

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Brayan Cuzzuol Ferreira

DINÂMICA HAMILTONIANA SIMPLÉTICA:
CAPACIDADE DE HOFER-ZEHNDER

VITÓRIA
2019

Brayan Cuzzuol Ferreira

DINÂMICA HAMILTONIANA SIMPLÉTICA:
CAPACIDADE DE HOFER-ZEHNDER

Dissertação de mestrado apresentada
ao PPGMAT como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marta Jakubowicz Batoréo

VITÓRIA
2019

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

C961d Cuzzuol Ferreira, Brayan, 1995-
Dinâmica Hamiltoniana Simplética: Capacidade de Hofer
Zehnder / Brayan Cuzzuol Ferreira. - 2019.
104 f. : il.

Orientadora: Marta Jakubowicz Batoréo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria simplética. 2. Sistemas hamiltonianos. 3.
Geometria diferencial. I. Jakubowicz Batoréo, Marta. II.
Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências
Exatas. III. Título.

CDU: 51



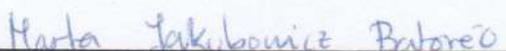
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
Centro de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

“Dinâmica Hamiltoniana Simplética: Capacidade de Hofer-Zehnder”

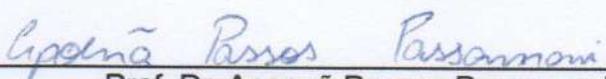
Brayan Cuzzuol Ferreira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

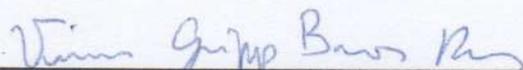
Aprovada em 20/09/2019 por:



Prof^a Dr^a Marta Jakubowicz Batoréo - UFES



Prof. Dr. Apoenã Passos Passamani - UFES



Prof. Dr. Viricius Gripp Ramos - IMPA

Dedicatória

Dedico este trabalho à Gécica, minha esposa, e aos meus pais, Carlos e Linda, pelo apoio e incentivo em todas as minhas escolhas e decisões.

Agradecimentos

Agradeço à Deus e a maravilhosa oportunidade de viver. A respeito desta conquista, não posso deixar de agradecer à minha orientadora, Marta Batoréo, e aos professores do programa de pós graduação que, hoje, são como verdadeiros amigos para mim. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos durante o curso de Mestrado. Contribuindo de forma indireta, também agradeço à minha família e aos meus colegas do Mestrado principalmente pelo apoio e reconhecimento dados. Por fim, faço um agradecimento especial à minha companheira, esposa e melhor amiga, Géssica, que renunciou de planos individuais para contribuir com os planos, agora, chamados de nossos.

Resumo

Neste trabalho, são apresentados alguns teoremas fundamentais na área de Geometria Simplética, como o Teorema de Darboux ou o Teorema *nonsqueezing* de Gromov. Além disso, estudamos a existência de órbitas periódicas de sistemas hamiltonianos. A ferramenta principal utilizada para obter os resultados foi a capacidade de Hofer-Zehnder.

Palavras-chave: topologia simplética, sistemas hamiltonianos, órbitas periódicas, capacidade simplética.

Abstract

This dissertation presents some fundamental theorems on Symplectic Geometry including Darboux's theorem and Gromov's *nonsqueezing* theorem. Furthermore, we study the existence of periodic orbits of hamiltonians systems. The Hofer-Zehnder capacity was the main tool used to obtain the results.

Key-Words: symplectic topology, hamiltonians systems, periodic orbits, symplectic capacity.

Sumário

Sumário	9
Introdução	9
1 Estruturas Simpléticas	12
1.1 Espaços Vetoriais Simpléticos	12
1.2 Simplectomorfismos e Variedades Simpléticas	19
1.2.1 Fibrado Cotangente	21
1.3 Os Primeiros Invariantes Globais	26
2 Dinâmica Hamiltoniana e Elipsoides	29
2.1 Campos Vetoriais Hamiltonianos	29
2.2 Mergulhos Simpléticos e Elipsoides	33
2.3 Princípios Variacionais	41
2.4 Superfícies de Energia	45
3 Capacidades Simpléticas	57
3.1 Definições e Consequências	57
3.2 Capacidade de Hofer-Zehnder	61
3.3 Soluções Periódicas em Superfícies de Energia	82
4 Características Fechadas e Exemplos	86
4.1 Existência de Características Fechadas em Superfícies de Energia	86
4.2 Hipersuperfícies de Contato e a Conjectura de Weinstein	92
Apêndice	97
A Derivada de Lie e Fórmula de Cartan	97
B Funções Homogêneas	100
C Convergência Fraca	100
D Construção de uma função suave com certas propriedades	101
E Grau Topológico de Brouwer e Leray-Schauder	103
Referências Bibliográficas	105

Introdução

Este trabalho é resultado de um estudo introdutório de Geometria Simplética realizado pelo autor através, principalmente, do livro *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics* dos autores H. Hofer e E. Zehnder ([HZ11]), e tem como objetivo entregar uma noção inicial do tema e resultados não triviais obtidos pelos autores do livro citado.

A Geometria Simplética é um ramo da Geometria Diferencial que estuda as estruturas simpléticas, tendo como origem uma formulação geométrica da mecânica clássica dada por W. R. Hamilton. Os tópicos da área apresentados no texto são propriedades de uma variedade simplética, mergulhos entre variedades deste tipo, invariantes simpléticos e a relação com sistemas dinâmicos. As próximas linhas desta introdução são dedicadas a discutir o conteúdo da dissertação na separação de seus capítulos.

No Capítulo 1 são apresentados os conceitos básicos utilizados no texto tais como: uma estrutura simplética em um espaço vetorial, o espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, a noção de symplectomorfismos, a definição de variedade simplética, a estrutura simplética canônica de um fibrado cotangente, o Teorema de Darboux, o volume como invariante simplético e a espessura simplética.

No Capítulo 2 definimos, na primeira seção, o conceito de um campo vetorial Hamiltoniano de uma função suave H , a relação desta definição com as equações clássicas Hamiltonianas e a característica simplética de fluxos gerados por tais campos. Na segunda seção, introduzimos o problema de rigidez de mergulhos simpléticos e apresentamos invariantes simpléticos lineares entre elipsoides. Na terceira seção são apresentadas as equações de Euler-Lagrange e sua relação com as equações Hamiltonianas utilizando técnicas de Cálculo Variacional. Na última seção, mostramos a existência de órbitas periódicas de campos Hamiltonianos em determinadas superfícies de energia.

O Capítulo 3 tem como objetivo apresentar o conceito de capacidade simplética, bem como a existência de uma função deste tipo (capacidade de Hofer-Zehnder) e algumas consequências tais como o Teorema *nonsqueezing* de Gromov e a existência de soluções periódicas de equações Hamiltonianas em superfícies de Energia. Neste capítulo são utilizadas técnicas de Análise Funcional.

Por fim, o Capítulo 4 traz interpretações geométricas dos resultados obtidos em superfícies de energia, assim como a Conjectura de Weinstein sobre existência de características fechadas em hiperfícies de contato.

No final deste trabalho, se encontra um Apêndice onde são estabelecidas algumas notações e apresentados alguns resultados, tais como a Fórmula de Euler para funções homogêneas e a Fórmula Mágica de Cartan, e definições que foram úteis no desenvolvimento do texto.

É importante destacar que a grande maioria do conteúdo apresentado neste trabalho foi baseada no livro guia dos autores H. Hofer e E. Zehnder, além de que, exceto a Figura 4, as ilustrações contidas no trabalho foram retiradas de tal livro.

Capítulo 1

Estruturas Simpléticas

1.1 Espaços Vetoriais Simpléticos

Definição 1.1.1. Um espaço vetorial simplético (V, ω) é um espaço vetorial real de dimensão finita V munido de uma forma bilinear ω antissimétrica e não degenerada, isto é,

- (i) $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ (ω é antissimétrica);
- (ii) $\forall u \neq 0 \in V$, existe $v \in V$ tal que $\omega(u, v) \neq 0$ (ω é não degenerada).

Essa última condição equivale a pedir que a aplicação

$$\begin{aligned} \omega^\# : V &\rightarrow V^* \\ v &\mapsto \omega(v, \cdot) \end{aligned} \tag{1.1}$$

seja um isomorfismo linear de V sobre o espaço dual V^* . De fato, a condição (ii) equivale a dizer que o núcleo da aplicação $\omega^\#$ é trivial e como se sabe, tal fato ocorre se, e somente se, a aplicação é injetiva. Combinando o que foi dito com o fato de que $\dim V = \dim V^*$, obtemos o que foi afirmado.

Exemplo 1.1.2. Chamamos de espaço vetorial simplético canônico o espaço $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ com $\omega_0(u, v) = \langle Ju, v \rangle, \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^{2n} e J a matriz $2n \times 2n$ definida por

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

segundo a representação $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Observe que J é matriz escrita em blocos com $\det J \neq 0$ e como

$$J^T = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = -J,$$

temos que ω_0 é não degenerada e antissimétrica.

A matriz J do exemplo acima verifica $J^T = J^{-1} = -J$. Em particular, $J^2 = -I_{2n}$ e $\omega_0(u, Jv) = \langle Ju, Jv \rangle = \langle u, J^T Jv \rangle = \langle u, v \rangle$. Daí, J pode ser identificada com uma estrutura complexa em \mathbb{R}^{2n} compatível com o produto interno Euclidiano. Mais geralmente, dado um espaço vetorial real V , uma transformação linear $J: V \rightarrow V$ satisfazendo $J^2 = -Id: V \rightarrow V$ diz-se uma estrutura complexa em V . Quando (V, ω) é um espaço vetorial simplético e $\omega(\cdot, J\cdot)$ define um produto interno em V , diz-se que a forma simplética ω é compatível com a estrutura complexa J . Existindo uma tal estrutura complexa J , conseguimos ver um espaço vetorial real V de dimensão $2n$ como um espaço vetorial complexo de dimensão complexa n pondo

$$(\alpha + i\beta)v = \alpha v + \beta Jv, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V.$$

No exemplo $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, podemos identificar \mathbb{R}^{2n} com \mathbb{C}^n de maneira usual pela aplicação que leva $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $x + iy \in \mathbb{C}^n$. Dessa forma, se $v = x + iy \in \mathbb{C}^n$ identificamos v com $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e daí $Jv = (y, -x) = y - ix = -i(x + iy) = -iv$ e logo, a aplicação linear J corresponde à multiplicação por $-i$ em \mathbb{C}^n .

Observe que toda matriz pode ser identificada com uma transformação linear e vice-versa. De agora em diante, não faremos diferença entre os conceitos de matrizes e transformações lineares, isto é, quando tratarmos uma transformação linear como uma matriz sem aviso, deve-se interpretar que estamos identificando a aplicação com a matriz que cumpre o papel da transformação segundo a base canônica do espaço \mathbb{R}^{2n} .

No que segue, salvo avisado o contrário, $V = (V, \omega)$ é um espaço vetorial simplético. Diremos que v é **ortogonal a u relativo à forma ω , ou simplesmente ortogonal a u** , e escreveremos $v \perp_\omega u$ se $\omega(v, u) = 0$.

Definição 1.1.3. *Se E é um subespaço vetorial de V , definimos seu ortogonal simplético, como o subespaço:*

$$E^\omega = \{u \in V \mid \omega(v, u) = 0 \forall v \in E\}.$$

Claramente, E^ω também é um subespaço vetorial de V e, por ω ser não degenerada, segue-se que

$$\dim E + \dim E^\omega = \dim V. \quad (1.3)$$

De fato, escolhendo uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ em E , o subespaço E^ω é o núcleo dos funcionais lineares $\omega(e_j, \cdot)$ em V que, pelo isomorfismo (1.1), são linearmente independentes em V^* . Portanto, temos que E^ω é o espaço das soluções do sistema de equações em V

$$\begin{cases} \omega(e_1, v) = 0 \\ \omega(e_2, v) = 0 \\ \vdots \\ \omega(e_d, v) = 0 \end{cases}$$

e daí segue a afirmação (1.3). Além disso, da antissimetria de ω , temos $u \perp_\omega v \Leftrightarrow v \perp_\omega u$ e logo de (1.3) obtemos

$$(E^\omega)^\omega = E.$$

Podemos observar sem esforços que o conceito de ortogonalidade na geometria simplética difere nitidamente do conceito de ortogonalidade na geometria euclidiana. Por exemplo, E e E^ω não precisam ser espaços complementares, isto é, $E \oplus E^\omega = V$. De veras, já que ω é antissimétrica, todo vetor $v \in V$ é simplecticamente ortogonal a si próprio e dessa forma, se E é um subespaço vetorial de V com $\dim E = 1$, então $E \subset E^\omega$ (ver Exemplo 1.1.6).

Sendo $E \subset V$ subespaço vetorial, podemos restringir a forma bilinear ω a E . Assim, a restrição $\omega|_E := \omega|_{E \times E}$ é obviamente antissimétrica mas, em geral, falha em ser não degenerada. Das definições acima, concluímos que $\omega|_E$ é não degenerada se, e somente se, $E \cap E^\omega = \{0\}$.

Definição 1.1.4. *Um subespaço vetorial $E \subset V$ é dito:*

- *Subespaço simplético quando $(E, \omega|_E)$ é espaço vetorial simplético.*
- *Subespaço isotrópico quando $E \subset E^\omega$, isto é, quando $\omega(v_1, v_2) = 0$ para quaisquer $v_1, v_2 \in E$.*

Exemplo 1.1.5. *Sejam $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ o espaço vetorial simplético canônico e $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_{2n} = (0, 0, \dots, 1)$ os vetores da base canônica do espaço vetorial \mathbb{R}^{2n} . O subespaço $E = \text{span}\{e_1, e_{n+1}\}$ é um subespaço simplético. De fato, como ω_0 é antissimétrica em \mathbb{R}^{2n} , $\omega_0|_E$ é antissimétrica em E e se u e v são vetores em E , temos:*

$$\begin{aligned} \omega_0(u, v) &= \omega_0(u_1e_1 + u_2e_{n+1}, v_1e_1 + v_2e_{n+1}) \\ &= \langle J(u_1e_1 + u_2e_{n+1}), v_1e_1 + v_2e_{n+1} \rangle \\ &= \langle u_2e_1 - u_1e_{n+1}, v_1e_1 + v_2e_{n+1} \rangle \\ &= \langle u_2e_1, v_1e_1 \rangle + \langle u_2e_1, v_2e_{n+1} \rangle + \\ &\quad + \langle -u_1e_{n+1}, v_1e_1 \rangle + \langle -u_1e_{n+1}, v_2e_{n+1} \rangle \\ &= u_2v_1 - u_1v_2 \end{aligned}$$

onde $u = u_1e_1 + u_2e_{n+1}$ e $v = v_1e_1 + v_2e_{n+1}$. Logo, se u é um vetor não nulo em E , basta escolhermos $v \in E$ de modo que $u_2v_1 - u_1v_2$ seja diferente de zero para concluirmos que $\omega_0|_E$ é não degenerada em E .

Exemplo 1.1.6. *Todo subespaço de dimensão 1 em um espaço vetorial simplético é isotrópico.*

Exemplo 1.1.7. *[dS04, Homework 1, Exercise 5] Se $E \subset V$ é um subespaço isotrópico, então $\dim E \leq \frac{1}{2} \dim V$. Com efeito, $E \subset E^\omega$ nos dá $\dim E \leq \dim E^\omega$ e daí,*

$$\dim V = \dim E + \dim E^\omega \geq \dim E + \dim E = 2 \dim E.$$

onde a primeira igualdade vem de (1.3). Portanto, $\frac{1}{2} \dim V \geq \dim E$.

Do comentário anterior à definição, concluímos que E é subespaço simplético de V se, e somente se, $E \cap E^\omega = \{0\}$. Mas devido a (1.3), esta última condição vale precisamente se E e E^ω são complementares, ou seja, $E \oplus E^\omega = V$. Além disso, pela simetria de $E \cap E^\omega = \{0\}$, concluímos que E é subespaço simplético de V se, e somente se, E^ω também o é.

Foi dada uma atenção especial ao espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e uma justificativa de tal feito é dada pela proposição abaixo, que nos mostra que todo espaço simplético *se parece* com $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, no seguinte sentido:

Proposição 1.1.8. *Seja (V, ω) um espaço vetorial simplético. Então, a dimensão de V é par. Além disso, se $\dim V = 2n$, então existe uma base $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V satisfazendo para $i, j = 1, 2, \dots, n$,*

$$\begin{cases} \omega(e_i, e_j) = 0 \\ \omega(f_i, f_j) = 0 \\ \omega(f_i, e_j) = \delta_{ij} \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Demonstração. Escolha qualquer vetor $e_1 \neq 0$ em V . Como ω é não degenerada, existe $u \in V$ satisfazendo $\omega(u, e_1) \neq 0$. Podemos então normalizar pondo $f_1 = \alpha u$ tal que

$$\omega(f_1, e_1) = 1.$$

Consequentemente, já que ω é antissimétrica, f_1 e e_1 são linearmente independentes e logo, $E_1 = \text{span}\{e_1, f_1\}$ é um subespaço simplético de dimensão 2. Se $\dim V = 2$, a proposição está provada. Se $\dim V > 2$, aplicamos o mesmo argumento ao subespaço simplético E^ω que por (1.3) possui dimensão igual a $\dim V - 2$ e encontramos outro subespaço simplético de dimensão 2, digamos $E_2 = \text{span}\{e_2, f_2\} \subset E^\omega$. Daí, podemos repetir o processo novamente com o subespaço simplético $(E_1 \oplus E_2)^\omega$ e iterando este procedimento uma quantidade finita de vezes (n se $\dim V = 2n$), encontramos a base $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ de V . \square

Uma base como a dada pela proposição acima é chamada **base simplética ou base canônica de V** . Representando $u, v \in V$ nessa base por

$$u = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + x_{n+j} f_j)$$

e

$$v = \sum_{j=1}^n (y_j e_j + y_{n+j} f_j)$$

e usando as propriedades desta base, obtemos

$$\begin{aligned} \omega(u, v) &= \omega \left(\sum_{j=1}^n (x_j e_j + x_{n+j} f_j), \sum_{j=1}^n (y_j e_j + y_{n+j} f_j) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \omega(x_j e_j, y_{n+j} f_j) + \sum_{j=1}^n \omega(x_{n+j} f_j, y_j e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n -x_j y_{n+j} + \sum_{j=1}^n x_{n+j} y_j = \langle Jx, y \rangle. \end{aligned}$$

onde J é a matriz definida anteriormente em (1.2) e consideramos $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ e $y = (y_1, \dots, y_{2n})$. Portanto,

$$\omega(u, v) = \langle Jx, y \rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^{2n}$$

Observe que os subespaços $V_j = \text{span}\{e_j, f_j\}$ são simpléticamente ortogonais se $i \neq j$ e portanto, o espaço vetorial V pode ser escrito como a soma direta:

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$$

de subespaços simpléticos V_j de dimensão 2. Com respeito à base

$$\{e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n\},$$

a forma bilinear ω é representada pela matriz $2n \times 2n$

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & \vdots & & & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

o que significa que $\omega(u, v) = u^T \hat{J}v$ sendo \hat{J} a matriz acima. Observe que J e \hat{J} representam a mesma transformação linear nas bases $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ (com escrita $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$) e $\{e_1, f_1, e_2, f_2, \dots, e_n, f_n\}$ de \mathbb{R}^{2n} (com escrita $x = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$), respectivamente.

Definição 1.1.9. Uma transformação linear $A: V \rightarrow V$ de um espaço vetorial simplético (V, ω) é chamada simplética se $A^*\omega = \omega$.

Na definição acima, $A^*\omega$ é a 2-forma pullback de ω via A dada por

$$A^*\omega(u, v) = \omega(Au, Av).$$

No espaço canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, $A^*\omega(u, v) = \omega(Au, Av) = \langle JAu, Av \rangle$. Portanto, uma matriz (ou transformação linear) A é simplética, se e somente se, $\langle JAu, Av \rangle = \langle Ju, v \rangle$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Equivalentemente,

$$A \text{ é simplética} \Leftrightarrow A^T J A = J.$$

Observação 1.1.10. Da última igualdade acima, obtemos $(\det A)^2 = 1$ para toda matriz simplética A . Em verdade, vale que $\det A = 1$, ou seja, toda matriz simplética preserva volume. De fato, introduzindo $z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ e usando a linguagem de formas diferenciais, podemos escrever

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j$$

e sendo ω_0 não degenerada, temos que a $2n$ -forma

$$\Omega = \omega_0^n = \omega_0 \wedge \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0 \text{ (} n \text{ vezes)}$$

é uma forma volume em \mathbb{R}^{2n} , digamos $\Omega = c dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$ com constante $c \neq 0$. Agora,

$$A^*\Omega = (\det A)\Omega$$

(v. por exemplo [Lee12, Proposition 14.20 (Pullback Formula for Top-Degree Forms), p.361]). Por outro lado, sendo A simplética, temos

$$A^*\Omega = A^*(\omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0) = A^*\omega_0 \wedge \dots \wedge A^*\omega_0 = \omega_0 \wedge \dots \wedge \omega_0 = \Omega$$

pelo comportamento distributivo do pullback com o produto exterior. Daí, $\det A = 1$ como afirmado.

Definição 1.1.11. O conjunto de todas as matrizes simpléticas em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é denotado por $Sp(n)$.

Proposição 1.1.12. Se $A, B \in Sp(n)$ então $A^{-1}, AB \in Sp(n)$. Mais ainda, $A^T \in Sp(n)$ e $J \in Sp(n)$.

Demonstração. Sendo A uma matriz simplética, temos $A^T J A = J$ e multiplicando por A^{-1} à direita e por $(A^T)^{-1}$ à esquerda, obtemos $J = (A^T)^{-1} J A^{-1} = (A^{-1})^T J A^{-1}$ e então $A^{-1} \in Sp(n)$. Tomando o inverso em ambos os lados da última igualdade, obtemos $J^{-1} = A J^{-1} A^T$ e já que $J^{-1} = -J$, concluímos que $J = A J A^T = (A^T)^T J A^T$, ou seja, $A^T \in Sp(n)$. Se B é também matriz simplética, temos $(AB)^T J (AB) = B^T A^T J A B = B^T J B = J$ e logo, $AB \in Sp(n)$. Por fim, $J^T J J = -J J J = I_{2n} J = J$, donde $J \in Sp(n)$. \square

A proposição acima, em particular, mostra que $Sp(n)$ é um grupo com a operação de multiplicação de matrizes fechado com a transposição. Este grupo é um dos clássicos grupos de Lie, isto é, um grupo com estrutura de variedade diferenciável com a propriedade de que as operações do grupo são suaves (v. por exemplo [Lee12, p.30-33]).

Exemplo 1.1.13. Seja U uma matriz $2n \times 2n$ escrita em forma de blocos

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

com respeito à escrita $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. O cálculo

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} = J = U^T J U = \begin{pmatrix} -C^T A + A^T C & -C^T B + A^T D \\ -D^T A + B^T C & -D^T B + B^T D \end{pmatrix}$$

nos mostra que U é simplética, se e somente se $A^T C$ e $B^T D$ são simétricas e $A^T D - C^T B = I_n$. Se, em particular, $B = 0$, concluímos que U é simplética se, e somente se, A é não singular e U pode ser escrita como

$$U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^T)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ S & 1 \end{pmatrix}$$

sendo $S = A^T C$ uma matriz simétrica. De fato, sendo $B = 0$ e U simplética, temos $A^T D = I_n$ e logo, $D = (A^T)^{-1}$.

Definição 1.1.14. Uma transformação linear $A: (V_1, \omega_1) \rightarrow (V_2, \omega_2)$ entre espaços vetoriais simpléticos é dita simplética se $A^*\omega_2 = \omega_1$, onde $(A^*\omega_2)(u, v) = \omega_2(Au, Av)$ para quaisquer $u, v \in V_1$.

Observe que, com respeito à definição acima, se existir $u \in V_1 \setminus \{0\}$ satisfazendo $Au = 0$, temos $(A^*\omega_2)(u, v) = \omega_2(0, v) = 0 \forall v \in V_1$ e logo, $A^*\omega_2$ é degenerada. Portanto, toda transformação linear simplética é injetiva. Em particular, $\dim V_1 \leq \dim V_2$.

Assim como todos espaços vetoriais normados de mesma dimensão são isomorfos, da Proposição 1.1.8 segue-se que: dados dois espaços vetoriais simpléticos de mesma dimensão, temos que estes são *simpléticamente indistinguíveis*. A proposição abaixo confirma este fato.

Proposição 1.1.15. *Se (V_1, ω_1) e (V_2, ω_2) são dois espaços vetoriais simpléticos com a mesma dimensão, então existe um isomorfismo linear simplético, isto é, um isomorfismo $A: V_1 \rightarrow V_2$ satisfazendo $A^*\omega_2 = \omega_1$.*

Demonstração. Escolhendo bases simpléticas $\{e_j, f_j\}$ em (V_1, ω_1) e $\{\hat{e}_j, \hat{f}_j\}$ em (V_2, ω_2) obtidas pela Proposição 1.1.8, definimos a transformação linear

$$A: V_1 \rightarrow V_2$$

pondo

$$Ae_j = \hat{e}_j \text{ e } Af_j = \hat{f}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Daí,

$$\begin{aligned} (A^*\omega_2)(u, v) &= \omega_2(Au, Av) \\ &= \omega_2 \left(A \left(\sum_{j=1}^n (x_j e_j + y_j f_j) \right), A \left(\sum_{j=1}^n (t_j e_j + k_j f_j) \right) \right) \\ &= \omega_2 \left(\sum_{j=1}^n (x_j \hat{e}_j + y_j \hat{f}_j), \sum_{j=1}^n (t_j \hat{e}_j + k_j \hat{f}_j) \right) \\ &= \omega_2 \left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{e}_j, \sum_{j=1}^n t_j \hat{e}_j \right) + \omega_2 \left(\sum_{j=1}^n x_j \hat{e}_j, \sum_{j=1}^n k_j \hat{f}_j \right) \\ &+ \omega_2 \left(\sum_{j=1}^n y_j \hat{f}_j, \sum_{j=1}^n t_j \hat{e}_j \right) + \omega_2 \left(\sum_{j=1}^n y_j \hat{f}_j, \sum_{j=1}^n k_j \hat{f}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\omega_2(x_j \hat{e}_j, k_j \hat{f}_j) + \omega_2(y_j \hat{f}_j, t_j \hat{e}_j)) \\ &= \sum_{j=1}^n (y_j t_j - x_j k_j) = \omega_1(u, v) \end{aligned}$$

onde $u = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + y_j f_j)$ e $v = \sum_{j=1}^n (t_j e_j + k_j f_j)$ e isso demonstra a proposição. \square

1.2 Simplectomorfismos e Variedades Simpléticas

Definição 1.2.1. Um difeomorfismo $\varphi: U \rightarrow V$ entre abertos U e V de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é chamado de simplectomorfismo (ou difeomorfismo simplético) quando

$$\varphi^* \omega_0 = \omega_0.$$

Por definição, sendo ω uma 2-forma qualquer, temos

$$(\varphi^* \omega)_x(a, b) = \omega_{\varphi(x)}(d\varphi(x)a, d\varphi(x)b)$$

para x em \mathbb{R}^{2n} e para quaisquer a e b em $T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$. Aqui $d\varphi(x)$ denota a derivada da aplicação φ no ponto x , representada na base canônica, pela matriz Jacobiana.

Da definição de ω_0 , segue-se que um difeomorfismo φ de \mathbb{R}^{2n} é simplético se, e somente se

$$d\varphi(x)^T J d\varphi(x) = J, x \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Assim, $d\varphi(x)$ é uma matriz simplética e, em particular,

$$\det d\varphi(x) = 1$$

e daí, difeomorfismos simpléticos preservam volume. Esta propriedade caracteriza totalmente os simplectomorfismos quando $n = 1$. Em outras palavras, φ é um simplectomorfismo em \mathbb{R}^2 se, e somente se, φ preserva área. Entretanto, se $n > 1$, veremos que a classe dos difeomorfismos simpléticos é um subconjunto próprio da classe dos difeomorfismos que preservam volume.

Uma importante propriedade de difeomorfismos simpléticos em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é que estes preservam a ação de curvas fechadas. Considere as coordenadas $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^{2n} e observe que sendo

$$\lambda = \sum_{j=1}^n y_j dx_j,$$

temos

$$d\lambda = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_l} dx_l \right) \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j = \omega_0,$$

onde d denota a derivada exterior (ou derivada de De Rham). Isto é, ω_0 é uma forma exata. Portanto, como φ é um simplectomorfismo, $\lambda - \varphi^* \lambda$ é uma forma fechada. De fato,

$$d(\lambda - \varphi^* \lambda) = d\lambda - d(\varphi^* \lambda) = d\lambda - \varphi^* d\lambda = \omega_0 - \varphi^* \omega_0 = 0.$$

Pelo Lema de Poincaré (v. por exemplo [Lee12, Theorem 11.11, p.278]), existe uma função $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda - \varphi^* \lambda = dF.$$

Se γ é uma curva fechada simples e orientada, integrando a última igualdade, obtemos

$$\int_{\gamma} \lambda = \int_{\gamma} \varphi^* \lambda = \int_{\varphi(\gamma)} \lambda$$

já que a integral de uma forma exata sobre uma curva fechada se anula. Definindo a ação $A(\gamma)$ de uma curva fechada por

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda \in \mathbb{R},$$

concluimos que

$$A(\varphi(\gamma)) = A(\gamma) \quad (1.4)$$

isto é, φ deixa a ação invariante.

Reciprocamente, se um difeomorfismo φ de \mathbb{R}^{2n} cumpre (1.4) para todas as curvas fechadas em \mathbb{R}^{2n} , φ é simplético. Com efeito,

$$\begin{aligned} A(\varphi(\gamma)) &= A(\gamma) \text{ para toda curva fechada } \gamma \\ \Rightarrow \int_{\gamma} \lambda - \int_{\varphi(\gamma)} \lambda &= 0 \text{ para toda curva fechada } \gamma \\ \Rightarrow \int_{\gamma} (\lambda - \varphi^* \lambda) &= 0 \text{ para toda curva fechada } \gamma \\ \Rightarrow \lambda - \varphi^* \lambda &\text{ é exata} \\ \Rightarrow d(\lambda - \varphi^* \lambda) &= 0 \\ \Rightarrow \varphi^* \omega_0 &= \omega_0. \end{aligned}$$

Parametrizando a curva γ por $x(t)$, com $t \in [0, 1]$ e $x(0) = x(1)$, temos

$$\begin{aligned} A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda &= \int_{\gamma} \sum_{j=1}^n y_j dx_j = \int_0^1 x^* \left(\sum_{j=1}^n y_j dx_j \right) \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n y_j(x(t)) \frac{dx_j}{dt} \right) dt \\ &= \sum_j^n y_j x_j \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \left(\sum_j^n x_j \frac{dy_j}{dt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \langle -J\dot{x}, x \rangle dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

usando o método de integração por partes.

Exemplos de difeomorfismos simpléticos são gerados pelos chamados campos vetoriais Hamiltonianos, sobre os quais falaremos em breve.

Definição 1.2.2. *Uma estrutura simplética numa variedade diferenciável M de dimensão par é uma 2-forma ω em M satisfazendo:*

(i) ω é fechada ($d\omega = 0$).

(ii) ω é não degenerada.

A condição (ii) acima significa que para todo espaço tangente $T_x M$, $x \in M$, temos:

$$\omega_x(u, v) = 0 \quad \forall v \in T_x M \Rightarrow u = 0.$$

O par (M, ω) é então chamado de variedade simplética.

Observe que se (M, ω) é uma variedade simplética, então $(T_x M, \omega_x)$ é um espaço vetorial simplético para todo x em M . Portanto, a condição na dimensão da variedade diferenciável M é realmente necessária para que M admita uma estrutura deste tipo.

Exemplo 1.2.3. $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é uma variedade simplética. De fato, ω_0 é uma 2-forma constante e logo, $d\omega_0 = 0$ e $T_x \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exemplo 1.2.4. Toda variedade compacta, orientável e conexa de dimensão 2 admite estrutura simplética. Com efeito, sejam M variedade nessas condições e ω uma forma volume em M . Temos portanto ω não degenerada. Além disso, sendo ω uma 2-forma numa variedade de dimensão 2, temos $d\omega = 0$. Em particular, a esfera $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ admite estrutura simplética. Um exemplo de estrutura simplética em S^2 é a 2-forma:

$$\omega_p(u, v) = \langle p, u \times v \rangle, \text{ para } u, v \in T_p S^2 = \{p\}^\perp.$$

De fato, $\omega_p = \langle p, (\cdot, \cdot) \rangle$ só é identicamente nula quando $p = 0 \notin S^2$ (v. por exemplo [dS04, Example, p. 6]).

1.2.1 Fibrado Cotangente

Seja Q uma variedade suave. Para cada $p \in Q$, definimos o **espaço cotangente em p** , denotado por $T_p^* Q$, como o espaço dual do espaço tangente em p :

$$T_p^* Q = (T_p Q)^*.$$

O **fibrado cotangente de Q** é o conjunto $T^* Q = \{(p, \xi) \mid p \in Q \text{ e } \xi \in T_p^* Q\}$.

Proposição 1.2.5. O fibrado cotangente $T^* Q$ de uma variedade diferenciável Q de dimensão n é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Demonstração. Seja $\mathcal{A} = \{(U, f_U)\}$ uma estrutura diferenciável para Q . Assim, para cada $p \in Q$, existe um aberto U de Q e uma carta f_U tal que

$$\begin{aligned} f_U: U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p)). \end{aligned}$$

Defina a aplicação $\bar{f}_U: T^* U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ pondo

$$\bar{f}_U(p, \xi) = (x_1(p), x_2(p), \dots, x_n(p), \xi_1(p), \xi_2(p), \dots, \xi_n(p))$$

onde $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j(p)(dx_j)_p \in T_p^* Q$. Vamos ver que $\bar{\mathcal{A}} = \{(T^* U, \bar{f}_U)\}$ é uma estrutura diferenciável para $T^* Q$: se (U, f_U) e $(U', f_{U'})$ são cartas em \mathcal{A} tais que $q \in U \cap U'$, temos que se $\xi \in T_q^* Q$ vale:

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j(q)(dx_j)_q = \sum_{i,j=1}^n \xi_j(q) \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(q) \right) (dy_i)_q = \sum_{i=1}^n \xi'_i(q)(dy_i)_q$$

onde (x_1, x_2, \dots, x_n) são as coordenadas locais com respeito à carta f_U , (y_1, y_2, \dots, y_n) são as coordenadas locais com respeito à carta $f_{U'}$ e

$$\xi'_i = \sum_{j=1}^n \xi_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right)$$

é suave. Logo, munida de tal estrutura, T^*Q é uma variedade suave de dimensão $2n$. \square

Construíremos agora uma importante classe de exemplos de formas simpléticas, chamadas **formas canônicas** no fibrado cotangente T^*Q da variedade Q .

