

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

BRENO BARRETO DA SILVA

**O MODELO COSMOLÓGICO DE
KANTOWSKI-SACHS**

Vitória

2021

BRENO BARRETO DA SILVA

**O MODELO COSMOLÓGICO DE
KANTOWSKI-SACHS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Vitorino de Borba Gonçalves

Vitória

2021

À minha avó Margarida, fonte sempre constante de alegria, amor e carinho

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua graça.

Agradeço a minha mãe Luciana por acreditar nos meus sonhos.

Agradeço ao professor Sergio Vitorino por ter sido atencioso e paciente.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

Science is much more than a body of knowledge. It is a way of thinking.

(SAGAN, 1989)

RESUMO

Este trabalho busca resolver as equações de Einstein para a métrica de Kantowski-Sachs em um meio contendo fluido barotrópico acoplado a um campo escalar e usando uma relação entre os fatores de escala dessa métrica. Para alcançar esse objetivo foi necessário estudar e abordar a métrica de Robertson-Walker, a ação de Einstein-Hilbert, as equações de Einstein, os diversos tensores momento-energia e as equações de Friedmann. Também estudamos os seguintes fluidos: poeira, matéria rígida, radiação, cordas cósmicas e vácuo, e suas respectivas equações de estado. E por fim, analisamos os cálculos do artigo de Kantowski-Sachs para poeira e o artigo de Adhav que resolve as equações de Einstein para a matéria rígida com a métrica de Kantowski-Sachs possuindo uma relação entre os fatores de escala.

Palavras-chave: Kantowski-Sachs. Equações de Einstein. Fluido barotrópico. Friedmann. Campo escalar.

ABSTRACT

This work seeks to solve Einstein's equations for the Kantowski-Sachs metric in an environment containing barotropic fluid coupled to a scalar field and using a relationship between the scale factors of that metric. To achieve this goal, it was necessary to study and address the Robertson-Walker metric, the Einstein-Hilbert action, the Einstein equations, the various moment-energy tensors and the Friedmann equations. We also studied the following fluids: dust, stiff matter, radiation, cosmic strings and vacuum, and their respective equations of state. And finally, we analyze the calculations of the Kantowski-Sachs article for dust and the Adhav article that solves Einstein's equations for stiff matter with the Kantowski-Sachs metric having a relationship between the scale factors.

Keywords: Kantowski-Sachs. Einstein's equations. Barotropic fluid. Friedmann. Scalar field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1–	Gráfico dos fatores de escala b e a em função do parâmetro temporal η .	39
Figura 2–	Gráfico do fator de escala b para alguns valores de n	46
Figura 3–	Gráfico do fator de escala a para alguns valores de n	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	O MODELO DE FRIEDMANN	11
2.1	A MÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO	11
2.1.1	Tensor de Einstein	12
2.1.2	A métrica de Robertson-Walker	16
2.2	EQUAÇÕES DE EINSTEIN	17
2.2.1	Ação de Einstein-Hilbert	17
2.2.2	Equações de Einstein	21
2.3	TENSOR MOMENTO-ENERGIA	22
2.3.1	Fluido perfeito	22
2.3.2	Fluxo de calor	22
2.3.3	Viscosidade	23
2.3.4	Fluido nulo	23
2.3.5	Campo escalar	24
2.3.6	Campo eletromagnético	25
2.4	AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN	26
3	O MODELO KANTOWSKI - SACHS	29
3.1	CARACTERÍSTICAS DOS MEIOS MATERIAIS	30
3.1.1	Poeira ($\omega = 0$)	30
3.1.2	Radiação ($\omega = \frac{1}{3}$)	31
3.1.3	Matéria rígida ($\omega = 1$)	31
3.1.4	Cordas cósmicas ($\omega = -\frac{1}{3}$)	32
3.1.5	Vácuo ($\omega = -1$)	33
3.2	O DESENVOLVIMENTO DA MÉTRICA DE KANTOWSKI-SACHS	34
3.3	A EXPANSÃO DO MODELO KANTOWSKI-SACHS	36
3.3.1	Poeira e o modelo Kantowski-Sachs	37
3.3.2	Matéria rígida em um modelo Kantowski-Sachs modificado	39
4	MODELO KANTOWSKI-SACHS MODIFICADO	44

4.1	O FLUIDO BAROTRÓPICO ACOPLADO A UM CAMPO ESCALAR	44
4.1.1	Campo escalar	49
5	DISCUSSÕES DOS RESULTADOS	51
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

É provável que a maioria da população saiba ou já ouviu falar de Albert Einstein. Sua teoria revolucionária modificou a nossa compreensão de mundo e também da teoria gravitacional. O termo *relativo* adentrou no vocabulário geral buscando uma relação com a teoria da relatividade. Porém, poucos sabem do que se trata aquilo que foi descoberto por este alemão no início do século XX. Sua contribuição é tamanha que até hoje são estudadas consequências de sua teoria. Um exemplo disso são as ondas gravitacionais que foram detectadas em setembro de 2015 e que foram previstas por Einstein em 1916 (ABBOTT et al., 2016).

Por outro lado não é de agora o interesse humano pelo desconhecido. Com o passar da história humana o céu tem sido alvo de estudos, primeiramente com a astrologia e a astronomia caminhando juntas (PICAZZIO et al., 2011). Posteriormente, os egípcios separaram estes e usaram a astronomia para definir os calendários, as estações e as épocas das colheitas, desenvolvendo cada vez mais as observações celestes. Grandes nomes construíram a teoria da gravitação: Copérnico, propôs a centralidade do Sol. Galileu, observou as características planetárias de tal modo que foi homenageado com os satélites galileanos de Júpiter. Tycho Brahe armazenou dados durante toda a vida. Dados esses que usados por Kepler expandiram a teoria gravitacional para não mais círculos ao redor do Sol, mas agora elipses. E por fim, Newton, que reunindo o que foi estudado anteriormente, propôs uma teoria abrangente para todo o Universo que funcionava bem para quase tudo, com uma pequena exceção era o periélio de Mercúrio. A teoria da gravitação universal de Newton diz que existe uma força de atração entre duas massas quaisquer. Entretanto, Einstein mudou o entendimento disso quando propôs que as massas deformam o espaço-tempo ocasionando então um desvio.

Uma consequência do que foi evidenciado por Einstein, na teoria da relatividade restrita, é a velocidade da luz, que possui um valor constante. Essa revolução do pensamento teve consequências diretas na astronomia, pois ao observar o céu os astrônomos estariam olhando para o passado. Viajando a luz a uma velocidade constante de um local muitíssimo distante teríamos um tempo de deslocamento proporcional ao percurso. Um exemplo desse efeito é que a luz vinda do Sol demora oito minutos para chegar a Terra. Outro exemplo é que podemos estar

observando estrelas que não mais existem, entretanto os fótons emitidos por elas ainda estão fazendo o percurso até onde estamos.

Pois bem, ao conseguir observar o passado, o nosso questionamento vai para os momentos primordiais do Universo, sua estrutura, as características de tempos longínquos e como isso influencia os dias atuais como também o nosso futuro. A cosmologia busca estudar o comportamento do Universo com o passar do tempo, a composição desde o começo até hoje e também como explicar as mudanças que ocorreram em toda sua história buscando assim determinar as leis que regem o Universo. Para construir um modelo cosmológico são necessários três ingredientes fundamentais, provenientes da teoria da relatividade geral de Einstein, segundo (BERTONE; HOOPER; SILK, 2005): as equações de Einstein relacionando a geometria do Universo com sua matéria e energia; a métrica descrevendo a simetria do problema; e a equação de estado especificando as propriedades físicas da matéria e energia que compõem o Universo.

Para iniciar a construção de um modelo cosmológico iremos primeiro abordar um caso simples, mas que é assumido atualmente como o mais representativo do Universo atual. O modelo de Friedmann, devido a suas equações, ou modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) que busca, a partir da métrica dos últimos dois citados, solucionar as equações de Einstein para um fluido perfeito. O primeiro passo é, partindo da métrica do espaço-tempo esféricamente simétrico, obter a métrica de Robertson-Walker evidenciando suas características homogêneas e isotrópicas que permeiam o modelo FLRW. Para tanto usamos os componentes do tensor de Einstein, sejam eles o símbolo de Christoffel, adquirido após manipulações matemáticas da métrica inicial, o tensor de Riemann e sua derivação, o tensor de Ricci. O segundo passo foi trabalhar a equação de Einstein, na forma tensorial, a partir da ação de Einstein-Hilbert, onde foi visto que ela é a união do tensor de Einstein, parte geométrica, com o tensor momento-energia. Por isso, estudaremos as várias facetas do tensor momento-energia, desde o fluido perfeito, passando pela viscosidade, campo escalar, fluido nulo, fluxo de calor até chegar no campo eletromagnético. Todo esse escopo é usado afim de resolver os elementos da equação de Einstein, ou as equações de Einstein, para o caso de Friedmann com o objetivo de encontrar as equações de Friedmann.

No segundo momento nosso objetivo será de introduzir o modelo de Kantowski-Sachs, este que é homogêneo e anisotrópico. Iniciamos descrevendo algumas propriedades físicas para a poeira, radiação, matéria rígida, cordas cósmicas e o vácuo, todas elas relacionadas a equação de estado. Continuamos abordando um caso simples da métrica, onde resolveremos os elementos da equação de Einstein para o fluido perfeito, mais precisamente a poeira, observando as características do modelo. Após essa etapa, introduziremos uma relação entre os dois fatores de escala da métrica de Kantowski-Sachs e resolveremos as equações de Einstein com essa

alteração, mas dessa vez acoplando o fluido perfeito com o campo escalar.

Por fim, iremos propor soluções novas, de nossa autoria, onde a partir da relação dos fatores de escala, estudaremos o caso do fluido barotrópico que generaliza o estudo para qualquer propriedade física definindo o parâmetro da equação de estado como uma constante, mas deixando em aberto para futuras substituições. Adicionando esse novo elemento, resolveremos as equações de Einstein mais uma vez com o fluido perfeito acoplado com o campo escalar.

2 O MODELO DE FRIEDMANN

2.1 A MÉTRICA DO ESPAÇO-TEMPO

O modelo de Friedmann nos serve de exemplo para outros casos mais complexos. Por isso, ele vem em primeiro lugar. Dessa forma, faz-se necessário um estudo mais elementar, logo, iremos fazer um passo-a-passo da resolução das equações de Einstein para esse caso adicionando elementos relevantes para situações futuras. O nome completo do modelo é Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), a característica principal é a definição do universo como isotrópico e homogêneo. Ser isotrópico indica que não há direção privilegiada para observação. E ser homogêneo indica que as características espaciais não se alteram dependendo da posição observada do Universo, essa propriedade é descrita pela métrica.

A partir desses dois pontos, isotropia e homogeneidade, temos que o espaço é simétrico, podendo ter a métrica,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad , \quad (2.1)$$

onde ds é a distância infinitesimal, t o tempo cósmico, h_{ij} a métrica espacial e $a(t)$ o fator de escala que descreve a evolução do universo estudado (SCHUTZ, 2009), ou seja, relaciona o tempo com o espaço de maneira que se houver uma expansão ela ocorra de maneira proporcional. Aqui podemos definir que a assinatura que iremos utilizar neste trabalho será $(+,-,-,-)$. O nosso próximo passo é separar a parte espacial da métrica onde teremos,

$$dl^2 = a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j \quad . \quad (2.2)$$

Calculando a métrica de Robertson-Walker, que é o pilar da equação de Friedmann, vamos utilizar como ponto de partida a métrica do espaço-tempo esféricamente simétrica e estática,

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - e^{2\Lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad , \quad (2.3)$$

onde ds é a distância infinitesimal, t o tempo cósmico, r a coordenada radial, θ e ϕ as coordenadas angulares e $\Phi(r)$ e $\Lambda(r)$ funções radiais. Repare que ela é estática pois não há dependência

temporal em $\Phi(r)$ e $\Lambda(r)$. A causa de usarmos essa métrica é o fato dela ser isotrópica em seu centro. Agora descreveremos o passo a passo que iremos seguir: a métrica gera os símbolos de Christoffel, estes geram o tensor de Riemann, esses o tensor de Ricci, que gera o escalar de Ricci e, por fim, com a junção dos últimos dois termos e a métrica teremos o tensor de Einstein de onde é calculado o traço do tensor de Einstein que, neste caso, é constante para que a métrica seja também homogênea (SCHUTZ, 2009). Após todas essas transformações matemáticas devemos por fim obter o nosso objetivo.

