x - z}{|x - z|}.$$

Suponhamos, com vista a uma contradição, que $u_z(x) = y$, para algum $x \in X$. Primeiro, observemos que, como $X \subset B$, então $|x| < M$. Agora observemos, também, que

$$\frac{x - z}{|x - z|} = \frac{z}{|z|},$$

ou seja,

$$x = z\left(1 + \frac{|x - z|}{z}\right).$$

Logo,

$$|x| = \left|z\left(1 + \frac{|x - z|}{|z|}\right)\right| = |z|\left(1 + \frac{|x - z|}{|z|}\right),$$

como $|z| > M$ e $1 + |x - z|/|z| > 1$, temos $|x| > M$. Disto, obtivemos uma contradição! Dessa forma, temos que $u_z^{-1}(y) = \emptyset$ e, portanto y é trivialmente valor regular de u_z. Assim, temos,

$$W_2(X, z) = \#u_z^{-1}(y) = 0 \mod 2,$$

como queríamos.

□

Teorema 3.1.14. *[GP74, Exercício 2.5.11] [Teorema da Separação de Jordan-Brouwer] O conjunto complementar de uma hiperfície X compacta em $\mathbb{R}^n$ é constituído por duas componentes conexas abertas, D_0 e D_1, onde $\overline{D_1}$ é variedade compacta com bordo $\partial\overline{D_1} = X$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.12, temos que $\mathbb{R}^n \setminus X$ possui exatamente duas componentes conexas, a saber:

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \colon W_2(X, z) = 0\} \quad \text{e} \quad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n \setminus X \colon W_2(X, z) = 1\}.$$

Afirmamos que os conjuntos D_0 e D_1 são abertos. De fato, seja $z_0 \in D_0$, pelo Lema 3.1.7, dados $x \in X$ e uma vizinhança U, de x, contida em $\mathbb{R}^n$, existe $z \in U$ tal que z_0 se liga a z por uma curva que não intersecta X e, com isso, temos que z_0 e z estão na mesma componente conexa e, assim, segue pelo Lema 3.1.9, que

$$W_2(X, z) = W_2(X, z_0) = 0.$$

Como $z \notin X$ e X é compacta, a distância $d(z, X) > 0$ e tomando $0 < \epsilon < d(z, X)$, de modo que a bola $B(z, \epsilon)$, aberta em $\mathbb{R}^n$, esteja contida em U, temos, novamente pelo Lema 3.1.9, que todo ponto $y \in B(z, \epsilon)$ é tal que $W_2(X, y) = 0$. Dessa forma, temos que $B(z, \epsilon) \subset D_0$, logo o conjunto D_0 é aberto. Para o conjunto D_1, um procedimento totalmente análogo, mostra que este também é aberto. Portanto, os conjuntos D_0 e D_1 são abertos.

Agora, vamos mostrar que o conjunto $D_1 \cup X$ é compacto. Com efeito, $D_1 \cup X$ é fechado, pois seu complementar, em $\mathbb{R}^n$, é a componente conexa D_0 e esta, é aberta, como acabamos de ver. Para mostrar que $D_1 \cup X$ é limitado, basta mostrar que D_1 é limitado, pois temos, por hipótese que X é compacto, logo limitado. Suponha com vista a uma contradição que D_1 não seja limitado. Pelo Lema 3.1.13, tome $z_1 \in D_1$, suficientemente grande, em norma, tal que $W_2(X, z_1) = 0$. Isto é uma contradição, pois todo ponto $z_1 \in D_1$ é tal que $W_2(X, z_1) = 1$. Dessa forma, temos que D_1 é limitado e $D_1 \cup X$ também é limitado, pois é a união de conjuntos limitados. Portanto $D_1 \cup X$ é compacto.

O próximo passo é mostrar que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$. Para isso, como $\overline{D_1} \subset D_1 \cup X$ e $D_1 \subset \overline{D_1}$, é suficiente mostrar que todo ponto $x \in X$ é limite de alguma sequência $\{z_k\}$ de pontos em D_1. Com efeito, dados $z_0 \in D_1$, $x \in X$ e uma bola aberta $B(x, \epsilon_1)$, de centro x e raio ϵ_1, contida em $\mathbb{R}^n$, existe, pelo Lema 3.1.7, um ponto $z_1 \in D_1 \cap B(0, \epsilon_1)$, que se conecta a z_0 por uma curva que não intersecta X. Tomando uma bola aberta $B(x, \epsilon_2)$, de centro x e raio ϵ_2, em $\mathbb{R}^n$, contida em $B(x, \epsilon_1)$, o Lema 3.1.7 garante que existe $z_2 \in D_1 \cap B(x, \epsilon_2)$, tal que z_2 se conecta a z_0, por meio de uma curva que não intersecta X. Mais geralmente, numa bola aberta $B(x, \epsilon_k)$ de x, com raio ϵ_k, estritamente contida em $B(x, \epsilon_{k-1})$, com $\lim_k \epsilon_k = 0$, existe $z_k \in D_1 \cap B(x, \epsilon_k)$, tal que z_k se conecta a z_0, por meio de uma curva que não intersecta X. Dessa forma, temos que $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ forma uma sequência de pontos em D_1, cujo limite $\lim z_k = x$. Portanto $\overline{D_1} = D_1 \cup X$.

