

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Análise Hamiltoniana de Teorias de Gravitação pela  
Abordagem Simplética**

**MARINIEL SOUZA GALVÃO JUNIOR**

Vitória – ES  
2021

Mariniel S. Galvão Jr.

# **Análise Hamiltoniana de Teorias de Gravitação pela Abordagem Simplética**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Davi C. Rodrigues

Vitória

2021

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

---

G182a Galvão Junior, Mariniel Souza, 1985-  
Análise hamiltoniana de teorias de gravitação pela abordagem simplética / Mariniel Souza Galvão Junior. - 2021. 211 f. : il.

Orientador: Davi Cabral Rodrigues.  
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Relatividade geral. 2. Formalismo ADM. 3. Formalismo simplético. 4. Gravitação estendida. 5. Simetrias de calibre. I. Rodrigues, Davi Cabral. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 53

---



---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

---

## **“Análise Hamiltoniana de Teorias de Gravitação pela Abordagem Simplética”**

**Mariniel Souza Galvão Junior**

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior  
(UFABC)

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues  
(Orientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Nelson Pinto-Neto  
(CBPF)

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães  
(UERJ)

Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov  
(PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 17 de junho de 2021.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
DAVI CABRAL RODRIGUES - SIAPE 1816732  
Departamento de Física - DF/CCE  
Em 18/06/2021 às 19:04

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/210575?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
JULIO CESAR FABRIS - SIAPE 297051  
Departamento de Física - DF/CCE  
Em 18/06/2021 às 19:54

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/210630?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

**PROTOCOLO DE ASSINATURA**



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por  
GALEN MIHAYLOV SOTKOV - SIAPE 2479471  
Departamento de Física - DF/CCE  
Em 18/06/2021 às 20:58

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:  
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/210683?tipoArquivo=O>

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Davi Rodrigues, pelo enorme apoio no trabalho e por ser o principal responsável por minha formação acadêmica durante os últimos anos;

Ao meu colega Álefe de Almeida, pelas frutíferas discussões;

Ao Prof. Martin Gustavo Richarte, pelas valiosas contribuições durante a pesquisa;

Meus sinceros agradecimentos à minha família: minha esposa Sílvia pelo suporte e compreensão ao longo destes últimos anos, meus filhos, Frederico e José Pedro, minha mãe, Silvânia e meu pai, Mariniel, por serem meu porto seguro e minha razão de viver;

Aos meus queridos amigos e colegas de pós-graduação Felipe, Tays, Michael, Denis, Igor, Carla, Pedro e Cássio, pela companhia nos momentos difíceis e alegres;

Ao querido e sempre solícito secretário da pós-graduação, senhor José Carlos.



# Resumo

Mostramos como aplicar sistematicamente o método simplético de Faddeev-Jackiw para Relatividade Geral (RG), extensões de RG e gravitação em tetrades acoplada a férmions. Nós também desenvolvemos uma análise completamente simplética para o cômputo de simetrias de calibre e aplicamos os resultados para RG. Isso fornece um novo e coerente esquema para análises Hamiltonianas de teorias de gravitação. A ênfase está sobre a dinâmica clássica, na descoberta dos vínculos, das transformações de calibre, tanto na superfície de vínculos quanto além dela, e do número de graus de liberdade; mas os resultados do método também são relevantes para abordagens de quantização canônica. Nós esclarecemos sutilezas acerca da abordagem simplética e tecemos comentários sobre análises Hamiltonianas de teorias de gravitação estendida baseadas no método simplético, apontando que a abordagem presente é sistemática, completa e robusta.

**Palavras-chave:** Relatividade Geral, gravidade modificada, ação de Holst-Dirac, variáveis de Ashtekar, simetrias de calibre, formulação Hamiltoniana, formalismo simplético.



# Abstract

We show how to systematically apply the Faddeev-Jackiw symplectic method to General Relativity (GR), GR extensions and tetrad gravity coupled to fermions. We also develop a completely symplectic analysis for the computing of gauge symmetries and apply the results for GR. This provides a new coherent frame for Hamiltonian analyses of gravitational theories. The emphasis is on the classical dynamics, uncovering the constraints, the gauge transformations, *in* and *off-shell*, and the number of degrees of freedom; but the method results are also relevant for canonical quantization approaches. We clarify subtleties of the symplectic approach and comment on previous symplectic-based Hamiltonian analyses of extended theories of gravity, pointing out that the present approach is systematic, complete and robust.

**Keywords:** General Relativity, modified gravity, Holst-Dirac action, Ashtekar's variables, gauge symmetry, Hamiltonian formulation, Symplectic formalism.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA DE SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADAS</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Estruturas Simpléticas em uma Variedade</b>	<b>17</b>
2.2.1	Variedade Diferenciável	17
2.2.2	Espaço Tangente, Diferencial e Espaço Cotangente	18
2.2.3	Formas Diferenciais	19
2.2.4	Variedades Simpléticas e Teorema de Darboux	20
2.2.5	Função Hamiltoniana	21
2.2.6	1-forma Lagrangiana	22
<b>2.3</b>	<b>Formalismo Simplético</b>	<b>23</b>
2.3.1	Formalismo de Faddeev-Jackiw	24
2.3.2	O algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek (BW) como extensão do método de FJ	26
2.3.3	Caso Contínuo	28
2.3.4	Simetrias de calibre na superfície de vínculos	31
2.3.5	Método Simplético com Variáveis de Grassmann	32
<b>2.4</b>	<b>Contagem dos graus de liberdade</b>	<b>35</b>
<b>2.5</b>	<b>Exemplos</b>	<b>36</b>
2.5.1	Exemplo 1: Partícula se Movendo em uma Esfera $(N - 1)$ -dimensional	36
2.5.2	Exemplo: Teoria Eletromagnética	38
<b>3</b>	<b>TRANSFORMAÇÕES DE CALIBRE NO FORMALISMO SIMPLÉTICO</b>	<b>43</b>
<b>3.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>43</b>
<b>3.2</b>	<b>Simpletrias de calibre no algoritmo BW</b>	<b>44</b>
3.2.1	Transformações de calibre <i>on-shell</i>	44
3.2.2	Transformações de calibre <i>off-shell</i>	47
<b>3.3</b>	<b>Resolvendo as equações de calibre</b>	<b>49</b>
<b>3.4</b>	<b>Exemplos</b>	<b>53</b>
3.4.1	Sistema de partículas A	53
3.4.2	Sistema de partículas B	57
3.4.3	Sistema de partículas C	59
3.4.4	Teoria de Yang-Mills	61
<b>3.5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>64</b>

<b>4</b>	<b>FORMALISMO ADM DA GRAVITAÇÃO</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>67</b>
<b>4.2</b>	<b>Geometria Riemanniana</b>	<b>68</b>
4.2.1	Variedades Riemannianas	68
4.2.2	Transporte paralelo e derivada covariante	69
4.2.3	Curvatura	71
4.2.4	Equação de Einstein	72
4.2.5	Ação de Einstein-Hilbert	73
<b>4.3</b>	<b>Geometria de Hipersuperfícies</b>	<b>74</b>
4.3.1	Foliação do Espaço-Tempo	74
4.3.2	Derivadas Temporais	75
4.3.3	Curvatura Intrínseca	76
4.3.4	Curvatura Extrínseca	77
4.3.5	Decomposição da Métrica	78
<b>4.4</b>	<b>Relações de Curvatura</b>	<b>80</b>
4.4.1	Relações de Gauss	81
4.4.2	Relações de Codazzi	81
4.4.3	A Relação de Ricci	81
4.4.4	Escalar de Curvatura no Formalismo ADM	83
<b>5</b>	<b>GRAVITAÇÕES CANÔNICAS NO FORMALISMO SIMPLÉTICO</b>	<b>85</b>
<b>5.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>85</b>
<b>5.2</b>	<b>Teoria da Relatividade Geral na forma canônica</b>	<b>85</b>
5.2.1	Obtenção da Lagrangiana de ordem zero	85
5.2.2	Notação	87
5.2.3	Iteração de ordem zero: obtenção dos vínculos	88
5.2.4	Iteração de ordem um: descobrindo as simetrias de calibre	90
5.2.5	Contagem dos graus de liberdade	93
5.2.6	Conjunto completo das transformações de calibre de RG	93
<b>5.3</b>	<b>Teoria Canônica da Gravitação de Brans-Dicke</b>	<b>95</b>
5.3.1	Forma simplética	96
5.3.2	Brans-Dicke com $\omega \neq -3/2$	101
5.3.3	Brans-Dicke com $\omega = -3/2$	104
<b>6</b>	<b>AÇÃO DE HOLST-DIRAC</b>	<b>109</b>
<b>6.1</b>	<b>Introdução</b>	<b>109</b>
<b>6.2</b>	<b>Gravitação com Tétrades</b>	<b>110</b>
6.2.1	Tétrades e Conexões	110
6.2.2	Relatividade Geral no formalismo de tétrades	113
6.2.3	Equações de Einstein na formulação de tétradas	114

<b>6.3</b>	<b>Ação de Holst</b> . . . . .	<b>116</b>
6.3.1	Termo Simplético . . . . .	117
6.3.2	Termo de difeomorfismos espaciais . . . . .	121
6.3.3	Termo Hamiltoniano . . . . .	123
6.3.4	Ação de Dirac . . . . .	124
6.3.5	Varição da ação com respeito a conexão . . . . .	128
6.3.6	Decomposição canônica da ação de Holst com fermions . . . . .	129
6.3.7	Termo simplético . . . . .	129
6.3.8	Termo de difeomorfismos . . . . .	130
6.3.9	Termo Hamiltoniano . . . . .	132
6.3.10	Contribuição Fermiônica . . . . .	132
6.3.11	Ação Canônica de Holst-Dirac . . . . .	132
<b>6.4</b>	<b>Análise Simplética da Ação de Holst-Dirac</b> . . . . .	<b>134</b>
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>149</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>153</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>165</b>
	<b>APÊNDICE A – SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS</b> . . . . .	<b>167</b>
<b>A.1</b>	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>167</b>
<b>A.2</b>	<b>Formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano</b> . . . . .	<b>168</b>
A.2.1	Lagrangiana de um sistema . . . . .	168
<b>A.3</b>	<b>Vínculos Primários</b> . . . . .	<b>168</b>
A.3.1	Equações Fortes e Fracas . . . . .	169
A.3.2	Parênteses de Poisson . . . . .	170
A.3.3	Restrição aos multiplicadores de Lagrange . . . . .	170
<b>A.4</b>	<b>Condições de Consistência e Algoritmo de Dirac-Bergman</b> . . . . .	<b>172</b>
A.4.1	Exemplos . . . . .	175
<b>A.5</b>	<b>Formalismo de Hamilton para teorias de campo clássicas</b> . . . . .	<b>177</b>
A.5.1	Espaços de dimensão infinita . . . . .	177
A.5.2	Teorias com variáveis contínuas . . . . .	178
A.5.3	Formalismo de Hamilton . . . . .	179
A.5.4	Exemplo - Campo de Schrödinger . . . . .	180
<b>A.6</b>	<b>Transformações de calibre no formalismo Hamiltoniano</b> . . . . .	<b>181</b>
A.6.1	Transformações de calibre . . . . .	181
A.6.2	Simetrias de calibre . . . . .	181
A.6.3	Transformações de calibre triviais . . . . .	183

A.6.4	Sistemas parametrizados . . . . .	183
A.7	Resolvendo as transformações de calibre: a equação mestre para simetrias de calibre no formalismo Lagrangiano . . . . .	186
A.8	Contagem dos Graus de Liberdade . . . . .	188
	<b>APÊNDICE B – DERIVADA DE LIE . . . . .</b>	<b>189</b>
	<b>APÊNDICE C – REDEFINIÇÃO DA EXPRESSÃO DO VÍNCULO <math>e^{q_1} p_2</math> E SEUS EFEITOS NO CÁLCULO DAS INVARIÂNCIAS DE CALIBRE . . . . .</b>	<b>193</b>
	<b>APÊNDICE D – O DETERMINANTE DA ESTRUTURA PRÉ-SIMPLÉTICA DE RG . . . . .</b>	<b>195</b>
	<b>APÊNDICE E – DO USO CORRETO DA DERIVADA TEMPORAL DOS VÍNCULOS . . . . .</b>	<b>197</b>
	<b>APÊNDICE F – DETERMINAÇÃO DO VÍNCULO <math>\eta_2</math> PARA BRANS-DICKE COM <math>\omega = -3/2</math> . . . . .</b>	<b>199</b>
	<b>APÊNDICE G – SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA . . . . .</b>	<b>205</b>
	<b>APÊNDICE H – ÁLGEBRA DE SPINORES . . . . .</b>	<b>207</b>

# 1 Introdução

A “irracional eficácia da matemática nas ciências naturais”[1] tem fascinado e guiado os físicos por séculos, acabando por tornar o desenvolvimento de descrições formais não apenas desejável do ponto de vista da elegância e beleza intrínsecas, mas também necessário para a evolução do conhecimento científico. Tomemos o exemplo das coordenadas generalizadas na descrição Lagrangiana que podem ser convenientemente selecionadas para explorar as simetrias de um sistema e a geometria de seus vínculos[2]. Ou o formalismo da mecânica quântica que através de espaços de Hilbert levou, por exemplo, ao enunciado do importante axioma onde se diz que valores físicos observáveis como energia e momento não podem ser considerados funções no espaço de fase, mas autovalores associados a uma função de estado[3]. Enfim, é impossível exagerar a importância da perspectiva certa na física. Neste trabalho motivações semelhantes nos levaram a investigar que informações diferentes o formalismo simplético pode fornecer sobre teorias de gravitação canônicas baseadas em Relatividade Geral (RG).

RG é atualmente a teoria padrão na descrição de fenômenos gravitacionais. A compatibilidade entre dados observacionais e a teoria da relatividade geral tem sido mostrada ao longo dos anos desde sua publicação[4] e ainda hoje novos testes são realizados comprovando o sucesso da teoria[5–8]. Apesar disso, questões abertas e anomalias motivam a investigações de descrições que vão além de RG, além dos fenômenos concernentes à gravitação quântica[9–12]. Hoje em dia, aspectos sutis de RG, especialmente acerca de suas simetrias de calibre, são muito melhor compreendidos do que eram no momento que a teoria foi proposta. Portanto, eventualmente pode ser útil o uso de RG como exemplo para análise de outras propostas em métodos matemáticos da física. Formalismos gerais que lidam com a estrutura dinâmica de teorias físicas podem desvendar propriedades úteis e fidedignas da natureza.

Um dos desenvolvimentos teóricos fundamentais de RG foi sua formulação Hamiltoniana. O trabalho pioneiro de Arnowitt, Deser e Misner (veja [13, 14] para revisões), o formalismo ADM, foi importante em vários progressos de RG, desde gravitação quântica até métodos numéricos de RG. É a formulação canônica mais utilizada de RG e é baseada em variáveis com significado dinâmico claramente estabelecido. É surpreendente que, apesar de décadas de existência, alguns de seus aspectos fundamentais acerca de simetrias de calibre e outras sutilezas foram discutidos e elucidados há apenas poucos anos atrás[15–19]. Essas questões foram discutidas dentro do formalismo padrão para sistemas vinculados, o formalismo de Dirac-Bergmann (para revisões, veja [20–22]).

Aqui consideramos outro formalismo para sistemas vinculados, o formalismo sim-

plético, mais especificamente o formalismo de Faddeev-Jackiw (FJ)[23, 24] na formulação estendida de de Barcelo Neto-Wotzasek[25, 26]. FJ, por sua vez, desenvolveram um método para lidar diretamente com a Lagrangiana de uma teoria obtendo as equações de movimento mesmo para o caso de teorias com Lagrangiana singular, para isso utilizam o teorema de Darboux de modo a transformar o conjunto de variáveis de um problema em um conjunto de variáveis canônicas independentes, à parte duma transformação de calibre. A extensão de BW inclui um procedimento iterativo para lidar sistematicamente com os vínculos.

O método FJ com algoritmo BW foi utilizado na obtenção de resultados para uma ampla gama de problemas teóricos[25–33]. Serviu também de base para extensões de outros métodos ou como princípio para gerar extensões de modelos conhecidos[29, 34–38]. A aplicação do método num contexto de gravitação é recente[39, 40] e ainda incompleta. Buscamos neste trabalho justamente desenvolver esta aplicação. Nesta tese aplicamos o método simplético na teoria da relatividade geral e na teoria de gravitação de Brans-Dicke, estudando suas consequências. Nosso objetivo com esse trabalho é investigar como o formalismo deve ser propriamente aplicado em teorias de gravitação tipo RG. No processo esclarecemos algumas questões gerais acerca do formalismo simplético e que dizem respeito não somente a teorias de gravidade. Além da aplicação a RG na sua descrição ADM padrão, também consideramos, como ilustração do método para extensões de RG, duas teorias de Brans-Dicke e a teoria ADM no formalismo de tétrades, mais especificamente, a teoria de Holst-Dirac, que é basicamente a descrição de Palatini nas variáveis de Ashtekar-Barbero acoplada à Lagrangiana de Dirac para bi-spinores. Além disso, apresentamos um método puramente simplético para a obtenção de transformações de calibre.

A tese foi estruturada em cinco capítulos. No Capítulo 2 é apresentado o formalismo simplético e sua descrição geométrica de sistemas físicos. O capítulo 3 apresenta um método simplético para o cálculo das expressões para transformação de calibre. O Capítulo 4 desenvolve o formalismo de foliações para geometria Riemanniana e as quantidades geométricas pertinentes são deduzidas em detalhes. No Capítulo 5 são resolvidos os problemas de encontrar os vínculos e as simetrias de calibre das teorias de Relatividade Geral e Brans-Dicke, além da contagem dos graus de liberdade. O Capítulo 6 trás a análise simplética da teoria de Holst-Dirac, ou a gravitação no formalismo de tétrades acoplada a férmions de Dirac. Por fim, o último capítulo traz um resumo do que foi obtido juntamente com perspectivas adicionais decorrentes do trabalho realizado. Na seção de Apêndices o primeiro é especial e traz uma revisão do formalismo de Dirac para sistemas vinculados, os principais conceitos e métodos são apresentados e discutidos. Os apêndices seguintes tratam de detalhes matemáticos e esclarecimentos pertinentes.

## 2 Geometria de Sistemas Hamiltonianos Vinculadas

### 2.1 Introdução

Um sistema mecânico é descrito completamente através da análise de sua Hamiltoniana. Explorando as características gerais de um sistema mecânico podemos descrevê-lo formalmente utilizando geometria simplética. Descrições geométricas do espaço de fase são úteis, dentre outras coisas[41], para generalizar o conceito de superfícies de vínculos e sistematizar as relações existentes entre as quantidades duma dada teoria.

A geometria de Poisson aparece naturalmente na descrição de sistemas físicos. A evolução de observáveis são descritos em termos de álgebras de Lie e estas, por sua vez, são completamente definidas em função de estruturas simpléticas dadas naturalmente pela dinâmica das variáveis do espaço de fase de um sistema clássico.

Neste capítulo fazemos uma revisão do formalismo simplético para sistemas vinculados de Faddeev-Jackiw[23, 24], uma alternativa ao formalismo de Dirac que trata os espaço de fase a partir de uma perspectiva essencialmente geométrica, generalizando a construção canônica para construções equivalentes por transformações de Darboux. Nos restringimos a enunciar o formalismo matemático estritamente necessário à formulação de FJ, para um tratamento extensivo e rigoroso do tema ver Refs. [42, 43].