2.1.1 Tensor de Einstein

Símbolo de Christoffel

Seja o símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \quad , \quad (2.4)$$

onde $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ é a derivada parcial e $g_{\mu\nu}$ é a métrica proveniente de $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$, como já dito, usaremos a métrica do espaço-tempo esfericamente simétrico, equação (2.3), que na forma matricial fica como

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad , \quad (2.5)$$

lembrando que ao multiplicar $g_{\mu\nu}$ pelo seu contravariante temos a matriz identidade, podemos obter $g^{\mu\nu}$ como sendo

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{bmatrix} \quad . \quad (2.6)$$

Existem 64 símbolos de Christoffel possíveis para a métrica apresentada acima. Porém, muitos são nulos, por exemplo:

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{t\rho}(\partial_t g_{t\rho} + \partial_t g_{\rho t} - \partial_{\rho} g_{tt}) \quad , \quad (2.7)$$

se $\rho \neq t$, $g^{\rho\rho}$ será nulo pois a métrica é uma matriz diagonal. Logo,

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(\partial_t g_{tt} + \partial_t g_{tt} - \partial_t g_{tt}) \quad , \quad (2.8)$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}(e^{-2\Phi}) [\partial_t(e^{-2\Phi}) + \partial_t(e^{-2\Phi}) - \partial_t(e^{-2\Phi})] \quad , \quad (2.9)$$

$$\Gamma_{tt}^t = 0 \quad , \quad (2.10)$$

pois $\partial_t \Phi(r) = 0$.

Aqui uma constatação, o símbolo de Christoffel é simétrico, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \Gamma_{\nu\mu}^\sigma \quad , \quad (2.11)$$

e os símbolos com índices diferentes são nulos, pois os elementos da métrica que atendem a estes estão fora da diagonal. Ao saber dessas disposições conclui-se que é necessário calcular 28 símbolos, sem contar o exemplo acima, equação (2.7). Façamos um outro exemplo, agora com resultado não nulo, para clarificar como são calculados os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) \quad , \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = \frac{1}{2}(-e^{-2\Lambda}) [\partial_\theta(0) + \partial_\theta(0) - \partial_r(-r^2)] \quad , \quad (2.13)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -re^{-2\Lambda} \quad . \quad (2.14)$$

Pois bem, após calcular todos os outros 26 símbolos, foram encontrados mais 8 símbolos diferentes de zero. Os símbolos não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Phi' & \Gamma_{rr}^r &= \Lambda' & \Gamma_{tt}^r &= \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -re^{-2\Lambda} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -re^{-2\Lambda} \sin^2 \theta & \Gamma_{r\theta}^\theta &= r^{-1} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{r\phi}^\phi &= r^{-1} & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde $\Phi' = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$ e $\Lambda' = \frac{\partial\Lambda}{\partial r}$.

Tensor de Riemann e de Ricci

Nossa intenção é encontrar o traço do tensor de Einstein. Não iremos encontrar todos os termos do tensor de Riemann, mas só aqueles que serão usados para encontrar a diagonal do tensor de Ricci. Essa diagonal nos dará o que almejamos alcançar.

Seja o tensor de Riemann,

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad , \quad (2.16)$$

e o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad , \quad (2.17)$$

logo, os elementos do tensor de Riemann que são necessário para a composição do tensor de Ricci tem a seguinte forma,

$$R_{\sigma\nu} = R^{\alpha}_{\sigma\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\sigma} \quad . \quad (2.18)$$

O primeiro elemento do tensor de Ricci que iremos calcular é o temporal,

$$R_{tt} = R^{\alpha}_{t\alpha t} \quad , \quad (2.19)$$

$$R_{tt} = R^t_{ttt} + R^r_{trt} + R^{\theta}_{t\theta t} + R^{\phi}_{t\phi t} \quad , \quad (2.20)$$

para conseguir R_{tt} temos que encontrar os devidos elementos do tensor de Riemann, logo,

$$\begin{aligned} R^t_{ttt} &= \partial_t\Gamma^t_{tt} - \partial_t\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^t_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} \quad , \\ R^t_{ttt} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} R^r_{trt} &= \partial_r\Gamma^r_{tt} - \partial_t\Gamma^r_{rt} + \Gamma^r_{r\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^r_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{rt} \quad , \\ R^r_{trt} &= \partial_r(\Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)}) + \Lambda'\Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)} - \Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)}\Phi' \quad , \\ R^r_{trt} &= e^{2(\Phi-\Lambda)}[\Phi'' + \Phi'^2 - \Lambda'\Phi'] \quad , \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} R^{\theta}_{t\theta t} &= \partial_{\theta}\Gamma^{\theta}_{tt} - \partial_t\Gamma^{\theta}_{\theta t} + \Gamma^{\theta}_{\theta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{\theta}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\theta t} \quad , \\ R^{\theta}_{t\theta t} &= r^{-1}\Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)} \quad , \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} R^{\phi}_{t\phi t} &= \partial_{\phi}\Gamma^{\phi}_{tt} - \partial_t\Gamma^{\phi}_{\phi t} + \Gamma^{\phi}_{\phi\lambda}\Gamma^{\lambda}_{tt} - \Gamma^{\phi}_{t\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\phi t} \quad , \\ R^{\phi}_{t\phi t} &= r^{-1}\Phi'e^{2(\Phi-\Lambda)} \quad , \end{aligned} \quad (2.24)$$

agora, basta somar e temos,

$$R_{tt} = e^{2(\Phi-\Lambda)} \left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Lambda'\Phi' + \frac{2\Phi'}{r} \right] \quad . \quad (2.25)$$

Dessa mesma maneira podemos encontrar os outros termos do tensor de Ricci. Abaixo seguem

os outros elementos da diagonal:

$$R_{rr} = -\Phi'' - \Phi'^2 + \Lambda'\Phi' + \frac{2\Lambda'}{r} , \quad (2.26)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda} [r(\Lambda' - \Phi') - 1] + 1 , \quad (2.27)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta R_{\theta\theta} . \quad (2.28)$$

Escalar de Ricci

Na procura pelo tensor de Einstein, já conseguimos o tensor de Ricci, e agora, precisamos obter o escalar de Ricci. Que é definida como o operação entre a métrica contravariante e o tensor de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} , \quad (2.29)$$

$$R = g^{tt} R_{tt} + g^{rr} R_{rr} + g^{\theta\theta} R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi} R_{\phi\phi} ,$$

$$R = 2e^{-2\Lambda} \left[\Phi'' + \Phi'^2 - \Lambda'\Phi' + \frac{2}{r}(\Phi'\Lambda') + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) \right] . \quad (2.30)$$

Tensor de Einstein e seu traço

A partir daqui iremos trabalhar apenas com a parte espacial do tensor de Ricci gerado a partir da métrica do espaço-tempo esfericamente simétrica e estática, equação (2.3), e definiremos a função relacionada a parte temporal da métrica como nula, ou seja, $\Phi = 0$. Após determinar as mudanças necessárias, teremos os elementos espaciais do tensor de Ricci e também o seu escalar como sendo:

$$R_{rr} = \frac{2\Lambda'}{r} , \quad (2.31)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\Lambda}(r\Lambda' - 1) + 1 , \quad (2.32)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \left[e^{-2\Lambda}(r\Lambda' - 1) + 1 \right] , \quad (2.33)$$

$$R = 2e^{-2\Lambda} \left[-\frac{2\Lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) \right] . \quad (2.34)$$

Seja o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} , \quad (2.35)$$

e o seu traço,

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} , \quad (2.36)$$

temos que encontrar os componentes que serão multiplicadas pela métrica contravariante. Co-

meçando por G_{rr} temos que

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} \quad , \quad (2.37)$$

$$G_{rr} = \frac{2\Lambda'}{r} + \frac{1}{2} \left\{ 2e^{-2\Lambda} \left[-\frac{2\Lambda'}{r} + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) \right] \right\} e^{2\Lambda} \quad , \quad (2.38)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) \quad . \quad (2.39)$$

Efetuada o mesmo processo para os outros termos vamos encontrar

$$G_{\theta\theta} = -re^{-2\Lambda}\Lambda' \quad , \quad (2.40)$$

$$G_{\phi\phi} = -r\sin^2\theta e^{-2\Lambda}\Lambda' \quad . \quad (2.41)$$

Logo o traço, equação (2.36), será

$$G = g^{rr}G_{rr} + g^{\theta\theta}G_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}G_{\phi\phi} \quad , \quad (2.42)$$

$$G = -e^{-2\Lambda}\frac{1}{r^2}(1 - e^{2\Lambda}) - \frac{1}{r^2}(-re^{-2\Lambda}\Lambda') - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}(-r\sin^2\theta e^{-2\Lambda}\Lambda') \quad , \quad (2.43)$$

$$G = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \left[r(e^{-2\Lambda} - 1) \right] \quad . \quad (2.44)$$

2.1.2 A métrica de Robertson-Walker

Por se tratar de uma métrica homogênea temos que definir o traço do tensor de Einstein como um valor constante. Em outras palavras, exigir homogeneidade significa definir G igual a alguma constante α (SCHUTZ, 2009). Assim,

$$\alpha = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} \left[r(e^{-2\Lambda} - 1) \right] \quad , \quad (2.45)$$

integrando em r temos,

$$\frac{1}{3}\alpha r^3 + A = r(e^{-2\Lambda} - 1) \quad , \quad (2.46)$$

onde A é uma constante. Entretanto, ao fazer $r = 0$ encontramos que o valor de A é nulo. Dessa forma, o próximo passo é evidenciar o exponencial,

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\alpha r^2} \quad . \quad (2.47)$$

Repare que $g_{rr} = -e^{2\Lambda}$ e sabendo que a constante de curvatura é igual a

$$k = -\frac{\alpha}{3} \quad , \quad (2.48)$$

podemos reescrever a métrica, equação (2.3), que agora torna-se a métrica de Robertson-Walker com o fator de escala:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.49)$$

onde a constante de curvatura é igual a $k = -1$ para um espaço hiperbólico, $k = 0$ para um espaço plano e $k = 1$ para um espaço esférico.

2.2 EQUAÇÕES DE EINSTEIN

A equação desenvolvida pelo físico alemão Albert Einstein uniu dois elementos que até então não existiam na gravidade. De um lado temos a métrica e termos derivados dela, que definem a geometria do universo. Do outro lado da equação, literalmente, temos a representação da composição do universo estudado feita por meio do tensor momento-energia. Unindo lados tão distintos, a geometria do espaço-tempo e sua composição, podemos observar que o espaço-tempo sofre a influência da energia, seja ela na forma que tiver. Exemplos de formas de energia, que serão detalhadas mais a frente, são o fluxo de calor, o campo eletromagnético e a radiação. Porém, o contrário também ocorre, ou seja, a geometria também pode influenciar em como a energia atua no universo.

Ao observar a equação tensorial de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.50)$$

temos que o próximo passo é compreender sua construção e o que levou para que os elementos da equação fossem organizados desta maneira.

2.2.1 Ação de Einstein-Hilbert

O calculo variacional será o caminho que usaremos para construir as equações de Einstein. O princípio de Hamilton diz que um sistema evolui de uma condição inicial para outra com uma mínima ação (NETO, 2004). A ação é definida por uma integral que possui como elemento principal uma função escalar lagrangiana,

$$S = \int \mathcal{L} \sqrt{-g} d^n x. \quad (2.51)$$

A lagrangiana é definida pela posição e a velocidade na mecânica clássica. Como ela é uma função escalar os termos que a compõem devem ser escalares ou gerar termos escalares, por exemplo tensores contraídos. Para o caso aqui desenvolvido, dos elementos até então estudados

o tensor métrico é o termo mais recorrente e também compõe a lagrangiana, mas é representada pelo seu escalar. A justificativa para adicionarmos a métrica é que nela se encontram o tempo e o espaço, o que faz dela uma variável dinâmica (CARROLL, 2004). Contudo, o escalar da métrica não é o único termo que compõe a função lagrangiana.

