

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FILIPPE CESTARI COUTINHO

**UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE POTENCIAL ESTACIONÁRIO EM MEIOS  
INFINITOS E SEMI-INFINITOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO**

VITÓRIA

2020

FILIPPE CESTARI COUTINHO

**UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE POTENCIAL ESTACIONÁRIO EM MEIOS  
INFINITOS E SEMI-INFINITOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial necessário para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. D. Sc. Carlos Friedrich Loeffler Neto

VITÓRIA

2020

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

C871e Coutinho, Filipe Cestari, 1995-  
Um estudo sobre problemas de potencial estacionário em meios infinitos e semi-infinitos usando o método dos elementos de contorno / Filipe Cestari Coutinho. - 2020.  
86 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Método dos elementos de contorno. I. Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

---

FILIPPE CESTARI COUTINHO

**UM ESTUDO SOBRE PROBLEMAS DE POTENCIAL ESTACIONÁRIO EM MEIOS  
INFINITOS E SEMI-INFINITOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial necessário para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica.

Aprovado em \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2020

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Orientador

---

Prof. Dr. Luciano Lara  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador Interno

---

Prof. Dr. João Paulo Barbosa  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador Externo

---

Dr. André Bulcão  
Universidade Federal do Espírito Santo  
Examinador Externo



*Dedico este trabalho em memória  
do meu amigo e irmão Marcos Valadão*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, pela oportunidade e por me conceder capacidade de realizar este trabalho. Sem Ele nada seria possível. Glórias a Deus!

Ao meu orientador Carlos Friedrich Loeffler Neto, pela infindável sabedoria compartilhada e tamanha dedicação e compromisso com a execução do trabalho. O senhor realmente é exemplo de profissional.

À minha mãe Dinarte Cestari, que sempre me incentivou a seguir pelo caminho do conhecimento. A senhora é uma inspiração para mim.

Ao meu pai Mauricio Coutinho, que me proporcionou condições e acreditou na minha dedicação. Seu apoio foi e é fundamental.

Ao meu irmão Thiago Coutinho, você é como um pai para mim.

Ao meu irmão Victor Coutinho, pelo apoio.

À minha namorada Ana Daniela Castro, que sempre me apoiou, incentivou, acreditou e confiou em mim. Amo você.

À Rosilene Coutinho, por todo seu apoio e ajuda em diversos momentos.

Aos engenheiros André Freitas, Sandro Solosando, Rafael Tanaka, Rafael Morini, Marianna Broseguini, Fabrício Hupp e André Bouzada. que influenciaram minha jornada até aqui, de alguma forma.

Aos amigos Amanda Chartuni, Chafic Chartuni, Rafael Aguiar, Ana Luara, Filipe Sathler e Filipe Ahnert, que de alguma forma, mesmo sem saber, influenciaram neste trabalho.

Ao Walder Castro e Forland Almeida, pessoas que servem de inspiração para mim, e me fazem buscar o meu melhor, a cada dia. Agradeço pela imensa sabedoria compartilhada comigo.

À Ana Cláudia Castro, que orou e cuidou de mim em diversos momentos. Seu apoio e carinho são muito importantes.

À Igreja Cristã Maranata de Itapuã 3, pelos irmãos que oraram por mim e me apoiaram.

À Prysmian Cabos e Sistemas do Brasil LTDA, pelo apoio para o desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES / FAPES pelo apoio e auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Ao PPGEM da UFES pela oportunidade e organização. Em especial ao Marcelo Macêdo e Andréia Eyng.

*“O temor do Senhor é o princípio do conhecimento, mas os insensatos desprezam a sabedoria e a disciplina.”*

Rei Salomão – Bíblia (Provérbios 1:7)

## RESUMO

A busca e compressão dos fenômenos físicos é um desejo do ser humano desde onde se há registro. Problemas cada vez mais complexos têm sido estudados e solucionados, em especial, nos últimos séculos. Os espaços infinitos e semi-infinitos apresentavam grande dificuldade de discretização devido à escassez de recursos para isso. Com o surgimento dos métodos numéricos, esses problemas tiveram sua possível solução mais próxima de ser encontrada. Desta forma, o método dos elementos de contorno apresenta uma grande vantagem em relação a outros métodos, devido sua particularidade quanto a otimização para discretização deste tipo de problemas.

Neste trabalho, problemas de potencial contendo meios infinitos, bem como de meios semi-infinitos, ambos bidimensionais, onde dimensões espaciais tendem ao infinito, são estudados, com apoio do uso do método dos elementos de contorno e o método das imagens. Os problemas abordados possuem variação quanto as suas condições geométricas, condições de contorno, além da malha e pontos fonte e de imagem utilizados na discretização do problema.

É observado que os resultados para os meios infinitos e semi-infinitos, estudados neste trabalho, são considerados satisfatórios, fornecendo resultados com agilidade e precisão.

Palavras chave: Método dos elementos de contorno, Meio infinito, Meio semi-infinito, Método das imagens, Problemas de potencial, Solução fundamental, Método numérico.

## **ABSTRACT**

The search for comprehension of physical phenomena it is a desire of human being since it is possible record. Problems even more complex are been studied and solved, particularly, in the past few centuries. There was a big complexity in infinites and semi-infinites spaces due to lack of resources. With the advent of numerical methods, these problems, have their solutions near to be determined. Therefore, the boundary element method, appears a great advantage when related to others methods, due to its particularity of an optimized discretization of this type of problem.

In this work, bidimensional potential problems of infinite space and semi-infinite space, which dimensionally the space trend to infinite, are studied with the utilization of boundary element method and method of images. Among them, the problems have change regarding the space conditions, boundary conditions, besides the mesh and source and image points used in discretization of problems.

The observed results either for semi-infinite than infinite spaces, are considered satisfactory, for the problems presented in this work, with speed and precision in their solutions.

Keywords: Boundary elements method, Infinite space, Semi-infinite space, Images method, Potential problems, Fundamental solution, Numerical method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Discretização de domínio no Método das Diferenças Finitas.....	18
Figura 2 - Discretização de domínio $\Omega$ no Método dos Elementos Finitos .....	18
Figura 3 - Discretização de domínio no Método dos Volumes Finitos.....	19
Figura 4 - Discretização no Método dos Elementos de Contorno .....	20
Figura 5 - Discretização em Elementos Finitos X Elementos de Contorno .....	24
Figura 6 - O problema fundamental.....	28
Figura 7 - Região delimitada pelo círculo de raio $\rho$ envolvendo uma cavidade.....	32
Figura 8 - Soluções fundamentais particulares (LOEFFLER, 1988).....	34
Figura 9 - Orifício circular em meio infinito com fluxo uniformemente aplicado nas bordas .....	38
Figura 10 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann.....	40
Figura 11 - Erro percentual de potencial nos pontos internos em relação a resposta esperada com condições de Neumann .....	41
Figura 12 - Significado das constantes da solução geral do problema de Laplace com simetria circunferencial.....	43
Figura 13 - Singularidade para condição exclusiva de Dirichlet .....	44
Figura 14 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann.....	45
Figura 15 - Erro percentual de potencial no contorno em relação a resposta esperada problema com condições de Neumann .....	46
Figura 16 - Erro percentual de potencial nos pontos internos com condições de Dirichlet e solução fundamental alterada .....	47
Figura 17 - Esquema ilustrativo da relação entre $u(r)$ e a solução fundamental $u^*$ ...	49
Figura 18 - Erro percentual de potencial com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet .....	51
Figura 19 - Erro percentual de potencial com solução fundamental clássica, sob condição de Dirichlet .....	53
Figura 20 - Espaço semi-infinito .....	56
Figura 21 - Identificação de pontos fonte e externos no Método das Imagens (BREBBIA e WALKER, 1980) .....	58
Figura 22 - Pontos campo no método das imagens (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada.....	61
Figura 23 - Ponto fonte imagem e ponto fonte original (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada.....	62
Figura 24 - Ponto fonte original e na imagem com irregularidade no semiplano (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada.....	62
Figura 25 - Meio semi-infinito .....	63
Figura 26 - Carga quase concentrada aplicada numa superfície reta .....	65
Figura 27 - Comparação entre os pontos internos e o contorno .....	66
Figura 28 - Carga quase concentrada aplicada com limitação da discretização .....	68
Figura 29 - a carga aplicada sobre a interface é uniformemente distribuída .....	69
Figura 30 - Potencial uniformemente distribuído num semiplano.....	71

Figura 31 - Discretização para Potencial uniformemente distribuído num semiplano .....	72
Figura 32 - Pontos fonte distanciados dos nós centrais .....	74
Figura 33 - Potencial Senoidal num semiplano .....	76
Figura 34 - Resultado Série de Fourier - Exemplo 5 .....	77

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann.....	40
Tabela 2 - Resultado de potencial a diferentes distâncias para as malhas utilizadas com condições de Neumann.....	41
Tabela 3 - Resultado de potencial a diferentes distâncias para as malhas utilizadas com condições de Dirichlet e solução fundamental alterada.....	47
Tabela 4 - Resultado de potencial com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet.....	51
Tabela 5 - Resultado de potencial com solução fundamental clássica, sob condição de Dirichlet.....	53
Tabela 6 - Temperatura no contorno - Exemplo 1.....	66
Tabela 7 – Pontos equidistantes dos nós de contorno.....	67
Tabela 8 – Pontos internos mais afastados.....	67
Tabela 9 - Potencial no contorno - Exemplo 2.....	68
Tabela 10 - Potencial interno – Exemplo 2.....	69
Tabela 11 – Potencial no contorno – Exemplo 3.....	70
Tabela 12 - Potencial interno - Exemplo 3.....	70
Tabela 13 - Resultados de fluxo - Exemplo 4.....	73
Tabela 14 – Pontos afastados do contorno – Exemplo 4.....	73
Tabela 15 – Fluxo com pontos fonte distanciados – Exemplo 4.....	75
Tabela 16 – Resultado Potencial Exemplo 5.....	78

## SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO .....	16
1.1. Comentários Preliminares.....	16
1.2. Principais métodos numéricos .....	17
1.3. Objetivo.....	21
1.4. Metodologia .....	21
1.5. Estrutura do trabalho .....	22
CAPÍTULO 2 - O MEC EM MEIOS FINITOS.....	23
2.1. Comentários preliminares .....	23
2.2. Os problemas estacionários e a Equação de Laplace.....	25
2.3. Condições de Dirichlet e Neuman .....	25
2.4. Forma Integral Inversa da Equação de Laplace .....	26
2.5. A Solução Fundamental.....	28
2.6. A interpolação de campo e de forma e os tipos de interpolação .....	29
CAPÍTULO 3 - O MEC EM MEIOS INFINITOS .....	31
3.1. Conceitos Preliminares .....	31
3.2. A equação integral inversa .....	32
3.3. A condição de regularidade .....	33
3.4. Aspectos numéricos relevantes .....	35
3.5. Simulações numéricas.....	37
3.6. Orifício com condições exclusivas de Neumann.....	37
3.7. Orifício com condição exclusiva de Dirichlet.....	42
3.8. Orifício com condição de Dirichlet e alteração da solução fundamental .....	44
3.9. Orifício circular com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet .....	48
3.10. Conclusões Parciais .....	54
CAPÍTULO 4 - O MEC EM MEIOS SEMI-INFINITOS .....	56
4.1. Preliminares.....	56
4.2. O método das imagens.....	57
4.3. A equação integral do MEC para meios semi-infinitos .....	62
4.4. Simulações Numéricas em meios semi-infinitos.....	65
4.4.1 Exemplo 1: Carga concentrada aplicada numa superfície reta .....	65
4.4.2 Exemplo 2: Carga concentrada aplicada com limitação da discretização .....	68

4.4.3 Exemplo 3: Carga distribuída aplicada numa superfície reta .....	69
4.4.4 Exemplo 4: Potencial uniformemente distribuído num semicírculo .....	71
4.4.5 Exemplo 5: Potencial senoidalmente variável aplicado num semicírculo ..	75
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES .....	79
Referências .....	81
1. ANEXO I – Elementos Infinitos .....	83

# CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

## 1.1.Comentários Preliminares

A busca pela compreensão mais precisa dos fenômenos físicos tem se tornado cada vez mais necessária, visto que as aplicações de produtos ou processos estão se tornando cada vez mais complexas, seja devido ao meio, a demanda ou aos materiais envolvidos. Contudo, há necessidade crescente de projetar ou analisar estruturas, equipamentos e máquinas com elevado grau de precisão e segurança, além de minimizar os custos envolvidos.

Problemas que possuem grande complexidade, como por exemplo os que possuem diversas variáveis, domínios heterogêneos, contatos complexos, geometrias irregulares, os quais podem apresentar soluções analíticas bastante complexas ou as quais não existem soluções analíticas definidas ainda, para avaliação da sua adequação com relação à integridade estrutural. Em razão disso, aproveitando-se da capacidade de processamento dos modernos computadores, houve um grande investimento nos últimos setenta anos na proposição de soluções numéricas. Tais soluções visam se aproximar da solução analítica, admitindo-se uma taxa de erro.

Para isso, são utilizadas modelagens matemáticas, de forma que o problema complexo se torne mais simples, mas preservando as características relevantes do problema e destacando aquelas não relevantes. Neste contexto, a ideia de discretização do contínuo é fundamental para aplicação de modernos métodos numéricos. A discretização transforma os modelos matemáticos originais, gerados a partir de operadores diferenciais, em sistemas de equações algébricas.

Diversos métodos matemáticos, visando a simplificação e o cálculo desses problemas foram propostos nas últimas décadas. Os métodos mais famosos, que podem ser citados são, por exemplo: Método dos Elementos Finitos (MEF), Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). (REDDY, 2005).

Os problemas de meio infinito e semi-infinito, possuem uma vasta área de aplicação, podendo ter aplicação desde problemas relacionados a astronomia até estudos de perfuração de poços para extração de petróleo.

Estes problemas são caracterizados por terem uma ou mais de suas dimensões espaciais tendendo ao infinito. Esse tipo problema ocorre quando as informações de interesse se situam em uma pequena parte em relação ao espaço dimensional circundante.

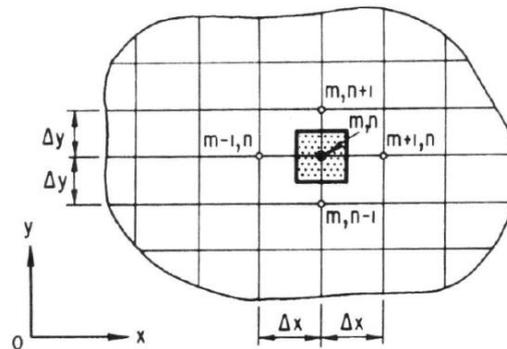
Por serem problemas cuja solução analítica aproximada pode não satisfazer as necessidades de precisão e particularidades dos problemas. Dessa forma existe a possibilidade de solução deste tipo de problema com métodos experimentais e por tentativa e erro; contudo, os métodos numéricos são uma alternativa bastante interessante para sua solução.

## **1.2. Principais métodos numéricos**

Cronologicamente o Método das Diferenças Finitas (MDF) é o mais antigo dos principais métodos numéricos discretos, baseando-se numa ideia bem conhecida relacionada ao conceito de diferença finita, que está intimamente relacionada ao cálculo infinitesimal. Este método possui, portanto, em seu cerne a ideia mestra de refinamento, que aparece nos demais métodos numéricos: à medida que se reduz a dimensão dos incrementos utilizados na definição da diferença finita, o modelo numérico se aproxima ou converge para o modelo infinitesimal, que é exato.

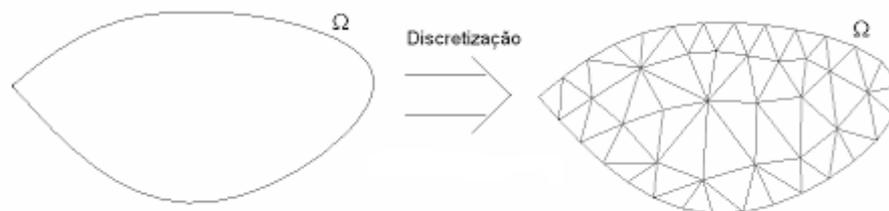
Em termos práticos, o MDF tem como objetivo transformar problemas governados por equações diferenciais em problemas governados por equações algébricas, substituindo as derivadas por diferenças (RUGGIERO e LOPES, 1996). Assim como outros métodos de domínio, há geração de uma malha, como exemplificado pela Figura 1. Cada célula de diferença finita é gerada a partir da estrutura do operador diferencial que governa o problema.

Figura 1 - Discretização de domínio no Método das Diferenças Finitas



O Método dos Elementos Finitos (MEF) vem sendo estudado e desenvolvido há mais de setenta anos, com vários estudos visando sua otimização e aperfeiçoamento, especialmente nas últimas décadas. Este método se baseia numa análise matemática que visa a discretização de um meio contínuo, substituindo-o por pequenos elementos definidos por nós, de forma a manter as características do meio analisado (ZIENKIEWCZ O, 2013). No interior destes elementos, adequadas funções de aproximação são utilizadas a partir de expressões de resíduos ponderados, procurando-se garantir a consistência do modelo pela minimização de erros e garantia de continuidade de grandezas físicas na conexão de nós contíguos. A Figura 2 exemplifica uma discretização, de um domínio  $\Omega$ , em elementos triangulares.

Figura 2 - Discretização de domínio  $\Omega$  no Método dos Elementos Finitos



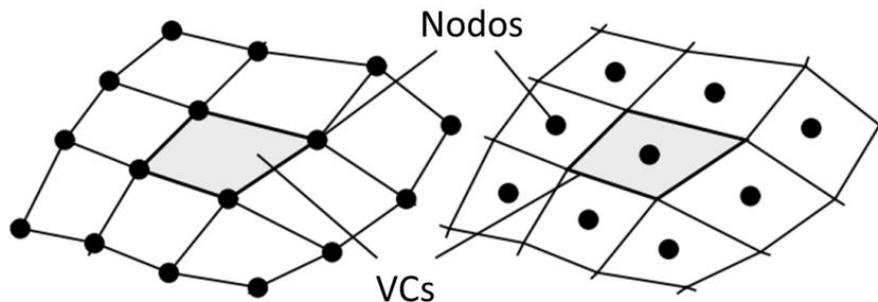
Este método tem sido muito aplicado nas mais diversas áreas. Tanto na área de ciências exatas, como na área de ciências biológicas. É o método mais utilizado e com mais investimentos em pesquisa e implementação computacional para aplicação industrial. (ZIENKIEWCZ O, 2013).

O Método dos Volumes Finitos começou a ser difundido em 1972 por Patankar e Spalding. Este é derivado do Método das Diferenças Finitas, onde o domínio a ser estudado (domínio de cálculo) é subdividido em um número de volumes de controle (EYMARD e HERBIN, 2000). Procura-se garantir a continuidade dos fluxos entre os volumes como princípio fundamental, embora possa haver outras restrições para

garantir melhor desempenho, como compatibilidade de potenciais. Tem sido muito bem sucedido em aplicações na área de fluidos.

A Figura 3 exemplifica a subdivisão em Volumes de controle (VCs) e os nós (Nodos) nessa região.

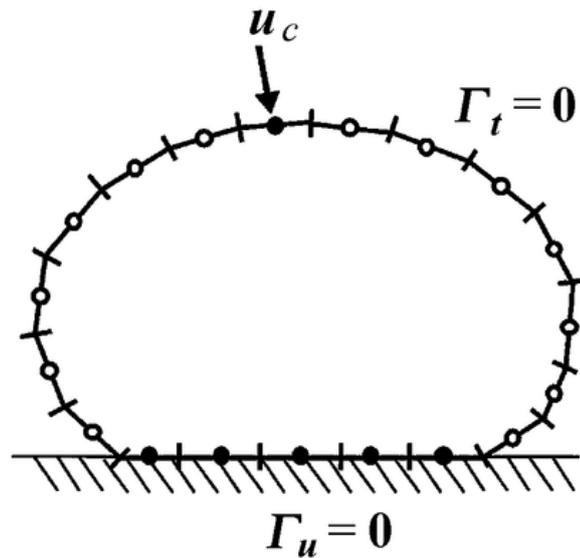
Figura 3 - Discretização de domínio no Método dos Volumes Finitos



Comparativamente aos métodos mencionados anteriormente, o Método dos Elementos de Contorno (MEC), é um método mais recente, o qual começou a ser utilizado na engenharia, aproximadamente, no final da década de 70. Este método tem sido muito estudado devido às suas particularidades, gerando diversas publicações de trabalhos acadêmicos, devido ao grande número de atualizações que vem sendo adquiridas (BREBBIA e WALKER, 1980).