### 2.2 Estruturas Simpléticas em uma Variedade

Iniciamos a seção fornecendo as definições e teoremas utilizados na descrição do método simplético. A principal referência na escrita do capítulo foi [44], os outros textos que também foram utilizados são [45], [46] e [47].

#### 2.2.1 Variedade Diferenciável

**Definição 1.** *Seja  $M$  um conjunto e  $U$  um subconjunto aberto de  $M$ . Uma variedade diferenciável  $C^k$ , com  $k \geq 1$ , de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  munido de um conjunto de homeomorfismos  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$ , onde  $V_i$  é algum subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que*

$$\cup_i U_i = M$$

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset, \text{ então } \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

O par  $(U_i, \phi_i)$  é chamado de carta e a coleção de todas as cartas, denotada por  $(U, \phi)$ , é chamada de atlas. Escrevemos  $\phi(x) = \{x^\mu\}$ ,  $\mu = 1, \dots, n$ , para denotar que o atlas mapeia um ponto  $x \in M$  em um conjunto de coordenadas em cada ponto.

Grosso modo, uma variedade é um conjunto de pontos que podem ser marcados com coordenadas, mais um conjunto de regras que dizem como esses pontos se relacionam com seus vizinhos. Numa variedade diferenciável  $C^k$  essas regras são funções que contêm derivadas parciais contínuas até a  $k$ -ésima ordem.

No que segue assumimos que todos os objetos são de classe  $C^\infty$ .

## 2.2.2 Espaço Tangente, Diferencial e Espaço Cotangente

**Definição 2.** *Seja  $x \in M$ . Um vetor tangente a  $M$  em  $x$  é um mapa,  $\xi_x$  de  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}$  tal que*

$$\begin{aligned}\xi_x[af + bg] &= a\xi_x[f] + b\xi_x[g], \\ \xi_x[fg] &= f(x)\xi_x[g] + g(x)\xi_x[f],\end{aligned}$$

para  $f, g \in C^\infty$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Mais precisamente,  $f : M \rightarrow M$  com representação coordenada  $\phi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $f : x \mapsto f(x)$ . Uma **curva** aberta em  $M$  é um mapa  $c : (a, b) \rightarrow M$  onde  $(a, b)$  é um intervalo aberto tal que  $a < 0 < b$ . Uma **curva integral**  $x(t)$  de  $\xi$  é uma curva em  $M$  cujo vetor tangente à  $x(t)$  é  $\xi_x$ , i.e. dado um atlas  $(U, \phi)$ ,

$$\frac{dx^\mu}{dt} = \xi^\mu(x(t)), \quad (2.1)$$

onde  $x^\mu(t)$  é a  $\mu$ -ésima componente de  $\phi(x(t))$ .

O **espaço tangente** a  $M$  em  $x$ , denotado por  $T_x M$ , é o conjunto de todos os vetores tangentes a  $M$  em  $x$ . Chamamos  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  de a **base coordenada** de  $T_x M$ . Um vetor  $\xi_x \in T_x M$  é escrito como  $\xi_x = \xi^\mu e_\mu$  e os números  $\xi^\mu$  são chamados de componentes de  $\xi_x$  com respeito a  $e_\mu$ . A ação de um vetor  $\xi_x$  em  $f$  é  $\xi_x[f] = \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$ .

Sejam  $M$  e  $N$  duas variedades diferenciáveis e seja  $\psi : M \rightarrow N$  um mapa diferenciável. O mapa  $\psi$  induz uma transformação linear entre os espaços tangentes  $T_x M$  e  $T_{\psi(x)} M$ , chamado de diferencial de  $\psi$  em  $x$  e denotado por  $d\psi_x$ . Se  $\xi_x \in T_x M$ ,  $d\psi_x(\xi_x)$  é definido como o vetor tangente a  $N$  em  $\psi(x)$  tal que para  $f \in C^\infty(N)$

$$d\psi_x(\xi_x)[f] \equiv \xi_x[\psi^* f].$$

Seja  $f \in C^\infty(M)$ ; o elemento diferencial de  $f$  no ponto  $x$  ( $x \in M$ ),  $df_x$ , é definido por

$$df_x(\xi_x) \equiv \xi_x[f], \quad \forall \xi_x \in T_x M.$$

O mapa  $df_x$  é uma transformação linear de  $T_x M$  à  $\mathbb{R}$ .

$df_x$  pertence ao espaço dual de  $T_x M$ , denotado por  $T_x^* M$ . Por definição, os elementos de  $T_x^* M$  são transformações lineares de  $T_x M$  em  $\mathbb{R}$  e são chamados de vetores covariantes, enquanto  $T_x^* M$  é chamado de **espaço cotangente** de  $M$  em  $x$ . Na base coordenada escrevemos  $df_x = (\partial f / \partial x^\mu) dx^\mu$ . Naturalmente,  $\{dx^\mu\}$  forma uma base de  $T_x^* M$ .

Seja  $da = a_\mu dx^\mu \in T_x^* M$  e  $\xi = \xi^\mu e_\mu \in T_x M$ . O **produto interno**  $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_x^* M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$\langle a, \xi \rangle = a_\mu \xi^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = a_\mu \xi^\nu \delta_\nu^\mu = a_\mu \xi^\mu . \quad (2.2)$$

Em nosso trabalho  $a(\xi) = \langle a, \xi \rangle$ .

### 2.2.3 Formas Diferenciais

**Definição 3.** Uma forma exterior de grau 1, ou **1-forma**, é uma função linear  $\omega : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e.,

$$\omega(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = \lambda_1 \omega(\xi_1) + \lambda_2 \omega(\xi_2) , \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad \xi_1, \xi_2 \in T_x M .$$

**Definição 4.** Uma forma exterior de grau 2, ou **2-forma**, é uma função bilinear  $\omega^2 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  e antissimétrica:

$$\begin{aligned} \omega^2(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \xi_3) &= \lambda_1 \omega^2(\xi_1, \xi_3) + \lambda_2 \omega^2(\xi_2, \xi_3) , \\ \omega^2(\xi_1, \xi_2) &= -\omega^2(\xi_2, \xi_1) , \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad e \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in M . \end{aligned}$$

**Definição 5.** O **produto exterior** entre duas 1-formas, denotado por  $\omega_1 \wedge \omega_2$ , em um par de vetores  $\xi_1, \xi_2 \in T_x M$ , é a área orientada da imagem do paralelogramo de lados  $\omega_1(\xi_1)$  e  $\omega_1(\xi_2)$  no plano formado por  $\omega_1, \omega_2$ :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) \\ \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \end{vmatrix} = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_1(\xi_2)\omega_2(\xi_1) .$$

**Definição 6.** Seja  $x^i = (x^1, \dots, x^n)$  um sistema de coordenadas local e  $\omega^1$  uma 1-forma, escrita localmente como  $\omega^1 = a_i dx^i$  — onde os diferenciais  $dx^1, \dots, dx^n$  formam uma base para o espaço de 1-formas em  $x^i$  —, ambos os objetos em  $M$ . A **derivada exterior** de  $\omega$ , denotada por  $d\omega$ , é definida por

$$d\omega^1 = da_i \wedge dx^i .$$

Analogamente, definimos a derivada exterior da 2-forma  $\omega^2 \equiv \frac{1}{2} a_{ij} dx^i \wedge dx^j$  por

$$d\omega^2 \equiv \frac{1}{2} da_{ij} \wedge dx^i \wedge dx^j . \quad (2.3)$$

Por fim, uma  $r$ -forma  $\omega = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_r}$  é dita fechada se  $d\omega = 0$ .

Daqui em diante o conjunto das funções  $C^\infty$  em  $M$  será denotado por  $\mathcal{F}(M)$ , o conjunto das  $r$ -formas diferenciais em  $M$  por  $\Omega^r(M)$  e o conjunto de vetores em  $M$  de  $\mathcal{X}(M)$ .

**Definição 7.** *Seja  $\omega \in \Omega^r(M)$  e  $X \in \mathcal{X}(M)$ . A operação  $\iota_X : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^{r-1}(M)$ , definida por*

$$\iota_X \omega(X_1, \dots, X_{r-1}) \equiv \omega(X, X_1, \dots, X_{r-1}), \quad (2.4)$$

é chamada de **produto interior**.

Para uma  $p$ -forma  $\omega_1$  e uma  $q$ -forma  $\omega_2$ , temos

$$\iota_x(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\iota_x \omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge (\iota_x \omega_2), \quad (2.5)$$

especificamente, para uma 1-forma  $\alpha$ ,

$$\iota_X \alpha = \alpha(X) = \langle \alpha, X \rangle. \quad (2.6)$$

## 2.2.4 Variedades Simpléticas e Teorema de Darboux

**Definição 8.** *Seja  $M^{2n}$  uma variedade diferenciável de dimensão par. Uma 2-forma diferencial  $\omega^2$  em  $M^{2n}$  é dita não-degenerada se para todo  $\xi \neq 0$  existir um  $\zeta$  tal que  $\omega^2(\xi, \zeta) \neq 0$ , com  $\xi, \zeta \in T_x M$ .*

**Definição 9.** *Seja  $\omega^2$  uma 2-forma fechada e não-degenerada. O par  $(M^{2n}, \omega^2)$  é chamado de **variedade simplética**.*

O exemplo mais simples de variedade simplética é o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^2$  com a forma simplética

$$\omega = dx \wedge dy.$$

Um **sistema de coordenadas simplético** em  $M^{2n}$  é um sistema de coordenadas locais  $(q_1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$  tal que nesse sistema a forma  $\omega$  é escrita como

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

chamada de **2-forma simplética**. Introduzindo a 1-forma

$$\theta = p_i dq^i, \quad (2.7)$$

temos que a 2-forma simplética pode ser expressa como

$$\omega = d\theta. \quad (2.8)$$

Considere a transformação linear de um espaço simplético,  $S : M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ . Seja  $p_i : (p_1, \dots, p_n)$ ,  $q^i : (q^1, \dots, q^n)$  um sistema de coordenadas simplético. Nesse sistema de coordenadas podemos representar a transformação  $S$  por uma matriz  $n \times n$ .

**Teorema 1.** *Uma transformação é simplética – chamada **simplectomorfismo**, ou transformação canônica – se, e somente se, sua matriz  $S$  nas coordenadas simpléticas  $(q^i, p_i)$  satisfaz a relação*

$$S^{-1} \bar{f} S = \bar{f},$$

onde

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i \\ \delta_i^j & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz  $\bar{f}$  é chamada de **matriz simplética canônica**. E por fim apresentamos sem demonstração o teorema de Darboux.

**Teorema 2.** *(Teorema de Darboux). Seja  $(M^{2n}, \omega^2)$  uma variedade simplética e  $x \in M^{2n}$  um ponto. Então, existe um sistema de coordenadas simpléticas locais  $\zeta = (q^i, p_i)$ , com  $i = 1, \dots, n$ , centrado em  $x$  tal que a forma  $\omega^2$  é escrita como*

$$\omega^2 = dq^i \wedge dp_i.$$

Esse teorema nos permite estender para qualquer variedade simplética os resultados de caráter local invariantes por uma transformação canônica obtidos para um espaço de fase padrão.

## 2.2.5 Função Hamiltoniana

Considere a variedade simplética  $(M, \omega)$  com forma simplética

$$\omega = dq^i \wedge dp_i, \quad (2.9)$$

a 2-forma diferencial  $\omega \in \Omega^2(M)$  é dita não-degenerada se, e somente se, para qualquer função  $f(q, p) \in \mathcal{F}(M)$  existe um único campo vetorial  $X_f \in \mathcal{X}(M)$ , tal que  $\iota_{X_f} \omega = -df$ .

Definimos como **campo vetorial Hamiltoniano**

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (2.10)$$

de modo que

$$\iota_{X_f} \omega = -\frac{\partial f}{\partial p_i} dp_i - \frac{\partial f}{\partial q^i} dq^i = -df. \quad (2.11)$$

**Definição 10.** *Definimos como **parênteses de Poisson**, denotado por  $\{\cdot, \cdot\}$  em  $(M, \omega)$ , a operação bilinear em  $\mathcal{F}(M)$  dada por*

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g), \quad (2.12)$$

com  $f, g \in \mathcal{F}(M)$ .

Os parênteses de Poisson são antissimétricos, pois  $\omega$  é antissimétrica. E além disso

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \omega(X_f, X_g) \\ &= (i_{X_f})(X_g) = df(X_g) \\ &= X_g f = \mathcal{L}_{X_g} f ,\end{aligned}\tag{2.13}$$

onde  $\mathcal{L}_{X_g} f$  denota a derivada de Lie e a última igualdade está demonstrada no Apêndice B.

Seja  $\sigma(t, x_0)$  uma curva integral de um campo vetorial  $X = X^\mu(\partial/\partial x^\mu) \in \mathcal{X}(M)$  que passa pelo ponto  $x_0$  em  $t = 0$ , com coordenadas  $\sigma^\mu(t, x_0)$ , a Eq. (2.1) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}\sigma^\mu = X^\mu(\sigma(t, x_0)) ,\tag{2.14}$$

com condições iniciais

$$\sigma^\mu(0, x_0) = x_0^\mu .\tag{2.15}$$

Chamamos o mapa  $\sigma : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  de o **fluxo** gerado por  $X \in \mathcal{X}(M)$ .

O fluxo  $\sigma(t)$  é um symplectomorfismo se, e somente se,  $\mathcal{L}_{X^\mu}\omega = 0$ , caso em que  $X^\mu$  é chamado de campo vetorial simplético. Da identidade de Cartan,  $\mathcal{L}_X = d(\iota_X\omega) + \iota_X d\omega$ , e de  $d\omega = 0$ , temos que  $\mathcal{L}_{X^\mu}\omega = d(\iota_{X^\mu}\omega) = -d^2 f$ . Logo, todo campo vetorial Hamiltoniano  $X_f$  é um campo vetorial simplético e o **fluxo Hamiltoniano** consiste das transformações canônicas. Portanto, da Eq. (2.13), temos que, sob o fluxo Hamiltoniano  $X_H$ ,

$$\frac{d}{dt}f(\sigma(t)) = X_H f = \{f, H\} .\tag{2.16}$$

Ou seja, a evolução temporal de uma função qualquer do espaço de fase simplético é gerada pela função Hamiltoniana.

## 2.2.6 1-forma Lagrangiana

**Definição 11.** *Seja  $f : M \rightarrow N$  um mapa suave e seja  $\dim M \leq \dim N$ .*

- O mapa  $f$  é chamado de uma **imersão** de  $M$  em  $N$  se  $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é uma injeção (mapa do tipo um pra um). Naturalmente, a ordem de  $f_* = \dim M$ .
- O mapa  $f$  é chamado de um **mergulho** se  $f$  é uma injeção e uma imersão.

A imagem  $f(M)$  é chamada de uma **subvariedade** de  $N$ .

Na prática  $f(M)$  é difeomórfica a  $M$ , ou  $f(M) \cong M$ .

Tomemos agora o parâmetro da Eq. (2.14) para construir a variedade  $M^{2n+1}$  como o espaço de fase estendido com coordenadas  $(q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n; t)$ , de modo que  $(M_t^{2n}, \omega^2)$  seja uma subvariedade simplética de  $M^{2n+1}$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ . Dessa forma temos, por construção, que funções das variáveis do espaço de fase  $f(q, p) \in M^{2n}$  evoluem segundo o fluxo Hamiltoniano dado pela Eq. (2.16), como difeomorfismos na variedade  $(M^{2n+1}, \omega^{2n+1})$  de modo que, usando a Eq. (2.11), podemos escrever a 1-forma notável da Eq. (2.7) como

$$L = p_i dq^i - H(q, p) dt, \quad (2.17)$$

chamada de 1-forma Lagrangiana, ou simplesmente, **Lagrangiana**.

Tomando a derivada externa de (2.17) temos

$$dL = dp_i \wedge dq^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \wedge dt. \quad (2.18)$$

Desta feita, podemos identificar a matriz simplética canônica do Teorema 1 com a matriz degenerada, chamada **matrix pré-simplética**,

$$\bar{f}_L = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^j & -\frac{\partial H}{\partial q^j} \\ \delta_j^i & 0 & -\frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{\partial H}{\partial q^i} & \frac{\partial H}{\partial p_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

cujos autovetores não nulos que levam ao autovalor nulo, também chamado de **modo-zero**, dado por

$$\nu^\alpha = \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad 1 \right), \quad (2.20)$$

perpendicular à subvariedade simplética  $M_t^{2n}$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , com equações de movimento de  $f(q, p)$  dadas pela Eq. (2.16), em particular

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.21)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (2.22)$$

## 2.3 Formalismo Simplético

Apresentamos nesta seção o método simplético de Faddeev-Jackiw para formulação Hamiltoniana de sistemas vinculados[23, 24]. A formulação alternativa ao método de Dirac dispensa a categorização dos vínculos (primeira e segunda classes, primários, secundários, etc), bem como a construção de estruturas algébricas especiais (parênteses de Dirac), favorecendo uma abordagem Lagrangiana. Logo em seguida apresentamos o algoritmo proposto por Barcelos-Neto e Wotzasek[25, 33] como uma sistematização do método simplético.

### 2.3.1 Formalismo de Faddeev-Jackiw

Considere a 1-forma Lagrangiana, escrita em coordenadas generalizadas do espaço de fase,  $\xi^\alpha$ ,

$$L = a_\alpha d\xi^\alpha - V(\xi)dt, \quad \alpha = 1, \dots, N. \quad (2.23)$$

A 1-forma Lagrangiana pode ser escrita como

$$L = \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta - V(\xi)dt, \quad (2.24)$$

onde  $(f_{\alpha\beta}) = \bar{f}$  é a matriz simplética, a 1-forma simplética  $a$  é

$$a \equiv \frac{1}{2}\xi^\alpha f_{\alpha\beta} d\xi^\beta \quad (2.25)$$

e a 2-forma simplética  $\omega^2$  é

$$\omega^2 = da = \frac{1}{2}f_{\alpha\beta} d\xi^\alpha \wedge d\xi^\beta. \quad (2.26)$$

De forma geral  $\omega^2$  não é constante.

Nesse ponto, de modo a tratar de grandezas definidas em toda a variedade, é útil introduzir a seguinte definição.

**Definição 12.** Um **fibrado tangente**  $TM$  sobre uma variedade  $M$  é uma coleção de todos os espaços tangentes de  $M$ :

$$TM \equiv \bigcup_{x \in M} T_x M. \quad (2.27)$$

Antes de seguir adiante introduzimos propriamente o conceito de movimento numa variedade.

**Definição 13.** Seja  $M$  uma variedade diferencial,  $TM$  seu fibrado tangente e  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. A curva integral  $\gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de um movimento no sistema Lagrangiano com variedade de configuração  $M$  e função Lagrangiana  $L$  se  $\gamma$  é um extremo do funcional

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{\gamma})dt, \quad (2.28)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o vetor velocidade  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}M$ .

**Teorema 3.** A evolução das coordenadas locais  $\xi^\alpha = (\xi^1, \dots, \xi^N)$  de um ponto  $\gamma(t)$  sob movimento em um sistema Lagrangiano na variedade  $M$  satisfaz as **equações de Euler-Lagrange**

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \xi^\alpha}, \quad (2.29)$$

onde  $L(\xi, \dot{\xi})$  é a expressão da função  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  nas coordenadas  $\xi$  e  $\dot{\xi}$  em  $TM$ .