Finalmente, vamos mostrar que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$ é uma variedade com bordo $\partial \overline{D_1} = X$. Seja $x \in \overline{D_1}$. Se $x \in D_1$, sabemos, pela Proposição 1.1.13 que D_1 é uma subvariedade, sem bordo, de $\mathbb{R}^n$, com isso, basta tomar uma parametrização $\varphi \colon W \subset \mathbb{R}^n \to V \subset D_1$, onde W é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^n$ e V é uma vizinhança de x, em X.

Agora, se $x \in X$, como X é hiperfície, temos que X é uma variedade de dimensão $n - 1$, contida em $\mathbb{R}^n$. Pelo Teorema da Forma Local das Imersões, temos que existe uma parametrização $\psi \colon B \to U$, onde B é uma bola centrada em $0 \in \mathbb{R}^n$ e com raio $\epsilon > 0$ e $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma vizinhança de x, tal que se $\psi^{-1} = (x_1, \ldots, x_n)$, então $\psi^{-1}|_{U \cap X} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.

Afirmamos que U é "separado"em dois conjuntos, um contido em D_0 e o outro contido em D_1. Com efeito, seja $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Pelo Lema 3.1.7, existe $y \in U$ tal que z e y estão conectados por uma curva que não intersecta X. Logo, z e y pertencem a mesma componente conexa e, pelo Lema 3.1.9, temos que $W_2(X, z) = W_2(X, y)$. Dessa forma, temos que os dois pontos y e z pertencem a D_0 ou pertencem a D_1. Como isto vale para qualquer $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e, provamos

no Lema 3.1.12 que D_0 e D_1 são não-vazias, temos provada a nossa afirmação.

Consideremos os conjuntos

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \text{ e } \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))).$$

Como $B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))$ é conexo e ψ é contínua, o conjunto $\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})))$ é conexo e, ou está totalmente contido em D_0, ou está totalmente contido em D_1. Analogamente, temos que o conjunto $\psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})))$ é conexo e, ou está totalmente contido em D_0, ou está totalmente contido em D_1. Além disso,

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \cap \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) = \emptyset$$

caso contrário, contrariaria a sobrejetividade do difeomorfismo ψ.

Suponhamos que

$$\psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_1 \text{ e } \psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_0.$$

Dessa forma, temos que $\psi|_{B \cap H^n}$ é uma parametrização de $\overline{D_1}$, em torno de x. Agora, se ocorrer o contrário, isto é,

$$\psi(B \cap (-H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_1 \text{ e } \psi(B \cap (H^n \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))) \subset D_0$$

temos que $\psi|_{B \cap -H^n}$ é uma parametrização local, em torno de x.

Portanto, temos que $\overline{D_1} = D_1 \cup X$ é uma variedade, compacta, com bordo $\partial\overline{D_1} = X$, como queríamos. □

3.2 Método para Determinar se um Dado Ponto de $\mathbb{R}^n$ Está na Região Interior a uma Hiperfície de $\mathbb{R}^n$

O Teorema de Jordan-Brouwer garante que o complementar da hiperfície X, em $\mathbb{R}^n$, divide o plano em duas componentes conexas D_0, a parte externa, e D_1, a parte interna da região delimitada pela hiperfície X. Observamos, também, que essas componentes podem ser distinguidas, uma da outra, de acordo com o índice de rotação em cada um de seus pontos. (O índice de rotação é igual em todos os pontos de cada componente conexa.) Com isso, notamos que o Teorema da Separação de Jordan-Brouwer oferece também, uma forma simples, porém bela, para determinar se um ponto qualquer de $\mathbb{R}^n \setminus X$ pertence a D_0 ou D_1. O teorema abaixo apresentará esse método.