Como demonstrado anteriormente, a partir da métrica tem-se o símbolo de Christoffel, que é fundamental para obter o tensor de Riemann, que por sua vez gera o tensor de Ricci e, por fim, o escalar de Ricci. Usaremos o escalar do termo que contém todos os outros termos gerados pela métrica e o único escalar obtido com o auxílio da métrica e que não é maior que sua segunda derivada, nós já conhecemos, é o Escalar de Ricci (CARROLL, 2004). Por isso, a ação ganha a seguinte forma,

$$S = \int \sqrt{-g} R \, d^n x. \quad (2.52)$$

Em busca de alcançar nosso objetivo, vamos expandir a equação acima e trabalhar em sua variação,

$$S = \int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \, d^n x, \quad (2.53)$$

$$\delta S = \int [\delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}] \, d^n x \quad (2.54)$$

Do primeiro termo da integral, equação (2.54), temos a variação do determinante da métrica, como termo principal a ser estudado, logo,

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2} \frac{-\delta g}{\sqrt{-g}}, \quad (2.55)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \frac{\delta g}{g}. \quad (2.56)$$

Para ajudar na simplificação iremos usar uma propriedade matemática (NETO, 2010),

$$\det A = \exp(\text{Tr} \ln A), \quad (2.57)$$

onde A é uma matriz, aplicando a variância,

$$\delta \det A = \delta [\exp(\text{Tr} \ln A)], \quad (2.58)$$

$$= \delta(\text{Tr} \ln A) \exp(\text{Tr} \ln A), \quad (2.59)$$

$$= \text{Tr}(A^{-1} \delta A) \det A, \quad (2.60)$$

fazendo $A \rightarrow g_{\mu\nu}$ e $A^{-1} \rightarrow g^{\mu\nu}$ e utilizando a propriedade cíclica do traço, teremos,

$$\delta g = g (g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}). \quad (2.61)$$

O segundo termo da integral, equação (2.54), tem a variação aplicada no tensor métrico contravariante. O nosso objetivo aqui é deixar este como está. Por isso, a partir de uma rápida manipulação matemática, iremos fazer da variação do primeiro termo, equação (2.56), uma também variação do tensor métrico contravariante para que possamos colocar em evidência. Seja,

$$g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} = \delta^{\rho}_{\nu} \quad , \quad (2.62)$$

aplica-se a variação nos dois lados da equação e

$$\delta\delta^{\rho}_{\nu} = \delta g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} + g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.63)$$

$$0 = g_{\mu\rho}\delta g_{\nu\sigma}g^{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.64)$$

$$-\delta^{\sigma}_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.65)$$

$$-\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \quad , \quad (2.66)$$

o próximo passo é tomar a equação (2.66) e colocar na equação (2.61),

$$\delta g = -g \left(g^{\mu\nu}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \right) , \quad (2.67)$$

$$= -g \left(\delta^{\nu}_{\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \right) , \quad (2.68)$$

$$= -g \left(g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma} \right) , \quad (2.69)$$

Assim, a variação da raiz do determinante da métrica, equação (2.56), após o trabalho matemático, fica como

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad , \quad (2.70)$$

ao colocar a atenção mais uma vez na variação da ação, equação (2.54), após analisarmos o primeiro e segundo elemento, iremos observar que agora apenas falta a variação do tensor de Ricci.

O terceiro termo da integral da variação da ação a ser analisado, equação (2.54), é a variação do tensor de Ricci, iremos abordar o tensor a partir de sua definição. Ou seja, o tensor de Ricci a partir do tensor de Riemann e indo mais a fundo, a partir dos símbolos de Christoffel. Por isso, seja a variação do tensor de Ricci,

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad , \quad (2.71)$$

$$= \delta \left(\partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \right) , \quad (2.72)$$

$$= \delta(\partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}) - \delta(\partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu}) + \delta\Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\alpha\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \delta\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu} \quad . \quad (2.73)$$

Lembrando da derivada covariante para vetores covariantes, contravariantes e tensores, temos os fundamentos necessários para fazer a derivada do símbolo de Christoffel (SCHUTZ, 2009).

Vamos fazer a derivada covariante para dois símbolos de Christoffel,

$$\nabla_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} = \partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \quad , \quad (2.74)$$

$$\nabla_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} \quad , \quad (2.75)$$

para continuar a construção das equações de Einstein, iremos aplicar a variação em cada símbolo de Christoffel, aplicar a derivada covariante e fazer a diferença entre elas. Logo, teremos,

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} &= \delta(\partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \delta(\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) + \\ &\quad - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\delta\Gamma_{\lambda\mu}^{\alpha} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} \quad , \quad (2.76) \end{aligned}$$

simplificando,

$$\nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} = \delta(\partial_{\alpha}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha}) - \delta(\partial_{\nu}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha}) + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda}\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\alpha}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \quad (2.77)$$

Ao comparar a variação do tensor de Ricci, equação (2.73), com a expressão que encontramos há pouco, equação (2.77), é observado que trata-se da mesma equação. O que nos permite afirmar que

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \quad . \quad (2.78)$$

Feito os três passos no estudo da integral, equação (2.54), vamos retornar a ela com as novas expressões que foram encontradas, logo,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \right] d^n x + \\ &\quad + \int [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\nabla_{\alpha}\delta\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha})] d^n x, \quad (2.79) \end{aligned}$$

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right] \delta g^{\mu\nu} d^n x + \int \sqrt{-g} \nabla_{\lambda} \left[g^{\mu\nu} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \right] d^n x. \quad (2.80)$$

Da equação acima, no termo mais a direita, temos uma integral que quando aplicado o teorema de Stokes no limite do infinito, então, tenderá a zero (CARROLL, 2004). Dessa maneira, a variação do tensor de Ricci não é considerada na integral,

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right] \delta g^{\mu\nu} d^n x. \quad (2.81)$$

Ao excluir tal termo e ao aplicar o princípio de mínima ação, o que leva a variação da ação total

a zero, observa-se uma nova relação para o caso das equações de Einstein no vácuo,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0, \quad (2.82)$$

onde S_H é a ação de Einstein-Hilbert, que foi o objeto de estudo nesta seção. Por fim, as equações de Einstein no vácuo descritas no formalismo tensorial é definida como sendo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (2.83)$$

2.2.2 Equações de Einstein

Porém, o Universo não é feito apenas de vazios. Para adicionar matéria, a partir do cálculo variacional, é necessário adicionar outro termo da ação que comporte a matéria e aplicar a variação, por isso temos,

$$S = kS_H + S_M \quad (2.84)$$

onde k é uma constante. Ao aplicar a relação da variação, observada na equação (2.82), na ação total, vamos ter,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = k \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.85)$$

$$= k \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.86)$$

A variação da ação total é nula, como já foi dito, pelo princípio de mínima ação. Já a variação da ação da matéria tem uma relação com o tensor momento-energia (CARROLL, 2004),

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.87)$$

voltando a equação (2.86) com os novos elementos,

$$0 = k \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \quad , \quad (2.88)$$

temos enfim as equações de Einstein no formalismo tensorial como sendo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad . \quad (2.89)$$

2.3 TENSOR MOMENTO-ENERGIA

Nesta seção iremos abordar alguns dos vários tensores momento-energia que se complementam dependendo das condições do universo. Eles são essenciais para a solução das equações de Einstein em um universo com conteúdo material. Nosso objetivo é observar suas particularidades e possíveis aplicações.

2.3.1 Fluido perfeito

O tensor momento-energia de um fluido perfeito tem como componentes a 4-velocidade (u_μ) do fluido, pressão (p), densidade (ρ) e a métrica ($g_{\mu\nu}$). Todos esses termos são organizados da seguinte maneira:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.90)$$

Um fluido perfeito na mecânica clássica é aquele que ignora a viscosidade (NUSSENZVEIG, 2002). Seu conceito é de um elemento ideal com viscosidade e fluxo de calor desprezíveis (ELLIS, 2009). No caso da relatividade geral no fluido perfeito estão ausentes a tensão de cisalhamento, pressão anisotrópica e a viscosidade (MISNER; THORNE; WHEELER, 1973).

A importância de tal fluido se dá na sua simplicidade. É usada no modelo de Friedmann, teoria cosmológica que, acredita-se, retrata bem o universo presente. Existe ainda um caso específico também muito usado. Quando o meio é feito por poeira ($p = 0$) temos a configuração do tensor momento-energia para o fluido perfeito, simplificado, na seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu \quad (2.91)$$

2.3.2 Fluxo de calor

Ao ter no universo movimento do fluido devido a troca de calor o tensor momento-energia para o fluido perfeito não se aplica. Então, faz-se necessário uma complementação que é representada como sendo:

$$T_{\mu\nu} = q_\mu u_\nu + q_\nu u_\mu, \quad (2.92)$$

onde q_μ é o vetor que representa o fluxo de calor, já u_μ é a mesma 4-velocidade da seção 2.3.1. Os dois são ortogonais entre si, ou seja, $q_\mu u^\mu = 0$. A 4-velocidade tem contribuição temporal e o vetor do fluxo de calor possui contribuição espacial.

Sua importância se dá em modelos cosmológicos não-homogêneos porque variações de temperatura são esperados (KRASINSKI, 2006). Pois, com a variação da densidade e pressão é possível

a colisão das partículas do fluido. É então natural supor que a transferência de calor entre partículas do fluido ocorra. Essa é a principal motivação para considerar soluções cosmológicas com fluxo de calor (KRASINSKI, 2006).

2.3.3 Viscosidade

Na seção 2.3.1 definimos o fluido perfeito como sem viscosidade. Porém, existem casos onde o universo pode ser descrito com um grau de viscosidade e para estes o tensor momento-energia é descrito como (LIGHTMAN et al., 1975),

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p - \zeta\theta)u_\mu u_\nu - (p - \zeta\theta)g_{\mu\nu} - 2\eta\sigma_{\mu\nu}, \quad (2.93)$$

aqui, além dos termos já conhecidos, temos também o termo de viscosidade ($\zeta\theta$) onde ζ é um coeficiente de viscosidade multiplicado pela expansão escalar (θ). Observe que o termo de viscosidade sempre acompanha a pressão, os dois estão atrelados. Os outros termos são, o fator de cisalhamento da viscosidade (η) multiplicado pelo tensor de cisalhamento ($\sigma_{\mu\nu}$) que formam o tensor de viscosidade.

Outro ponto a ser notado é que ao cancelarmos os fatores de cisalhamento e viscosidade, retornaremos ao fluido perfeito. Como deve ser.

2.3.4 Fluido nulo

Existe ainda o caso em que a energia é transportada em uma mesma direção na velocidade da luz, nesse caso, o tensor momento-energia é conhecido como fluido nulo ou de radiação pura (STEPHANI et al., 2009). Sendo,

$$T_{\mu\nu} = \tau\kappa_\mu\kappa_\nu, \quad (2.94)$$

onde τ é um coeficiente e o vetor κ_μ indica a direção do fluido nulo. Caso ele seja paralelo ao fluido perfeito temos que $\kappa_\mu u^\mu = 1$.

Tomemos como exemplo o caso em que o campo eletromagnético seja nulo. Temos as seguintes relações,

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.95)$$

$$F_{[\alpha\beta}F_{\gamma\delta]} = 0, \quad (2.96)$$

$$F_{\mu\nu} = \lambda(\omega_\mu\kappa_\nu - \omega_\nu\kappa_\mu); \quad (2.97)$$

o tensor momento-energia eletromagnético é

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\alpha}^{\mu} F_{\mu\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right), \quad (2.98)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \lambda (\omega_{\alpha} \kappa^{\mu} - \omega^{\mu} \kappa_{\alpha}) \lambda (\omega_{\mu} \kappa_{\beta} - \omega_{\beta} \kappa_{\mu}). \quad (2.99)$$

Devido as condições do problema temos as relações (KRASINSKI, 2006):

$$\kappa_{\mu} \kappa^{\mu} = \kappa_{\mu} \omega^{\mu} = 0, \quad (2.100)$$

$$\omega_{\mu} \omega^{\mu} = -1, \quad (2.101)$$

assim teremos,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta}, \quad (2.102)$$

$$T_{\alpha\beta} = \tau \kappa_{\alpha} \kappa_{\beta}. \quad (2.103)$$

2.3.5 Campo escalar

Em tempos primordiais do universo campos quânticos eram fundamentais e seus efeitos eram representados por campos escalares (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Os campos escalares também contribuem com o tensor momento-energia. A partir de sua ação com:

$$S = \int d^n x \sqrt{-g} L, \quad (2.104)$$

e

$$L = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi g^{\mu\nu} - V(\phi), \quad (2.105)$$

obtemos

$$\delta S = \int d^n x \left[\sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi \delta g^{\mu\nu} \right) + \delta \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi g^{\mu\nu} - V(\phi) \right) \right]. \quad (2.106)$$

Para simplificar nós iremos usar uma propriedade da variação (CARROLL, 2004),

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \quad (2.107)$$

$$= \frac{g}{2\sqrt{-g}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.108)$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.109)$$

assim temos que a variação da ação é,

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) + \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right) \left(-\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial_\sigma \phi g^{\rho\sigma} - V(\phi) \right) \right]. \quad (2.110)$$

Utilizando da equação (2.87) temos o tensor momento-energia para o campo escalar:

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{1}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\left(-\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) + \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right) \left(-\frac{1}{2} \partial_\rho \phi \partial^\rho \phi - V(\phi) \right) \right], \quad (2.111)$$

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \phi_{,\rho} \phi^{,\rho} + V(\phi) \right) \quad (2.112)$$

2.3.6 Campo eletromagnético

A astronomia tem relação direta com a luz. Por meio de ondas eletromagnéticas que são emitidas e propagam-se a partir de estrelas, e que são refletidas por planetas e por outros astros, nós podemos fazer observações astronômicas. O campo eletromagnético é um dos conteúdos materiais do universo, e por isso, também contribui com um tensor momento-energia.