As equações de movimento para a Lagrangiana (2.23), segundo o Teorema acima, são dadas pelas equações

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} \dot{\xi}^\beta, \quad (2.30)$$

ou

$$\dot{\xi}^\beta f_{\alpha\beta} = \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha}, \quad (2.31)$$

com

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.32)$$

Quando a 2-forma  $f$  é não-singular (não degenerada), podemos inverter a matriz simplética e obtemos as equações de movimento

$$\dot{\xi}^\alpha = f^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta}, \quad (2.33)$$

onde  $f^{\alpha\beta} \equiv (f_{\alpha\beta})^{-1}$ .

Caso a 2-forma simplética  $f$  seja singular (degenerada), não é possível invertê-la e encontrar as equações de movimento, nesse caso usamos a denominação de *matriz pré-simplética* para nos referirmos a  $f_{\alpha\beta}$ . Entretanto, Faddeev e Jackiv argumentam[23] que, pelo teorema de Darboux, tem-se que, para qualquer 1-forma  $a = a_\alpha d\xi^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ , cuja matriz pré-simplética é degenerada de grau  $2n$ , sempre é possível realizar uma mudança de variáveis

$$\xi^\alpha \rightarrow (p^j, q^k, z^l), \quad j, k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, N - 2n, \quad (2.34)$$

de modo que  $a$  toma a forma padrão  $a = p_i dq^i$ , fora termos de derivada total. Com a adição de “termos potenciais” na Lagrangiana que assume o formato

$$Ldt = p_\alpha dq^\alpha - \Phi(p, q, z)dt. \quad (2.35)$$

Resolvendo as equações

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^l} \equiv 0, \quad (2.36)$$

escrevemos alguns dos  $z$ 's como funções das variáveis padrão e terminamos, em geral, com expressões lineares nas variáveis tipo  $z$ . Reescrevendo a Lagrangiana substituindo as variáveis tipo  $z$  por multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , temos então

$$L = p_\alpha \dot{q}^\alpha - H(p, q) - \lambda_l \phi^l(p, q). \quad (2.37)$$

Restando um conjunto de funções que chamamos de vínculos do formalismo simplético da teoria,

$$\phi^l = 0. \quad (2.38)$$

Resolvendo as equações (2.38) seria possível reduzir a Lagrangiana ao seu formato original

$$Ldt = b_\alpha(\eta)d\eta^\alpha - W(\eta)dt, \quad (2.39)$$

mas com um número reduzido de variáveis. Se a nova matriz pré-simplética for invertível, obtemos as equações de movimento através de (2.33), caso contrário repetimos o procedimento um número finito de vezes até encontrarmos uma matriz simplética regular.

O método original de FJ propõe que se revolvam os vínculos e se use uma transformação de Darboux intuída do contexto com o propósito de se encontrar a matriz simplética. Como indicado por Jackiw, “Of course there may be the technical obstacles to carrying out the above steps: solving the constraints may prove too difficult, constructing the Darboux transformation to canonical coordinates may not be possible”[24]. Uma forma de se superar esse tipo de questão numa dada teoria é abandonar a abordagem e se voltar para o método de Dirac. Outra forma é continuar com a abordagem e usar o algoritmo de BW, brevemente apresentado na próxima subseção.

### 2.3.2 O algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek (BW) como extensão do método de FJ

O algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek-Montani consiste em encontrar, a partir de uma Lagrangiana dita de ordem zero  $L^{(0)}$ , após  $n$  interações, uma Lagrangiana dita de ordem  $n$ ,  $L^{(n)}$ , a partir da qual é possível derivar a matriz simplética que governa a dinâmica do sistema. A partir de  $L^{(0)}$ , dada implicitamente pela ação da teoria, identificamos as coordenadas que compõem do vetor simplético de ordem zero  $\xi^{(0)\alpha}$ , as componentes da 1-forma  $a_\alpha^{(0)}$  e a matriz pré-simplética  $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ . Após  $n$  iterações do algoritmo obtemos a matriz  $f_{\alpha\beta}^{(n)}$ , sem a necessidade de se eliminar vínculos ou encontrar transformações de Darboux apropriadas, como acontece com o método de FJ original.

No algoritmo BW, evitamos lidar com as complicações associadas à linearização da Lagrangiana e partimos de uma ação desde o início escrita linearmente nas velocidades, como a eq. (2.23), e a denominamos  $L^{(0)}$ , ou Lagrangiana de ordem zero<sup>1</sup>. Assim, temos

$$L^{(0)} = a_\alpha^{(0)}\dot{\xi}^{(0)\alpha} - V^{(0)}. \quad (2.40)$$

Da Lagrangiana lemos diretamente os componentes do vetor simplético e da 1-forma simplética de ordem zero,

$$\begin{aligned} \xi^{(0)\alpha} &= \begin{pmatrix} \xi^1 & \dots & \xi^M \end{pmatrix}, \\ a_\beta^{(0)} &= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_M \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

<sup>1</sup> Veremos no Capítulo 3 que é importante considerar o método de linearização, mas em geral quaisquer variáveis auxiliares usadas na linearização devem funcionar no uso do algoritmo.

Então substituimos essas quantidades na equações (2.32) e encontramos a matriz pré-simplética de ordem zero ( $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ ).

Agora, seja  $P < N$  o posto de uma matriz pré-simplética ( $f_{\alpha\beta}^{(0)}$ ), temos que existem  $N - P$  vetores não-nulos e linearmente independentes chamados **modos-zero** que satisfazem

$$\nu_m^\alpha f_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.42)$$

onde  $m = 1, \dots, N - P$ . De acordo com (2.31), temos

$$\nu_m^\alpha \partial_\alpha V = 0. \quad (2.43)$$

Caso (2.43) não seja identicamente satisfeita, a relação deve ser imposta. As expressões

$$\omega_m \equiv \nu_m^\alpha \partial_\alpha V \quad (2.44)$$

que não sejam identicamente nulas expressam vínculos que fixam relações entre as variáveis da teoria. O caso em que a relação (2.43) é identicamente nula leva a uma transformação de calibre e será tratado na seção 2.3.4.

Como  $f_{\alpha\beta}^{(0)}$  tem modos-zero que levam a vínculos  $\omega_m^{(0)}$ , o algoritmo de BW propõe que esses vínculos sejam adicionado ao setor cinético de  $\mathcal{L}^{(0)}$ , fornecendo a Lagrangiana simplética de ordem 1 [25, 26],

$$L^{(1)}(\xi^{(0)}, \lambda^{(0)m}) \equiv L^{(0)}(\xi^{(0)}) + \dot{\lambda}^{(0)m} \omega_m^{(0)}(\xi^{(0)}). \quad (2.45)$$

Na equação acima  $L^{(1)}$  é dinamicamente equivalente à  $L^{(0)}$  mais as condições de consistência (2.43). Também,  $L^{(1)}$  já é linear nas velocidades, logo podemos aplicar os passos do método de FJ à Lagrangiana  $L^{(1)}$ . Para esse propósito, identificamos o vetor simplético de ordem 1 como  $(\xi^{(1)\beta}) = (\xi^{(0)\alpha}, \lambda^{(0)m})$ . Se o índice  $\alpha$  associado à iteração de ordem zero corre de 1 até  $N$ , e o  $m$  da mesma iteração corre de 1 até  $M$ , então o  $\beta$  da primeira iteração corre de 1 até  $N + M$ . Esse procedimento possibilita a obtenção da matriz pré-simplética de ordem 1,  $f_{\alpha\beta}^{(1)}$ . Se a matriz encontrada ainda contiver modos-zero que levam a novos vínculos  $\omega_m^{(1)}$ , o processo é novamente repetido, exigindo-se que  $\dot{\omega}_m^{(1)} = 0$ , que por sua vez leva à Lagrangiana de ordem 2,  $L^{(2)}$ , definida analogamente à  $L^{(1)}$  na eq. (2.45). O procedimento encerra quando nenhum vínculo adicional for encontrado.

No algoritmo de BW, toda a informação sobre os vínculos é inserida no setor cinético da Lagrangiana, de modo que não há a necessidade de se manter os vínculos no setor potencial após a implementação via multiplicadores de Lagrange derivados no tempo [25]. De fato, os vínculos descobertos podem ser iterativamente eliminados do potencial (e.g.,  $V^{(1)} \equiv V^{(0)}|_{\omega_m^{(0)}=0}$ ). O único propósito desse procedimento é a facilitação dos cálculos, sem prejuízo de informações sobre a dinâmica na superfície de vínculos. É um procedimento comum e conveniente, mas não é obrigatório.

Assim, a menos de termos de derivada total, temos

$$L^{(1)} = L(0) - \dot{\lambda}^{(0)m} \Phi_m^{(0)} = (a^\alpha)^{(1)} (\xi_\alpha)^{(1)} - V^{(1)}. \quad (2.46)$$

Com isso repetimos o procedimento apresentado onde, agora,

$$\begin{aligned} \xi^{(1)\alpha} &= \begin{pmatrix} \xi^{(0)\alpha} & \lambda^m \end{pmatrix}, \\ a_\beta^{(1)} &= \begin{pmatrix} a_\beta^{(0)} & \Phi_m \end{pmatrix}, \\ V^{(1)} &= V^{(0)}(\xi^{(0)}) |_{\Phi_m=0}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

E substituindo as variáveis nas equações (2.32) obtemos a matriz pré-simplética da primeira iteração

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} (f_{\alpha\beta}^{(0)}) & \partial_\alpha \Phi_m^{(0)} \\ -\partial_\alpha \Phi_m^{(0)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Devemos repetir o algoritmo, realizando um número finito de iterações até se obter a matriz simplética e, por conseguinte, os parênteses generalizados entre as coordenadas do espaço de fase definidos por

$$\{A, B\}^* \equiv \frac{\partial A}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.49)$$

Para quaisquer funções  $A(\xi)$  e  $B(\xi)$  definidas no espaço de simplético.

### 2.3.3 Caso Contínuo

Revisamos nessa seção o método simplético de FJ na extensão de BW no seu caso contínuo.

Seja  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a, \partial_\mu \partial_\nu \phi_a, \dots)$  uma densidade Lagrangiana de uma dada teoria que depende dos campos  $\phi_a$  (com  $a = 1, 2, \dots, A$ ) e de um número arbitrário de suas derivadas, onde as letras do meio do alfabeto grego  $\mu$  e  $\nu$  denotam índices do espaço-tempo. Por questões de clareza e simplicidade, consideramos espaços-tempo quadridimensionais com assinatura da métrica  $(-1 \ 1 \ 1 \ 1)$ . O primeiro passo do método de FJ é escrever a densidade Lagrangiana  $\mathcal{L}$  como uma função de certos campos  $\xi^\alpha$ , denominados de campos simpléticos, com  $\alpha = 1, 2, \dots, N$  (índices simpléticos são denotados pelas letras gregas iniciais), tal que  $\mathcal{L}$  depende no máximo linearmente da primeira derivada temporal  $\xi^\alpha$ ,  $\dot{\xi}^\alpha$ . Por exemplo, para teorias quadráticas nas velocidades  $\dot{\phi}_a$ , uma maneira comum de linearizar a Lagrangiana é lançar mão dos campos dos momentos canonicamente conjugados aos campos originais,

$$\pi^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_a}, \quad (2.50)$$

assim,

$$\xi^\alpha = (\phi_a \ \pi^a). \quad (2.51)$$

Chamamos atenção de que o índice  $a$  acima pode ser compreendido como uma indexação apenas dos campos ou dos campos e suas componentes. De agora em diante usaremos  $a$  apenas como índices de campos. Assim,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  se referem respectivamente a um tensor de ordem  $p$  e um tensor de ordem  $q$ , cujas componentes seriam indexadas pelos índices internos de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ . Índices simpléticos não possuem uma relação direta com índices do espaço-tempo.

Independentemente da Lagrangiana original e da técnica utilizada para a linearização, para se iniciar o método de FJ devemos escrever a ação na seguinte forma,

$$S[\xi] = \int [a_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - \mathcal{V}(\xi)]d^4x, \quad (2.52)$$

onde  $a_\alpha$  e  $\mathcal{V}$  são chamados respectivamente de componentes da 1-forma canônica ( $a = a_\alpha d\xi^\alpha$ ) e de potencial. De agora pra frente a dependência em derivadas espaciais não será mais especificada explicitamente, assim  $a_\alpha(\xi)$  em geral não pode depender de  $\dot{\xi}^\alpha$ , mas pode depender de  $\partial_i \xi^\alpha$  (com  $i = 1, 2, 3$ ) e de derivadas espaciais de maior ordem.

Fora termos de superfície, que não serão considerados aqui, as equações de campo são encontradas a partir da variação da ação,

$$\delta S[\xi] = \int [\delta a_\alpha \dot{\xi}^\alpha + a_\alpha \delta \dot{\xi}^\alpha - \delta \mathcal{V}]d^4x. \quad (2.53)$$

Para uma função  $f = f(\xi)$ , podemos escrever as seguintes relações úteis,

$$\delta f(x) = \int \frac{\delta f(x)}{\delta \xi^\alpha(x')} \delta \xi^\alpha(x') d^3x', \quad (2.54)$$

$$\dot{f}(x) = \int \frac{\delta f(x)}{\delta \xi^\alpha(x')} \dot{\xi}^\alpha(x') d^3x', \quad (2.55)$$

$$\frac{d}{dt} \delta f = \delta \frac{d}{dt} f = \delta \dot{f}, \quad (2.56)$$

onde as derivadas funcionais satisfazem

$$\frac{\delta \xi^\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(x')} = \delta_\beta^\alpha \delta^{(3)}(x - x'), \quad (2.57)$$

$$\frac{\delta \partial_i \xi^\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(x')} = \delta_\beta^\alpha \partial_i^x \delta^{(3)}(x, x') = -\delta_\beta^\alpha \partial_i^{x'} \delta^{(3)}(x - x'). \quad (2.58)$$

Acima,  $x$  e  $x'$  se referem a diferentes pontos do espaço-tempo, mas com o mesmo valor para a coordenada  $t$  (i.e., as derivadas são tomadas à tempos iguais,  $x^0 = x'^0 = t$ ).

Logo, ignorando termos de superfície, a eq. (2.53) se torna

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \left[ \frac{\delta a_\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(x')} \dot{\xi}^\alpha(x) \delta \xi^\beta(x') - \frac{\delta a_\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(x')} \dot{\xi}^\beta(x') \delta \xi^\alpha(x) - \frac{\delta \mathcal{V}(x)}{\delta \xi^\beta(x')} \delta \xi^\beta(x') \right] d^3x d^3x' dt \\ &= \int \left[ f_{\alpha\beta}(x, x') \dot{\xi}^\beta(x') - \frac{\delta \mathcal{V}(x')}{\delta \xi^\alpha(x)} \right] \delta \xi^\alpha(x) d^3x d^3x' dt, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde a matriz pré-simplética é definida como

$$f_{\alpha\beta}(x, x') \equiv \frac{\delta a_\beta(x')}{\delta \xi^\alpha(x)} - \frac{\delta a_\alpha(x)}{\delta \xi^\beta(x')} . \quad (2.60)$$

Ao exigir que  $\delta S = 0$  para uma variação arbitrária  $\delta \xi^\alpha$ , as equações de campo podem ser escritas como

$$\int f_{\alpha\beta}(x, x') \dot{\xi}^\beta(x') d^3 x' = \frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha(x)} , \quad (2.61)$$

com  $V \equiv \int \mathcal{V}(x') d^3 x'$ . O procedimento acima deve ser implementado independentemente da existência de vínculos (sejam vínculos já conhecidos, a serem implementados via multiplicadores de Lagrange, ou ainda por serem descobertos). Se existem vínculos desconhecidos, estes devem ser encontrados a partir das equações de campo e posteriormente reinseridos na ação com a técnica dos multiplicadores de Lagrange, veja Sec. 2.3.2 para mais detalhes. Semelhantemente ao formalismo de Dirac, assumimos que a ação contém todas as informações físicas relevantes e, mesmo se os vínculos não aparecem explicitamente na ação, estes podem ser derivados dela.

Se  $f_{\alpha\beta}$  tem uma inversa, então a matriz é chamada de matriz simplética e todas as velocidades  $\dot{\xi}^\alpha$  podem ser derivadas das equações de campo (2.61). Sistemas com essa propriedade são chamados de não-singulares ou regulares. Nesse caso a evolução dinâmica de todos os campos é unicamente determinada, não existem simetrias de calibre ou vínculos a serem encontrados.

Se  $f_{\alpha\beta}$  é singular, então a matriz pré-simplética tem modos-zero (i.e., autovetores cujos autovalores são nulos). Suponha que existam  $M$  modos-zero independentes,  $\nu_m^\alpha(x)$ , então,

$$\int \nu_m^\alpha(x) f_{\alpha\beta}(x, x') d^3 x = 0 , \quad (2.62)$$

onde  $m = 1, 2, \dots, M$ . Portanto, da eq. (2.61), encontramos  $M$  relações nulas dadas por

$$0 = \int \nu_m^\alpha(x) \frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha(x)} d^3 x . \quad (2.63)$$

O caso seguinte pode ser comumente encontrado em muitos exemplos de teorias físicas,

$$\nu_m^\alpha(x) f_{\alpha\beta}(x, x') = 0 . \quad (2.64)$$

Se esse caso particular é verdadeiro, então a eq. (2.63) fica

$$0 = \nu_m^\alpha(x) \frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha(x)} . \quad (2.65)$$

As eqs. (2.63, 2.65) podem ser ou triviais, se elas simplesmente levam a uma relação conhecida (i.e.,  $0 = 0$ ), ou podem levar a novas relações entre os campos simpléticos. O

último caso implica na existência de vínculos que, por simplicidade, assumimos serem mutuamente independentes. Se existem  $M$  relações não triviais, o sistema é dito ter  $M$  vínculos, que são dados por

$$\Omega_m[\xi] \equiv \int \omega_m(\xi(x)) d^3x \equiv \int \nu_m^\alpha(x) \frac{\delta V[\xi]}{\delta \xi^\alpha(x)} d^3x = 0, \quad (2.66)$$

com  $m = 1, 2, \dots, M$ . Se  $\omega_m = 0$ , para todo  $m$ , essas equações determinam uma superfície no espaço simplético, a superfície de vínculos (veja também Ref. [48] para mais detalhes sobre a interpretação geométrica).

### 2.3.4 Simetrias de calibre na superfície de vínculos

Considere a variação infinitesimal de coordenadas

$$\xi'^\alpha = \xi^\alpha + \delta_\varepsilon \xi^\alpha. \quad (2.67)$$

A variação infinitesimal da ação  $S$  é

$$S[\xi'] - S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \delta_\varepsilon \xi^\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \delta_\varepsilon \dot{\xi}^\alpha \right] dt. \quad (2.68)$$

Fixando a condição de contorno  $\delta_\varepsilon(t_1) = \delta_\varepsilon(t_2) = 0$ , temos

$$\delta_\varepsilon S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}^\alpha}(\xi, \dot{\xi}) \right] \delta_\varepsilon \xi^\alpha dt. \quad (2.69)$$

Tome agora a lagrangiana  $L$  definida por (2.35), aqui também consideramos que a matriz Hessiana associada a  $L$  é singular. Se impusermos  $\delta_\varepsilon \xi = 0$ , o que simplesmente significa que (2.67) define uma transformação de calibre, obtemos que

$$0 = \left( \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} - \frac{da_\alpha}{dt} \right) \delta_\varepsilon \xi^\alpha = (f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \partial_\alpha V) \delta_\varepsilon \xi^\alpha. \quad (2.70)$$

Relação que é satisfeita caso os dois termos entre parênteses sejam iguais ou se

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad (2.71)$$

e

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = 0, \quad (2.72)$$

simultaneamente. O primeiro caso leva às equações de Euler-Lagrange, aqui descartado por considerarmos  $f_{\alpha\beta}$  singular. Comparando (2.71) e (2.72) com (2.42) e (2.43), temos que

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha = \nu^\alpha \varepsilon, \quad (2.73)$$

em que  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , fornece as transformações de coordenadas que deixam a ação invariante. Por essa razão dizemos que os modos-zero são os geradores de simetrias de calibre do método simplético.