Corolário 3.2.1. *[GP74, Exercício 2.5.12] Dado um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, se r é um raio partindo de z, transversal à hiperfície X, então z pertence à região interior a X (isto é, z pertence a D_1) se, e somente se, r intersecta X em um número ímpar de pontos (Observe a Figura 3.5).*

Demonstração. Sejam $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e $r = \{z + t\vec{v} \colon t \geq 0\}$ um raio, partindo de z, transversal a X, cuja existência é garantida no Lema 3.1.10. Como r é transversal a X, temos pelo Teorema 1.4.5 que $\operatorname{codim}(r \cap X) = \operatorname{codim} r + \operatorname{codim} X = n - 1 + 1 = n$ e, como X é compacto e r é fechado, temos que $r \cap X$ é

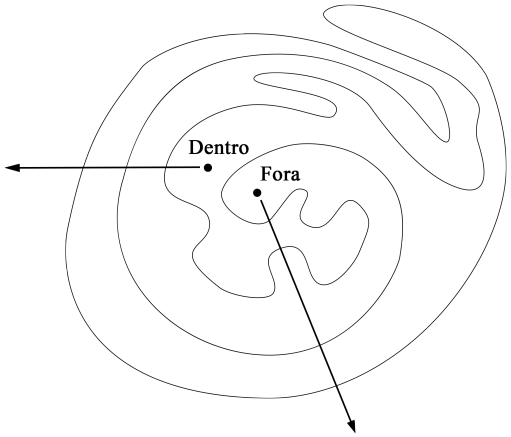

Figura 3.5: *O raio partindo do ponto que está na região interior a X intersecta X três vezes e o raio que parte do ponto que está na região exterior a X intersecta X quatro vezes.*

uma variedade compacta 0-dimensional e, portanto, $r \cap X$ é um conjunto finito de pontos $\{y_1, \ldots, y_m\}$, onde $m := r \cap X$.

Definimos $D := \max\{d(y_i, z) \colon i = 1, \ldots, m\}$. Consideremos $y \in r$ tal que $d(z, y) > D$ e com norma $|y|$ suficientemente grande, de modo que, pelo Lema 3.1.13, tenhamos $W_2(X, y) = 0$. Como $d(y, z) > D$, o número de pontos de $r \cap X$ entre y e z é m. Dessa forma, temos, pelo Lema 3.1.11, que

$$\begin{aligned} W_2(X, z) &= W_2(X, y) + m \mod 2 \\ &= 0 + m \mod 2 \\ &= m \mod 2, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade se dá pelo fato de que $d(z, y) > D$. Portanto, temos que

$$W_2(X, z) = m \mod 2. \tag{3.2}$$

Dessa forma, temos que se $z \in D_1$, o Lema 3.1.12 garante que $W_2(X, z) = 1$, com isso, temos pela equação (3.2) que m é ímpar. Reciprocamente, se m é ímpar, temos que $m = W_2(X, z) \equiv 1 \mod 2$, e portanto $z \in D_1$, como queríamos. □

Observação 3.2.2. *Aqui, o símbolo " $\equiv$ " representa a "congruência módulo 2."*

Observação 3.2.3. *Também temos, diretamente do Corolário 3.2.1, que se $x \in D_0$, então $m = W_2(X, z) \equiv 0 \mod 2$, isto é, m é par e dessa forma, temos que para sabermos se um ponto $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ pertence a D_1, ou não, basta contar quantas vezes o raio r, partindo de z e transversal a X, intersecta X transversalmente.*

3.3 O Teorema de Borsuk-Ulam

Usaremos agora, nossa teoria e o conceito de número de voltas apresentado na Seção 3.1 para dar uma demonstração de um resultado bastante conhecido na topologia, apresentado pelos matemáticos poloneses Karol Borsuk (1905 – 1982) e Stanislaw Marcin Ulam (1909 – 1984).

Lema 3.3.1. *[GP74, Exercício 2.4.8] Se $f\colon S^1 \to S^1$ é uma aplicação suave, então existe uma aplicação suave $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(\cos t, \mathrm{sen}t) = (\cos(g(t)), \mathrm{sen}(g(t))$ e $g(2\pi) = g(0) + 2\pi q$, para algum q inteiro. Além disso,* $\mathrm{grau}_2(f) = q$, *mod* 2.

Demonstração. Seja $f\colon S^1 \to S^1$ uma aplicação suave. Definimos a aplicação $h\colon [0, 2\pi] \to S^1$ como $h(t) = f(\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. Consideremos a aplicação de recobrimento $\pi\colon \mathbb{R} \to S^1$ definida por $t \mapsto (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. Pela propriedade de levantamento único de caminhos (v., por exemplo, [Lim12a, Proposição 6, p.129]), existe uma aplicação $\hat{g}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ \hat{g} = h$ e $\hat{g}(2\pi) - \hat{g}(0) = 2\pi q$, com q inteiro. Estendemos a aplicação $\hat{g}$ a uma aplicação $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(t + 2\pi) = g(t) + 2\pi$.