Um das grandes vantagens a qual o MEC apresenta em relação aos outros métodos, é que não há necessidade de discretização de todo o domínio do problema, apenas de seu contorno, como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 - Discretização no Método dos Elementos de Contorno



Essa vantagem, em especial, é ainda mais evidenciada quando se trata de problemas de meio infinito e semi-infinito, pois a discretização de um domínio com dimensões infinitas através de técnicas de domínio tem se mostrado inviável. O MEC, conforme será mostrado, elimina a discretização de regiões distantes graças a sua estrutura matemática.

Outra vantagem do método que pode ser citada é a facilidade de manipulação de dados de entrada quando comparada a outros métodos, pois com a aplicação bem sucedida do MEC, reduz a dimensão do problema em uma unidade, o que resulta em um custo computacional menor (LOEFFLER, 1988).

A precisão das respostas do MEC também é elevada, especialmente quando a equação de governo é auto-adjunta, devido a solução fundamental se assemelhar ao problema que se deseja resolver.

O método possui algumas desvantagens, no momento, como por exemplo, a complexidade da definição da solução fundamental para alguns casos e algumas complexidades na solução de problemas heterogêneos. Contudo, sua principal desvantagem se deve ao fato de ser mais custoso em aplicações de grande porte, pois suas matrizes não são simétricas (FREITAS, 2015).

### **1.3.Objetivo**

A discretização de domínios infinitos e semi-infinitos é um grande problema para uma modelagem matemática. Por se tratar de um espaço muito grande, sua discretização é um difícil desafio, pois tal processo sem uma estratégia adequada tenderia a gerar equações em grande número, tornando o custo de sua solução inviável.

O Método dos Elementos de Contorno, como apresentado, possui vantagem para resolução deste tipo problema em relação aos outros métodos citados. Existem alguns métodos para este tipo de solução de problema, utilizando o MEC, sendo um deles o método das imagens, para o domínio semi-infinito (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984).

Embora o estudo de problemas de elasticidade para estes tipos de domínio seja comum (MA, FAN e XIAO, 1999), o estudo de problemas de potencial não é, com pouca literatura disponível sobre o tema (DAVIES e BU, 1995).

Assim, este trabalho tem como objetivo o estudo de problemas de potencial estacionário com domínio infinito e semi-infinito, confrontando os resultados analíticos com os resultados computacionais, variando parâmetros de malha e outras componentes inerentes ao método.

### **1.4.Metodologia**

Nessa dissertação, os resultados dos problemas apresentados são obtidos por meio de simulações computacionais utilizando o MEC, abordando problemas escalares, comumente relacionados à transmissão de calor por condução ou difusão, alguns dos quais é possível determinar uma solução analítica.

Em alguns problemas, os resultados obtidos numericamente são confrontados com os resultados analíticos, de forma a identificar o desvio dos resultados numéricos e sua variação de acordo com a alteração das variáveis pertinentes ao método.

Para este estudo, elementos do tipo constante foram utilizados no processo de discretização.

O presente trabalho busca a apresentação e avaliação dos procedimentos metodológicos necessários para abordagem e solução de problemas com domínios infinitos e semi-infinitos, de forma a validar sua aplicação em problemas de Laplace em geral.

### **1.5.Estrutura do trabalho**

Este trabalho é dividido em cinco Capítulos, sendo o presente capítulo, o introdutório.

O capítulo 2 detalha sobre o Método dos Elementos de Contorno aplicado em meios finitos, onde é feita a apresentação e definição do método. Também são mostrados o problema de Laplace e a solução fundamental, servindo ainda como texto para a revisão bibliográfica.

O capítulo 3 apresenta o método para domínios infinitos, demonstrando sua formulação, bem como suas particularidades, as condições de contorno de Neumann e Dirichlet, e a definição de problemas a serem analisados e seus respectivos resultados.

O capítulo 4 aborda sobre o método aplicado em domínios semi-infinitos, apresentando sua formulação, os métodos de resolução utilizando elementos infinitos e o método das imagens, definição de problemas e respectivos resultados.

Então, o capítulo 5 apresenta as conclusões deste trabalho e propostas para trabalho futuro, com base nos resultados obtidos.

Por fim, são apresentadas as referências utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Adicionalmente, o Anexo I também apresenta brevemente os Elementos Infinitos.

## **CAPÍTULO 2 - O MEC EM MEIOS FINITOS**

Apresentação sucinta para fazer contraponto à teoria de meios abertos, que requer uma base prévia, desenvolvida para os meios fechados.

### **2.1. Comentários preliminares**

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos do Método dos Elementos de Contorno (MEC), para problemas de potencial, utilizando o problema de Laplace, usando a formulação clássica e posteriormente no CAPÍTULO 4 o método das imagens.

A base matemática do Método dos Elementos de Contorno surgiu a partir do estudo de equações integrais clássicas no final do século dezenove. Contudo, na ausência de processadores computacionais, tais estudos não se desenvolveram a contento. O MEC ganhou impulso na comunidade científica a partir do desenvolvimento do MEF e dos estudos e divulgação feitas por pesquisadores da Universidade de Southampton, sendo Carlos Alberto Brebbia, um dos mais influentes no assunto (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984).

O MEC se distingue dos demais métodos por ser um método efetivamente de contorno, ou seja, evita-se fazer integrações no domínio. Seu arcabouço matemático permite reduzir uma dimensão do problema, gerando equações de contorno. Isto permite discretizar de modo mais simples a superfície externa de um domínio complexo a ser analisado. Tal característica representa uma enorme vantagem, comparativamente aos demais métodos (BREBBIA e WALKER, 1980).

Além da redução dimensional, o método possui diversas vantagens, sendo algumas delas:

A possibilidade de trabalhar com domínios infinitos, devido às características da solução fundamental; este ponto será objeto de maior detalhamento no decorrer desta dissertação.

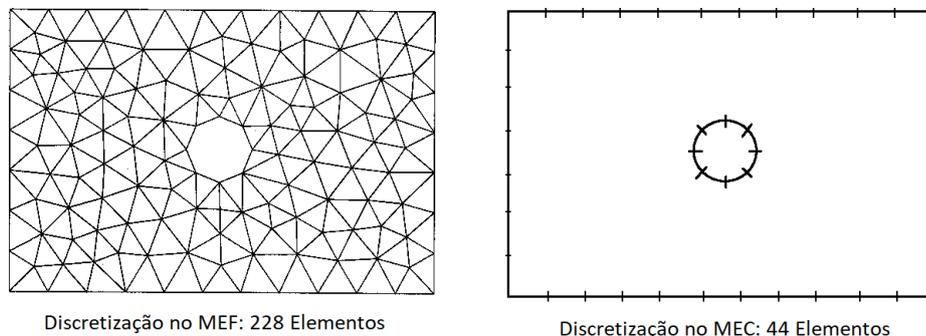
A simulação precisa do efeito concentrador de tensões, também devido às peculiaridades da solução fundamental; em problemas de mecânica da fratura e contacto, o MEC é o método mais indicado para a abordagem numérica e uma grande

quantidade de trabalhos tem sido desenvolvido nesse sentido (BREBBIA e WALKER, 1980).

Elevada precisão obtida nos problemas em que se ajusta – existem limitantes como a complexidade da solução fundamental em certos casos, entre outras restrições, como o fato do operador diferencial ser auto-adjunto. Nos problemas em que se aplica com naturalidade, o erro relativo na solução de problemas em que se possui solução analítica para comparar, é muito menor. Mais uma vez, isso se deve ao uso da solução fundamental, que é uma função auxiliar aparentada com o problema que se quer resolver (LOEFFLER, 1988).

Também é possível perceber, como a Figura 5 ilustra, que para a discretização de um mesmo domínio, o MEC utiliza uma quantidade elementos muito menor que o MEF, considerando a aplicação de elementos constantes em ambos os métodos. Isso implica que o número de equações a serem resolvidas é muito menor no MEC que no MEF. A confecção da malha, mesmo usando-se programas próprios para isso, é feita com mais facilidade com o MEC.

**Figura 5 - Discretização em Elementos Finitos X Elementos de Contorno**



Todavia, o MEC também possui suas desvantagens, algumas bastante sérias. Devido à complexidade da solução fundamental, em alguns casos, como problemas em meios heterogêneos ou ainda de domínios delgados como cascas, a aplicação do MEC não é bem aceita pelo meio industrial. Existe um esforço de pesquisa no sentido de reverter essa inadequação, através do uso de formulações do MEC que usam funções de base radial (LOEFFLER, 1988). Mas a grande desvantagem – pelo menos ainda pode ser assim interpretada - se dá devido ao fato das matrizes que são geradas pela discretização com o MEC não serem simétricas nem bandedas (FREITAS, 2015). Assim, o custo de processamento para problemas de grande porte pode ser muito maior do que o MEF, por exemplo, se técnicas auxiliares não forem aplicadas.

## 2.2. Os problemas estacionários e a Equação de Laplace.

Os problemas físicos mais simples são representados pela Equação de Laplace (TIMOSHENKO e GERE, 1994), que é uma equação escalar. Tal equação pode representar a condução de calor, o escoamento irrotacional de fluidos, a percolação em meios porosos, os casos de eletromagnetismo básico e a torção uniforme de barras prismáticas.

Comumente é deduzida a partir de uma equação de continuidade ou compatibilidade, associada a uma lei fenomênica de formação, como a lei de Fourier, a Lei de Fick, a Lei de Hooke simplificada etc.

Considere, por simplicidade, que  $u(x)$ , onde  $X(X_1, X_2)$ , é a variável básica ou potencial, uma grandeza escalar, que pode significar qualquer grandeza física associada aos problemas mencionados, ou seja, temperatura, pressão, voltagem etc.

Usando-se a notação indicial, a Equação de Laplace pode ser escrita resumidamente como:

$$u_{,ii} = 0 \quad (1)$$

## 2.3. Condições de Dirichlet e Neuman

Um problema matemático escrito em termos de equações diferenciais, ordinárias ou parciais, somente é bem posto se são conhecidas as devidas condições de contorno e condições iniciais para problemas transientes.

A condição de contorno denominada condição de Dirichlet, ou de primeiro tipo ou condição essencial, é um tipo de condição de contorno que quando aplicada numa equação diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que a solução necessita tomar em termos da variável básica ou primal, que é o potencial  $u(x)$ . A questão de se encontrar soluções para tais equações é conhecida como problema de Dirichlet (BREBBIA e WALKER, 1980).

Em matemática, a condição de contorno de Neumann, ou de segundo tipo ou condição natural é um tipo de condição de contorno que quando aplicada a uma equação

diferencial ordinária ou parcial, especifica os valores que a derivada espacial da variável básica deve tomar no contorno em termos da derivada normal do potencial, também denominado fluxo.

Existem ainda outros tipos de condição de contorno, como a condição de Robin e outras associadas a problemas de valor de contorno de mais alta ordem ou problemas de valor inicial (CHENG, 2005).

Nos casos a serem resolvidos ao longo desta dissertação, apenas condições de Dirichlet e Neumann são consideradas. Assim, o domínio  $\Omega(x)$  é limitado por um contorno  $\Gamma(x)$ , onde a condição de Dirichlet  $u(x)$  é prescrita em partes dele, definidas como  $\Gamma u(x)$  e as derivadas normais do potencial  $q(x)$  são aplicadas nas demais partes complementares, definidas como  $\Gamma q(x)$ .

#### 2.4. Forma Integral Inversa da Equação de Laplace

Segundo (BREBBIA e WALKER, 1980) para se modelar os problemas com o MEC, é necessário trabalhar a equação (1), transformando-a numa forma integral forte e integrando-a em todo o domínio  $\Omega$ .

Para tanto, é preciso tomar uma função auxiliar  $u^*(\xi; X)$  e sua derivada normal  $q^*(\xi; X)$ , onde  $\xi$  é um ponto de origem arbitrário. Com tais funções, que são melhor definidas em item próximo, deve-se multiplicar inicialmente a equação diferencial de governo por  $u^*$ , na seguinte forma (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984):

$$\int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = 0 \quad (2)$$

Então, é necessário integrar por partes a equação (2), para que:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (3)$$

Para a primeira parte da equação, aplica-se o Teorema da Divergência, então a equação (3), fica como:

$$\int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} u_{,i} u^*_{,i} d\Omega = 0 \quad (4)$$

Onde  $\Gamma$  representa o contorno do domínio  $\Omega$  especificado e  $n_i$  é a normal no contorno. A equação (4) é conhecida como forma integral fraca. Ela também é o ponto de partida para a dedução do Método de Elementos Finitos clássico (BREBBIA e WALKER, 1980).

Essa equação ainda apresenta uma integral no domínio, o que para o MEC não é o que se deseja, portanto integra-se por partes, assim:

$$\int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Omega} (u^*_{,i} u)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (5)$$

Aplica-se então no segundo termo da equação (5) o Teorema da Divergência, logo, tem-se que:

$$\int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*_{,i} u n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (6)$$

Admitindo-se, para efeitos de simplificação da escrita, que:

$$u_{,i} n_i = q \quad (7)$$

$$u^*_{,i} n_i = q^* \quad (8)$$

Aplicando as equações (7) e (8) em (6), chega-se a:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma + \int_{\Omega} u u^*_{,ii} d\Omega = 0 \quad (9)$$

No terceiro termo da equação (9), aplica-se as propriedades de Delta de Dirac, para se chegar, então, na formulação final para um problema estacionário, regido pela equação de Laplace. A denominada equação integral de contorno associada ao problema é dada por:

$$c(\xi)u(\xi) - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = 0 \quad (10)$$

Onde, segundo (BREBBIA e WALKER, 1980),  $c(\xi)$  pode ter os seguintes valores, dependendo da suavidade do contorno:

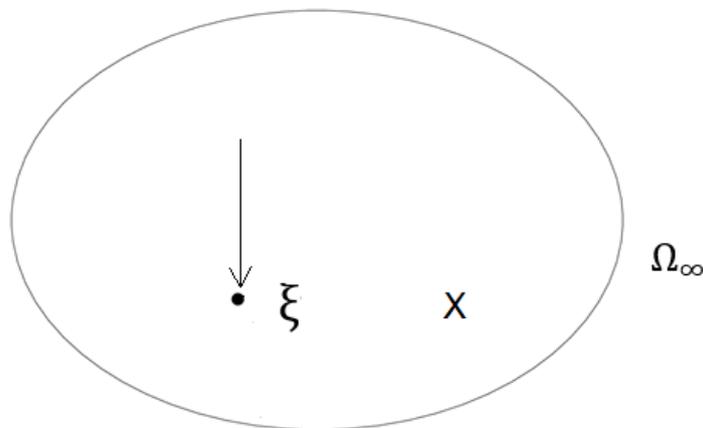
$$c(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in \Omega(X) \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \in \Gamma(X) \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Omega(X) \end{cases} \quad (11)$$

## 2.5. A Solução Fundamental

A utilização de uma solução especial da equação governante, denominada solução fundamental é a razão de muitas das vantagens e propriedades do Método dos Elementos de Contorno.

A solução fundamental pode ser obtida para um domínio infinito, onde a ação externa é concentra em um ponto  $\xi$  do domínio  $\Omega$ , conforme a Figura 6 ilustra.

Figura 6 - O problema fundamental



O problema fundamental estacionário, de qualquer dimensão, pode então ser definido pela equação abaixo, como demonstrado por (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984).

$$u_{,ii}^* = -\Delta(\xi; X) \quad (12)$$

Onde  $\Delta$  é a função Delta de Dirac, que no caso bidimensional, a sua solução fornece:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln [r(\xi; X)] \quad (13)$$

A derivada normal dessa solução fundamental, apresenta o fluxo fundamental, e é expressão então da seguinte forma:

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r(\xi; X)}{\partial n(X)} \quad (14)$$

A variável  $r(\xi; X)$  representa a distância euclidiana entre o ponto fonte  $\xi$  e um ponto genérico  $X$  no domínio.

## 2.6. A interpolação de campo e de forma e os tipos de interpolação

A formulação do Método dos Elementos de contorno exige integrações de função singulares e para este fim, uma das estratégias possíveis para o cálculo das integrais ao longo da superfície de contorno  $\Gamma$  é a divisão da superfície, em elementos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \dots \Gamma_n$  (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984), como demonstrado pela equação abaixo, na qual  $n$  é o número de elementos em que o contorno foi dividido.

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (15)$$

Assim, pode-se descrever a equação (10), da forma abaixo.

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_i} q^* u d\Gamma = 0 \quad (16)$$

Sendo as variáveis  $u$  e  $q$  em cada elemento  $j$  definidas em termos de valores nodais, como apresentado a seguir.

$$u = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \dots \\ u^n \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$q = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n] \begin{Bmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \dots \\ q^n \end{Bmatrix} \quad (18)$$

As funções de interpolação nas equações (17) e (18), são as variáveis  $\phi_i$ , que são expressas em termos de coordenadas adimensionais em cada elemento. De forma que é comum, escrever a variação de forma e de variação de grandezas do problema em termos das funções de interpolação (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984).

A interpolação por meio de forma, pode ser realizada com funções diferenciadas, como por exemplo a de base radial, que tem tido destaque quando aplicada para vários problemas de física, geotécnica, astronáutica, esquadrinamento marítimo e outros problemas (BUHMANN, 2003).

A interpolação de campo pode ser feita utilizando campo constante, linear, quadrática ou até mesmo de ordem  $n$ . Neste trabalho, a interpolação de campo constante é utilizada e possui forma:

$$\phi_k = 1 \quad (19)$$

Sendo que o ponto de interpolação considerado é no centro do elemento.

Existe um procedimento numérico bem conhecido no MEC, que não será aqui apresentado, pois existe abundante literatura a respeito (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Após a discretização, formam-se matrizes  $G$  e  $H$  resultantes respectivamente da integração  $u^*$  e  $q^*$  ao longo dos elementos de contorno, e o sistema matricial que formado por equação algébricas toma a forma:

$$Hu = Gq \quad (20)$$

Onde  $u$  representa um vetor contendo os valores de potencial, para os pontos nodais discretizados no problema;  $q$  representa um vetor contendo os valores da derivada do potencial na direção ao contorno dos pontos nodais discretizados no problema;  $H$  é a matriz contendo os coeficientes de influência  $H_{ik}$ , os quais são a somatória de integrais dos termos  $h_j^k$  com o ponto fonte  $\xi$  posicionado sobre o ponto nodal  $i$ .; e finalmente a matriz  $G$  contém os coeficientes de influência  $G_{ik}$ , os quais são a somatória de integrais dos termos  $g_j^k$  com o ponto fonte  $\xi$  posicionado sobre o ponto nodal  $i$  (BREBBIA e WALKER, 1980).

O cálculo de  $h_j^k$  pode ser realizado através da equação (21) e o cálculo de  $g_j^k$  pode ser realizado através da equação (22).

$$h_j^k = \int_{\Gamma_j} N_k q^*(\xi; X) J_j d\eta \quad (21)$$

$$g_j^k = \int_{\Gamma_j} N_k u^*(\xi; X) J_j d\eta \quad (22)$$

## CAPÍTULO 3 - O MEC EM MEIOS INFINITOS

### 3.1. Conceitos Preliminares

Conforme exposto na introdução deste trabalho, uma possível vantagem do MEC é a possibilidade de lidar de forma natural com problemas contendo domínios infinitos. Podem ser citadas aplicações importantes na análise de perfis de escoamento de fluidos em aerofólios, definição do perfil térmico no entorno de aletas, identificação do potencial de proteção catódica em tubulações submersas e muitas aplicações importantes na área de geotécnica e geofísica. Um trabalho técnico muito interessante foi realizado por pesquisadores da COPPE/CIVIL na identificação da integridade estrutural das galerias escavadas para uma mina subterrânea. O MEC foi usado com muito sucesso, identificando potenciais riscos de ruptura (LACERDA, DA SILVA e LÁZARIS, 2007).

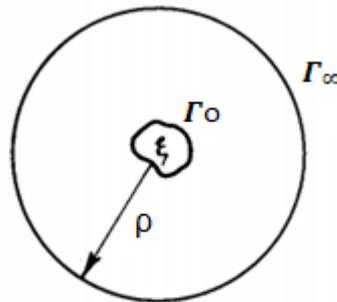
Nestas aplicações específicas, os demais principais métodos numéricos, que são métodos que lidam com a discretização do domínio, se apresentam muito inferiores ao MEC devido a uma série de fatores, a começar com a necessidade de discretização de uma imensa região de pouco interesse. Somam-se a este fator o trabalho exaustivo no manuseio e na computação de dados e operações algébricas, tamanho das matrizes e qualidade dos resultados. Além de mitigar os indesejados efeitos citados, o MEC tem a seu favor recursos matemáticos que os demais métodos não conseguem reproduzir, devido às peculiaridades da solução fundamental (BREBBIA e WALKER, 1980).