No caso contínuo  $\varepsilon(t) \rightarrow \varepsilon(x, t)$  e

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha(x) = \int d^3y \varepsilon(y) \nu^\alpha(y) \delta^3(x - y). \quad (2.74)$$

As relações para transformações de calibre encontradas nessa subseção descrevem completamente esse tipo de transformação na superfície de vínculos, porém falham ao descrever as simetrias de calibre em todo o espaço de fase. As relações de calibre fora das equações de movimento no formalismo simplético são objetos de estudo no Capítulo 3.

### 2.3.5 Método Simplético com Variáveis de Grassmann

De modo a aplicar o método simplético a teorias de campo dotadas de variáveis fermiônicas é preciso enunciar o algoritmo em termos das variáveis de Grassmann. No Capítulo 6 essa variação do método será útil na análise simplética de uma teoria de gravitação acoplada à ação de Dirac com bi-espinores.

Primeiro algumas considerações sobre variáveis de Grassmann.

**Definição 14.** *Uma álgebra de Grassmann com  $n$  geradores  $\mathcal{G}_n$  é definida como:*

- (i)  $\mathcal{G}_n$  é um espaço vetorial sobre os complexos;
- (ii) um produto é definido sobre  $\mathcal{G}_n$  munido das propriedades de associatividade e bilinearidade com respeito a soma e a multiplicação por escalares;
- (iii)  $\mathcal{G}_n$  contém o elemento unitário no produto;
- (iv)  $\mathcal{G}_n$  é gerado por  $n$  elementos  $\xi^A$ ,  $A = 1, \dots, n$ , satisfazendo

$$\xi^A \xi^B + \xi^B \xi^A = 0. \quad (2.75)$$

Distinguímos os elementos de uma álgebra de Grassmann entre variáveis dinâmicas pares e variáveis dinâmicas ímpares da seguinte maneira:

$$\theta^\alpha \theta^\beta + \theta^\beta \theta^\alpha = 0, \quad \text{para } \theta^\alpha, \theta^\beta \text{ ímpares,} \quad (2.76)$$

$$\theta^\alpha q^i + q^i \theta^\alpha = 0, \quad \text{para } \theta^\alpha \text{ ímpar, } q^i \text{ par,} \quad (2.77)$$

$$q^i q^j + q^j q^i = 0, \quad \text{para } q^i, q^j \text{ pares.} \quad (2.78)$$

Agora, seguindo a exposição de Govarts[49], considere um sistema dado por

$$S[\xi^\alpha] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\xi_a, \dot{\xi}_a), \quad (2.79)$$

onde os  $\xi^\alpha$  representam os graus de liberdade do sistema. Com Lagrangiana igual a<sup>2</sup>

$$L(\xi_a, \dot{\xi}_a) = \int_{\Sigma_t} d^3x \mathcal{L}(\xi^\alpha(x, t), \dot{\xi}^\alpha(x, t)) . \quad (2.80)$$

A paridade de Grassmann das coordenadas  $\xi^\alpha$  assumem os valores  $\varepsilon^\alpha = 0$  para uma variável de Grassmann par e  $\varepsilon^\alpha = 1$  para uma variável ímpar.

De modo a aplicar a análise simplética do sistema supomos ter sido a Lagrangiana linearizada nas velocidades, podendo ser escrita como

$$L(\xi_a, \dot{\xi}_a) = \dot{\xi}^\alpha a_\alpha - V(\xi^\alpha) . \quad (2.81)$$

Donde obtemos a matriz pré-simplética

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\delta a_\beta}{\delta \xi^\alpha} - (-1)^{\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta} \frac{\delta a_\alpha}{\delta \xi^\beta} . \quad (2.82)$$

Por definição, a paridade de Grassmann de  $f_{\alpha\beta}$  é igual a  $(\varepsilon^\alpha + \varepsilon^\beta)$  e, por simetria,

$$f_{\beta\alpha} = -(-1)^{\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta} f_{\alpha\beta} . \quad (2.83)$$

Caso  $f_{\alpha\beta}$  seja regular, as equações de Euler-Lagrange fornecem equações de movimento

$$\dot{\xi}^\beta f_{\beta\alpha} = -\frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha} , \quad (2.84)$$

ou

$$(-1)^{\varepsilon_\beta} f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta = \frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha} . \quad (2.85)$$

Invertendo-se  $f_{\alpha\beta}$ , tem-se

$$\dot{\xi}^\alpha = -\frac{\delta V}{\delta \xi^\beta} (f^{-1})^{\beta\alpha} = (-1)^{\varepsilon^\alpha} (f^{-1})^{\alpha\beta} \frac{\delta V}{\delta \xi^\beta} . \quad (2.86)$$

Notando-se que

$$(f^{-1})^{\beta\alpha} = (-1)^{\varepsilon^\alpha + \varepsilon^\beta + \varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta} (f^{-1})^{\alpha\beta} . \quad (2.87)$$

Caso  $f_{\alpha\beta}$  seja singular, existem  $N$  modos-zero (à esquerda)  $\nu_{[A]}^\alpha$ , com  $A = 1, \dots, N$ , satisfazendo

$$\int d^3x' \nu_{[A]}^\alpha(x') f_{\alpha\beta}(x, x') = 0 . \quad (2.88)$$

Para modos-zero à direita,  $\tilde{\nu}_{[A]}^\alpha$ , temos

$$f_{\alpha\beta} \tilde{\nu}_{[A]}^\alpha = 0 , \quad (2.89)$$

$$\tilde{\nu}_{[A]}^\alpha = -(-1)^{\varepsilon^\alpha} \nu_{[A]}^\alpha . \quad (2.90)$$

<sup>2</sup> E, para um espaço de fase finito,  $\xi^\alpha(x, t) =: x^\alpha(t) \equiv \xi^\alpha$ .

Pelas equações de Euler-Lagrange temos que os modos-zero devem satisfazer as equações de vínculo dadas por

$$\omega_{[A]\beta}(x) = \nu_{[A]}^\alpha(x) \frac{\delta V}{\delta \xi^\alpha} = 0 \quad (2.91)$$

que devem ser resolvidas ou impostas à Lagrangiana de modo a obter uma nova Lagrangiana restrita a dada superfície de vínculos

$$L' = L \Big|_{\omega=0} = \dot{\xi}^\alpha a_\alpha + \dot{\lambda}_{[A]}^\alpha \omega_{[A]\alpha} - V \Big|_{\omega=0}. \quad (2.92)$$

Caso  $M$  vínculos forem geradores de transformações de calibre, devem ser adicionadas condições de calibre

$$C_{[B]\alpha}(\xi^\alpha) = 0, \quad (2.93)$$

com  $B = 1, \dots, M$ , através de

$$L'' = \dot{\xi}^\alpha a_\alpha + \dot{\lambda}_{[A]}^\alpha \omega_{[A]\alpha} + \dot{u}_{[B]}^\alpha C_{[B]\alpha} - V \Big|_{\omega=0}. \quad (2.94)$$

Possibilitando, assim, escrever a inversa da nova 2-forma simplética  $f_{\alpha\beta}''$  e as equações de movimento através da estrutura simplética dada por

$$\{\xi^\alpha, \xi^\beta\}^* = (-1)^{\varepsilon^\alpha} (f^{-1})^{\alpha\beta}. \quad (2.95)$$

Ademais, o conjunto dos  $M$  modos-zero geram transformações de calibre *on-shell* continuam sendo dadas por

$$\delta_\eta \xi^\alpha = \nu^\alpha \eta. \quad (2.96)$$

Tomemos o exemplo da redução simplética para a teoria de Dirac de campos de spin-1/2[50] para ilustrar a teoria exposta nessa seção. Considere a densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftarrow{\partial} \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \overrightarrow{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (2.97)$$

Separando a Lagrangiana entre termos cinéticos e dinâmicos, temos

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \gamma^0 \psi \dot{\bar{\psi}} + \frac{i}{2} \gamma^0 \bar{\psi} \dot{\psi} - \left[ \frac{i}{2} \partial_i \bar{\psi} \gamma^i \psi - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi \right], \quad (2.98)$$

com matriz simplética não singular igual a

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

de inversa igual a

$$(f^{-1})^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0 \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

E, usando a eq. (2.95), e considerando que  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  têm paridade ímpar, temos os parênteses generalizados para a teoria de Dirac,

$$\{\psi, \bar{\psi}\}^* = i\gamma^0. \quad (2.101)$$

A teoria tomada como exemplo não possui simetrias de calibre.

## 2.4 Contagem dos graus de liberdade

Nessa seção apresentamos o procedimento geral para a realização da contagem do número de graus de liberdade (NGL) duma teoria a partir da abordagem simplética[28, 51]. Chamamos atenção para o fato de que atualmente teorias de gravitação com NGL não triviais estão sendo consideradas. Dentre os casos bem conhecidos temos a gravitação massiva e a bigravidade[52]. O esperado NGL para uma partícula massiva de spin-2 em um espaço-tempo quadrimensional é igual a cinco, porém esse número pode chegar a seis, um deles sendo um fantasma, caso o termo de massa não tenha um formato específico (e.g., [53–55]). Também lembramos que o NGL para teorias não-massivas de spin-2 e spin-0 são, respectivamente, dois e um, entretanto uma teoria com esses dois tipos de campo não possui, necessariamente, três graus de liberdade. De fato, a teoria de Brans-Dicke com  $\omega = -3/2$  tem uma simetria adicional, uma invariância conforme, que a coloca como uma teoria de dois graus de liberdade. Esses resultados serão verificados no Capítulo 4 dentro do formalismo aqui exposto.

Para começar, tome uma Lagrangiana  $\mathcal{L}^{(0)}$  de uma teoria com  $N^{(0)}$  componentes de campos independentes. Assumindo que não existam vínculos ou simetrias de calibre, a iteração zero do algoritmo de BW já é a última iteração e o NGL nesse caso deve ser  $\text{NGL} = N^{(0)}/2$ . Considere agora o caso em que  $\mathcal{L}^{(0)}$  descreve uma teoria tal que na  $k$ -ésima iteração um total de  $M$  vínculos independentes sejam encontrados e que a matriz  $f^{(k)}$  seja não-degenerada (i.e.,  $M$  é o número total de vínculos, além de não haverem simetrias de calibre). Como cada vínculo independente por, em princípio, ser resolvido para se remover um componente de campo, essa teoria tem  $\text{NGL} = (N^{(0)} - M)/2$ .

No exemplo anterior, caso  $f^{(k)}$  tenha  $G$  modos-zero independentes que não levam a novos vínculos, então  $\text{NGL} = (N^{(0)} - M - G)/2$ . De fato, podemos sempre fixar o calibre e cada modo-zero independente deve impor uma condição independente nas  $N^{(0)}$  componentes de campo.

Na literatura simplética que usa o algoritmo de BW é comum encontrar caso em que nalguma iteração de ordem  $k$  algumas das componentes de campos sejam eliminadas. De fato, devido ao processo de eliminar vínculos do potencial (veja a Sec. 2.3.2), eventualmente uma componente de campo que estava presente na  $(k-1)$ -ésima iteração pode não estar mais presente na Lagrangiana  $\mathcal{L}^{(k)}$ . Se isso ocorre para  $E$  componentes, então  $E$  componentes de campo independentes serão eliminadas ao longo do algoritmo, assim

$$\text{NGL} = \frac{1}{2}(N^{(0)} - M - G - E). \quad (2.102)$$

Para um sistema de partículas, o NGL será sempre um número inteiro satisfazendo a eq. (2.102). Considere primeiro que  $G = E = 0$ . De fato, a matriz pré-simplética somente tem inversa na  $k$ -ésima iteração se  $N^{(k)}$  é par, uma vez que uma matriz quadrada antissimétrica de dimensão finita só possui inversa se sua dimensão for par. Para cada

vínculo independente precisamos inserir um novo multiplicador de Lagrange, logo, para  $M$  vínculos (sem a eliminação simplética de campos), teremos um vetor simplético com  $N^{(0)} + M$  componentes. Assumindo que não existam simetrias de calibre, teremos que  $N^{(0)} + M$  é necessariamente par. Consequentemente,  $N^{(0)} + M - 2M = N^{(0)} - M$  também é par e NGL é inteiro. Esse argumento pode ser trivialmente estendido ao caso com simetrias de calibre e campos eliminados, concluindo-se que o NGL calculado a partir da eq. (2.102) será sempre inteiro para sistemas de partículas.

Para concluir, como todas as iterações devem gerar Lagrangiana dinamicamente equivalentes entre si, deve ser possível escrever a eq. (2.102) como uma função de  $N^{(k)}$ , sendo  $k$  a iteração em que nenhum vínculo adicional é encontrado. Se na  $k$ -ésima iteração  $M$  vínculos foram encontrados, então em  $\mathcal{L}^{(k)}$  deve aparecer  $M$  componentes de campo que aparecem somente uma vez em  $\mathcal{L}^{(k)}$  e com uma derivada temporal. Estes são os multiplicadores de Lagrange do formalismo simplético. Como  $N^{(k)}$  inclui também o número de multiplicadores de Lagrange, que é sempre exatamente igual a  $M$ , escrevemos

$$\text{NGL} = \frac{1}{2}(N^{(k)} - 2M - G). \quad (2.103)$$

Alternativamente, eq. (2.103) pode ser encontrada a partir da eq. (2.102) usando  $N^{(k)} = N^{(0)} - E + M$ .

## 2.5 Exemplos

Nessa seção apresentamos duas aplicações a fim de explorar o método simplético de BW na prática. O primeiro exemplo diz respeito a uma partícula vinculada à superfície de uma esfera  $N$ -dimensional. No segundo exemplo mostramos a aplicação do método na teoria eletromagnética no vácuo descrita no formato tensorial. Nesses dois exemplos podemos observar como surgem os vínculos da teoria através do estudo da estrutura simplética, a maneira como as transformações de calibre surgem e podem ser fixadas para a obtenção dos parênteses generalizados dados pela matriz simplética, bem como podemos contar o número de graus de liberdade em teorias de partículas e em teorias de campo.

### 2.5.1 Exemplo 1: Partícula se Movendo em uma Esfera $(N - 1)$ -dimensional

Considere a Lagrangiana duma partícula movendo-se na superfície de uma esfera  $(N - 1)$ -dimensional,

$$L^{(0)} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{m}{2} (\dot{q}^i)^2 + \lambda((q^i)^2 - 1) \right], \quad (2.104)$$

onde  $q^i = \{q^1, \dots, q^N\}$  é a coordenada da partícula. Fazendo

$$p_i \equiv \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{q}^i} = m\dot{q}^i, \quad (2.105)$$

temos que

$$L^{(0)} = p_i \dot{q}^i - V^{(0)}, \quad (2.106)$$

com  $V^{(0)} = \sum \frac{p_i^2}{2m} - \lambda((q^i)^2 - 1)$ . Das definições (2.41), o vetor simplético e a 1-forma simplética são, respectivamente,

$$\xi^{(0)\alpha} = (q^i, p_i, \lambda), \quad (2.107)$$

$$a_{\beta}^{(0)} = (p_j, 0^j, 0), \quad (2.108)$$

enquanto a matriz pré-simplética é

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & 0_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i \\ 0_j & 0^j & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

A matriz tem 1 modo-zero, a saber

$$\nu = (0^i \quad 0_i \quad 1), \quad (2.110)$$

com  $0^i = \{0, \dots, 0\}$ , o zero aparecendo  $N$  vezes. Utilizando a condição de consistência (2.43) obtemos o vínculo

$$\nu \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial V^{(0)}}{\partial \lambda} = q^2 - 1 \approx 0, \quad (2.111)$$

onde omitimos o símbolo de somatória para simplificação. Esse é o vínculo que indica que o movimento da partícula está restrito à superfície da  $(N - 1)$ -esfera de raio 1. Seguindo o método, realizamos a primeira iteração, o que consiste em fazer

$$V^{(1)} = V^{(0)}|_{q^2-1=0} = \frac{p^2}{m} \quad (2.112)$$

e recolocar os multiplicadores de Lagrange derivados no tempo. Assim a Lagrangiana de ordem um fica

$$L^{(1)} = p\dot{q} + \frac{1}{2}(q^2 - 1)\dot{\eta} - V^{(1)}, \quad (2.113)$$

onde a soma entre as coordenadas está subentendida.

Agora  $q$  é incluída no conjunto de variáveis canônicas e nos livramos de  $\lambda$  por ela não mais aparecer na Lagrangiana. Assim, temos

$$\xi^{(1)\alpha} = (q_i \quad p_i \quad \eta), \quad (2.114)$$

$$a_{\beta}^{(1)} = \left( p_j \quad 0 \quad \frac{1}{2}(q^2 - 1) \right). \quad (2.115)$$

Assim, a matriz pré-simplética de ordem 1 é

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & -q_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i \\ q_j & 0^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

contudo, a existência do modo-zero  $\nu^{(1)} = (0, -q^i, 1)$  gera mais um vínculo,

$$-q^i \frac{\partial V^{(1)}}{\partial p_i} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta} = -q^i p_i \approx 0. \quad (2.117)$$

Seguindo para segunda interação, temos

$$L^{(2)} p \dot{q} + \frac{1}{2} (q^2 - 1) \dot{q} + p q \dot{\rho} - V^{(2)}, \quad (2.118)$$

onde  $V^{(2)} = V^{(1)}|_{\Omega} = V^{(1)}$ . E

$$\xi^{(2)\alpha} = \begin{pmatrix} q^i & p_i & \eta & \rho \end{pmatrix} \quad (2.119)$$

$$a_{\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} p_j & 0^j & \frac{1}{2} (q^2 - 1) & 0 & q^j p_j \end{pmatrix} \quad (2.120)$$

e

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0_{ij} & -\delta_i^j & -q^i & -p_i \\ \delta_j^i & 0^{ij} & 0^i & -q^i \\ q^j & 0^j & 0 & 0 \\ p_j & q^j & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.121)$$

A matriz  $f_{ij}^{(2)}$  é regular e, portanto, possui inversa.

O número de graus de liberdade desse sistema é, então, igual a  $(2N$  variáveis iniciais - 2 modos-zero  $)/2 = N - 1$  graus de liberdade. Um caso particular descrito por esse problema é o de uma partícula “livre” de massa  $m$  se movendo na superfície bidimensional de uma esfera tridimensional.

## 2.5.2 Exemplo: Teoria Eletromagnética

Agora vamos explorar um exemplo onde aplicamos o algoritmo BW no espaço contínuo, trabalhando com um espaço de fase composto de campos e seus momentos conjugados.

Dada densidade de lagrangiana da teoria eletromagnética no vácuo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.122)$$

onde  $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ , aplicamos o algoritmo BW para obter a dinâmica da teoria.