Seja $\bar{f}_U: T^*U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ seguindo as ideias da demonstração da Proposição 1.2.5. Definimos uma 2-forma ω em T^*U pondo

$$\omega = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j.$$

Para verificarmos que a definição acima não depende das coordenadas escolhidas, consideremos a 1-forma em T^*U

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j.$$

Observe que $d\alpha = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j = \omega$.

Afirmamos que a forma α está construída intrinsecamente e consequentemente, ω também está. Com efeito, sejam T^*U e T^*U' vizinhanças tais que $T^*U \cap T^*U' \neq \emptyset$. Nesta interseção, as coordenadas correspondentes se relacionam por $\xi'_j = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right)$. Como $dy_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right) dx_i$, segue-se que

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i = \sum_{j=1}^n \xi'_j dy_j = \alpha'$$

onde α' é a escrita da forma α nas coordenadas T^*U' . A forma α é chamada de **1-forma de Liouville** e ω é chamada de **forma simplética canônica em T^*Q** .

Dada uma variedade suave Q de dimensão n , podemos definir a forma simplética canônica ω em T^*Q sem o uso de coordenadas. Com efeito, considere a projeção natural

$$\begin{aligned} \pi: T^*Q &\rightarrow Q \\ (p, \xi) &\mapsto p \end{aligned}$$

e defina a 1-forma α pontualmente em T^*Q pondo

$$\alpha_{(p,\xi)} = (d\pi_{(p,\xi)})^* \xi = \xi \circ d\pi_{(p,\xi)} \in (T_{(p,\xi)} T^*Q)^* \quad (1.6)$$

isto é, $\alpha_{(p,\xi)}(v) = \xi((d\pi_{(p,\xi)})(v))$ para $v \in T_{(p,\xi)} T^*Q$.

Afirmação: [dS04, Exercise, p. 11] Considere $f_U = (x_1, \dots, x_n)$ coordenadas locais em $U \subset Q$ associadas às coordenadas locais definidas por

$$\bar{f}_U(p, \xi) = (x_1(p), \dots, x_n(p), \xi_1(p), \dots, \xi_n(p))$$

em $T^*U \subset T^*Q$. Então, a forma definida por (1.6) é dada nestas coordenadas locais por

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$$

em T^*U .

Demonstração. Sejam $(p, \xi) \in T^*U \subset T^*Q$ com $p \in U \subset Q$ e $f_U = (x_1, \dots, x_n)$ as coordenadas locais em $U \subset Q$ associadas às coordenadas definidas por $\bar{f}_U(p, \xi) = (x_1(p), \dots, x_n(p), \xi_1(p), \dots, \xi_n(p))$ em $T^*U \subset T^*Q$. Temos nestas coordenadas a 1-forma

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j$$

em $U \subset Q$ e assim, observando que α é a 1-forma $\pi^*\xi$, podemos calcular α em T^*U :

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi^*\xi = \pi^*\left(\sum_{j=1}^n \xi_j dx_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\xi_j \circ \pi) \pi^*(dx_j) \end{aligned}$$

o que corresponde à expressão no enunciado. Observe que dado (p, ξ) em T^*U , temos então

$$\alpha_{(p, \xi)}(v) = \sum_{j=1}^n \xi_j(p)(dx_j)_p(d\pi_{(p, \xi)}(v))$$

para todo $v \in T_{(p, \xi)}T^*Q$. □

Daí, a forma simplética canônica pode ser definida por

$$\omega = d\alpha$$

e localmente ficamos como antes: $\omega = d\alpha = \sum_{i=1}^n d\xi_i \wedge dx_i$.

Observação 1.2.6. *Da construção acima, concluímos que dada uma variedade suave Q , é sempre possível munir o fibrado cotangente T^*Q de uma estrutura simplética. Isso nos dá muitos exemplos de variedades simpléticas. Além disso, é interessante observar que munindo o fibrado cotangente da variedade \mathbb{R}^n com a forma simplética canônica, obtemos o espaço canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.*

Um comentário interessante é que, ao contrário da Geometria Riemmaniana onde toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemmaniana, não é verdade que toda variedade diferenciável de dimensão par suporta uma estrutura simplética. O exemplo a seguir verifica isso.

Exemplo 1.2.7. *A esfera S^{2n} não admite estrutura simplética para $n \geq 2$. Para vermos isso, suponha que ω seja uma estrutura simplética em S^{2n} . Então, como ω é não degenerada, $\Omega = \omega \wedge \dots \wedge \omega = \omega^n$ é uma forma volume em S^{2n} . Mas como o segundo grupo de cohomologia de De Rham, $H_{dR}^2(S^{2n})$ é trivial no caso em questão (v. por exemplo [Lee12, Theorem 17.21 (Cohomology of*

Spheres), p.450]), temos que $\omega = d\alpha$ para uma 1-forma em S^{2n} . Dessa forma, temos $\Omega = d\beta$ onde $\beta = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \wedge \alpha$ e pelo Teorema de Stokes

$$0 = \int_{\partial S^{2n}} \beta = \int_{S^{2n}} \Omega \neq 0$$

onde a última desigualdade é devido a Ω ser forma volume e chegamos em uma contradição. Do Exemplo 1.2.4 e deste, concluímos que a única esfera que admite estrutura simplética é a S^2 .

O argumento acima se aplica a qualquer variedade suave compacta M sem bordo que possui $H_{dR}^{2j}(M) = 0$ para algum $1 \leq j \leq n-1$.

Definição 1.2.8. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas. Uma aplicação diferenciável $f: M_1 \rightarrow M_2$ é dita simplética se

$$f^*\omega_2 = \omega_1,$$

onde por definição, $f^*\omega_2$ é a 2-forma

$$(f^*\omega_2)_p(u, v) = \omega_{2, f(p)}(df_p(u), df_p(v)) \quad \forall u, v \in T_p M_1$$

sendo df_p a diferencial de f em $p \in M_1$.

Na Definição 1.2.8, ω_1 é não degenerada e repetindo o que comentamos na Definição 1.1.14, concluímos que df_p deve ser injetiva em cada ponto e logo $\dim M_1 \leq \dim M_2$. Agora, se tivermos $\dim M_1 = \dim M_2$, decorre do Teorema da Função Inversa que f é um difeomorfismo local.

Usando a linguagem de campos vetoriais, provaremos agora um importante teorema que contribui de forma significativa para o entendimento das variedades simpléticas: segue diretamente dele que em verdade, poderíamos definir uma variedade simplética (M, ω) como uma variedade suave de dimensão $2n$ tal que existem coordenadas locais $f_U = (x_1, \dots, x_{2n})$ aplicando abertos $U \subset M$ sobre abertos de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ onde as mudanças de coordenadas $f_U \circ f_{U'}^{-1}$ definidas em $f_U(U \cap U')$ são difeomorfismos locais simpléticos, isto é, como variedades localmente simplectomorfas a $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Definição 1.2.9. Sendo X um campo vetorial em \mathbb{R}^{2n} , definimos o fluxo do campo X como sendo $\varphi: I \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, onde $\varphi^t(x)$ é a solução (se existir) do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi^t(x) = X(\varphi^t(x)) \\ \varphi^0(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \end{cases}$$

sendo I um intervalo onde está definida a solução.

Teorema 1.2.10. (Teorema de Darboux) Seja ω uma 2-forma não degenerada em uma variedade suave M com $\dim M = 2n$. Então $d\omega = 0$ se, e somente se, em cada ponto $p \in M$ existe parametrização (U, φ) onde

$$\begin{aligned} \varphi: V \subset \mathbb{R}^{2n} &\rightarrow U \subset M \\ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) &\mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

onde U e V são abertos, $p \in U$, $0 \in V$, satisfazendo $\varphi(0) = p$ e

$$\varphi^*\omega = \omega_0 = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j.$$

Demonstração. Podemos escolher coordenadas locais tais que ω , nestas coordenadas, é uma 2-forma em \mathbb{R}^{2n} dependendo de $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e p correspondendo a $z = 0$. Fazendo uma mudança linear de coordenadas, se necessário, podemos escrever

$$\omega(0) = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j = \omega_0.$$

Tal mudança de coordenadas existe pela Proposição 1.1.8. Queremos encontrar um difeomorfismo local φ em uma vizinhança de 0 que deixe a origem fixa e satisfaça $\varphi^*\omega = \omega_0$.

Interpolando formas ω_t entre ω_0 e ω definidas por

$$\omega_t = \omega_0 + t(\omega - \omega_0), \quad 0 \leq t \leq 1$$

de forma que $\omega_0 = \omega_t$ em $t = 0$ e $\omega_1 = \omega$, encontraremos uma família φ^t de difeomorfismos satisfazendo $\varphi^0 = id$ e

$$(\varphi^t)^*\omega_t = \omega_0, \quad \forall t \in [0, 1] \quad (1.7)$$

e por fim, φ^1 será o difeomorfismo desejado.

Para encontrar tal família, construiremos um campo vetorial X_t que dependa do parâmetro t e admita φ^t como seu fluxo. Derivando (1.7) em relação a t , obtemos (ver Apêndice, Teorema .0.14):

$$0 = \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t = (\varphi^t)^*\left\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right\}$$

onde $L_{X_t}\omega_t$ é a derivada de Lie da forma ω_t em direção do campo vetorial X_t . Usando a Fórmula Mágica de Cartan (ver Apêndice, Proposição .0.13) e assumindo $d\omega_t = 0$, encontramos

$$\begin{aligned} (\varphi^t)^*\left\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d\omega_t}{dt}\right\} &= (\varphi^t)^*\left\{\iota_{X_t}d\omega_t + d(\iota_{X_t}\omega_t) + \frac{d\omega_t}{dt}\right\} \\ &= (\varphi^t)^*\{d(\iota_{X_t}\omega_t) + \omega - \omega_0\} \end{aligned}$$

e logo, X_t deve satisfazer a equação:

$$d(\iota_{X_t}\omega_t) + \omega - \omega_0 = 0 \quad (1.8)$$

Observe que $\omega - \omega_0$ é fechada e portanto, pelo Lema de Poincaré, é localmente exata. Daí, existe uma 1-forma λ satisfazendo, sem perda de generalidade, $d\lambda = \omega - \omega_0$ e $\lambda(0) = 0$. Já que ω_0 é não degenerada e $\omega_t = \omega_0$ em $t = 0$, da continuidade e da compacidade de $[0, 1]$, segue que as formas ω_t são não degeneradas para $0 \leq t \leq 1$ em uma vizinhança aberta da origem.

Como ω_t é não degenerada, temos que a aplicação $(p, X_p) \mapsto (p, (\omega_t)_p(X_p, \cdot))$ é biunívoca, pelo argumento usado em (1.1) e logo existe um único campo vetorial X_t determinado por $\iota_{X_t}\omega_t = \omega_t(X_t, \cdot) = -\lambda$ para todo $t \in [0, 1]$ que é solução da equação (1.8). Como $\lambda(0) = 0$, só podemos ter $X_t(0) = 0$ para todo $0 \leq t \leq 1$ (pois ω_t é não degenerada) e portanto, existe vizinhança aberta da origem V onde o fluxo φ^t de X_t existe para todo $0 \leq t \leq 1$. Sendo fluxo, este satisfaz:

$$\begin{aligned} \varphi^0 &= id_V \\ \varphi^t(0) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, construímos uma família de difeomorfismos φ^t tal que

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

e logo, $(\varphi^t)^*\omega_t = (\varphi^0)^*\omega_0 = \omega_0$ para todo $t \in [0, 1]$. Em particular, $\varphi = \varphi^1$ cumpre o que queríamos. \square

O argumento de deformação de formas diferenciais que foi utilizado na demonstração é conhecido como *truque* de Moser (v. por exemplo [dS04, Moser Trick, p.42-45]).

As coordenadas locais $\varphi^{-1}: U \rightarrow V$ dadas pelo Teorema 1.2.10 são chamadas **coordenadas simpléticas**.

Do Teorema de Darboux, concluímos que quaisquer duas variedades simpléticas de mesma dimensão são localmente indistinguíveis. Em outras palavras, variedades simpléticas não possuem invariantes simpléticos locais a não ser a dimensão. Daqui temos mais uma grande diferença comparado-se ao estudo das variedades Riemmanianas, que possuem invariantes locais como por exemplo a curvatura Gaussiana. Sendo assim, um grande interesse na geometria simplética é encontrar invariantes globais.

1.3 Os Primeiros Invariantes Globais

Já vimos, pelo Teorema de Darboux, que não existem invariantes simpléticos locais a não ser a dimensão. Por outro lado, o volume total é um exemplo trivial de um invariante simplético global. De fato, seja $u: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ um simplectomorfismo entre variedades simpléticas de dimensão $2n$. Sendo $\Omega_1 = \omega_1^n$ e $\Omega_2 = \omega_2^n$ formas volumes em M_1 e M_2 respectivamente, como $u^*\omega_2 = \omega_1$, segue-se que:

$$u^*\Omega_2 = u^*(\omega_2 \wedge \omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_1 = \Omega_1.$$

Portanto, desde que $u: M_1 \rightarrow M_2$ preserve a orientação, temos:

$$\int_{M_1} \Omega_1 = \int_{M_1} u^*\Omega_2 = \int_{u(M_1)} \Omega_2 = \int_{M_2} \Omega_2.$$

Já vimos no Exemplo 1.2.4 que em toda variedade orientada compacta e conexa de dimensão 2 uma 2-forma que dê orientação é uma estrutura simplética. Considere agora duas variedades com essas propriedades, digamos (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) . Neste caso, as formas ω_1 e ω_2 são formas volume e pelo que acabamos de ver, se $u: M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo simplético, vale que

$$\int_{M_1} \omega_1 = \int_{M_2} \omega_2.$$

Provaremos a seguinte recíproca: se duas variedades (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) orientadas, compactas e conexas de dimensão 2 são difeomorfas (o que ocorre se possuem características de Euler iguais, por exemplo) e se seus volumes totais são iguais, então existe um difeomorfismo $u: M_1 \rightarrow M_2$ que satisfaz $u^*\omega_2 = \omega_1$. Dessa forma, as variedades simpléticas compactas e conexas de dimensão 2 são caracterizadas pela característica de Euler e o volume total. Em verdade, provaremos o resultado a seguir que é ainda mais geral:

Teorema 1.3.1. (Moser) *Seja M uma variedade compacta, conexa e orientada de dimensão m sem bordo. Se α e β são duas formas volume tais que seus volumes totais são iguais, isto é,*

$$\int_M \alpha = \int_M \beta$$

então existe um difeomorfismo u de M tal que $u^\beta = \alpha$.*

Demonstração. Faremos como na demonstração do Teorema de Darboux, deformando agora a forma volume α na forma β definindo:

$$\alpha_t = (1-t)\alpha + t\beta, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

As formas α_t são formas volume já que localmente α e β são representadas por $\alpha = a(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_m$ e $\beta = b(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ onde a e b são funções suaves que não se anulam e possuem o mesmo sinal, já que ambas são formas volume e seus volumes totais coincidem.

Construiremos uma família de difeomorfismos φ^t tais que

$$(\varphi^t)^*\alpha_t = \alpha, \quad \varphi^0 = id$$

para $0 \leq t \leq 1$ e assim o difeomorfismo $u := \varphi^1$ resolve o nosso problema.

Como M é compacta, conexa e orientada, de $\int_M(\beta - \alpha) = 0$ obtemos que $\beta - \alpha = d\gamma$ onde γ é uma $(m-1)$ -forma em M (v. [Lee12, Proof of Theorem 17.30, p.454]). Já que α_t é forma volume, encontramos um único campo vetorial X_t dependente de t em M que resolve a equação

$$\iota_{X_t}\alpha_t = -\gamma, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Seja φ^t o fluxo do campo X_t . Como M é compacta, tal fluxo existe para todo t . Novamente, da Fórmula de Cartan, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\alpha_t &= (\varphi^t)^*\{L_{X_t}\alpha_t + \frac{d\alpha_t}{dt}\} \\ &= (\varphi^t)^*\{\iota_{X_t}(d\alpha_t) + d(\iota_{X_t}\alpha_t) + \beta - \alpha\} \\ &= (\varphi^t)^*\{d(-\gamma) + d\gamma\} = 0 \end{aligned}$$

pela escolha do campo X_t e devido a $d\alpha_t = 0$ (visto que α_t é forma volume).

Assim, $(\varphi^t)^*\alpha_t = (\varphi^0)^*\alpha_0 = \alpha$ para todo t em $[0, 1]$ e em particular, $u^*\beta = (\varphi^1)^*\alpha_1 = \alpha$. \square

Nosso objetivo imediato é estabelecer invariantes simpléticos que não sejam o volume total e logo, distinguir difeomorfismos simpléticos de difeomorfismos que preservam volume.

Relembre que o Teorema de Darboux garante que em torno de todo ponto de uma variedade simplética (M, ω) existe um difeomorfismo local φ de uma bola em \mathbb{R}^{2n} em M satisfazendo $\varphi^*\omega = \omega_0$. Em particular, significa que sempre há, para algum $r > 0$, um mergulho simplético da bola aberta $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; |x|^2 < r^2\}$ em M ,

$$\varphi: (B(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega).$$

Este é um resultado local.

A construção do nosso próximo invariante simplético global consiste em observar a maior bola $B(r) \subset \mathbb{R}^{2n}$ que possa ser mergulhada simpléticamente numa variedade simplética (M, ω) de dimensão $2n$. Definimos a **espessura simplética** (ou largura de Gromov) de (M, ω) :

$$D(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 \mid \text{existe mergulho simplético } \varphi: (B(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\}$$

que é um número positivo ou $+\infty$. Vendo esta definição, naturalmente nos perguntamos o porquê da escolha πr^2 em vez de outro número e isso está relacionado ao fato de que no caso $n = 1$, este valor coincide com a área do disco de raio r .

Pontuamos que a largura $D(M, \omega)$ tem uma certa propriedade de monotonicidade. Sendo (M, ω) e (N, τ) duas variedades simpléticas tais que existe um mergulho simplético $\psi: M \rightarrow N$, vale que $D(M, \omega) \leq D(N, \tau)$. Deveras, para todo mergulho simplético $\varphi: B(r) \rightarrow M$, existe um mergulho simplético $B(r) \rightarrow N$ definido por $\psi \circ \varphi$. Dessa forma, o conjunto dos possíveis raios de bolas tomados na definição de $D(M, \omega)$ está contido nos possíveis raios tomados em $D(N, \tau)$. Logo, $D(N, \tau) \geq D(M, \omega)$ como afirmamos.

Proposição 1.3.2. *Se (M, ω) e (N, τ) são variedades simpléticas simplectomorfas, então $D(M, \omega) = D(N, \tau)$.*

Demonstração. Sendo as variedades (M, ω) e (N, τ) simplectomorfas, existe um difeomorfismo simplético $f: M \rightarrow N$. Basta aplicarmos o raciocínio anterior em f e f^{-1} . \square

A proposição acima nos confirma que a espessura simplética é um invariante simplético. Tal espessura é um exemplo pertinente a uma classe de invariantes simpléticos que ainda será discutida no Capítulo 3, chamada capacidade simplética.

Capítulo 2

Dinâmica Hamiltoniana e Elipsoides

2.1 Campos Vetoriais Hamiltonianos

Voltando a discutir sobre o espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, podemos associar à forma ω_0 e a uma função suave $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, um campo vetorial X_H em \mathbb{R}^{2n} pedindo

$$\omega_0(X_H(x), a) = -dH(x)a \quad (2.1)$$

para todo $a \in \mathbb{R}^{2n}$ e $x \in \mathbb{R}^{2n}$ onde d novamente representa a derivada exterior. Em outras palavras, X_H é o campo vetorial definido por $\iota_{X_H}\omega_0 = -dH(x)$. Aqui, ι representa o produto interior de uma forma por um campo. Observe que sendo ω_0 não degenerada, o vetor $X_H(x)$ é unicamente determinado. Além disso,

$$\omega_0(X_H(x), a) = \langle JX_H(x), a \rangle \text{ e } -dH(x)a = -\langle \nabla H(x), a \rangle$$

onde $\nabla H(x)$ representa o gradiente de H no ponto x definido com respeito ao produto interno Euclidiano. Logo, a condição (2.1) é equivalente a

$$\langle JX_H(x), a \rangle = -\langle \nabla H(x), a \rangle.$$

Portanto, $JX_H(x) = -\nabla H(x)$ e já que $J^2 = -I_{2n}$, obtemos a representação

$$X_H(x) = J\nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \quad (2.2)$$

O campo vetorial X_H acima definido é chamado **campo Hamiltoniano da função H** e H é às vezes chamado de **Hamiltoniano**.

Observação 2.1.1. Quando M é o fibrado cotangente T^*Q de $Q = \mathbb{R}^n$, M é identificado com \mathbb{R}^{2n} e pode ser interpretado como espaço de fases de um sistema Hamiltoniano determinado pelo Hamiltoniano $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ com espaço de configurações $Q = \mathbb{R}^n$. Na física, $q = (q_1, \dots, q_n)$ denotam as coordenadas da posição da partícula e $p = (p_1, \dots, p_n)$ as coordenadas do momento da partícula. Neste caso, a forma simplética é dada por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$$

onde $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ são as coordenadas em T^*Q . Nestas coordenadas, a equação

$$\omega_0(X_H, \cdot) = -dH(\cdot)$$

corresponde às equações clássicas Hamiltonianas

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \quad (2.3)$$

e o campo Hamiltoniano X_H é dado por

$$X_H = J\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_n} \right).$$

Considere agora $X = X_H$ o campo Hamiltoniano determinado por ω_0 e H . Então, o fluxo φ^t gerado pelo campo preserva a forma ω_0 , isto é,

$$(\varphi^t)^* \omega_0 = \omega_0$$

e portanto, é uma aplicação simplética. Este fato é facilmente verificado utilizando derivadas de Lie e a Fórmula Mágica de Cartan e será demonstrado posteriormente em um contexto mais geral (v. (2.5)).

Para uso posterior, lembraremos a fórmula de transformação para campos vetoriais X em \mathbb{R}^m . Seja $x(t)$ uma solução da equação diferencial

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Se $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um difeomorfismo, podemos definir a curva $y(t)$ pondo $x(t) = u(y(t))$. Diferenciando em t , obtemos

$$\dot{x} = du(y)(\dot{y}) \quad \text{e logo, } (du(y))^{-1}(\dot{x}) = \dot{y}$$

onde $(du(y))^{-1}$ existe dado que u é difeomorfismo. Assim, $y(t)$ satisfaz a equação $\dot{y} = Y(y)$ para o campo transformado Y definido por:

$$Y(y) = (du(y))^{-1}(X \circ u(y))$$

usando que $\dot{x} = X(x) = X \circ u(y)$. De agora em diante, usaremos a notação

$$u^*X := (du)^{-1}(X \circ u)$$

para expressar o campo chamado **campo pullback** ou **pullback do campo vetorial X via u** . Neste caso, temos que os fluxos φ^t de X e ψ^t de u^*X são conjugados pelo difeomorfismo u , isto é,

$$\varphi^t \circ u = u \circ \psi^t$$

o que pode ser verificado facilmente já que ambos são solução do mesmo problema de valor inicial.

Não é verdade que qualquer difeomorfismo arbitrário u em \mathbb{R}^{2n} preserva campos Hamiltonianos. Entretanto, um difeomorfismo simplético preserva a classe dos campos vetoriais Hamiltonianos. Para vermos isso, consideremos um difeomorfismo simplético u em \mathbb{R}^{2n} e uma função real suave H em \mathbb{R}^{2n} .

Definindo $K = H \circ u$, temos da regra da cadeia: $dK = (dH \circ u)(du)$ e logo, o gradiente de K é $\nabla K = (du)^T \nabla H \circ u$. Sendo u um simplectomorfismo, $(du)^T$ é uma matriz simplética e assim $(du)J(du)^T = J$, conseqüentemente, da definição de campo Hamiltoniano temos:

$$\begin{aligned} X_K &= J\nabla K = J(du)^T \nabla H \circ u = JJ^{-1}(du)^{-1}J\nabla H \circ u = (du)^{-1}(J\nabla H \circ u) \\ &= (du)^{-1}(X_H \circ u) = u^*X_H \end{aligned}$$

concluindo que se u é uma aplicação tal que $u^*\omega_0 = \omega_0$, então $u^*X_H = X_{H \circ u}$.

Assim como vimos no espaço simplético canônico, a estrutura simplética em uma variedade M define um isomorfismo entre campos vetoriais e 1-formas na variedade ($X \mapsto \omega(X, \cdot) = \iota_X \omega$). Em particular, sendo $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave, então dH é uma 1-forma em M e logo, juntamente com a estrutura simplética ω , determina um campo vetorial X_H por

$$\iota_{X_H} \omega(x) = \omega(X_H(x), \cdot) = -dH(x), \quad x \in M \quad (2.4)$$

tal campo é chamado de **campo vetorial Hamiltoniano da função H** .

De (2.4) e da Fórmula de Cartan, temos:

$$L_{X_H} \omega = d(\iota_{X_H} \omega) + \iota_{X_H}(d\omega) = d(-dH) = 0$$

já que ω é fechada e toda forma exata é fechada. Daí, concluímos um fato interessante: sendo φ^t o fluxo do campo Hamiltoniano X_H , temos (ver Apêndice Observação .0.10)

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \omega = (\varphi^t)^* L_{X_H} \omega = 0 \quad \text{e} \quad (\varphi^0)^* \omega = (id)^* \omega = \omega. \quad (2.5)$$

Isto é, uma aplicação φ^t (para todo t fixado no qual o fluxo está definido) do fluxo de um campo Hamiltoniano é um difeomorfismo simplético.

Relembrando a notação $u^*X = (du)^{-1}(X \circ u)$ para um campo X e um difeomorfismo u , provaremos agora um resultado equivalente ao que provamos para difeomorfismos simpléticos em \mathbb{R}^{2n} .

Proposição 2.1.2. *Se $u: M \rightarrow M$ satisfaz $u^*\omega = \omega$, então para toda função suave $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ vale*

$$u^*X_H = X_K \quad \text{onde} \quad K = H \circ u.$$

Demonstração. Seja $p \in M$. Para todo $v \in T_p M$, temos:

$$\begin{aligned} \iota_{X_{H \circ u}} \omega(v) &= -d(H \circ u)(v) = -u^*(dH)(v) = u^*(\iota_{X_H} \omega)(v) \\ &= \omega(X_H \circ u, du(v)) = \omega(du^{-1}X_H \circ u, du(v)) \\ &= \omega(du(u^*X_H), du(v)) = u^*(\omega(u^*X_H, v)) \\ &= \omega(u^*X_H, v) = \iota_{u^*X_H} \omega(v), \end{aligned}$$

onde omitimos o ponto p . Pela arbitrariedade de $p \in M$ e $v \in T_p M$, concluímos que $\omega(X_{H \circ u}, \cdot) = \omega(u^*X_H, \cdot)$ e como ω é não degenerada, temos $X_{H \circ u} = u^*X_H$. \square

Para continuarmos com a generalização de campos Hamiltonianos em \mathbb{R}^{2n} para campos numa variedade simplética (M, ω) , gostaríamos de uma representação como em (2.2). Para isso, usaremos uma estrutura quase complexa em M , isto é, um campo suave J de estruturas complexas nos espaços tangentes:

$$x \mapsto J_x: T_x M \rightarrow T_x M$$

sendo J_x linear e $J_x^2 = -id$.

Proposição 2.1.3. *Se (M, ω) é uma variedade simplética, então existe uma estrutura quase complexa J em M e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em M satisfazendo*

$$\omega_x(v, J_x u) = \langle v, u \rangle_x$$

para $x \in M$ e $v, u \in T_x M$. Da simetria de um produto interno, segue que

$$\omega_x(J_x v, J_x u) = \omega_x(v, u)$$

isto é, J_x é uma aplicação simplética no espaço vetorial simplético $(T_x M, \omega_x)$. Mais ainda,

$$J_x^* = J_x^{-1} = -J_x$$

onde J_x^* é a adjunta de J_x com respeito ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$. Uma estrutura J satisfazendo tais propriedades é dita estrutura quase complexa compatível com a forma ω .

Demonstração. Seja g uma métrica Riemanniana em M . Fixado $x \in M$, construiremos J_x em $T_x M$. Em toda a construção, a dependência em x será suave pela suavidade das aplicações usadas e omitiremos tal dependência.

Como ω é não degenerada, existe um único isomorfismo linear

$$A: T_x M \rightarrow T_x M$$

que satisfaz

$$\omega(u, v) = g(Au, v), \quad u, v \in T_x M.$$

Como ω é antissimétrica, obtemos

$$\begin{aligned} g(Au, v) &= \omega(u, v) = -\omega(v, u) \\ &= -g(Av, u) = -g(v, A^*u) = g(-A^*u, v) \end{aligned}$$

onde A^* é a aplicação g -adjunta de A . Logo, $A = -A^*$. Dessa forma, a aplicação $A^*A = AA^* = -A^2$ é uma transformação positiva g -auto-adjunta. Sendo assim, possui raiz quadrada, também positiva e g -auto-adjunta (v. por exemplo [Kre, Theorem 9.4-2 page 476]), $Q := \sqrt{-A^2}$, isto é, $Q^2 = -A^2$. Observe que como A é invertível, $-A^2$ é invertível e logo Q também é. Mais ainda, como Q é a raiz quadrada positiva de $-A^2$, temos que Q comuta com todo operador que comuta com $-A^2$. Em particular, Q^{-1} comuta com A . Seja

$$J = AQ^{-1}.$$

Daí,

$$J^2 = AQ^{-1}AQ^{-1} = A^2(Q^{-1})^2 = A^2(-A^2)^{-1} = -id$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}
\omega(u, Jv) &= g(Au, Jv) = g(Au, AQ^{-1}v) \\
&= g(A^*Au, Q^{-1}v) = g(Q^2u, Q^{-1}v) \\
&= g(Qu, v)
\end{aligned}$$

Pelas propriedades de Q , concluímos que

$$\langle u, v \rangle := g(Qu, v)$$

define uma métrica Riemanniana em M a qual, em geral, é uma métrica diferente de g . Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\omega(v, Ju) &= g(Qv, u) = \langle v, u \rangle, \\
\omega(Jv, Ju) &= g(QJv, u) = \langle Jv, u \rangle = \langle u, Jv \rangle \\
&= g(Qu, Jv) = \omega(u, JJv) = -\omega(u, v) = \omega(v, u) \quad e \\
J^* &= (AQ^{-1})^* = (Q^{-1}A)^* = A^*Q^{-1} = -AQ^{-1} = -J.
\end{aligned}$$

Assim, terminamos a demonstração. \square

A estrutura quase complexa compatível com a forma ω dada pela Proposição 2.1.3, generaliza a estrutura complexa em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ vista anteriormente, analisando $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ como variedade simplética.

Se denotarmos por ∇H o gradiente de uma função H com respeito a métrica encontrada na proposição anterior, isto é, $\langle \nabla H(x), v \rangle = dH(x)(v) \quad \forall v \in T_x M$, encontramos a representação

$$X_H(x) = J\nabla H \in T_x M$$

para o campo Hamiltoniano X_H . Com efeito, temos

$$\langle JX_H(x), v \rangle = -\langle X_H(x), Jv \rangle = \omega(X_H(x), v) = -dH(x)(v) = -\langle \nabla H(x), v \rangle$$

para todo v em $T_x M$ e logo, $JX_H(x) = -\nabla H(x)$.

2.2 Mergulhos Simpléticos e Elipsoides

Considerando dois domínios conexos e compactos D_1 e D_2 em \mathbb{R}^{2n} com bordo suave difeomorfos por um difeomorfismo que preserva a orientação, podemos perguntar: Sob quais condições adicionais em D_1 e D_2 conseguimos garantir a existência de um difeomorfismo que preserva volume? Isto é, existe um difeomorfismo $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ tal que $\det d\varphi(x) = 1$ para todo x no interior de D_1 . É claro que uma condição necessária imediata é que $\text{vol } D_1 = \text{vol } D_2$. Em verdade, esta é a única condição necessária e suficiente para a existência de um difeomorfismo como mencionado acima. O teorema a seguir, cuja demonstração se encontra em [DM90], nos dá como caso particular, o que foi dito.

Teorema 2.2.1. (Dacorogna-Moser) Sejam D_1 e D_2 dois domínios conexos e compactos com fronteira suave em \mathbb{R}^m . Considere $\alpha(x) = a(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ e $\beta(x) = b(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ formas volume com $a, b > 0$ em D_1 e D_2 respectivamente. Se $\varphi: D_1 \rightarrow D_2$ é um difeomorfismo que preserva orientação, então existe difeomorfismo $\psi: D_1 \rightarrow D_2$ satisfazendo $\psi = \varphi$ em ∂D_1 e

$$\det(d\psi(x))b(\psi(x)) = \lambda a(x),$$

onde λ é definido por

$$\int_{D_2} b = \lambda \int_{D_1} a.$$

Se no Teorema 2.2.1 tivermos o caso particular $\text{vol } D_1 = \text{vol } D_2$, escolhemos as formas volumes α e β com $a = b = 1$ e encontramos $\lambda = 1$ e $\det(d\psi(x)) = 1$. Neste caso, ψ é um difeomorfismo que preserva volume.

Agora, fazendo jus ao título desta seção, consideremos dois abertos U e V em \mathbb{R}^{2n} e procuremos condições que permitam a existência de um mergulho simplético de U em V , isto é, um mergulho $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ tal que $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$ e $\varphi(U) \subset V$. Como toda aplicação simplética preserva volume, claramente temos necessariamente a restrição $\text{vol } U \leq \text{vol } V$. A condição $\text{vol } U < \text{vol } V$ já é suficiente para garantir a existência de um mergulho que preserva volume, entretanto não é tão simples se exigirmos a propriedade simplética como indicam os próximos exemplos.

Exemplo 2.2.2. Considere a bola $B(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} ; |x|^2 + |y|^2 < R^2\}$ que possui, obviamente, volume finito. Conseguimos mergulhar $B(R)$ de forma simplética nos cilindros abertos de volume infinito

$$\hat{Z}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} ; x_1^2 + x_2^2 < r^2\},$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, para todo r positivo. Com efeito, defina a aplicação linear $\varphi: B(R) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ pondo

$$\varphi(x, y) = (\varepsilon x_1, \varepsilon x_2, x_3, \dots, x_n, \frac{1}{\varepsilon} y_1, \frac{1}{\varepsilon} y_2, y_3, \dots, y_n)$$

com $y = (y_1, \dots, y_n)$ e $\varepsilon > 0$. Observe que $\varphi(B(R)) \subset \hat{Z}(r)$ se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno ($\varepsilon < r/R$, por exemplo). Além disso,

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega_0(u, v) &= \omega_0(\varphi(u), \varphi(v)) = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j(\varphi(u), \varphi(v)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon dy_1 \wedge dx_1(u, v) + \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon dy_2 \wedge dx_2(u, v) + \\ &+ \sum_{j=3}^n dy_j \wedge dx_j(u, v) = \omega_0(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^{2n} \end{aligned}$$

ou seja, φ é uma aplicação simplética. Observe que se $\{e_i, f_j\}$ é base simplética de \mathbb{R}^{2n} , então o plano $\text{span}\{e_1, e_2\}$, onde a base do cilindro $\hat{Z}(r)$ está contida, é isotrópico e portanto, não herda estrutura simplética.