Vejamos agora que $\mathrm{grau}_2(f) = q$, mod 2. Seja $y \in S^1$. Vamos estudar o conjunto $f^{-1}(\{y\})$. Consideremos $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\pi(y_0 + 2k\pi) = y$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Como g é extensão de $\hat{g}$ tal que $g(t+2\pi) = g(t)+2\pi$ e $\hat{g}(2\pi) = \hat{g}(0)+2\pi q$, segue que $\#g^{-1}(\{y_0 + 2\pi k\}) = q$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\pi_0(g^{-1}(\{y_0\}))$ é um conjunto com q elementos e $\pi_0(g^{-1}(y_0)) = \pi_0(g^{-1}(y_0 + 2k\pi))$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde $\pi_0\colon [0, 2\pi] \to S^1,\ t \mapsto (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$. Logo, $f^{-1}(\{y\}) = \pi_0(g^{-1}(y_0))$ tem q elementos, donde $\mathrm{grau}_2(f) = q$, mod 2. □

Teorema 3.3.2 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Seja $f\colon S^k \to \mathbb{R}^{k+1}$ uma aplicação suave, cuja imagem não contem a origem. Se f satisfaz a condição de simetria, isto é, $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in S^k$, então $W_2(f, 0) = 1$.*

Em suma, qualquer aplicação f simétrica em torno da origem, deve envolvê-la num número ímpar de voltas.

Demonstração. Usaremos o princípio da indução sobre o expoente k.

Se $k = 1$, é suficiente mostrar que se $f\colon S^1 \to S^1$ é uma aplicação antípoda, então $\mathrm{grau}_2(f) = 1$. Com efeito, seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a aplicação definida no Lema 3.3.1, dada por $g(t) = tq$, onde $q \in \mathbb{Z}$ é ímpar. Dado $s \in \mathbb{R}$, observemos que $g(s + \pi) = g(s) + \pi q$. Vimos no exemplo 1.5.2, que, como $n = 1$, ímpar, aplicação f é homotópica a aplicação i_{S^1}. Agora, aplicando o Lema 3.3.1 a i_{s^1} e considerando a aplicação g que acabamos de redefinir, temos $\mathrm{grau}_2(i_{s^1}) = 1$, mas como f e i_{s^1} são homotópicas, pelo Teorema 2.3.11, temos que $\mathrm{grau}_2(i_{s^1}) = \mathrm{grau}_2(f) = 1$.

Agora, assumiremos que o Teorema é válido para $k-1$. Seja $f\colon S^k \to \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$. Consideremos S^{k-1} o equador da esfera S^k, mergulhado na mesma, por uma aplicação $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (x_1, \ldots, x_k, 0)$. A ideia para esta demonstração é usar uma argumento parecido ao usado para demonstrar o Corolário 3.2.1, na Seção 3.2. Vamos calcular $W_2(f, 0)$ contando quantas vezes a aplicação f intersecta uma uma reta r, em $\mathbb{R}^{k+1}$. Escolhendo r disjunta da imagem do equador, podemos usar a hipótese de indução para mostrar que o equador "envolve" r um número ímpar de vezes. Finalmente, podemos calcular a interseção de f com r, uma vez que conhecemos o comportamento de f no equador de S^{k+1}.

Denotemos a restrição de f ao equador S^{k-1} por g. Escolhendo uma reta r adequada, podemos usar o Teorema de Sard para escolher um vetor unitário $\vec{v}$, tal que $\vec{v}$ é valor regular de ambas as aplicações

$$\tfrac{g}{|g|}\colon S^{k-1} \to S^k \text{ e } \tfrac{f}{|f|}\colon S^k \to S^k$$

Da simetria, temos que $-\vec{v}$ também é valor regular de ambas as aplicações. Comparando as dimensões, vemos que a regularidade para da aplicação $g/|g|$ significa, simplesmente, que $g/|g|$ nunca atinge $\vec{v}$ ou $-\vec{v}$. consequentemente, $g/|g|$ nunca intersecta a reta $r := t\vec{v}$, onde $t \in \mathbb{R}$, arbitrário. A regularidade da aplicação $f/|f|$, no vetor $\vec{v}$ significa, pelo Teorema 1.4.7, $f \pitchfork r$.