Seja a força de Lorentz descrita da forma quadridimensional,

$$m \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\nu\lambda} u_\lambda, \quad (2.113)$$

e a densidade de corrente,

$$J_\lambda = \rho u_\lambda, \quad (2.114)$$

podemos fazer as seguintes adequações, a partir da equação (2.113), para que a força de Lorentz seja convertida em densidade da força de Lorentz,

$$m \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{q}{c} F^{\nu\lambda} u_\lambda, \quad (2.115)$$

$$\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{1}{c} \rho F^{\nu\lambda} u_\lambda, \quad (2.116)$$

$$\mu \frac{du^\nu}{d\tau} = \frac{1}{c} F^{\nu\lambda} J_\lambda, \quad (2.117)$$

$$f^\nu = \frac{1}{c} F^{\nu\lambda} J_\lambda. \quad (2.118)$$

Vamos agora introduzir uma outra forma da densidade de corrente, onde os campos eletromagnéticos vindos de um fonte externa satisfazem as equações de Maxwell não-homogêneas (JACKSON, 1999),

$$J_\lambda = \frac{c}{4\pi} \partial^\sigma F_{\sigma\lambda}, \quad (2.119)$$

que deve ser substituída na equação (2.118), ficando como

$$f^\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\nu\lambda} \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} \quad . \quad (2.120)$$

Sabendo da relação entre a densidade da força de Lorentz e o tensor momento-energia (JACKSON, 1999),

$$f^\beta = -\partial_\alpha T^{\alpha\beta} \quad , \quad (2.121)$$

a equação (2.120) ganha um novo sentido,

$$\tilde{f}^\nu = \frac{1}{4\pi} F^{\nu\lambda} \partial^\sigma F_{\sigma\lambda} \quad , \quad (2.122)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma (F^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}) - \frac{1}{4\pi} F_{\sigma\lambda} \partial^\sigma F^{\nu\lambda} \quad , \quad (2.123)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma (F^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}) - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} (F_{\sigma\lambda} \partial^\sigma F^{\nu\lambda} + F_{\lambda\sigma} \partial^\lambda F^{\nu\sigma}) \right] , \quad (2.124)$$

observando a natureza antissimétrica do campo eletromagnético,

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad , \quad (2.125)$$

temos,

$$\tilde{f}^\nu = \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma (F^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}) - \frac{1}{8\pi} F_{\sigma\lambda} (\partial^\sigma F^{\nu\lambda} + \partial^\lambda F^{\sigma\nu}) , \quad (2.126)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma (F^{\nu\lambda} F_{\sigma\lambda}) - \frac{1}{16\pi} \partial^\nu (F_{\sigma\lambda} F^{\sigma\lambda}) , \quad (2.127)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \partial^\sigma (F_{\sigma\lambda} F^{\nu\lambda}) - \frac{1}{16\pi} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma (F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) , \quad (2.128)$$

$$= -\partial_\sigma \left[\frac{1}{4\pi} (F^\sigma{}_\lambda F^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} g^{\sigma\nu} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) \right] . \quad (2.129)$$

Logo, o tensor momento-energia para o campo eletromagnético é:

$$T^{\nu\sigma} = \frac{1}{4\pi} (F^\nu{}_\lambda F^{\lambda\sigma} + \frac{1}{4} g^{\nu\sigma} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda}) , \quad (2.130)$$

ou ainda,

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (F_\alpha{}^\mu F_{\mu\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) . \quad (2.131)$$

2.4 AS EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Após estudar como é formado o tensor de Einstein, equação (2.35), a métrica, isotrópica e homogênea, de Robertson-Walker, equação (2.49), e como esses elementos se relacionam com o

tensor momento-energia por meio das equações de Einstein, equação (2.89), temos as ferramentas necessárias para aplicar tais termos em busca das equações de Friedmann.

O primeiro passo é encontrar o tensor de Einstein para a métrica de Robertson-Walker. Ao fazer todas as relações desde a métrica até o escalar de Ricci, passando pelo símbolo de Christoffel, tensor de Riemann e o de Ricci, temos as seguintes expressões:

$$G_{00} = \frac{3(\alpha + \dot{a}^2)}{a^2}, \quad (2.132)$$

$$G_{11} = -\frac{\alpha + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{1 - \alpha r^2}, \quad (2.133)$$

$$G_{22} = -r^2(\alpha + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}), \quad (2.134)$$

$$G_{33} = -r^2 \sin^2 \theta (\alpha + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}), \quad (2.135)$$

onde α é a constante de curvatura proveniente da métrica de Robertson-Walker e a é o fator de escala.

As equações de Einstein são compostas pelo tensor de Einstein do lado esquerdo e o tensor momento-energia do lado direito, aqui usaremos o tensor momento-energia para o caso do fluido perfeito, equação (2.90). Ao relacionar tais tensores temos

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.136)$$

expandindo o lado direito observamos as quadri-velocidades, aonde o produto desses dois vetores é nulo quando os índices são diferentes de zero, $u_i u^j = 0$, e igual a um quando do contrário, $u_0 u^0 = 1$,

$$G_{\mu\nu} = \kappa[(\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}]. \quad (2.137)$$

Ao expandir também o lado esquerdo da equação (2.137), adicionando as equações (2.132), (2.133), (2.134), (2.135), após uma rápida simplificação, iremos encontrar quatro equações, mas as últimas três equações são iguais, o que nos permite remover duas, fazendo com que por fim encontrássemos:

$$\frac{3(\alpha + \dot{a}^2)}{a^2} = \kappa\rho, \quad (2.138)$$

$$\frac{\alpha + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a}}{a^2} = -\kappa p. \quad (2.139)$$

A equação, (2.138), é uma das equações de Friedmann que ao ser comparada com a teoria de Newton é reconhecida como uma integral de movimento (SCHUTZ, 2009), que é melhor

representada quando reescrita como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{\alpha}{a^2}. \quad (2.140)$$

Já a segunda equação se revela quando substituimos um termo da equação (2.139) pela primeira equação de Friedmann,

$$-\kappa p = \frac{\kappa\rho}{3} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (2.141)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\kappa\rho}{3} - \kappa p \right), \quad (2.142)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa}{6}(\rho + 3p) \quad (2.143)$$

também podendo ser chamada de equação de movimento (SCHUTZ, 2009).

Mas qual a importância do modelo FLRW? Ao observar o Universo, duas características surgem para grandes distâncias, maiores que 10 Mpc (SCHUTZ, 2009), conhecidas como larga-escala. A primeira é que o Universo é uniforme, e dessa forma as equações de Einstein são apenas uma escolha de coordenadas (LIMA, 1982). Isso acontece pois o Universo é como uma estrutura que não tem uma parte desigual, possuindo uma mesma densidade média (SCHUTZ, 2009). Em acordo com tal característica, um observador descreverá a mesma estrutura que outro observador não importando seu referencial ao longo do tempo (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012). Ou seja, o Universo também é isotrópico.

3 O MODELO KANTOWSKI - SACHS

Neste capítulo iremos abordar a métrica de Kantowski - Sachs (K-S) com o objetivo de resolver a equação de Einstein para o tensor momento-energia com valores equivalentes a poeira. Em um segundo momento procuraremos, a partir de uma relação entre os fatores de escala, encontrar a solução para matéria rígida e por fim, problematizar em busca de novas soluções. Esses dois assuntos são reproduções dos artigos de (KANTOWSKI; SACHS, 1966) e de (ADHAV et al., 2008). Aqui nós buscamos explicitar o que eles fizeram para ter uma compreensão melhor do modelo e assim conseguir propor uma nova alternativa no próximo capítulo.

O espaço-tempo de Kantowski-Sachs é um modelo anisotrópico e homogêneo e tem sua importância em estudos sobre energia escura (ADHAV et al., 2011), sobre gravitação quântica em loop (MODESTO, 2006) e o Big Bang (WEBER, 1985) sendo considerado menos complexo que outros modelos anisotrópicos possui soluções clássicas e quânticas reconhecidas (ALVARENGA et al., 2018). Tal modelo foi publicado pela primeira vez em 1966 por Robert Kantowski e seu orientador Rainer Sachs, sendo eles da Universidade do Texas. O propósito deles era propor uma nova métrica para a equação de Einstein com o tensor momento-energia para o fluido perfeito, em um caso particular onde $p = 0$, ou seja, poeira. Neste artigo compara-se o novo modelo gerado com o modelo de Friedmann e constata-se que em alguns casos existe uma correspondência entre os modelos (KANTOWSKI; SACHS, 1966).

Aqui cabe um esclarecimento, quando falamos sobre poeira, ou matéria rígida, ou ainda, gás de fóton e radiação, nós estamos referindo-nos a relação gerada entre a pressão e a densidade de energia descrita pela equação de estado,

$$p = \omega\rho, \tag{3.1}$$

aonde p é a pressão, ω é uma constante e ρ é a densidade. Onde, a poeira tem $p = 0$, gás de fótons $p = \frac{1}{3}\rho$, matéria rígida $p = \rho$ e o vácuo $p = -\rho$ (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012).

3.1 CARACTERÍSTICAS DOS MEIOS MATERIAIS

3.1.1 Poeira ($\omega = 0$)

Quando o parâmetro ω é nulo temos um meio com conteúdo material livre de pressão, ou seja,

$$p = 0, \quad (3.2)$$

e também temos um meio não-relativístico. Pressão nula significa que o gás e as partículas que o compõem não estão sofrendo com uma força externa. Caso o contrário, teríamos um aumento da agitação interna do gás e de sua velocidade.

O tensor momento-energia representa a composição do Universo. Devemos imaginar um espaço gigantesco, onde as partículas que compõe são as galáxias. Mas tudo isso é enxergado como um fluido que tem em sua composição pontos massivos, galáxias, sem estrutura interna (MONERAT et al., 2020), assim elas não colidem e não pressionam umas as outras.

Essa ideia de falta de estrutura interna é fácil compreender. Galáxias são aglomerados de estrelas orbitando, muito provavelmente, um buraco negro super massivo em seu centro. As distâncias entre as estrelas são gigantescas em comparação com seus diâmetros. Daí, em um choque entre galáxias compreende-se que é difícil o encontro entre suas estruturas internas, ou seja, de suas estrelas.

Além disso, em modelos livre de pressão é possível o cálculo analítico do desvio para o vermelho (COLES; LUCCHIN, 2003). Tal desvio é importantíssimo, a frequência da luz é alterada dependendo se o objeto vem na direção do observado, desvio para o azul, ou se afasta, desvio para o vermelho. Um exemplo da utilidade desse efeito na astrofísica é que exoplanetas são encontrados ao observar esse efeito em estrelas, pois ao observar uma estrela que contenha exoplanetas nota-se que ela desenvolve uma órbita ao redor do centro de massa desse sistema e para um observador a estrela se afasta e se aproxima gerando um efeito de desvio para o azul e para o vermelho. Essa alteração na frequência da luz observada é conhecida como efeito Doppler da luz. Após calcular a diferença do comprimento de onda ocasionada pelo efeito Doppler tem-se a velocidade radial da estrela que é consequência direta da presença de um exoplaneta. O método de detecção de exoplanetas a partir da velocidade radial é o principal método, responsável por quase a totalidade de exoplanetas encontrados até hoje (MARTIOLI, 2006). Além disso, o efeito Doppler foi importante na constatação de que o Universo está em expansão, onde que o desvio para o vermelho foi observado no distanciamento das galáxias, neste caso temos o efeito Doppler gravitacional. Por fim, em ondas sonoras também é notado o efeito Doppler. Um exemplo simples é o som de uma ambulância com a sirene ligada, o som é mais agudo quando ela vem

se aproximando e mais grave quando vai se afastando.