Exemplo 2.2.3. Como no exemplo anterior, tentaremos fazer o análogo da bola $B(R)$ no cilindro $Z(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} ; x_1^2 + y_1^2 < r^2\}$. Neste caso, o cilindro tem base contida no plano simplético $\text{span}\{e_1, f_1\}$ onde $\{e_i, f_j\}$ é base simplética de \mathbb{R}^{2n} . Definimos então $\psi: B(R) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ pondo

$$\psi(x, y) = (\varepsilon x_1, \frac{1}{\varepsilon} x_2, x_3, \dots, x_n, \varepsilon y_1, \frac{1}{\varepsilon} y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Dessa forma, temos novamente $\psi(B(R)) \subset Z(r)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mas neste caso, o cálculo

$$\begin{aligned} \psi^* \omega_0(u, v) &= \omega_0(\psi(u), \psi(v)) = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j(\psi(u), \psi(v)) \\ &= \varepsilon^2 dy_1 \wedge dx_1(u, v) + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 dx_2 \wedge dy_2(u, v) + \sum_{j=3}^n dy_j \wedge dx_j(u, v) \end{aligned}$$

nos mostra que ψ é simplética somente quando $\varepsilon = 1$ e assim, podemos ter $\psi(B(R)) \subset Z(r)$ somente quando $r \geq R$.

O que concluímos no caso particular do exemplo anterior é verdade de uma forma mais geral. O Teorema de Gromov abaixo, que demonstraremos posteriormente (ver Teorema 3.1.9), nos confirma isso.

Teorema 2.2.4. (Teorema nonsqueezing de Gromov) Se $r < R$ então não existe mergulho simplético φ definido em $B(R)$ satisfazendo $\varphi(B(R)) \subset Z(r)$.

Este teorema nos mostra que não podemos *apertar* uma bola de modo que ela caiba num cilindro simplético preservando a estrutura simplética. Em particular, que a característica simplética de uma aplicação é mais rígida do que a característica de preservar volume. A descoberta de Gromov motivou a pesquisa de invariantes simpléticos e entre estes, como já mencionamos, estão as capacidades simpléticas que darão uma ideia melhor da rigidez dos mergulhos simpléticos incluindo uma demonstração simples do Teorema acima.

Nos atentaremos a mergulhos de subconjuntos abertos específicos de \mathbb{R}^{2n} , os elipsoides que definiremos em sequência.

Definição 2.2.5. Uma função $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ em um espaço vetorial real V é chamada **forma quadrática** se existe uma forma bilinear simétrica $\hat{q}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$q(x) = \frac{1}{2} \hat{q}(x, x), \quad x \in V.$$

A forma q é chamada *positiva definida* quando \hat{q} é um produto interno em V .

No caso de q ser uma forma quadrática positiva definida como na definição acima, escolhendo uma base em V , obtemos:

$$\hat{q}(x, y) = \langle Sx, y \rangle$$

onde S é uma matriz simétrica positiva e logo, $q(x) = \frac{1}{2} \langle Sx, x \rangle$, para todo $x \in V$.

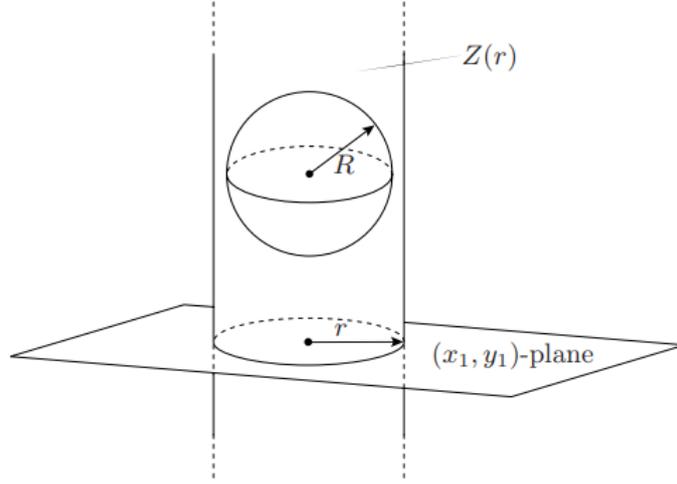


Figura 2.1: Teorema *nonsqueezing* de Gromov

Denotando por \mathcal{Q} o conjunto das formas quadráticas positivas definidas em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e por $G = Sp(n)$ o grupo das aplicações lineares simpléticas $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, temos que G age em \mathcal{Q} da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \times G &\rightarrow \mathcal{Q} \\ (q, \varphi) &\mapsto q \circ \varphi \end{aligned}$$

Mostraremos que as órbitas de \mathcal{Q} sob esta ação são caracterizadas por n números positivos.

Definição 2.2.6. *Um elipsoide $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ é um conjunto da forma*

$$E = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid q(x) < 1\}$$

para alguma forma quadrática positiva q .

O nome dado ao subconjunto definido acima é conhecido e pode ser que gere uma dúvida do motivo de usarmos o tal. O teorema abaixo deixa bem claro essa escolha.

Teorema 2.2.7. *Se q é uma forma quadrática positiva em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, então existe uma aplicação $\varphi \in Sp(n)$ tal que*

$$q \circ \varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j^2 + x_{n+j}^2),$$

com $0 < \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_1$. Os números λ_j são unicamente determinados por q e ω_0 , em verdade, são os autovalores do campo Hamiltoniano X_q associado à função Hamiltoniana q e a ω_0 .

Demonstração. Primeiramente, observamos que no espaço produto $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, as funções $k(x, y) = q(x) + q(y)$ e $\omega_0(x, y)$ onde $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$, são formas quadráticas,

a primeira devido a q ser forma quadrática em \mathbb{R}^{2n} e a segunda pois $\omega_0(x, y) = \frac{1}{2}\langle A(x, y), (x, y) \rangle$ onde A é a matriz em blocos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -J/2 \\ J/2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ onde } J \text{ é a matriz definida em (1.2).}$$

Como q é positiva definida, k também é e logo aplicaremos um argumento variacional interessante. Considere o conjunto

$$M(q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mid q(x) + q(y) = 1\}.$$

Claramente k é contínua e portanto, $M(q) = k^{-1}(1)$ é um subconjunto fechado. Além disso, sendo $k(x, y) = \langle S(x, y), (x, y) \rangle$ para uma matriz simétrica positiva S , os pontos de $M(q)$ cumprem $\frac{1}{2}(x, y)^T S(x, y) = 1$ e então, existe uma base β de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ tal que a forma k é representada por

$$[(x, y)^T]_{\beta} D[(x, y)]_{\beta} = x_1^2 \hat{\lambda}_1 + x_2^2 \hat{\lambda}_2 + \dots + x_n^2 \hat{\lambda}_n + y_1^2 \hat{\lambda}_{n+1} + \dots + y_n^2 \hat{\lambda}_{2n}$$

onde D é a matriz diagonal dada pelos autovalores $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{2n}$ da matriz simétrica S . Portanto, $M(q)$ é limitado. Como 1 é valor regular da função $k: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $M(q)$ é uma variedade compacta e dessa forma, a função $(x, y) \mapsto \omega_0(x, y)$ atinge um valor máximo em tal conjunto, digamos

$$\omega_0(a, b) = \max_{(x, y) \in M(q)} \omega_0(x, y).$$

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um multiplicador de Lagrange do ponto crítico (a, b) em $M(q)$. Então temos $dk(a, b) = \lambda d\omega_0(a, b)$. Lembrando que $dk(a, b): \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} dk(a, b)(x, y) &= dq(a)(x) + dq(b)(y) \\ &= d\left(\frac{1}{2}\hat{q}\right)(a, a)(x, x) + d\left(\frac{1}{2}\hat{q}\right)(b, b)(y, y) \\ &= \hat{q}(a, x) + \hat{q}(y, b) \end{aligned}$$

e $d\omega_0(a, b): \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d\omega_0(a, b)(x, y) = \omega_0(a, y) + \omega_0(x, b),$$

temos explicitamente

$$\begin{aligned} \hat{q}(a, x) &= dq(a)(x) = \lambda \omega_0(x, b) \\ \hat{q}(y, b) &= dq(b)(y) = \lambda \omega_0(a, y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Em virtude de $q(x) = \frac{1}{2}\hat{q}(x, x)$, aplicando $x = a, y = b$ nas equações acima e somando-as, obtemos

$$2(q(a) + q(b)) = 2\lambda(\omega_0(a, b))$$

e logo, $\lambda \omega_0(a, b) = 1$. Sendo ω_0 antissimétrica, concluímos que seu valor máximo em $M(q)$ é positivo e portanto,

$$\omega_0(a, b) = \frac{1}{\lambda} > 0.$$

Em particular, novamente de ω_0 antissimétrica, a e b são linearmente independentes em \mathbb{R}^{2n} . Como $\omega_0(a, b) \neq 0$, o subespaço $V_1 = \text{span}\{a, b\}$ é simplético. Na verdade, este é o autoespaço do campo Hamiltoniano X_q associado ao par $\pm i\lambda$ de autovalores imaginários. Com efeito, da definição de campo Hamiltoniano e de (2.6) retiramos que

$$X_q(a) = \lambda b \quad e \quad X_q(b) = -\lambda a$$

e daí, $X_q(a \pm ib) = \mp(i\lambda)(a \pm ib)$. Fazendo a normalização $e_1 = \alpha a$, $f_1 = -\alpha b$ com $\alpha^2 = \lambda$, encontramos

$$\omega_0(f_1, e_1) = \alpha^2 \omega_0(a, b) = \lambda \omega_0(a, b) = 1.$$

Ou seja, $\{e_1, f_1\}$ é base simplética de V_1 . Observe que

$$q(e_1) = \frac{1}{2} \hat{q}(e_1, e_1) = \frac{\lambda}{2} \hat{q}(a, a) = \frac{\lambda}{2} \lambda \omega_0(a, b) = \frac{\lambda}{2}$$

e analogamente, $q(f_1) = \frac{\lambda}{2}$. Além disso, pondo $x = f_1$ na primeira das equações de (2.6), obtemos $\hat{q}(e_1, f_1) = 0$.

Sobre formas quadráticas, o cálculo

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \frac{1}{2} \hat{q}(x+y, x+y) = \frac{1}{2} (2\hat{q}(x, y) + \hat{q}(x, x) + \hat{q}(y, y)) \\ &= \hat{q}(x, y) + q(x) + q(y) \end{aligned}$$

nos mostra que $\hat{q}(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$. Logo, em nosso caso, tomando $v = \xi e_1 + \eta f_1 \in V_1$, temos

$$\hat{q}(\xi e_1, \eta f_1) = q(\xi e_1 + \eta f_1) - q(\xi e_1) - q(\eta f_1) = q(\xi e_1 + \eta f_1) - \frac{\lambda}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

e como $\hat{q}(e_1, f_1) = 0$, alcançamos a forma desejada

$$q(v) = \frac{\lambda}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

no subespaço V_1 . Para iterarmos o argumento e estendermos a forma para \mathbb{R}^{2n} , seja

$$V_1^{\omega_0} = \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid \omega_0(v_1, v) = 0 \quad \forall v_1 \in V_1\}$$

o ortogonal simplético de V_1 em \mathbb{R}^{2n} . Então $V_1^{\omega_0}$ é subespaço simplético e como já vimos, $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_1^{\omega_0}$. Afirmamos agora que se $v \in V_1$ e $w \in V_1^{\omega_0}$, então $\hat{q}(v, w) = 0$. Isso é verdade pois V_1 é um autoespaço. Colocando $x, y \in V_1^{\omega_0}$ nas equações (2.6), o lado direito se anula e logo, o esquerdo também. Como $V_1 = \text{span}\{a, b\}$, a afirmação está provada. Temos então

$$q(v+w) = q(v) + q(w) \tag{2.7}$$

para $v \in V_1$ e $w \in V_1^{\omega_0}$.

Todos os argumentos que foram aplicados até aqui, podem ser repetidos para o espaço $V_1^{\omega_0}$ resultando em um outro subespaço simplético, digamos V_2 , de dimensão 2 satisfazendo a propriedade desejada. Depois disso, podemos fazer o mesmo para o subespaço $(V_1 \oplus V_2)^{\omega_0}$ e repetindo o processo um número

finito de vezes (n vezes no total), encontramos $\mathbb{R}^{2n} = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$ com V_j subespaço simplético de dimensão 2, o qual é autoespaço de X_q , correspondendo ao par $(\pm i\lambda_j)$ de autovalores com $\lambda_j > 0$. Repetindo o que foi feito em (2.7) a tais subespaços, concluímos que se $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ com $v_j \in V_j$, então $q(v) = q(v_1) + q(v_2) + \dots + q(v_n)$. Mais ainda, existem bases simpléticas dos subespaços V_j tais que

$$q(v) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j^2 + x_{n+j}^2)$$

onde $v = \sum_{j=1}^n (x_j e_j + x_{n+j} f_j)$. Tais bases formam uma base simplética de \mathbb{R}^{2n} e a aplicação $\varphi \in Sp(n)$ no enunciado do teorema é a aplicação linear que transforma a base canônica nesta base obtida. Observe que a ordem $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ dada no enunciado do teorema é fruto da própria construção dos mesmos, uma vez que estes são os inversos dos máximos de ω_0 restrita a n variedades compactas onde a primeira contém a segunda, a segunda contém a terceira e assim por diante. \square

Observação 2.2.8. Se $q(x) = \frac{1}{2} \langle Sx, x \rangle$ com S simétrica e positiva, então X_q é o campo vetorial linear $X_q(x) = JSx$ e se $\tau \in Sp(n)$ é uma matriz simplética, concluímos pela lei da transformação de campos Hamiltonianos

$$X_{q \circ \tau} = \tau^{-1} X_q \tau.$$

Portanto, os campos X_q e $X_{q \circ \tau}$ são conjugados e possuem assim, os mesmos autovalores. Associando os n números reais positivos do Teorema 2.2.7 $\lambda = \lambda(q)$ à forma quadrática positiva q , concluímos então que $\lambda(q \circ \tau) = \lambda(q) \forall q \in \mathcal{Q}$ e $\tau \in Sp(n)$. Logo, estes números caracterizam as órbitas de \mathcal{Q} sob a ação do grupo $Sp(n)$.

Mudando a notação do Teorema 2.2.7, introduzimos $\lambda_i = 2/r_i^2$, $i = 1, 2, \dots, n$ e assim, a forma normal fica

$$q \circ \varphi(x) = \sum_1^n \frac{1}{r_j^2} (x_j^2 + x_{n+j}^2),$$

associando agora com todo $q \in \mathcal{Q}$, os números positivos

$$0 \leq r_1(q) \leq r_2(q) \leq \dots \leq r_n(q)$$

que caracterizam as órbitas de $Sp(n)$ agindo em \mathcal{Q} . Abreviando $r = (r_1, \dots, r_n)$, provamos que:

Proposição 2.2.9. Temos $r(q) = r(q \circ \varphi)$ para todo q em \mathcal{Q} e todo φ em $Sp(n)$. Mais ainda, decorre diretamente do Teorema 2.2.7 que se $r(q) = r(Q)$ para duas formas q, Q em \mathcal{Q} , então existe um $\varphi \in Sp(n)$ satisfazendo $Q = q \circ \varphi$.

Proposição 2.2.10. Considere q e Q em \mathcal{Q} . Temos

$$Q \leq q \Rightarrow r_j(q) \leq r_j(Q) \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Demonstração. Da demonstração do Teorema 2.2.7, temos

$$\frac{1}{2}(r_1(q))^2 = \frac{1}{\lambda_1(q)} = \max_{(x,y) \in M(q)} \omega_0(x,y) = \omega_0(a,b),$$

onde $M(q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mid q(x) + q(y) = 1\}$. Como $Q(x) \leq q(x)$ para todo x em \mathbb{R}^{2n} , existe $\alpha \geq 1$ tal que $1 = Q(\alpha a) + Q(\alpha b)$ (basta tomar $\alpha = 1/\sqrt{Q(a) + Q(b)}$). Portanto,

$$(\alpha a, \alpha b) \in M(Q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \mid Q(x) + Q(y) = 1\}$$

e $\omega_0(\alpha a, \alpha b) = \alpha^2 \omega_0(a,b) \geq \omega_0(a,b)$. Tomando agora o máximo de ω_0 em $M(Q)$, concluímos que $r_1(Q) \geq r_1(q)$. Feito isso, podemos proceder como na construção dos λ_j e considerarmos uma cadeia de variedades compactas do tipo $M(q)$ e $M(Q)$, de forma que repetindo o raciocínio acima em cada etapa, obtemos que $r_j(Q) \geq r_j(q)$ para $1 \leq j \leq n$. \square

Para interpretarmos os resultados acima geometricamente, associaremos com a forma $q \in \mathcal{Q}$, o elipsoide $E(q) = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid q(x) < 1\} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Neste caso, a ação do grupo $Sp(n)$ é visualizada por

$$\varphi^{-1}(E(q)) = E(q \circ \varphi) \tag{2.8}$$

para $\varphi \in Sp(n)$. Observe que sendo $q, Q \in \mathcal{Q}$, temos que se $q \geq Q$, vale $Q(x) \leq q(x) < 1$ para todo x no elipsoide $E(q)$ e logo, $E(q) \subset E(Q)$. Reciprocamente, seja $E(q) \subset E(Q)$. Suponha por absurdo $q < Q$. Tome x_0 tal que $Q(x_0) \neq 0$. Assim,

$$1 = \frac{Q(x_0)}{Q(x_0)} = Q\left(\frac{x_0}{(Q(x_0))^2}\right) > q\left(\frac{x_0}{(Q(x_0))^2}\right)$$

e logo, $\frac{x_0}{(Q(x_0))^2} \in E(q) \setminus E(Q)$, o que contradiz a continência. Assim,

$$E(q) \subset E(Q) \Leftrightarrow q \geq Q,$$

logo, $E(q) = E(Q)$ se, e somente se, $q = Q$. Podemos portanto associar com o aberto E , os números $r(E) := r(q)$ quando $E = E(q)$.

Em virtude de (2.8), segue da Proposição 2.2.9, que os números $r(E)$ são invariantes sob a ação do grupo das aplicações lineares simpléticas. Resumindo,

Proposição 2.2.11. *Se E e F são elipsoides e $\varphi \in Sp(n)$, então*

$$r(\varphi(E)) = r(E)$$

Reciprocamente, se $r(E) = r(F)$, existe uma aplicação $\varphi \in Sp(n)$ satisfazendo $\varphi(E) = F$.

Mais ainda, tais invariantes possuem uma propriedade de monotonicidade.

Proposição 2.2.12. *Se E e F são elipsoides, então*

$$E \subset F \Rightarrow r_j(E) \leq r_j(F), \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Reciprocamente, se $r_j(E) \leq r_j(F)$, para $1 \leq j \leq n$, então existe uma aplicação $\varphi \in Sp(n)$ tal que $\varphi(E) \subset F$.

Demonstração. Seja $E = E(q)$ e $F = F(Q)$. Como $E \subset F$, temos $q \geq Q$ e logo, da Proposição 2.2.10, temos

$$r_j(E) = r_j(q) \leq r_j(Q) = r_j(F), \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Por outro lado, se $r_j(q) = r_j(E) \leq r_j(F) = r_j(Q)$, para todo $j = 1, \dots, n$, então, pelo Teorema 2.2.7, existem $\tau, \Psi \in Sp(n)$ tais que $q \circ \tau \geq Q \circ \Psi$ e logo, $\tau(E) \subset \Psi(F)$. Pondo $\varphi := \Psi^{-1} \circ \tau$, encontramos $\varphi(E) \subset F$. \square

Definimos então para os elipsoides em \mathbb{R}^{2n} os invariantes $r(E)$ que nos permitem responder à questão de mergulhos simpléticos lineares entre elipsoides:

Teorema 2.2.13. *Se E e F são dois elipsoides, então existe $\varphi \in Sp(n)$ tal que $\varphi(E) \subset F$ se, e somente se, $r_j(E) \leq r_j(F)$ para todo $1 \leq j \leq n$.*

2.3 Princípios Variacionais

O cálculo variacional é uma área da Matemática que, em geral, tem como objetivo encontrar máximos ou mínimos de funcionais, ou seja, funções lineares definidas em espaços vetoriais (de dimensão infinita). O famoso problema da braquistócrona é conhecido como o marco inicial de tal área (v. por exemplo [Tro96, Chapter 6, p.145]). Muitas das vezes um ponto crítico de um funcional é solução de uma equação diferencial e posteriormente buscaremos soluções periódicas de campos Hamiltonianos, logo, é de nosso interesse tal estudo.

Seja $\Phi: V \rightarrow \mathbb{K}$ um funcional definido num espaço vetorial normado $(V, \|\cdot\|)$, isto é, uma aplicação entre esse espaço e o corpo \mathbb{K} de seus escalares (normalmente consideramos o corpo \mathbb{R}). Chamamos

$$\Delta\Phi[h] = \Phi[x+h] - \Phi[x]$$

de incremento correspondente a $h = h(t)$ da variável independente $x = x(t)$, a dependência de t na escrita vem de que, normalmente, o espaço onde trabalhamos é um espaço de funções.

Definição 2.3.1. *Um funcional $\Phi[x]$ é dito diferenciável quando se tem*

$$\Delta\Phi[h] = g[h] + \varepsilon(h)\|h\|,$$

onde $g[h]$ é um funcional linear e ε tende a zero quando $\|h\|$ tende a zero, isto é, ε é da ordem de $\|h\|$. Neste caso, a parte linear principal do incremento, $g[h]$ é chamada de variação (ou diferencial) de $\Phi[x]$ e denotamos

$$g[h] := \delta\Phi[h].$$

Não é de grande esforço verificar que na definição acima, o diferencial de um funcional diferenciável é único (v. por exemplo [GFS00, Theorem 1, p.12]). Exploraremos agora uma situação análoga à do cálculo diferencial real, onde todo ponto de mínimo (ou máximo) de uma função é ponto crítico da mesma.

Teorema 2.3.2. *Uma condição necessária para um funcional diferenciável $\Phi[x]$ ter um extremo (máximo ou mínimo) em $x = \hat{x}$ é $\delta\Phi[h] = 0$ para $x = \hat{x}$ e todo h .*

Demonstração. Suponha que $\Phi[x]$ possua um mínimo em $x = \hat{x}$. Da diferenciabilidade de Φ , temos que para $\|h\|$ suficientemente pequeno, o sinal de $\Delta\Phi[h]$ é o mesmo de $\delta\Phi[h]$. Suponha por absurdo que $\delta\Phi[h_0] \neq 0$ para algum h_0 . Então para qualquer $\alpha > 0$, temos

$$\Delta\Phi[-\alpha h_0] = \delta\Phi[-\alpha h_0] + \varepsilon\|-\alpha h_0\| = -\delta\Phi[\alpha h_0] + \varepsilon\|\alpha h_0\|$$

pela linearidade de $\delta\Phi$ e por propriedade da norma. Assim, $\Delta\Phi[-\alpha h_0]$ pode ser negativo para αh_0 com norma suficientemente pequena. Isso contradiz o fato de \hat{x} ser ponto de mínimo (temos $\Delta\Phi[h] = \Phi[\hat{x} + h] - \Phi[\hat{x}] \geq 0$ quando $\|h\|$ é suficientemente pequeno). \square

Vamos nos concentrar agora no problema variacional mais simples. Seja $F(t, x, v)$ uma função com derivadas parciais de primeira e segunda ordem contínuas com respeito a todas variáveis. Então, de todas as funções $x(t) \in C^1[a, b]$ que satisfazem as condições de contorno

$$x(a) = A, \quad x(b) = B$$

queremos encontrar a função x que minimiza o funcional

$$\Phi[x] = \int_a^b F(t, x, x') dt.$$

Lema 2.3.3. Se $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ são contínuas em $[a, b]$ e

$$\int_a^b [\alpha(t)h(t) + \beta(t)h'(t)] dt = 0$$

para toda função $h(t) \in C^1[a, b]$ com $h(a) = h(b) = 0$, então $\beta'(t) = \alpha(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Demonstração. Pondo $A(t) = \int_a^t \alpha(s) ds$ e integrando por partes, temos

$$\int_a^b \alpha(t)h(t) dt = - \int_a^b A(t)h'(t) dt$$

Daí, somando $\int_a^b \beta(t)h'(t) dt$ em ambos os lados, obtemos

$$0 = \int_a^b [\alpha(t)h(t) + \beta(t)h'(t)] dt = \int_a^b [-A(t) + \beta(t)]h'(t) dt$$

onde a primeira igualdade vem da hipótese.

Afirmção: Sendo $\int_a^b [-A(t) + \beta(t)]h'(t) dt = 0 \forall h(t) \in C^1[a, b]$ com $h(a) = h(b) = 0$ vale que, para todo t em $[a, b]$, $-A(t) + \beta(t)$ é constante.

Prova da Afirmção: Seja c a constante definida por

$$\int_a^b [-A(t) + \beta(t) - c] dt = 0.$$

Tome

$$h(t) = \int_a^t [-A(s) + \beta(s) - c] ds,$$

vale que $h \in C^1[a, b]$, já que $[-A + \beta]$ é contínua, e $h(a) = h(b) = 0$. Então temos por um lado

$$\int_a^b [-A(t) + \beta(t) - c]h'(t)dt = \int_a^b [-A(t) + \beta(t)]h'(t)dt - c[h(b) - h(a)] = 0$$

e por outro lado,

$$0 = \int_a^b [-A(t) + \beta(t) - c]h'(t)dt = \int_a^b [-A(t) + \beta(t) - c]^2 dt,$$

onde usamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Segue-se então que $[-A(t) + \beta(t) - c]^2 = 0$ para $t \in [a, b]$ e logo,

$$-A(t) + \beta(t) = c \quad \forall t \in [a, b].$$

Portanto, provada a afirmação, temos, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $\beta'(t) = A'(t) = \alpha(t) \quad \forall t \in [a, b]$. \square

Teorema 2.3.4 (Equação de Euler-Lagrange). *Seja $\Phi[x]$ um funcional da forma*

$$\int_a^b F(t, x, x')dt,$$

definido no conjunto das funções $x(t)$ que possuem derivadas parciais contínuas em $[a, b]$ e cumprem as condições de contorno $x(a) = A$ e $x(b) = B$. Então, uma condição necessária para $\Phi[x]$ ter um extremo (mínimo ou máximo) em x é que x satisfaça

$$F_x - \frac{d}{dt}F_{x'} = 0.$$

Demonstração. Sendo x uma função no conjunto citado, temos que dado um incremento $h(t)$ em $x(t)$, para que as condições permaneçam sendo satisfeitas, h deve cumprir $h(a) = h(b) = 0$. Então,

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \Phi[x + h] - \Phi[x] &= \int_a^b F(t, x + h, x' + h')dt - \int_a^b F(t, x, x')dt \\ &= \int_a^b [F(t, x + h, x' + h') - F(t, x, x')]dt \end{aligned}$$

e pelo Teorema de Taylor temos

$$\Delta\Phi = \int_a^b [F_x(t, x, x')h + F_{x'}(t, x, x')h']dt + \varepsilon||h||$$

onde ε tende a zero quando $||h||$ tende a zero. Daí, pela nossa definição de diferencial,

$$\delta\Phi = \int_a^b [F_x(t, x, x')h + F_{x'}(t, x, x')h']dt.$$

Além disso, para $x = x(t)$ ser ponto de extremo, já vimos que é necessário valer

$$0 = \delta\Phi = \int_a^b (F_x h + F_{x'} h')dt$$

para todo h em $C^1[a, b]$ com $h(a) = h(b) = 0$. Logo, o resultado segue do Lema 2.3.3. \square

Seguindo [MS17, p.13-14], mostraremos agora a relação da Equação de Euler-Lagrange com as equações Hamiltonianas dadas adiante em (2.10) e já apresentadas no caso particular $M = \mathbb{R}^{2n}$ por (2.3).

É claro que podemos generalizar o raciocínio anterior para caminhos $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ em \mathbb{R}^n . Neste caso, consideramos $F = F(t, x, v)$ e sob a condição (condição de Legendre)

$$\det \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v_i \partial v_j} \right) \neq 0 \quad (2.9)$$

a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

onde usamos a representação $\partial F / \partial x = (\partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_n)$, define um sistema de equações diferenciais de segunda ordem de n variáveis.

Introduzindo as novas variáveis $y_j := \partial F / \partial v_j$, $j = 1, \dots, n$, temos

$$\dot{y}_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial v_j} = \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

sempre que x for solução da equação de Euler-Lagrange. Além disso, da condição (2.9), o Teorema da Função Implícita garante que v pode ser localmente interpretado como função de t, x e y , digamos

$$v_j = g_j(t, x, y).$$

Definimos agora o Hamiltoniano

$$H := \sum_{j=1}^n y_j v_j - F = \langle y, v \rangle - F,$$

conhecido como transformada de Legendre de F , e consideraremos o tal como função de t, x e y . Dessa forma, vale

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial H}{\partial y_j} = v_j = g_j(t, x, y)$$

E assim, se x é solução da equação de Euler-Lagrange, temos

$$v = \frac{\partial H}{\partial y}$$

e

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

Concluimos, em particular, que se um caminho x é um ponto crítico do funcional $\int_a^b F(t, x, \dot{x}) dt$ ($v = \dot{x}$), então x é solução do sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \quad (2.10)$$

associado a transformada de Legendre de F . Muitas das vezes na literatura, a aplicação F acima é chamada de Lagrangiano e denotada por $L(t, x, \dot{x})$.

2.4 Superfícies de Energia

Seendo X_H campo Hamiltoniano de uma função suave H em \mathbb{R}^{2n} , temos que o fluxo φ^t deste campo deixa H invariante, isto é,

$$H(\varphi^t(x)) = H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}$$

para todo t onde o fluxo está definido. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\varphi^t) &= dH(\varphi^t) \left(\frac{d\varphi^t}{dt} \right) = dH(\varphi^t)(X_H(\varphi^t)) = \\ &= -\omega_0(X_H(\varphi^t), X_H(\varphi^t)) = 0. \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem de ω_0 ser anti simétrica. Em outras palavras, mostramos que H é uma integral do campo X_H .

Definição 2.4.1. Chamamos de superfície de energia regular de um Hamiltoniano H o conjunto de nível

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n} \mid H(x) = \text{constante}\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

quando $dH(x) \neq 0$ para $x \in S$.

Geometricamente, o que mostramos antes da definição é que as superfícies de energia de um Hamiltoniano H são invariantes pelo fluxo de X_H .

Seendo S uma superfície de energia regular, segue-se que S é uma hiperfície (variedade de codimensão 1) suave cujo espaço tangente em $x \in S$ é dado por

$$T_x S = \{v \in \mathbb{R}^{2n} \mid dH(x)(v) = 0\} = (\nabla H(x))^\perp. \quad (2.11)$$

onde $(\nabla H(x))^\perp$ denota o complemento ortogonal com respeito ao produto interno Euclidiano, (v. por exemplo, [Lee12, Corollary 5.14 (Regular Level Set Theorem), p.106]).

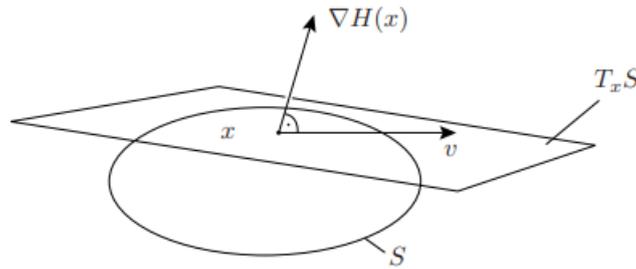


Figura 2.2: Espaço tangente de uma superfície de energia regular

No que segue, assumiremos S uma superfície de energia regular compacta. Já que $dH(x)X_H(x) = -\omega_0(X_H, X_H) = 0$, temos $X_H(x) \in T_x S$ e logo por restrição, X_H define um campo vetorial em S que pela regularidade de S , não se anula. Seendo φ^t o fluxo de X_H em S , temos que φ^t tem propriedades de recorrência devido à característica de preservar volume (φ^t é simplético) e além disso, como S é compacta, φ^t está definido em S para todo $t \in \mathbb{R}$.

Descreveremos agora um fenômeno percebido por H. Poincaré. Para tanto, seja $\Omega = \omega_0^n$ forma volume em \mathbb{R}^{2n} . Como $dH(x) \neq 0$ numa vizinhança U de uma superfície de energia regular S , encontramos uma $(2n-1)$ -forma α em U satisfazendo

$$\Omega = dH \wedge \alpha \text{ em } U.$$

De fato, basta tomarmos β tal que $\omega_0 = dH \wedge \beta$ e tomarmos $\alpha = \beta \wedge \omega_0^{n-1}$. Denotando por $j: S \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ a inclusão do conjunto de nível S em \mathbb{R}^{2n} , a $(2n-1)$ -forma $\mu = j^*\alpha$ é claramente uma forma volume em S . Tal forma é única. Com efeito, se $\Omega = dH \wedge \alpha = dH \wedge \alpha'$ então $dH \wedge (\alpha - \alpha') = 0$ e daí $\alpha - \alpha' = dH \wedge \gamma$ para uma $(2n-2)$ -forma γ em U . Temos portanto, $j^*\alpha = j^*\alpha' + j^*(dH \wedge \gamma) = j^*\alpha'$ onde a última igualdade segue de (2.11). A forma volume μ é invariante sob o fluxo φ^t de X_H : $(\varphi^t)^*\mu = \mu$. Com efeito, temos

$$\Omega = (\varphi^t)^*\Omega = (\varphi^t)^*(dH \wedge \alpha) = (\varphi^t)^*dH \wedge (\varphi^t)^*\alpha = dH \wedge (\varphi^t)^*\alpha$$

e pela unicidade provada acima, $(\varphi^t \circ j)^*\alpha = j^*(\varphi^t)^*\alpha = j^*\alpha$. Mas como j é a inclusão, temos $\varphi^t \circ j = j \circ \varphi^t$ e logo, $(\varphi^t)^*(j^*\alpha) = j^*\alpha$.

Observação 2.4.2. *No contexto da presente discussão, há uma medida regular m em S associada naturalmente à forma μ pondo $m(A) = \int_A \mu$, onde $A \subset S$ é um subconjunto onde a integral faça sentido. Observe que $\int_{\varphi^t(A)} \mu = \int_A (\varphi^t)^*\mu = \int_A \mu$ e logo, com respeito à medida μ , temos*

$$m(\varphi^t(A)) = m(A), \quad A \subset S.$$

Além disso, como S é compacta, temos $m(S) < \infty$.

Teorema 2.4.3. *(Teorema de recorrência de Poincaré) Sejam S uma superfície de energia regular compacta associada à função Hamiltoniana H e X_H o campo Hamiltoniano dessa função com fluxo φ^t . Então quase todo ponto (com respeito à medida m acima) em S é um ponto **recorrente**, isto é, para quase todo $x \in S$, existe uma sequência $t_j \rightarrow +\infty$ satisfazendo*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi^{t_j}(x) = x.$$

Demonstração. Denotemos $\varphi = \varphi^1$ o fluxo φ^t no tempo $t = 1$. Mostraremos que

$$m(A \cap [\bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(A)]) = m(A), \quad \forall A \subset S \quad (2.12)$$

e feito isso, usaremos que para todo n , existe uma quantidade enumerável de bolas $B_j(\frac{1}{n})$ de raio $\frac{1}{n}$ cobrindo S (S é espaço de Lindelöf). Aplicando (2.12) em todas as bolas, encontramos um conjunto de medida nula $N \subset S$ com a propriedade: todo $x \in S \setminus N$ retorna infinitas vezes a toda bola a que x pertence. Como para todo n existe um $j = j(x)$ tal que $x \in B_j(\frac{1}{n})$, o teorema fica provado.