Agora, por definição,

$$W_2(f,0) = \operatorname{grau}_2\left(\frac{f}{|f|} = \#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v})\right) \mod 2.$$

Além disso, $f/|f|$ atinge $+\vec{v}$ a mesma quantidade de vezes que atinge $-\vec{v}$, devido a sua simetria. Assim, temos

$$\#\left(\frac{f}{|f|}\right)^{-1}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(r).$$

Podemos calcular este resultado no hemisfério superior, apenas. Seja f_+ a restrição de f ao hemisfério superior $S^k_+ = \{(x_1,\ldots,x_{k+1}) \in S^k\colon x_{k+1} \geq 0\}$. Pela simetria de f e pelo fato de que a imagem de do equador de S^k, por f não intersecta r, e sabemos que

$$\#f_+^{-1}(r) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(r).$$

Temos, assim, que $W_2(f,0) = \#f_+^{-1}(r) \mod 2$.

A vantagem desta última expressão para $W_2(f,0)$, é que o hemisfério superior é uma variedade com bordo $\partial S^k_+ = S^{k-1}$, assim, poderemos usar a hipótese de indução. Entretanto, as dimensões não estão corretas para aplicar a hipótese de indução à aplicação $g\colon S^{k-1} \to \mathbb{R}^{k-1}$. Seja V o complemento ortogonal de r e seja $\pi\colon \mathbb{R}^{k+1} \to V$ a projeção ortogonal. Como g é simétrica e π é linear, a composição $\pi \circ g\colon S^{k-1} \to V$ é simétrica, além disso, $\pi \circ g$ nunca se anula pois g não intersecta $\pi^{-1}(0) = r$. Identificando o espaço vetorial k-dimensional V com $\mathbb{R}^k$ e aplicando a hipótese de indução, temos $W_2(\pi \circ g, 0) = 1$.

Agora, como $f_+ \pitchfork r$,

$$\pi \circ f_+\colon S^k_+ \to V$$

é transversal a $\{0\}$. Assim, pelo Teorema 3.1.2, temos

$$W_2(\pi \circ g, 0) = \#(\pi \circ f)^{-1}(0).$$

Entretanto,

$$(\pi \circ f)^{-1}(0).$$

Dessa forma, temos que

$$W_2(f,0) = \#f_+^{-1}(r) = W_2(\pi \circ g, 0) = 1 \mod 2,$$

como queríamos. □

Uma observação geométrica muito simples resulta a partir da demonstração do Teorema de Borsuk-Ulam:

Corolário 3.3.3. *Se $f\colon S^k \to R^{k-1} \setminus \{0\}$ em torno da origem, então f intersecta toda reta r que passa pela origem, pelo menos uma vez.*

Demonstração. Se f não atingir r, então basta que usemos esta reta na demostração do Teorema de Borsuk-Ulam e obteremos a seguinte contradição

$$W_2(f, 0) = \frac{1}{2}\#f^{-1}(r) = 0.$$

□

Corolário 3.3.4. *Quaisquer k funções suaves $f_1, \ldots, f_k$ definidas em S^k que satisfazem a condição de simetria, isto é, $f_i(-x) = -f_i(x)$, com $i = 1, \ldots, k$, devem possuir um zero em comum.*

Demonstração. Supondo que não exista esse valor comum onde todas as f_i se anulam, $i = 1, \ldots, n$, apliquemos o corolário anterior à aplicação $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x), 0)$, tomando o eixo x_{k+1} como sendo a reta r. □

Referências Bibliográficas

[Bro12] L.E.J. Brouwer, *Beweis des jordanschen satzes für n-dimensionalen raum*, Niedersächsche Staats-und Universitätsbibliothek Göttigen, 1912.

[dC05] M.P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, SBM, 2005.

[GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Prentice Hall, 1974.

[Jor09] C. Jordan, *Cours d'analyse de l'ecole polytechnique*, Gauthier-Villars, 1909.

[Lee05] J.M Lee, *Introduction to smooth manifolds*, University of Washington, Department of Mathematics, 2005.

[Lim77] E.L. Lima, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, IMPA, 1977.

[Lim11] ———, *Variedades diferenciáveis*, IMPA, 2011.

[Lim12a] ———, *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, IMPA, 2012.

[Lim12b] ———, *Álgebra linear*, IMPA, 2012.

[Lim16a] ———, *Análise real*, vol. 2, IMPA, 2016.

[Lim16b] ———, *Curso de análise*, vol. 2, IMPA, 2016.

[Mar05] F.C.V. Marinho, *Teorema da separação de jordan-brouwer-alexander*, UFRJ, 2005.

[Mil65] J.W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, 1965.

[Veb05] O. Veblen, *Theory of plane curvesin non-metrical analysis situs*, vol. 6, American Mathematics Society, 1905.