Devido à relação entre o decaimento da solução fundamental e o comportamento do potencial, que se torna possível limitar a discretização apenas ao contorno da região de interesse, que pode ser uma cavidade, um orifício ou um bordo de um corpo imerso em um meio infinito. Esta relação é chamada condição de regularidade (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Contudo, antes de mostrá-la, é preciso chegar à equação integral inversa correspondente ao problema de Laplace em meio infinito bidimensional.

### 3.2. A equação integral inversa

A equação integral do MEC para problemas estacionários em regiões infinitas pode ser obtida considerando-se um contorno interno  $\Gamma_0$ , envolvido por um raio  $\rho$  centrado em  $\xi$ , cujo contorno é designado por  $\Gamma_\infty$  e está infinitamente distante do contorno interno, conforme mostra a Figura 7. Nesta dedução, tomou-se apenas um contorno interno; porém, a região de interesse pode comportar duas ou mais cavidades, cujo equacionamento segue o que será mostrado para esta situação mais simples; ou seja, o procedimento apresentado é geral.

Figura 7 - Região delimitada pelo círculo de raio  $\rho$  envolvendo uma cavidade



A equação integral na forma inversa, em princípio, envolve o contorno interno e o contorno infinitamente distante, conforme exposto a seguir:

$$C(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma_0} uq^* d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} qu^* d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_\infty} qu^* d\Gamma_\infty - \int_{\Gamma_\infty} uq^* d\Gamma_\infty \quad (23)$$

Contudo, pode-se simplificar a expressão (23) caso os pontos fonte se situem exclusivamente na região de interesse e a seguinte condição for satisfeita:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} [qu^* - uq^*] d\Gamma_\infty = 0 \quad (24)$$

Esta é a chamada condição de regularidade.

### 3.3. A condição de regularidade

A condição de regularidade pode ser obtida nos casos em que se caracterizar o princípio de Saint-Venant (TIMOSHENKO e GERE, 1994), que afirma que  $u(x)$  e  $q(x)$  tomam o mesmo comportamento da solução fundamental  $u^*(r)$  e da sua derivada direcional  $q^*(r)$ , onde  $r$  é a distância radial do ponto fonte ao ponto analisado, em regiões suficientemente distantes do ponto de aplicação da fonte ou carregamento térmico concentrados. Assim, se o carregamento é aplicado na região de interesse, a um certo distanciamento deste o comportamento do potencial reproduz o comportamento da solução fundamental.

Nestas condições, para os problemas de campo escalar bidimensionais, pode-se verificar que a equação (24) é satisfeita, pois as duas parcelas envolvidas se cancelam mutuamente quando  $\rho \rightarrow \infty$ . A condição de regularidade também é obedecida, mas de modo diferente, quando a sollicitação aplicada for auto equilibrada. Neste caso, pode-se verificar que o decaimento do potencial é mais acentuado, de modo que as parcelas da equação (24) se anulam separadamente (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984).

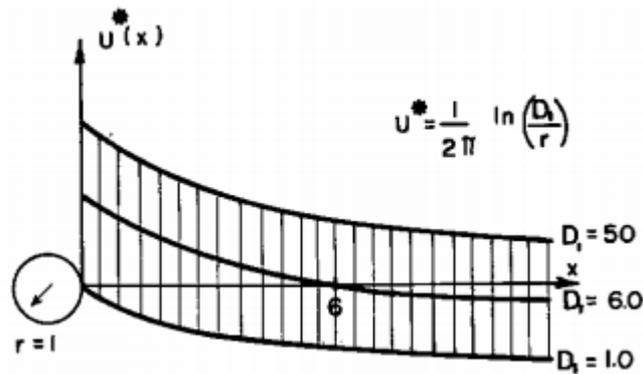
Um único caso de desobediência a condição de regularidade surge quando as condições prescritas em  $\Omega$  forem tais que imponham uma uniformidade no potencial em todo domínio.

A condição de regularidade é estabelecida com base no comportamento da solução fundamental. Esta, no entanto, é uma função da forma:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D_1}{r} \quad (25)$$

Onde os valores de  $D_1$  podem ser tomados arbitrariamente, caracterizando uma solução fundamental particular. A Figura 8 mostra as curvas de  $u^*$  correspondente a distintos valores de  $D_1$ . Nota-se que as curvas são apenas transladadas de acordo com a nova referência.

Figura 8 - Soluções fundamentais particulares (LOEFFLER, 1988)



Desta forma pode-se concluir que existem igualmente inúmeras curvas compatíveis com a representação do perfil do potencial num meio infinito. Essas curvas apresentam o mesmo comportamento logarítmico, mas distinguem-se entre si por uma constante.

Embora sejam curvas afins, diferentemente do que foi demonstrado pela equação (24), a condição de regularidade não define o comportamento do potencial solução, ou seja, a curva solução não é exatamente a curva referente à solução fundamental utilizada. Tal identidade depende das condições de contorno e da geometria da região de interesse, como será demonstrado.

Contudo, é possível estabelecer qualquer novo valor de referência para o potencial solução, sem alterar o valor do fluxo, através da superposição de um campo de temperatura constante.

Isso pode ser demonstrado considerando-se a equação integral de contorno dada pela expressão (23) escrita agora em termos de um novo potencial.

$$c(\xi)u'(\xi) + \int_{\Gamma_0} u'q^*d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} qu^*d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_\infty} qu^*d\Gamma_\infty - \int_{\Gamma_\infty} u'q^*d\Gamma_\infty \quad (26)$$

Onde:

$$u' = u + D_2 \quad (27)$$

E  $D_2$  é uma constante. Para melhor avaliar como fica o novo campo com relação ao anterior é preciso uma referência; assim, considera-se que o campo anterior obedece a condição de regularidade. Substituindo-se a equação (27) na última parcela da expressão (26), tem-se que:

$$c(\xi)u'(\xi) + \int_{\Gamma_0} u'q^* d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} qu^* d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_\infty} (qu^* - uq^*) d\Gamma_\infty - D_2 \int_{\Gamma_\infty} q^* d\Gamma_\infty \quad (28)$$

Mas, pela condição de regularidade,

$$\int_{\Gamma_\infty} (qu^* - uq^*) d\Gamma_\infty = 0 \quad (29)$$

E, devido as características do fluxo fundamental,

$$\int_{\Gamma_\infty} q^* d\Gamma_\infty = -1 \quad (30)$$

Assim a equação (28) se transforma em:

$$c(\xi)u'(\xi) + \int_{\Gamma_0} u'q^* d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} qu^* d\Gamma_0 = -D_2 \quad (31)$$

Logo, se conclui que para alterar o valor da referência do potencial solução, basta somar a equação integral, uma constante correspondente a translação desejada.

### 3.4.Aspectos numéricos relevantes

Nas simulações aqui desenvolvidas, foram utilizados elementos de contorno retilíneos com interpolação constante. Sabidamente, são os mais simples elementos utilizados numa análise bidimensional, nos métodos numéricos (BREBBIA e WALKER, 1980). Contudo, mostram-se eficientes em problemas de potencial. Seu maior problema, evidentemente, consiste na representação de geometrias curvilíneas. Uma parte significativa da imprecisão dos resultados obtidos nas simulações se deve a aproximação por cordas de segmentos circulares.

Para melhor clareza do significado da equação (31) em termos matriciais, sem perda de generalidade, admitem-se agora que todos os fluxos  $\bar{q}$  são prescritos. Neste caso, para a equação (23) gera-se o sistema:

$$Hu = G\bar{q} = p \quad (32)$$

Já para a equação (31) gera-se outro sistema:

$$Hu' = G\bar{q} - D_2 \quad (33)$$

A subtração das duas equações gera:

$$Hu' - Hu = -D_2 \rightarrow u' = u - H^{-1}D_2 = u - s \quad (34)$$

Ressaltando que para domínios infinitos a matriz H não é singular. De fato, para alterar o valor de referência basta somar uma constante associada à translação da curva desejada. Um procedimento similar com o mesmo resultado pode ser deduzido tomando uma nova solução fundamental:

$$\bar{u}^* = u^* + D_2 \quad (35)$$

Pois:

$$u^* = -C \ln r + c \ln E \quad (36)$$

Usando-se elementos constantes, o coeficiente  $c(\xi)$  é igual a meio, mesmo que os domínios sejam abertos. Contudo, a soma dos elementos fora da diagonal deve obedecer a seguinte relação, que é extremamente útil caso sejam usados elementos de contorno de ordem superior:

$$H_{\alpha\alpha} = I - \sum_{q=1}^N H_{\alpha q} \quad (37)$$

Onde N é a dimensão do sistema descrito. Então, em problemas com meios infinitos, caso se deseje calcular a diagonal da matriz H com base nos demais elementos, deve-se fazer, em analogia com os casos de elasticidade, a soma dos elementos daquela linha e subtraí-los da unidade.

A dedução da equação (37) pode ser feita através de um raciocínio parecido como o que foi mostrado anteriormente. Em problemas de domínio fechado, existe a bem conhecida solução de um campo térmico constante, que resulta numa relação entre os elementos de uma linha da matriz e o termo da diagonal. Isto ocorre porque os fluxos neste caso são nulos e a clássica matriz G é eliminada do cômputo (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Contudo, em meios abertos, a suposição de um campo potencial constante – não é a soma de um potencial constante - afeta a condição de regularidade. Tal violação resulta na igualdade expressa pela equação (30).

Assim, se o potencial é constante, o fluxo é conhecido e nulo, de modo que:

$$c(\xi)u'(\xi) + \int_{\Gamma_0} uq^* d\Gamma_0 = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\infty} uq^* d\Gamma_\infty = 1 \quad (38)$$

Conforme já foi visto pela equação (30):

$$Hu = I \quad (39)$$

A expressão anterior permite calcular os termos da diagonal de H como a subtração de todos os coeficientes de uma dada linha do valor um.

Ressalta-se que a matriz H, devido à equação (31), não mais é singular em problemas de domínio infinitos, diferentemente do que ocorre em problemas fechados (BREBBIA e WALKER, 1980).

É preciso também tomar cuidado com certos problemas nos quais o fluxo a ser calculado é infinito. Tal situação é examinada no contexto das simulações numéricas apresentadas na seção seguinte.

### 3.5. Simulações numéricas

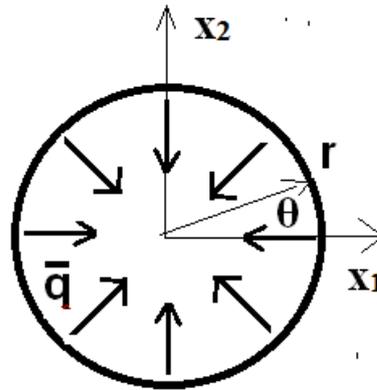
A seguir são simuladas diversas situações bidimensionais onde diferentes condições de contorno são aplicadas. Como poderá ser visto, diferentemente dos problemas de domínio fechado, o comportamento dos problemas em meios infinitos é bastante peculiar. Por exemplo, o comportamento da solução depende não apenas da forma geométrica do vazio ou orifício, mas fortemente das suas dimensões.

Em todas as simulações foram usados elementos lineares com interpolação constante. Com variação entre cinco malhas homogêneas, ou seja, com elementos de contorno os quais possuem as mesmas dimensões foram utilizadas.

### 3.6. Orifício com condições exclusivas de Neumann

Este problema se encontra resolvido na referência (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Trata-se de um orifício circular em meio infinito com prescrição exclusiva de fluxo no contorno, conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 - Orifício circular em meio infinito com fluxo uniformemente aplicado nas bordas



Neste caso, o comportamento da resposta analítica em potencial e fluxo nas regiões situadas no entorno obedece matematicamente à forma da solução fundamental, na forma usualmente utilizada no MEC, com um ajuste na constante associada ao fluxo. Esta solução analítica é deduzida a seguir.

Aqui se usa um valor de fluxo prescrito diferente da referência citada:

$$\bar{q}(r = 1) = -1 \left[ \frac{J}{m^2s} \right] \quad (40)$$

A solução analítica pode ser calculada sabendo-se que a solução geral de um problema governado pela Equação de Laplace com simetria circunferencial tem a forma:

$$u(r) = -C \ln r + D \quad (41)$$

Ou, então:

$$u(r) = -C \ln r + \ln F = C \ln \frac{F}{r} \quad (42)$$

Logo:

$$q = \frac{du}{dn} = -\frac{du}{dr} = -\frac{C}{r} \quad (43)$$

Em  $r = 1$  o fluxo é conhecido. Então:

$$C = 1.0 \quad (44)$$

Integrando, conforme apresenta a equação (43) calcula-se o potencial:

$$u(r) = D - \ln r \quad (45)$$

Em princípio, pode parecer que existem diferentes campos de potencial capazes de gerar o valor de fluxo prescrito. Contudo, não é desta forma que o problema se comporta, pois a geometria do problema também afeta os resultados. Assim, a determinação do valor da constante D se faz considerando a equação integral de contorno, equação (10) vide seção 2.4. Tal equação é repetida a seguir por conveniência:

$$c(\xi)u(\xi) = \int [qu^* - uq^*]d\Gamma = 0 \quad (46)$$

Tomando-se o ponto fonte  $\xi$  no centro do orifício, sabe-se que  $c(\xi)$  é nulo. Então:

$$\int [qu^* - uq^*]d\Gamma = 0 \rightarrow qu^* = uq^* \quad (47)$$

Logo:

$$u(r) = \frac{\bar{q}}{q^*}u^* = \frac{\bar{q}}{1/r} \ln r = \bar{q}r \ln r \quad (48)$$

Então, em  $r=0$  verifica-se pela solução usada que:

$$u(0) = 0 \rightarrow D = 0 \text{ ou } E = 1 \quad (49)$$

Assim, a solução analítica neste caso é dada por:

$$u(r) = -\ln r \quad (50)$$

Assim, neste caso, a solução numérica reproduz exatamente o comportamento da solução fundamental no caso estacionário, a menos do valor  $\frac{\pi}{2}$ .

O fato é que em um problema desta natureza, onde somente há fluxo prescrito, haveria muitas soluções possíveis se o problema fosse relativo a um domínio fechado. Porém, no caso de domínios infinitos, com base no material apresentado na seção 3.3, o problema responde com uma solução definida, que neste caso reproduz o comportamento da função auxiliar utilizada na formulação integral, a solução fundamental.

A seguir são apresentados os resultados das simulações, para malhas contendo 15, 24, 30, 40 e 60 elementos.

A tabela 1 apresenta o resultado de potencial de contorno para diversas malhas. O resultado analítico, com base na Eq. 40, é igual a zero.

**Tabela 1 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann**

Quantidade de elementos	Resultado de potencial no contorno
60	-0.0023
40	-0.0058
30	-0.0105
24	-0.0165
15	-0.0413

Para melhor ilustração, a Figura 10 apresenta graficamente os valores mostrados na tabela anterior.

**Figura 10 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann**



É possível notar uma convergência dos resultados, conforme o aumento da quantidade de elementos, ou seja, refinando a malha, uma melhora em relação a precisão dos resultados obtidos.

Ressalta-se que uma vez que os elementos são retilíneos, há um erro devido à representação da geometria circular através de retas. Tal erro é reduzido naturalmente com o refinamento.

Em seguida, são avaliados os resultados de potencial em pontos distanciados crescentemente do contorno. Foram avaliados pontos com distância radial 2, 5, 10 e 100, para cada malha apresentada anteriormente.

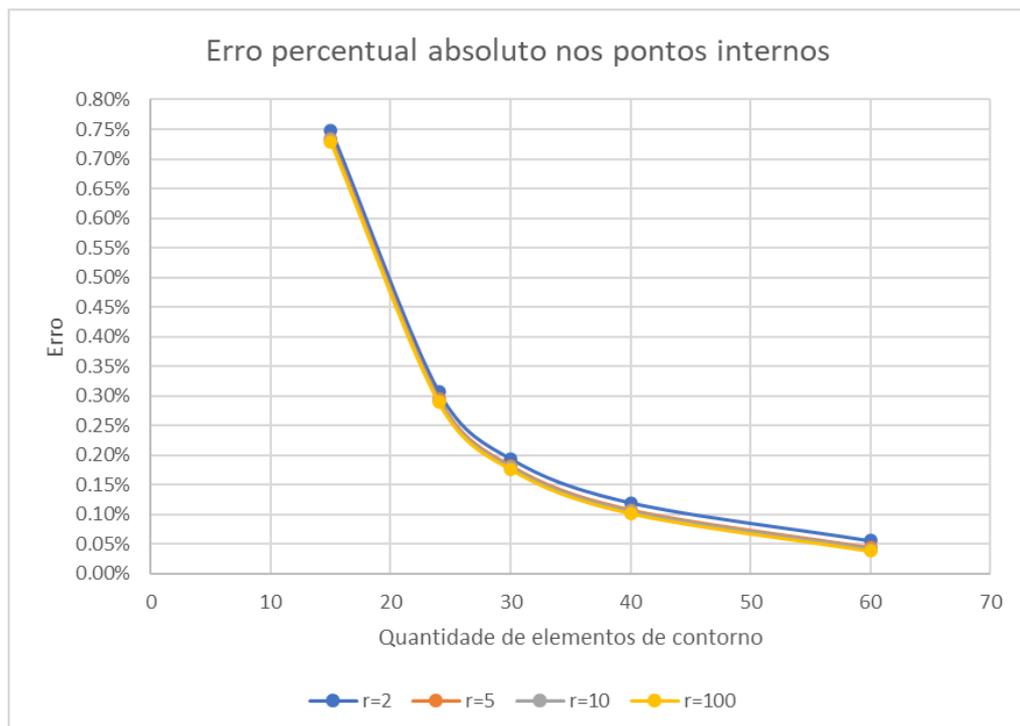
A Tabela 2 apresenta os resultados para as distâncias citadas em cada uma das malhas.

**Tabela 2 - Resultado de potencial a diferentes distâncias para as malhas utilizadas com condições de Neumann**

Quantidade de elementos de contorno	r=2	r=5	r=10	r=100
15	-0.6880	-1.5977	-2.2859	-4.5719
24	-0.6910	-1.6047	-2.2959	-4.5919
30	-0.6918	-1.6065	-2.2985	-4.5971
40	-0.6923	-1.6077	-2.3002	-4.6005
60	-0.6928	-1.6087	-2.3016	-4.6034
<b>Analítico</b>	-0.6931	-1.6094	-2.3026	-4.6052

Na Figura 11 são apresentados os erros percentuais em relação ao resultado esperado, para as diferentes distâncias propostas, de acordo com a quantidade de elementos presentes na malha.

**Figura 11 – Erro percentual de potencial nos pontos internos em relação a resposta esperada com condições de Neumann**



Percebe-se que há uma melhora ainda mais acentuada, quando a malha é refinada. Resultando uma maior precisão quando analisados os pontos internos, que tem extrema importância para este problema, obtendo resultados bem precisos, com uma quantidade de elementos não muito elevada e a uma distância consideravelmente maior do que a do contorno especificado.

### 3.7.Orifício com condição exclusiva de Dirichlet

Inicialmente, se faz um exame analítico da solução do problema, por questão de estratégia. Assim, caso seja mantida as mesmas dimensões do problema anterior, obviamente que a expressão matemática da distribuição de potencial e fluxos deve se manter, ou seja:

$$u(r) = -C \ln r + D \quad (51)$$

$$q(r) = -\frac{C}{r} \quad (52)$$

Porém, neste caso, a condição de contorno estabelecida é dada por:

$$\bar{u}(r = 1) = 1 \quad (53)$$

Então:

$$\bar{u}(r = 1) = -C \ln r + D = D \quad (54)$$

O valor do fluxo independe da condição anterior e é dado no contorno em  $r = 1$  por:

$$q(r) = -C \quad (55)$$

Fisicamente, este problema possui a mesma peculiaridade observada anteriormente.