Para mostrar (2.12), observe primeiro que os pontos

$$x \in \bigcap_{k \geq 0} \bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(A)$$

são os pontos de S tais que para todo inteiro k , existe um inteiro $j \geq k$ no qual se tem $x \in \varphi^{-j}(A)$, isto é, $\varphi^j(x) \in A$. A interseção com A consiste nos pontos x em A que retornam infinitas vezes ao conjunto A . Abreviando

$$A_k := \bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(A), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

temos uma sequência decrescente

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

Observe que, pela propriedade de grupo do fluxo,

$$\begin{aligned} \varphi^k(A_k) &= \varphi^k\left(\bigcup_{j \geq k} \varphi^{-j}(A)\right) = \bigcup_{j \geq k} \varphi^k(\varphi^{-j}(A)) \\ &= \bigcup_{j \geq k} \varphi^{k-j}(A) = \bigcup_{j \geq 0} \varphi^{-j}(A) = A_0 \text{ para todo } k. \end{aligned}$$

Mas φ^t preserva medida, então $m(A_k) = m(\varphi^k(A_k)) = m(A_0)$. Já que $A_0 \subset S$, temos $m(A_0) \leq m(S) < \infty$ e assim, $A_0 = A_k$ q.t.p para $k = 0, 1, 2, \dots$. Além disso, temos

$$m\left(\bigcap_{k \geq 0} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(\varphi^k(A^k)) = m(A_0)$$

(v. por exemplo, [Bar95, 3.4 Lemma p.21]) e portanto, $\bigcap_{k \geq 0} A_k = A_0$ q.t.p. Assim, como $A \subset A_0$, temos

$$A \cap \left(\bigcap_{k \geq 0} A_k\right) = A \cap A_0 = A \quad \text{q.t.p}$$

e isso finaliza nossa demonstração. \square

Não foi necessário na demonstração do teorema a compacidade de S , em verdade, a demonstração vale se S tem medida finita e base contável. Valendo em casos mais gerais, H. Poincaré pôde aplicar este teorema ao problema dos 3 corpos que diz respeito a modelar o movimento de 3 corpos tendo a posição e a velocidade inicial de cada um sob as leis de Newton e gravitação universal (Lua, Terra e Sol por exemplo).

Do último teorema provado, é natural que surja interesse na procura de fenômenos periódicos em uma superfície de energia regular S . Esperamos que perturbando levemente sistemas Hamiltonianos nos pontos de recorrência não tenhamos só o *retornam infinitas vezes* mas sim órbitas periódicas. Este é o chamado *Closing Problem*. Já foi provado por C.C Pugh e C. Robinson ([PR83]), que genericamente (para funções Hamiltonianas de classe C^2), órbitas periódicas são densas em superfícies de energia regulares compactas.

Dada uma superfície de energia regular e compacta

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; H(x) = c\} \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0),$$

estamos interessados em estudar a existência de soluções periódicas do campo vetorial Hamiltoniano X_H associado à função suave $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$. Este é um

problema em aberto. Notamos que nesta questão, a escolha da função Hamiltoniana que representa S não importa. De fato, assumamos que F seja outra função definindo S ,

$$S = \{x \mid H(x) = c\} = \{x \mid F(x) = \bar{c}\}$$

com $dH \neq 0$ e $dF \neq 0$ em S . Então, $\ker dF(x) = T_x S = \ker dH(x)$ e assim, $dF(x) = \rho(x)dH(x) \forall x \in S$, com ρ função suave não nula, devido ao fato de que se o núcleo de dois funcionais lineares são iguais, então um é múltiplo do outro. Sendo assim,

$$\omega_0(X_F, \cdot) = -dF(\cdot) = -\rho dH(\cdot) = \rho \omega_0(X_H, \cdot)$$

e portanto, os campos são paralelos:

$$X_F = \rho X_H \text{ em } S.$$

Logo, sendo φ^t fluxo do campo X_H e ψ^s fluxo do campo X_F , temos

$$\psi^s(x) = \varphi^t(x), \quad t = t(s, x) \quad x \in S$$

onde t é definido pela equação diferencial

$$\frac{dt}{ds} = \rho(\varphi^t(x)), \quad t(0, x) = 0.$$

Com efeito, os fluxos coincidem quando $s = 0$ e

$$\frac{d}{ds} \psi^s(x) - \varphi^t(x) = \frac{d}{ds} \psi^s(x) - \rho(\varphi^t(x)) X_H(\varphi^t(x)) = 0.$$

Em particular, as órbitas periódicas são as mesmas possuindo, em geral, parametrizações distintas.

Exemplo 2.4.4. *Considere a superfície de energia dada pela esfera*

$S = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; \frac{1}{2}|x|^2 = R > 0\}$ *de codimensão 1 em \mathbb{R}^{2n} . Então, as soluções do campo Hamiltoniano associado são periódicas. Para ver isso, observe que o Hamiltoniano $F(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ representa $S = \{x \mid F(x) = R\}$. Assim, resolvendo a equação linear*

$$\dot{x} = X_F(x) = J\nabla F(x) = Jx,$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

encontramos o fluxo $\psi^s(x) = e^{sJ}x = (\cos s)x + (\sin s)Jx$ e portanto, as soluções são periódicas.

Se Q é uma variedade suave, chamamos de **hiperfície** a uma subvariedade S de Q de codimensão 1, isto é, $\dim Q = \dim S + 1$. Neste trabalho ainda provaremos o forte resultado (ver Exemplo 3.3.3):

Teorema 2.4.5. *Para quase todo $\varepsilon \in I$, a hiperfície S_ε em \mathbb{R}^{2n} possui uma órbita periódica do campo Hamiltoniano X_H , onde I é um intervalo em torno de 0 e $S_\varepsilon = \{x \mid H(x) = 1 + \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^{2n}$.*

Por agora, demonstraremos que, sob certas hipóteses, existe uma órbita fechada em uma hipersuperfície.

Teorema 2.4.6. *Considere $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ uma hipersuperfície de classe C^2 que é fronteira de uma região compacta e convexa em \mathbb{R}^{2n} . Então S possui uma órbita fechada.*

Demonstração. Seja S a fronteira de uma região $C \subset \mathbb{R}^{2n}$ compacta e convexa. Assumiremos que C contém a origem em seu interior. Assim, cada raio partindo da origem encontra S em um único ponto de forma não tangencial. Portanto, dado $x \neq 0$, existe um único ponto $\xi = \lambda^{-1}x$ (Figura 2.3) em S , $\lambda > 0$. Defina a função $F: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, pondo $F(x) = \lambda$ para $x \neq 0$ e $F(0) = 0$. Dessa forma, a hipersuperfície S pode ser escrita como $S = \{x \mid F(x) = 1\}$. Para a estratégia que

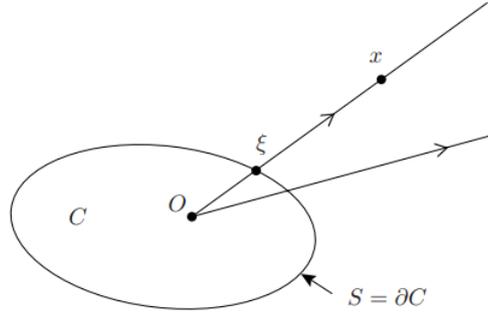


Figura 2.3: Construção da função F

seguiremos na demonstração, precisamos descrever S em termos de uma função estritamente convexa H , isto é, uma função cuja Hessiana $H''(x)$ é positiva definida em todo $x \neq 0$. Observe que $F(cx) = c\lambda = cF(x)$ para $c \geq 0$, ou seja, F é positivamente homogênea de grau 1. Além disso, sendo S de classe C^2 e fronteira de uma região compacta e convexa, temos que a aplicação

$$u_S: S \rightarrow S^{2n-1}$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

é um difeomorfismo de classe C^2 . Observe que podemos escrever F como

$$F(x) = \frac{1}{\left\langle u_S^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right\rangle}$$

quando $x \neq 0$ e logo, F é de classe C^2 fora da origem. De fato, dado x não nulo em \mathbb{R}^{2n} , temos um único λ tal que x/λ pertence a S e que por definição é igual a $F(x)$. É claro que $u_S^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = x/\lambda$ e daí,

$$\frac{1}{\left\langle u_S^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right\rangle} = \frac{1}{\left\langle \frac{x}{\lambda}, \frac{x}{\langle x, x \rangle} \right\rangle} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda = F(x).$$

Assim, derivando a Fórmula de Euler $\langle \nabla F(x), x \rangle = F(x)$ (ver Apêndice Proposição .0.16), obtemos

$$F''(x)x + \nabla F(x) = \nabla F(x)$$

e logo, $F''(x)x = 0$ para todo x em \mathbb{R}^{2n} . Portanto, F não é estritamente convexa. Entretanto, F é convexa. Com efeito, sejam $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$. Temos que $x/F(x)$ e $y/F(y)$ pertencem a $S \subset C$. Observe que

$$\frac{x+y}{F(x)+F(y)} = \frac{F(x)}{F(x)+F(y)} \frac{x}{F(x)} + \frac{F(y)}{F(x)+F(y)} \frac{y}{F(y)}$$

e como

$$\frac{F(x)}{F(x)+F(y)} + \frac{F(y)}{F(x)+F(y)} = 1,$$

concluimos que $(x+y)/(F(x)+F(y))$ pertence a C pela convexidade de C . Assim,

$$F\left(\frac{x+y}{F(x)+F(y)}\right) \leq 1$$

já que $C = \{x \in \mathbb{R}^{2n}; F(x) \leq 1\}$ e logo,

$$F(x+y) \leq F(x) + F(y)$$

já que F é não negativa e positivamente homogênea de grau 1. Daí, dado $t \in [0, 1]$, vale que

$$F(tx + (1-t)y) \leq F(tx) + F((1-t)y) = tF(x) + (1-t)F(y).$$

Defina então, $H(x) = (F(x))^2$. Observe que dados $t \in (0, 1)$ e $x \neq y \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\begin{aligned} H(tx + (1-t)y) &= F(tx + (1-t)y)^2 \leq (tF(x) + (1-t)F(y))^2 \\ &< tF(x)^2 + (1-t)F(y)^2 = tH(x) + (1-t)H(y) \end{aligned}$$

pois F é convexa e a função $x \mapsto x^2$ é estritamente convexa, ou seja, H é estritamente convexa. Além disso, vale que $H(cx) = (F(cx))^2 = (cF(x))^2 = c^2(F(x))^2 = c^2H(x)$ para $c \geq 0$, isto é, H é positivamente homogênea de grau 2. Mostramos portanto que toda superfície de energia que é fronteira de uma região compacta e convexa contendo a origem em seu interior pode ser representada por $S = \{x \mid H(x) = 1\}$ onde $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\begin{cases} H \in C^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}), H(0) = 0 \\ H''(x) > 0, x \neq 0 \\ H(\rho x) = \rho^2 H(x), \rho \geq 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Como já foi observado, a função hamiltoniana que representa S não importa no que tange à existência de órbitas periódicas, logo, é suficiente mostrarmos que o campo Hamiltoniano X_H possui uma solução periódica nessa superfície de energia, isto é, devemos mostrar que existe uma solução periódica de

$$\dot{x} = J\nabla H(x) = X_H(x) \text{ em } S.$$

Normalizando o período, podemos pedir uma solução 2π -periódica em S para a equação

$$\dot{x} = kJ\nabla H(x), k \neq 0. \quad (2.14)$$

Por exemplo, o princípio variacional

$$\min_x \int_0^{2\pi} H(x(t))dt \quad \text{sob} \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle Jx, \dot{x} \rangle dt = 1, \quad (2.15)$$

onde as funções $x(t)$ são assumidas 2π -periódicas, tem a equação vetorial (2.15) como equação de Euler-Lagrange. Mas pode-se mostrar que, neste caso, o ínfimo não é atingido. Usaremos então um princípio variacional alternativo tendo a mesma equação diferencial no qual o mínimo é atingido.

Observe que a função $f(\xi) = \langle \xi, y \rangle - H(\xi)$ possui Hessiana $f'' = -H''$ negativa e logo possui máximo para todo y fixado. Além disso, como temos $\nabla f(\xi) = y - \nabla H(\xi)$, tal máximo, digamos no ponto ξ_0 , cumpre $y = \nabla H(\xi_0)$. Considere então a transformada de Legendre de $H(x)$

$$G(y) = \max_{\xi \in \mathbb{R}^{2n}} (\langle \xi, y \rangle - H(\xi)) = \langle x, y \rangle - H(x),$$

observe que tal máximo existe pois sendo H contínua, temos que a aplicação

$$x \mapsto H(x/||x||) \quad (x \neq 0)$$

possui mínimo e máximo e da homogeneidade de H segue-se que existe $C > 1$ cumprindo

$$\frac{1}{C} ||x||^2 \leq H(x) \leq C ||x||^2.$$

Temos então

$$G(y) + H(x) = \langle x, y \rangle$$

para

$$y = \nabla H(x) \quad \text{e} \quad x = \nabla G(y)$$

Assim, $G(0) = 0$, $G \in C^2(\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\})$. Mais ainda,

$$H(cx) = \langle cx, \nabla H(cx) \rangle - G(\nabla H(cx)) = c^2 \langle x, y \rangle - G(cy)$$

para $c \geq 0$ pois sendo H positivamente homogênea de grau 2, temos ∇H positivamente homogênea de grau 1. Logo,

$$G(cy) = c^2 \langle x, y \rangle - H(cx) = c^2 \langle x, y \rangle - c^2 H(x) = c^2 G(y)$$

isto é, G também é positivamente homogênea de grau 2. Observe também que $H''(x)G''(y) = Id \quad \forall x \neq 0$ e portanto, G é convexa se $y \neq 0$. Concluindo assim, que G possui as mesmas propriedades de H dadas em (2.13). Nos atentaremos agora ao princípio variacional para funções z 2π -periódicas:

$$\min_z \int_0^{2\pi} G(\dot{z})dt \quad \text{sob} \quad \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot{z} \rangle dt = 1 \quad (2.16)$$

que resolveremos definindo

$$\tilde{F} = \left\{ z \in H_1(S^1) \mid \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(t)dt = 0 \right\},$$

onde $H_1(S^1)$ é o espaço de Hilbert das funções 2π -periódicas absolutamente contínuas cujas derivadas sejam de quadrado integrável, isto é, pertencem a $L^2(S^1)$.

Observe que se z é solução do princípio (2.16), $z+k$, sendo k uma constante, também é e portanto, a condição no valor médio $(1/2\pi) \int_0^{2\pi} z(t)dt = 0$ fixa a constante. Considere o subconjunto

$$\tilde{A} = \left\{ z \in \tilde{F} \mid \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot{z} \rangle = 1 \right\}$$

e defina em \tilde{A} o funcional:

$$I(z) = \int_0^{2\pi} G(\dot{z}(t))dt.$$

Afirmamos que:

- i) O funcional I é limitado inferiormente em \tilde{A} ;
- ii) O funcional I atinge seu mínimo em \tilde{A} , isto é, existe $z_* \in \tilde{A}$ tal que

$$\int_0^{2\pi} G(\dot{z}_*)dt = \inf_{z \in \tilde{A}} \int_0^{2\pi} G(\dot{z})dt = \mu > 0;$$

- iii) z_* resolve a equação de Euler-Lagrange

$$\nabla G(\dot{z}_*) = \alpha Jz_* + \beta$$

em $L^2(S^1)$ com constantes $\alpha > 0$ e β ;

- iv) z_* é de classe C^2 e satisfaz

$$\dot{z}_* = \nabla H(\alpha Jz_* + \beta)$$

pontualmente.

Para provarmos i), observe que como $z \in \tilde{F}$ tem valor médio 0, vale a desigualdade de Poincaré:

$$\|z\| \leq \|\dot{z}\|, z \in \tilde{F},$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma em L^2 . De fato, usando séries de Fourier, temos

$$z(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}$$

e

$$\dot{z}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N n c_n i e^{int},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(t) e^{-int} dt.$$

Da igualdade de Parseval obtemos

$$\|z\|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n c_n|^2 = \|\dot{z}\|^2$$

observando que a desigualdade é válida, neste caso, pois $c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(t)dt = 0$. Concluimos então que para $z \in \tilde{A}$,

$$2 = \int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot{z} \rangle dt \leq \int_0^{2\pi} |Jz| |\dot{z}| dt \leq \|z\| \|\dot{z}\| \leq \|\dot{z}\|^2 \quad (2.17)$$

onde a primeira desigualdade é a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e a segunda é a Desigualdade de Hölder e já que $\|Jz\| = \|z\|$.

A função G sendo convexa e homogênea de grau 2, satisfaz

$$\frac{1}{k}|y|^2 \leq G(y) \leq k|y|^2$$

para $y \in \mathbb{R}^{2n}$ para alguma constante $k \geq 1$. Portanto, para $z \in \tilde{A}$, temos

$$\int_0^{2\pi} G(\dot{z}) dt \geq \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} |\dot{z}|^2 dt = \frac{1}{k} \|\dot{z}\|^2 \geq \frac{2}{k} > 0 \quad (2.18)$$

por (2.17) e assim, I é limitado inferiormente por $2/k > 0$. Logo, o ínfimo de I existe e é positivo e i) está provado.

Seja $\mu = \inf I > 0$. Escolhemos uma sequência $z_j \in \tilde{A}$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_j) dt = \mu.$$

De (2.17) e (2.18), existe uma constante $M > 0$ tal que

$$2 \leq \|\dot{z}_j\|^2 \leq M \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

e obtemos então $\sqrt{2} \leq \|\dot{z}_j\| \leq \sqrt{M}$ para todo j natural. Pela Desigualdade de Poincaré obtida, $\|z_j\| \leq \|\dot{z}_j\| \leq \sqrt{M}$. Isto é, a sequência z_j é uma sequência limitada no espaço de Hilbert $H_1(S^1)$ e portanto, possui uma subsequência que também denotaremos por z_j que converge fracamente em $H_1(S^1)$ para um elemento z_* em $H_1(S^1)$ (ver Apêndice Teorema .0.19). Por outro lado,

$$\begin{aligned} |z_j(t) - z_j(\tau)| &= \left| \int_\tau^t \dot{z}_j(s) ds \right| \leq \int_a^b |\dot{z}_j \chi_{[\tau, t]}| ds = \\ &= \|\dot{z}_j\| \|\chi_{[\tau, t]}\| \leq |t - \tau|^{\frac{1}{2}} \sqrt{M}, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema fundamental do Cálculo, a Desigualdade de Hölder, $[a, b]$ é um intervalo contendo $[\tau, t]$ e $\chi_{[\tau, t]}$ é a função característica de $[\tau, t]$. Ou seja, z_j é equicontínua e, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, a sequência z_j converge uniformemente para \hat{z}_* , com $\hat{z}_* \in C^0(S^1)$. Afirmamos que $z_*(t) = \hat{z}_*(t)$ q.t.p. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \|z_* - \hat{z}_*\|^2 &= \langle z_* - \hat{z}_*, z_* - \hat{z}_* \rangle = \langle z_* + z_j - z_j - \hat{z}_*, z_* - \hat{z}_* \rangle \\ &= \langle z_j - \hat{z}_*, z_* - \hat{z}_* \rangle + \langle z_* - z_j, z_* - \hat{z}_* \rangle = 0 \end{aligned}$$

quando j tende para ∞ , pois os dois termos da penúltima igualdade tendem a 0: o primeiro pela convergência uniforme e o segundo pela convergência fraca (ver Apêndice Exemplo .0.18). Já que (z_j) é uma sequência em \tilde{A} ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{z}_*(t) dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z_j(t) dt = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 2 &= \int_0^{2\pi} \langle Jz_j, \dot{z}_j \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle J(z_j - z_* + z_*), \dot{z}_j \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle J(z_j - z_*), \dot{z}_j \rangle dt + \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{z}_j \rangle dt. \end{aligned}$$

Nas igualdades acima, a primeira parcela da última soma tende a 0 pela convergência de z_j a z_* e por $\|\dot{z}_j\| \leq \sqrt{M}$ ser limitado e a segunda converge pela convergência fraca, o que nos dá

$$\int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{z}_* \rangle dt = 2$$

isto é, $z_* \in \tilde{A}$. Ainda falta mostrar que I assume mínimo em z_* .

Sendo G convexa, vale (v. por exemplo, [Lim13, Teorema 9, item b, p.77])

$$G(a + v) \geq G(a) + \langle \nabla G(a), v \rangle.$$

Tomando $a = y_1$ e $v = y_2 - y_1$ e o contrário acima, obtemos

$$\langle \nabla G(y_1), y_2 - y_1 \rangle \leq G(y_2) - G(y_1) \leq \langle \nabla G(y_2), y_2 - y_1 \rangle$$

o que aplicado a $y_2 = \dot{z}_*(t)$ e $y_1 = \dot{z}_j(t)$ e integrando nos dá

$$\int_0^{2\pi} G(\dot{z}_*) dt - \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_j) dt \leq \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(\dot{z}_*), \dot{z}_* - \dot{z}_j \rangle dt.$$

Como G é homogênea de grau 2, ∇G é homogênea de grau 1 e daí, existe alguma constante $c > 0$ tal que $|\nabla G(y)| \leq c|y|$ para $y \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, já que $(\dot{z}_* - \dot{z}_j) \rightarrow 0$ fracamente, o lado direito tende a zero. Daí, fazendo o limite e lembrando que μ é o ínfimo de I , obtemos

$$\mu \leq \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_*) dt \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_j) dt = \mu$$

e logo provamos ii).

Para provarmos iii), começamos observando que já que z_* é mínimo, temos

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dz} I(z_*) &= \frac{d}{d\varepsilon} I(z_* + \rho\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_0^{2\pi} G(\dot{z}_* + \dot{\rho}\varepsilon) dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(\dot{z}_* + \dot{\rho}\varepsilon), \dot{\rho} \rangle dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(\dot{z}_*), \dot{\rho} \rangle dt \quad \forall \rho \in T_{z_*} \tilde{A}. \end{aligned}$$

Mas $\rho \in T_{z_*} \tilde{A} \Leftrightarrow \rho \in \ker dF(z_*)$ onde $F(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle Jz, \dot{z} \rangle dt$. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} F(z_* + s\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_0^{2\pi} \langle J(z_* + s\varepsilon), \dot{z}_* + \dot{s}\varepsilon \rangle dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{z}_* \rangle + \langle Jz_*, s\varepsilon \rangle + \langle Js\varepsilon, \dot{z}_* \rangle + \langle s\varepsilon, \dot{s}\varepsilon \rangle dt \right) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{s} \rangle + \langle Js, \dot{z}_* \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{s} \rangle dt \end{aligned}$$

onde a última igualdade é obtida do método de integração por partes. Logo, ρ pertencer a $\ker dF(z_*)$ é equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{\rho} \rangle dt = 0. \quad (2.19)$$

Escolhemos agora $\zeta \in T_{z_*} \tilde{A}$ da forma

$$\dot{\zeta} = \nabla G(\dot{z}_*) - \alpha Jz_* - \beta$$

com α e β constantes a serem determinadas. Fazendo $\dot{\zeta}$ ter valor médio zero, para que ζ seja periódica, encontramos o valor da constante β :

$$0 = \int_0^{2\pi} \dot{\zeta} dt = \int_0^{2\pi} \nabla G(\dot{z}_*) dt - \alpha \int_0^{2\pi} Jz_* dt - \int_0^{2\pi} \beta dt = \int_0^{2\pi} \nabla G(\dot{z}_*) dt - 2\pi\beta$$

já que sendo $z_* \in \tilde{A} \subset \tilde{F}$, temos $\int_0^{2\pi} Jz_* = 0$. Feito isso, escolhemos a constante α de modo que (2.19) seja satisfeito, obtendo a equação

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{\zeta} \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \nabla G(\dot{z}_*) \rangle dt - \alpha \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, Jz_* \rangle dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \beta \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \nabla G(\dot{z}_*) \rangle dt - \alpha \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, Jz_* \rangle dt \end{aligned}$$

utilizando novamente que z_* tem valor médio nulo. Já que na equação acima, o coeficiente $\int_0^{2\pi} \|Jz_*\|^2$ de α não se anula, a equação possui uma única solução e portanto, α fica determinado.

Temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\zeta|^2 dt &= \int_0^{2\pi} \langle \dot{\zeta}, \dot{\zeta} \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(\dot{z}_*), \dot{\zeta} \rangle dt - \alpha \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{\zeta} \rangle dt - \int_0^{2\pi} \langle \beta, \dot{\zeta} \rangle dt = 0 \end{aligned}$$

pois sendo ζ pertencente a $T_{z_*} \tilde{A}$, a primeira integral do lado direito se anula porque z_* é mínimo de I , a segunda se anula por (2.19) e a terceira se anula devido ao valor médio de $\dot{\zeta}$ ser zero. Dessa forma, concluímos que

$$\|\dot{\zeta}\|^2 = \|\nabla G(\dot{z}_*) - \alpha Jz_* - \beta\|^2 = 0$$

e portanto, z_* satisfaz a equação

$$\nabla G(\dot{z}_*) = \alpha Jz_* + \beta \quad q.t.p. \quad (2.20)$$

para as constantes α e β encontradas. Observe que $\alpha > 0$. Com efeito,

$$2\mu = 2 \int_0^{2\pi} G(\dot{z}_*) dt = \int_0^{2\pi} \langle \nabla G(\dot{z}_*), \dot{z}_* \rangle dt = \alpha \int_0^{2\pi} \langle Jz_*, \dot{z}_* \rangle dt = 2\alpha$$

onde a segunda igualdade é devida à Fórmula de Euler para funções homogêneas e a última segue de \dot{z}_* pertencer a \tilde{A} .

Por fim, para demonstrarmos iv), lembramos que $x = \nabla G(y)$ é invertido por $y = \nabla H(x)$ pontualmente e obtemos da equação (2.20)

$$\dot{z}_* = \nabla H(\alpha Jz_*(t) + \beta)$$

para quase todo t . Já que $H \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, o lado direito é contínuo e logo, z_* é de classe C^1 . Fazendo agora

$$\ddot{z}_* = \nabla H(\alpha J\dot{z}_*(t) + \beta),$$

concluimos que z_* é de classe C^2 .

Finalmente, pondo

$$x(t) = c(\alpha Jz_*(t) + \beta),$$

com $c > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c\alpha J\dot{z}_*(t) = c\alpha J\nabla H(\alpha Jz_*(t) + \beta) \\ &= \alpha J\nabla H(c(\alpha Jz_* + \beta)) = \alpha J\nabla H(x) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem de ∇H ser positivamente homogênea de grau 1. Como H é homogênea de grau 2, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(x)dt &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \nabla H(x), x \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle \nabla H(c[\alpha Jz_* + \beta]), c(\alpha Jz_* + \beta) \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} c^2 \int_0^{2\pi} \langle \nabla H(\alpha Jz_* + \beta), \alpha Jz_* + \beta \rangle dt \\ &= \frac{1}{2} c^2 \alpha \int_0^{2\pi} \langle \dot{z}_*, Jz_* \rangle dt = c^2 \alpha \end{aligned}$$

lembrando que $\dot{z}_* = \nabla H(\alpha Jz_*(t) + \beta)$ para quase todo t e que z_* pertence a \tilde{A} . Mas $c^2\alpha$ é igual a 2π se escolhermos $c = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$. Portanto, $x(t)$ é uma solução 2π -periódica da equação $\dot{x} = \alpha J\nabla H(x)$ e pertence à superfície de energia definida por $H = 1$. Consequentemente $y(t) = x(\alpha^{-1}t)$ é a solução que queríamos de $\dot{x} = J\nabla H(x)$ em $\{H = 1\}$ cujo período é $T = 2\pi\alpha = 2\pi\mu$. Apesar de termos destacado o período da solução, observamos que isso é irrelevante pois este depende da escolha da função Hamiltoniana que representa a superfície de energia S . \square

Do teorema acima e da propriedade de campos Hamiltonianos dada pela Proposição 2.1.2, concluimos que toda hiperfície em \mathbb{R}^{2n} simplectomorfa a uma hiperfície que é fronteira de uma região compacta e convexa sempre possui uma órbita periódica associada a um campo Hamiltoniano.

Capítulo 3

Capacidades Simpléticas

Enquanto procuravam soluções periódicas em superfícies de energia convexas de \mathbb{R}^{2n} , I. Ekeland e H. Hofer encontraram um invariante simplético não trivial entre subconjuntos do espaço canônico (v. [EH]). Este conceito foi estendido a variedades simpléticas por H. Hofer e E. Zehnder. A prova da existência deste invariante é não trivial e esta seção tem o objetivo de apresentá-la.

3.1 Definições e Consequências

Consideremos agora a classe de todas variedades simpléticas (M, ω) possivelmente com bordo e dimensão fixada $2n$.

Definição 3.1.1. *Uma capacidade simplética é uma aplicação $(M, \omega) \mapsto c(M, \omega)$ na qual se associa a uma variedade simplética um número não negativo ou ∞ , satisfazendo as propriedades:*

1. *Monotonicidade:*

$$c(M, \omega) \leq c(N, \tau)$$

se existir mergulho simplético $\varphi: (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$.

2. *Conformalidade :*

$$c(M, \alpha\omega) = |\alpha|c(M, \omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

3. *Não trivialidade:*

$$c(B(1), \omega_0) = \pi = c(Z(1), \omega_0)$$

para a bola aberta unitária $B(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; |x|^2 + |y|^2 < 1\}$ e o cilindro simplético aberto $Z(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; x_1^2 + y_1^2 < 1\}$ no espaço canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Se $\varphi: (M, \omega) \rightarrow (N, \tau)$ é um symplectomorfismo, então o axioma da monotonicidade aplicado a φ e φ^{-1} , nos assegura

$$c(M, \omega) = c(N, \tau).$$

Logo, uma capacidade simplética é de fato um invariante simplético. Além disso, pela aplicação de inclusão, temos que para quaisquer abertos de (M, ω) vale:

$$U \subset V \Rightarrow c(U) \leq c(V).$$

Observação 3.1.2. A definição acima não determina uma única função capacidade. Além disso, o conjunto de aplicações que satisfazem as propriedades acima não é vazio, isto é, existem capacidades simpléticas. Antes de verificarmos esta última afirmação, deduziremos algumas consequências simples dos axiomas que definem uma capacidade simplética.

Exemplo 3.1.3. No caso das variedades simpléticas de dimensão 2 ($n = 1$), o módulo da área total

$$\left| \int_M \omega \right|$$

é um exemplo trivial de capacidade simplética. Neste caso, tal valor coincide com a medida de Lebesgue em (\mathbb{R}^2, ω_0) . No entanto, se $n > 1$, sabemos que o volume é um invariante simplético mas claramente não é uma capacidade simplética, já que o cilindro tem volume infinito.

Lema 3.1.4. Seja $U \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ um aberto e $\lambda \neq 0$. Então,

$$c(\lambda U, \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0).$$

Demonstração. O difeomorfismo $\varphi: \lambda U \rightarrow U$ definido por $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}x$ satisfaz $\varphi^*(\lambda^2 \omega_0) = \lambda^2 \varphi^* \omega_0 = \omega_0$. Assim, $\varphi: (\lambda U, \omega_0) \rightarrow (U, \lambda^2 \omega_0)$ é um simplectomorfismo e

$$c(\lambda U, \omega_0) = c(U, \lambda^2 \omega_0) = \lambda^2 c(U, \omega_0)$$

onde a última igualdade segue de c ser conforme. \square

Em particular, para a bola $B(r)$ de raio $r > 0$ em \mathbb{R}^{2n} , temos

$$c(B(r)) = c(rB(1)) = r^2 c(B(1)) = \pi r^2. \quad (3.1)$$

Agora, como $B(r) \subset \overline{B(r)} \subset B(r + \varepsilon)$ para todo ε positivo, concluímos da propriedade de monotonicidade que $c(\overline{B(r)}) = \pi r^2$. Observamos daí que no caso especial (\mathbb{R}^2, ω_0) a capacidade simplética de um disco, coincide com a medida de Lebesgue do mesmo. A proposição seguinte, mostra que essa coincidência não ocorre somente nos discos.

Proposição 3.1.5 (K. F. Siburg). *Se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio compacto e conexo com bordo suave, então*

$$c(D, \omega_0) = \text{area}(D).$$

Demonstração. Ao remover uma quantidade finita de curvas compactas de D , obtemos um domínio simplesmente conexo $D_0 \subset D$ satisfazendo $m(D_0) = m(D)$, onde m denota a medida de Lebesgue, que, pelo Teorema da classificação do disco, é difeomorfo ao disco unitário $B(1) \subset \mathbb{R}^2$. Assim, escolhendo $\rho = \sqrt{m(D_0)}/\pi$, temos $m(B(\rho)) = m(D_0)$ e um difeomorfismo $\varphi: B(\rho) \rightarrow D_0$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $r < \rho$ tal que $D_1 := \varphi(\overline{B(r)}) \subset D_0$ satisfaz $m(D_1) \geq m(D) - \varepsilon$. Pelo Teorema de Dacorogna-Moser (Teorema 2.2.1), existe um difeomorfismo $\psi: \overline{B(r)} \rightarrow D_1$ que preserva medida. Como o contexto é dimensão 2, sabemos que ψ é simplético e logo, podemos estimar:

$$m(D) - \varepsilon \leq m(D_1) = m(\overline{B(r)}) = c(\overline{B(r)}) = c(D_1) \leq c(D).$$

Por outro lado, pelas características de D , existe difeomorfismo $u: D \rightarrow \overline{B(R)} \setminus C_\varepsilon$ onde C_ε é um conjunto de número finito de discos abertos de medida

total $\leq \varepsilon$. Novamente pelo Teorema de Dacorogna-Moser, podemos assumir que u é um symplectomorfismo e então

$$c(D) \leq c(\overline{B(R)}) = \pi R^2 \leq m(D) + \varepsilon$$

Daí, pela arbitrariedade de ε , temos o resultado. \square

Mostraremos agora que abertos muito diferentes (em forma, medida ou topologia) podem ter a mesma capacidade quando $n > 1$ (Ver Figura 3.1). Observe que dado um aberto limitado em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, existe uma bola contida nele e uma bola que o contém. Logo,

$$0 < c(U) < \infty$$

para todo aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^{2n}$. Além disso, pelo Lema 3.1.4, temos $c(Z(r)) = \pi r^2$ para cilindros simpléticos. Portanto, se um aberto V satisfaz

$$B(r) \subset V \subset Z(r)$$

para algum $r > 0$, segue da monotonicidade que

$$\pi r^2 = c(B(r)) \leq c(V) \leq c(Z(r)) = \pi r^2$$

e logo, $c(V) = \pi r^2$. Lembramos agora que os elipsoides $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ já definidos em

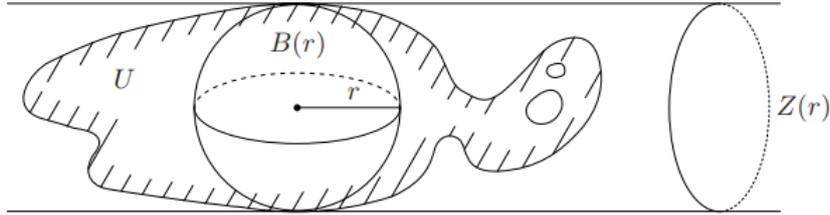


Figura 3.1: Abertos com mesma capacidade simplética

2.2.6 são caracterizados pelos invariantes simpléticos lineares $r_1(E) \leq r_2(E) \leq \dots \leq r_n(E)$ (Teorema 2.2.13).