Primeiro obtemos as variáveis duais no espaço de fase. Os momentos conjugados são

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^{\mu}} = -\frac{1}{2} F_{\gamma\nu} \frac{\partial F^{\gamma\nu}}{\partial \dot{A}^{\mu}} \\ &= -\frac{1}{2} F_{\gamma\nu} (\delta_0^{\gamma} \delta_{\mu}^{\nu} - \delta_{\mu}^{\gamma} \delta_0^{\nu}) \\ &= F_{\mu 0} = \partial_{\mu} A_0 - \dot{A}_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Logo, a Lagrangiana de ordem zero é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}^i \Pi_i - \Pi_i \left( \partial^i A_0 - \Pi^i \right) - \frac{1}{2} F^{i0} F_{i0} - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \\ &= \dot{A}^i \Pi_i - \Pi_i \partial^i A_0 + \Pi_i \Pi^i - \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij},\end{aligned}\quad (2.124)$$

onde identificamos o potencial simplético de ordem zero, o vetor simplético de ordem zero e a uma forma simplética de ordem zero como sendo, respectivamente,

$$\mathcal{V}^{(0)} = \Pi_i \partial^i A_0 - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi^i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij}, \quad (2.125)$$

$$\xi^{(0)\alpha} = \left( A^0 \quad A^i \quad \Pi_i \right), \quad (2.126)$$

$$a_{\beta}^{(0)} = \left( 0 \quad \Pi_j \quad 0 \right). \quad (2.127)$$

E pudemos eliminar  $\Pi^0$  do vetor simplético impunemente, já que ele não aparece na lagrangiana.

A matriz pré-simplética de ordem zero é, portanto,

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_j^i \\ 0 & \delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y). \quad (2.128)$$

Com modo zero

$$\nu_{[0]} = (1 \quad 0 \quad 0). \quad (2.129)$$

Utilizando a condição de consistência (2.63) obtemos o vínculo

$$\int \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}(y)}{\delta A^0(x)} d^3 y = -\partial^i \Pi_i = \Phi^{(0)}. \quad (2.130)$$

Ora, (2.130) é simplesmente a lei de Gauss no vácuo.

Ao invés de adicionarmos um multiplicador de Lagrange ao vínculo  $\Phi^{(0)}$ , podemos notar que o termo  $-\partial^i \Pi_i$  já aparece na parte potencial de  $\mathcal{L}^{(0)}$ , bastando somente uma redefinição de variáveis para incluir (2.130) na próxima iteração. Definindo  $A_0 = -\dot{\eta}$ , temos que

$$V^{(1)} = -\frac{1}{2} \int \left( \Pi^i \Pi_i - \frac{1}{2} F^{ij} F_{ij} \right) d^3 x \quad (2.131)$$

e

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \dot{\eta} \partial_i \Pi^i - V^{(1)}. \quad (2.132)$$

Temos de  $\mathcal{L}^{(1)}$

$$\xi^{(1)\alpha} = \left( A^i \quad \Pi_i \quad \eta \right), \quad (2.133)$$

$$a_{\beta}^{(1)} = \left( \Pi_i \quad 0 \quad \partial_i \Pi^i \right), \quad (2.134)$$

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 \\ \delta_i^j & 0 & \partial_i^y \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y), \quad (2.135)$$

onde  $\partial_j^x \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $\partial_i^y \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Temos que o modo zero de  $(h_{\alpha\beta}^{(1)})$  é<sup>3</sup>

$$\nu_{[1]} = (-\partial_i \quad 0 \quad 1) . \quad (2.136)$$

Da condição de consistência (2.63),

$$\int \left( -\partial_i^x \frac{\delta \mathcal{V}^{(1)}(y)}{\delta A^i(x)} + \frac{\delta \mathcal{V}^{(1)}(y)}{\delta \eta^i(x)} \right) d^3y = - \int \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \frac{1}{2} F_{kl}(y) \left( \frac{\partial}{\partial y^k} \delta_i^l \delta^{(3)}(x-y) \right. \right. \quad (2.137)$$

$$\left. \left. - \frac{\partial}{\partial y^l} \delta_i^k \delta^{(3)}(x-y) \right) \right] d^3y = - \int \frac{\partial}{\partial x^i} F_{ik}(y) \frac{\partial}{\partial y^k} \delta^{(3)}(x-y) d^3y = 0 ,$$

isto é, identicamente nulo, desse resultado concluímos existir as seguintes transformações de calibre

$$\delta_{\mathcal{E}} A^i = \partial^i \mathcal{E} , \quad (2.138)$$

$$\delta_{\mathcal{E}} \eta = \mathcal{E} . \quad (2.139)$$

mas (2.139) é de fato

$$\delta_{\mathcal{E}} \int A_0 dt = \mathcal{E} . \quad (2.140)$$

Portanto, (2.139) pode ser escrita como

$$\delta_{\mathcal{E}} A_0 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \quad (2.141)$$

e as duas transformações de calibre ficam

$$\delta_{\mathcal{E}} A^i = -\partial^i \mathcal{E} , \quad (2.142)$$

$$\delta_{\mathcal{E}} A_0 = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} , \quad (2.143)$$

ou, substituindo  $\mathcal{E} \equiv -\Lambda$ ,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda , \quad (2.144)$$

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} . \quad (2.145)$$

De acordo como indicado em [56] (cap. 3, Equações 6.12 e 6.13). Temos, então, o potencial de ordem dois

$$\mathcal{V}^{(2)} = \mathcal{V}^{(1)}|_{\Omega} = -\frac{1}{2} \Pi^i \Pi_i + \frac{1}{4} F^{ij} F_{ij} \quad (2.146)$$

e a lagrangiana de ordem dois é

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi_i \dot{A}^i + \dot{\eta} \partial_i \Pi^i + \dot{\gamma} \partial_i A^i - V^{(2)} . \quad (2.147)$$

<sup>3</sup> Alternativamente, como ficará claro no Capítulo 4, podemos reescrever o modo-zero como  $\nu_{[1]} = (-\int d^3z \partial_i \delta(x-z) \quad 0 \quad 1)$ , evitando o formato operacional da eq. (2.136).

Onde escolhemos  $\partial_i A^i = 0$ , que é o calibre de Coulomb. Desta, obtemos

$$\xi^{(2)\alpha} = \left( A^i \quad \Pi^i \quad \eta \quad \gamma \right), \quad (2.148)$$

$$a_\alpha^{(2)} = \left( \Pi_i \quad 0 \quad \partial_i \Pi^i \quad \partial_i A^i \right), \quad (2.149)$$

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & \partial_i^y \\ \delta_i^j & 0 & \partial_i^y & 0 \\ 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y). \quad (2.150)$$

Com  $(f_{\alpha\beta})$  é regular, possui inversa, e é igual a

$$f_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i - \frac{\partial^j \partial_i}{\partial^k \partial_k} & 0 & \delta_j^i - \frac{\partial^i}{\partial^k \partial_k} \\ -\delta_j^i + \frac{\partial^j \partial_i}{\partial^k \partial_k} & 0 & -\frac{\partial^i}{\partial^k \partial_k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & \frac{1}{\partial^k \partial_k} \\ \frac{\partial^j}{\partial^k \partial_k} & 0 & -\frac{1}{\partial^k \partial_k} & 0 \end{pmatrix} \delta^{(3)}(x-y). \quad (2.151)$$

Com todas as derivadas atuando em  $\vec{x}$ . Os parênteses generalizados (2.95) entre  $A^i$  e  $\Pi_j$  são, portanto,

$$\{A^i(x, t), \Pi_j(y, t)\}^* = \left( \delta_j^i - \frac{\partial^j \partial_i}{\partial^k \partial_k} \right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.152)$$

Procedendo à contagem dos graus de liberdade. Temos ( 8 campos iniciais ( $A^\mu, \Pi_\mu$ ) - 2 modos zero ( $\nu_{[0]}, \nu_{[1]}$ ) - 1 variável eliminada ( $A_0$ ) - 1 vínculo ( Eq. (2.137)) ) / 2 = 2 graus de liberdade.

Por fim lembramos que resultados do tipo (2.151) e (2.152) não fazem parte do escopo dessa dissertação, aqui nos interessa principalmente encontrar as transformações de calibre de uma teoria mais a contagem de seus graus de liberdade. O resultado acima aparece como ilustração do método conforme originalmente elaborado por Barcelos-Neto e Wotzasek.



## 3 Transformações de calibre no formalismo simplético

### 3.1 Introdução

No contexto de sistemas de partículas, os principais resultados no tema de geradores de simetrias de calibre podem ser enunciados da seguinte forma[27, 57, 58]: para alguma iteração do algoritmo BW, seja uma estrutura pré-simplética degenerada na superfície de vínculos com  $Z$  modos-zero independentes que não geram novos vínculos. Então, todos os  $Z$  modos-zero são associados a transformações de calibre independentes na superfície de vínculos. A relação entre os modos-zero associados a calibres e transformações das coordenadas simpléticas é dada por  $\delta_G \xi^\alpha = \nu_k^\alpha \varepsilon^k$ , onde  $\delta_G$  representa transformações de calibre infinitesimais, o índice  $k$  é usado para indicar os modos-zero e  $\{\varepsilon^k\}$  é um conjunto de parâmetros infinitesimais arbitrários, um para cada modo-zero.

Vários exemplos particulares de como são obtidas simetrias de calibre no formalismo simplético para teorias de campo podem ser encontrados na literatura, e.g., em Refs. [33, 34, 57, 59], mas, até onde sabemos, uma apresentação geral e sistemática sobre o assunto, cobrindo temas como transformações de calibre dos multiplicadores de Lagrange, solução das equações de calibre e obtenção do conjunto completo dos parâmetros de calibre, ainda não foram abordados.

Em especial, carece na literatura simplética considerações sobre a solução *off-shell* das equações de calibre para coordenadas que aparecem na teoria como multiplicadores de Lagrange. O termo *off-shell*, usado para designar relações válidas no domínio da ação, mas não necessariamente no domínio das equações de movimento, surge no contexto de discussões sobre teoria de campos ao se considerar grupos de equações que não satisfazem  $p^\mu p_\mu = m^2$ , designadas como *off the mass shell*, ou fora da casca massiva[60]. Nesse trabalho o termo assume o sentido mais amplo de designar todo o espaço de fase, inclusive a região *on-shell*, pertencente ao domínio das soluções físicas. Mais especificamente, equações *off-shell* são relações que, de forma geral, não satisfazem as equações de movimento. Classicamente essas relações são consideradas não-físicas, mas em mecânica quântica estados *off-shell* contribuem através dos cálculos de integrais de trajetória com estados *on-shell*[61–63]. Estados não físicos desse tipo podem incluir situações em que certas grandezas, tais como energia e momento, não se conservam. Partículas virtuais/intermediárias e fantasmas são descritas por estados *off-shell* e possivelmente apresentam invariâncias de calibre fora da superfície de vínculos[64, 65]. O estudo geométrico-simplético das invariâncias de calibre *off-shell* representam, portanto, uma contribuição para o estudo de métodos de

quantização.

Nesse capítulo discutimos a conexão entre simetrias de calibre e modos-zero, como discutido, em particular, em Refs. [27, 57, 58]. Também lidamos com questões relacionadas a transformações de calibre em teorias de campo, por exemplo, no relevante caso em que a ordem da matriz pré-simplética é menor na superfície de vínculos. O problema da obtenção das transformações de calibre duma dada teoria dentro do contexto do formalismo simplético é considerado. Começamos com uma revisão da abordagem simplética para a obtenção de simetrias de calibre [33, 57] e apresentamos uma interpretação geométrica. Nesse trabalho mostramos que o método de FJ não concorda necessariamente com o método de Dirac sobre as expressões de invariância de calibre fora da superfície de vínculos, embora sempre concorde ao avaliar as invariâncias na superfície de vínculos, como indicado em Ref. [57]. Apresentamos a dedução da expressão geral para transformações de calibre de todas as coordenadas do espaço de configuração e algumas sutilezas acerca do formalismo simplético são explicadas. Em seguida introduzimos um método para se calcular o conjunto completo de parâmetros de calibre inteiramente dentro do contexto do formalismo simplético e mostramos que os resultados são equivalentes ao encontrado via formalismo de Dirac. Nosso método joga luz acerca de questão de se considerar explicitamente os vínculos primários no formalismo simplético, pelo menos quando se trata da obtenção das equações de invariância, e mostramos que o formalismo simplético deve necessariamente incorporar uma prescrição de linearização de Lagrangianas. Finalmente, alguns exemplos ilustrando o método introduzido são apresentados, tanto para casos de sistemas de partículas apresentando invariâncias, quanto para teorias de campo de calibre.

## 3.2 Simpletrias de calibre no algoritmo BW

### 3.2.1 Transformações de calibre *on-shell*

Abaixo consideramos o problema de encontrar as transformações de calibre de uma teoria de acordo com a abordagem simplética tal como apresentado por Montani [57]. O objetivo é encontrar a fórmula geral para as transformações das coordenadas do sistema, bem com dos multiplicadores de Lagrange, segundo um parâmetro arbitrário.

Seja uma Lagrangiana geral  $L(q, \dot{q})$  dependente de coordenadas generalizadas  $q$ , não necessariamente lineares nas velocidades. O procedimento simplético requer que escolhamos variáveis auxiliares tais que a Lagrangiana seja escrita de forma linear nas velocidades, ou seja, como

$$L = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha - V(\xi) , \quad (3.1)$$

com vínculos implicitamente contidos na função Lagrangiana. Através da variação da ação

∫  $\mathcal{L}dt$  chegamos até as equações de Euler-Lagrange [24]

$$f_{\alpha\beta}\dot{\xi}^\alpha - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad (3.2)$$

onde a 2-forma simplética (ou matriz simplética)  $f_{\alpha\beta}$  é definida por

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta}, \quad (3.3)$$

e  $f$  pode ou não ser singular. Se a matriz simplética é regular, então somos capazes de introduzir os *parênteses generalizados*, por sua vez dados por

$$\{F, G\}_* = \frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha} f^{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.4)$$

Note que, se  $f$  está na forma canônica, os parênteses generalizados coincidem com os parênteses de Poisson.

Entretanto, se  $f$  é singular de ordem  $R < N$ , existirão  $N - R$  modos-zero, denotados por  $\nu_a^\alpha$ , tais que

$$\nu_a^\alpha f_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.5)$$

Contraindo as equações de Euler-Lagrange (3.2) com os modos-zero obtemos

$$\nu_a^\alpha \left( f_{\alpha\beta} \dot{\xi}^\beta - \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} \right) = 0, \quad (3.6)$$

que leva a escrevermos as *condições de consistência* na forma

$$\nu_a^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0, \quad (3.7)$$

que, em geral, não são válidas em todo o espaço de fase (ou espaço simplético), mas são forçadas a satisfazerem através das condições de consistência. Terminamos, portanto, com as seguintes equações subsidiárias,

$$\omega_a \equiv \nu_a^\alpha \frac{\partial V}{\partial \xi^\alpha} = 0 \quad a = 1, \dots, M, \quad (3.8)$$

para os  $M = N - R$  vínculos.

Essas relações devem ser introduzidas na Lagrangiana através da técnica dos multiplicadores de Lagrange aplicados ao setor cinético,  $\dot{\eta}^a \omega_a$ , de modo a restringir a função Lagrangiana para dentro dos contornos dados pelas relações (3.8).

Para os casos em que as condições de consistência (3.7) sejam identicamente satisfeitas, os modos-zero são ortogonais ao gradiente do potencial e geram uma variedade imersa com dimensão igual ao número de vínculos de primeira classe, estes autovetores nulos da matriz simplética, quando contraídos com vetores tangentes à superfície potencial, deixam o sistema invariante. A superfície formada por esses modos-zero são chamadas de

“superfícies nulas”, ou superfícies de vínculos. Estas direções de invariância são equivalentes à transformações preservadoras da dinâmica, pois resultam em vetores nulos quando contraídos com a 2-forma simplética. Logo, as simetrias de calibre relacionadas às órbitas de calibre podem ser entendidas como invariâncias por reparametrizações das superfícies nulas (Teorema 2.2 em [48]).

Vamos assumir que o procedimento simplético foi realizado tantas vezes quanto necessário até encontrar todos os vínculos. Consideraremos ainda que todos os modos-zero remanescentes são ortogonais ao gradiente do potencial. Qualquer modo-zero que não satisfaça isso leva a um vínculo, o qual assumimos aqui que foi eliminado (reduzindo a dimensão do espaço das variáveis simpléticas), restando somente a existência de vínculos associados à simetrias de calibre, i.e., geradores de calibre  $\omega_a$ , com  $a = 1, \dots, M$ , então podemos escrever a Lagrangiana como

$$L = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha + \omega_a \dot{\eta}^a - V(\xi) \equiv a'_{\alpha'} \dot{\xi}^{\alpha'} - V(\xi) , \quad (3.9)$$

dentro do esquema simplético, ou

$$\hat{L} = a_\alpha \dot{\xi}^\alpha - \omega_a \lambda^a - V(\xi) , \quad (3.10)$$

usando o procedimento de Dirac a fim a estabelecer mais adiante a correspondência entre os multiplicadores de Lagrange nos dois formalismos. No presente esquema  $\{\hat{\xi}^{\alpha'}\} \equiv (\xi^\beta, \lambda^a)$ ,  $\{\xi^{\alpha'}\} \equiv (\xi^\beta, \eta^a)$ ,  $\alpha' = 1, \dots, N + M$ , de modo que o “chapéu” nas variáveis simpléticas denotam simplesmente a correspondência

$$-\lambda^a \rightarrow \dot{\eta}^a . \quad (3.11)$$

A nova matriz simplética se torna, então,

$$f = \begin{pmatrix} \bar{f} & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right) \\ -\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)^T & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.12)$$

onde

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_{a\alpha} = \begin{pmatrix} \partial_1 \omega_1 & \cdots & \partial_1 \omega_M \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ \partial_N \omega_1 & \cdots & \partial_N \omega_M \end{pmatrix} , \text{ with } \partial_\alpha \omega_a \equiv \frac{\partial \omega_a}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.13)$$

e  $\bar{f}^{\alpha\beta}$  é o bloco regular de  $f^{\alpha'\beta'}$ , definido com a eq. (3.3) restringida ao conjunto  $\xi$  e  $a$ , com  $\alpha, \beta = 1, \dots, N$ .

Os modos-zero de (3.12) terão o formato[49]

$$\nu_a^{\alpha'} = \left( -\bar{f}^{\alpha\beta} \frac{\partial \omega_a}{\partial \xi^\alpha} \quad \mathbf{1}_a \right) \quad (3.14)$$

com

$$\mathbf{1}_a \equiv \left( 0 \quad \cdots \quad 1 \quad \cdots \quad 0 \right), \quad (3.15)$$

com o 1 ocupando a  $a$ -ésima posição.