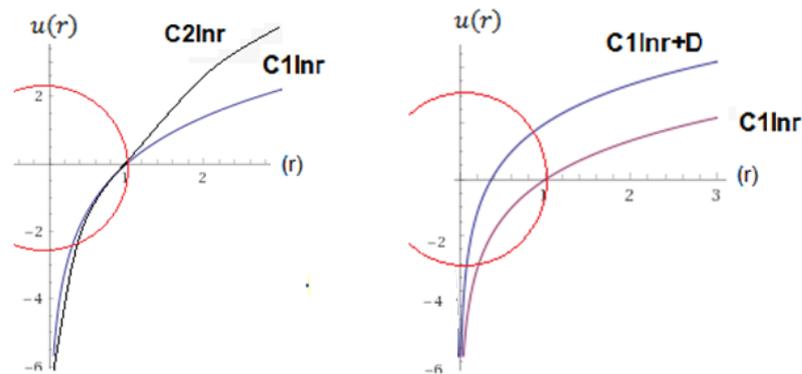
Somente a imposição do potencial prescrito não é capaz de identificar todas as constantes de integração referentes à solução analítica. A constante C precisa da avaliação do valor do fluxo para determinação da solução completa do problema.

Se a solução  $u^*(r)$  é da forma:

$$u^*(r) = -C \ln r + D \quad (56)$$

Na Figura 12 mostra-se o traçado de uma função  $p(r) = C \ln(r) + D$ . É possível notar que a constante  $D$  translada a solução  $u(r)$  verticalmente, enquanto que a inclinação relacionada ao fluxo é definida pela constante  $C$ . Naturalmente, a solução fundamental também é singular em  $r = 0$  e seu gráfico é invertido com relação ao apresentado, pois há um sinal de menos relacionado ao logaritmo.

**Figura 12 - Significado das constantes da solução geral do problema de Laplace com simetria circular**



Contudo, não adianta prescrever arbitrariamente o fluxo. Conforme foi alertado, em problemas de domínio aberto é preciso usar uma metodologia matemática própria para obtenção da solução analítica do problema. Assim sendo, uma vez mais, é preciso situar o ponto fonte no centro do orifício e usar a equação integral:

$$\int [qu^* - uq^*] d\Gamma = 0 \rightarrow qu^* = uq^* \quad (57)$$

Neste caso, o valor do potencial é prescrito, de modo que:

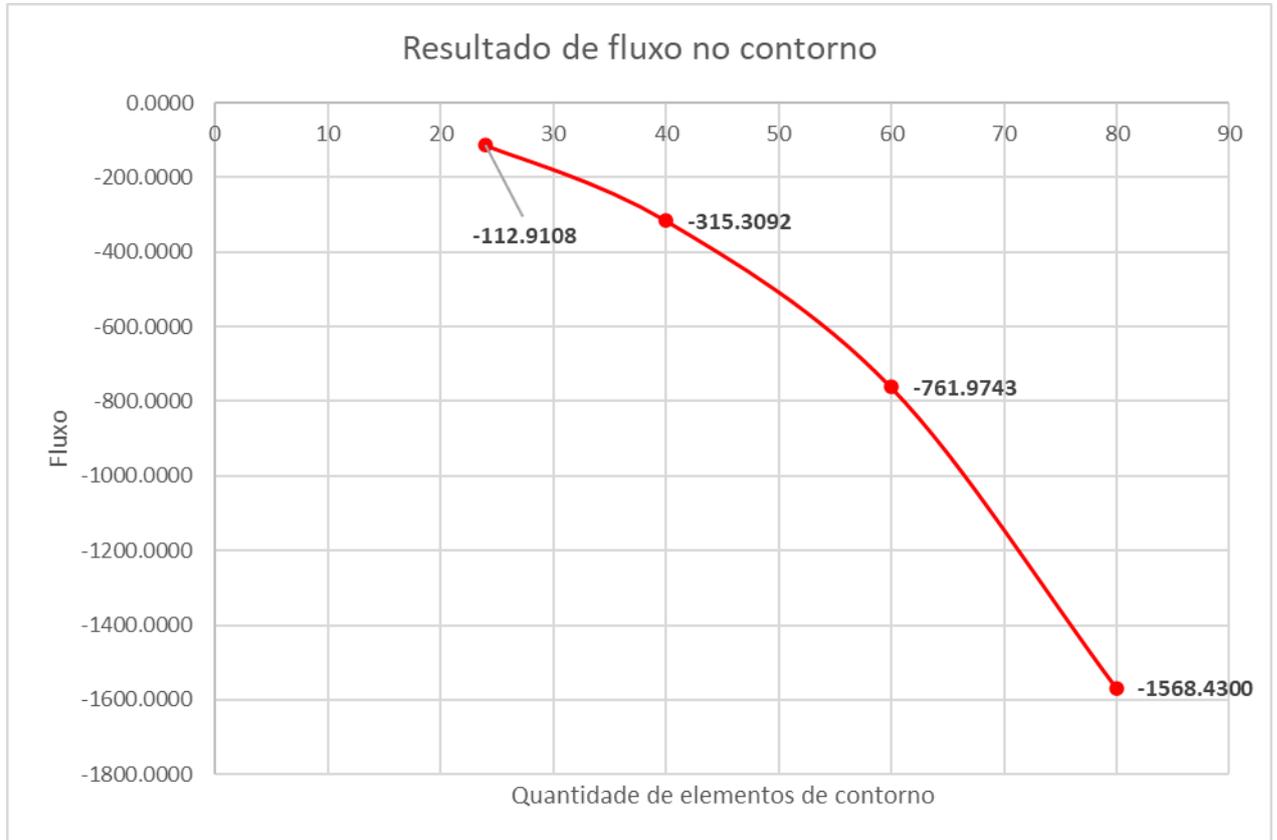
$$qu^* = \bar{u}q^* \rightarrow q = -\frac{\bar{u}q^*}{u^*} = -\frac{(1)}{r \ln(r)} = -\frac{(1)}{1 \ln(1)} = -\frac{1}{0} \quad (58)$$

Logo, neste caso o fluxo é infinito. Em termos numéricos, a solução resultaria singular durante o processamento. A sub-rotina de Gauss apresenta uma particularidade, onde para os casos os quais a quantidade de elementos que discretizam o contorno é menor, aliada também a utilização de elementos de contorno constantes para discretização de um contorno circular, propiciam para que a singularidade deste problema ser omitida.

De fato, nas simulações realizadas, à medida que se efetuou o refinamento, o crescimento acentuado do fluxo indica a ocorrência de singularidade na solução

numérica. A Figura 13 apresenta os resultados de fluxo no contorno, para malhas com 24, 40, 60 e 80 elementos.

Figura 13 - Singularidade para condição exclusiva de Dirichlet



### 3.8. Orifício com condição de Dirichlet e alteração da solução fundamental

Esta simulação visa confirmar os resultados anteriores e mostrar que o uso de uma solução fundamental com uma constante de integração  $D$  diferente vai fazer com que o valor nulo do potencial fundamental não mais ocorra no contorno, cujo raio é unitário. A condição de contorno em  $r = 1$  será a mesma anteriormente aplicada:

$$\bar{u}(r = 1) = 1 \quad (59)$$

Poder-se-ia usar qualquer valor para a solução fundamental. Estrategicamente, será usada uma solução fundamental tal que:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{535.49}{r} = \frac{1}{2\pi} \ln 535.49 - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (60)$$

Ver-se-á que, agora, o fluxo não mais será infinito. Note que neste caso, em  $r = 1$ , tem-se que:

$$u^*(r = 1) = \frac{1}{2\pi} \ln 535.49 = 1 \quad (61)$$

O valor do fluxo fundamental é dado por:

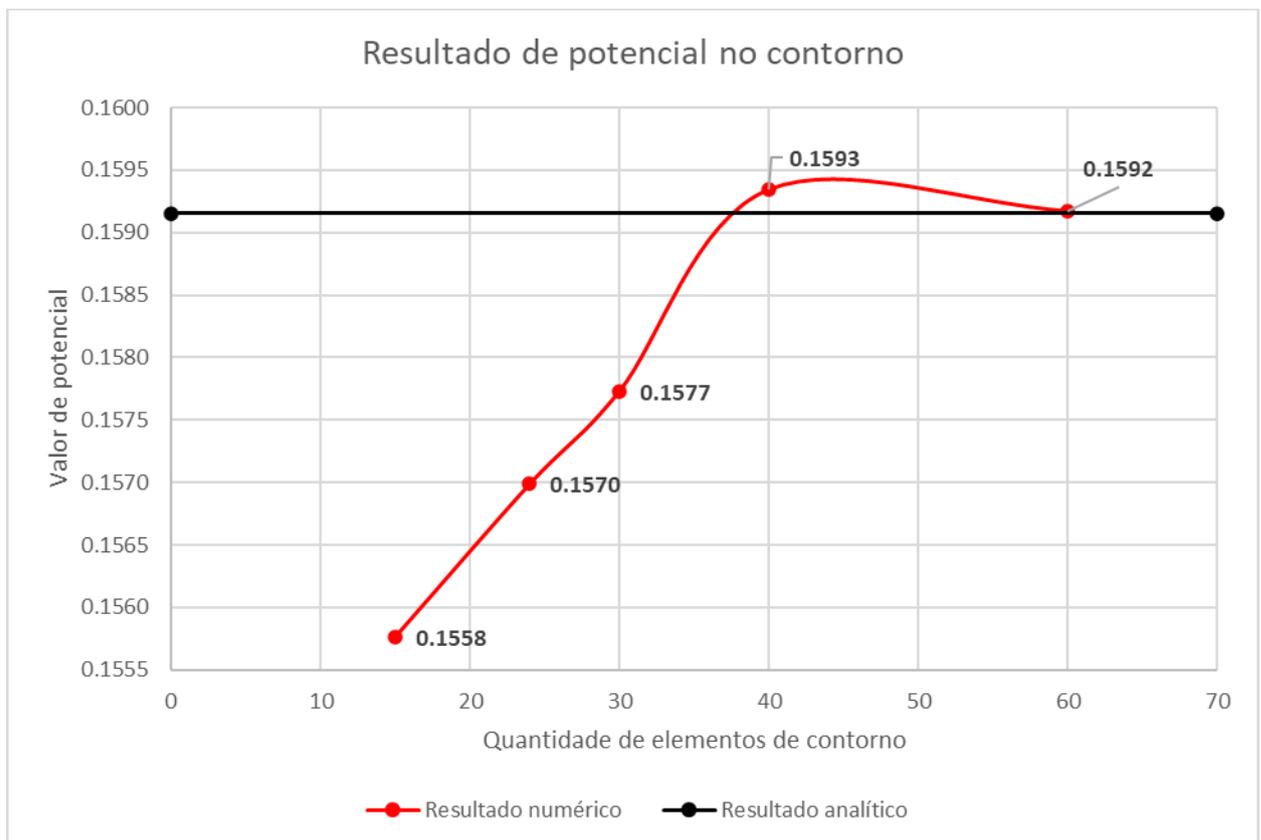
$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \rightarrow q^*(r = 1) = -\frac{1}{2\pi} (-1) = \frac{1}{2\pi} \quad (62)$$

Para se determinar o valor analítico da derivada do potencial será usada a mesma equação integral com o ponto fonte localizado na origem do orifício. Então, o valor do fluxo analítico no contorno é dado por:

$$q = \frac{\bar{u}}{u^*} q^* = 0,159155 \quad (63)$$

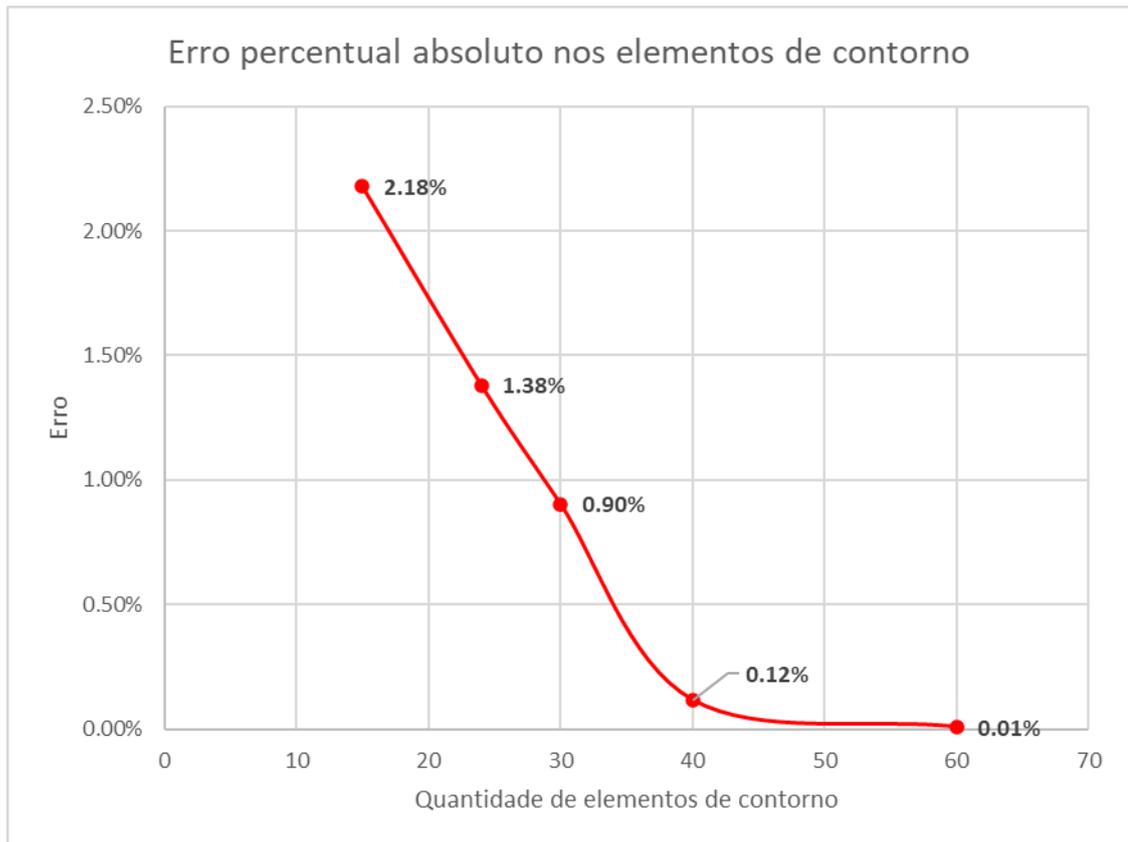
Ressalta-se que a expressão dada pela equação (60) foi implementada no programa, no lugar da fórmula tradicional da solução fundamental. Os resultados numéricos de fluxo estão de acordo com os valores calculados, conforme pode ser observado nos gráficos a seguir.

Figura 14 - Resultado de potencial no contorno para problema com condições de Neumann



São dois tipos de erro a serem minimizados: o erro da função e o erro de discretização; assim, em alguns casos o resultado aproximado pode convergir não monotonicamente, mas com certa flutuação.

**Figura 15 - Erro percentual de potencial no contorno em relação a resposta esperada problema com condições de Neumann**



Os valores analíticos do potencial em pontos próximos do contorno podem ser calculados considerando a expressão da nova solução fundamental, pois que esta foi escolhida de modo a obedecer exatamente às condições de contorno do problema:

$$u^*(r = 2) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{535.49}{2} = 0,8896 \quad (64)$$

$$u^*(r = 10) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{535.49}{10} = 0,6339 \quad (65)$$

Os resultados numéricos apresentam boa concordância com os valores analíticos previamente apresentados.

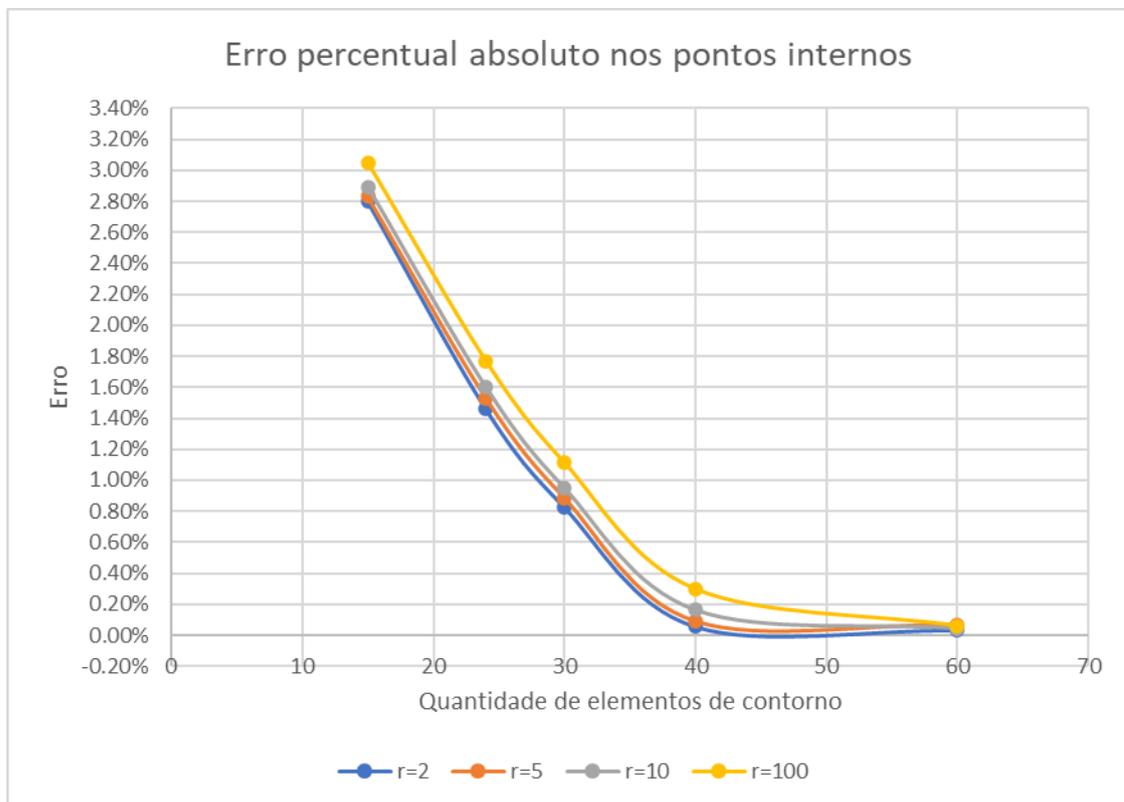
Em seguida, são avaliados os resultados de potencial distanciados crescentemente do contorno. Foram avaliados pontos com distância radial 2, 5, 10 e 100, para cada malha apresentada anteriormente. A Tabela 3 apresenta estes resultados.

**Tabela 3 - Resultado de potencial a diferentes distâncias para as malhas utilizadas com condições de Dirichlet e solução fundamental alterada**

Quantidade de elementos	r=2	r=5	r=10	r=100
15	0.8655	0.7234	0.6157	0.2592
24	0.8769	0.7326	0.6235	0.2624
30	0.8824	0.7373	0.6276	0.2641
40	0.8892	0.7432	0.6325	0.2663
60	0.8894	0.7434	0.6332	0.2669
<b>Analítico</b>	0.8897	0.7438	0.6335	0.2671

Na Figura 16, são apresentados os erros percentuais em relação ao resultado esperado, para as diferentes distâncias propostas, de acordo com a quantidade de elementos presentes na malha.

**Figura 16 – Erro percentual de potencial nos pontos internos com condições de Dirichlet e solução fundamental alterada**



Nota-se que no geral, o refino da malha tende a apresentar resultados mais precisos, porém, o excesso pode gerar problemas numéricos.

Ressalta-se que a solução analítica tem exatamente a forma da solução fundamental porque suas constantes foram ajustadas para tal. Uma vez que o valor prescrito de potencial no contorno foi unitário, a solução fundamental utilizada também fornece o valor unitário em  $r = 1$  (vide equação (59)), o mesmo acontecendo para o fluxo; sendo o problema linear, sua solução é única e, portanto, a solução fundamental  $u^*(r)$  e a expressão do potencial  $u(r)$  coincidem.

No exemplo que se segue não haverá tal coincidência.