Proposição 3.1.6. *A capacidade de um elipsoide E em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ é dada por*

$$c(E) = \pi r_1(E)^2.$$

Demonstração. Observando que as bolas e os cilindros simpléticos em \mathbb{R}^{2n} são elipsoides, pelo Teorema 2.2.13, fazendo uma mudança linear de coordenadas simpléticas se necessário, podemos assumir $B(r_1) \subset E \subset Z(r_1)$ e logo, o resultado segue da monotonicidade de uma capacidade. \square

Sob este novo ponto de vista, concluímos a mesma restrição de mergulhos simpléticos entre elipsoides mencionada anteriormente.

Corolário 3.1.7. *Se existe mergulho simplético $\varphi: E \rightarrow F$ entre elipsoides em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, então*

$$r_1(E) \leq r_1(F).$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.1.6 que $\pi r_1(E)^2 = c(E) \leq c(F) = \pi r_1(F)^2$. \square

Veremos agora que no ponto de vista simplético, cilindros isotrópicos, isto é, que possuem como *base* planos isotrópicos, são bem diferentes de cilindros simpléticos, isto é, que possuem como *base* planos simpléticos.

Exemplo 3.1.8. Dado $r > 0$, considere o cilindro isotrópico $\hat{Z}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}; x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$. Vale que $c(\hat{Z}(r)) = \infty$. Com efeito, vimos no Exemplo 2.2.2 que para toda bola $B(N)$, existe um mergulho simplético linear $\varphi: B(N) \rightarrow \hat{Z}(r)$. Portanto, $\pi N^2 = c(B(N)) \leq c(\hat{Z}(r)) \forall N > 0$.

Em virtude da propriedade de monotonicidade, as capacidades simpléticas representam, em particular, obstruções em mergulhos simpléticos. O Teorema *nonsqueezing* de Gromov foi um dos motivos de se formalizar o conceito de capacidade. Veremos agora que nessa formulação, tal teorema é uma consequência imediata dos axiomas.

Teorema 3.1.9 (Teorema *nonsqueezing* de Gromov). *Existe mergulho simplético $\varphi: B(r) \rightarrow Z(R)$, onde $Z(R)$ é um cilindro simplético, se e somente se, $R \geq r$.*

Demonstração. Se existir tal mergulho, temos $\pi r^2 = c(B(r)) \leq c(Z(R)) = \pi R^2$ e logo, $r \leq R$. Reciprocamente, se $r \leq R$, a inclusão $i: B(r) \rightarrow Z(R)$ é um mergulho simplético. \square

Considerando (\mathbb{R}^4, ω_0) com coordenadas simpléticas (x_1, y_1, x_2, y_2) , mostraremos uma certa rigidez em simplectomorfismos entre bidiscos, isto é, produto cartesiano de discos.

Proposição 3.1.10. *Existe um difeomorfismo simplético*

$$\varphi: B(r_1) \times B(r_2) \rightarrow B(s_1) \times B(s_2)$$

se, e somente se, $r_1 = s_1$ e $r_2 = s_2$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos considerar $r_1 \leq r_2$. Usando o difeomorfismo φ , definimos o mergulho

$$B^4(r_1) \rightarrow B(r_1) \times B(r_2) \xrightarrow{\varphi} B(s_1) \times B(s_2) \rightarrow B(s_1) \times \mathbb{R}^2 = Z(s_1)$$

onde a primeira e a última aplicação são as inclusões de $B^4(r_1)$ em $B(r_1) \times B(r_2)$ e de $B(s_1) \times B(s_2)$ em $B(s_1) \times \mathbb{R}^2$, respectivamente. Logo, $\pi r_1^2 = c(B^4(r_1)) \leq c(Z(s_1)) = \pi s_1^2$ e então, $r_1 \leq s_1$. Aplicando o mesmo raciocínio para φ^{-1} , temos $r_1 \geq s_1$ e daí, $r_1 = s_1$. Além disso, φ preserva volume e portanto, $\pi r_1^2 \pi r_2^2 = \pi s_1^2 \pi s_2^2$. Assim, $r_1 \cdot r_2 = s_1 \cdot s_2$ e da primeira parte, temos $r_2 = s_2$. Por outro lado, se valem ambas as igualdades, a aplicação identidade é um tal simplectomorfismo. \square

Observação 3.1.11. *Aqui já conseguimos notar novamente que a rigidez de simplectomorfismos é bem maior do que a de difeomorfismos que preservam volume. Pois, no contexto da proposição anterior, conseguimos facilmente um difeomorfismo linear que preserva volume $\psi: B(1) \times B(1) \rightarrow B(r) \times B(1/r)$ pondo $\psi(x_1, y_1, x_2, y_2) = (rx_1, ry_1, x_2/r, y_2/r)$ para qualquer $r > 0$.*

Como já vimos, a espessura simplética é um exemplo de invariante simplético global e no presente momento, provaremos que a tal é uma capacidade simplética.

Teorema 3.1.12. *A espessura simplética*

$$D(M, \omega) = \sup\{\pi r^2 \mid \text{existe mergulho simplético } \varphi: (B(r), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)\}$$

é uma capacidade simplética. Mais ainda, $D(M, \omega) \leq c(M, \omega)$ para qualquer função capacidade c .

Demonstração. Quando vimos que a espessura simplética é um invariante simplético, já foi provada a propriedade de monotonicidade de uma capacidade. Agora mostraremos a conformalidade. Se $\varphi: (B(r), \omega_0) \rightarrow (M, \alpha\omega)$ é um mergulho simplético, vale que $\varphi^*(\alpha\omega) = \omega_0$ e logo, $\varphi^*\omega = \frac{1}{\alpha}\omega_0$. Considere $\rho = \frac{r}{\sqrt{|\alpha|}}$ e o difeomorfismo $\psi: B(\rho) \rightarrow B(r)$, $\psi(x) = \sqrt{|\alpha|x}$. Daí,

$$\psi^*\left(\frac{1}{\alpha}\omega_0\right) = \frac{|\alpha|}{\alpha}\omega_0.$$

Portanto, se $\alpha > 0$, o mapa $\hat{\varphi} = \varphi \circ \psi: (B(\rho), \omega_0) \rightarrow (M, \omega)$ é um mergulho simplético. Se $\alpha < 0$, fazemos $\hat{\varphi} = \varphi \circ \psi \circ \psi_0: (B(\rho, \omega_0)) \rightarrow (M, \omega)$, onde $\psi_0: (B(\rho, \omega_0)) \rightarrow (B(\rho), -\omega_0)$ é a aplicação $\psi_0(u, v) = (-u, v)$. Assim, mostramos que para todo mergulho $(B(r), \omega_0) \rightarrow (M, \alpha\omega)$ existe um mergulho correspondente $B(r/\sqrt{|\alpha|}) \rightarrow (M, \omega)$ e vice-versa. Logo, pela definição de espessura simplética, temos $D(M, \alpha\omega) = |\alpha|D(M, \omega)$. Nos resta provar o axioma de não trivialidade. Se $\varphi: B(R) \rightarrow B(r)$ é um mergulho simplético, temos $R \leq r$ pois, em particular, φ preserva volume. Por outro lado, a identidade é um mergulho $B(r) \rightarrow B(r)$. Portanto, $D(B(r), \omega_0) = \pi r^2$. Do Teorema *nonsqueezing* de Gromov e considerando a aplicação inclusão $B(r) \rightarrow Z(r)$, temos $D(Z(r), \omega_0) = \pi r^2$. Logo, D é uma capacidade simplética. Além disso, seja $c(M, \omega)$ outra capacidade. Se $\varphi: B(r) \rightarrow M$ é um mergulho simplético, temos $\pi r^2 = c(B(r), \omega_0) \leq c(M, \omega)$. Tomando o supremo em r tal que ainda existe um mergulho como este, concluímos $D(M, \omega) \leq c(M, \omega)$. \square

Observação 3.1.13. *Na demonstração do Teorema 3.1.12, utilizamos o Teorema nonsqueezing de Gromov, que por sua vez, demonstramos em 3.1.9, admitindo a existência de uma capacidade simplética. Notamos aqui que a existência de uma capacidade simplética é equivalente ao Teorema nonsqueezing e que ainda nos resta a necessidade de demonstrarmos a existência de uma capacidade simplética.*

3.2 Capacidade de Hofer-Zehnder

Provaremos a existência de uma capacidade simplética introduzida por H. Hofer e E. Zehnder, que possui forte relação com existência de órbitas periódicas de sistemas Hamiltonianos.

Definição 3.2.1. *Denotaremos por $\mathcal{H}(M, \omega)$ o conjunto das funções suaves em M que cumprem:*

- 1) Existe um conjunto compacto $K \subset M$ que depende de H tal que $K \subset M \setminus \partial M$ e $H(M \setminus K) \equiv m(H)$ (uma constante).
- 2) Existe aberto $U \subset M$ que depende de H no qual $H|_U \equiv 0$.
- 3) $0 \leq H(x) \leq m(H) \forall x \in M$.

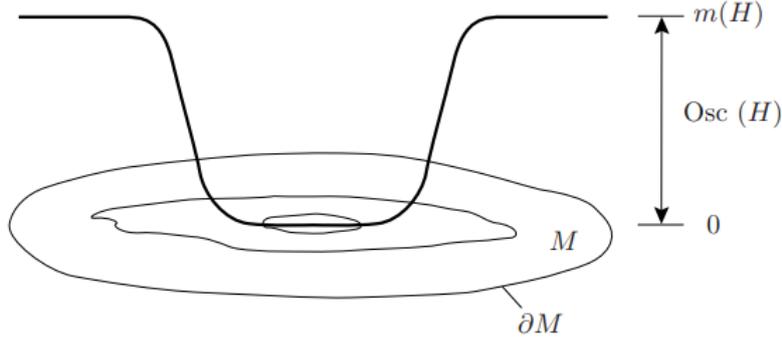


Figura 3.2: Hamiltonianos da Definição 3.2.1

Observe que a constante $m(H)$ é a oscilação de H ($m(H) = \max H - \min H$). Uma função $H \in \mathcal{H}(M, \omega)$ será chamada **admissível** quando todas as soluções periódicas do campo Hamiltoniano associado, isto é de $\dot{x} = X_H(x)$ em M , forem constantes ou tiverem período $T > 1$.

Definição 3.2.2 (Capacidade de Hofer-Zehnder). *Abreviando o conjunto das funções admissíveis por $\mathcal{H}_a(M, \omega) \subset \mathcal{H}(M, \omega)$, definimos*

$$c_{HZ}(M, \omega) := \sup\{m(H) | H \in \mathcal{H}_a(M, \omega)\}.$$

Portanto, se $c_{HZ}(M, \omega) < \infty$ então para toda função H em $\mathcal{H}(M, \omega)$ cuja oscilação satisfaz $m(H) > c_{HZ}(M, \omega)$, o campo vetorial X_H possui solução periódica não constante com período $0 < T \leq 1$ e c_{HZ} é o ínfimo dos números que possuem essa propriedade (essa é a forte relação citada no início desta seção).

Teorema 3.2.3. *A função c_{HZ} definida acima é uma capacidade simplética.*

Demonstração. Sejam (M, ω) e (N, σ) variedades simpléticas. Se $\varphi: M \rightarrow N$ é um mergulho simplético, podemos definir $\varphi_*: \mathcal{H}(M, \omega) \rightarrow \mathcal{H}(N, \sigma)$ pondo:

$$\varphi_*(H) = \begin{cases} H \circ \varphi^{-1}(x), & \text{se } x \in \varphi(M) \\ m(H), & \text{se } x \notin \varphi(M) \end{cases}$$

Note que se $K \subset M \setminus \partial M$ para algum conjunto compacto $K \subset M$, então $\varphi(K)$ é compacto contido em $N \setminus \partial N$ e assim, temos de fato $\varphi_*(H) \in \mathcal{H}(N, \sigma)$. Pela definição, vale que $m(\varphi_*(H)) = m(H)$. Já que φ é simplético, temos $(\varphi^{-1})^*(X_H) = X_{\varphi_*(H)}$ em $\varphi(M)$ e assim, os fluxos são conjugados. Em particular, as soluções periódicas não constantes, juntamente com seus períodos, se correspondem. Assim, $\varphi_*(\mathcal{H}_a(M, \omega)) \subset \mathcal{H}_a(N, \sigma)$. Daí,

$$\begin{aligned}
c_{HZ}(M, \omega) &= \sup\{m(H) | H \in \mathcal{H}_a(M, \omega)\} \\
&= \sup\{m(\varphi_*(H)) | H \in \mathcal{H}_a(M, \omega)\} \\
&= \sup\{m(\tilde{H}) | \tilde{H} \in \varphi_*(\mathcal{H}_a(M, \omega))\} \\
&\leq \sup\{m(\tilde{H}) | \tilde{H} \in \mathcal{H}_a(N, \sigma)\} = c_{HZ}(N, \sigma).
\end{aligned}$$

Portanto, c_{HZ} cumpre a monotonicidade. Considere agora $\alpha \neq 0$ e defina $\psi: \mathcal{H}(M, \omega) \rightarrow \mathcal{H}(M, \alpha\omega)$ pondo $\psi(H) = |\alpha|H$. É claro que $m(\psi(H)) = |\alpha|m(H)$ e ψ é bijeção. A conformalidade de c_{HZ} decorre diretamente do fato: $\psi|_{\mathcal{H}_a(M, \omega)}$ é uma bijeção sobre $\mathcal{H}_a(M, \alpha\omega)$. Da definição de campo Hamiltoniano segue que $(\alpha\omega)(X_{\psi(H)}, \cdot) = -d(\psi(H))(\cdot) = -|\alpha|dH(\cdot) = |\alpha|\omega(X_H, \cdot)$. Logo, como ω é não degenerada,

$$\frac{\alpha}{|\alpha|}X_{\psi(H)} = X_H \text{ em } M.$$

Assim, temos $X_{\psi(H)} = \pm X_H$ e portanto, estes dois campos possuem as mesmas soluções periódicas com os mesmos períodos. Falta mostrar que c_{HZ} cumpre a não trivialidade. Seja $\varepsilon \in (0, \pi)$. Construíremos uma função $H \in \mathcal{H}_a(B(1), \omega_0)$ satisfazendo $m(H) = \pi - \varepsilon$, provando que $c_{HZ}(B(1)) \geq \pi - \varepsilon$. Tome uma função suave $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo

- $0 \leq f'(t) < \pi$ para todo t
- $f(t) = 0$ para t próximo de 0
- $f(t) = \pi - \varepsilon$ para t próximo de 1

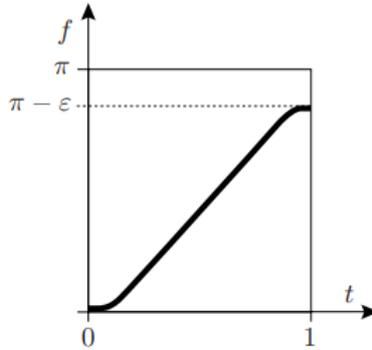


Figura 3.3: Função f

A construção de uma função destas é possível e utiliza *bump functions* (ver Apêndice Proposição .0.22). Defina agora $H(x) = f(|x|^2)$ para $x \in B(1)$. Logo, $m(H) = \pi - \varepsilon$. Além disso, temos que o sistema

$$\dot{x} = J\nabla H(x) = 2f'(|x|^2)Jx$$

assume $F(x) = \frac{1}{2}|x|^2$ como integral primeira, já que $\langle \nabla F(x), J\nabla H(x) \rangle = 2f'(|x|^2)\langle x, Jx \rangle = 0$. Logo, se $x(t)$ é uma solução, temos $F(x(t)) = \frac{1}{2}|x(t)|^2 = a$ e então

$$\dot{x}(t) = 2f'(|x(t)|^2)Jx(t) = 2f'(2a)Jx(t) = cJx(t)$$

onde $c = 2f'(2a)$ é uma constante. Assim, as soluções são da forma

$$x(t) = e^{cJt}x(0) = (\cos ct)x(0) + (\operatorname{sen} ct)Jx(0).$$

Se $c = 0$, a solução é constante. Lembrando que $c = 2f'(2a) < 2\pi$ pela escolha de f , temos que se $c > 0$, o período é $T = 2\pi/c > 1$. Logo temos que $H \in \mathcal{H}_a(B(1), \omega_0)$. Da arbitrariedade de ε , concluímos que $c_{HZ}(B(1)) \geq \pi$.

Observe que a inclusão $B(1) \rightarrow Z(1)$ é um mergulho simplético e logo, do que já provamos,

$$c_{HZ}(Z(1)) \geq c_{HZ}(B(1)) \geq \pi.$$

Por fim, se mostrarmos $\pi \geq c_{HZ}(Z(1))$, obtemos que c_{HZ} é uma capacidade simplética. Para tanto, provaremos no Teorema 3.2.4 que um sistema determinado por uma função Hamiltoniana com oscilação estritamente maior do que π possui uma órbita periódica com período $T = 1$, o que nos garantirá, pela definição de c_{HZ} , a desigualdade desejada. \square

Teorema 3.2.4. *Se $H \in \mathcal{H}(Z(1), \omega_0)$ satisfaz $m(H) > \pi$, então o sistema Hamiltoniano $\dot{x} = J\nabla H(x)$ em $Z(1)$ admite uma solução periódica não constante com período $T = 1$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir, fazendo uma mudança de coordenadas simpléticas se necessário, que H se anula numa vizinhança da origem. Com efeito, como $H \in \mathcal{H}(Z(1), \omega_0)$, existe aberto $U \subset Z(1)$ tal que $H|_U \equiv 0$. Sejam $z_0 \in U$ e uma função suave $\rho: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em $Z(1)$ que é igual a 1 numa vizinhança V do segmento $\{tz_0; 0 \leq t \leq 1\}$ que conecta a origem a z_0 . Defina $K(z) = \rho(z)\langle z, -Jz_0 \rangle$. Assim, o fluxo ψ no tempo 1 do campo X_K é simplético. Como $X_K(z) = J\nabla K(z) = J(\nabla\rho(z)\langle z, -Jz_0 \rangle + \rho(z)(-Jz_0))$, temos $X_K(z) = z_0$ para todo z em V . Assim, $\psi^t(0) = tz_0$, $0 \leq t \leq 1$, é uma solução da equação dada pelo campo X_K em V . Logo, $\psi^1(0) = z_0$ e o Hamiltoniano $H \circ \psi$ se anula numa vizinhança da origem.

Observe que se $H \in \mathcal{H}(Z(1), \omega_0)$, então existe um elipsoide $E = E_N$ tal que $H|_E \in \mathcal{H}(E, \omega_0)$, onde

$$E_N = \{z \in \mathbb{R}^{2n}; q(z) < 1\} \subset Z(1),$$

q é dado nas coordenadas $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ por

$$q(z) = (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{N^2} \sum_{j=2}^n (x_j^2 + y_j^2)$$

e N é um inteiro positivo suficientemente grande. Já que $H \in \mathcal{H}(Z(1), \omega_0)$ satisfaz $m(H) > \pi$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $m(H) > \pi + \varepsilon$. Podemos então tomar uma função suave $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

- $f(s) = m(H)$ se $s \leq 1$
- $f(s) \geq (\pi + \varepsilon)s \ \forall s \in \mathbb{R}$
- $f(s) = (\pi + \varepsilon)s$ se $s \gg 1$
- $0 \leq f'(s) \leq \pi + \varepsilon$ se $s > 1$.

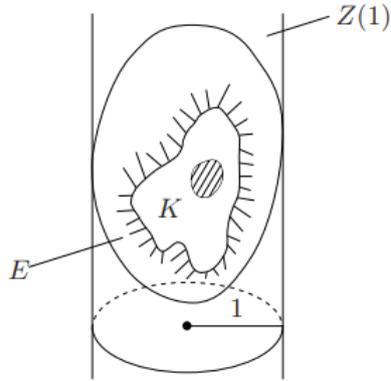


Figura 3.4: Elipsoide $E \subset Z(1)$

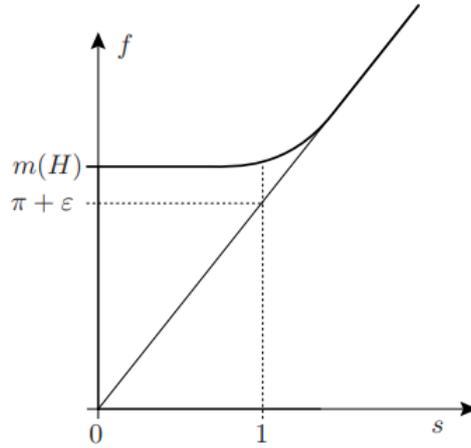


Figura 3.5: Função f

Feito isso, definimos

$$\bar{H}(z) = \begin{cases} H(z), & z \in E \\ f(q(z)), & z \notin E. \end{cases}$$

Observe que \bar{H} estende H , $\bar{H} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ e

$$\bar{H}(z) = (\pi + \varepsilon)q(z), \text{ se } |z| \geq R \quad (3.2)$$

para algum $R > 0$ suficientemente grande tal que $f(q(z)) = (\pi + \varepsilon)q(z)$. A proposição abaixo descreve a solução periódica que estamos procurando.

Proposição 3.2.5. *Seja $x(t)$ solução periódica de $\dot{x} = X_{\bar{H}}(x)$ com período 1. Se x satisfaz $\phi(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, x \rangle - \bar{H}(x(t)) dt > 0$, então $x(t)$ é não constante e está contida no elipsoide E . Portanto, $x(t)$ é solução do sistema original $\dot{x} = X_H(x)$ em $Z(1)$.*

Demonstração. Se $x(t) = x^*$ é constante, então

$$\phi(x^*) = \int_0^1 -H(x^*)dt = -H(x^*) \leq 0.$$

Observe que quando $q = 1$, isto é, no bordo ∂E , o campo $X_{\bar{H}}$ se anula já que $\bar{H}(z) = f(1) = m(H)$ para todo z tal que $q(z) = 1$. Portanto, se para uma solução $x(t)$, temos $x(t_0) \notin E$ para algum t_0 , então $x(t) \notin E$ para todo t e logo, uma tal solução resolve:

$$-J\dot{x} = \nabla\bar{H}(x) = f'(q(x))\nabla q(x).$$

Observe que fora de E , a função q é uma integral primeira do campo pois $\langle \nabla q, Jf'(q)\nabla q \rangle = f'(q)\langle \nabla q, J\nabla q \rangle = 0$. Assim, se $x(t)$ é uma solução, então $q(x(t)) = q(x(t_0)) = \tau > 1$ (pois $x(t) \notin E$) é constante em t . Como q é uma forma quadrática positiva, temos q positivamente homogênea de grau 2 e logo, da fórmula de Euler, temos $\langle \nabla q(z), z \rangle = 2q(z)$ para $z \in \mathbb{R}^{2n}$. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, x \rangle - \bar{H}(x) dt = \int_0^1 \frac{1}{2} f'(q(x)) \langle \nabla q(x), x \rangle - \bar{H}(x) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} f'(\tau) 2q(x) dt - \int_0^1 \bar{H}(x) dt = \int_0^1 f'(\tau) \tau dt - \int_0^1 f(q(x)) dt \\ &= f'(\tau)\tau - f(\tau) \leq (\pi + \varepsilon)\tau - (\pi + \varepsilon)\tau = 0 \end{aligned}$$

pela definição de \bar{H} e das propriedades de f . Concluindo então que $\phi(x) \leq 0$ para todas soluções fora de E . \square

Em virtude da proposição acima, sabemos agora que devemos encontrar uma solução periódica do sistema $\dot{x} = X_{\bar{H}}(x)$ tal que o funcional $\phi(x) > 0$. Para estabelecer a existência de uma tal solução, usaremos um princípio variacional que permitirá obter a solução desejada como ponto crítico de ϕ .

Considere o espaço $\Omega = C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ de caminhos suaves periódicos em \mathbb{R}^{2n} , onde consideramos $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Definimos $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\phi(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, x \rangle dt - \int_0^1 \bar{H}(x) dt, \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

É bom notar que aqui x é um caminho que depende de t . Afirmamos que os pontos críticos de ϕ são órbitas periódicas de $\dot{x} = X_{\bar{H}}(x)$. De fato, observando que Ω é espaço vetorial, a derivada de ϕ no ponto $x \in \Omega$ na direção $y \in \Omega$ é dada por

$$\begin{aligned} d\phi(x)(y) &= \frac{d}{d\xi} \phi(x + \xi y) \Big|_{\xi=0} \\ &= \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J(\dot{x} + \xi \dot{y}), x + \xi y \rangle dt - \int_0^1 \bar{H}(x + \xi y) dt \right) \Big|_{\xi=0} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} (\langle -J(\dot{x} + \xi \dot{y}), y \rangle + \langle -J\dot{y}, x + \xi y \rangle) dt \\ &\quad - \int_0^1 \langle \nabla \bar{H}(x + \xi y), y \rangle dt \Big|_{\xi=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{2} (\langle -J\dot{x}, y \rangle + \langle -J\dot{y}, x \rangle) + \langle -\nabla\bar{H}(x), y \rangle dt \\
&= \int_0^1 \langle -J\dot{x} - \nabla\bar{H}(x), y \rangle dt
\end{aligned}$$

onde utilizamos do método de integração por partes na última igualdade. Consequentemente, $d\phi(x)(y) = 0 \forall y \in \Omega$ se, e somente se, o caminho x satisfaz $-J\dot{x} - \nabla\bar{H}(x) = 0$, isto é, um ponto crítico de ϕ é solução da equação Hamiltoniana $-J\dot{x} = \nabla\bar{H}(x)$ e satisfaz $x(0) = x(1)$ já que pertence a $C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2n})$.

Nosso objetivo então é encontrar um ponto crítico x^* do funcional ϕ tal que $\phi(x^*) > 0$. Para isso, usaremos o chamado Princípio Minimax que descreveremos em seguida.

Seja $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^1 definida num espaço de Hilbert E com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma induzida $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, é de nosso interesse encontrar uma forma de procurar pontos críticos de f . Estes últimos citados são os $\hat{x} \in E$ tais que $df(\hat{x}) = 0$, ou seja, $df(\hat{x})(y) = 0 \forall y \in E$. Por definição, temos que $df(x)$ é um elemento do dual de E , isto é, um funcional linear contínuo. Do Teorema da representação de Riesz (v. por exemplo [Kre, Theorem 3.8-1, p. 188]), temos

$$df(x)(y) = \langle v(x), y \rangle \quad \forall y \in E \text{ e } \|df(x)\| = \|v(x)\|$$

onde $v(x)$ é unicamente determinado por $df(x)$. Chamamos tal $v(x)$ de gradiente de f em x e denotamos $v(x) := \nabla f(x)$. Observe que nesta linguagem, os pontos críticos de f são os zeros da aplicação $x \mapsto \nabla f(x)$. Assim, podemos interpretar os pontos críticos de f como os pontos de equilíbrio do sistema

$$\dot{x} = -\nabla f(x), \quad x \in E.$$

Assumiremos que esta equação diferencial ordinária possui um fluxo global $\varphi^t(x)$, isto é, resolve unicamente os problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi^t(x) = -\nabla f(\varphi^t(x)) \\ \varphi^0(x) = x \end{cases}$$

para todo t real e x em E . Pelo Teorema clássico de existência e unicidade de soluções de problemas de Cauchy, sob certas hipóteses em f , é possível garantir a existência de tal fluxo. Segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} f(\varphi^s(x)) &= df(\varphi^s(x)) \left(\frac{d}{ds} \varphi^s(x) \right) \\
&= df(\varphi^s(x)) (-\nabla f(\varphi^s(x))) \\
&= -\langle \nabla f(\varphi^s(x)), \nabla f(\varphi^s(x)) \rangle = -\|\nabla f(\varphi^s(x))\|^2 \leq 0
\end{aligned}$$

ou seja, $f(\varphi^t(x))$ decresce ao longo de soluções não constantes $\varphi^t(x)$. Integrando e usando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$f(\varphi^t(x)) - f(x) = \int_0^t \frac{d}{ds} f(\varphi^s(x)) ds = - \int_0^t \|\nabla f(\varphi^s(x))\|^2 ds. \quad (3.4)$$

Apresentaremos agora as condições de R. Palais e S. Smale que garantem a existência de ponto crítico em alguns problemas variacionais.

Definição 3.2.6. Uma função f satisfaz as condições de Palais Smale (denotamos: f satisfaz P.S.) se toda sequência (x_j) em E satisfazendo

$$\nabla f(x_j) \rightarrow 0 \text{ em } E \text{ e } |f(x_j)| \leq c < \infty$$

para algum $c \geq 0$ possui subsequência convergente. Observe que quando f é de classe C^1 , o limite de tal subsequência é um ponto crítico de f .

Se \mathcal{F} é uma família de subconjuntos $F \subset E$, definimos o **minimax** $m(f, \mathcal{F})$ associado a f e \mathcal{F} como sendo

$$m(f, \mathcal{F}) = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} f(x) \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Lema 3.2.7 (Lema Minimax). *Sejam $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de E tais que:*

i) f satisfaz P.S.

ii) $\dot{x} = -\nabla f(x)$ possui fluxo global.

iii) \mathcal{F} é positivamente invariante pelo fluxo, isto é, $F \in \mathcal{F} \Rightarrow \varphi^t(F) \in \mathcal{F}, \forall t \geq 0$.

iv) $-\infty < m(f, \mathcal{F}) < \infty$.

Então, $m(f, \mathcal{F})$ é um valor crítico de f , ou seja, existe $x^* \in E$ tal que $f(x^*) = m(f, \mathcal{F})$ e $\nabla f(x^*) = 0$.

Demonstração. Abreviando $m = m(f, \mathcal{F})$, mostraremos que dado $\varepsilon > 0$, existe um $x \in E$ satisfazendo

$$m - \varepsilon \leq f(x) \leq m + \varepsilon \text{ e } \|\nabla f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Daí, tomando $\varepsilon = 1/j$, encontramos uma sequência (x_j) que pelas condições de Palais Smale possui subsequência convergente para um ponto crítico. Suponha por absurdo que exista $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla f(x)\| > \varepsilon_0 \tag{3.5}$$

para todo x que satisfaz $m - \varepsilon_0 \leq f(x) \leq m + \varepsilon_0$. Da definição de m , existe $F \in \mathcal{F}$ valendo

$$\sup_{x \in F} f(x) \leq m + \varepsilon_0.$$

Assim, se $x \in F$, então $f(x) \leq m + \varepsilon_0$ e afirmamos que a solução $\varphi^t(x)$ do campo gradiente satisfaz $f(\varphi^{t_0}(x)) \leq m - \varepsilon_0$ se $t_0 = 2/\varepsilon_0$. De fato, se $f(\varphi^t(x)) \leq m - \varepsilon_0$ para algum $t \in [0, t_0]$, não há o que provar pois $f(\varphi^t(x))$ é decrescente. Se $f(\varphi^t(x)) > m - \varepsilon_0$ para todo t em $[0, t_0]$, então por (3.5) temos $\|\nabla f(\varphi^t(x))\| \geq \varepsilon_0$ e de (3.4),

$$f(\varphi^t(x)) = - \int_0^t \|\nabla f(\varphi^s(x))\|^2 ds + f(x) \leq f(x) - \varepsilon_0^2 t.$$

Logo, $f(\varphi^{t_0}(x)) \leq f(x) - \varepsilon_0^2 t_0 \leq m + \varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 \frac{2}{\varepsilon_0} = m - \varepsilon_0$, o que contradiz $f(\varphi^t(x)) > m - \varepsilon_0$ para todo t em $[0, t_0]$. Mostramos que

$$\sup_{x \in F^*} f(x) \leq m - \varepsilon_0$$

onde $F^* = \varphi^{t_0}(F)$. Mas pela condição *iii*) da hipótese, temos $F^* = \varphi^{t_0}(F) \in \mathcal{F}$ e logo, chegamos em um absurdo pois

$$m = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{x \in F} f(x) \leq \sup_{x \in F^*} f(x).$$

□

Observação 3.2.8. Quando f é limitada, podemos escolher \mathcal{F} como sendo a família dos subconjuntos unitários $\{x\}$ de elementos de E e logo,

$$m(f, \mathcal{F}) = \inf_{x \in E} f(x).$$

Daí, o Lema 3.2.7 garante que f assume seu mínimo em E .

Recorde que o funcional $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ foi definido em (3.3) por

$$\phi(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, x \rangle dt - \int_0^1 \bar{H}(x) dt,$$

observe que o funcional definido pelo primeiro termo de ϕ ,

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, x \rangle dt, \end{aligned}$$

determina a área (simplética) do caminho fechado x e pode ser reescrito como

$$\int_D \gamma^* \omega_0$$

onde D é o disco unitário com $\partial D = S^1$ e $\gamma: D \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é uma aplicação de classe C^∞ que satisfaz $\gamma|_{S^1} = x$. De fato, seja γ cumprindo tais propriedades. Lembremos agora que

$$\omega_0 = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j = d\lambda$$

onde λ é a 1-forma

$$\lambda = \sum_{j=1}^n y_j dx_j.$$

Assim, temos

$$\int_D \gamma^* \omega_0 = \int_D \gamma^*(d\lambda) = \int_D d(\gamma^* \lambda) = \int_{S^1} \gamma^* \lambda = \int_{\gamma(S^1)} \lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle -J\dot{x}, x \rangle dt$$

onde usamos o Teorema de Stokes e a última igualdade já havia sido verificada em (1.5). Por esta razão, por vezes, designaremos o primeiro termo do funcional ϕ como parte simplética de ϕ .