Contraindo (3.14) e (3.12) e usando  $\bar{f}^{\alpha\beta} = -\bar{f}^{\beta\alpha}$ , temos

$$\begin{aligned} \nu_a^{\alpha'} f_{\alpha'\beta'} &= \left( \nu_a^{\alpha'} f_{\alpha'\beta} \quad \nu_a^{\alpha'} f_{\alpha'b} \right) \\ &= \left( -\bar{f}_{\alpha\beta} \bar{f}^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \omega_a + \delta_a^b \partial_\beta \omega_b \quad \bar{f}^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \omega_a \partial_\alpha \omega_b \right) \\ &= \left( -\delta_\beta^\gamma \partial_\gamma \omega_a + \delta_a^b \partial_\beta \omega_b \quad \bar{f}^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \omega_a \partial_\alpha \omega_b \right) \\ &= \left( 0 \quad \left( \bar{f}^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \omega_a \partial_\alpha \omega \right)_b \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde o índice  $b$  no termo não nulo denota  $M$  entradas com  $b = 1, \dots, M$ . Tendo essa notação em mente, podemos escrever a eq. (3.16) simplesmente como

$$\nu_a^{\alpha'} f_{\alpha'\beta'} = \left( 0 \quad \{ \omega_a, \omega_b \}_{\bar{f}} \right), \quad (3.17)$$

onde

$$\{F, G\}_{\bar{f}} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha} \bar{f}^{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.18)$$

Dado que  $\bar{f}$  é não degenerada, usando o teorema de Darboux, podemos sempre localmente escrever  $\{F, G\}$  como parênteses de Poisson. Entretanto, a eq. acima é válida de forma mais ampla, não necessitando ser parênteses de Poisson. Note que a primeira parte de (3.17) é automaticamente zero, mas a segunda parte se anula na superfície de vínculos somente se  $\omega_a$  define uma álgebra sob  $\bar{f}$ , i.e., se

$$\{ \omega_a, \omega_b \}_{\bar{f}} = C_{ab}^c \omega_c. \quad (3.19)$$

O conjunto de autovetores nulos associados com as simetrias de calibre (infinitesimais) são os geradores de transformações de calibre. Geometricamente as transformações de calibre são apenas as componentes dos parâmetros de calibre infinitesimais  $\varepsilon^a$  projetadas nas superfícies de vínculos, i.e.,

$$\delta_\varepsilon \xi^\alpha = \nu_a^\alpha \varepsilon^a = -\bar{f}^{\alpha\beta} \partial_\beta \omega_a \varepsilon^a, \quad (3.20)$$

$$\delta_\varepsilon \eta_a = \varepsilon_a \Rightarrow \delta_\varepsilon \lambda_a = \dot{\varepsilon}_a. \quad (3.21)$$

### 3.2.2 Transformações de calibre *off-shell*

As equações (3.20) e (3.21) fornecem as transformações de calibre corretas na superfície de vínculos, mas não fora dela. Para encontrarmos as relações de calibre no nível da ação é necessário voltar atrás nas transformações realizadas, de modo que a recuperar a informação contida na ação antes da redução simplética[27, 57]. Esse procedimento é apresentado nesta seção.

Usando o modo-zero (3.14), a eq. (3.7) se torna

$$\begin{aligned} \nu_a^{\alpha'} \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha'}} &= \nu_a^\beta \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta} \\ &= \frac{\partial \omega^a}{\partial \xi^\alpha} \bar{f}^{\alpha\beta} \frac{\partial V}{\partial \xi^\beta} = \{\omega^a, V\}_{\bar{f}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como, por construção, nenhum vínculo novo emerge da Lagrangiana dada, encontramos que

$$\{\omega^a, V\}_{\bar{f}} = \nu_a^{\alpha'} \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha'}} = -V_a^b \omega_b, \quad (3.23)$$

onde  $V^{ab}$  é uma matriz constante.

A ação deve ser invariante sob a transformação gerada pelos modos-zero. Assim, temos que  $\delta_\varepsilon S = \int \delta_\varepsilon L = 0$ , ou

$$\delta_\varepsilon S = \int dt \left( \frac{\partial L}{\partial \xi^{\alpha'}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^{\alpha'}} \right) \delta_\varepsilon \xi^{\alpha'} \equiv \int dt \left( f_{\alpha'\beta'} \dot{\xi}^{\beta'} - \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha'}} \right) \delta_\varepsilon \xi^{\alpha'} = 0. \quad (3.24)$$

Então temos que

$$\delta_\varepsilon \xi^{\alpha'} = \nu_a^{\alpha'} \varepsilon^a. \quad (3.25)$$

Para compararmos as transformações de calibre dos multiplicadores de Lagrange do simplético com o método de Dirac temos de voltar às respectivas Lagrangianas, a saber

$$L \rightarrow \hat{L}, \quad (3.26)$$

tal como está definida em (3.11) e (3.10). As variáveis originais e modificadas são escritas como

$$\hat{\xi}^{\alpha'} = (\xi^\alpha, \lambda^a), \quad (3.27)$$

$$\xi^{\alpha'} = (\xi^\alpha, \eta^a). \quad (3.28)$$

Contraindo as equações de movimento com  $\nu_a^{\alpha'}$  e usando as eqs. (3.17) e (3.27), temos

$$\begin{aligned} \nu_a^{\alpha'} \frac{\delta L}{\delta \xi^{\alpha'}} &= \nu_a^{\alpha'} f_{\alpha'\beta'} \dot{\xi}^{\beta'} - \nu_a^{\alpha'} \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha'}} \\ &= \{\omega_a, \omega_b\}_{\bar{f}} \dot{\eta}^b + V_a^b \omega_b \\ &= C_{ab}^c \omega_c \dot{\eta}^b + V_a^b \omega_b, \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde (3.17) e (3.23) foram usadas na segunda linha. Usando (3.14), o lado esquerdo da eq. (3.29) fica igual a

$$\nu_a^\beta \frac{\delta L}{\delta \xi^\beta} - \frac{\delta L}{\delta \eta^a}. \quad (3.30)$$

Retornando às variáveis originais,

$$\eta^a \rightarrow -\lambda^a, \quad (3.31a)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \eta^a} \rightarrow -\frac{\delta \hat{L}}{\delta \lambda^a} \frac{d}{dt}, \quad (3.31b)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \xi^\alpha} \rightarrow \frac{\delta \hat{L}}{\delta \xi^\alpha} \quad (3.31c)$$

e notando, da eq. (3.10), que  $\frac{\delta \hat{L}}{\delta \lambda^a} = -\omega^a$ , obtemos

$$\nu_a^\alpha \frac{\delta L}{\delta \xi^\alpha} - \frac{\delta L}{\delta \lambda^b} \left( \delta_a^b \frac{d}{dt} - C_{ac}^b \lambda^c - V_a^b \right) = 0. \quad (3.32)$$

Os dois termos representam contrações com elementos diferentes do modo-zero e, portanto, devem se anular independentemente. Segue que

$$\left( \delta_a^b \frac{d}{dt} - C_{ac}^b \lambda^c - V_a^b \right) \frac{\delta L}{\delta \lambda^b} = \delta_\varepsilon L = 0, \quad (3.33)$$

que implica que a transformação de calibre para o multiplicador de Lagrange é

$$\delta_\varepsilon \lambda^a = \varepsilon^a - C_{bc}^a \lambda^b \varepsilon^c - V_b^a \varepsilon^b, \quad (3.34)$$

resultado que coincide com de análises *à la* Dirac[17, 66, 67].

### 3.3 Resolvendo as equações de calibre

As expressões para transformações de calibre não são suficientes, é preciso encontrar um conjunto de parâmetros de calibre independentes. Nessa seção discutiremos as particularidades da abordagem simplética e como podemos expressar as simetrias de calibre nesse formalismo. Os resultados a seguir e todas as discussões que os acompanham fazem parte de um trabalho ainda em desenvolvimento.

A ação (3.24), da qual baseamos nossa análise, é construída sobre a Lagrangiana linearizada denotada por  $L^{(0)}$  no algoritmo BW, mas até agora, pelo que sabemos, nada de específico foi dito sobre como se obter essa expressão. Seguindo de perto a Ref. [68], temos de uma Lagrangiana com matriz Hessiana  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^m \partial \dot{q}^n}$ , de ordem  $N_0 < N(m, n = 1, \dots, N)$ , que as quantidades  $p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}$  não podem ser todas invertidas e somente  $N_0$  velocidades podem ser resolvidas como funções de  $q^n, \dot{q}^{n_1}, p_{n_0}$ , com  $n_0 = 1, \dots, N_0$  e  $n_1 = N_0 + 1, \dots, N$ . Da não invertibilidade dos momentos conjugados surgem  $N_1 = N - N_0$  vínculos primários  $\omega_{n_1}(q^n, p_n) = 0$ . Esses vínculos, considerando que sejam todos independentes entre si, podem ser escritos como[69]

$$\omega_{n_1}(q^n, p_n) = p_{n_1} - \varphi_{n_1}(q^n, p_{n_0}) = 0. \quad (3.35)$$

A transformação de Legendre da Lagrangiana para a função Hamiltoniana é definida como  $L - p_n \dot{q}^n = V$ , mas no esquema do formalismo simplético começamos com uma Lagrangiana que, de maneira geral, não contém os vínculos primários da teoria. Isto é, os vínculos primários são comumente eliminados no formalismo simplético antes de se escrever a Lagrangiana na forma linear nas velocidades. Uma maneira de linearizar a teoria é adicionar os vínculos primários dentro do setor potencial da Lagrangiana simplética, fazendo

$$\begin{aligned}
L^{(0)}(q^n, p_n, \dot{q}^{n_1}) &= p_n \dot{q}^n - \lambda^{n_1} \omega_{n_1} - V(q^n, p_{n_0}) \\
&= p_{n_0} \dot{q}^{n_0} + p_{n_1} \dot{q}^{n_1} - \lambda^{n_1} \omega_{n_1} - V(q^n, p_{n_0}) \\
&= p_{n_0} \dot{q}^{n_0} + p_{n_1} \dot{q}^{n_1} - \lambda^{n_1} (p_{n_1} - \varphi_{n_1}(q^n, p_{n_0})) - V(q^n, p_{n_0}) \\
&= p_{n_0} \dot{q}^{n_0} + \dot{q}^{n_1} \varphi_{n_1}(q^n, p_{n_0}) - V(q^n, p_{n_0})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde usamos

$$\dot{q}^{n_1} - \lambda^{n_1} = 0 \tag{3.37}$$

como um vínculo encontrado a partir da variação da ação com respeito a  $p_{n_1}$ .

Seguindo o algoritmo BW, temos

$$\xi^{(0)\alpha} = (q^{n_0} \quad p_{n_0} \quad q^{n_1}) \quad \text{e} \quad a^{(0)\beta} = (p_{m_0} \quad 0 \quad \varphi_{m_1}) , \tag{3.38}$$

levando à matriz pré-simplética da iteração zero,

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{n_0}^{n_0} & \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial q^{n_0}} \\ \delta_{n_0}^{m_0} & 0 & \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial p_{n_0}} \\ -\frac{\partial \varphi_{n_1}}{\partial q^{m_0}} & -\frac{\partial \varphi_{n_1}}{\partial p_{m_0}} & 0 \end{pmatrix} , \tag{3.39}$$

com modos-zero dados por

$$\nu_{m_1}^{(0)\alpha} = \left( -\frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial p_{n_0}} \quad \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial q^{n_0}} \quad 1 \right) . \tag{3.40}$$

Os modos-zero impõem, via condições de consistência, que

$$-\frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial p_{n_0}} \frac{\partial V}{\partial q^{n_0}} + \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial q^{n_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{n_0}} + \frac{\partial V}{\partial q^{m_1}} = 0 , \tag{3.41}$$

de onde surgem os vínculos  $\omega_{n_2} = 0$ , com  $n_2 = N_1 + 1, \dots, N_2$ . Em geral, os parênteses de Poisson são necessariamente proporcionais aos vínculos, portanto podemos escrever a eq. (3.41) como

$$\{\omega_{n_1}, V\}_{\bar{f}} = V_{n_1}^{m_1} \omega_{m_1} + V_{n_1}^{n_2} \omega_{n_2} . \tag{3.42}$$

Aqui é possível imaginar que a restrição do espaço de fase para excluir uma das coordenadas originais, i.e.  $p_{n_1}$ , poderia levar à limitações nos cálculos de transformações de calibre

no espaço de fase completo. Entretanto esse não é o caso por duas razões: primeiro, apesar da redução do espaço de fase com a retirada das coordenadas  $p_{n_1}$ , nosso esquema de linearização induz os corretos parênteses de Poisson (generalizados), implicando no resultado completo esperado ao se aplicar a condição de consistência nos vínculos primários, de modo que não há prejuízo para a obtenção do conjunto completo das constantes de estrutura; em segundo lugar, é requerido, como veremos mais adiante, que se realize um retorno à Lagrangiana original, a partir da qual será interpretado o papel desempenhado pelas constantes de estrutura na obtenção das equações finais para as invariâncias de calibre *off-shell*.

O próximo passo no algoritmo BW é inserir as relações encontradas na iteração zero entrem na Lagrangiana da próxima iteração como vínculos simpléticos, nesse caso a Lagrangiana da iteração um é

$$L^{(1)} = p_{n_0} \dot{q}^{n_0} + \dot{q}^{n_1} \varphi_{n_1} + \dot{\eta}^{n_2} \omega_{n_2} - V , \quad (3.43)$$

O vetor simplético é

$$\xi^{(1)\alpha} = \left( q^{n_0} \quad p_{n_0} \quad q^{n_1} \quad \eta^{n_2} \right) \quad (3.44)$$

e a um-forma da iteração um é

$$a_{\beta}^{(1)} = \left( p_{m_0} \quad 0 \quad \varphi_{m_1} \quad \omega_{m_2} \right) . \quad (3.45)$$

A partir dos quais computamos a matriz pré-simplética da iteração um como

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{m_0}^{n_0} & \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial q^{n_0}} & \frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial q^{n_0}} \\ \delta_{n_0}^{m_0} & 0 & \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial p^{n_0}} & \frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial p^{n_0}} \\ -\frac{\partial \varphi_{n_1}}{\partial q^{m_0}} & -\frac{\partial \varphi_{n_1}}{\partial p_{m_0}} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial \omega_{n_2}}{\partial q^{m_0}} & -\frac{\partial \omega_{n_2}}{\partial p_{m_0}} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.46)$$

De acordo com a eq. (3.14), a matriz  $f^{(1)}$  deve conter os seguintes autovetores<sup>1</sup>,

$$\nu_{m_1}^{(1)\alpha} = \left( -\frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial p_{n_0}} \quad \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial q^{n_0}} \quad 1 \quad 0 \right) , \quad (3.47)$$

$$\nu_{m_2}^{(1)\alpha} = \left( -\frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial p_{n_0}} \quad \frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial q^{n_0}} \quad 0 \quad 1 \right) . \quad (3.48)$$

Mas para que sejam modos-zero, os vetores acima devem satisfazer a relação  $\nu^\alpha f_{\alpha\beta} = 0$  na superfície dada por  $\omega_{n_1} = 0$ , ou, da eq. (3.17),

$$\{\omega_{n_1}, \omega_{n_2}\}_{\bar{f}} = C_{n_1 n_2}^{m_1} \omega_{m_1} + C_{n_1 n_2}^{m_2} \omega_{m_2} . \quad (3.49)$$

Dos modos-zero (3.48) seguem-se os vínculos

$$-\frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial p_{n_0}} \frac{\partial V}{\partial q^{n_0}} + \frac{\partial \omega_{m_2}}{\partial q^{n_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{n_0}} = 0 , \quad (3.50)$$

<sup>1</sup> Na verdade, não é necessário que sejam autovetores no sentido restrito, é bastante que sejam “autovetores fracos”, ou seja, autovetores na superfície de vínculos. Note que esse fato não altera a eq. (3.49).

ou ainda, analogamente a (3.41),

$$\{\omega_{n_2}, V\}_{\bar{f}} = \{V_{n_1}^{m_1}\omega_{m_1} + V_{n_1}^{n_2}\omega_{n_2}, V\}_{\bar{f}} = V_{n_2}^{n_1}\omega_{n_1} + V_{n_2}^{m_2}\omega_{m_2} + V_{n_2}^{n_3}\omega_{n_3}. \quad (3.51)$$

O algoritmo então continua por  $I$  iterações, até que não haja mais vínculos para serem encontrados, fornecendo uma corrente de vínculos com

$$\begin{aligned} \{\omega_{n_1}, \omega_{n_s}\}_{\bar{f}} &= \sum_{i \leq s} C_{m_1 m_s}^{m_i} \omega_{n_i}, \\ \{\omega_{n_s}, V\}_{\bar{f}} &= \sum_{i \leq s+1} V_{m_s}^{n_i} \omega_{n_i}, \\ \{\omega_{n_I}, V\}_{\bar{f}} &= \sum_{i \leq I} V_{m_I}^{n_i} \omega_{n_i}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Agora considere a ação inicial  $S^{(0)}$  dada pela eq. (3.36)

$$S^{(0)} = \int (p^n \dot{q}_n + \omega_{n_1} \dot{\eta}^{n_1} - V) dt \quad (3.53)$$

que pode ser obtida pela ação modificada pela Lagrangiana na última iteração  $S^{(I)}$ , ou

$$S^{(I)} = \int (p^n \dot{q}_n + \omega_{n_i} \dot{\eta}^{n_i} - V) dt, \quad (3.54)$$

juntamente com as condições

$$\dot{\eta}^{n_i} = 0, \quad i \geq 2, \quad (3.55)$$

nos multiplicadores de Lagrange derivados no tempo  $\{\dot{\eta}^{n_1}\}$ . Essas condições efetivamente cumprem o papel de um *pullback* — i.e., retorno de uma superfície deformada por um conjunto de operações, nesse caso a restrição do espaço de fase pela imposição dos vínculos, de volta para a superfície original — para a estrutura pré-simplética de  $L^{(0)}$ , onde podemos computar com sucesso as transformações de calibre dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{n_1}$ .

Reescrevendo a eq.(3.34) levando em consideração a classificação dos vínculos entre primários e secundários, temos

$$-\delta \dot{\eta}^{n_i} = \frac{d\varepsilon^{n_i}}{dt} - \sum_{j \geq i-1} \varepsilon^{n_j} V_{n_j}^{n_i} + \dot{\eta}^{n_1} \sum_{j \geq i} \varepsilon^{n_j} C_{n_1 n_j}^{n_i}, \quad (3.56)$$

As simetrias de calibre dos multiplicadores de Lagrange são dados pela eq. (3.56) com a condição de que  $\varepsilon^k$  preserve as condições de calibre dadas pela eq. (3.55). Logo, usando a eq. (3.52), temos que

$$0 = \frac{d\varepsilon^{n_i}}{dt} - \sum_{j \geq i-1} \varepsilon^{n_j} V_{n_j}^{n_i} + \dot{\eta}^{n_1} \sum_{j \geq i} \varepsilon^{n_j} C_{n_1 n_j}^{n_i}, \quad (3.57)$$

para  $i \geq 2$ . Enquanto, dada a eq. (3.37), a transformação de calibre de  $\lambda^{n_1}$  é

$$\delta_\varepsilon \lambda^{n_1} = \frac{d\varepsilon^{n_1}}{dt} - \sum_j \varepsilon^{n_j} V_{n_j}^{n_1} - \lambda^{m_1} \sum_j \varepsilon^{n_j} C_{m_1 n_j}^{n_1}, \quad (3.58)$$

como mostrado na Ref. [48]. A solução geral do sistema é dada por um processo iterativo, onde começamos da última iteração com  $i = I$  e decrementamos até  $i = 1$ . No fim teremos tantos parâmetros arbitrários quanto existirem vínculos arbitrários de primeira classe[70]. Além disso, note que, de acordo com nosso esquema de linearização,  $\lambda^{n_1} = \dot{q}^{n_1}$  (eq. (3.37)), adicionalmente, as constantes de estrutura da eq. (3.58) são obtidas usando-se os vínculos primários, isso significa que para se obter o conjunto completo das transformações de calibre e encontrar o conjunto reduzido e independente de parâmetros de calibre temos que, de forma explícita, estabelecer uma distinção entre os vínculos primários e secundários. Nota-se que essa distinção é comumente atribuída como sendo irrelevante no método simplético, mas considerando os resultados acima, vemos que em alguns casos se faz necessária a distinção.