### 3.9. Orifício circular com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet

Em um novo teste, o orifício tem sua dimensão aumentada em duas vezes. A condição de contorno e o potencial unitário aplicado uniformemente. A solução fundamental utilizada, ou seja, a função implementada no programa computacional, continuou sendo a mesma anterior, ou seja:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{535.49}{r} \quad (66)$$

O valor do fluxo fundamental  $q^*$  é obtido facilmente por derivação da expressão anterior, ou seja:

$$q^* = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r} (-1) \quad (67)$$

Agora o valor da solução fundamental no contorno é  $u^*(r = 2) = 0,8896$ , diferente do valor prescrito  $\bar{u}(r = 2) = 1$ . Com base no mesmo procedimento, ou seja, tornando o ponto fonte  $\xi$  no centro do orifício, tem-se o valor analítico do fluxo retirado da seguinte igualdade:

$$qu^* = uq^* \quad (68)$$

Com  $r = 2$ , tem-se que:

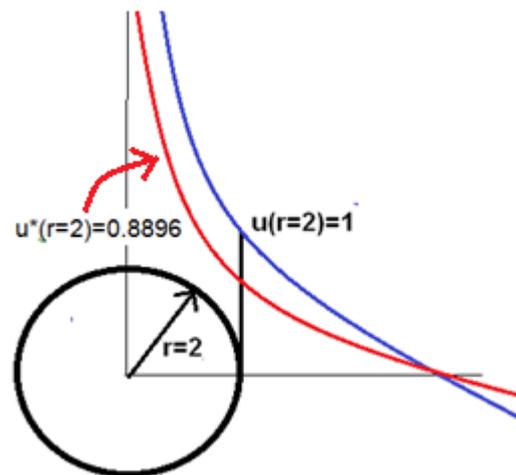
$$q(0,8896) = -1 \left( \frac{1}{2\pi \cdot 2} \right) \quad (69)$$

Logo:

$$q(r = 2) = \frac{-1}{4\pi * 0,8896} = -0,08944 \quad (70)$$

Então, a distribuição do potencial  $u(r)$  e do fluxo  $q(r)$  no interior não mais obedece exatamente às expressões fundamentais  $u^*(r)$  e do fluxo  $q^*(r)$ . Como somente há uma única distribuição para o potencial solução, esta deve ter uma forma correlata à forma da solução fundamental, mas está transladada verticalmente e horizontalmente com relação a esta, conforme a Figura 17 ilustra.

Figura 17 - Esquema ilustrativo da relação entre  $u(r)$  e a solução fundamental  $u^*$



Assim, para o cálculo analítico do potencial e derivada em pontos fora do contorno deve-se usar outro procedimento, ou seja, não mais se pode usar  $u^*$  diretamente.

Voltando-se a questão da expressão de  $u(r)$  e de  $q(r)$ , sabe-se que são da forma:

$$u(r) = C \ln \frac{D}{r} \quad (71)$$

$$q = \frac{C}{r} \quad (72)$$

Primeiramente, avalia-se a constante  $C$  com base no fluxo que se conhece no contorno, em  $r = 2$ . Desta forma:

$$q(r = 2) = 0,0894 = \frac{C}{2} \rightarrow C = -0,1788 \quad (73)$$

O mesmo para  $u(r)$ :

$$u(r) = C \ln \frac{D}{r} = 0,1788 \ln \frac{D}{r} \quad (74)$$

$$u(r = 2) = 0,1788 \ln \frac{D}{2} \rightarrow 5,5928 = \ln \frac{D}{2} \rightarrow D = 537 \quad (75)$$

Logo:

$$u(r) = 0,1788 \ln \frac{537}{r} \text{ ou } u(r) = -0,1788 \ln r + 1,12355 \quad (76)$$

Agora calculam-se os valores analíticos do potencial em pontos afastados do contorno:

$$u(r = 3) = 0,1788 \ln \frac{537}{3} = 0,927 \quad (77)$$

$$u(r = 4) = 0,1788 \ln \frac{537}{4} = 0,8759 \quad (78)$$

$$u(r = 5) = 0,1788 \ln \frac{537}{5} = 0,8361 \quad (79)$$

$$u(r = 10) = 0,1788 \ln \frac{537}{10} = 0,7122 \quad (80)$$

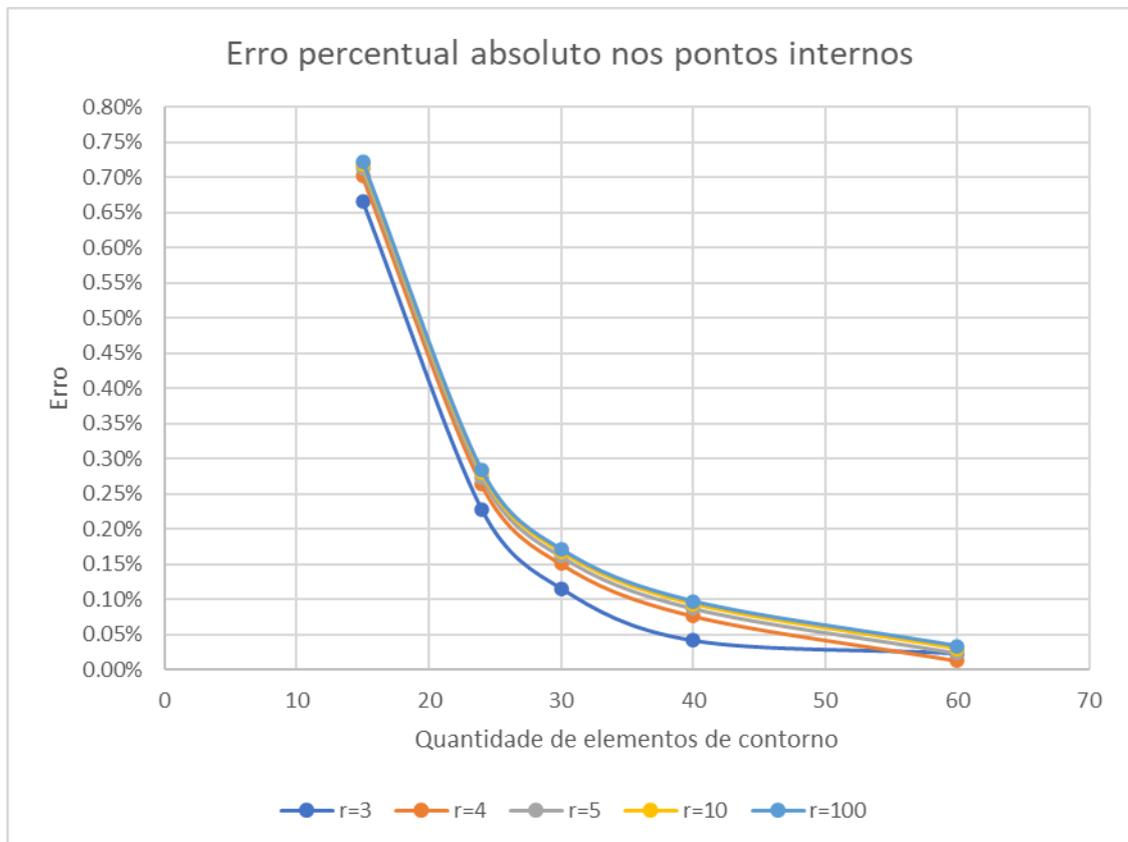
$$u(r = 100) = 0,1788 \ln \frac{537}{100} = 0,30053 \quad (81)$$

Os valores do potencial decrescem à medida que se posicionam mais afastados do contorno carregado. A Tabela 4 e a Figura 18 mostram o valor de potencial e o erro percentual absoluto entre o valor numérico e analítico calculado. Em ambos os casos os resultados são demonstrados também através de uma variação na quantidade de elementos de contorno presentes na malha.

Tabela 4 - Resultado de potencial com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet

Quantidade de elementos de contorno	r=3	r=4	r=5	r=10	r=100
15 elementos	0.9209	0.8698	0.8302	0.7071	0.2984
24 elementos	0.9249	0.8736	0.8338	0.7102	0.2997
30 elementos	0.9259	0.8746	0.8348	0.7110	0.3000
40 elementos	0.9266	0.8752	0.8354	0.7115	0.3002
60 elementos	0.9272	0.8758	0.8359	0.7120	0.3004
Análítico	0.9270	0.8759	0.8361	0.7122	0.3005

Figura 18 - Erro percentual de potencial com solução fundamental alterada, sob condição de Dirichlet



Ressalta-se que o cálculo dos valores de potencial numérico, usando o programa computacional, é feito com base na seguinte equação integral, com o ponto fonte  $\xi$  situado internamente:

$$u(\xi) = \int u(x)q^*(\xi; x)dr - \int q(x)u^*(\xi; x)dr \quad (82)$$

Para melhor avaliar a influência da solução fundamental na solução dos problemas em meio infinito, a seguir, resolve-se o mesmo problema considerando a solução fundamental clássica:

$$u^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (83)$$

Com base nessa solução, o fluxo é calculado por:

$$qu^* = uq^* \rightarrow q \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = \frac{\bar{u}}{2\pi r} \frac{dr}{dn} \quad (84)$$

Então:

$$q = \frac{-1}{2\pi(0.6921)} = -0.72135 \quad (85)$$

A expressão analítica e da forma:

$$u(r) = C1 \ln r + C2 \quad (86)$$

Para determinar as constantes faz-se:

$$q(r) = \frac{C1}{r} \frac{dr}{dn} \rightarrow q(r=2) = -0.72135 = -\frac{C1}{2} \rightarrow C1 = 1,44135 \quad (87)$$

Porém, ainda:

$$u(r=2) = 1 = 1,44135 \ln(2) + C2 \rightarrow C2 = 0 \quad (88)$$

$$u(r) = 1,44135 \ln r \quad (89)$$

Os valores do potencial em pontos afastados podem ser calculados. Resultam em:

$$u(r=3) = 1.58346 \quad (90)$$

$$u(r=4) = 1.9977 \quad (91)$$

$$u(r=5) = 2.3191 \quad (92)$$

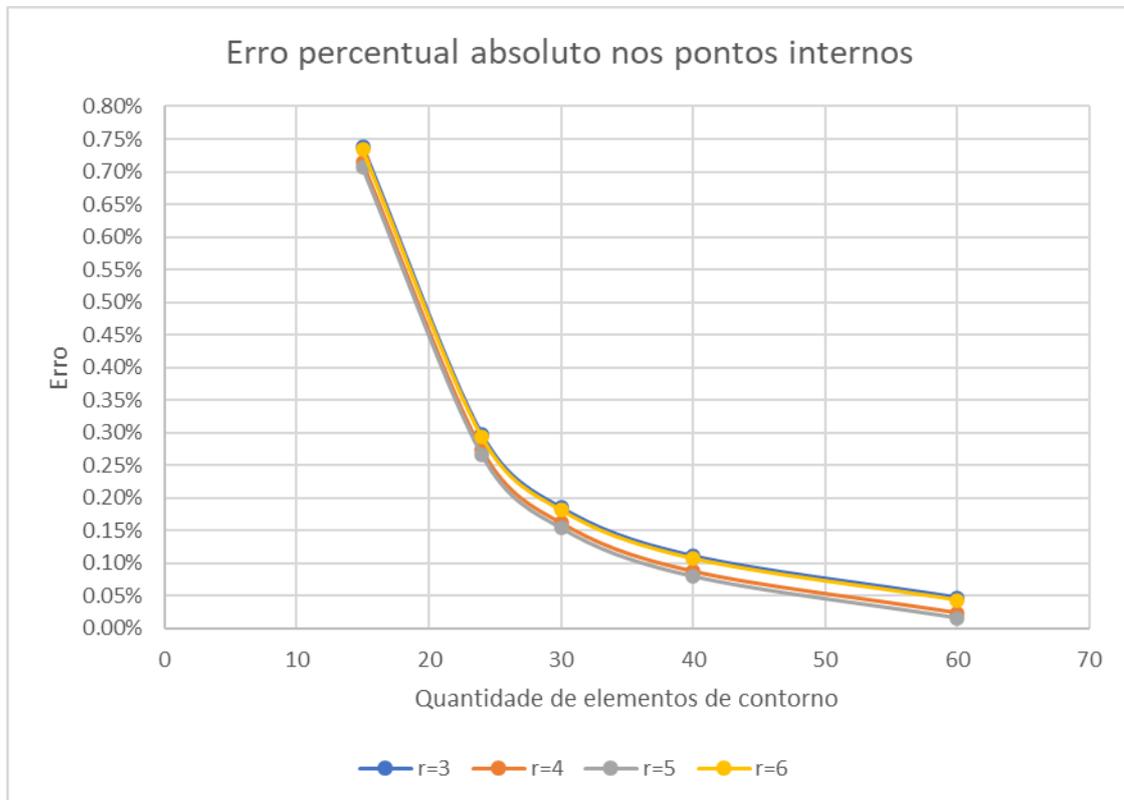
$$u(r=6) = 2.58255 \quad (93)$$

Os potenciais neste caso comportam-se de forma crescente com o afastamento do contorno, enquanto no caso anterior decrescem lentamente. A Tabela 5 e a Figura 19 mostram o valor de potencial e o erro percentual absoluto entre o valor numérico e analítico calculado. Em ambos os casos os resultados são demonstrados também através de uma variação na quantidade de elementos de contorno presentes na malha.

**Tabela 5 - Resultado de potencial com solução fundamental clássica, sob condição de Dirichlet**

Quantidade de elementos de contorno	r=3	r=4	r=5	r=6
15 elementos	1.5719	1.9835	2.3028	2.5637
24 elementos	1.5788	1.9922	2.3129	2.5750
30 elementos	1.5805	1.9945	2.3155	2.5779
40 elementos	1.5817	1.9960	2.3173	2.5798
60 elementos	1.5827	1.9972	2.3187	2.5814
Analítico	1.5835	1.9977	2.3191	2.5826

**Figura 19 - Erro percentual de potencial com solução fundamental clássica, sob condição de Dirichlet**



Pode-se concluir que a forma da solução fundamental altera os resultados destes problemas em que o meio é infinito. Assim, num problema prático, é preciso ter

informação do potencial e do fluxo no contorno para calibrar a solução fundamental e assim poder calcular as grandezas de interesse em outros pontos próximos, situados no interior.

### 3.10. Conclusões Parciais

Os problemas de meio infinito podem ser resolvidos de forma muito ágil e eficiente com o Método dos Elementos de Contorno, pois apenas a região de interesse necessita ser discretizada.

Os casos aqui resolvidos foram bastante simples, pois a geometria foi circular e as condições de contorno foram circunferencialmente simétricas. Com tal simetria, a expressão analítica do potencial e do fluxo no contorno obedece à mesma estrutura matemática da solução fundamental, apenas com constantes de integração distintas. Conforme mostrado, a estrutura matemática da solução do potencial em um problema descrito pela Equação de Laplace com simetria circunferencial é dada por:

$$u(r) = C1 \ln r + C2 \quad (94)$$

As constantes  $C1$  e  $C2$  transladam a curva na direção vertical e também horizontalmente, conforme foi mostrado.

Nas simulações realizadas, pode-se perceber que em certos casos o comportamento da solução do problema seguiu exatamente a forma da solução fundamental, mas isto ocorre apenas diante de certas condições geométricas específicas. Em termos gerais, para determinar a solução do potencial ou fluxo analítico é preciso usar a equação integral, considerando o ponto fonte estrategicamente posicionado no interior do orifício. No caso de orifícios circulares, como os que foram aqui resolvidos, a solução analítica é obtida de modo imediato, pois a descrição do círculo em coordenadas polares é muito simples. Contudo, essa solução é afetada pela forma da solução fundamental, que por sua vez, conforme foi mostrado, pode ser ajustada nas suas constantes de integração.

Vale destacar que em problemas abertos, surge uma diferença matemática com relação aos problemas fechados. Nos casos destes últimos, considerando que a equação diferencial de governo é de segunda ordem e os problemas aqui resolvidos

são unidimensionais - eles somente são dependentes da variável  $r$  – sempre é possível determinar duas condições de contorno, cada uma delas situada numa extremidade do problema. Nos casos abertos não. O orifício fornece apenas uma condição e, mesmo sabendo a estrutura da solução, a outra condição de contorno vem da equação integral de contorno na forma inversa.

Isto contradiz o exposto por (LOEFFLER, 1988), pois o comportamento do potencial solução e sua derivada não são definidos pela condição de regularidade, apresentada anteriormente, na equação (25). A condição suficiente para obediência à condição de regularidade é que a função  $u^*(r)$  seja da forma  $C \ln\left(\frac{E}{r}\right)$ .

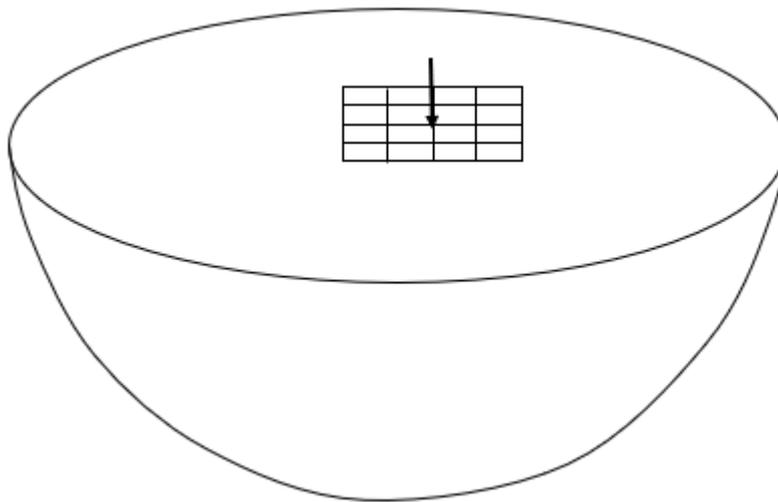
Certamente, em outros casos mais complexos, não há solução analítica disponível. Porém, considerando que o método funciona adequadamente nestes casos mais elementares, denotando convergência para a solução esperada e melhoria da precisão com o refinamento da malha, a expectativa é de que o procedimento numérico também seja efetivo nos casos mais complexos. Esta proposição tem sido aplicada com todos os métodos numéricos, particularmente quando não há uma solução experimental adequada para comparação.

## CAPÍTULO 4 - O MEC EM MEIOS SEMI-INFINITOS

### 4.1. Preliminares

Tal como os problemas de domínio infinito, um problema semi-infinito consiste de um domínio idealizado que possui uma superfície plana única e se estende até o infinito em todas as direções, como mostra a Figura 20 ilustra.

Figura 20 - Espaço semi-infinito



Esse corpo idealizado é usado para indicar que a mudança da variável básica ou primal numa parte de interesse - a região próxima à superfície. A Terra, por exemplo, pode ser considerado um meio semi-infinito na determinação da variação de temperatura perto de sua superfície. Entre muitos outros exemplos, uma parede espessa pode ser modelada como um meio semi-infinito, se tudo o que interessa é a variação de temperatura na região próxima a uma das superfícies, e a outra superfície é muito distante para causar impacto na região de interesse.

Muitas aplicações, algumas delas correlatas as mencionadas como referentes a domínios infinitos, também podem se relacionar aos casos semi-infinitos, como o problema da proteção catódica, por exemplo. Além disso, tomando o exemplo citado anteriormente, em que a superfície da Terra constitui um caso de meio semi-infinito, existem numerosos e importantíssimos casos onde se deseja fazer uma relação de interface entre um sólido e uma estrutura (e também fluido-estrutura). A teoria de

meios semi-infinitos do MEC se aplica com propriedade nestes casos, que incluem a análise sísmica.

Assim como nos problemas totalmente abertos, as técnicas numéricas de domínio como o MEF, o MDF e MVF têm fortes dificuldades na realização de uma modelagem econômica e efetiva. A abordagem destes problemas com o MEC, por outro lado, é natural.

Para auxílio na resolução do problema, alguns métodos podem ser utilizados. Destaca-se aqui duas possíveis abordagens, o Método das Imagens, que será apresentado a seguir e o uso dos Elementos Infinitos (BEER, WATSON e SWOBODA, 1987), que pode ser consultado no ANEXO I – Elementos Infinitos, uma vez que este não será utilizado na solução deste trabalho.

A título de informação, no item seguinte são mostradas as dificuldades que tais problemas apresentam ao MEF, que também poderiam ser aplicadas aos demais métodos de domínio. Assim, a seguir, apresenta-se o problema da simulação da interface com o MEF.

#### **4.2.O método das imagens.**

O Método das Imagens (MDI) é uma ferramenta matemática para resolver equações diferenciais, na qual o domínio da variável básica é estendido pela adição de sua imagem refletida em relação a um plano de simetria. Em decorrência disso, pode-se obedecer automaticamente a certas condições de contorno, facilitando bastante a solução do problema.

O MDI é usado em eletrostática para simplesmente calcular ou visualizar a distribuição do campo elétrico de uma carga nas proximidades de uma superfície condutora. Também pode ser usado em magnetostática para calcular o campo magnético de um ímã que está próximo a uma superfície supercondutora. Sua aplicação também ocorre no estudo da reflexão ou absorção de uma pluma contaminante de um contorno dito impenetrável, sem fluxo. Outra aplicação de grande importância está ligada ao estudo e contenção da propagação do som ao ar livre, onde barreiras acústicas são modeladas como corpos sem espessura e neste caso, sua aplicação no contexto do MEC revela grande adequação e eficiência (JACKSON, 1998).