Mostraremos que uma certa extensão de ϕ satisfaz P.S. e para encontrar o espaço apropriado, representaremos os caminhos $x \in \Omega$ em séries de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{k2\pi Jt} x_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^{2n}$$

que convergem, junto com suas derivadas, na norma do supremo. Estenderemos a parte simplética do funcional ϕ fazendo

$$a(x, y) = \int_0^1 \frac{1}{2} \langle -J\dot{x}, y \rangle dt, \quad x, y \in \Omega.$$

Representando x, y pelas séries de Fourier correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} 2a(x, y) &= \int_0^1 \left\langle -J \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2\pi k e^{k2\pi Jt} x_k, \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{l2\pi Jt} y_l \right\rangle dt \\ &= 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} j \langle x_j, y_j \rangle = 2\pi \left(\sum_{j > 0} |j| \langle x_j, y_j \rangle - \sum_{j < 0} |j| \langle x_j, y_j \rangle \right) \end{aligned}$$

já que

$$\int_0^1 \langle e^{k2\pi Jt} x_k, e^{l2\pi Jt} y_l \rangle dt = \begin{cases} \langle x_k, y_l \rangle, & \text{se } k = l \\ 0, & \text{se } k \neq l \end{cases}.$$

Portanto, podemos definir $a(x, y)$ como forma bilinear no espaço de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(S^1)$. Recorde que os espaços $H^s = H^s(S^1)$ para $s \geq 0$ são definidos por

$$H^s(S^1) = \{x \in L^2(S^1) \mid \sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|^{2s} |x_j|^2 < \infty\}$$

onde $x(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{j2\pi Jt} x_j$ é a série de Fourier de x (v. por exemplo [HZ11, p.83]). O espaço $H^s = H^s(S^1)$ é de Hilbert com o produto interno

$$\langle x, y \rangle_s = \langle x_0, y_0 \rangle + 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2s} \langle x_k, y_k \rangle$$

e norma associada $\|x\|_s^2 = \langle x, x \rangle_s$, $x, y \in H^s$. Denotaremos o espaço $H^{\frac{1}{2}}$ por E . Observe que existe uma decomposição ortogonal de E :

$$E = E^- \oplus E^0 \oplus E^+$$

em espaços E^-, E^0 e E^+ onde a série de Fourier de $x \in E$ possui somente coeficientes negativos, nulo e positivos, respectivamente. As projeções correspondentes são denotadas por $P^-: E \rightarrow E^-, P^0: E \rightarrow E^0$ e $P^+: E \rightarrow E^+$ e portanto, cada $x \in E$ pode ser escrito de forma única como

$$x = P^-(x) + P^0(x) + P^+(x) =: x^- + x^0 + x^+.$$

Daí, sendo a a forma bilinear que definimos, temos

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \frac{1}{2} \langle x^+, y^+ \rangle_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \langle x^-, y^- \rangle_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \langle x^+, y \rangle_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \langle x^-, y \rangle_{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \langle (P^+ - P^-)x, y \rangle_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Usando que $\Omega \subset E$ definimos agora uma extensão da parte simplética de ϕ ao espaço E como a função $a: E \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $a(x) = a(x, x)$, isto é,

$$a(x) = \frac{1}{2} \langle (P^+ - P^-)x, x \rangle = \frac{1}{2} \|x^+\|_{\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} \|x^-\|_{\frac{1}{2}}^2.$$

Note que estamos denotando duas aplicações distintas pelo mesmo símbolo a : a forma bilinear e a extensão da parte simplética de ϕ . Temos $a: E \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com derivada

$$da(x)(y) = a(x, y) + a(y, x) = 2a(x, y) = \langle (P^+ - P^-)x, y \rangle_{\frac{1}{2}}$$

e logo, $\nabla a(x) = x^+ - x^- \in E, \forall x \in E$.

Antes de prosseguirmos para a extensão da parte *Hamiltoniana* de ϕ , destacamos algumas propriedades dos espaços de Sobolev H^s .

Observamos que sobre os espaços H^s , vale que

$$H^t \subset H^s \subset H^0 = L^2 \text{ para } t \geq s \geq 0$$

onde L^2 é o conhecido espaço das funções de quadrado Lebesgue integráveis, ou seja, os espaços H^s decrescem à medida que s aumenta. Enquanto isso, as normas nos espaços H^s crescem à medida que s aumenta, isto é,

$$\|x\|_t \geq \|x\|_s \geq \|x\|_0, \text{ para } x \in H^t.$$

Em particular, as inclusões $i: H^t \rightarrow H^s$ para $t \geq s$ são contínuas. Agora apresentaremos uma proposição sem demonstração pois não é o objetivo nos aprofundarmos em detalhes dos espaços H^s (v. por exemplo [HZ11, Proposition 3, p.84]).

Proposição 3.2.9. *Seja $t > s \geq 0$. Então a inclusão $i: H^t \rightarrow H^s$ é um operador compacto, isto é, a imagem de um conjunto limitado em H^t é um subconjunto relativamente compacto, ou seja, cujo fecho é compacto em H^s .*

Da proposição, segue que a inclusão $j: H^{\frac{1}{2}} \rightarrow L^2 = H^0$ é um operador compacto. Seu operador adjunto $j^*: L^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}$ é definido por

$$\langle j(x), y \rangle_{L^2} = \langle x, j^*(y) \rangle_{\frac{1}{2}}, \forall x \in H^{\frac{1}{2}}, y \in L^2.$$

Proposição 3.2.10. *Temos $j^*(L^2) \subset H^1$ e $\|j^*(y)\|_1 \leq \|y\|_{L^2} \forall y \in L^2$.*

Demonstração. Da definição de operador adjunto, temos

$$\langle j(x), y \rangle_{L^2} = \langle x, j^*(y) \rangle_{\frac{1}{2}},$$

daí

$$\sum_k \langle x_k, y_k \rangle = \langle x_0, j^*(y)_0 \rangle + 2\pi \sum_k |k| \langle x_k, j^*(y)_k \rangle$$

para $x \in H^{\frac{1}{2}} \subset L^2$ e $y \in L^2$. Tomando $x \in H^{\frac{1}{2}}$ com somente o i -ésimo coeficiente não nulo e igual a 1, obtemos

$$j^*(y)_i = \frac{1}{2\pi|i|} y_i$$

e $j^*(y)_0 = y_0$, concluindo que

$$j^*(y) = y_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi|k|} e^{k2\pi Jt} y_k,$$

para qualquer $y \in L^2$. Assim, $j^*(L^2) \subset H^1$ e

$$\begin{aligned} \|j^*(y)\|_1 &= \langle j^*(y)_0, j^*(y)_0 \rangle + 2\pi \sum_k |k| \langle j^*(y)_k, j^*(y)_k \rangle \\ &= \langle y_0, y_0 \rangle + 2\pi \sum_k |k| \left\langle \frac{1}{2\pi|k|} y_k, \frac{1}{2\pi|k|} y_k \right\rangle \leq \|y\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

□

Temos então que $j^*: L^2 \rightarrow H^1 \subset H^{\frac{1}{2}}$. Em particular, da desigualdade (3.6), concluímos que a imagem de um conjunto limitado de L^2 por meio de j^* é um conjunto limitado em H^1 cuja imagem pela inclusão $i: H^1 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}$ é relativamente compacta, isto é, $j^*: L^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}$ é um operador compacto.

Voltando agora ao funcional ϕ , estudaremos a parte *Hamiltoniana*, ou seja, o segundo termo do funcional, definido por

$$\begin{aligned} \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_0^1 \overline{H}(x(t)) dt \end{aligned}$$

Como $|\overline{H}(z)| \leq M|z|^2$, $\forall z \in \mathbb{R}^{2n}$, este funcional admite uma extensão $\hat{b}: L^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos $b: E \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$b(x) = \hat{b}(j(x)),$$

onde $j: E \rightarrow L^2$ é a inclusão de E em L^2 . Utilizando a expansão em Taylor de \overline{H} , encontramos

$$\hat{b}(x+h) = \hat{b}(x) + \int_0^1 \langle \nabla \overline{H}(x), h \rangle dt + R(x, h)$$

onde $R(x, h)/\|h\|_{L^2}^2$ tende a zero quando h tende a zero. Assim, \hat{b} é diferenciável e sua derivada em no ponto x na direção h é dada por

$$d\hat{b}(x)(h) = \int_0^1 \langle \nabla \overline{H}(x), h \rangle dt = \langle \nabla \overline{H}(x), h \rangle_{L^2}.$$

Lembrando que da definição temos que o gradiente de \hat{b} é o vetor em L^2 que cumpre $\langle \nabla \hat{b}(x), h \rangle_{L^2} = d\hat{b}(x)(h)$ e logo, $\nabla \hat{b}(x) = \nabla \overline{H}(x) \in L^2$. Assim, a derivada de b no ponto x na direção y é

$$\begin{aligned} \langle \nabla b(x), y \rangle &= db(x)(y) = d\hat{b}(j(x))(j(y)) \\ &= \langle \nabla \hat{b}(j(x)), j(y) \rangle_{L^2} = \langle j^* \nabla \hat{b}(j(x)), y \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, temos o gradiente de b

$$\nabla b(x) = j^* \nabla \hat{b}(j(x)) = j^* \nabla \overline{H}(x).$$

Lema 3.2.11. *O funcional $b: E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e seu gradiente $\nabla b: E \rightarrow E$ é contínuo e compacto. Além disso,*

$$\|\nabla b(x) - \nabla b(y)\| \leq M\|x - y\| \text{ e } \|b(x)\| \leq M\|x\|_{L^2}^2$$

para todo x, y em E .

Demonstração. Observe que a aplicação $x \mapsto \nabla \overline{H}(x)$ é Lipschitziana em L^2 e logo, a imagem de um conjunto limitado pela mesma é também limitado. Além disso, já vimos que $j^*: L^2 \rightarrow E$ é um operador compacto. Dessa forma, temos que $\nabla b(x) = j^* \nabla \overline{H}(x)$ também é compacto. Mais ainda,

$$\begin{aligned} \|\nabla b(x) - \nabla b(y)\|_{\frac{1}{2}} &= \|j^*(\nabla \overline{H}(x) - \nabla \overline{H}(y))\|_{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|j^*(\nabla \overline{H}(x) - \nabla \overline{H}(y))\|_1 \\ &\leq \|\nabla \overline{H}(x) - \nabla \overline{H}(y)\|_{L^2} \\ &\leq M\|x - y\|_{L^2} \leq M\|x - y\|_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade segue da monotonicidade das normas e a segunda da Proposição 3.2.10. Por último, temos

$$|b(x)| = \left| \int_0^1 \overline{H}(x(t)) dt \right| \leq \int_0^1 M|x(t)|^2 dt = M\|x\|_{L^2}^2.$$

□

Agora, fazendo $\phi(x) = a(x) - b(x)$, estendemos o funcional ϕ , antes definido em Ω , para o espaço de Hilbert $E = H^{\frac{1}{2}}$. Com o que vimos, concluímos que este novo funcional $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e seu gradiente é dado por

$$\nabla \phi(x) = \nabla a(x) - \nabla b(x) = x^+ - x^- - \nabla b(x).$$

Mostraremos agora que apesar de estendido, um ponto crítico do novo funcional ainda pertence a $\Omega = C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$.

Lema 3.2.12. *Seja $x \in E$ um ponto crítico de $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}$. Então $x \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Além disso, x é solução da equação Hamiltoniana*

$$\dot{x}(t) = J \nabla \overline{H}(x(t)), \quad 0 \leq t \leq 1$$

e, portanto, é uma solução periódica de período 1.

Demonstração. Representaremos x e $\nabla \overline{H}(x)$ pelas respectivas séries de Fourier em L^2 :

$$\begin{aligned} x &= \sum_k e^{k2\pi Jt} x_k \\ \nabla \overline{H}(x) &= \sum_k e^{k2\pi Jt} a_k. \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $d\phi(x)(v) = 0$ para todo v em E . Lembrando que

$$\langle \nabla b(x), v \rangle = \langle j^* \nabla \overline{H}(x), v \rangle = \langle \nabla \overline{H}(x), v \rangle_{L^2},$$

temos

$$0 = \langle \nabla \phi(x), v \rangle = \langle x^+ - x^- - \nabla b(x), v \rangle = \langle x^+ - x^-, v \rangle - \langle \nabla \overline{H}(x), v \rangle_{L^2}$$

e logo, $\langle x^+ - x^-, v \rangle = \int_0^1 \langle \nabla \overline{H}(x), v \rangle dt$ para todo v em E . Escolhendo funções v adequadas como já fizemos, concluímos que $a_0 = 0$ e

$$a_k = 2\pi k x_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Daí, $\sum_k |k|^2 |x_k|^2 \leq \sum_k |a_k|^2 < \infty$ e portanto, $x \in H^1(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} |e^{k2\pi Jt} x_k| &= \sum_{k \neq 0} |x_k| = \sum_{k \neq 0} |k|^{-1} |k| |x_k| \\ &\leq \left(\sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k \neq 0} |k|^2 |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \|x\|_1 \end{aligned}$$

em particular, a série de Fourier de x converge na norma do supremo, o que nos dá x contínua. Consequentemente, $\nabla \bar{H}(x(t))$ é contínua e logo,

$$\xi(t) = \int_0^t J \nabla \bar{H}(x(s)) ds$$

é de classe C^1 . Expandindo em série de Fourier, temos

$$\xi(t) = \int_0^t J \left(\sum_k e^{k2\pi Jt} 2\pi k x_k \right) dt.$$

Portanto, comparando os coeficientes temos $\xi(t) = x(t) - x(0)$, o que nos dá x de classe C^1 e $\dot{x} = J \nabla \bar{H}(x)$. Mas sendo x de classe C^1 , temos $J \nabla \bar{H}(x)$ também de classe C^1 e logo, sendo x solução da equação, temos na verdade x de classe C^2 . Iterando este argumento, concluímos por fim que $x \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$. \square

Lema 3.2.13. *Toda sequência (x_j) em E satisfazendo $\nabla \phi(x_j) \rightarrow 0$ possui subsequência convergente. Em particular, ϕ satisfaz P.S.*

Demonstração. Por hipótese, temos $x_j^+ - x_j^- - \nabla b(x_j) = \nabla \phi(x_j) \rightarrow 0$. Se $x_j = x_j^- + x_j^0 + x_j^+$ é limitado em E , então $x_j^0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é limitado e sendo ∇b compacto, concluímos que $\nabla \phi(x_j)$ possui subsequência convergente. Provaremos então que (x_j) é limitada. Suponha por absurdo que exista subsequência denotada ainda por (x_j) tal que $\|x_j\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$. Defina a sequência normalizada

$$z_j = \frac{x_j}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}},$$

observando que como $\|x_j\|_{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$, $x_j \neq 0$ para j suficientemente grande. Por hipótese, temos

$$z_j^+ - z_j^- - j^* \left(\frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \nabla \bar{H}(x_j) \right) = \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \left(x_j^+ - x_j^- - \nabla b(x_j) \right) \rightarrow 0. \quad (3.7)$$

Como $|\nabla H(z)| \leq M|z|$, a sequência $\left(\frac{\nabla \bar{H}(x_j)}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \right)$ é limitada em L^2 . Como a sequência (z_j^0) é limitada, j^* e $(P^+ - P^-)$ são operadores compactos, podemos assumir que z_j possui uma subsequência convergente em E e logo em L^2 . Passando a tal subsequência, assumiremos $z_j \rightarrow z$. Lembramos agora que

$\bar{H}(z) = (\pi + \varepsilon)q(z)$ para $|z|$ suficientemente grande. Seja $Q(z) = (\pi + \varepsilon)q(z)$. Temos

$$\left\| \frac{\nabla \bar{H}(x_j)}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} - \nabla Q(z) \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \|\nabla \bar{H}(x_j) - \nabla Q(z_j)\|_{L^2} + \|\nabla Q(z_j - z)\|_{L^2}.$$

Fazendo j tendendo a infinito, concluímos

$$\frac{\nabla \bar{H}(x_j)}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \rightarrow \nabla Q(z) \text{ em } L^2.$$

Daí,

$$\frac{\nabla b(x_j)}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} = j^* \left(\frac{\nabla \bar{H}(x_j)}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}} \right) \rightarrow j^*(\nabla Q(z)) \text{ em } E.$$

Portanto, de (3.7), temos que z satisfaz

$$z^+ - z^- - j^*(\nabla Q(z)) = 0.$$

Além disso, $\|z\|_{\frac{1}{2}} = \|\lim z_j\|_{\frac{1}{2}} = \lim \|z_j\|_{\frac{1}{2}} = 1$. Seguindo o raciocínio da demonstração do Lema 3.2.12, obtemos $z \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^{2n})$ e que z é solução da equação

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = X_Q(z(t)) \\ z(0) = z(1) \end{cases} \quad (3.8)$$

Lembrando que $Q(z) = (\pi + \varepsilon)q(z)$ e $q(z) = x_1^2 + y_1^2 + \frac{1}{N^2} \sum_{l=2}^n x_l^2 + y_l^2$, temos $\nabla Q(z) = \frac{(\pi + \varepsilon)}{N^2} (N^2 2x_1, 2x_2, 2x_3, \dots, 2x_n, N^2 2y_1, 2y_2, \dots, 2y_n)$ e assim

$$\begin{aligned} X_Q(z(t)) &= J \nabla Q(z(t)) \\ &= \frac{(\pi + \varepsilon)}{N^2} (N^2 2y_1(t), \dots, 2y_n(t), -N^2 2x_1(t), \dots, -2x_n(t)), \end{aligned}$$

onde $z(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t), y_1(t), \dots, y_n(t))$. Portanto,

$$z(t) = \frac{(\pi + \varepsilon)}{N^2} e^{JBt} z(t),$$

onde B é a matriz tal que $B(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = (2N^2 x_1, \dots, 2x_n, 2N^2 y_1, \dots, 2y_n)$ e concluímos assim que a equação Hamiltoniana (3.8) admite soluções periódicas com períodos $T \neq 1$. Como esta equação não possui soluções não triviais com período igual a 1, temos $z(t) = 0$ o que contradiz $\|z(t)\|_{\frac{1}{2}} = 1$. \square

Pelo Lema 3.2.11, a equação gradiente $\dot{x} = -\nabla \phi(x)$, $x \in E$, define um único fluxo global $\varphi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ tal que a imagem de um conjunto limitado é um conjunto limitado. Nossas duas últimas conclusões nos remetem ao Lema Minimax, o qual garantirá a existência do ponto crítico desejado.

Lema 3.2.14. *O fluxo de $\dot{x} = -\nabla \phi(x)$ admite a representação*

$$\varphi^t(x) = e^t x^- + x^0 + e^{-t} x^+ + K(t, x),$$

onde $K: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ é um operador compacto e contínuo.

Demonstração. Definimos K de acordo com a fórmula de variação de parâmetros

$$K(t, x) = - \int_0^t (e^{t-s} P^- + P^0 + e^{-t+s} P^+) \nabla b(\varphi^s(x)) ds. \quad (3.9)$$

Precisamos então verificar as propriedades citadas, ou seja, a continuidade e a compacidade de K . Abreviando

$$y(t) = e^t x^- + x^0 + e^{-t} x^+ + K(t, x),$$

do Teorema Fundamental do Cálculo e utilizando a escrita em séries de Fourier obtemos

$$\dot{y}(t) = (P^- - P^+) y(t) - \nabla b(\varphi^t(x)).$$

Mas observe que $y(0) = x^- + x^0 + x^+ + K(0, x) = x$ e logo, a função $\xi(t) = y(t) - \varphi^t(x)$ resolve a equação

$$\dot{\xi}(t) = (P^- - P^+) \xi(t) \text{ e } \xi(0) = 0$$

já que $\frac{d}{dt} \varphi^t(x) = -\nabla \phi(\varphi^t(x)) = -\nabla a(\varphi^t(x)) - \nabla b(\varphi^t(x)) = -(P^+ - P^-) \varphi^t(x) - \nabla b(\varphi^t(x))$. Pela unicidade de solução de problemas de Cauchy, como 0 é solução, temos $\xi(t) = 0 \forall t$ e logo, $y(t) = \varphi^t(x)$, como queríamos. Lembramos agora que $\nabla b(\varphi^t(x)) = j^* \nabla \bar{H}(\varphi^t(x))$, e logo

$$K(t, x) = j^* \left\{ - \int_0^t (e^{t-s} P^- + P^0 + e^{-t+s} P^+) \nabla \bar{H}(j(\varphi^s(x))) ds \right\}.$$

Abreviando a parte entre chaves por $k(t, x)$, temos $k: \mathbb{R} \times E \rightarrow L^2$ contínuo. Além disso, a imagem de um conjunto limitado por k é um conjunto limitado em L^2 . Pela Proposição 3.2.10, a aplicação $j^*: L^2 \rightarrow E$ é compacta e logo, $K(t, x) = j^*(k(t, x))$ é um operador compacto e contínuo. \square

Proposição 3.2.15. *Existe $x^* \in E$ satisfazendo $\nabla \phi(x^*) = 0$ e $\phi(x) > 0$.*

Demonstração. Para provar esta proposição, primeiro destacaremos dois subconjuntos de E . Denotaremos primeiro $\Sigma_\tau \subset E$ o conjunto

$$\Sigma_\tau = \{x = x^- + x^0 + se^+; \|x^- + x^0\|_{\frac{1}{2}} \leq \tau \text{ e } 0 \leq s \leq \tau\}$$

onde $\tau > 0$ (ver Figura 3.6). Acima, $e^+ \in E$ é o elemento

$$e^+(t) = e^{2\pi J t} e_1$$

onde $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Observe que $\|e^+\|^2 = 2\pi \langle e_1, e_1 \rangle = 2\pi$ e $\|e^+\|_{L^2} = 1$. Denotaremos agora $\partial\Sigma$ a fronteira de Σ em $E^- + E^0 + \mathbb{R}e^+$, que é formada pelos elementos da forma

$$x = x^- + x^0 + se^+$$

tais que $\|x^- + x^0\|_{\frac{1}{2}} = \tau$, $s = 0$ ou $s = \tau$.

Lema 3.2.16. *Existe $\tau^* > 0$ tal que para $\tau \geq \tau^*$, temos $\phi|_{\partial\Sigma_\tau} \leq 0$.*

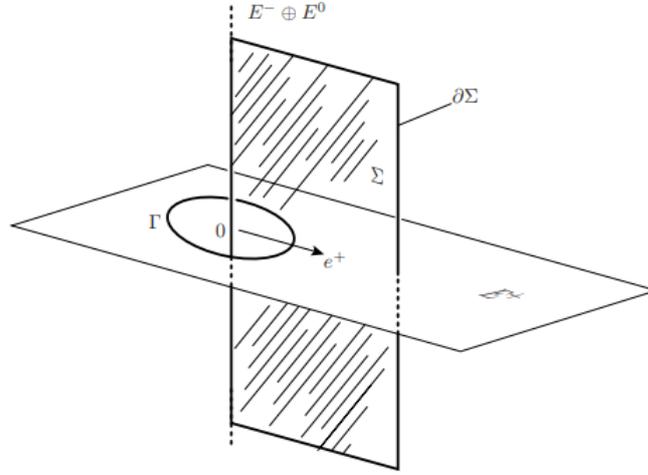


Figura 3.6: Conjuntos Σ_τ e Γ_α

Demonstração. Como $a|_{E^- \oplus E^0} \leq 0$ e $b \geq 0$, temos

$$\phi|_{E^- \oplus E^0} = (a - b)|_{E^- \oplus E^0} \leq 0.$$

Portanto, se $s = 0$ já temos $\phi \leq 0$ e basta mostrar que $\phi \leq 0$ quando $s = \tau$ ou $\|x^- + x^0\| = \tau$. Pela construção de \bar{H} (ver (3.2)), existe constante $\gamma > 0$ tal que

$$\bar{H}(z) \geq (\pi + \varepsilon)q(z) - \gamma$$

para todo z em \mathbb{R}^{2n} . Daí,

$$\phi(x) = a(x) - b(x) = a(x) - \int_0^1 \bar{H}(x) dt \leq a(x) - (\pi + \varepsilon) \int_0^1 q(x) dt + \gamma$$

para todo x em E . Lembrando que q é uma forma quadrática, temos

$$\int_0^1 q(x^- + x^0 + se^+) dt = \int_0^1 q(x^-) dt + \int_0^1 q(x^0) dt + \int_0^1 q(se^+) dt.$$

Mas $a(x) = \frac{1}{2}\|x^+\|_{\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|_{\frac{1}{2}}^2$ e logo, podemos estimar

$$\begin{aligned} \phi(x) &\leq \frac{1}{2}s^2\|e^+\|^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - (\pi + \varepsilon) \left(\int_0^1 q(x^-) + q(x^0) + q(se^+) dt \right) + \gamma \\ &\leq \pi s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - (\pi + \varepsilon)q(x^0) - (\pi + \varepsilon)s^2 + \gamma \\ &= -\varepsilon s^2 - \frac{1}{2}\|x^-\|^2 - (\pi + \varepsilon)q(x^0) + \gamma. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos encontrar $c > 0$ tal que

$$\phi(x^- + x^0 + se^+) \leq \gamma - c\|x^- + x^0\|^2 - cs^2$$

sendo que o lado direito da desigualdade é ≤ 0 quando $s = \tau$ ou $\|x^- + x^0\| = \tau$ para τ suficientemente grande. \square

Denotaremos agora $\Gamma_\alpha \subset E^+$ o conjunto

$$\Gamma_\alpha = \{x \in E^+; \|x\| = \alpha\}$$

(ver Figura 3.6).

Lema 3.2.17. *Existe $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tal que $\phi|_{\Gamma_\alpha} \geq \beta > 0$.*

Demonstração. Mostraremos primeiro que $b(x) \frac{1}{\|x\|_{\frac{1}{2}}^2}$ tende a 0 quando $\|x\|_{\frac{1}{2}}$ tende a 0. Suponha por absurdo que não vale tal convergência. Então, existe sequência (x_j) em E e uma constante $d > 0$ tal que

$$x_j \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} b(x_j) \geq d > 0$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Tome $y_j = x_j / \|x_j\|$. Afirmamos que existem uma subsequência de y_j , que denotaremos novamente por (y_j) , e $y, w \in L^2$ tais que

$$\begin{cases} y_j \rightarrow y \text{ em } L^2 \\ y_j(t) \rightarrow y(t) \\ |y_j(t)| \leq w(t) \\ x_j(t) \rightarrow 0 \end{cases}$$

para quase todo t . De fato, pela Proposição 3.2.9, E é mergulhado compactamente em L^2 e portanto, encontramos subsequência de y_j de Cauchy em L^2 . Assumimos então que

$$\|y_{k+1} - y_k\|_{L^2} \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Então a sequência $f_n \in L^2$ definida por

$$f_n(t) := \sum_1^n |y_{k+1}(t) - y_k(t)|,$$

é monótona crescente e satisfaz $\|f_n\|_{L^2} \leq \sum_1^n \|y_{k+1} - y_k\| \leq 1$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona (v. por exemplo [Bar95, 4.6 Monotone Convergence Theorem, p.31]), $f_n(t)$ converge a $f(t)$ em quase todos os pontos e $f \in L^2$. Como para $m > n$ temos

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_n(t)| &\leq |y_m(t) - y_{m-1}(t)| + \dots + |y_{n+1}(t) - y_n(t)| \\ &= f_m(t) - f_n(t) \leq f(t) - f_{n-1}(t) \end{aligned}$$

concluimos que para quase todo t , a sequência $(y_n(t))$ é de Cauchy em \mathbb{R} e portanto, converge. Definimos então $y(t) := \lim y_n(t)$ para quase todo t . Mas temos $|y(t) - y_n(t)| \leq f(t)$ e logo, pelo Teorema da Convergência Dominada (v. por exemplo [Bar95, 5.6 Lebesgue Dominated Convergence Theorem, p.44]), $y_n \rightarrow y$ em L^2 . Definimos então $w(t) := f(t) + |y(t)| \in L^2$. Dessa forma, temos $|y_n(t)| \leq w(t)$ para quase todo t como afirmamos. Por definição de b , temos

$$b(x_j) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} = \int_0^1 \overline{H}(x_j) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} dt.$$

De $\overline{H}(z) \leq M|z|^2 \forall z \in \mathbb{R}^{2n}$, tiramos

$$\overline{H}(x_j(t)) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} \leq M|x_j(t)|^2 \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} = M|y_j(t)|^2 \leq Mw(t)^2$$

para quase todo t . Usando que \overline{H} é nula na origem junto com suas derivadas até a segunda ordem, temos da fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} \overline{H}(x_j(t)) \frac{1}{\|x_j\|^2} &= (\overline{H}(0) + \langle \nabla \overline{H}(0), x_j(t) \rangle |x_j(t)| + O(|x_j(t)|)|x_j(t)|^2) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} \\ &= O(|x_j(t)|)|y_j(t)|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

para quase todo t onde $O(|x_j(t)|)$ é tal que

$$\lim_{|x_j(t)| \rightarrow 0} O(|x_j(t)|) = 0.$$

Portanto,

$$\int_0^1 \overline{H}(x_j(t)) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} dt \rightarrow 0, \text{ quando } j \rightarrow +\infty$$

e isso contradiz $b(x_j) \frac{1}{\|x_j\|_{\frac{1}{2}}^2} \geq d > 0$ para todo j natural. Logo, mostramos que $b(x) \frac{1}{\|x\|_{\frac{1}{2}}^2} \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow 0$. Agora, para $x \in E^+$, temos

$$\begin{aligned} \phi(x) \frac{1}{\|x\|_{\frac{1}{2}}^2} &= \left(\frac{1}{2} \|x^+\|_{\frac{1}{2}}^2 - \frac{1}{2} \|x^-\|_{\frac{1}{2}}^2 - b(x) \right) \frac{1}{\|x\|_{\frac{1}{2}}^2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\|x\|_{\frac{1}{2}}^2} b(x) \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Consequentemente, para $\|x\|_{\frac{1}{2}}$ suficientemente pequeno (digamos $< \delta$), temos $\phi(x) \geq \frac{1}{4} \|x\|_{\frac{1}{2}}^2$ e portanto, para $\Gamma_{\frac{\delta}{2}}$, temos $\phi|_{\Gamma_{\frac{\delta}{2}}} \geq \frac{1}{4} (\frac{\delta}{2})^2 > 0$. \square

Veremos agora o que ocorre se transladarmos o conjunto Σ_τ por meio do fluxo $\varphi^t(x)$ da equação gradiente $\dot{x} = -\nabla \phi(x)$ em E . Como $\phi(\varphi^t(x))$ decresce à medida que t cresce, concluímos do Lema 3.2.16 que existe $\tau > 0$

$$\phi|_{\varphi^t(\partial \Sigma_\tau)} \leq 0$$

para todo $t \geq 0$. Por outro lado, o Lema 3.2.17 garante que existe $\alpha > 0$ tal que $\phi|_{\Gamma_\alpha} > 0$ e consequentemente, para este τ e este α , temos $\varphi^t(\partial \Sigma_\tau) \cap \Gamma_\alpha = \emptyset \forall t \geq 0$.

Lema 3.2.18. *Existem $\tau > \alpha > 0$ tais que para todo $t \geq 0$, tem-se $\varphi^t(\Sigma_\tau) \cap \Gamma_\alpha \neq \emptyset$.*

Demonstração. Pedir $\varphi^t(\Sigma_\tau) \cap \Gamma_\alpha \neq \emptyset$ é equivalente a pedir que exista x em E tal que

$$\begin{cases} (P^- + P^0)(\varphi^t(x)) = 0 \\ \|\varphi^t(x)\| = \alpha \\ x \in \Sigma_\tau. \end{cases} \quad (3.10)$$

Mas lembramos que pelo Lema 3.2.14, o fluxo tem a representação $\varphi^t(x) = e^t x^- + x^0 + e^{-t} x^+ + K(t, x)$, e logo a primeira equação em (3.10) pode ser reescrita como

$$e^t x^- + x^0 + (P^- + P^0)(K(t, x)) = 0$$

e multiplicando a parte em E^- por e^{-t} , obtemos

$$x^- + x^0 + (e^{-t} P^- + P^0)(K(t, x)) = 0.$$

Como $x \in \Sigma_\tau$ quer dizer que $x = x^- + x^0 + s e^+$, com $0 \leq s \leq \tau$, podemos reescrever

$$x + B(t, x) = x^- + x^0 + (e^{-t} P^- + P^0)(K(t, x)) = 0 \quad (3.11)$$

onde B é o operador definido por

$$B(t, x) = (e^{-t} P^- + P^0)K(t, x) + P^+\{(\|\varphi^t(x)\| - \alpha)e^+ - x\}.$$

Abreviando $F = E^- \oplus E^0 + \mathbb{R}e^+$, temos que $B: \mathbb{R} \times F \rightarrow F$ é um operador compacto e contínuo pelo Lema 3.2.14. Portanto, podemos usar o grau de Leray-Schauder, \deg_{LS} (ver Apêndice p.104). A equação (3.11) possui solução $x \in \Sigma_\tau$, para $t \geq 0$, se $\deg_{LS}(\Sigma_\tau, id + B(t, \cdot), 0) \neq 0$ (pois neste caso a aplicação $id + B(t, \cdot)$ é sobrejetiva). Para calcularmos o grau desta aplicação, primeiro observamos que não existe solução da equação citada em $\partial\Sigma_\tau$, isto é,

$$0 \notin (id + B(t, \cdot))(\partial\Sigma_\tau),$$

já que $\varphi^t(\partial\Sigma_\tau) \cap \Gamma_\alpha = \emptyset$ para todo $t \geq 0$. Pela invariância homotópica do grau \deg_{LS} , temos

$$\deg_{LS}(\Sigma_\tau, id + B(t, \cdot), 0) = \deg_{LS}(\Sigma_\tau, id + B(0, \cdot), 0).$$

Como $K(0, x) = 0$ (ver (3.9)), temos $B(0, x) = P^+\{(\|x\| - \alpha)e^+ - x\}$. Defina agora a homotopia $H: I \times F \rightarrow F$ pondo

$$H(t, x) = P^+\{(t\|x\| - \alpha)e^+ - tx\}$$

entre $P^+(-\alpha e^+)$ e $B(0, x)$, onde $I = [0, 1]$. Observe que $x + H(t, x) \neq 0$ para $x \in \partial\Sigma_\tau$. Com efeito, se $x \in \Sigma_\tau$ satisfaz $x + H(t, x) = 0$, então teríamos

$$x = -P^+\{(t\|x\| - \alpha)e^+ - tx\}$$

e como $x = x^- + x^0 + s e^+$, vem $x = s e^+$. Daí,

$$s e^+ = -P^+\{(t\|s e^+\| - \alpha)e^+ - t s e^+\}$$

e logo, $s = \alpha - t s \|e^+\| + t s$, o que nos dá

$$\alpha = s(1 + t\|e^+\| - t) = s((1 - t) + t\|e^+\|).$$

Assim, já que $0 \leq t \leq 1$, temos $0 < s \leq \alpha$ e portanto, $x \notin \partial\Sigma_\tau$ se $\tau > \alpha$. Novamente pela invariância homotópica do grau,

$$\begin{aligned} \deg_{LS}(\Sigma_\tau, id + B(t, \cdot), 0) &= \deg_{LS}(\Sigma_\tau, id + H(0, \cdot), 0) \\ &= \deg_{LS}(\Sigma_\tau, id - \alpha e^+, 0) = \deg_{LS}(\Sigma_\tau, id, \alpha e^+) \end{aligned}$$

e como αe^+ pertence a Σ_τ para $\tau > \alpha$, temos $\deg_{LS}(\Sigma_\tau, id, \alpha e^+) = 1 \neq 0$. \square

Finalmente estamos aptos a usar o Lema Minimax para provar a Proposição 3.2.15. Tomamos \mathcal{F} como sendo a família dos subconjuntos $\varphi^t(\Sigma_\tau)$, $t \geq 0$, de \mathbb{R}^n e definimos

$$m(\phi, \mathcal{F}) = \inf_{t \geq 0} \sup_{x \in \varphi^t(\Sigma_\tau)} \phi(x).$$

Observe que como $\varphi^t(\Sigma_\tau) \cap \Gamma_\alpha \neq \emptyset$ (Lema 3.2.18) e $\phi|_{\Gamma_\alpha} \geq \beta$ (Lema 3.2.17), temos

$$\beta \leq \inf_{x \in \Gamma_\alpha} \phi(x) \leq \sup_{x \in \varphi^t(\Sigma_\tau)} \phi(x) < \infty$$

onde, na segunda desigualdade, usamos que a imagem de um conjunto limitado por ϕ é um conjunto limitado (Lema 3.2.11). Portanto,

$$-\infty < \beta \leq m(\phi, \mathcal{F}) < \infty.$$

Já vimos que ϕ satisfaz P.S. e que a equação gradiente $\dot{x} = -\nabla\phi(x)$ gera um fluxo global. Mais ainda, da propriedade de grupo de fluxo, a família \mathcal{F} é positivamente invariante. Assim, o Lema Minimax garante que $m(\phi, \mathcal{F})$ é um valor crítico de ϕ , isto é, existe $x^* \in E$ tal que

$$\begin{cases} \nabla\phi(x^*) = 0 \\ \phi(x^*) = m(\phi, \mathcal{F}) \geq \beta > 0 \end{cases}$$

o que finaliza a demonstração da Proposição 3.2.15. \square

O ponto crítico encontrado acima é uma solução periódica suave da equação Hamiltoniana $\dot{z} = J\nabla\bar{H}(z)$ em \mathbb{R}^{2n} tendo período 1 como vimos no Lema 3.2.12. Essa é a solução desejada no Teorema 3.2.4. \square

Em particular, se $H \in \mathcal{H}_a(Z(1))$, do Teorema 3.2.4, temos $m(H) \leq \pi$ e logo,

$$c_{HZ}(Z(1), \omega_0) = \sup_{H \in \mathcal{H}_a(Z(1))} m(H) \leq \pi.$$

Esta última desigualdade era o que faltava para demonstrarmos que a função c_{HZ} é uma capacidade simplética.