## 3.4 Exemplos

A fim de ilustrar o modo simplético de se obter as expressões para as transformações de calibre numa teoria, consideramos alguns exemplos de sistemas de partículas, bem como de duas importantes teorias de campo. No primeiro caso mostramos como o método simplético puro falha em obter o conjunto das transformações de calibre sobre o espaço simplético como um todo e como o esquema proposto deve ser aplicado para encontrar o resultado fora da superfície de vínculos. No último exemplo mostramos a aplicação do método na teoria de Yang-Mills, que no contexto desta tese é útil por conta de semelhanças em relação à descrição de Holst da teoria da relatividade geral.

### 3.4.1 Sistema de partículas A

Nesse exemplo as transformações de calibre *on-shell* diferem substancialmente das transformações encontradas . Além disso, os parâmetros de calibre em si dependem das coordenadas generalizadas, tornando-o particularmente interessante.

Considere a ação[48]

$$S = \int \frac{1}{2} [(\dot{q}_2 - e^{q_1})^2 + (\dot{q}_3 - q_2)^2] dt . \quad (3.59)$$

A Hamiltoniana canônica é

$$H_C = e^{q_1} p_2 + q_2 p_3 + \frac{1}{2} p_2^2 + \frac{1}{2} p_3^2 . \quad (3.60)$$

Para escrevermos a Lagrangiana original escolheremos  $V^{(0)} \equiv H_C$ , de modo que a Lagrangiana da iteração zero seja

$$L^{(0)} = \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 - \left( \frac{p_2^2}{2} + \frac{p_3^2}{2} + e^{q_1} p_2 + q_2 p_3 \right) . \quad (3.61)$$

Donde temos o vetor simplético e a 1-forma simplética de ordem zero,

$$\xi^{(0)\alpha} = (q_1 \ q_2 \ p_2 \ q_3 \ p_3) , \quad (3.62)$$

$$a_\beta^{(0)} = (0 \ p_2 \ 0 \ p_3 \ 0) , \quad (3.63)$$

dos quais obtemos a matriz pré-simplética de ordem zero

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.64)$$

com somente um modo-zero, a saber,

$$\nu_1^\alpha = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) , \quad (3.65)$$

então, da condição de consistência, encontramos o vínculo<sup>2</sup>

$$\omega_1 = e^{q_1} p_2 . \quad (3.66)$$

Agora incluímos o vínculo na Lagrangiana multiplicado por um multiplicador de Lagrange derivado no tempo. Assim, a Lagrangiana da primeira iteração é

$$\xi^{(1)\alpha} = \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 + \dot{\eta}_1 \omega_1 - \left( \frac{p_3^2}{2} + q_2 p_3 \right) , \quad (3.67)$$

com  $V^{(1)} = V^{(0)}|_\omega$ . O vetor simplético da primeira iteração e a 1-forma da primeira iteração são, respectivamente,

$$\xi^{(1)\alpha} = (q_1 \ q_2 \ p_2 \ q_3 \ p_3 \ \eta_1) , \quad (3.68)$$

$$a_\beta^{(1)} = (0 \ p_2 \ 0 \ p_3 \ 0 \ \omega_1) , \quad (3.69)$$

levando à matriz pré-simplética de ordem um

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{q_1} p_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e^{q_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e^{q_1} p_2 & 0 & -e^{q_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.70)$$

<sup>2</sup> Como  $e^{q_1}$  nunca é nulo, é possível redefinir o vínculo  $\omega_1$  como  $\omega'_1 = p_2$ . As consequências dessa redefinição nos cálculos para a transformação de calibre do sistema são discutidas no Apêndice C.

A matriz (3.70) não possui modos-zero estritamente falando, mas podemos considerar a existências de autovetores não nulos com autovalores nulos na superfície de vínculos, são eles

$$\nu_2^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

$$\nu_3^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -e^{q_1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.72)$$

Aplicando a condição de consistência sobre os dois modos-zero fracos obtemos um vínculo adicional mais uma identidade nula,

$$\omega_2 = \nu_2^\alpha \frac{\partial V^{(1)}}{\partial (\xi^{(1)})^\alpha} = -e^{q_1} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial q_2} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \eta_1} = -e^{q_1} p_3 = 0, \quad (3.73)$$

$$\nu_3^\alpha \frac{\partial V^{(1)}}{\partial (\xi^{(1)})^\alpha} = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial q_1} = 0. \quad (3.74)$$

Forçando o vínculo (3.73) na próxima iteração, somos levados à Lagrangiana simplética de ordem dois,

$$L^{(2)} = \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 + \dot{\eta}_1 \omega_1 + \dot{\eta}_2 \omega_2, \quad (3.75)$$

com  $V^{(2)} = V^{(1)}|_\omega$ . O vetor simplético de ordem um e a 1-forma simplética de ordem um são, respectivamente,

$$\xi^{(2)\alpha} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_2 & q_3 & p_3 & \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.76)$$

$$a_\beta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & p_2 & 0 & p_3 & 0 & \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix}, \quad (3.77)$$

com a matriz pré-simplética de segunda ordem escrita como

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{q_1} p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e^{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -e^{q_1} \\ -e^{q_1} p_2 & 0 & -e^{q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{q_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Os modos-zero da matriz pré-simplética de ordem dois encontrados são

$$\nu_4^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

$$\nu_5^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & e^{q_1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.80)$$

$$\nu_6^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{q_1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

Com  $V^{(0)} = 0$ . Todos os modos-zero levam a simetrias de calibre, uma vez que o potencial de ordem dois é nulo. Em todo caso

$$\delta_{\varepsilon_1} q_1 = \varepsilon_1, \quad (3.82)$$

$$\delta_{\varepsilon_2} q_2 = e^{q_1} \varepsilon_2, \quad (3.83)$$

$$\delta_{\varepsilon_3} q_3 = e^{q_1} \varepsilon_3. \quad (3.84)$$

Adicionalmente às simetrias de calibre do espaço de fase canônico, os modos-zero indicam as seguintes transformações de calibre para as variáveis auxiliares,

$$\delta_{\varepsilon_2} \eta_1 = \varepsilon_2, \quad (3.85)$$

$$\delta_{\varepsilon_3} \eta_2 = \varepsilon_3. \quad (3.86)$$

Diferentemente das eqs. (3.82-3.84), as eqs. (3.85) e (3.86) não fornecem informações essenciais em relação ao sistema descrito pela ação (3.59), uma vez que os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1 (= -\dot{\eta}_1)$  and  $\lambda_2 (= -\dot{\eta}_2)$  são quantidades arbitrárias. Além disso, as eqs. (3.82-3.84) contém parâmetros dependentes entre si, já que a quantidade de parâmetros independentes de uma teoria é igual ao número de vínculos primários de primeira classe. Para encontrarmos as expressões definitivas devemos resolver os sistema (3.57-3.58) para nosso caso.

Primeiramente precisamos computar as constantes de estrutura  $V_a^b$ ,  $C_{ab}^c$  dadas pelas eqs. (3.23) e (?). Reescrevendo o conjunto de vínculos a fim de incluir vínculos primários, temos  $\tilde{\omega}_1 = p_1$  como o único vínculo primário e  $\tilde{\omega}_2 = e^{q_1} p_2$  e  $\tilde{\omega}_3 = -e^{q_1} p_3$  como vínculos secundários, de modo que as constantes de estrutura não nulas são  $V_1^2 = V_2^3 = 1$ ,  $C_{12}^3 = C_{13}^3 = -1$ . Como os vínculos secundários surgem dos vínculos primários, haverá somente um parâmetros de calibre independente. Para encontrar as relações entre os parâmetros de calibre começamos usando a eq. (3.57). Assim, para  $\varepsilon = \varepsilon^3(t)$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\varepsilon}{dt} - \varepsilon^2 V_2^3 - \lambda^1 \varepsilon C_{13}^3 \\ &= \dot{\varepsilon} - \varepsilon^2 + \lambda^1 \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.87)$$

então  $\varepsilon^2 = \dot{\varepsilon} + \lambda^1 \varepsilon$ . Repetindo o passo acima para  $\varepsilon^3$  temos

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{\dot{2}} - \varepsilon^1 V_1^2 - \lambda^1 \varepsilon^2 C_{12}^2 \\ &= \ddot{\varepsilon} + \dot{\lambda}^1 \varepsilon + \lambda^1 \dot{\varepsilon} - \varepsilon^1 + \lambda^1 \dot{\varepsilon} + (\lambda^1)^2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.88)$$

então  $\varepsilon^1 = \ddot{\varepsilon} + 2\lambda^1 \dot{\varepsilon} + (\lambda^1)^2 \varepsilon + \dot{\lambda}^1 \varepsilon$ . A partir da eq. (3.37), identificamos a relação  $\lambda^1 = \dot{q}_1$  e encontramos

$$\delta_{\varepsilon} q_1 = \ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon} \dot{q}_1 + \varepsilon \ddot{q}_1 + \varepsilon \dot{q}_1^2, \quad (3.89)$$

$$\delta_{\varepsilon} q_2 = (\dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{q}_1) e^{q_1}, \quad (3.90)$$

$$\delta_{\varepsilon} q_3 = \varepsilon e^{q_1}. \quad (3.91)$$

Conforme expresso em ref. [48], as transformações de calibre envolvem termos que dependem da velocidade  $\dot{q}_1$ , quantidade indeterminada em termos de  $p$  e  $q$  apenas, e da aceleração  $\ddot{q}_1$ , que não pode ser determinada pelas equações de movimento. Em todo caso, o formalismo consegue lidar naturalmente com tais casos.

### 3.4.2 Sistema de partículas B

Agora lidamos com um sistema simples que ilustra como funciona nosso esquema de linearização da Lagrangiana e como as transformações de calibre podem surgir naturalmente do algoritmo BW, tal como no caso anterior.

Considere a ação

$$S = \int \left( \dot{q}_1(q_1 + q_2) + \frac{\dot{q}_2^2}{2} + q_2q_3 \right) dt . \quad (3.92)$$

Os momentos canônicos são dados por

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (3.93)$$

e são

$$p_1 = q_1 + q_2 , \quad (3.94)$$

$$p_2 = \dot{q}_2 , \quad (3.95)$$

$$p_3 = 0 . \quad (3.96)$$

Logo, a função Hamiltoniana, que escolhemos como potencial simplético, fica

$$V^{(0)} = \frac{p_2^2}{2} - q_2q_3 , \quad (3.97)$$

assim, da eq. (3.36), escrevemos a Lagrangiana linearizada como

$$L = p_2\dot{q}_2 + \dot{q}_1\varphi - \frac{p_2^2}{2} + q_2q_3 , \quad (3.98)$$

onde  $\varphi = q_1 + q_2$ . A partir da Lagrangiana lemos o vetor simplético e a um-forma simplética de ordem zero como

$$\xi^{(0)\alpha} = (q_1 \ q_2 \ p_2 \ q_3) , \quad (3.99)$$

$$a^{(0)\beta} = (\varphi \ p_2 \ 0 \ 0) , \quad (3.100)$$

pelos quais calculamos a matriz pré-simplética de ordem zero,

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.101)$$

com dois modos-zero,

$$\nu_1^\alpha = (1 \ 0 \ 1 \ 0) , \quad (3.102)$$

$$\nu_2^\alpha = (0 \ 0 \ 0 \ 1) . \quad (3.103)$$

Usando a equação para a condição de consistência (3.7) encontramos dois vínculos,

$$\omega_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial p_2} = p_2, \quad (3.104)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial V}{\partial q_3} = -q_2. \quad (3.105)$$

Impondo esses vínculos na Lagrangiana de ordem zero, obtemos a Lagrangiana de ordem um,

$$L^{(1)} = p_2 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 \varphi + \dot{\eta}_1 \omega_1 + \dot{\eta}_2 \omega_2, \quad (3.106)$$

com

$$\xi^{(0)\alpha} = (q_1 \quad q_2 \quad p_2 \quad \eta_1 \quad \eta_2), \quad (3.107)$$

$$a_\beta^{(0)} = (\varphi \quad p_2 \quad 0 \quad \omega_1 \quad \omega_2), \quad (3.108)$$

donde encontramos a matriz pré-simplética de ordem um

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

com modo-zero,

$$\nu_3^\alpha = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1). \quad (3.110)$$

Usando a condição de consistência (3.7) verificamos a inexistência de novos vínculos, uma vez que o potencial simplético de ordem um é igual a zero. Portanto, existem transformações de calibre nesse modelo. As transformações na superfície de vínculos, dadas por (3.20) e (3.21) são

$$\delta_\varepsilon q_1 = \varepsilon, \quad (3.111)$$

$$\delta_\varepsilon q_3 = -\dot{\varepsilon}. \quad (3.112)$$

Ocorre que essas transformações também são válidas fora da superfície de vínculos.

Podemos verificar que as relações de calibre encontradas de fato deixam a ação invariante, assim

$$\delta_\varepsilon S = \int (\delta_\varepsilon \dot{q}_1 (q_1 + q_2) + \dot{q}_1 \delta_\varepsilon q_1 + q_2 \delta_\varepsilon \dot{q}_3) dt \quad (3.113)$$

$$= \int (\dot{\varepsilon} (q_1 + q_2) + \dot{q}_1 \varepsilon + q_2 \dot{\varepsilon}) dt \quad (3.114)$$

$$= \int \frac{d}{dt} (\varepsilon q_1) dt = 0, \quad (3.115)$$

como esperado.

### 3.4.3 Sistema de partículas C

Nesse exemplo analisaremos um sistema cuja aplicação do método simplético fornece as transformações de calibre corretamente, desde que se preste atenção corretamente na maneira como são definidos os multiplicadores de Lagrange. Nesse caso particular as transformações na superfície de vínculos também são válidas no espaço simplético completo.

Considere a Lagrangiana de ordem zero[68]

$$L^{(0)} = \dot{x}p_x + \dot{z}p_z - p_z p_x - yz , \quad (3.116)$$

com potencial simplético igual a

$$V = p_z p_x + yz . \quad (3.117)$$

Identificamos o vetor simplético de ordem zero e a 1-forma simplética de ordem zero, respectivamente, como

$$\xi^{(0)\alpha} = (x \quad p_x \quad z \quad p_z \quad y) , \quad (3.118)$$

$$a_{\beta}^{(0)} = (p_x \quad 0 \quad p_z \quad 0 \quad 0) . \quad (3.119)$$

É possível calcular o primeiro modo-zero como sendo

$$\nu_1^{\alpha} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) , \quad (3.120)$$

de modo que, usando a condição de consistência (3.7), temos o vínculos

$$\omega_1 = \nu_1^{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \xi^{\alpha}} = \frac{\partial V}{\partial y} = z \Rightarrow V = V|_{\omega_1} = p_z p_x$$

e, de acordo com a eq. (3.37), temos a correspondência

$$\dot{\eta}_0 \equiv -y . \quad (3.121)$$

A próxima iteração se inicia com a Lagrangiana de ordem um,

$$L^{(1)} = \dot{x}p_x + \dot{z}p_z + \dot{\eta}_0 z - p_x p_z \quad (3.122)$$

e matriz pré-simplética de ordem um,

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.123)$$

com modo-zero dado por

$$\nu_2^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.124)$$

Esse modo-zero gera o vínculo

$$\omega_2 = -\frac{\partial V^{(1)}}{\partial p_z} + \frac{\partial V^{(1)}}{\partial \lambda_0} = p_x, \quad (3.125)$$

que implica em escrever o potencial simplético de ordem dois como

$$V^{(2)} = V^{(1)}|_{\omega_i} = 0. \quad (3.126)$$

Finalmente, a matriz pré-simplética de ordem dois é

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.127)$$

com um vetor simplético de ordem dois associado,

$$\xi^{(2)\alpha} = \begin{pmatrix} x & p_x & z & p_z & \eta_0 & \eta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.128)$$

onde

$$\dot{\eta}_1 \equiv -p_z. \quad (3.129)$$

A matriz pré-simplética  $f^{(2)}$  é singular com dois modos-zero,

$$\nu_3^\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.130)$$

$$\nu_4^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.131)$$

Agora, de acordo com (3.20) e (3.21), temos as seguintes transformações de calibre

$$\delta_\varepsilon x = \varepsilon, \quad (3.132)$$

$$\delta_\varepsilon \eta_1 = -\varepsilon, \quad (3.133)$$

$$\delta_{\varepsilon^2} p_z = -\varepsilon^2, \quad (3.134)$$

$$\delta_{\varepsilon^2} \eta_0 = -\varepsilon^2, \quad (3.135)$$

ou, rearranjando usando as relações (3.121) e (3.129), temos

$$\delta_\varepsilon x = \varepsilon, \quad (3.136)$$

$$\delta_\varepsilon p_z = \dot{\varepsilon}, \quad (3.137)$$

$$\delta_\varepsilon y = \ddot{\varepsilon}. \quad (3.138)$$

Essas relações são válidas tanto *on-shell* quanto , como podemos conferir em seguida utilizando-se o método descrito nesse capítulo.

Primeiro reescrevemos os vínculos considerando a existência de vínculos primários, assim escrevemos  $\tilde{\omega}_1 = p_y$  como o único vínculo primário e  $\tilde{\omega}_2 = z$  e  $\tilde{\omega}_3 = p_x$  como os dois vínculos secundários. Tomando o potencial (3.117), as únicas constantes de estrutura diferentes de zero são  $V_1^2 = V_2^3 = 1$ . Porque os vínculos são funções de primeira classe, o gerador de calibre tem a forma  $G = \varepsilon^1 \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3$ , mas somente um dos três parâmetros de calibre é independente. A relação entre os terceiro e segundo parâmetros é dada pela eq. (3.57). Assim, fazendo  $\varepsilon^3 \equiv \varepsilon$ , temos

$$0 = \dot{\varepsilon} - \varepsilon^2 V_2^3 \quad (3.139)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 = \dot{\varepsilon} , \quad (3.140)$$

$$0 = \dot{\varepsilon}^2 - \varepsilon^1 V_1^2 \quad (3.141)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^1 = \ddot{\varepsilon} . \quad (3.142)$$

Das eqs. (3.57) e (3.58), temos que o conjunto das transformações de calibre do sistema em consideração é

$$\delta_\varepsilon x = \varepsilon , \quad (3.143)$$

$$\delta_\varepsilon p_z = \dot{\varepsilon} , \quad (3.144)$$

$$\delta_\varepsilon y = \ddot{\varepsilon} . \quad (3.145)$$

### 3.4.4 Teoria de Yang-Mills

Consideramos agora a Lagrangiana de Yang-Mills. Como nesta tese estamos mais interessados na descrição de teorias de gravitação sob a descrição simplética, usamos essa teoria por conta da relevância do ponto de vista da teoria de Relatividade Geral. O interesse vem do fato de que qualquer solução das equações de Einstein podem ser associadas a uma solução anti-auto-dual de uma teoria Yang-Mills  $SO(3)$ [71], proposição que fica evidente na descrição com variáveis de Ashtekar-Barbero. Mais detalhes são apresentados no Capítulo 6. Nessa seção apresentamos os resultados contidos em Ref. [29], com algumas alterações indicadas no texto.