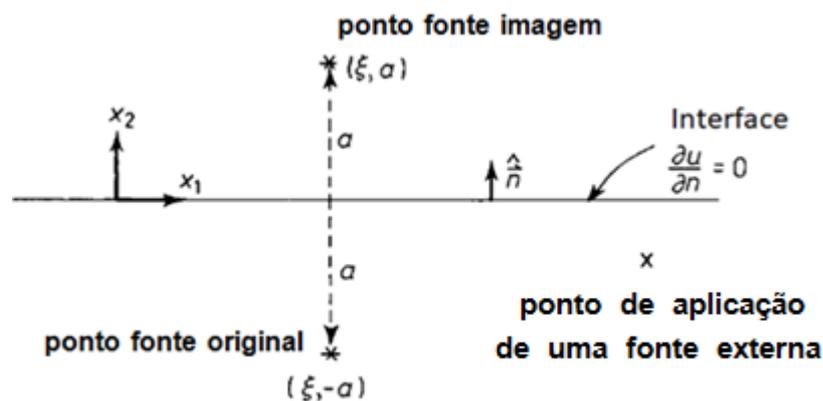
Na literatura referente ao MEC, o Método das Imagens foi apresentado inicialmente no livro de (BREBBIA e WALKER, 1980), abordando problemas de potencial. Posteriormente, outras aplicações escalares e em casos da elasticidade foram publicadas em outras fontes, já citadas (BREBBIA, TELLES e WROBEL, 1984). Há uma relação próxima entre o MDI e as Funções de Green (BAETA, 1988), de forma que a utilização do MDI no MEC pode ser interpretada como técnica para adaptação da solução fundamental clássica, de forma que se possam resolver problemas específicos relativos às regiões semi-infinitas.

Isto acontece porque a solução fundamental para o meio semi-infinito pode ser encontrada adaptando-se a solução clássica para meios fechados, de forma que esta última satisfaça automaticamente a condição de contorno na interface. Deste modo, pode-se dispensar a discretização do semi-plano usando o MEC.

Para se obter a solução fundamental adaptada a partir da ideia do MDI, é necessário considerar as etapas matemáticas que se seguem, que também arrolam considerações físicas sobre o problema.

Considere inicialmente um espaço bidimensional conforme apresentado na Figura 21 a seguir:

Figura 21 – Identificação de pontos fonte e externos no Método das Imagens (BREBBIA e WALKER, 1980)



Neste método, considera-se a aplicação de um ponto fonte real (original), situada no plano  $(x_1; x_2)$ , com coordenadas  $(\xi; a)$  e procura-se entender o que acontece em outro ponto situado simetricamente a  $x_1$ , eixo que é definido pela interface. Este ponto, chamado de fonte imagem, está posicionado exatamente a uma distância  $2a$  da fonte original.

Caso se exija a condição de reflexão em  $x_2=0$ , o campo primal ou potencial  $mu^*$  produzido pela fonte  $m$  aplicada em  $(\xi; a)$  será acompanhado de um efeito similar produzido pela fonte imagem  $m'$  situada na região refletida. Naturalmente, o valor de  $m'$  depende do tipo de condição de contorno imposto na interface. Para identificá-la, inicialmente considera-se a condição de reflexão ou simetria física do potencial.

Como a interface está definida ao longo do eixo  $x_1$  e o sentido da normal está no mesmo sentido de  $x_2$ , isto implica que, como condição de contorno de reflexão é:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad (95)$$

Desta forma, o campo  $mu^*$  que descreve onde a fonte de força  $m$  está sendo aplicada, será refletido em algum ponto em  $x_2 = 0$ . Logo, a reflexão de  $mu^*$  resultará em  $m'u^*$ .

Dessa forma, seguindo a mesma ideia das Funções de Green, o campo potencial total pode ser escrito pela soma do campo original e sua reflexão, da seguinte forma:

$$u(x_1, x_2) = mu^*(x_1, x_2; \xi_1, -a) + m'u^*(x_1, x_2; \xi_1, a) \quad (96)$$

Fazendo-se a imposição da condição de contorno (95) na Eq. (96), tem-se que:

$$m \frac{\partial u^*(x_1, 0; \xi_1, -a)}{\partial x_2} + m' \frac{\partial u^*(x_1, 0; \xi_1, -a)}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad (97)$$

Considerando um problema bidimensional, a equação (97) pode ser reescrita considerando a expressão da solução fundamental clássica:

$$m \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \ln \sqrt{x_1^2 + (x_2 - a)^2} \right] + m' \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \ln \sqrt{x_1^2 + (x_2 + a)^2} \right] = 0 \quad (98)$$

Onde  $x_2 = 0 \forall x_1$ .

Sabe-se pelo cálculo que:

$$\frac{d}{dx} \left[ \ln (x + a)^{1/2} \right] = \frac{d}{dx} \ln[p(x)] = \frac{1}{p(x)} \frac{dp(x)}{dx} \quad (99)$$

Então:

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \ln [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2]^{1/2} \right] = \frac{(x_2 - a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2]} \quad (100)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} [\ln [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2]^{1/2}] = \frac{(x_2 + a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2]} \quad (101)$$

Assim sendo, com base na Eq. 81:

$$\frac{m'(x_2 - a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2]} + \frac{m(x_2 + a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2]} = 0 \quad (102)$$

A equação anterior vale em qualquer parte; contudo, em particular no semiplano, tem-se  $x_2 = 0$ . Logo,

$$-\frac{m'(a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (-a)^2]} + \frac{m(a)}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (-a)^2]} = 0 \quad (103)$$

Ou seja,  $m = m'$ . Deste modo, o potencial total é descrito como:

$$u(x_1, x_2) = m \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2} \right] + m \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2} \right] \quad (104)$$

Usando as propriedades dos logaritmos:

$$u(x_1, x_2) = m \ln \left\{ \sqrt{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2][(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2]} \right\} \quad (105)$$

Dessa forma, por analogia, a solução fundamental, para o caso bidimensional da equação de Laplace para um semi-plano é:

$$\begin{aligned} u^*_s &= m[u^*(x_1, x_2; \xi_1, -a) + u^*(x_1, x_2; \xi_1, a)] \\ &= m[\Delta(x_1, x_2; \xi_1, -a) + \Delta(x_1, x_2; \xi_1, +a)] \end{aligned} \quad (106)$$

Ou melhor:

$$u^*_s = \frac{1}{2\pi} \ln [r_1(x_1; a)] + \frac{1}{2\pi} \ln [r_2(x_1; -a)] = \frac{1}{2\pi} \ln [r_1(x_1; a)r_2(x_1; -a)] \quad (107)$$

Esta solução fundamental é usada no MEC para definir a condição de reflexão no semiplano, ou seja, a condição de derivada direcional nula na interface.

Abre-se aqui um parêntesis para ressaltar que se pode conceber uma condição de contorno diferente na interface, ou seja, a condição de potencial nulo. É preciso impor que  $u=0$  em  $x_2 = 0$ . Assim sendo, tem-se:

$$u(x_1, x_2) = m \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2} \right] + m' \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2} \right] = 0 \quad (108)$$

Agora tem-se:

$$m \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - a)^2} \right] = -m' \left[ \ln \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 + a)^2} \right] \quad (109)$$

O que resulta em:

$$m = -m' \quad (110)$$

Assim, resulta que:

$$u_s^* = \frac{1}{2\pi} \ln \left\{ \frac{[x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2}}{[x_1^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2}} \right\} \quad (111)$$

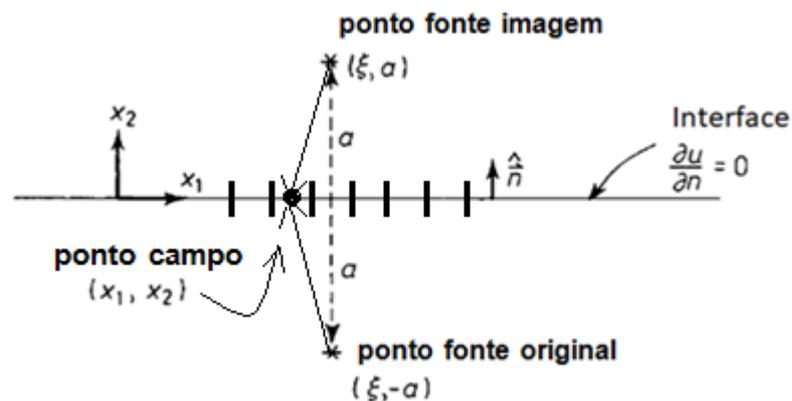
É preciso voltar à condição de reflexão, pois esta é muito mais útil às aplicações práticas do MEC.

De posse da solução fundamental do semiplano, equação (111), é preciso derivá-la para obter o fluxo fundamental. Percebe-se que esta é uma operação simples, da qual resulta que:

$$q_s^* = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_1(x_1; a)} - \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r_2(x_1; -a)} \quad (112)$$

Ressalta-se que a equação (112) os valores de  $r_1$  e  $r_2$  tem seu significado bem definidos. São distâncias dos pontos fonte imagem e original aos pontos campo. Em casos em que a interface é retilínea e não haja fontes externas, estas expressões do fluxo fundamental se anulam na interface, se os pontos campo são situados ao longo desta, conforme mostra a Figura 22:

Figura 22 - Pontos campo no método das imagens (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada

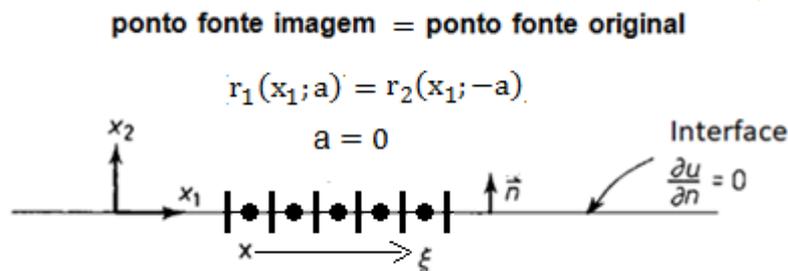


Percebe-se que nesta condição as distâncias  $r_1$  e  $r_2$  são iguais; mas pelos pontos estarem situados simetricamente ao semiplano, as expressões de  $q^*$ , embora se

somem, acabam se anulando devido ao sinal oposto da normal ser diferente em cada caso. Tal situação acontece na maior parte das aplicações em problemas de eletromagnetismo, área está em que o MDI é extensamente utilizado.

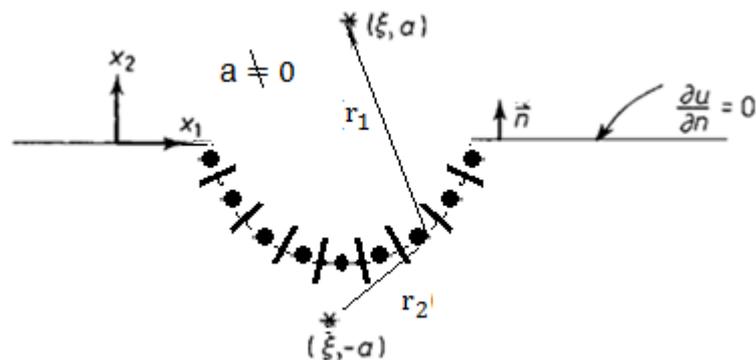
O valor de  $q^*$  também se anula no caso em que os pontos fonte e campo estão sobre a interface, conforme mostrado na figura a seguir:

Figura 23 - Ponto fonte imagem e ponto fonte original (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada



Situação bem distinta acontece se há alguma irregularidade no semiplano, pois neste caso  $r_1$  é diferente de  $r_2$  e, conseqüentemente,  $q^*$  não se anula no contorno curvo:

Figura 24 - Ponto fonte original e na imagem com irregularidade no semiplano (BREBBIA e WALKER, 1980) - Adaptada



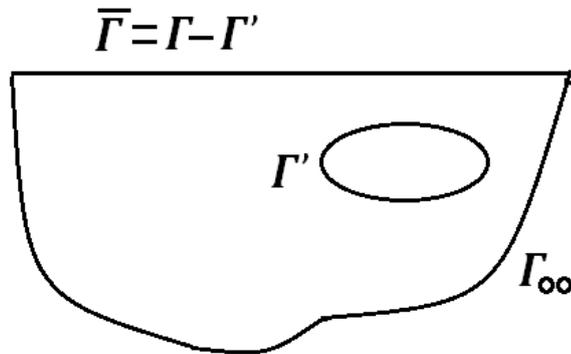
#### 4.3.A equação integral do MEC para meios semi-infinitos

A equação integral do MEC estudada para os meios infinitos se mantém no modelo referente aos meios semi-infinitos, incluindo as condições de regularidade, que são obedecidas. Em outras palavras, a solução fundamental do semi-espaço também garante a condição de que tudo o que estiver infinitamente distante pode ser

desprezado em razão do decaimento de  $u^*$  e  $q^*$ . Contudo, há aspectos importantes quando se obtém a solução fundamental modificada pelo MDI.

Primeiramente, considere o meio semi-infinito conforme apresentado na Figura 25.

Figura 25 - Meio semi-infinito



Em muitos casos, a região de interesse não é a superfície definida pelo semiplano e sim uma região interna  $\Gamma'$ , como ocorre nos casos de análise de galerias escavadas numa mina em pouca profundidade. Então, tanto o contorno  $\Gamma'$  quanto o contorno  $\bar{\Gamma}$  podem ser carregados.

A equação integral do MEC neste caso fica:

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma = c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma'} q^* u d\Gamma = 0 \quad (113)$$

Pois:

$$\int_{\Gamma} q^* u d\Gamma = \int_{\Gamma'} q^* u d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} q^* u d\Gamma \quad (114)$$

Porém,  $q^*$  é nulo na interface plana, ou seja:

$$\int_{\bar{\Gamma}} q^* u d\Gamma = 0 \quad (115)$$

Assim, conseqüentemente, quaisquer condições de Dirichlet não são aplicáveis em  $\bar{\Gamma}$ . O mais importante, contudo, é que quaisquer partes do contorno onde as condições de Neumann são nulas não precisam ser discretizadas, pois a solução fundamental se encarrega de eliminá-las do modelo. Logo, apenas as partes do contorno do semiplano que estiverem sob as condições de fluxo não nulo precisam ser discretizadas. O restante já está embutido na formulação matemática.

A singularidade nos argumentos da solução fundamental e sua derivada normal no caso de coincidência entre os pontos fonte e campo também não são problema. São resolvidos do mesmo modo que no MEC clássico para meios fechados. No caso de  $u^*$  é uma singularidade logarítmica, que pode ser integrada no sentido usual. Seu integrando é impróprio, mas como se trata de uma singularidade fraca, este é integrável. A singularidade em  $q^*$  não existe, pois, a própria solução fundamental foi gerada com base na anulação da sua derivada na interface.

O procedimento padrão do MEC se aplica a estes problemas, gerando após a discretização uma forma matricial clássica para o caso dos pontos campo estarem situados numa parte curva da interface, ou seja:

$$[H](U) = [G](Q) \quad (116)$$

Na equação anterior, U e Q são matrizes linha de potencial e o fluxo, contendo valores nodais conhecidos e também valores a serem calculados. G e H são matrizes provenientes das integrais de ponderação para o potencial e fluxo, respectivamente. O mesmo acontece se existem pontos campo e cargas em  $\Gamma'$ , ou seja, numa parte interna qualquer, próxima da interface. Neste caso também a quantidade de pontos fonte deve ser igual a quantidade de pontos campo no contorno reto.

No caso apenas de aplicações com contornos retos e determinação de potenciais ou fluxos fora da interface, as integrais contendo  $q^*$  se anulam – e o sistema fica na forma:

$$[I](U(\xi)) = [G](Q) \quad (117)$$

Na equação anterior a matriz I é a matriz identidade. Neste caso o coeficiente  $c(\xi)$  é determinado automaticamente pela forma da solução fundamental, que aparentemente se degeneraria no dobro da solução fundamental clássica; mas um ponto fonte está no interior ( $c(\xi) = 1$ ) e o outro fora da região ( $c(\xi) = 0$ ).

Ressalta-se que a obtenção de valores do potencial na interface acontece sem a necessidade de resolver qualquer sistema de equações, o que é uma enorme vantagem computacional. Obviamente, o mesmo vale para o cálculo dos valores do potencial ou fluxo, caso se queira, em pontos situados no interior do domínio semi-infinito.

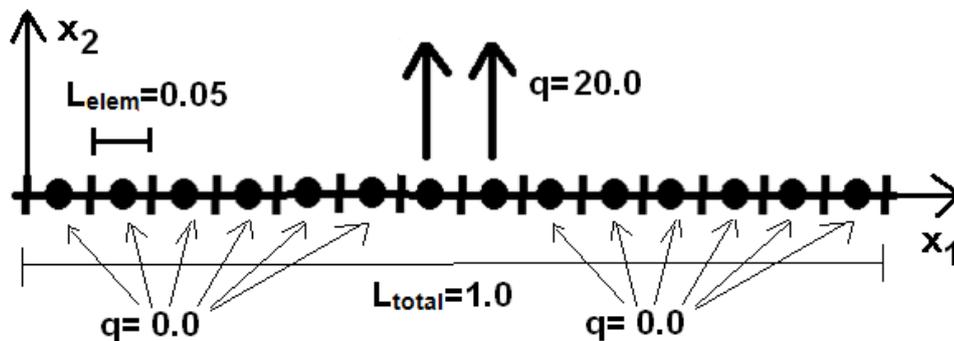
Para evitar um excesso de abstração, as particularidades citadas são examinadas com minúcia na solução de alguns problemas específicos, mostrados a seguir.

#### 4.4. Simulações Numéricas em meios semi-infinitos

##### 4.4.1 Exemplo 1: Carga concentrada aplicada numa superfície reta

Neste exemplo, num trecho bastante reduzido de uma interface retilínea, aplica-se um fluxo constante, conforme mostra a Figura 26.

Figura 26 - Carga quase concentrada aplicada numa superfície reta



Buscou-se concentrar ao máximo o fluxo num setor limitado. Ressalta-se que os elementos de contorno são constantes e dessa forma o carregamento aplicado não se estende aos elementos vizinhos, cuja condição prescrita é fluxo nulo.

O interesse aqui é reproduzir o problema fundamental. É possível reduzir ainda mais o intervalo, considerando apenas um elemento, mas do modo apresentado já será possível perceber que a solução deste caso se aproxima do comportamento dado pela equação (107), ajustado para um valor do fluxo que não é unitário, é igual a 20.

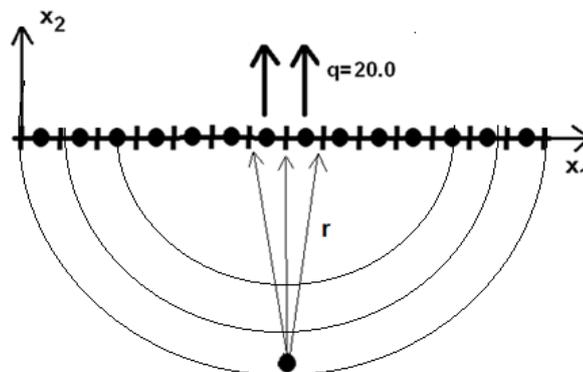
Os resultados de temperatura no contorno são apresentados na Tabela 6 a seguir:

Tabela 6 - Temperatura no contorno - Exemplo 1

$x_1$	$x_2$	Potencial
0.025000	0.000000	-0.475105
0.075000	0.000000	-0.546209
0.125000	0.000000	-0.626312
0.175000	0.000000	-0.718046
0.225000	0.000000	-0.825409
0.275000	0.000000	-0.954936
0.325000	0.000000	-1.118491
0.375000	0.000000	-1.341674
0.425000	0.000000	-1.704284
0.475000	0.000000	-2.443571
0.525000	0.000000	-2.443571
0.575000	0.000000	-1.704284
0.625000	0.000000	1.341674
0.675000	0.000000	-1.118491
0.725000	0.000000	-0.954936
0.775000	0.000000	-0.825409
0.825000	0.000000	-0.718046
0.875000	0.000000	-0.626312
0.925000	0.000000	-0.546209
0.975000	0.000000	-0.475105

Se o fluxo fosse efetivamente singular, o valor do potencial seria infinito. A tática aqui empregada para avaliar estes resultados, é calcular os valores do potencial em pontos internos, ligeiramente afastados do contorno e compará-los com o contorno. A Figura 27 ilustra o procedimento, onde  $r$  representa a distância radial do ponto ao contorno:

Figura 27 - Comparação entre os pontos internos e o contorno



Na Tabela 7 a seguir são mostrados os valores em pontos que estão equidistantes dos nós de contorno, que já foram calculados. Comparando-os, pode-se perceber que

são valores bem próximos; um erro maior observa-se no valor referente ao último nó, a partir do qual não há mais discretização. Além disso, sabe-se que os valores obtidos recursivamente são mais precisos do que os valores de contorno (FREITAS e LOEFFLER, 2016).