Corolário 3.2.19. *Seja E um elipsoide. Se $H \in \mathcal{H}(E, \omega_0)$ satisfaz $m(H) > \pi r_1(E)^2$, então o campo Hamiltoniano X_H em E possui uma solução periódica não constante de período $T \in (0, 1]$. Além disso, $\pi r_1(E)^2$ é o ínfimo dos números com essa propriedade.*

Demonstração. Segue diretamente da definição da capacidade simplética c_{HZ} e da Proposição 3.1.6. \square

Observe que sendo uma bola $B(r) \subset \mathbb{R}^{2n}$ um caso particular de elipsoide, o resultado acima é válido para bolas onde $r_1 = r$ é o raio da bola.

3.3 Soluções Periódicas em Superfícies de Energia

Já vimos que o fluxo φ^t de um campo Hamiltoniano X_H numa variedade simplética (M, ω) deixa os conjuntos de nível de H invariantes. Fixando um valor, digamos 1, olharemos para a superfície de energia

$$S = \{x \in M \mid H(x) = 1\} = H^{-1}(1)$$

que assumiremos ser compacta e regular (cf. Definição 2.4.1). Logo, $S \subset M$ é uma subvariedade compacta de codimensão 1 (v. por exemplo [Lee12, Corollary 5.14, p.106]) cujo espaço tangente em $x \in S$ é dado por

$$T_x S = \{\xi \in T_x M \mid dH(x)\xi = 0\} = \ker dH(x).$$

Da definição de campo Hamiltoniano, temos $X_H(x) \in T_x S$ e assim, X_H é um campo vetorial não nulo em S no qual o fluxo existe para todo t devido à compacidade de S . Nosso objetivo será encontrar uma solução periódica de X_H em S . No entanto, primeiro garantiremos a existência de soluções periódicas de X_H em superfícies de energia *vizinhas* de S (Teorema 3.3.2).

Observação 3.3.1. *Da suavidade de H , compacidade e regularidade de S , existe uma vizinhança aberta e limitada U de S na qual existe uma abundância de superfícies de energia compactas e regulares tendo valores de energia λ próximos de 1. Digamos $U = \cup_{\lambda \in I} S_\lambda$, onde I é um intervalo aberto em torno de 1 e $S_\lambda = \{x \in U \mid H(x) = \lambda\}$. Temos que S_λ é difeomorfo a $S = S_1$ para todo λ em I (v. [SMS⁺ 63, Theorem 3.1, p.12]).*

Teorema 3.3.2 (Hofer-Zehnder). *Seja S uma superfície de energia regular compacta do Hamiltoniano H na variedade simplética (M, ω) . Suponha que exista uma vizinhança aberta U de S tal que $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$. Então existe uma sequência $\lambda_j \rightarrow 1$ de valores de energia tal que a equação Hamiltoniana $\dot{x} = X_H(x)$ possui solução periódica em toda superfície de energia S_{λ_j} .*

Demonstração. Construíremos um Hamiltoniano auxiliar F em U que é constante em cada superfície $S_\lambda \subset U$ e além disso, pertence ao conjunto $\mathcal{H}(U, \omega)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$U = \bigcup_{\lambda \in I} S_\lambda$$

onde $I = (1 - \rho, 1 + \rho)$ para algum $\rho > 0$ e considere $0 < \varepsilon < \rho$. Da hipótese, $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$ e assim podemos escolher uma função suave $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpre:

- $f(s) = c_{HZ}(U, \omega) + 1$, para $s \leq 1 - \varepsilon$ e $s \geq 1 + \varepsilon$
- $f(s) = 0$, quando $1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq s \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$
- $f'(s) < 0$, quando $1 - \varepsilon < s < 1 - \frac{\varepsilon}{2}$
- $f'(s) > 0$, quando $1 + \frac{\varepsilon}{2} < s < 1 + \varepsilon$.

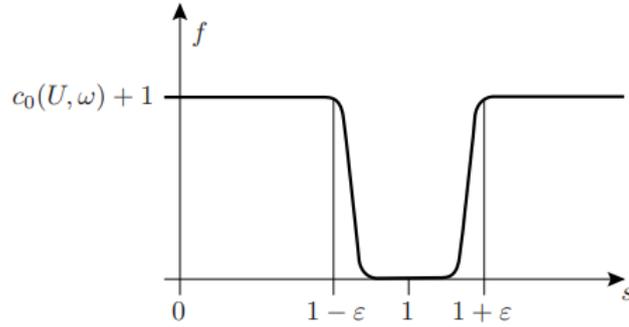


Figura 3.7: Função f

Feito isso, definimos $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $F(x) = f(H(x))$, $x \in U$. Dessa forma, temos $F \in \mathcal{H}(U, \omega)$ e $m(F) = c_{HZ}(U, \omega) + 1 > c_{HZ}(U, \omega)$. Daí, da definição da capacidade c_{HZ} , existe uma solução periódica não constante $x(t)$ com período $T \in (0, 1]$ do sistema Hamiltoniano:

$$\dot{x} = X_F(x), \quad x \in U.$$

Além disso, temos

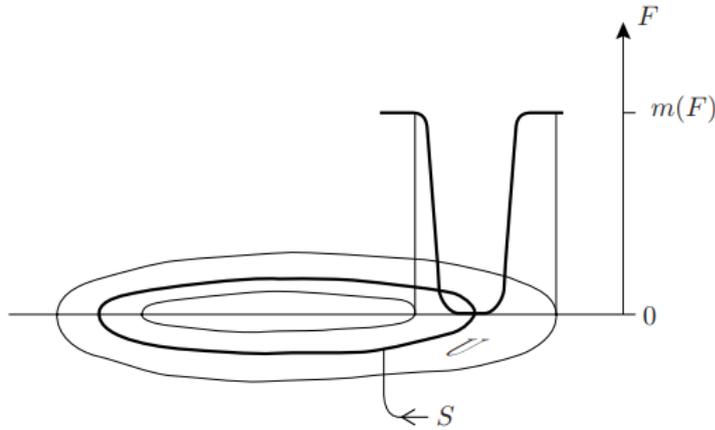


Figura 3.8: Função F

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t)) &= dH(x(t))\frac{d}{dt}x(t) = dH(x(t))X_F(x(t)) \\ &= dH(x(t))J\nabla F(x(t)) \\ &= dH(x(t))Jf'(H(x(t)))\nabla H(x(t)) \\ &= f'(H(x(t)))dH(x(t))X_H(x(t)) \\ &= -f'(H(x(t)))\omega(X_H, X_H) = 0 \end{aligned}$$

e logo, $H(x(t)) = \lambda$ é constante em t . Como $x(t)$ é não constante, temos para

todo t

$$0 \neq \dot{x}(t) = X_F(x(t)) = f'(H(x(t)))X_H(x(t))$$

e assim concluímos que

$$f'(H(x(t))) = f'(\lambda) = \tau \neq 0.$$

Isso, pelas propriedades de f , garante que λ pertence a $(1-\varepsilon, 1-\frac{\varepsilon}{2}) \cup (1+\frac{\varepsilon}{2}, 1+\varepsilon)$. Em todo caso, vale que $|1-\lambda| < \varepsilon$. Reparametrizando, definimos a curva fechada $y: \mathbb{R} \rightarrow S_\lambda$ pondo

$$y(t) = x\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

que possui período τT e satisfaz

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\tau} \dot{x}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau} X_F(y(t)) = \frac{1}{\tau} f'(H(y(t)))J\nabla H(y(t)) = X_H(y(t))$$

e logo, é uma solução periódica do campo Hamiltoniano X_H na superfície de energia $H^{-1}(\{\lambda\}) = S_\lambda$. Mais ainda, como $|\lambda - 1| < \varepsilon$ e ε foi tomado arbitrariamente, temos o resultado. \square

Exemplo 3.3.3. Em $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ todo conjunto limitado U está contido em uma bola $B(R)$ para algum raio $R > 0$ e assim, da monotonicidade da capacidade, U possui capacidade finita. Logo, dada uma superfície de energia regular compacta $S = H^{-1}(\{1\}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ de um Hamiltoniano $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, pelo Teorema 3.3.2, temos que existem infinitos valores λ próximos de 1 tais que a equação Hamiltoniana $\dot{x} = X_H(x)$ possui solução periódica em $S_\lambda = H^{-1}(\{\lambda\})$.

Trocando $S = S_1$ por qualquer S_λ com λ em I na proposição, obtemos:

Corolário 3.3.4. Existe um subconjunto denso $\Sigma \subset I$ tal que para $\lambda \in \Sigma$, a superfície de energia S_λ possui uma solução periódica de $\dot{x} = X_H(x)$ quando $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$.

É importante notarmos que as soluções garantidas pelo Teorema 3.3.2 não se encontram necessariamente na superfície de energia fixada mas sim arbitrariamente próximas a ela. No entanto, se soubermos que os períodos T_j das soluções periódicas não constantes x_j em S_{λ_j} são limitados, pode-se garantir que S também possui uma solução periódica de X_H . Antes de verificarmos isto (Proposição 3.3.5), consideremos uma métrica Riemanniana g em M . Se $x(t)$ é uma solução T -periódica, podemos calcular seu comprimento fazendo

$$l(x(t)) := \int_0^T \sqrt{g(\dot{x}(t), \dot{x}(t))} dt.$$

Como em nosso caso consideramos o aberto limitado U , podemos assumir, sem perda de generalidade,

$$\frac{1}{C} \leq |X_H(x)| \leq C$$

para x em U e alguma constante $C > 0$, onde denotamos $g(v, v) = |v|^2$. Logo, sendo $x_j(t)$ solução de período T_j da equação $\dot{x} = X_H(x)$, temos

$$\int_0^{T_j} \frac{1}{C} dt \leq \int_0^{T_j} |X_H(x_j(t))| dt = \int_0^{T_j} |\dot{x}_j(t)| dt \leq \int_0^{T_j} C dt$$

e portanto,

$$\frac{T_j}{C} \leq l(x_j(t)) \leq CT_j.$$

Proposição 3.3.5. *Seja $\lambda_j \rightarrow 1$ e assumamos que os períodos T_j (ou equivalentemente os comprimentos $l(x_j(t))$) das soluções $x_j(t)$ em S_{λ_j} são limitados. Então $S = S_1$ possui uma solução periódica de $\dot{x} = X_H(x)$.*

Demonstração. Reparametrizando pondo $y_j(t) = x_j(T_j t)$ para cada j e $0 \leq t \leq 1$, obtemos soluções de período 1 que cumprem

$$\dot{y}_j(t) = T_j \dot{x}_j(T_j t) = T_j X_H(y_j(t)) \quad (3.12)$$

e $H(y_j(t)) = H(x_j(T_j t)) = \lambda_j$. Por hipótese, temos o lado direito de (3.12) limitado e assim, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, existem subsequências (T_{j_k}) de (T_j) que converge para T e (y_{j_k}) de (y_j) que converge em C^0 para y e por satisfazer a equação (3.12), converge em C^∞ . A aplicação $y: [0, 1] \rightarrow U$ é periódica com período 1 e satisfaz $H(y(t)) = 1$ e $\dot{y}(t) = TX_H(y(t))$ por ser limite da sequência (y_{j_k}) . Portanto, $y(t)$ é a solução periódica desejada se $T \neq 0$. Suponha por absurdo que $T = 0$. Temos então $\dot{y}(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$, assim y é constante e conseqüentemente $X_H(y)$ também é constante, digamos

$$X_H(y_{j_k}) \rightarrow X_H(y) = v \quad (3.13)$$

Como S é regular, temos $v = X_H(y) = J\nabla H(y) \neq 0$. Assim, como v é um vetor não nulo e por (3.13), vale para j_k suficientemente grande que

$$g(X_H(y_{j_k}), v) \geq (1 - \varepsilon)g(v, v)$$

para algum $\varepsilon > 0$. Por (3.13) e linearidade de g , temos

$$\frac{1}{T_{j_k}} g(\dot{y}_{j_k}(t), v) \geq (1 - \varepsilon)|v|^2$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{1}{T_{j_k}} |\dot{y}_{j_k}(t)| |v| \geq (1 - \varepsilon)|v|^2.$$

Integrando ambos os lados de 0 a T_{j_k} , obtemos

$$\frac{1}{T_{j_k}} |v| l(y_{j_k}) \geq T_{j_k} (1 - \varepsilon) |v|^2$$

e quando j_k tende a infinito, $l(y_{j_k})$ tende para $l(y) = 0$ e logo, concluímos que $|v| = 0$ o que nos leva à contradição $v = 0$. \square

Capítulo 4

Características Fechadas e Exemplos

4.1 Existência de Características Fechadas em Superfícies de Energia

Nosso objetivo na seção presente é traduzir para a linguagem geométrica os resultados obtidos no capítulo anterior. Para tanto, começaremos com a ideia de fibrado vetorial, seguindo [GG74, p.18].

Definição 4.1.1. *Sejam E e X variedades suaves e $\pi: E \rightarrow X$ uma submersão¹. Dizemos que E é uma família de espaços vetoriais sobre X de dimensão k se para todo p em X , $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ é um espaço vetorial real de dimensão k no qual as operações são compatíveis com a topologia induzida de E , ou seja, são aplicações contínuas. Denotamos por $\dim_X E_p$ a dimensão da fibra E_p .*

Sejam E e F duas famílias de espaços vetoriais sobre X e $\pi_E: E \rightarrow X$, $\pi_F: F \rightarrow X$ as respectivas submersões associadas. Um homomorfismo entre as famílias E e F é uma aplicação suave $\phi: E \rightarrow F$ que cumpre:

a) $\pi_F \circ \phi = \pi_E$

b) *Para cada $p \in X$, $\phi|_{E_p}: E_p \rightarrow F_p$ é uma transformação linear.*

O homomorfismo $\phi: E \rightarrow F$ é chamado de isomorfismo quando é um difeomorfismo e, neste caso, as famílias E e F dizem-se isomorfas.

Exemplo 4.1.2. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, X uma variedade suave e $E = X \times V$. Considere $\pi: E = X \times V \rightarrow X$, $(p, v) \mapsto p$. Então E é uma família de espaços vetoriais sobre X conhecida como **família produto**. Se F é uma família de espaços vetoriais sobre X isomorfa a E , no sentido definido acima, então F é chamada **família trivial**.*

Definição 4.1.3 (Fibrado Vetorial). *Seja $\pi: E \rightarrow X$ uma família de espaços vetoriais sobre X . A família E é um fibrado vetorial sobre X se para todo ponto $p \in X$, existe uma vizinhança aberta U_p de p tal que a família de espaços*

¹Uma submersão é uma aplicação cuja derivada é sobrejetiva em todos os pontos.

vetoriais $E_{U_p} = \pi^{-1}(U_p)$ é trivial. Isto é, um fibrado vetorial é uma família de espaços vetoriais que é localmente trivial. Sendo assim, vale que $\dim E = \dim X + \dim_X E_p$.

Definição 4.1.4 (Fibrado de Linha). Um fibrado vetorial cuja fibra tem dimensão igual a 1 diz-se fibrado de linha.

Exemplo 4.1.5. O fibrado tangente $TX = \{(p, v); p \in X \text{ e } v \in T_p X\}$ de uma variedade suave X é um fibrado vetorial sobre X com a submersão $\pi: TX \rightarrow X$, $\pi(x, v) = x$ cuja fibra tem a dimensão da variedade X . O mesmo vale para o fibrado cotangente T^*X .

Exemplo 4.1.6. Dada uma variedade X e uma métrica Riemanniana g em X , o **fibrado normal** N_X de X é definido por

$$N_X = \{(p, \eta) \in TX; g(p)(\eta, \xi) = 0 \forall \xi \in T_p X\}.$$

Trata-se de um fibrado vetorial com a submersão $\pi: N_X \rightarrow X$, $\pi(p, \eta) = p$.

Seja S uma superfície de energia regular. Em particular S é uma subvariedade de codimensão 1, na variedade simplética (M, ω) , onde $\dim M = 2n$. Então, o espaço vetorial $T_x S \subset T_x M$ tem dimensão $2n - 1 = \dim S$ para todo $x \in S$ e logo, a restrição de ω_x a $T_x S \times T_x S$ é necessariamente degenerada, isto é, existe $\xi \in T_x S$ tal que

$$\omega_x(\xi, v) = 0$$

para todo v em $T_x S$. De fato, sendo $\dim T_x S = 2n - 1$, temos que seu ortogonal simplético $(T_x S)^{\omega_x}$ (cf. Definição 1.1.3) é unidimensional. Assim, ω e S determinam o fibrado de linha:

$$\mathcal{L}_S = \{(x, \xi) \in TS \mid \omega(\xi, v) = 0, \forall v \in T_x S\}$$

onde TS é o fibrado tangente de S . O fibrado \mathcal{L}_S é chamado **fibrado de linha característico de S** . Fixado $x \in S$, denotamos por $\mathcal{L}_S(x)$ a fibra

$$\mathcal{L}_S(x) = \{\xi \in T_x S \mid \omega(\xi, v) = 0, \forall v \in T_x S\}.$$

Proposição 4.1.7. Se $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave que representa S , isto é, $S = H^{-1}(\{c\})$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ e $dH(x) \neq 0$ para todo x em S , então $X_H(x) \in \mathcal{L}_S(x) \forall x \in S$.

Demonstração. Como S é pré-imagem de valor regular da função suave H , temos $T_x S = \ker dH(x)$ e logo, $\omega(X_H(x), v) = -dH(x)(v) = 0 \forall v \in T_x S$. Portanto, $X_H(x)$ pertence a $\mathcal{L}_S(x)$. \square

Chamamos de **característica fechada de S** uma subvariedade $P \subset S$ de dimensão 1 que é difeomorfa a um círculo e cujos espaços tangentes estão contidos em \mathcal{L}_S , isto é,

$$TP = \bigcup_{p \in P} \mathcal{L}_S(p).$$

Denotaremos o conjunto das características fechadas de S por $\mathcal{P}(S)$.

Observação 4.1.8. *Seja $x: I \rightarrow M$ uma solução da equação $\dot{x} = X_H(x)$ em S . Temos então $(x(t), \dot{x}(t)) = (x(t), X_H(x(t))) \in TS$ para todo t onde a solução esteja definida. Mais ainda, pela Proposição 4.1.7, temos que $(x(t), X_H(x(t)))$ pertence ao fibrado \mathcal{L}_S . Logo, as imagens das órbitas periódicas do campo X_H são características fechadas de S .*

Tendo em vista a última observação e lembrando que \mathcal{L}_S é um fibrado de linha, vale que o conjunto $\mathcal{P}(S)$ é igual ao conjunto das imagens de soluções periódicas de todos os campos Hamiltonianos X_H em S que possuem S como superfície de energia regular. Daí, obteremos resultados sobre a existência de características fechadas em superfícies de energia baseando-nos nos resultados do capítulo anterior.

Definição 4.1.9. *Seja S uma hiperfície compacta em M . Uma família parametrizada de hiperfícies modeladas (fphm) em S é um difeomorfismo $\psi: S \times I \rightarrow U \subset M$, onde I é um intervalo aberto contendo 0, U é uma vizinhança limitada de S e $\psi(x, 0) = x$ para todo x em S . Abreviaremos $S_\varepsilon := \psi(S \times \{\varepsilon\})$ e por vezes, denotaremos uma fphm ψ em S por (S_ε) .*

Lema 4.1.10. *Seja S uma hiperfície compacta de uma variedade M . Se existe uma fphm em S , então existe uma função suave $H: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida em uma vizinhança aberta U de S satisfazendo $S = H^{-1}(\{0\})$ e $dH(x) \neq 0$ para todo x em S .*

Demonstração. Sob a hipótese do Lema, existe um difeomorfismo $\psi: S \times I \rightarrow U \subset M$, onde I é um intervalo aberto contendo 0, U é uma vizinhança limitada de S e $\psi(x, 0) = x$ para todo x em S . Considere a projeção $\pi: S \times I \rightarrow I$, $(x, t) \mapsto t$ e defina

$$H = \pi \circ \psi^{-1}: U \rightarrow I.$$

Observe que π é diferenciável e sendo ψ difeomorfismo, ψ^{-1} também é diferenciável e logo H é suave. Além disso $H^{-1}(\{0\}) = (\pi \circ \psi^{-1})^{-1}(\{0\}) = S$ (pois $\psi(x, 0) = x, \forall x \in S$). Mais ainda, observe que dado $x \in S$ temos que

$$dH(x) = d(\pi \circ \psi^{-1})(x) = d\pi(\psi^{-1}(x))d\psi^{-1}(x) = \pi \circ d\psi^{-1}(x)$$

é não nulo já que ψ^{-1} é difeomorfismo e logo $d\psi^{-1}(x)$ é um isomorfismo. \square

Visto isso, podemos reformular o Corolário 3.3.4:

Teorema 4.1.11 (Hofer-Zehnder). *Seja S uma hiperfície compacta em (M, ω) e (S_ε) , $\varepsilon \in I$, uma fphm em S . Se $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$, então existe um conjunto denso $\Sigma \subset I$, tal que*

$$\mathcal{P}(S_\varepsilon) \neq \emptyset \text{ para } \varepsilon \in \Sigma.$$

Para garantirmos a existência de características fechadas na hiperfície S e não somente *próximo* a ela, nos restringiremos a uma determinada classe de hiperfícies. Assumiremos que S é o bordo de uma variedade simplética $(B, \omega) \subset (M, \omega)$. Então se (S_ε) é uma fphm em S , temos, para cada $\varepsilon \in I$, $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$, onde (B_ε, ω) é variedade simplética. Sem perda de generalidade, admitiremos que $B_\varepsilon \subset B_{\varepsilon'}$ quando $\varepsilon \leq \varepsilon'$. Pela monotonicidade de uma capacidade, temos

$$c_{HZ}(B_\varepsilon, \omega) \leq c_{HZ}(B_{\varepsilon'}, \omega) \text{ se } \varepsilon \leq \varepsilon'.$$

e logo, a função $C: I \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $C(\varepsilon) = c_{HZ}(B_\varepsilon, \omega)$ é monótona crescente.

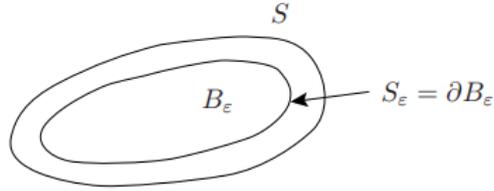


Figura 4.1: Hipersfície $S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon$

Definição 4.1.12. Uma hipersfície S_σ é do tipo c_{HZ} -Lipschitz se existem constantes positivas L e μ tais que

$$C(\varepsilon) \leq C(\sigma) + L(\varepsilon - \sigma)$$

para todo ε em $[\sigma, \sigma + \mu]$.

Pode-se mostrar que a definição acima não depende da escolha da família parametrizada (S_ε) de hipersfícies modeladas em S_σ utilizando a monotonicidade da capacidade c_{HZ} .

Exemplo 4.1.13. Seja $S = \partial B$ o bordo de uma variedade simplética compacta (B, ω) . Assuma a existência de um campo vetorial X numa vizinhança de B satisfazendo

- i) $L_X \omega = \omega$
- ii) $X(x) \notin T_x S$ se $x \in S$.

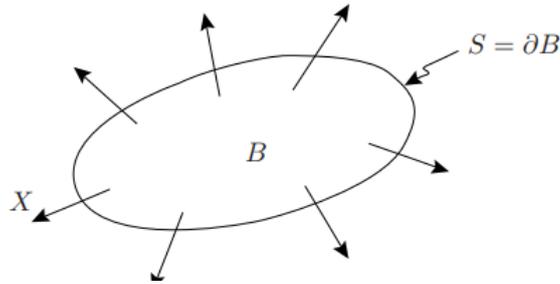


Figura 4.2: Campo X na vizinhança B de S

Assim, o fluxo φ^t do campo X define uma fphm em S :

$$\psi(x, t) = \varphi^t(x), \quad x \in S$$

quando $|t|$ é suficientemente pequeno. Note que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\varphi^t)^* \omega = (\varphi^t)^* L_X \omega \stackrel{i)}{=} (\varphi^t)^* \omega \\ (\varphi^0)^* \omega = \omega \end{cases}$$

e logo, $(\varphi^t)^*\omega = e^t\omega$. Definindo, para cada t , $B_t = \varphi^t(B)$, a aplicação $\varphi^t: (B, \omega) \rightarrow (B_t, e^{-t}\omega)$ é então um difeomorfismo simplético e pela conformalidade de c_{HZ} , temos

$$e^{-t}c_{HZ}(B_t, \omega) = c_{HZ}(B_t, e^{-t}\omega) = c_{HZ}(B, \omega)$$

e portanto, $c_{HZ}(B_t, \omega) = e^t c_{HZ}(B, \omega)$. Então sendo $C(t) = e^t c_{HZ}(B, \omega)$, temos $C(t)$ diferenciável em 0, isto é, existe o limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(0+t) - C(0)}{t} = c_{HZ}(B, \omega) \geq 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow \frac{C(t) - C(0)}{t} < \varepsilon \Rightarrow C(t) < C(0) + t\varepsilon.$$

Concluindo então que $S = \partial B_0$ é do tipo c_{HZ} -Lipschitz.

Teorema 4.1.14. *Assuma $c_{HZ}(M, \omega) < +\infty$. Se a hipersfície compacta $S \subset M$ for o bordo de uma subvariedade simplética e além disso, for do tipo c_{HZ} -Lipschitz, então $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$.*

Demonstração. Sendo c_{HZ} -Lipschitz, existe (S_ε) fphm em S com $S = S_0$ tal que

$$C(\varepsilon) \leq C(0) + L\varepsilon \tag{4.1}$$

para algumas constantes L e μ e $0 \leq \varepsilon \leq \mu$. Para $0 < \tau < \mu$, seja \mathcal{F}_τ o conjunto de funções suaves $f = f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow (C(0) - L\tau, +\infty)$ que satisfazem

- $f(s) = a$ se $s \leq 0$
- $f(s) = b$ se $s \geq \frac{\tau}{2}$
- $0 < f'(s) \leq c$ se $0 < s < \frac{\tau}{2}$

onde as constantes a, b e c são tais que

- $C(0) - L\tau \leq a \leq C(0)$
- $C(0) + 2L\tau \leq b \leq C(0) + 3L\tau$
- $c = 10L$.

Observe que $\mathcal{F}_\tau \neq \emptyset$, uma vez que tal f pode ser construída utilizando *bump functions* (de forma semelhante como fizemos no Apêndice p.101). Sendo $S = \partial B_0$ e fixando τ , como $C(0) = c_{HZ}(B_0, \omega) < \infty$, pela definição de c_{HZ} , existe uma função admissível $H \in \mathcal{H}_a(B_0, \omega)$ satisfazendo $C(0) - L\tau \leq m(H) < C(0)$. Então considere $f_{a,b} \in \mathcal{F}_\tau$ com $a = m(H)$ e defina o Hamiltoniano F pondo

$$\begin{cases} F(x) = H(x) & \text{se } x \in B_0 \\ F(x) = f(\varepsilon) & \text{se } x \in S_\varepsilon, 0 \leq \varepsilon \leq \tau \\ F(x) = b & \text{se } x \notin \bar{B}_\tau. \end{cases}$$

Temos $F \in \mathcal{H}(B_\tau, \omega)$ e por (4.1),

$$m(F) = b \geq C(0) + 2L\tau > C(0) + L\tau \geq C(\tau).$$

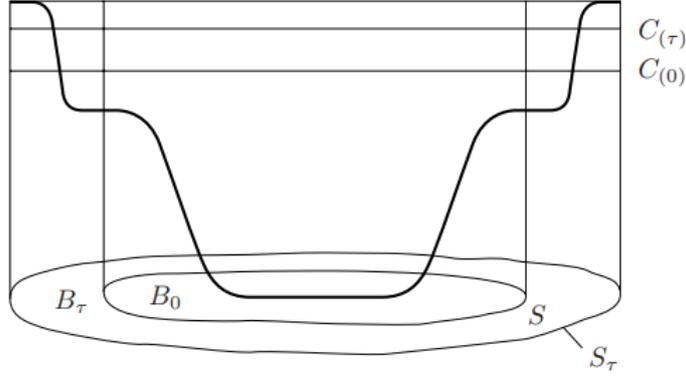


Figura 4.3: $F \in \mathcal{H}(B_\tau, \omega)$

Como $m(F) > C(\tau) = c_{HZ}(B_\tau, \omega)$, existe, pela definição de c_{HZ} , uma solução periódica $x(t)$ não constante do sistema $\dot{x}(t) = X_F(x(t))$, $x(t) \in B_\tau$, para todo t , com período $0 < T \leq 1$. Como $F|_{B_0} = H$ é admissível, não podemos ter tal solução contida em B_0 e sendo B_0 invariante pelo fluxo de X_F , a solução tem de estar contida em $B_\tau \setminus \bar{B}_0$. Como a solução é não constante, segue das propriedades de $f_{a,b}$ que existe δ em $(0, \frac{\tau}{2})$ tal que

$$x(t) \in S_\delta \text{ para todo } t.$$

Esse argumento funciona para todo $\tau > 0$ e escolhendo uma sequência (τ_j) que converge para 0, encontramos então sequências (F_j) e (δ_j) de Hamiltonianos e números entre $(0, \tau_j/2)$ respectivamente, além de uma sequência correspondente (x_j) de órbitas periódicas de X_{F_j} satisfazendo

$$x_j(t) \in S_{\delta_j}, \text{ para todo } t, \text{ e } \delta_j \rightarrow 0$$

com períodos $0 < T_j \leq 1$. Defina agora em $U = \cup_{\varepsilon \in I} S_\varepsilon$ uma função Hamiltoniana $K: U \rightarrow \mathbb{R}$ tendo hiperfícies S_ε como superfícies de energia regulares pondo

$$K(x) = \varepsilon, \text{ se } x \in S_\varepsilon.$$

Se $x \in S_\varepsilon$ e $0 \leq \varepsilon \leq \mu$, então para todo τ_j temos $F_j(x) = f_j(K(x))$ e logo, $X_{F_j}(x) = f'_j(K(x))X_K(x)$. Pela construção, as funções periódicas x_j resolvem as equações

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) = f'(\varepsilon_j)X_K(x_j(t)) \\ x_j(0) = x_j(T_j) \end{cases}$$

com $0 < T_j \leq 1$ e $\varepsilon_j := K(x_j(t))$ para todo t . Reparametrizando pondo $y_j(t) = x_j(t/f'(\varepsilon_j))$, temos

$$\dot{y}_j(t) = \frac{1}{f'(\varepsilon_j)} \dot{x}_j \left(\frac{t}{f'(\varepsilon_j)} \right) = \frac{1}{f'(\varepsilon_j)} f'(\varepsilon_j) X_K \left(x_j \left(\frac{t}{f'(\varepsilon_j)} \right) \right) = X_K(y_j(t))$$

e $K(y_j(t)) = \varepsilon_j$. Observamos por fim que os períodos de y_j são dados por $f'(\varepsilon_j)T_j$ e portanto, como $f'(\varepsilon_j) \leq 10L$, são limitados. Pela Proposição 3.3.5,

concluimos que existe uma solução periódica $x(t)$ de $\dot{x} = X_K(x)$ na superfície de energia de $K(x) = 0$ que é a hiperfície $S = S_0$. Essa solução parametriza uma característica fechada em S , como já observamos. \square

Note que o fato de $C(\varepsilon) = c_{HZ}(B_\varepsilon, \omega)$ ser monótona, implica na diferenciabilidade de C em quase todos os pontos (v. por exemplo [RSN90, Theorem p.5]) e portanto, deduzimos do Teorema anterior:

Teorema 4.1.15. *Sejam (M, ω) variedade simplética e $S \subset M$ uma hiperfície que delimita uma variedade simplética compacta, com $c_{HZ}(M, \omega) < \infty$. Se (S_ε) com $\varepsilon \in I$ é uma fphm em S , então*

$$m(\{\varepsilon \in I; \mathcal{P}(S_\varepsilon) \neq \emptyset\}) = m(I)$$

onde m é a medida de Lebesgue.

Corolário 4.1.16. *Para toda hiperfície compacta e conexa $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ e toda $(S_\varepsilon), \varepsilon \in I$, fphm em S , tem-se*

$$m(\{\varepsilon \in I; \mathcal{P}(S_\varepsilon) \neq \emptyset\}) = m(I)$$

Demonstração. Pelo Teorema da separação de Jordan-Brouwer (v. por exemplo [GP74, Jordan-Brouwer Separation Theorem, p.89]), S é a fronteira de uma variedade compacta D com dimensão $2n - 1 + 1 = 2n$, e logo (D, ω_0) é simplética. O resultado segue diretamente do Teorema 4.1.15. \square

Exemplo 4.1.17. *Seja $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com suporte compacto. Temos que o conjunto de valores críticos de H é fechado e limitado, e portanto, compacto em \mathbb{R} . Pelo Teorema de Sard, (v. por exemplo [Hir97, Morse-Sard Theorem, p.69]), este conjunto tem medida nula. Consequentemente, para quase todo $h \in (\min H, \max H)$, temos que $S_h = H^{-1}(\{h\})$ é superfície de energia regular e compacta. Pelo Corolário 4.1.16, para cada valor regular h , existe uma órbita periódica não constante $x_h(t)$ do campo Hamiltoniano X_H em S_h .*

4.2 Hiperfícies de Contato e a Conjectura de Weinstein

Incentivado pelos resultados em superfícies de energia em \mathbb{R}^{2n} , o matemático americano A. Weinstein conjecturou sobre a existência de características fechadas em determinadas hiperfícies.