3.1.2 Radiação ($\omega = \frac{1}{3}$)

Se por um lado a poeira representa um Universo de baixas velocidades, no caso de um modelo de gás de fótons, ou radioativo, temos o oposto, um fluido não-degenerado com partículas relativísticas em equilíbrio térmico (COLES; LUCCHIN, 2003). O Universo tinha essa característica principalmente em seu início até o momento em que as densidades da matéria e da luz se igualaram (PEACOCK, 1998). Nesse ambiente de altas energias podemos constatar que terá altas velocidades ao observar uma relação que surgirá a partir da equação de estado, mas para isso é necessário destacar a velocidade da luz, logo temos a equação de estado sendo:

$$p = \frac{1}{3}\rho c^2, \quad (3.3)$$

onde podemos usar uma equação da termodinâmica que relaciona pressão, densidade e velocidade,

$$v_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

com v_S sendo a velocidade do som, temos a relação abaixo indicando o ambiente de altíssimas velocidades que representa o ambiente do gás de fótons:

$$v_S = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (3.5)$$

Um ponto que mostra a expansão do Universo nesse meio é a relação da densidade com o fator de escala onde $\rho \propto a^{-4}$ (MONERAT et al., 2020). Pois fim, a equação de estado que representa a radiação, retornando $c = 1$, é:

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (3.6)$$

3.1.3 Matéria rígida ($\omega = 1$)

Antes da era radioativa tivemos uma época onde $p = \rho$, conhecida como a era da matéria rígida, ou que pode ser chamada como era do campo escalar não massivo. Porém, qual o motivo de acreditarmos que a matéria rígida vem antes do gás de fótons? A radiação tinha sua densidade de energia inversamente proporcional a quarta potência do fator de escala ($\rho \propto a^{-4}$), já a matéria rígida tem essa proporção a sexta potência ($\rho \propto a^{-6}$) (NEVES et al., 2011). Isso indica que na era da matéria rígida a temperatura no Universo era maior devido a compressão, indicando um tempo anterior a era da radiação.

Este modelo, onde $\omega = 1$, é o limite permitido, ou seja, o parâmetro " ω " não pode ser maior que um, pois se assim o for a velocidade do som, nesse era de grandes densidades e pressões, seria maior que a velocidade da luz (ZEL'DOVICH, 1962). Vejamos o limite algebricamente, a partir da equação (3.4) e da equação de estado com a velocidade da luz descrita para um melhor entendimento,

$$p = \rho c^2, \quad (3.7)$$

$$v_S = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S^{\frac{1}{2}},$$

$$v_S = c. \quad (3.8)$$

A importância do estudo da matéria rígida se dá na compreensão da expansão e do resfriamento do Universo logo após o "Big Bang". Tal como a assimetria bariônica e as perturbações na densidade de altas amplitudes, como também, das ondas gravitacionais geradas durante a inflação do Universo (OLIVEIRA-NETO et al., 2011). A relação entre pressão e densidade, representada na equação de estado, com $c = 1$, fica sendo:

$$p = \rho. \quad (3.9)$$

3.1.4 Cordas cósmicas ($\omega = -\frac{1}{3}$)

Após a era da matéria rígida, $\omega = 1$, a era radioativa, $\omega = \frac{1}{3}$, o limite seria a era material, $\omega = 0$, conforme o intervalo de Zel'dovich, onde o parâmetro (ω) varia de $0 \leq \omega \leq 1$ (COLES; LUCCHIN, 2003). Porém, com a expansão acelerada do Universo o limite teve de ser alterado. Onde $\omega > -\frac{1}{3}$, trata de uma expansão uniforme do Universo, respeitando o modelo de Friedmann, homogêneo e isotrópico. E $\omega < -\frac{1}{3}$ de uma expansão acelerada do Universo. Repare que temos um ponto de transição, esse local foi dado as cordas cósmicas. A equação de estado simples que rege esse fluido é (MONERAT et al., 2020):

$$p = -\frac{1}{3}\rho. \quad (3.10)$$

Porém o que são cordas cósmicas e qual a importância física do seu estudo? Cordas cósmicas são defeitos topológicos, que podem estar relacionados a um formato cônico do espaço-tempo (GARFINKLE, 1985), e que também podem gerar lentes gravitacionais (SOUSA; LIMA, 2018), este último um efeito da curvatura do espaço-tempo característico da relatividade geral.

3.1.5 Vácuo ($\omega = -1$)

Para falar dessa composição do universo temos que demonstrar, primeiramente, sua relação direta com a constante cosmológica (Λ). Ao adicionarmos esta na equação de Friedmann, equação (2.143), onde a constante " κ " é igual a $8\pi G$, temos

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G(\rho + 3p). \quad (3.11)$$

Podemos unir a pressão (p) e a densidade (ρ) com a constante cosmológica de modo que tenhamos versões efetivas e assim retornarmos a equação inicial, equação (2.143), da seguinte maneira (MONERAT et al., 2020),

$$p_{ef} = p - \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.12)$$

$$\rho_{ef} = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.13)$$

ao introduzir na equação (3.11),

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - 4\pi G\left(\rho_{ef} - \frac{\Lambda}{8\pi G} + 3p_{ef} + 3\frac{\Lambda}{8\pi G}\right), \quad (3.14)$$

$$= \Lambda - 4\pi G\left(\rho_{ef} + 3p_{ef} + \frac{\Lambda}{4\pi G}\right), \quad (3.15)$$

$$= -4\pi G(\rho_{ef} + 3p_{ef}), \quad (3.16)$$

temos o nosso objetivo alcançado.

Agora ao adicionar a pressão efetiva, equação (3.12), e a densidade efetiva, equação (3.13), na equação de estado, equação (3.1),

$$\omega_{ef} = \frac{p_{ef}}{\rho_{ef}}, \quad (3.17)$$

$$= \frac{p - \frac{\Lambda}{8\pi G}}{\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}} \quad (3.18)$$

pois bem, levando a pressão e a densidade próximos de zero, por se tratar do vácuo essa aproximação é fácil de realizar, temos que o parâmetro efetivo é

$$\omega_{ef} = -1. \quad (3.19)$$

Após essa demonstração podemos observar que a constante cosmológica e a energia do vácuo são praticamente sinônimos (ALVARENGA; LEMOS, 1998) e a equação de estado que representa

esse é:

$$p = -\rho. \quad (3.20)$$

Porém, existe um problema em aberto que pode vir a separar a energia do vácuo e a constante cosmológica. Quando um experimento foi feito para estudar o efeito Casimir foi encontrado um valor da energia do vácuo com uma diferença de 120 ordens de magnitude em comparação ao valor teórico. Caso a gravitação quântica indique que a energia do vácuo não tem relação com a gravidade, pode ser que a constante cosmológica seja puramente uma constante gravitacional sem relação com a energia do vácuo (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012).

O vácuo não é mais o vazio, a ausência, mas um local de onde eclodem várias partículas, pois o processo de decaimento gerado no vácuo é responsável por toda a radiação da matéria no universo atual (LIMA; TRODDEN, 1996).

3.2 O DESENVOLVIMENTO DA MÉTRICA DE KANTOWSKI-SACHS

A métrica de Kantowski-Sachs em si, consiste em dois fatores de escala em função do tempo. Tais elemento formam uma métrica homogênea, porém, anisotrópica. Nosso objetivo neste momento é a partir da métrica, alcançar o tensor de Einstein uma única vez para que possamos resolver suas equações de campo posteriormente com novas possibilidades. Logo, seja a métrica igual a:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dr^2 - b(t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.21)$$

a partir da definição do símbolo de Christoffel, equação (2.4), temos que os símbolos não nulos são:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= a\dot{a}, & \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{b}}{b}, \\ \Gamma_{22}^0 &= b\dot{b}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{33}^0 &= b\dot{b} \sin^2 \theta, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

o próximo passo é calcular os elementos do tensor de Riemann, tal como foi definido na equação (2.16), fundamentais para se obter o tensor de Ricci conforme sua definição na equação (2.17),

logo,

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= R^0_{000} + R^1_{010} + R^2_{020} + R^3_{030} \quad , \\
 &= 0 - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\ddot{b}}{b}, \\
 &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\ddot{b}}{b}, \tag{3.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= R^0_{101} + R^1_{111} + R^2_{121} + R^3_{131} \quad , \\
 &= a\ddot{a} + 0 + \frac{a\dot{a}\dot{b}}{b} + \frac{a\dot{a}\dot{S}}{S}, \\
 &= a \left(\ddot{a} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{b} \right), \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= R^0_{202} + R^1_{212} + R^2_{222} + R^3_{232} \quad , \\
 &= b\ddot{b} + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 0 + 1 + \dot{b}^2, \\
 &= b\ddot{b} + \dot{b}^2 + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 1, \tag{3.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{33} &= R^0_{303} + R^1_{313} + R^2_{323} + R^3_{333} \quad , \\
 &= b\ddot{b} \sin^2 \theta + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} \sin^2 \theta + (1 + \dot{b}^2) \sin^2 \theta + 0, \\
 &= \left(b\ddot{b} + \dot{b}^2 + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 1 \right) \sin^2 \theta \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

$$= R_{22} \sin^2 \theta. \tag{3.27}$$

Em nossa intrépida busca pelo tensor de Einstein, equação (2.35), o último termo necessário é o traço do tensor de Ricci, equação (2.29), que é dado por

$$\begin{aligned}
 R &= g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} \quad , \\
 &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\ddot{b}}{b} - \frac{a \left(\ddot{a} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{b} \right)}{a^2} - \frac{b\ddot{b} + \dot{b}^2 + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 1}{b^2} - \frac{\left(b\ddot{b} + \dot{b}^2 + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 1 \right) \sin^2 \theta}{b^2 \sin^2 \theta}, \\
 &= -\frac{2 \left[b(b\ddot{a} + 2\dot{a}\dot{b}) + a(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1) \right]}{b^2 R}, \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

logo, as componentes do tensor de Einstein são:

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} \quad , \\
 &= -\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{1}{2} \frac{2[b(b\ddot{a} + 2\dot{b}\dot{a}) + a(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1)]}{b^2a} \quad , \\
 &= 2\frac{\dot{b}\dot{a}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} \quad , \\
 &= a\left(\ddot{a} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{b}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{2[b(b\ddot{a} + 2\dot{b}\dot{a}) + a(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1)]}{b^2a}\right)(-a^2) \quad , \\
 &= -\frac{a^2(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1)}{b^2} \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} \quad , \\
 &= b\ddot{b} + \dot{b}^2 + \frac{b\dot{a}\dot{b}}{a} + 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{2[b(b\ddot{a} + 2\dot{b}\dot{a}) + a(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1)]}{b^2a}\right)(-b^2) \quad , \\
 &= -\frac{b(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{a} \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

Lembrando da relação entre os dois últimos elementos do tensor de Ricci, equação (3.27), e que também existe essa mesma relação entre os dois últimos termos do tensor métrico, ou seja, $g_{33} = g_{22} \sin^2 \theta$, o quarto elemento do tensor de Einstein é facilmente calculado como sendo,

$$\begin{aligned}
 G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} \quad , \\
 &= R_{22} \sin^2 \theta - \frac{1}{2}Rg_{22} \sin^2 \theta \quad , \\
 &= G_{22} \sin^2 \theta \quad , \\
 &= -\left[\frac{b(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{a}\right] \sin^2 \theta \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

3.3 A EXPANSÃO DO MODELO KANTOWSKI-SACHS

Agora que possuímos o tensor de Einstein a partir da métrica de Kantowski-Sachs, devemos buscar as soluções da equação de Einstein, equação (2.89), onde também pode ser representada como sendo,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad . \quad (3.33)$$

O nosso objetivo é aplicá-lo primeiramente em um modelo que contém a poeira, equação (3.2), da maneira clássica para que fique clara as características principais do modelo de Kantowski-Sachs. Após, a partir de uma relação entre os fatores de escala, iremos generalizar tal modelo, porém usaremos como meio material a matéria rígida, equação (3.9). Aqui não será feito algo novo. Nós abriremos as contas feitas em (KANTOWSKI; SACHS, 1966) e (ADHAV et al., 2008), respectivamente, buscando analisar o que foi trabalhado pelos autores procurando elementos que nos auxiliarão mais a frente.