**Tabela 7 – Pontos equidistantes dos nós de contorno**

$x_1$	$x_2$	Potencial interno	Valor obtido no contorno
0.500000	-0.175000	-1.101152	-1.118491
0.500000	-0.375000	-0.622539	-0.626312
0.500000	-0.500000	-0.440214	-0.475105

Na Tabela 8 a seguir, são apresentados os valores, situados em outros pontos internos, mais afastados.

**Tabela 8 – Pontos internos mais afastados**

$x_1$	$x_2$	Potencial interno	Potencial analítico
0.500000	0.500000	-0.440214	-0.441270
0.500000	1.000000	0.000265	0.000000
0.500000	2.000000	0.441338	0.441270
0.500000	5.000000	1.024611	1.024600

Nestes pontos, os valores ditos analíticos foram calculados considerando que a partir de uma distância razoável da superfície livre, o raio vetor  $r$  varia pouco, uma vez que o setor carregado é bastante restrito e erros de integração são pouco importantes (vide Figura 27 considerando um valor de  $r$  maior). O esquema de cálculo do valor analítico é mostrado a seguir:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} q(x)u^*d\Gamma = \frac{\bar{q}}{2\pi} \ln(r^2) \int_{0.45}^{0.55} dx_1 = \frac{20x_2}{2\pi} \ln(r) (0.1) = \frac{2.0}{\pi} \ln(r) \quad (118)$$

Uma atenção deve ser tomada caso os pontos tenham coordenadas negativas, ou seja, se tais pontos estão no interior do semiplano, pois este sinal deve ser levado em conta na expressão anterior.

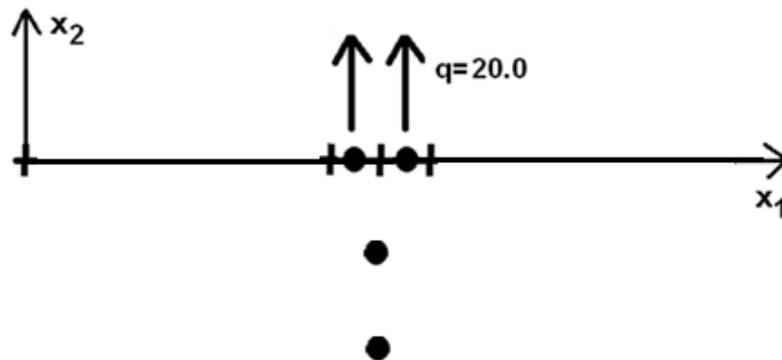
Pode-se perceber que a precisão do cálculo para o valor do raio médio  $r = 0.5$  é menor do que para o raio médio  $r = 2$ , pois no primeiro caso o ponto fonte está muito próximo dos pontos de integração. O valor analítico também não é exato e, na realidade, é um procedimento similar ao que é feito internamente no programa do MEC.

Em síntese, a solução deste exemplo mostra que o comportamento do potencial segue o comportamento da solução fundamental, adaptada ao valor do fluxo imposto. Ressalta-se que nem sempre é possível determinar o valor deste potencial analítico para comparação. Além disso, o modus operandi do MEC associado ao MDI privilegia o cálculo dos potenciais no contorno. Para ilustrar isso, resolve-se o mesmo problema, mas com a malha mais reduzida, pois para a determinação do potencial interno apenas a região carregada foi efetivamente usada.

#### 4.4.2 Exemplo 2: Carga concentrada aplicada com limitação da discretização

Conforme se pode observar na Figura 28, apenas o contorno carregado com fluxo não nulo foi discretizado. Os valores de temperatura vão se restringir apenas aos dois elementos de contorno.

Figura 28 - Carga quase concentrada aplicada com limitação da discretização



Pode-se perceber que os resultados do potencial foram exatamente os mesmos obtidos anteriormente, conforme se poder observar na Tabela 9. O mesmo com relação aos valores em pontos internos, pode ser observado na Tabela 10.

Tabela 9 - Potencial no contorno - Exemplo 2

$x_1$	$x_2$	Potencial no contorno
0.475000	0.000000	-2.443571
0.525000	0.000000	-2.443571

Tabela 10 - Potencial interno – Exemplo 2

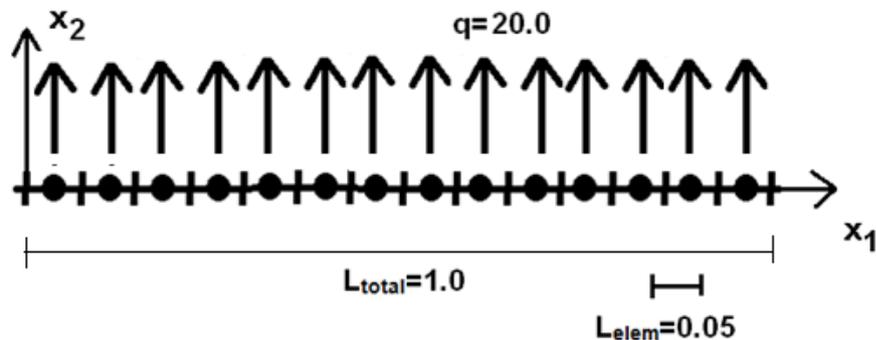
$x_1$	$x_2$	Potencial interno
0.500000	-1.000000	0.000265
0.500000	-2.000000	0.441338
0.500000	-5.000000	1.024611

Assim conclui-se que a discretização na interface é efetivamente desnecessária onde o fluxo for nulo. Caso se deseje o valor dos potenciais, estes podem ser calculados através de pontos fonte internos. Porém, isto não vale para qualquer problema. É o que pode ser visto no problema seguinte.

#### 4.4.3 Exemplo 3: Carga distribuída aplicada numa superfície reta

Neste exemplo, a carga aplicada sobre a interface é uniformemente distribuída. Como a Figura 29 ilustra.

Figura 29 - a carga aplicada sobre a interface é uniformemente distribuída



Os valores calculados no contorno são mostrados na Tabela 11 a seguir. Os potenciais são simétricos e se reduzem da parte central para as extremidades. Na Tabela 12, são mostrados os valores calculados em pontos internos. Todos estes pontos interiores foram escolhidos arbitrariamente para que sua posição coincida com o eixo de simetria vertical. Porém, agora os resultados são diferentes para pontos fonte situados a uma certa distância radial. Serão iguais ao valor da solução fundamental apenas a uma grande distância do carregamento, como estabelece a condição de regularidade.

Tabela 11 – Potencial no contorno – Exemplo 3

$x_1$	$x_2$	Potencial
0.025000	0.000000	-7.093536
0.075000	0.000000	-8.045139
0.125000	0.000000	-8.747875
0.175000	0.000000	-9.301457
0.225000	0.000000	-9.743511
0.275000	0.000000	-10.093680
0.325000	0.000000	-10.363690
0.375000	0.000000	-10.560930
0.425000	0.000000	-10.690110
0.475000	0.000000	-10.754040
0.525000	0.000000	-10.754040
0.575000	0.000000	-10.690110
0.625000	0.000000	-10.560930
0.675000	0.000000	-10.363690
0.725000	0.000000	-10.093680
0.775000	0.000000	-9.743511
0.825000	0.000000	-9.301457
0.875000	0.000000	-8.747875
0.925000	0.000000	-8.045139
0.975000	0.000000	-7.093536

Pode-se perceber a continuidade dos valores do potencial a partir do valor calculado no centro da interface, igual -10.754 e os valores calculados no eixo vertical de simetria, a partir das coordenadas (0.5,0.05), (0.5,0.07) (0.5,0.1) e assim sucessivamente. O potencial se reduz gradativamente, conforme mostra a tabela para o potencial interno. A partir de um determinado ponto, troca de sinal.

Tabela 12 - Potencial interno - Exemplo 3

$x_1$	$x_2$	Potencial interno
0.500000	-0.050000	-9.810687
0.500000	-0.070000	-9.441095
0.500000	-0.100000	-8.905398
0.500000	-0.175000	-7.661245
0.500000	-0.200000	-7.275426
0.500000	-0.300000	-5.864406
0.500000	-0.375000	-4.930826
0.500000	-0.500000	-3.572554
0.500000	-1.000000	0.247435
0.500000	-2.000000	4.477819
0.500000	-5.000000	10.256580

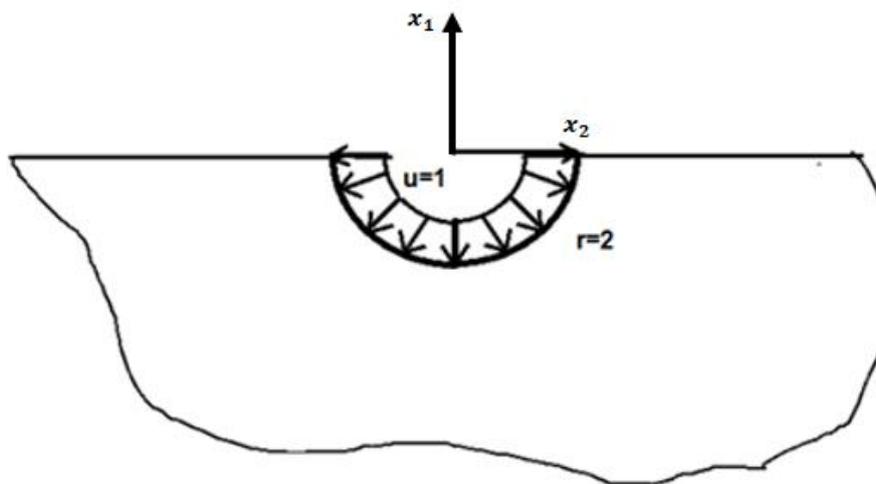
Com relação aos aspectos numéricos, foi utilizado o cálculo numérico dos coeficientes fracamente singulares da matriz  $G$ , comumente realizados analiticamente. Os valores calculados numericamente apresentaram precisão satisfatória com os 40 pontos de Gauss usados no programa computacional.

#### 4.4.4 Exemplo 4: Potencial uniformemente distribuído num semicírculo

Numericamente, este exemplo se distingue bastante dos demais, pois as condições de contorno de potencial ou fluxo podem ser aplicadas, porque são prescritas no contorno que não pertence à interface. Quando não existem fluxos aplicados na superfície e a região de interesse é simétrica com relação à interface, um problema como este é equivalente a um problema de domínio infinito. Possuindo assim uma solução simples para comparação, pois é a parte inferior (ou superior) de um problema com domínio infinito. A solução analítica foi desenvolvida naquela ocasião e deve ser consultada para melhor acompanhamento. Apenas certos valores são aqui repetidos por conveniência. Porém, nem todos os casos são simples assim.

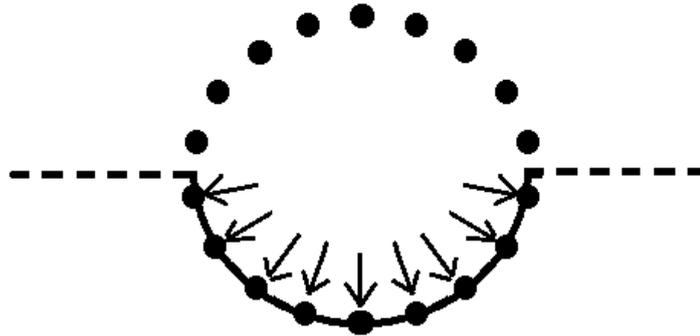
A Figura 30 ilustra o problema proposto. No caso, um potencial unitário uniforme é aplicado ao longo do semiplano de raio igual a 2.

Figura 30 - Potencial uniformemente distribuído num semiplano



Conforme mencionado, a discretização fica limitada ao contorno semicircular. Neste caso, diferentemente dos casos anteriores, ambas as matrizes  $H$  e  $G$  são geradas. A Figura 31 ilustra o modelo discreto adotado, em que pontos fonte imagem são posicionados simetricamente aos pontos fonte usuais do MEC.

Figura 31 - Discretização para Potencial uniformemente distribuído num semiplano



O sistema matricial a ser resolvido é:

$$[G](Q) = [H](\bar{U}) = (B) \quad (119)$$

Assim, apenas os fluxos são calculados no contorno. Deve-se ressaltar que a solução fundamental e sua derivada para o semiplano devem ser utilizadas neste caso e em problemas similares, pois tais funções auxiliares permitem que não se necessite fazer qualquer discretização ao longo da interface, pois a condição de simetria é naturalmente incorporada ao problema.

A solução analítica do problema em meio infinito com raio  $r = 2$  e o uso da solução fundamental clássica aponta um valor de fluxo no contorno igual a:

$$q(r = 2) = -\frac{1}{2 \times 0.6921} = -0.72135 \quad (120)$$

Os valores numéricos estão razoavelmente próximos e se devem a representação imprecisa da geométrica circular e problemas nos cantos. Foram usados vinte elementos constantes. Os resultados podem ser observados na Tabela 13.

Tabela 13 - Resultados de fluxo - Exemplo 4

$x_1$	$x_2$	Fluxo
-1.987689	-0.156463	-0.738172
-1.938748	-0.465504	-0.698697
-1.842070	-0.763042	-0.711001
-1.700035	-1.041802	-0.712120
-1.516134	-1.294911	-0.712778
-1.294911	-1.516134	-0.713061
-1.041802	-1.700035	-0.713276
-0.763042	-1.842070	-0.713344
-0.465504	-1.938740	-0.713421
-0.156463	-1.987689	-0.713453
0.156463	-1.987689	-0.713418
0.465504	-1.938740	-0.713428
0.763042	-1.842070	-0.713363
1.041802	-1.700035	-0.713283
1.294911	-1.516134	-0.713058
1.516134	-1.294911	-0.712791
1.700035	-1.041802	-0.712107
1.84207	-0.763042	-0.711006
1.938748	-0.465504	-0.698721
1.987689	-0.156463	-0.738165

Os valores numéricos obtidos em pontos afastados também estão satisfatórios e estão mostrados acompanhados dos valores analíticos. Destaca-se, uma vez mais, que os resultados no interior têm precisão superior aos valores do contorno. Os resultados podem ser observados na Tabela 14.

Tabela 14 – Pontos afastados do contorno – Exemplo 4

$x_1$	$x_2$	Potencial	Potencial analítico
0.000000	-3.000000	1.567359	1.583460
0.000000	-4.000000	1.977610	1.997700
0.000000	-5.000000	2.295847	2.319110
0.000000	-6.000000	2.555877	2.582550

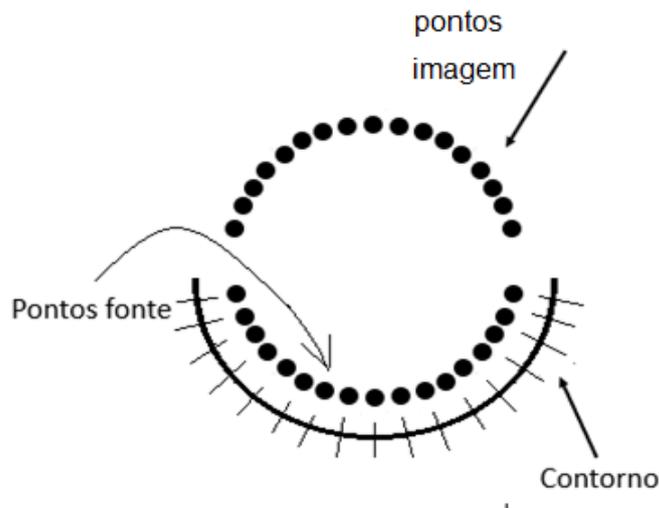
Em termos numéricos, deve-se ressaltar que devido aos pontos fonte originais estarem sobre o contorno, os coeficientes da diagonal da matriz H referentes à integração com base nestes pontos é igual a 0.5, pois os elementos são constantes. Já os coeficientes gerados pelos pontos fonte de imagem têm  $c(\xi)$  iguais a zero, pois tais pontos estão fisicamente no vazio.

Neste caso, que o problema apresenta uma simetria vertical, pode-se constatar que os coeficientes  $H$  são praticamente nulos, quando da obtenção dos valores em pontos situados sobre este eixo vertical de simetria. O sistema a ser resolvido para obtenção dos valores internos sobre a linha de simetria vertical, neste caso obedece à equação:

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} q(x)u^* d\Gamma \quad (121)$$

Ainda no contexto deste mesmo exemplo, uma nova disposição dos pontos fonte é apresentada. Diferentemente do que foi feito antes, os pontos fonte originais foram colocados a uma distância dos nós centrais, essa distância é equivalente ao tamanho do elemento (0.5), onde ela foi estrategicamente selecionada de forma a não produzir erros apreciáveis de integração, vide Figura 32. Nesta condição, o coeficiente  $c(\xi)$  é igual à zero.

Figura 32 - Pontos fonte distanciados dos nós centrais



Os resultados numéricos são mostrados a seguir, na Tabela 15. Comparativamente aos resultados anteriores com os pontos fonte originais coincidentes com os pontos nodais, os resultados tiveram precisão levemente superior.

Tabela 15 – Fluxo com pontos fonte distanciados – Exemplo 4

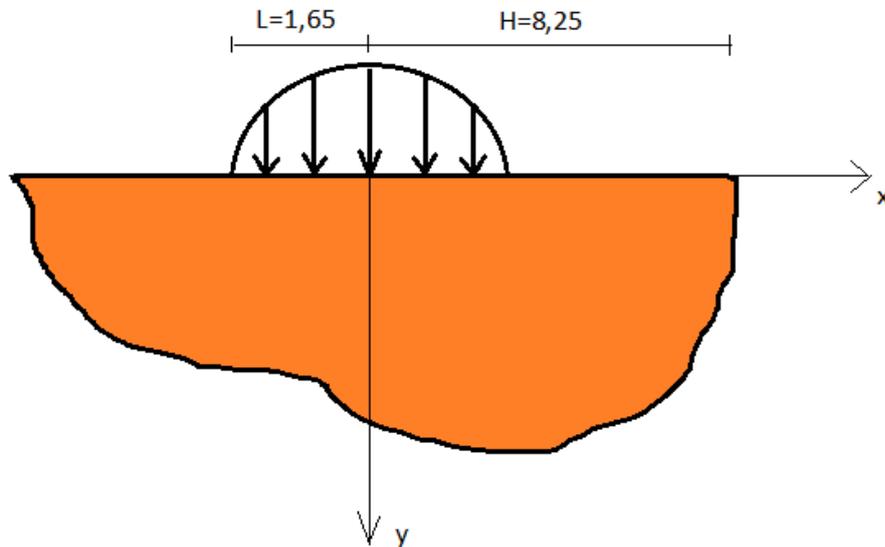
$x_1$	$x_2$	Derivada do potencial
-1.900000	-0.100000	-0.723126
-1.700000	-0.300000	-0.726022
-1.500000	-0.500000	-0.723405
-1.300000	-0.700000	-0.723151
-1.100000	-0.900000	-0.726343
-0.900000	-1.100000	-0.722205
-0.700000	-1.300000	-0.724866
-0.500000	-1.500000	-0.723840
-0.300000	-1.700000	-0.725560
-0.100000	-1.900000	-0.723367
0.100000	-1.900000	-0.722645
0.300000	-1.700000	-0.728437
0.500000	-1.500000	-0.717409
0.700000	-1.300000	-0.733134
0.900000	-1.100000	-0.716998
1.100000	-0.900000	-0.725397
1.300000	-0.700000	-0.728923
1.500000	-0.500000	-0.717858
1.700000	-0.300000	-0.728685
1.900000	-0.100000	-0.722713

#### 4.4.5 Exemplo 5: Potencial senoidalmente variável aplicado num semiplano

Este exemplo visa fazer uma comparação entre os resultados numéricos e um resultado analítico obtido pelo Método de Separação de Variáveis (MSV). Tal comparação não é precisa, pois o tratamento das partes infinitamente distantes situada na interface é distinto nos dois métodos, o que acarreta resultados diferentes fora da região de carregamento. Em pontos próximos, contudo, os resultados são semelhantes. De certa forma, os conceitos discutidos no estudo do comportamento do potencial em meio infinitos aqui aparecem sob uma nova forma.