Definição 4.2.1. *Uma hiperfície compacta e orientável $S \subset M$ na variedade simplética (M, ω) é hiperfície de contato se existe uma 1-forma α em S tal que*

$$i) \quad d\alpha = j^*\omega$$

$$ii) \quad \alpha_p(\xi) \neq 0 \text{ para } \xi \in \mathcal{L}_S(p) \setminus \{0\}, \quad \forall p \in S$$

onde $j: S \rightarrow M$ é a inclusão de S em M e \mathcal{L}_S é o fibrado de linha característico de S .

Conjectura de Weinstein (1978): Uma hiperfície de contato S cumprindo $H_1(S) = 0$ contém uma característica fechada.

Verificaremos que retirando a última hipótese e pedindo que S tenha uma vizinhança $U \subset M$ com capacidade $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$, a conjectura é verdadeira. Para tanto, veremos uma hiperfície de contato sob outro ponto de vista.

Proposição 4.2.2. *Uma hiperfície compacta $S \subset M$ é uma hiperfície de contato se, e somente se, existe um campo vetorial X definido numa vizinhança U de S satisfazendo:*

- i) $L_X \omega = \omega$ em U .
- ii) $X(p) \notin T_p S$ se $p \in S$.

Demonstração. Primeiro, provaremos dois lemas fundamentais:

Lema 4.2.3. *Sejam E um fibrado vetorial sobre N , $\pi: E \rightarrow N$ a submersão associada e α uma k -forma fechada em E satisfazendo $j^* \alpha = 0$, onde $j: N \rightarrow E$ é a seção nula do fibrado, isto é, $j(p)$ corresponde ao vetor nulo na fibra $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ para todo p em N . Então, existe uma $(k-1)$ -forma β em E satisfazendo:*

$$d\beta = \alpha \text{ e } \beta|_{j(N)} = 0.$$

Demonstração. Usando a estrutura de espaço vetorial de cada fibra, podemos definir as aplicações $\varphi^t: E \rightarrow E$ sobre as fibras pondo $\varphi^t(x) = tx$. Representaremos por X_t o campo vetorial (que depende de t) gerado pela família de difeomorfismos φ^t definido em E por

$$\frac{d}{dt} \varphi^t(x) = X_t(\varphi^t(x))$$

se $t > 0$. Observe que se $x \in j(N)$, x representa o vetor nulo de uma fibra, daí temos $\varphi^t(x) = t0 = 0$ para todo t e logo

$$X_t(x) = \frac{d}{dt} \varphi^t \left(\frac{1}{t} x \right) = 0.$$

Usando que α é fechada ($d\alpha = 0$), tiramos da Fórmula de Cartan

$$\frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \alpha = (\varphi^t)^* L_{X_t} \alpha = (\varphi^t)^* \{d(\iota_{X_t} \alpha)\} = d\{(\varphi^t)^* \iota_{X_t} \alpha\},$$

onde

$$(\varphi^t)^* \iota_{X_t} \alpha_x = \alpha_{\varphi^t(x)} (d\varphi^t(X_t(x)), d\varphi^t(\cdot)).$$

Mas como $\lim_{t \rightarrow 0} (\varphi^t)^* \alpha = \pi^* j^* \alpha = 0$ e $\varphi^1(x) = 1x = x$, vem

$$\begin{aligned} \alpha &= (\varphi^1)^* \alpha - \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi^t)^* \alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 \frac{d}{ds} (\varphi^s)^* \alpha \, ds \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_t^1 d\{(\varphi^s)^* \iota_{X_s} \alpha\} \, ds \\ &= d \int_0^1 ((\varphi^s)^* \iota_{X_s} \alpha) \, ds = d\beta \end{aligned}$$

onde $\beta = \int_0^1 ((\varphi^s)^* \iota_{X_s} \alpha) ds$ é uma $(k-1)$ -forma suave em E . Se $x \in j(N)$ então $X_t(x) = 0$ e logo, $\beta_x = 0$. \square

Lema 4.2.4. *Se $S \subset (M, \omega)$ é uma hipersfície de contato então existe uma 1-forma τ numa vizinhança U de S satisfazendo:*

(i) $d\tau = \omega$ em U .

(ii) $j^* \tau = \alpha$ em S , onde $j: S \rightarrow U$ é a inclusão de S em U .

Demonstração. Como S é compacta e orientável, existe um difeomorfismo $\psi: S \times (-1, 1) \rightarrow U$ sobre uma vizinhança aberta U de S satisfazendo $\psi(x, 0) = x$ para todo $x \in S$. De fato, sendo S orientável, temos o fibrado normal N_S (com respeito a restrição métrica da Proposição 2.1.3 à S) também orientável e logo existe uma seção que não se anula $\sigma: S \rightarrow N_S$ de N_S . Defina então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi: S \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow U \subset M \\ (x, t) &\mapsto \exp_x(t\sigma(x)) \end{aligned}$$

onde $\exp_x: T_x M \rightarrow M$ é a aplicação exponencial (v. por exemplo: [KN96, Proposition 8.1 and Proposition 8.2 p.147-148]). Temos que ψ é um difeomorfismo para algum $\varepsilon > 0$ pois S é compacta. Reparametrizando o parâmetro t por t/ε obtemos $S \times (-1, 1)$ como domínio de ψ . A projeção $(x, t) \mapsto x$ de $S \times (-1, 1)$ em S , induz, compondo com a inversa ψ^{-1} , uma aplicação suave $r: U \rightarrow S$ que opera como a identidade em S , isto é, dado x em $S \subset U$, temos $r(x) = x$. Defina a 1-forma μ em U pondo $\mu := r^* \alpha$, onde α é a 1-forma da Definição 4.2.1. Então

$$j^* \mu = j^* r^* \alpha = \alpha.$$

Considere agora a 2-forma $\omega - d\mu$ em U . Então

$$d(\omega - d\mu) = d\omega - dd\mu = 0$$

já que a estrutura simplética ω é uma forma fechada. Mais ainda, usando que $j^* \omega = d\alpha$,

$$j^*(\omega - d\mu) = d\alpha - d(j^* \mu) = d\alpha - d\alpha = 0.$$

Assim, como U é difeomorfo a $S \times (-1, 1)$ que por sua vez é um fibrado isomorfo a $S \times \mathbb{R}$, podemos aplicar o Lema 4.2.3 à 2-forma $\omega - d\mu$ e encontrar uma 1-forma η em U satisfazendo $\omega - d\mu = d\eta$ e $j^* \eta = 0$. Por fim, definimos em U a 1-forma τ , pondo $\tau = \mu + \eta$ e daí,

$$d\tau = d(\mu + \eta) = d\mu + \omega - d\mu = \omega$$

e

$$j^* \tau = j^*(\mu + \eta) = j^* \mu + j^* \eta = \alpha$$

como queríamos. \square

Voltando à demonstração da Proposição 4.2.2, seja $S \subset M$ uma hipersfície de contato. Tomando a 1-forma τ dada pelo Lema 4.2.4, definimos um campo vetorial X em U pondo

$$\iota_X \omega = \tau.$$

Daí, ainda pelo mesmo lema e pela Fórmula de Cartan, temos

$$\omega = d\tau = d(\iota_X\omega) = -\iota_X(d\omega) + L_X\omega = L_X\omega$$

já que $d\omega = 0$. Mais ainda, seja $\xi \in \mathcal{L}_S(p) \setminus \{0\}$, então

$$\omega(X(p), \xi) = \tau(\xi) = j^*\tau(\xi) = \alpha(\xi) \neq 0$$

mas pela definição de \mathcal{L}_S , ξ pertence ao núcleo de ω restrito a T_pS . Portanto, $X(p) \notin T_pS$. Reciprocamente, se X é um campo vetorial cumprindo $L_X\omega = \omega$ em U e $X(p) \notin T_pS$ se $p \in S$, definimos uma 1-forma α em U pondo

$$\alpha = \iota_X\omega.$$

Assim, novamente da fórmula mágica de Cartan,

$$d\alpha = d(\iota_X\omega) = L_X\omega - \iota_X(d\omega) = L_X\omega = \omega = j^*\omega$$

em S . Além disso, da condição $X(p) \notin T_pS$, obtemos $0 \neq \omega(X(p), \xi) = \alpha(\xi)$ para qualquer ξ não nulo em $\mathcal{L}_S(p)$. Portanto, pela existência de tal α , verificamos que S é uma hiperfície de contato. \square

O interessante de hiperfícies de contato para nosso estudo é que uma hiperfície de contato S admite uma família (S_ε) de hiperfícies modeladas em S . Esta vem facilmente do fluxo φ^t do campo vetorial X dado pela Proposição 4.2.2. Como S é compacta e X é transversal a S , isto é, $X(p) \notin T_pS$ se $p \in S$, a aplicação

$$\psi: S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset M$$

definida por $\psi(x, t) = \varphi^t(x)$ é um difeomorfismo sobre uma vizinhança aberta U de S para ε suficientemente pequeno. De $L_X\omega = \omega$, concluímos que

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega = (\varphi^t)^*L_X\omega = (\varphi^t)^*\omega.$$

Portanto temos

$$(\varphi^t)^*\omega = e^t\omega$$

já que $\varphi^0 = id$. Assuma agora que $\xi \in \mathcal{L}_S(x)$, então para todo $\eta \in T_xS$ vale

$$0 = \omega(\xi, \eta) = e^t\omega(\xi, \eta) = (\varphi^t)^*\omega(\xi, \eta) = \omega(d\varphi^t(x)(\xi), d\varphi^t(x)(\eta))$$

e logo, $d\varphi^t(x)\xi \in \mathcal{L}_{S_t}(\varphi^t(x))$. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} T\varphi^t: \mathcal{L}_S &\rightarrow \mathcal{L}_{S_t} \\ (x, \xi) &\mapsto (\varphi^t(x), d\varphi^t(x)(\xi)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre fibrados e concluímos então que φ^t induz uma correspondência biunívoca entre $\mathcal{P}(S)$ e $\mathcal{P}(S_t)$ fazendo $P \mapsto \varphi^t(P)$.

Definição 4.2.5. *Uma hiperfície compacta $S \subset (M, \omega)$ é estável se existe uma família parametrizada de hiperfícies (S_ε) modeladas em S tendo a seguinte propriedade: o difeomorfismo associado $\psi: S \times (-1, 1) \rightarrow U$ induz isomorfismos de fibrados*

$$T\psi_\varepsilon: \mathcal{L}(S) \rightarrow \mathcal{L}(S_\varepsilon)$$

para todo $\varepsilon \in (-1, 1)$.

O que foi feito logo antes da definição prova exatamente que uma hiperfície de contato é estável. Por definição, uma hiperfície estável S admite uma família parametrizada de hiperfícies (S_ε) modeladas em S tendo a propriedade: se $\mathcal{P}(S_\varepsilon) \neq \emptyset$ para algum ε , então $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$. Consequentemente, deduzimos diretamente do Teorema 4.1.11 :

Teorema 4.2.6. *Seja $S \subset (M, \omega)$ uma hiperfície compacta admitindo vizinhança U de capacidade finita, isto é, $c_{HZ}(U, \omega) < \infty$. Se S é estável, temos*

$$\mathcal{P}(S) \neq \emptyset.$$

Em particular, se S for uma hiperfície de contato, temos $\mathcal{P}(S) \neq \emptyset$.

Sabemos que toda hiperfície compacta de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ possui uma vizinhança limitada, logo com capacidade finita e portanto, do Teorema 4.2.6 deduzimos, neste caso particular, a seguinte solução da conjectura de Weinstein originalmente provada em 1987 ([Vit87]).

Teorema 4.2.7 (C. Viterbo). *Toda hiperfície de contato $S \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ possui uma característica fechada.*

Observe que no caso em questão, a condição $H_1(S) = 0$ pedida na conjectura não é necessária.

Apêndice

A Derivada de Lie e Fórmula de Cartan

Nesta seção são definidos os conceitos de derivada de Lie de uma k -forma com respeito a um campo vetorial (v. por exemplo [Lee12, p.321]) e produto interior de um campo vetorial e uma k -forma (ver por exemplo [Lee12, p.358]). Apresentamos também algumas propriedades, incluindo a Fórmula Mágica de Cartan. O conteúdo desta seção foi utilizado diversas vezes neste trabalho, entre estas, destacamos a demonstração do Teorema de Darboux (Teorema 1.2.10).

Definição .0.8. A derivada de Lie de uma função suave (0-forma) f com respeito ao campo vetorial X é a função

$$L_X f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^t)^* f - f}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \varphi^t - f \circ \varphi^0}{t} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^t) \right|_{t=0} = X(f),$$

onde φ^t é o fluxo gerado por X .

Definição .0.9. A derivada de Lie de uma k -forma ω com respeito ao campo vetorial X é a k -forma

$$L_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^t)^* \omega - \omega}{t} = \left. \frac{d}{dt} [(\varphi^t)^* \omega] \right|_{t=0},$$

onde φ^t é o fluxo gerado por X .

Observação .0.10. Da definição acima, propriedade do fluxo e propriedade do pullback, deduzimos:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} [(\varphi^t)^* \omega] \right|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t+t_0})^* \omega - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^t \circ \varphi^{t_0})^* \omega - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t_0})^* [(\varphi^t)^* \omega] - (\varphi^{t_0})^* \omega}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi^{t_0})^* [(\varphi^t)^* \omega - \omega]}{t} = (\varphi^{t_0})^* L_X \omega, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left. \frac{d}{dt} (\varphi^t)^* \omega \right|_{t=t_0} = (\varphi^{t_0})^* L_X \omega$$

onde φ^t é o fluxo gerado pelo campo vetorial X .

Definição .0.11. Sendo ω uma $(k+1)$ -forma, o produto interior de um campo vetorial X e ω é a k -forma $\iota_X\omega = \omega(X, (\cdot), \dots, (\cdot))$. A forma $\iota_X\omega$ também é chamada de contração de ω com o campo vetorial X .

Observação .0.12. O produto interior de um campo vetorial e uma 0 -forma é admitido como nulo, já que não existem (-1) -formas.

Proposição .0.13. (Fórmula Mágica de Cartan) [dS04, Exercise, p.36] Sejam ω uma k -forma e X um campo vetorial definidos em uma variedade suave de dimensão n . Então a derivada de Lie de ω com respeito a X pode ser calculada:

$$L_X\omega = (\iota_X d\omega) + d(\iota_X\omega),$$

onde d denota a derivada exterior.

Demonstração. Dividiremos a prova em partes: primeiro provaremos que o resultado vale para uma 0 -forma, isto é, uma função suave. Depois mostraremos que cada lado da equação comuta com a derivada exterior d . Feito isso, veremos que os dois lados se comportam como derivação, seguindo a regra de Leibniz, com o produto exterior \wedge . Por fim, basta observar que toda forma diferencial é localmente dada como combinação linear de produtos exteriores de 0 -formas f e de suas derivadas exteriores df .

Seja dada uma 0 -forma g . Temos $L_X g = X(g)$ e $\iota_X g = 0$. Além disso, $dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j$ em coordenadas e logo,

$$\iota_X dg = \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j(X) = X(g).$$

Assim,

$$L_X g = X(g) = \iota_X dg = \iota_X dg + d(\iota_X g)$$

e concluímos então que a fórmula é válida para 0 -formas. Observe que dada uma k -forma ω , vale que

$$d((\iota_X d\omega) + d(\iota_X\omega)) = d(\iota_X d\omega) + d(d(\iota_X\omega)) = d(\iota_X d\omega) = (\iota_X dd\omega) + d(\iota_X d\omega)$$

já que $d \circ d = 0$, isto é, o lado direito da fórmula comuta com a derivada exterior. Por outro lado, temos

$$dL_X\omega = d\left(\frac{d}{dt}[(\varphi^t)^*\omega]\Big|_{t=0}\right),$$

onde φ^t é o fluxo gerado por X . Escrevendo $(\varphi^t)^*\omega = \sum_I f_I(x,t)dx_I$ com

$I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, temos

$$\begin{aligned}
dL_X\omega &= d\left(\frac{d}{dt}[(\varphi^t)^*\omega]\Big|_{t=0}\right) = d\left(\sum_I \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f_I(x, t) dx_I\right) \\
&= \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} f_I(x, t) dx_j \wedge dx_I \\
&= \sum_I \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x_j} f_I(x, t) dx_j \wedge dx_I \\
&= \sum_I \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} df_I \wedge dx_I \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d((\varphi^t)^*\omega) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi^t)^* d\omega = L_X d\omega
\end{aligned}$$

pois f_I é suave e logo as derivadas parciais comutam. Concluindo assim que o lado esquerdo da fórmula também comuta com a derivada exterior. Considere agora duas formas diferenciais ω e σ tais que a fórmula é válida. É claro que a fórmula é válida para $\lambda\omega + \mu\sigma$ pela linearidade da derivada exterior e da derivada em t . Além disso, temos

$$\begin{aligned}
L_X(\omega \wedge \sigma) &= \frac{d}{dt}[(\varphi^t)^*(\omega \wedge \sigma)]\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}[(\varphi^t)^*\omega \wedge (\varphi^t)^*\sigma]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega\Big|_{t=0} \wedge (\varphi^0)^*\sigma + (\varphi^0)^*\omega \wedge \frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\sigma\Big|_{t=0} \\
&= L_X\omega \wedge \sigma + \omega \wedge L_X\sigma
\end{aligned}$$

pela definição de produto exterior e pela regra de Leibniz da derivada em relação a t . Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\iota_X d(\omega \wedge \sigma) &= \iota_X(d\omega \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\sigma) \\
&= \iota_X(d\omega \wedge \sigma) + (-1)^k \iota_X(\omega \wedge d\sigma)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d(\iota_X(\omega \wedge \sigma)) &= d((\iota_X\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge \iota_X\sigma) \\
&= d((\iota_X\omega) \wedge \sigma) + (-1)^k d(\omega \wedge \iota_X\sigma)
\end{aligned}$$

onde ω é uma k -forma. Logo, o lado direito da fórmula também obedece uma certa regra de Leibniz com o produto exterior. E com isso, terminamos os passos da demonstração. \square

Teorema .0.14. [dS04, Teorema 6.4] Para uma família ω_t , $t \in \mathbb{R}$, de formas diferenciais, temos

$$\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t = (\varphi^t)^*\left\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\right\}.$$

Demonstração. Se $f(x, y)$ é uma função de duas variáveis, temos

$$\frac{d}{dt}f(t, t) = \frac{d}{dx}f(x, t)\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}f(t, y)\Big|_{y=t}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi^t)^*\omega_t &= \frac{d}{dx}(\varphi^x)^*\omega_t\Big|_{x=t} + \frac{d}{dy}(\varphi^t)^*\omega_y\Big|_{y=t} \\
&= (\varphi^t)^*L_{X_t}\omega_t + (\varphi^t)^*\frac{d}{dy}\omega_y\Big|_{y=t} \\
&= (\varphi^t)^*\{L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t\}.
\end{aligned}$$

□

B Funções Homogêneas

O objetivo desta seção é definir o conceito de função positivamente homogênea e apresentar uma propriedade útil, conhecida como Fórmula de Euler (ver por exemplo [GFS00, Problem 6, p.51]), de funções deriváveis e homogêneas. Utilizamos tal conceito e propriedade na demonstração do Teorema 2.4.6.

Definição .0.15. *Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^m . Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é **positivamente homogênea de grau k** (ou, somente, homogênea) se para todo x em X se tem*

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad \forall \lambda > 0 \text{ tal que } \lambda x \in X.$$

Proposição .0.16. *(Fórmula de Euler) Com a notação acima, seja f uma função derivável positivamente homogênea de grau k . Então, para cada $x \in X$,*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = kf(x).$$

Demonstração. Para cada $x \in X$ considere a função auxiliar $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(\lambda) = f(\lambda x) - \lambda^k f(x)$. Da hipótese sobre f , concluímos que $g(\lambda) = 0$ para todo $\lambda > 0$. Portanto, $g'(\lambda) = 0$ para todo $\lambda > 0$. Da regra da cadeia, temos

$$g'(\lambda) = \langle \nabla f(\lambda x), x \rangle - k\lambda^{k-1}f(x)$$

e daí,

$$0 = g'(1) = \langle \nabla f(x), x \rangle - kf(x),$$

o que nos dá

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = kf(x).$$

□

C Convergência Fraca

Introduzimos aqui a noção de convergência fraca para espaços normados e dois resultados relacionados a tal noção que foram importantes na demonstração do Teorema 2.4.6.

Definição .0.17. *[Kre, Definição 4.8-2] Uma sequência (x_n) em um espaço normado X é dita **fracamente convergente** se existe um $x \in X$ tal que para todo funcional $g \in X'$ (onde X' denota o espaço dos funcionais lineares contínuos definidos no espaço normado X) tem-se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x).$$

Exemplo .0.18. [Kre, Exemplo 4.8-5] Em um espaço de Hilbert, ou seja, um espaço vetorial munido de produto interno e completo em relação à norma induzida, uma sequência (x_n) converge fracamente para x se, e somente se $\langle x_n, z \rangle$ converge para $\langle x, z \rangle$ para todo z no espaço. De fato, do Teorema da representação de Riesz (v. por exemplo [Kre, 3.8.1 Riesz's Theorem, p. 188]), para cada z existe um funcional linear e contínuo f tal que $f(u) = \langle u, z \rangle$ para todo u . Assim, a afirmação decorre da definição de convergência fraca.

Teorema .0.19. [dO12, Teorema 16.5] Se X é um espaço reflexivo, ou seja, $X'' := (X')' = X$, então toda sequência limitada em X possui subsequência fracamente convergente.

Como todo espaço de Hilbert é reflexivo (v. por exemplo [Kre, 4.6-6 Theorem, p.242]), segue do teorema acima que toda sequência limitada em um espaço de Hilbert possui subsequência que converge fracamente.

D Construção de uma função suave com certas propriedades

Nas demonstrações dos Teoremas 3.2.3 e 4.1.14, utilizamos a existência de funções suaves com propriedades dadas. Provaremos nesta seção a existência de uma função suave $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ cumprindo as propriedades:

- $0 \leq f'(t) < \pi$ para $0 \leq t \leq 1$
- $f(t) = 0$ para t próximo de 0
- $f(t) = \pi - \varepsilon$ para t próximo de 1

para $\varepsilon \in (0, \pi)$.

Lema .0.20. [Lee12, Lemma 2.20 p.41] A função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

é suave, isto é, possui derivadas de todas as ordens contínuas.

Demonstração. É claro que a função g é suave em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pois, nestes pontos, é composição de funções suaves. Como a existência da derivada de ordem $k+1$ de uma função implica na continuidade da derivada de ordem k , para provarmos o lema, basta mostrarmos que as derivadas de g de todas as ordens existem no ponto $0 \in \mathbb{R}$. Observe primeiro que g é contínua na origem. De fato, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-1/t} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{e^s} = 0.$$

Mostraremos por indução que para $t > 0$ a k -ésima derivada de g é da forma

$$g^{(k)}(t) = p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}}$$

para algum polinômio $p_k(t)$ de grau k . É claro que a igualdade é verdadeira para $k = 0$ tomando $p_0(t) = 1$ para todo t . Suponha então que seja válida a igualdade para algum inteiro $k > 0$. Pela regra de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(t) &= p'_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} + p_k(t) \frac{t^{-2} e^{-1/t}}{t^{2k}} - 2k p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} \\ &= (t^2 p'_k(t) + p_k(t) - 2k t p_k(t)) \frac{e^{-1/t}}{t^{2(k+1)}} \end{aligned}$$

que é a forma que queríamos. Por fim, mostraremos, também por indução, que $g^{(k)}(0) = 0$ para todo inteiro $k \geq 0$. Para mostrar que $g^{(k+1)}(0)$ existe, basta mostrar que $g^{(k)}$ tem derivadas laterais iguais em ambos os lados de $t = 0$. Pela definição de g , é claro que a derivada pela esquerda existe e é nula. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g^{(k)}(t) - g^{(k)}(0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} p_k(t) \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} \\ &= p_k(0) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/t}}{t^{2k+1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{-(2k+1)}}{e^{1/t}} = 0 \end{aligned}$$

pela regra de l'Hôpital. □

Lema .0.21. [Lee12, Lemma 2.21, p. 42] *Dados dois números positivos r_1 e r_2 tais que $r_1 < r_2$, existe uma função suave $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- $h(t) = 1$ para $t \leq r_1$
- $0 < h(t) < 1$ para $r_1 < t < r_2$
- $h(t) = 0$ para $t \geq r_2$.

Demonstração. Seja g a função do Lema .0.20. Defina

$$h(t) = \frac{g(r_2 - t)}{g(r_2 - t) + g(t - r_1)}.$$

Observe que h está bem definida já que o denominador nunca se anula (quando $r_2 - t$ é não positivo, $t - r_1$ é positivo e vice-versa) e logo, como g é suave, h também é suave. Além disso, para $t \leq r_1$, temos $t - r_1 \leq 0$ e logo

$$h(t) = \frac{g(r_2 - t)}{g(r_2 - t) + g(t - r_1)} = \frac{g(r_2 - t)}{g(r_2 - t)} = 1.$$

Com um raciocínio parecido pode se verificar que para $t \geq r_2$ temos $h(t) = 0$. Por fim, para t em (r_1, r_2) , temos $g(r_2 - t)$ e $g(t - r_1)$ positivos e daí, segue-se que $0 < h(t) < 1$. □

Proposição .0.22. *Dado $\varepsilon \in (0, \pi)$, existe uma função suave $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ tal que $0 \leq f'(t) < \pi$ para $0 \leq t \leq 1$, $f(t) = 0$ para t próximo de 0 e $f(t) = \pi - \varepsilon$ para t próximo de 1.*

Demonstração. Construiremos a função f com as propriedades citadas fazendo modificações na função h do Lema .0.21. Primeiro multiplicaremos por $-(\pi - \varepsilon)$ pois assim a função se tornará crescente e sua imagem será o intervalo $[-(\pi - \varepsilon), 0]$. Feito isso, adicionamos $\pi - \varepsilon$ para que a imagem seja $[0, \pi - \varepsilon]$. Por fim, devemos escolher r_1 e r_2 de forma que a derivada de f cumpra $0 \leq f'(t) < \pi$ para $r_1 \leq t \leq r_2$ e reescalar o domínio da função para $[0, 1]$. □

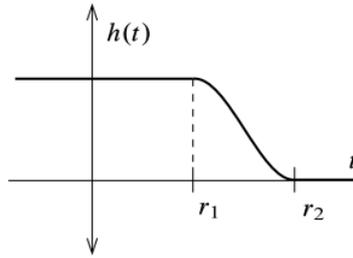


Figura 4: Função h do Lema .0.21 ([Lee12, Fig. 2.5, p. 42])

E Grau Topológico de Brouwer e Leray-Schauder

Nesta seção é dada a noção do Grau Topológico de uma função e algumas de suas propriedades com objetivo de introduzir o Grau de Leray-Schauder que foi utilizado na demonstração do Lema 3.2.18.

Sejam M e N duas variedades compactas orientadas de mesma dimensão, sendo N conexa. Considere $f: M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 e $x \in M$ um ponto regular de f , isto é, um ponto tal que $df_x: T_x M \rightarrow T_x N$ é um isomorfismo. Dizemos que x é um **ponto positivo** quando o isomorfismo df_x preserva a orientação e neste caso, escrevemos $\deg_x f = 1$. Quando o isomorfismo reverte a orientação, dizemos que x é **negativo** e escrevemos $\deg_x f = -1$. Chamamos de grau de f em x o número $\deg_x f$. Seja agora $y \in N$ um valor regular de f , ou seja, y é tal que todo ponto em $f^{-1}(\{y\})$ é regular (podendo ser $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$). Como M é compacta, temos, pelo Teorema da Aplicação Inversa, que $f^{-1}(\{y\})$ é um conjunto finito. Sendo assim, definimos o grau de f sobre y como:

$$\deg(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \deg_x f$$

e $\deg(f, y) = 0$ quando $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$.

Graças ao Teorema da Aplicação Inversa, conseguimos ter uma interpretação geométrica do grau definido acima. Para cada valor regular $y \in N$, existem abertos $V \subset N$ e $U(x) \subset M$ em torno de cada $x \in f^{-1}(\{y\})$ de forma que f mapeia $U(x)$ difeomorficamente sobre V preservando (no caso de x positivo) ou revertendo (no caso de x negativo) a orientação. Logo, $\deg(f, y)$ é o saldo do número de vezes que f cobre V . Por exemplo, se $x \in f^{-1}(\{y\})$ contém n pontos positivos e m pontos negativos, temos $\deg(f, y) = n - m$ e podemos dizer que f cobre $n - m$ vezes o aberto V .

Lema .0.23. *Sejam M e N variedades compactas e orientadas, sendo N conexa. Considere duas aplicações suaves $g, f: M \rightarrow N$ homotópicas possuindo um valor regular $y \in N$ em comum. Então, $\deg(f, y) = \deg(g, y)$.*

Uma demonstração do lema acima pode ser encontrada em [Hir97, 1.3. Corollary, p.123].

Lema .0.24. *Sejam M e N variedades compactas e orientadas de dimensão n , sendo N conexa e $n \geq 1$. Sejam $y, z \in N$ valores regulares de uma aplicação suave $f: M \rightarrow N$. Então $\deg(f, y) = \deg(f, z)$.*

Demonstração. Supondo que y e z estão numa mesma vizinhança coordenada $V \subset N$, podemos construir um difeomorfismo $h: N \rightarrow N$ homotópico a identidade tal que $h(y) = z$. Assim, sendo h homotópica a identidade, temos $h \circ f: M \rightarrow N$ homotópica a $f: M \rightarrow N$, daí, pelo lema anterior, $\deg(h \circ f, z) = \deg(f, z)$. Observe que $(h \circ f)^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(\{h^{-1}(z)\}) = f^{-1}(\{y\})$ e logo,

$$\deg(f, y) = \deg(h \circ f, z) = \deg(f, z).$$

Verifica-se facilmente que a relação entre y e z de que uma tal h existe é uma relação de equivalência em N . Logo, as classes de equivalência são abertos disjuntos de N . Como N é conexa, quaisquer dois pontos devem ser equivalentes. \square

Lema .0.25. *Sejam M, N variedades suaves e $f: M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Então f pode ser aproximada por uma aplicação C^∞ homotópica a f .*

Uma prova do lema acima pode ser encontrada em [Lee12, Theorem 6.26 (Whitney Approximation Theorem), p. 141]. Agora estamos prontos para cumprir o objetivo da seção que é definir o grau de uma aplicação.

Definição .0.26. *Sejam M e N variedades compactas e orientadas de dimensão n , com N conexa e $n \geq 1$. O grau de Brouwer de uma aplicação $f: M \rightarrow N$ é definido como $\deg(g, z)$ onde $g: M \rightarrow N$ é uma aplicação suave homotópica a f e $z \in N$ é um valor regular de g .*

Os lemas enunciados anteriormente garantem a existência e a independência de uma tal g e do valor regular z na definição dada.

Observação .0.27. *Considere uma aplicação contínua $f: M \rightarrow N$ entre variedades compactas e orientadas de dimensão n , com N conexa e $n \geq 1$. Se f não é sobrejetiva, podemos aproximar f por uma função suave $g: M \rightarrow N$ também não sobrejetiva. Assim, tomando $z \notin g(M)$, temos z regular, $\deg(g, z) = 0$, e logo $\deg(f) = 0$. Portanto, toda aplicação contínua com grau não nulo é sobrejetiva.*

Existe na literatura uma extensão do grau definido para perturbações compactas da identidade em um espaço de Banach X . Se $U \subset X$ é um aberto limitado, $f: \bar{U} \rightarrow X$ é compacta e $z \notin (I - f)(\partial U)$, o **Grau de Leray-Schauder**, $\deg_{LS}[I - f, U, z]$ de $I - f$ em U sobre z é construído pelo grau de Brouwer aproximando a aplicação compacta f por aplicações f_ε com imagens contidas em subespaços X_ε de dimensão finita de X , contendo z , e mostrando que para ε suficientemente pequeno, o grau $\deg[(I - f_\varepsilon, U \cap X_\varepsilon, z)]$ tende a um valor definido como $\deg_{LS}[I - f, U, z]$. Em [Maw99], pode-se encontrar mais informações sobre o Grau de Leray-Schauder e suas propriedades, em particular, a propriedade de invariância homotópica.

Referências Bibliográficas

- [Bar95] R.G. Bartle, *The elements of integration and lebesgue measure*, Wiley classics library, Wiley, 1995.
- [DM90] B. Dacorogna and J. Moser, *On a partial differential equation involving the jacobian determinant*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis, vol. 7, Elsevier, 1990, pp. 1–26.
- [dO12] C.R. de Oliveira, *Introdução à análise funcional*, Projeto Euclides, IMPA, 2012.
- [dS04] A.C. da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [EH] I. Ekeland and H. Hofer, *Symplectic topology and hamiltonian dynamics*, Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique), 1–4.
- [GFS00] I.M. Gelfand, S.V. Fomin, and R.A. Silverman, *Calculus of variations*, Dover Books on Mathematics, Dover Publications, 2000.
- [GG74] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1974.
- [GP74] V. Guillemin and A. Pollack, *Differential topology*, Mathematics Series, Prentice-Hall, 1974.
- [Hir97] M.W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 1997.
- [HZ11] H. Hofer and E. Zehnder, *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Modern Birkhäuser Classics, Springer Basel, 2011.
- [KN96] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, A Wiley Publication in Applied Statistics, no. v. 1, Wiley, 1996.
- [Kre] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*.
- [Lee12] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2012.
- [Lim13] E.L. Lima, *Análise real vol. 2*, Análise real, IMPA, 2013.

- [Maw99] J. Mawhin, *Leray-schauder degree: a half century of extensions and applications*, Topological methods in nonlinear analysis **14** (1999), no. 2, 195–228.
- [MS17] D. McDuff and D. Salamon, *Introduction to symplectic topology*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, OUP Oxford, 2017.
- [PR83] C. C. Pugh and C. Robinson, *The c 1 closing lemma, including hamiltonians*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **3** (1983), no. 2, 261–313.
- [RSN90] F. Riesz and B. Szkefalvi-Nagy, *Functional analysis*, Dover books on advanced mathematics, Dover Publications, 1990.
- [SMS⁺63] E. Stein, J.W. Milnor, M. Spivak, R. Wells, R. Wells, and J.N. Mather, *Morse theory*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1963.
- [Tro96] J. L. Troutman, *Variational calculus and optimal control (2nd ed.): Optimization with elementary convexity*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [Vit87] Claude Viterbo, *A proof of weinstein’s conjecture in $r2n$* , Annales de l’Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, vol. 4, Elsevier, 1987, pp. 337–356.