3.3.1 Poeira e o modelo Kantowski-Sachs

O modelo de Kantowski-Sachs é um modelo homogêneo e anisotrópico, que foi definido buscando abranger características que o modelo de Friedmann limita, tratando-se de fluido perfeito, tais como o cisalhamento, a anisotropia e a rotação (KANTOWSKI; SACHS, 1966). As equações a seguir mostra o que foi feito por (KANTOWSKI; SACHS, 1966) em seu modelo. O nosso objetivo é analisar a maneira como foi encontrada sua solução, o que será passo fundamental nos próximos desenvolvimentos.

Vamos usar o tensor momento-energia de um fluido perfeito, equação (2.90), mas com pressão nula, equação (2.91). Os tensores não estarão na forma covariante e nem contravariante, mas sim, na forma mista. Assim sendo a equação de Einstein ganha o seguinte formato,

$$G^{\mu}_{\nu} = \rho u^{\mu} u_{\nu} \quad . \quad (3.34)$$

Transformando as componentes do tensor de Einstein, equações (3.29), (3.30), (3.31) e (3.32), para a forma mista e substituindo na equação (3.34), com $u^0 u_0 = 1$, teremos essas três equações, pois o que seria a quarta equação é igual a terceira:

$$2 \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{1 + \dot{b}^2}{b^2} = \rho, \quad (3.35)$$

$$\frac{2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1}{b^2} = 0, \quad (3.36)$$

$$\frac{\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b}}{ab} = 0. \quad (3.37)$$

Observando as três equações acima, nos parece certo trabalhar primeiramente com a equação (3.36). Usando o método de substituição temos,

$$\dot{b} = v, \quad (3.38)$$

$$\ddot{b} = v \frac{dv}{db}, \quad (3.39)$$

introduzindo em (3.36) podemos diminuir a ordem de nossa equação,

$$2b \left(v \frac{dv}{db} \right) + 1 + v^2 = 0, \quad (3.40)$$

$$\frac{2v}{1+v^2} dv = -\frac{1}{b} db, \quad (3.41)$$

$$\ln |1+v^2| = -\ln |b| + \ln |k|, \quad (3.42)$$

$$\frac{db}{dt} = \sqrt{\frac{k}{b} - 1}. \quad (3.43)$$

Aqui se faz necessário outra substituição que foi proposta por (KANTOWSKI; SACHS, 1966),

$$b = k \cos^2 \eta. \quad (3.44)$$

Repare que um parâmetro η foi adicionado, este possui relação com o tempo t e é denominado como parâmetro temporal. Possui grande importância, pois busca auxiliar nas soluções do modelo. Devido a complexidade do modelo de Kantowski-Sachs é necessário usar parâmetros temporais, como no caso da solução da equação de Einstein de um fluido perfeito, onde a característica da fonte é o gás de fótons, equação (3.6), por exemplo, que usa dois parâmetros temporais em seus resultados (KANTOWSKI, 1998). Pois bem, prosseguindo com a substituição proposta, a equação (3.43) transforma-se em

$$dt = \frac{-2k \cos \eta \sin \eta}{\sqrt{\frac{k}{k \cos^2 \eta} - 1}} d\eta, \quad (3.45)$$

$$dt = \frac{-2k \cos \eta \sin \eta}{\sqrt{\frac{\sin^2 \eta}{\cos^2 \eta}}} d\eta, \quad (3.46)$$

$$dt = -2k \cos^2 \eta d\eta, \quad (3.47)$$

$$dt = -2k \frac{1}{2} (1 + \cos 2\eta) d\eta, \quad (3.48)$$

integrando encontramos a relação do tempo cosmológico,

$$t - t_o = k \left(\eta + \frac{1}{2} \sin 2\eta \right). \quad (3.49)$$

Por fim, já havíamos determinado o primeiro fator de escala, equação (3.44). E o segundo fator de escala é dado por (KANTOWSKI; SACHS, 1966) em função dos parâmetros temporais η e ε . Logo os dois fatores são,

$$\begin{aligned} b &= k \cos^2 \eta, \\ a &= \varepsilon + (\varepsilon \eta + l) \tan \eta, \end{aligned} \quad (3.50)$$

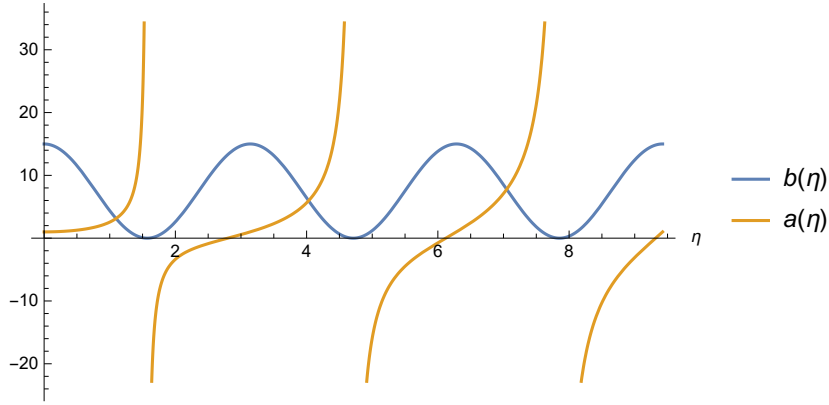


Figura 1 – Gráfico dos fatores de escala b e a em função do parâmetro temporal η .

onde, l é uma constante e o parâmetro ε pode ser igual a 0 ou 1. Na figura 1 temos um gráfico que mostra como os fatores de escala se comportam, os valores usados foram $k = 15$, $\varepsilon = 1$ e $l = 0$.

3.3.2 Matéria rígida em um modelo Kantowski-Sachs modificado

O caso que iremos estudar busca iniciar uma relação entre os fatores de escala do modelo de Kantowski-Sachs (ADHAV et al., 2008). Para solucionar a equação de Einstein usaremos o campo escalar não massivo acoplado com o fluido perfeito, para o caso da matéria rígida, onde a equação de estado é representada na equação (3.9). Nosso objetivo aqui é refazer as contas feitas em (ADHAV et al., 2008) para que possamos, após isso, desenvolver uma nova relação a partir do que foi visto. Assim sendo, seja o tensor momento-energia a soma da contribuição do fluido perfeito e do campo escalar,

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^\phi \quad , \quad (3.51)$$

onde,

$$T_{\mu\nu}^f = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad , \quad (3.52)$$

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\kappa}\phi^{,\kappa} \quad , \quad (3.53)$$

nas seguintes condições,

$$u_0 u^0 = 1, \quad (3.54)$$

$$g^{\alpha\beta}\phi_{;\alpha\beta} = 0, \quad (3.55)$$

$$\phi \rightarrow \phi(t). \quad (3.56)$$

Após definir as condições o próximo passo é encontrar os elementos da equação de Einstein e suas soluções. Logo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^f + T_{\mu\nu}^\phi, \quad (3.57)$$

para $\mu = 0$ e $\nu = 0$,

$$2\frac{\dot{b}\dot{a}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = \rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (3.58)$$

para $\mu = 1$ e $\nu = 1$,

$$\begin{aligned} -\frac{a^2(2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1)}{b^2} &= a^2p + \frac{1}{2}a^2\dot{\phi}^2, \\ \frac{2b\ddot{b} + \dot{b}^2 + 1}{b^2} &= -p - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (3.59)$$

para $\mu = 2$ e $\nu = 2$,

$$\begin{aligned} -\frac{b(\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b})}{a} &= b^2p + \frac{1}{2}b^2\dot{\phi}^2, \\ \frac{\dot{a}\dot{b} + b\ddot{a} + a\ddot{b}}{ab} &= -p - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

no caso de $\mu = 3$ e $\nu = 3$ é fácil ver que terá o mesmo resultado que a equação (3.60).

Por se tratar de matéria rígida a pressão é igual a densidade, $p = \rho$. Ao observar as equações (3.58) e (3.59) como um sistema, (3.58) e (3.60) como um outro sistema, e então unir seus pares, encontraremos duas equações, respectivamente,

$$\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = 0, \quad (3.62)$$

e por fim, ao subtrair a equação (3.61) da equação (3.62) temos uma única relação resultando, sendo ela,

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0. \quad (3.63)$$

Para modificar o modelo K-S, foi proposto uma relação entre os fatores de escala com o objetivo de diminuir o número de variáveis desconhecidas e facilitar os cálculos, devendo assim expandir as áreas que a métrica pode ser utilizada. Logo, temos a seguinte relação proposta:

$$a = hb^n, \quad (3.64)$$

que após ser feita sua derivada é encontradas mais duas relações,

$$\dot{a} = na\frac{\dot{b}}{b}, \quad (3.65)$$

$$\ddot{a} = n(n-1)a\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + na\frac{\ddot{b}}{b}. \quad (3.66)$$

Introduzindo as relações na equação (3.63), encontraremos uma equação diferencial que solucionada nos dará os fatores de escala,

$$\begin{aligned} n(n-1)a\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + n\frac{\ddot{b}}{b} + 2n\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 &= 0, \\ n\frac{\ddot{b}}{b} + n(n+1)\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$b\ddot{b} + (n+1)\dot{b}^2 = 0, \quad (3.68)$$

usando o método de substituição,

$$\dot{b} = v, \quad (3.69)$$

$$\ddot{b} = v\frac{dv}{db}, \quad (3.70)$$

em (3.68) teremos,

$$b\left(v\frac{dv}{db}\right) + (n+1)v^2 = 0, \quad (3.71)$$

$$\frac{dv}{v} = -(n+1)\frac{db}{b}, \quad (3.72)$$

$$\ln|v| = -(n+1)\ln|b| + \ln|k_1|, \quad (3.73)$$

$$v = \frac{k_1}{b^{(n+1)}}, \quad (3.74)$$

$$(3.75)$$

reavendo a substituição, $\dot{b} = v$, vamos ter

$$k_1 dt = b^{(n+1)} db, \quad (3.76)$$

$$k_1 t + k_2 = \frac{b^{(n+2)}}{n+2}, \quad (3.77)$$

logo o fator de escala $b(t)$ será:

$$\boxed{b(t) = (n+2)^{\frac{1}{n+2}} (k_1 t + k_2)^{\frac{1}{n+2}}} \quad (3.78)$$

aplicando a relação (3.64) encontraremos o outro fator de escala

$$\boxed{a(t) = h(n+2)^{\frac{n}{n+2}} (k_1 t + k_2)^{\frac{n}{n+2}}} \quad (3.79)$$

por fim, a métrica K-S transforma-se em:

$$ds^2 = dt^2 - h^2(n+2)^{\frac{2n}{n+2}}(k_1t+k_2)^{\frac{2n}{n+2}}dr^2 - (n+2)^{\frac{2}{n+2}}(k_1t+k_2)^{\frac{2}{n+2}}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (3.80)$$

Campo escalar

Agora que nosso modelo está pronto podemos usa-lo para encontrar o campo escalar. Para tanto necessitaremos da equação (3.55), logo,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu} &= g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\phi, \\ &= g^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi_{;\mu}, \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$= g^{\mu\nu}(\phi_{;\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho\phi_{;\rho}), \quad (3.82)$$

$$= g^{00}\phi_{;00} - \phi_{;0}(g^{00}\Gamma_{00}^0 + g^{11}\Gamma_{11}^0 + g^{22}\Gamma_{22}^0 + g^{33}\Gamma_{33}^0), \quad (3.83)$$

$$= \ddot{\phi} - \dot{\phi}\left(0 - \frac{1}{a^2}a\dot{a} - \frac{1}{b^2}b\dot{b} - \frac{1}{b^2\sin^2\theta}b\dot{b}\sin^2\theta\right), \quad (3.84)$$

$$= \ddot{\phi} + \dot{\phi}\left[\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}\right], \quad (3.85)$$

assim,

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}\left[\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b}\right] = 0. \quad (3.86)$$

Para resolver essa equação vamos usar, primeiro, a equação (3.65), que relaciona \dot{a} com \dot{b} , dessa forma,

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}(n+2)\frac{\dot{b}}{b} = 0, \quad (3.87)$$

sabendo que a derivada temporal de b é

$$\dot{b} = k_1 \frac{(n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1t+k_2)^{\frac{-n-1}{n+2}}}{n+2}, \quad (3.88)$$

logo,

$$\ddot{\phi} + \frac{k_1}{k_1t+k_2}\dot{\phi} = 0, \quad (3.89)$$

resolvendo essa equação diferencial encontraremos em seu caminho,

$$\frac{k_1t+k_2}{k_1}\ddot{\phi} + \dot{\phi} = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{k_1t+k_2}{k_1}\dot{\phi}\right] = 0, \quad (3.91)$$

$$\dot{\phi} = \frac{k_3}{k_1t+k_2}, \quad (3.92)$$

após esse processo temos que o campo escalar é igual a:

$$\phi(t) = k_4 \ln(k_1 t + k_2) + k_5, \quad (3.93)$$

onde $k_4 = \frac{k_3}{k_1}$.