A Figura 33 apresenta as características físicas e geométricas do problema. Foram usados vinte elementos de contorno constante para representar o setor onde o fluxo é aplicado. As demais partes da interface não foram discretizadas.

Figura 33 - Potencial Senoidal num semiplano



O MSV oferece soluções analíticas na forma de séries infinitas, em termos de funções trigonométricas e exponenciais, nos casos em que o sistema cartesiano pode ser aplicado. Assim, antes de qualquer coisa, o fluxo aplicado deve ser representado na forma de uma série harmônica.

- a) Desenvolvimento do fluxo em Série de Fourier pode ser feito apenas em cosseno, pois a expressão do fluxo é cossenoidal

$$f(x) = a_0 + \sum a_n \frac{\cos n\pi x}{H} \quad (122)$$

$$a_0 = \frac{1}{H} \int_0^L \frac{\cos \pi x}{2L} dx = \frac{2L}{\pi H} = 0,1273; H = 8,25; L = 1,65 \quad (123)$$

$$a_n = \frac{2}{H} \int_0^L \frac{\cos \pi x}{2L} \frac{\cos n\pi x}{H} dx \quad (124)$$

Resultados:

$$a_1 = 0,245; a_2 = 0,2185; a_3 = 0,1788; a_4 = 0,1320 \quad (125)$$

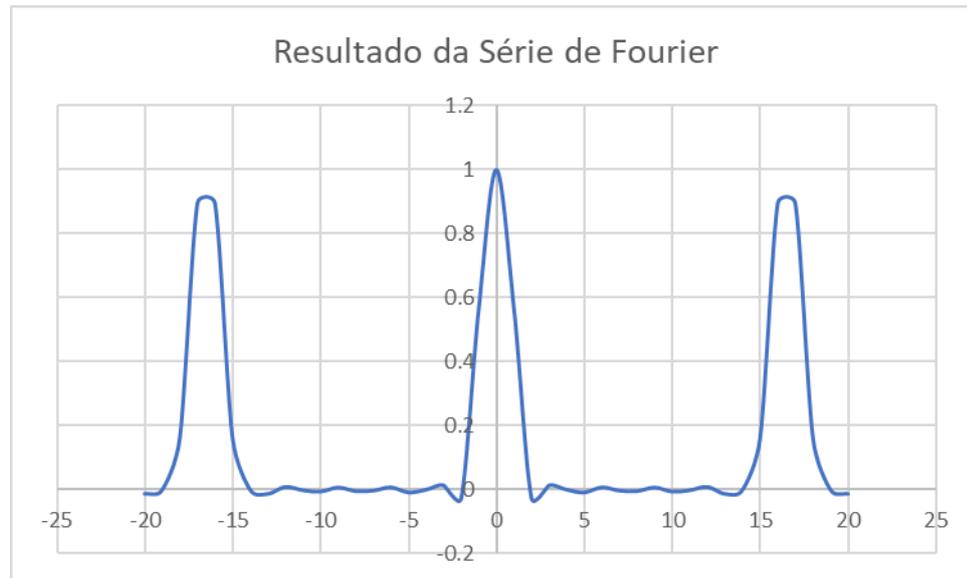
Conferências com dez termos:

$$f(0) = 1,00327 \quad (126)$$

$$f(1,65) = 0,089 \quad (127)$$

A Figura 34 ilustra o resultado para a série de Fourier desenvolvida.

Figura 34 - Resultado Série de Fourier - Exemplo 5



## b) Solução da Equação Diferencial de Laplace

Pelo Método de Separação de Variáveis, uma variável escalar que é função de duas variáveis é expressa em termos do produto de duas funções distintas, de uma variável apenas, ou seja:

$$u(x, y) = X_n(x)Y_n(y) \quad (128)$$

Escolhe-se a solução harmônica em  $x$ , pois o fluxo se desenvolve nesta variável, e exponencial em  $y$ , ou seja:

$$X_n(x) = A_n \operatorname{sen} \lambda_n(x) + B_n \operatorname{cos} \lambda_n(x) \quad (129)$$

$$Y_n(x) = C_n e^{-\lambda_n y} + D_n e^{+\lambda_n y} \quad (130)$$

A parte exponencial em  $y$  poderá ser eliminada para partes infinitamente distantes.

Após a substituição das condições de contorno:

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial u(H, y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial u(x, \infty)}{\partial y} = 0; \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = f(x) \quad (131)$$

Chega-se a:

$$E_n \frac{n\pi \operatorname{cos} n\pi x}{H} = a_n \frac{\operatorname{cos} n\pi x}{H} \quad (132)$$

Então, os valores de  $E_n$  são calculados a partir da seguinte igualdade:

$$u(x, y) = \Sigma = E_n e^{-\lambda_n y} \operatorname{cos} \lambda_n(x); \lambda_n = \frac{n\pi}{H} \quad (133)$$

Resolvendo:

$$E_1 = -0,643; E_2 = -0,2862; E_3 = -0,1565; E_4 = -0,089 \quad (134)$$

c) Determinação do coeficiente  $E_0$ :

O valor de  $E_0$  não pode ser determinado da expressão anterior. Esta impossibilidade resulta da imposição da condição de contorno de Neumann, pois esta introduz uma indeterminação na relação entre  $a_0$  e  $E_0$ . Foi visto de estudos anteriores que a imposição de uma condição de fluxo implica na possibilidade de múltiplos campos de potencial solução, ou seja, apenas a prescrição de fluxo não determina inequivocamente o campo de potenciais. Como determinar este campo então? Vai-se ajustar a solução da série ao campo de potencial obtido pelo programa na superfície, pois esta solução depende da solução fundamental utilizada. Depois, calculam-se aos potenciais no interior; se os modelos estiverem compatíveis, os resultados deverão ser próximos. Ressalta-se que o modelo analítico pela Série de Fourier e o MEC são completamente distintos.

d) Resultados

O potencial numérico na interface superior, no ponto  $y=0$ , fornece:

$$u(0,0) = -0,577 \quad (135)$$

Então o fator de calibração  $E_0$  resulta em 0,657.

A seguir mostram-se os resultados numéricos e os obtidos pela Série após a calibração realizada.

**Tabela 16 – Resultado Potencial Exemplo 5**

<b>Potencial em:</b>	<b>Numérico</b>	<b>Analítico</b>
$u(0,0.1)$	-0.4845	-0.4748
$u(0,0.2)$	-0.3960	-0.3440
$u(0,0.5)$	-0.1681	-0.0682
$u(0,1.0)$	0.1203	0.1986

Ressalta-se que, conforme mencionado, não havia expectativa de concordância estreita entre a solução analítica e a numérica neste caso, pois o problema resolvido pela Série de Fourier consiste de um caso em que as condições de fluxo nulo nas bordas verticais não são infinitamente distantes. Contudo, apesar das diferenças, a solução mostrou-se satisfatória para pontos não muito afastados da região carregada. Outra fonte de imprecisão relevante consiste da representação do carregamento cossenoidal através de vinte elementos de contorno constantes.

## CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES

O presente trabalho abordou os problemas de meio infinito e semi-infinito, procurando demonstrar com clareza todas as informações necessárias para definição das variáveis pertinentes, como suas soluções fundamentais, a definição das condições de contorno, os aspectos de discretização e as questões numéricas. Em geral nota-se que o MEC apresenta uma forma bastante ágil para resolução das variáveis citadas, devido sua particularidade de discretização necessária.

Para o problema do meio infinito, a solução fundamental clássica e formas alteradas foram analisadas. Demonstrou-se como sua modificação afeta os resultados. Uma série de exemplos simples, envolvendo orifícios, serviu para mostrar os efeitos do refinamento e a convergência dos resultados. Apresentaram-se ainda casos com condições de contorno diferentes, referentes às condições de Dirichlet e Neumann, e observou-se as peculiaridades de cada condição no comportamento da solução.

Em particular, para o problema do meio semi-infinito, foi apresentada a formulação da solução fundamental e fluxo fundamental utilizando o Método das Imagens. Diversos problemas foram apresentados, variando a superfície do problema e o método de aplicação de carregamentos.

Quanto aos resultados obtidos para o problema do meio infinito, destaca-se que os resultados encontrados podem ser considerados satisfatórios quando comparados aos resultados analíticos, apesar de serem simples. Percebe-se também sua coerência quanto a convergência, que pode ser observada conforme a malha é refinada. Nota-se também a influência da solução fundamental nos resultados, porém esta pode ser ajustada através das suas constantes de integração.

Observações importantes como a relevância da solução fundamental na resolução destes problemas pode ser observada. No problema de meio infinito, pode-se destacar a existência de singularidade no resultado, devido a particularidade da solução fundamental utilizada para o problema de condição exclusiva de Dirichlet e a condição suficiente de obediência a regularidade observada, como pôde ser observado na seção 3.7.

De forma similar, para o problema do meio semi-finito, o qual utilizou como auxílio para determinação da solução fundamental e fluxo fundamental o método das

imagens, os resultados são bastante satisfatórios. Diferentes condições de superfície foram analisadas, com diferentes hipóteses de carregamentos, além de variações no posicionamento dos pontos fonte.

Para este meio, realça-se a importância do posicionamento dos pontos fonte e pontos imagem em relação a superfície discretizada. Também é válido ressaltar a observação da desnecessidade de discretização de um plano para os problemas onde há uma superfície semicircular.

Tanto para os problemas de meio infinito, quanto para os de meio semi-infinito, apesar de problemas simples que foram apresentados, devido os resultados obtidos e o padrão de convergência, pode-se admitir que as soluções tendem a serem satisfatórias mesmo em problemas de maior complexidade. No entanto, recomenda-se o estudo através de densidades de malhas diferentes, comparação com outros métodos e testes experimentais.

Neste trabalho demonstrou-se que a solução dos problemas de meio infinito e semi-infinito é possível através do método dos elementos de contorno e em especial, para este último meio, com o auxílio do método das imagens. Desta forma torna-se possível determinar com agilidade e precisão os resultados para os domínios analisados.

Contudo, é possível que para problemas mais complexos, especialmente quando a geometria do domínio for irregular não haja uma solução de referência acessível. Entretanto, face aos bons resultados obtidos nos testes mostrados, espera-se que os resultados possuam precisão satisfatória.

Ficam recomendados como trabalhos futuros:

- O estudo de problemas de potencial do meio semi-infinito e infinito com superfícies irregulares;
- A utilização de elementos lineares ou de maior ordem para os problemas de meio infinito e semi-infinito;
- Diferentes métodos auxiliares para definição da solução fundamental e fluxo fundamental para o problema de meio semi-infinito.

## Referências

- AVELAR, J. A. R. **Modelagem direta de integrais de domínio em problemas**. Vitória: , 2016.
- BAETA, J. A. **O Método das Imagens e as Funções de Green**. : Revista Brasileira de Ensino de Física v. 20, n. 2., 1988.
- BARBOSA, J. P. **Dinâmica em Meios Setorialmente Homogêneos Com o Método dos Elementos de Contorno Usando As Técnicas de Interpolação Direta e de Superposição de Domínios**. Vitória: , 2019.
- BARCELOS, H. D. M. **Comparação de desempenho entre formulação direta do método dos elementos de contorno com funções radiais e o método dos elementos finitos em problemas de Poisson e Helmholtz**. Vitória: , 2014.
- BEER, G.; WATSON, J. O.; SWOBODA, G. **Three-dimensional analysis of tunnels using infinite boundary elements**. Queensland: , 1987.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering**. Berlin: , 1984.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary Element Techniques in Engineering**. London: Butterworth & Co., 1980.
- BUHMANN, M. D. **Radial Basis Function: Theory and implementations**. : Cambridge Press, 2003.
- CHENG, A. A. D. T. C. **Heritage and early history of the boundary element method, Engineering Analysis with Boundary Elements**. : , 2005.
- DAVIES, T. G.; BU, S. **Infinite Boundary Elements for the Analysis of Halfspace Problems**. : , 1995.
- EYMARD, R. G.; HERBIN, T. R. R. **The finite volume method Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII**. : P.G. Ciarlet and J.L. Lions., 2000.
- FREITAS, A. B. **Avaliação do Desempenho do Procedimento Recursivo do Método dos Elementos de Contorno Aplicado em Problemas da Elasticidade**. Vitória: , 2015.
- FREITAS, A. B.; LOEFFLER, C. F. Performance evaluation of the boundary element recursive procedure in elastic problems, n. v. 98, p. 11–20, 2016.
- GAO, X.; DAVIES, T. G. **3-D boundary elements for half-space problems**. Glasgow: , 1997.
- HOMENTCOVSCHI, D.; SINGLER, T. **An introduction to BEM by integral transforms**. Binghamton: , 1999.
- IGARASHI, H.; HONMA, T. **A boundary element method for potential fields with corner singularities**. Sapporo: , 1995.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. : (3a ed)Hamilton Printing Company, 1998.

LACERDA, L. A.; DA SILVA, J. M.; LÁZARIS, J. **Dual boundary element formulation for half-space cathodic protection analysis**. 6. ed. : Engineering Analysis with Boundary Elements, v. 31, 2007.

LEVEQUE, R. J. **Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations**. : , 2007.

LI, X. **An interpolating boundary element-free method for three-dimensional potential problems**. Congqing: , 2015.

LOEFFLER, C. F. Uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno aplicada a problemas de campo escalar, Rio de Janeiro, 1988.

MA, K.; FAN, S.; XIAO, J. **A BEM solution for plates on elastic half-space with unilateral contact**. Tianjin: , 1999.

PAN, E.; CHEN, C.; AMADEI, B. **A BEM formulation for anisotropic half-plane problems**. Boulder: , 1997.

REDDY, J. **An Introduction to the Finite Element Method**. New York: McGraw-Hill, 2005.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2. ed. São Paulo: Person Makron Books, 1996.

SOENARKO, B.; SETIADIKARUNIA, D. **An analytical solution versus half space BEM formulation for acoustic radiation and scattering from rigid sphere**. Bandung: , 2016.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. **Boundary element solution for half-plane problems**. Southampton: , 1980.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. : , 1994.

ZIENKIEWICZ, T. R. Z. J. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**, 7th Ed. : , 2013.

## ANEXO I – Elementos Infinitos

Neste anexo, apresenta-se de forma sucinta a formulação dos elementos infinitos.

A discretização de domínios que não possuem contornos, como é o caso de regiões semi infinitas, é bastante complexa e requer uma atenção especial. Muitas dificuldades podem surgir para a representação por elementos infinitos. Para isso, pode-se subdividir uma região em 3. A superfície núcleo ( $S_f$ ), a superfície longínqua ( $S_l$ ) e a superfície hemisférica  $S_h$ , conforme a Figura A 1 exemplifica (DAVIES e BU, 1995).

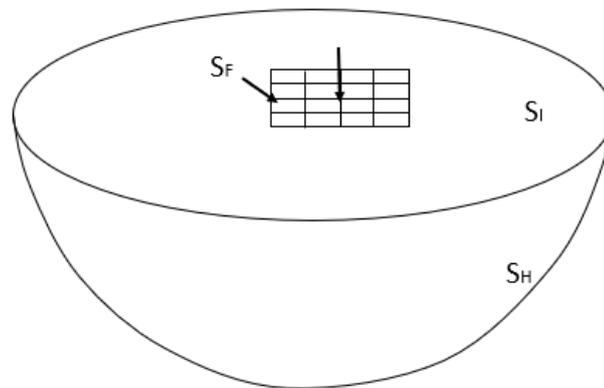


Figura A 1 - Discretização das superfícies

Desta forma, a superfície núcleo tem elementos de contorno finitos, e a superfície longínqua e hemisférica possuem elementos de contorno infinitos, como mostrado na Figura A 2.

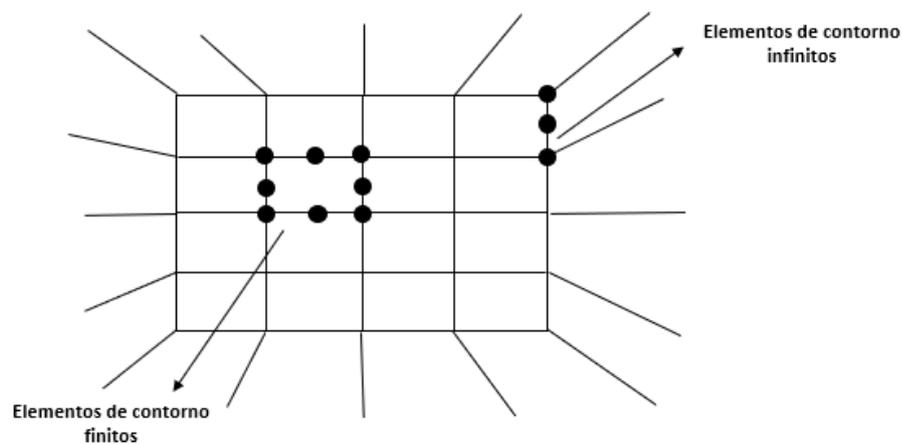
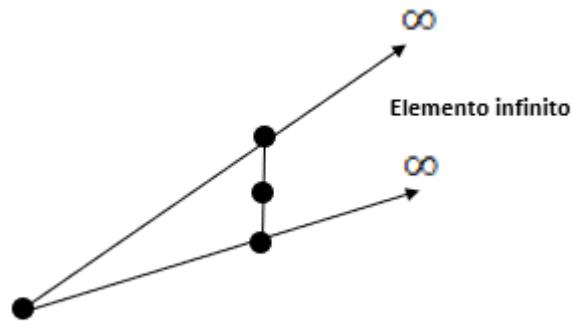


Figura A 2 - Elementos de contornos finitos e infinitos

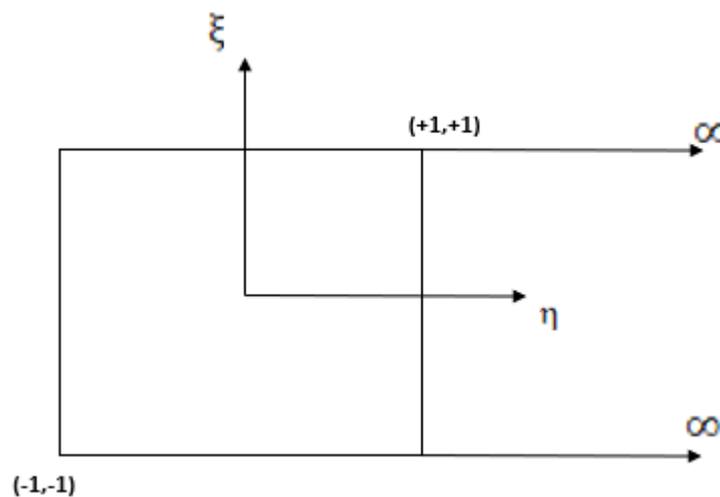
Estes elementos infinitos são regidos por uma função de decaimento a qual é responsável pelo decaimento, ao longo das superfícies longínqua e hemisférica, dos valores da solução e do fluxo fundamental, nas regiões mais distantes.

Como exemplificado pela Figura A 3, os elementos infinitos podem ser de 3 ou mais nós, originando-se da fonte e estendendo-se até o infinito.



**Figura A 3 - Extensão dos elementos infinitos**

A Figura A 4 também mostra o setor infinito, onde existe a intersecção entre os elementos de contorno finito e os elementos de contorno infinitos. Neste caso, as regiões podem ser mapeadas pelas coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta$ , onde na direção  $\eta$ , o elemento estende-se até ao infinito, enquanto  $\xi$  adota valores  $\pm 1$ .



**Figura A 4 - Setor infinito**

A geometria pode então ser definida pelas equações (A 1) e (A 2).

$$x = \frac{1 + \eta}{2} \sum_{i=1}^k M_i(\xi) x_i \quad (\text{A } 1)$$

$$y = \frac{1 + \eta}{2} \sum_{i=1}^k M_i(\xi) y_i \quad (\text{A } 2)$$

Onde  $k$  é a quantidade nós utilizados nos elementos infinitos e  $M_i$  é a função de decaimento para a superfície hemisférica. No caso do uso de 3 nós para os elementos infinitos, essa função pode ser descrita pelas equações (A 3), (A 4) e (A 5).

$$M_1 = \frac{\xi(\xi - 1)}{2} \quad (\text{A } 3)$$

$$M_2 = 1 - \xi^2 \quad (\text{A } 4)$$

$$M_3 = \frac{\xi(1 + \xi)}{2} \quad (\text{A } 5)$$

Para este tipo de problema, segundo (DAVIES e BU, 1995), deve-se utilizar uma função de decaimento (D) do tipo radial, conforme exposto pela equação (A 6).

$$D = \frac{r_0}{r} \quad (\text{A } 6)$$