Densidade e pressão

O passo seguinte é ir em busca da densidade e da pressão, para tanto usaremos a equação (3.59).

Já possuímos todas as variáveis necessárias com exceção da segunda derivada de b . Logo,

$$\begin{aligned} \dot{b} &= \frac{k_1(n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1 t + k_2)^{\frac{-n-1}{n+2}}}{n+2}, \\ \ddot{b} &= \frac{k_1^2(-n-1)(n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1 t + k_2)^{\frac{-2n-3}{n+2}}}{(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

ao introduzir na equação temos,

$$p = \rho = -2\frac{\ddot{b}}{b} - \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(n+1)k_1^2}{(n+2)^2(k_1 t + k_2)^2} - \left(\frac{k_1}{(n+2)(k_1 t + k_2)}\right)^2 - \frac{1}{\left((n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1 t + k_2)^{\frac{1}{n+2}}\right)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{k_3}{k_1 t + k_2}\right)^2, \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$= \frac{(2n+1)k_1^2}{(n+2)^2(k_1 t + k_2)^2} - \frac{1}{\left((n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1 t + k_2)^{\frac{1}{n+2}}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{k_3}{k_1 t + k_2}\right)^2, \quad (3.97)$$

$$(3.98)$$

logo a pressão e a densidade serão:

$$p = \rho = \frac{1}{(k_1 t + k_2)^2} \left[\frac{(2n+1)k_1^2}{(n+2)^2} - \frac{k_3^2}{2} \right] - \frac{1}{\left((n+2)^{\frac{1}{n+2}}(k_1 t + k_2)^{\frac{1}{n+2}}\right)^2}. \quad (3.99)$$

4 MODELO KANTOWSKI-SACHS MODIFICADO

4.1 O FLUIDO BAROTRÓPICO ACOPLADO A UM CAMPO ESCALAR

A partir de daqui nós iremos introduzir uma componente nova. Os modelos estudados até agora sempre abordam um fluido específico, ou seja, abordam apenas a poeira ou apenas a matéria rígida. A nossa proposta é generalizar com o intuito de não apenas ter uma relação para a matéria rígida, por exemplo, mas para qualquer fluido barotrópico. A equação de estado de um fluido barotrópico é

$$p = \alpha\rho, \quad (4.1)$$

onde α pode ser uma constante ou ainda variar com o tempo, dependendo da situação. A generalização se encontra em α pois caso ela tenha valor igual a $1/3$ estaremos abordando a radiação, porém se for nula estaremos tratando da poeira e assim sucessivamente. Sua equação de estado tem dependência apenas de uma variável, $p = p(\rho)$, impondo uma entropia constante (COLLINS; WAINWRIGHT, 1983). Nossa análise também conta com a contribuição do campo escalar no tensor momento-energia, pois geralmente campos escalares não se comportam como fluidos barotrópicos (ELLIS, 2009). Dessa forma podemos expandir nossa área de cobertura indo além do tensor momento-energia para o fluido perfeito mas abrangendo também o do campo escalar. Pois bem, o ponto de partida são as equações (3.58), (3.59) e (3.60), componentes da equação de Einstein. Porém, elas serão transformadas com a nossa condição, equação (4.1) em, respectivamente,

$$2\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = \rho + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (4.2)$$

$$2\frac{\ddot{b}}{b} + \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{1}{b^2} = -\alpha\rho - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (4.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\alpha\rho - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (4.4)$$

Se fizermos a diferença entre as equações (4.4) e (4.3), teremos,

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2} = 0, \quad (4.5)$$

e ao introduzir as relações (3.65) e (3.66) obtemos a equação acima apenas com o fator de escala $b(t)$:

$$\begin{aligned} n(n-1) \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + n \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{\dot{b}}{b} + n \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2} &= 0, \\ (n-1) \frac{\ddot{b}}{b} + (n^2-1) \left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 - \frac{1}{b^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para resolver esta equação diferencial iremos propor uma substituição para facilitar o nosso percurso, assim temos que:

$$\dot{b} = v, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{b} &= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{db} \frac{db}{dt}, \\ &= v \frac{dv}{db} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Logo, a equação de segunda ordem (4.6), agora é de primeira ordem,

$$\begin{aligned} (n-1)bv \frac{dv}{db} + (n^2-1)v^2 - 1 &= 0, \\ \frac{(n-1)v dv}{1 - (n^2-1)v^2} &= \frac{db}{b} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Uma rápida troca de variáveis é necessária,

$$w = 1 - (n^2-1)v^2, \quad (4.10)$$

$$dw = -2(n^2-1)v dv. \quad (4.11)$$

Dessa maneira,

$$\frac{db}{b} = \frac{(n-1)}{w} \frac{-dw}{2(n^2-1)}, \quad (4.12)$$

$$\frac{db}{b} = \frac{-1}{2(n+1)} \frac{dw}{w}, \quad (4.13)$$

$$\frac{1}{2(n+1)} \ln w = -\ln b + \ln \beta, \quad (4.14)$$

$$w = \left(\frac{\beta}{b}\right)^{2(n+1)} \quad (4.15)$$

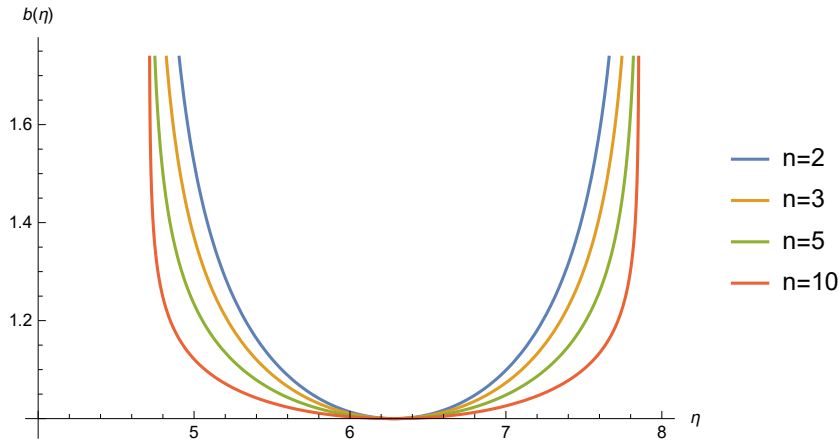


Figura 2 – Gráfico do fator de escala b para alguns valores de n .

Retornando ao fator de escala temos, ainda, a derivada temporal:

$$1 - (n^2 - 1)v^2 = \left(\frac{\beta}{b}\right)^{2(n+1)}, \quad (4.16)$$

$$\frac{db}{dt} = \frac{1}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \left(\frac{\beta}{b}\right)^{2(n+1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

Repare que na equação (4.17), n deve ser diferente de -1 , o que faria que os fatores de escala fossem inversamente proporcionas, e $+1$ que faria os fatores de escala serem iguais a não ser por uma constante, como pode ser observado na equação (3.64).

Prosseguindo, para facilitar iremos incluir um parâmetro temporal $\lambda(t)$,

$$b = \beta [\sec \lambda(t)]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (4.18)$$

$$\frac{db}{d\lambda} = \frac{\beta}{n+1} \sin \lambda [\sec \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1} \quad (4.19)$$

assim, a equação (4.17)

$$\frac{db}{dt} = \frac{\sin \lambda}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (4.20)$$

e a função $\lambda(t)$ fica,

$$\frac{d\lambda}{dt} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1}}{\beta}, \quad (4.21)$$

$$t - t_0 = \beta \left[\frac{n-1}{n+1}\right]^{\frac{1}{2}} \int [\sec \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1} d\lambda. \quad (4.22)$$

Podemos observar na figura 2 como o fator de escala $b(\lambda)$ se comporta com valores diferentes

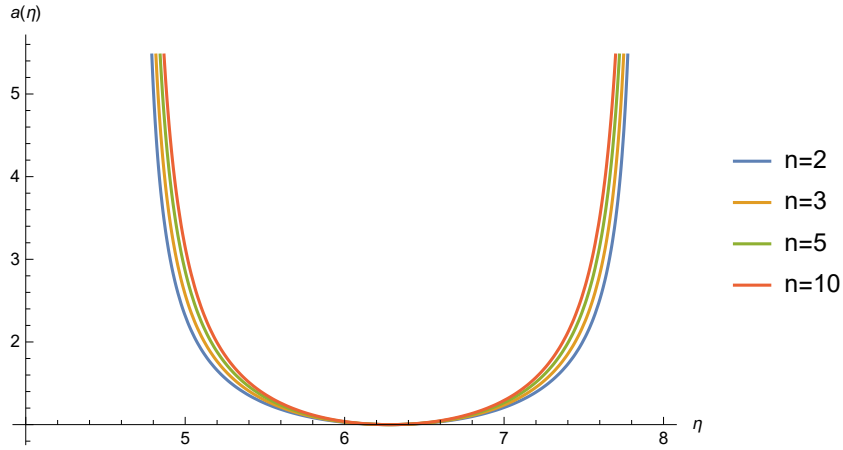


Figura 3 – Gráfico do fator de escala a para alguns valores de n .

para n . Da mesma forma que temos o fator de escala $b(\lambda)$, também possuímos o fator de escala $a(\lambda)$ usando a relação definida na equação (3.64) temos

$$a = h\beta [\sec \lambda(t)]^{\frac{n}{n+1}} \quad (4.23)$$

e na figura 3 podemos observar como se comporta o fator de escala a . Nos dois gráficos as constantes eram iguais a um.

Pois bem, o próximo passo é usar a relação (3.65) na equação (4.2),

$$\begin{aligned} 2n \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} &= \rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \\ (2n+1) \left(\frac{\dot{b}}{b} \right)^2 + \frac{1}{b^2} &= \rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (4.24)$$

Usando as equações (4.20) e (4.18),

$$\frac{(2n+1)}{\beta^2(n^2-1)} [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}} \sin^2 \lambda + \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2} = \rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (4.25)$$

$$\frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [(2n+1)(1 - \cos^2 \lambda) + (n^2-1)] = \rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2, \quad (4.26)$$

$$\frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [n^2 + 2n - (2n+1) \cos^2 \lambda] = \rho + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \quad (4.27)$$

Caso tomemos $\dot{\phi} = 0$ temos a densidade igual a:

$$\rho = \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [n^2 + 2n - (2n+1) \cos^2 \lambda] \quad (4.28)$$

Por outro lado, caso a derivada temporal do campo escalar não seja nulo, então iremos unir as equações (4.2) e (4.3), mas a equação (4.2) já está na forma de λ , como mostra a equação (4.27).

Por isso, vamos trabalhar a equação (4.3), para tanto temos que encontrar a segunda derivada temporal do fator de escala b ,

$$\ddot{b} = \frac{d(\dot{b})}{dt} = \frac{d(\dot{b})}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad (4.29)$$

$$\ddot{b} = \frac{\cos \lambda}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1}}{\beta}, \quad (4.30)$$

$$\ddot{b} = \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+2}}{\beta(n-1)}, \quad (4.31)$$

adicionando na equação,

$$2 \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2}}{\beta^2(n-1)} + \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}} \sin^2 \lambda}{\beta^2(n^2-1)} + \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2} = -\alpha\rho - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2, \quad (4.32)$$

$$\frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [2(n+1)\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda + (n^2-1)] = -\alpha\rho - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2. \quad (4.33)$$

Somando as equações (4.27) e (4.33),

$$\frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [2(n+1)\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda + (n^2-1) + n^2 + 2n - (2n+1)\cos^2 \lambda] = (1-\alpha)\rho,$$

simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [(n+1)^2 + (n^2-1)] &= (1-\alpha)\rho, \\ \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}}{\beta^2(n^2-1)} [2n(n+1)] &= (1-\alpha)\rho \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por fim, encontramos a densidade ρ como sendo:

$$\boxed{\rho = \frac{2n}{\beta^2(1-\alpha)(n-1)} [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}}} \quad (4.35)$$

Ao olhar a equação acima temos que α deve ser diferente de 1. Em termos práticos isso indica que o estudo tem como exceção a matéria rígida, equação (3.9). Entretanto, o artigo de (ADHAV et al., 2008) tem como fluido a matéria rígida. Assim, o nosso estudo expande e complementa o que foi apresentado anteriormente por (ADHAV et al., 2008).

4.1.1 Campo escalar

Na busca do campo escalar iremos usar a equação (3.55) que inevitavelmente chegará nas equações (3.86) e (3.87). Replicando a última citada, teremos:

$$\ddot{\phi} + \dot{\phi}(n+2)\frac{\dot{b}}{b} = 0,$$

para facilitar nossas contas usaremos a função $\lambda(t)$ no campo escalar e no fator de escala.

Primeiro o fator de escala, ao relacionar as equações (4.18) e (4.20), vamos encontrar a seguinte expressão:

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{\sin \lambda}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\beta [\sec \lambda]^{\frac{1}{n+1}}}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{1}{(n^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}}}{\beta} \quad (4.37)$$

Para o campo escalar vamos analisar, primeiramente, a primeira derivada do campo escalar, seja

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \quad (4.38)$$

adicionando a equação (4.21),

$$\dot{\phi} = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1} d\phi}{\beta d\lambda}. \quad (4.39)$$

Agora devemos fixar nossa atenção na derivada segunda do campo escalar, assim:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &= \frac{d\dot{\phi}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt}, \\ &= \frac{d\lambda}{dt} \left[\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1} d^2\phi}{\beta d\lambda^2} - \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}} d\phi}{\beta d\lambda} \right], \\ &= \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2} d^2\phi}{\beta^2 d\lambda^2} - \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+1} d\phi}{\beta^2 d\lambda}, \\ &= \left(\frac{n+1}{n-1}\right) \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2} d^2\phi}{\beta^2 d\lambda^2} - \left(\frac{n+2}{n-1}\right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+1} d\phi}{\beta^2 d\lambda}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

Fazendo as substituições na equação (3.87), encontraremos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2}}{\beta^2} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} - \left(\frac{n+2}{n-1} \right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+1}}{\beta^2} \frac{d\phi}{d\lambda} + \\ & + \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{[\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}+1}}{\beta} \frac{d\phi}{d\lambda} (n+2) \frac{1}{(n^2-1)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{1}{n+1}}}{\beta} = 0, \end{aligned}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{n+1}{n-1} \right) \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2}}{\beta^2} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} - \left(\frac{n+2}{n-1} \right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+1}}{\beta^2} \frac{d\phi}{d\lambda} \\ & + \left(\frac{n+2}{n-1} \right) \frac{\sin \lambda [\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+1}}{\beta^2} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ao observar a equação acima é fácil notar que teremos apenas a segunda derivada,

$$\left(\frac{n+1}{n-1} \right) \frac{[\cos \lambda]^{\frac{2}{n+1}+2}}{\beta^2} \frac{d^2 \phi}{d\lambda^2} = 0 \quad (4.42)$$

O resultado não trivial é a derivada primeira igual uma constante, assim,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{d\phi}{d\lambda} = 0, \quad (4.43)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = k_1, \quad (4.44)$$

Concluindo, teremos:

$$\boxed{\phi(\lambda) = k_1 \lambda + k_2} \quad (4.45)$$

5 DISCUSSÕES DOS RESULTADOS

A construção do nosso estudo parte já na introdução com um contexto histórico. Kepler, Galileu e Newton foram elementos fundamentais na compreensão de como a gravitação funciona. Entretanto, Einstein tem uma contribuição que muda a maneira como enxergamos a gravidade. Por isso, os nosso trabalho se inicia abordando os elementos das equações de Einstein. Desde a métrica, passando pelos símbolos de Christoffel, até os tensores de Riemann e Ricci. Todo esse escopo é fundamental para a compreensão de como solucionar as equações de Einstein. Porém para entendê-las, também é necessário observar as propriedades dos tensores momento-energia, os diversos que foram apresentados como o do fluido perfeito e o do campo escalar.

Na resolução das equações de Einstein tivemos que também estudar as características dos meios materiais. Por isso, apresentamos as propriedades da poeira, radiação, matéria rígida, cordas cósmicas e o vácuo. Bem como também suas respectivas equações de estado. Esses meios são fundamentais no tensor momento-energia dando as características na hora da resolução das equações. Após reconhecer todas as ferramentas necessárias para adentrar o modelo de Kantowski-Sachs o próximo passo foi apresentar dois artigos e suas contas, o primeiro foi o de (KANTOWSKI; SACHS, 1966) que tem como meio material a poeira e mostra a métrica que recebeu os seus nomes. Aqui cabe um adendo, a métrica de Kantowski-Sachs é homogênea e anisotrópica, se diferencia da métrica de Friedmann por poder comportar elementos, como o cisalhamento, em um fluido perfeito, assim consegue abranger mais características presentes no Universo. O segundo artigo foi o de (ADHAV et al., 2008) que possui como meio a matéria rígida e também utiliza a métrica de Kantowski-Sachs. Porém adiciona uma relação entre os fatores de escala.

Os fatores de escala são fundamentais, eles relacionam o tempo com a geometria estudada. Buscar relacionar estes elementos no modelo de Kantowski-Sachs visa simplificar a teoria de maneira que possa ser mais utilizada. A anisotropia do modelo abre espaço para estudos que incluem a rotação do universo, o cisalhamento e a viscosidade, tais elementos não são encontrados em teorias isotrópicas.

O que fizemos de novo nesse estudo foi a partir da métrica de Kantowski-Sachs e da relação

dos fatores de escala proposta por (ADHAV et al., 2008) solucionar as equações de Einstein para o fluido barotrópico. Em outras palavras, ao invés de escolher um determinado elemento, seja ele, poeira, radiação ou matéria rígida, buscamos deixar como fluido barotrópico. Dessa forma a teoria não é apenas para um caso particular. Repare na equação (4.35) que o parâmetro α não pode ser igual a um, isso exclui o caso da matéria rígida, onde $\alpha = 1$, fazendo com que o trabalho de (ADHAV et al., 2008) seja complementar a este e não um ponto divergente. Com objetivo de abranger uma maior área adicionamos o campo escalar acoplado no fluido perfeito. Dessa forma o nosso modelo ganha características abrangentes que devem ser objetos de estudo futuramente, pois encontramos na equação (4.45) uma equação para o campo.

O parâmetro λ , equação (4.18), é um termo que varia no tempo. Ele é amplamente usado na solução proposta por (KANTOWSKI, 1998), como fica evidenciado na equação (3.44). Ele serve para facilitar o entendimento do que foi feito, sua estrutura matemática.

O nosso objetivo era entender como um modelo cosmológico é construído, a partir da equação de Einstein, métrica e a equação de estado. Todos esses pontos foram colocados aqui. Os próximos passos devem ser observar como o novo modelo se comporta, buscar padrões similares ao que foi desenvolvido e aplicar com os dados provenientes da natureza. Para além, o modelo deve ser aplicado em estudos futuros sobre perturbações da matéria. Como também sobre energia escura e buracos negros.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 116, n. 6, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>.
- ADHAV, K. et al. Kantowski-sachs cosmological model in general theory of relativity. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 47, n. 9, p. 2314–2318, 2008.
- ADHAV, K. S. et al. Kantowski-sachs cosmological models with anisotropic dark energy. *Central European Journal of Physics*, Springer, v. 9, n. 4, p. 919–925, 2011.
- ALVARENGA, F. et al. The kantowski-sachs quantum model with stiff matter fluid. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 48, n. 4, p. 370–379, 2018.
- ALVARENGA, F. G.; LEMOS, N. A. Dynamical vacuum in quantum cosmology. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 30, n. 5, p. 681–694, 1998.
- BERTONE, G.; HOOPER, D.; SILK, J. Particle dark matter: evidence, candidates and constraints. *Physics reports*, Elsevier, v. 405, n. 5-6, p. 279–390, 2005.
- CARROLL, S. *Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity*. (S.l.): Benjamin Cummings, 2004. ISBN 0805387323,9780805387322.
- COLES, P.; LUCCHIN, F. *Cosmology: The origin and evolution of cosmic structure*. (S.l.): John Wiley & Sons, 2003.
- COLLINS, C.; WAINWRIGHT, J. Role of shear in general-relativistic cosmological and stellar models. *Physical Review D*, APS, v. 27, n. 6, p. 1209, 1983.
- ELLIS, G. F. Republication of: Relativistic cosmology. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 41, n. 3, p. 581–660, 2009.
- ELLIS, G. F.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. A. *Relativistic cosmology*. (S.l.): Cambridge University Press, 2012. ISBN 9780521381154,0521381150.
- GARFINKLE, D. General relativistic strings. *Physical Review D*, APS, v. 32, n. 6, p. 1323, 1985.
- JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. 3rd ed. ed. (S.l.): Wiley, 1999. ISBN 9780471309321,047130932X.
- KANTOWSKI, R. Some relativistic cosmological models. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 30, n. 11, p. 1665–1700, 1998.
- KANTOWSKI, R.; SACHS, R. K. Some spatially homogeneous anisotropic relativistic cosmological models. *Journal of Mathematical Physics*, v. 7, n. 3, p. 443–446, 1966. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.1704952>>.

- KRASINSKI, A. *Inhomogeneous Cosmological Models*. First edition. (S.l.): Cambridge University Press, 2006. ISBN 9780511721694,9780521481809,9780521030175.
- LIGHTMAN, A. et al. *Problem Book in Relativity and Gravitation*. 2nd printing with corrections 1979. ed. (S.l.): Princeton Univ. Press, 1975. ISBN 0691081603,9780691081601.
- LIMA, J.; TRODDEN, M. Decaying vacuum energy and deflationary cosmology in open and closed universes. *Physical Review D*, APS, v. 53, n. 8, p. 4280, 1996.
- LIMA, J. A. S. de. *Uma generalização dos modelos cosmológicos inomogêneos de Szekeres*. (S.l.): Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, 1982.
- MARTIOLI, E. *Exoplanetas: o que são e como detectá-los*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2006.
- MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. (S.l.): W.H.Freeman e Co Ltd, 1973. ISBN 0716703343,9780716703341.
- MODESTO, L. The kantowski-sachs space-time in loop quantum gravity. *International Journal of Theoretical Physics*, Springer, v. 45, n. 12, p. 2235–2246, 2006.
- MONERAT, G. et al. Quantum cosmology with many fluids and the choice of cosmological time. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 50, n. 1, p. 89–104, 2020.
- NETO, J. B. *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*. 1ª edição. ed. (S.l.): Livraria da Física, 2004.
- NETO, J. B. *Matemática para Físicos com Aplicações*. 1. ed. (S.l.): Livraria da Física, 2010.
- NEVES, C. et al. Canonical transformation for stiff matter models in quantum cosmology. In: WORLD SCIENTIFIC. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. (S.l.), 2011. v. 3, p. 324–328.
- NUSSENZVEIG, H. M. *Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor*. 4ª. ed. (S.l.): Edgard Blücher, 2002. (Curso de física básica, v. 2). ISBN 978-85-212-0299-8.
- OLIVEIRA-NETO, G. et al. An early universe model with stiff matter and a cosmological constant. In: WORLD SCIENTIFIC. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. (S.l.), 2011. v. 3, p. 254–265.
- PEACOCK, J. A. *Cosmological physics*. 1. ed. (S.l.): Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Astrophysics). ISBN 9780521422703,0521422701,052141072X,9780521410724.
- PICAZZIO, E. et al. *O Céu Que Nos Envolve - Introdução à Astronomia Para Educadores e Iniciantes*. Odysseus Editora, 2011. ISBN 978-85-7876-021-2. Disponível em: <<https://www.iag.usp.br/astrofísica/sites/default/files/OCeuQueNosEnvolve.pdf>>.
- SAGAN, C. Why we need to understand science. *Parade Magazine*, v. 10, 1989.
- SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity*. 2nd. ed. (S.l.): Cambridge University Press, 2009. ISBN 9780521887052,0521887054.
- SOUSA, M.; LIMA, A. Uma discussão sistemática sobre as cordas cósmicas e o modelo de vórtices abelianos proposto por nielsen e olesen. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 40, n. 2, 2018.

STEPHANI, H. et al. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2ed.. ed. (S.l.): Cambridge university press, 2009. ISBN 0521461367.

WEBER, E. Kantowski–sachs cosmological models as big-bang models. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 26, n. 6, p. 1308–1310, 1985.

ZEL'DOVICH, Y. B. The equation of state at ultrahigh densities and its relativistic limitations. *Soviet physics JETP*, v. 14, n. 5, 1962.