Inicialmente consideremos a Lagrangiana da teoria,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^{a\mu\nu} G_{\mu\nu}^a , \quad (3.146)$$

onde

$$G_{\mu\nu}^a = F_{\mu\nu}^a + \tilde{F}_{\mu\nu}^a , \quad (3.147)$$

onde  $g$  é um parâmetro e  $\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \tilde{F}_{\mu\nu}^a(A_\alpha^a)$  é um tensor anti-simétrico arbitrário. Supomos que os campos  $A_\mu^a$  satisfazem a álgebra não-Abeliana

$$\{A_\mu^a, A_\nu^b\}_{\tilde{f}} = g \Sigma_{\mu\nu}^{ab} \Delta(x, y) , \quad (3.148)$$

onde  $\Sigma_{\mu\nu}^{ab} = \Sigma_{\mu\nu}^{ab}(A_\alpha^a)$  também é um tensor anti-simétrico arbitrário e  $\Delta(x, y) \equiv \delta^{(4)}(x - y)$ .

Usando os momentos canônicos

$$\pi_0^b = 0, \quad (3.149)$$

$$\pi_j^b = \partial_0 A_j^0 + \delta_j A_0^b + g \tilde{F}_{0j}^b. \quad (3.150)$$

Nesse caso, usando os momentos canônicos como variáveis auxiliares para a linearização da teoria, temos a Lagrangiana de grau zero

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_i^a \dot{A}_i^a - \frac{1}{2} \pi^{ai} \pi_i^a - \partial_i \pi^{ai} A_0^a + g \tilde{F}_{0i}^a \pi^{ai} - \frac{1}{4} \left( F_{ij}^a F^{aij} + 2g F^{aij} \tilde{F}_{ij}^a + g^2 \tilde{F}_{ij}^a \tilde{F}^{aij} \right), \quad (3.151)$$

o tensor simplético de grau zero

$$\xi^{(0)\alpha}(x) = \left( A_i^a(x) \quad \pi_i^a(x) \quad A_0^a(x) \right), \quad (3.152)$$

e a 1-forma de grau zero

$$a_\beta^{(0)}(x') = \left( \pi_j^b(x') \quad 0 \quad 0 \right). \quad (3.153)$$

Note a ausência da coordenada  $\pi_0^b$  — que é efetivamente o vínculo primário  $\omega_1^b = \pi_0^b$  — no vetor simplético de ordem zero. Como demonstrado na seção anterior essa ausência não representa um obstáculo para a obtenção das transformações de calibre da teoria, sejam *on-shell* ou *off-shell*.

A matriz pré-simplética de ordem zero é

$$f_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} \delta^{ab} \delta^{(3)}(x - x') & 0 \\ \delta_{ji} \delta^{ba} \delta^{(3)}(x - x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.154)$$

como modo-zero

$$\nu_1^\alpha(x) = \left( 0 \quad 0 \quad 1 \right). \quad (3.155)$$

O modo-zero da primeira iteração leva ao descobrimento do vínculo

$$\omega^a = D^{abi} \pi_i^b, \quad (3.156)$$

onde o operador  $D^{abi}$  é dado por

$$D^{abi} \equiv \delta^{ab} \partial^i + \frac{\delta \tilde{F}^{b0i}}{\delta A_0^a}. \quad (3.157)$$

Restringindo o espaço simplético à região delimitada pelo novo vínculos, temos que a densidade Lagrangiana simplética de grau 1 é

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi_i^a \dot{A}_i^a + \omega^a \dot{\beta}^a - \left[ \frac{1}{2} \pi^{ai} \pi_i^a + \frac{1}{4} \left( F_{ij}^a F^{aij} + 2g F^{aij} \tilde{F}_{ij}^a + g^2 \tilde{F}_{ij}^a \tilde{F}^{aij} \right) \right], \quad (3.158)$$

com  $\dot{\beta}^a \equiv A_0^a$ . O vetor simplético correspondente é

$$(\xi^{(1)\alpha}(x)) = \left( A_i^a(x) \quad \pi_i^a(x) \quad \beta^a(x) \right) \quad (3.159)$$

e a 1-forma associada é igual a

$$a_\beta^{(1)}(x') = \left( \pi_j^b(x') \quad 0 \quad \omega^b(x') \right) . \quad (3.160)$$

Dadas as informações acima, encontramos a matriz pré-simplética de ordem um,

$$(f_{\alpha\beta}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij}\delta^{ab}\delta^{(3)}(x-x') & \frac{\delta\Omega_2^b}{\delta A_i^a} \\ \delta_{ji}\delta^{ba}\delta^{(3)}(x-x) & 0 & (\delta^{ab}\partial_i^y - gf_{abc}A_j^c)\delta^{(3)}(x-x') \\ -\frac{\delta\Omega_2^a}{\delta A_i^b} & -(\delta^{ba}\partial_j^x - gf_{bac}A_j^c)\delta^{(3)}(x-x') & 0 \end{pmatrix} . \quad (3.161)$$

O modo-zero associado à matriz  $f^{(1)}$  é

$$\nu^\alpha(x) = \left( \int d^3y \delta^{ab}\partial_i\delta^{(3)}(x-y) - gf^{abc}A_i^c(x) \quad - \int d^3y \frac{\delta\Omega_2^a(x)}{\delta A_i^b(y)} \quad \delta^{ab} \right) \quad (3.162)$$

Aplicando esse modo-zero à eq. (3.20) e (3.21) encontramos

$$\delta_\varepsilon A_i^a = (\delta^{ab}\partial_i - gf^{abc}A_i^c)\varepsilon^b , \quad (3.163)$$

$$\delta_\varepsilon \beta^a = \varepsilon^a , \quad (3.164)$$

ou

$$\delta_\varepsilon A_i^a = (D_i\varepsilon)^a , \quad (3.165)$$

$$\delta_\varepsilon A_0^a = (\partial_0\varepsilon)^a , \quad (3.166)$$

onde a derivada covariante  $D$  é definida implicitamente por  $D_i\varepsilon^a = (\delta^{ab}\partial_i - gf^{abc}A_i^c)\varepsilon^b$ .

O resultado encontrado no algoritmo BW para a transformação de calibre de  $A_0^a$ , (3.166), ao contrário do afirmado na Ref. [29], difere do resultado obtido pelo método de Dirac. Ocorre que o resultado obtido pelo algoritmo BW é válido somente na superfície de vínculos, enquanto no método de Dirac obtemos o resultado em todo espaço de fase. Abaixo obtemos o resultado no espaço simplético completo.

Do cálculo dos momentos a partir da Lagrangiana (3.146), temos que existe apenas um vínculo primário de primeira classe,

$$\omega_1^a = \pi_0^a(x) , \quad (3.167)$$

além de um vínculo secundário de primeira classe,

$$\omega_2^a \equiv [D_i\pi_i]^a = \partial_i\pi_i^a(x) + f_{abc}A_i^b(x)\pi_i^c(x) \approx 0 . \quad (3.168)$$

A Hamiltoniana canônica é

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi_i^a\pi^{ia} + \frac{1}{4}F^{aij}F_{ij}^a + A_0^a(D_i\pi_i)^a \right] . \quad (3.169)$$

De modo que as constantes de estrutura não nulas são

$$V_1^2(x, y)_{ab} = \delta(x - y)\delta_{ab}, \quad (3.170)$$

$$V_2^2(x, y)_{ab} = gf_{abc}A^{0c}\delta^{(3)}(x - y), \quad (3.171)$$

$$C_{22}^2(x, y, z)_{abc} = gf_{abc}A^{0c}\delta^{(3)}(x - y)\delta^{(3)}(y - z). \quad (3.172)$$

Assim, das eqs. (3.57), temos

$$\partial_0\varepsilon_2^0(x) = \varepsilon_1^a(x) + gf_{abc}A^{0b}(x)\varepsilon_2^c(x). \quad (3.173)$$

Tomando  $\varepsilon_2^a(x) \equiv \varepsilon^a(x)$  como os parâmetros de calibre independentes e resolvendo a equação acima para  $\varepsilon_1^a$  temos

$$\delta A_\mu^a(x) = \int d^3y \{A_\mu^a(x), G(y)\} = (D_0\alpha)^a - (D_i\alpha)^a = (D_\mu\alpha)^a, \quad (3.174)$$

ou, separadamente para  $A_i^a$  e  $A_0^a$ ,

$$\delta_\varepsilon A_i^a = (D_i\varepsilon)^a \quad (3.175)$$

$$\delta_\varepsilon A_0^a = (D_0\varepsilon)^a, \quad (3.176)$$

como esperado[72].

Na superfície de vínculos, os resultados dos métodos BW e de Dirac concordam (veja também [29]). Contudo, fora dessa superfície em geral as respostas são diferentes. A concordância entre os métodos simplético e de Dirac pode ser obtida usando o formalismo aqui introduzido.

### 3.5 Conclusões

Conforme discutido na introdução deste capítulo, transformações de calibre *off-shell* não teriam, a princípio, qualquer contribuição em teorias clássicas. Entretanto, vale a pena comentar que o formalismo de quantização geométrico de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin leva a simetrias BRST onde fantasmas aparecem misturados com outros campos da teoria[73], indicando que em estudos sobre invariância de calibre todos os campos, incluindo os virtuais, devem ser tratados como um único objeto geométrico[74]. Como a simetria BRST pode ser descrita em um contexto estritamente clássico, contanto que sejam incluídas variáveis de Grassmann na análise do espaço de fase[75–77], fica claro que simetrias de calibre *off-shell* também podem ser discutidas do ponto de vista da física clássica, a depender do contexto matemático da discussão[78]. Podemos afirmar que o formalismo desenvolvido neste capítulo é de interesse geral, isto é, no contexto quântico mas também em mecânica clássica.

Quanto a potenciais vantagens do método em questão em relação ao método padrão, não há qualquer diferença entre encontrar as expressões para transformações de calibre no

formalismo simplético e encontrá-las no formalismo de Dirac. O desenvolvimento segue essencialmente a mesma linha e os resultados coincidem. Entretanto a dedução formal em termos de geometria simplética oferece uma maior área de interseção com outros métodos matemáticos topológicos, como a quantização BRST-BV (Ver Ref. [79], cap. 4) e o formalismo BFV[80], dada a ênfase na redução simplética.

Na seção 3.3 vemos a importância de se considerar a existência dos vínculos primários para a obtenção do conjunto das transformações de calibre. Essa característica é digna de nota porque, como o algoritmo BW está definido a partir da Lagrangiana linearizada, em geral ocorre de os vínculos primários não aparecerem explicitamente no formalismo. Todavia é importante dizer que a classificação dos vínculos entre primários e secundários não é arbitrária e a ordem com que ocorrem na teoria é crucial para a solução correta das eqs. (3.57) e (3.58). Tomemos por ilustração dessa afirmação o exemplo apresentado na seção 3.4.1. Façamos uma inversão entre o vínculo primário e o vínculo terciário, nesse caso  $\omega_1 \equiv -e^{q_1} p_3$ ,  $\omega_2 = e^{q_1} p_2$  e  $\omega_3 = p_1$ , levando às constantes de estrutura não nulas  $V_3^2 = V_2^1 = 1$  e  $C_{32}^1 = C_{31}^1 = -1$ . Assim, fazendo  $\varepsilon = \varepsilon^3$ , obtemos

$$\dot{\varepsilon} = 0, \quad (3.177)$$

$$\dot{\varepsilon}^2 = \varepsilon, \quad (3.178)$$

$$\delta\lambda^1 = \varepsilon^1 - \int \varepsilon dt - \lambda^1 \varepsilon. \quad (3.179)$$

Resultado que fornece equações completamente diversas das obtidas seguindo-se a classificação dos vínculos. Errando inclusive o número de parâmetros independentes de calibre.

Em resumo, o método aqui desenvolvido para a obtenção das transformações de calibre em todo o espaço de fase se mostra completamente coerente com o método segundo o formalismo de Dirac. O caráter explicitamente geométrico do formalismo empresta algum interesse na investigação de aspectos formais das simetrias de calibre. A classificação dos vínculos entre primários e secundários se mostrou essencial na descrição simplética das simetrias de calibre.



## 4 Formalismo ADM da Gravitação

### 4.1 Introdução

A formulação da teoria de gravitação de Einstein em linguagem canônica é interessante sob diversos aspectos, tal formulação é atingida com o formalismo Arnowitt-Deser-Misner. O formalismo ADM, desenvolvido na década de 60[13, 81–93], é perfeitamente equivalente à RG geométrica, porém reescrita na linguagem de teorias de calibre. A formulação consiste em “quebrar” a covariância explícita das equações de Einstein, separando direções espaciais das temporais e assim fornecendo uma noção de tempo e evolução temporal em teorias de gravitação. Assim como ocorre em espaços-tempo com a métrica de Minkowski, em geral<sup>1</sup> também podemos adotar uma superfície “espacial” tridimensional e escolher uma quarta coordenada perpendicular ao plano considerado e adotá-lo como o eixo do “tempo”, onde deve ser arbitrado qual das duas direções possíveis é o futuro.

Seguindo o raciocínio em Ref. [14], nessa formulação a função Hamiltoniana é descrita como uma combinação de vínculos,  $\mathcal{H} = N\omega_0 + N^a\omega_a$ , o que implica em dizer que a Hamiltoniana é igual a zero no domínio das equações de movimento, ou  $\mathcal{H} \approx 0$ . Esse fato é fundamental no entendimento de como a geometria se transforma em mecânica[14, 96] e do que significa se ter uma teoria invariante por transformações de coordenadas. Em todo caso, é possível mostrar que qualquer teoria de partículas pode ser parametrizada, simplesmente elevando em um o número de graus de liberdade, anulando a função Hamiltoniana<sup>2</sup> e, assim, criando efetivamente uma ação geralmente covariante. O que a formulação ADM explicita é que RG é uma teoria parametrizada a priori. Nesse caso os parâmetros são quatro: as coordenadas do espaço-tempo  $\{x^\mu\}$ .

Por se tratar de uma teoria de calibre, são as grandezas globais aquelas que retêm significado físico. Um exemplo importante de variável global é a energia  $E$  do campo gravitacional. A partir do formalismo ADM,  $E$  é definida a partir do vínculo Hamiltoniano  $\omega_0$ , tomado como conjugado do tempo assintótico – no infinito espacial –, como  $E = \int_{\Sigma_{t \rightarrow \infty}} \nabla^2 g^T = \int_{\Sigma_{t \rightarrow \infty}} -\omega_0$ . Sendo que uma definição análoga é feita para extensões covariantes arbitrarias de RG[97, 98]. Esse exemplo é uma amostra do horizonte teórico que o formalismo ADM inaugura no estudo de teorias de gravitação.

Outros importantes problemas investigados a partir do formalismo ADM estão os das ondas gravitacionais[88, 99–102], a auto-energia de partículas massivas e carregadas e interações pós-Newtonianas partícula-partícula[103, 104], além de uma ampla literatura

<sup>1</sup> Na verdade nem sempre é possível fazer uma foliação do espaço-tempo, para que essa foliação possa ser feita globalmente a variedade precisa ser globalmente hiperbólica. Mais detalhes em [94] e [95].

<sup>2</sup> Ver Sec. (A.6.4).

cobrindo problemas de cosmologia – energia escura, matéria escura –, astrofísica –, construção de modelos teóricos – extensões de RG, SUGRA –, radiação gravitacional –, integração numérica, quantização etc. Podemos dizer que o formalismo ADM foi uma das principais contribuições à física gravitacional, com um imenso legado ainda em expansão.

Nesse capítulo abordamos como é feita a foliação do espaço-tempo partindo da teoria geométrica Riemanniana de Relatividade Geral até chegar nas equações para a variedade imersa  $3 + 1$ . As principais referências utilizadas nesse capítulo são [105] e [106], onde esse último, conforme apontado pelo autor, é basicamente uma revisão de [94] com os cálculos expandidos. Como importante literatura do ponto de vista do detalhamento dos cálculos e discussões teóricas apontamos a Ref. [107], onde são tratados os tópicos do formalismo ADM da gravitação e sua quantização canônica.

## 4.2 Geometria Riemanniana

### 4.2.1 Variedades Riemannianas

Começemos por definir o cenário matemático utilizado para expressar os fenômenos gravitacionais na teoria da relatividade geral.

**Definição 15.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável, seja também  $U, V \in T_p M$ . Uma **métrica Riemanniana**  $g$  em  $M$  é um mapa  $T_p M \otimes T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz os seguintes axiomas em cada ponto  $p$  em  $M$ :*

- $g_p(U, V) = g_p(V, U)$ ,
- $g_p(U, U) \geq 0$ , onde  $g_p(U, U) = 0$  se, e somente se,  $U = 0$ .

Com  $g_p = g|_p$ .

Uma **variedade Riemanniana** é uma variedade dotada de uma métrica Riemanniana.

Seja  $(U, \phi)$  uma carta em  $M$  e  $\{x^\mu\}$  as coordenadas. Podemos escrever

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu \otimes dx^\nu . \quad (4.1)$$

De modo que

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = g_{\nu\mu}(p) \quad (p \in M) . \quad (4.2)$$

Chamamos comumente de **métrica** a quantidade

$$\begin{aligned} ds^2 &= g \left( dx^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) = dx^\mu dx^\nu g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Stricto sensu, o tensor métrico é  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$ .

Seja  $M$  uma subvariedade (definição 11)  $m$ -dimensional de uma variedade Riemanniana  $N$  com métrica  $g_N$ . Se  $f : M \rightarrow N$  é um mergulho que induz a estrutura de subvariedade em  $M$ , o *pullback*  $f^*$  induz a métrica natural  $g_M = f^*g_N$  em  $M$ . Os componentes de  $g_M$  são

$$g_{M\mu\nu}(x) = g_{N\alpha\beta}(f(x)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (4.4)$$

onde os  $f^\alpha$  denotam as coordenadas de  $f(x)$ . A **métrica induzida** é definida por

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu. \quad (4.5)$$

### 4.2.2 Transporte paralelo e derivada covariante

Para comparar dois vetores em pontos diferentes de uma variedade devemos, em analogia com o caso Euclidiano, encontrar uma definição adequada de **transporte paralelo**, isto é, para o procedimento de reter toda a informação contida em um vetor num dado ponto e descrevê-la equivalentemente em outro ponto da mesma variedade. Heuristicamente podemos entender o problema da seguinte forma. Seja  $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$  o vetor  $V|_x$  paralelamente transportado para  $x + \Delta x$ , exigimos que

$$\tilde{V}^\mu(x + \Delta x) - V^\mu(x) \propto \Delta x, \quad (4.6)$$

$$(V^\mu + \tilde{W}^\mu)(x + \Delta x) = \tilde{V}^\mu(x + \Delta x) + \tilde{W}^\mu(x + \Delta x). \quad (4.7)$$

A derivada covariante de  $V$  com respeito a  $x^\mu$  pode ser, então, definida por

$$\lim_{\Delta x^\nu \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + \Delta x) - \tilde{V}^\mu(x + \Delta x)}{\Delta x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (4.8)$$

e indica um vetor em  $x + \Delta x$  resultante da diferença entre os vetores  $V|_{x+\Delta x}$  e  $\tilde{V}|_{x+\Delta x}$  definidas no mesmo ponto  $x + \Delta x$ . Para uma variedade Riemanniana existe uma escolha preferencial para  $\Gamma$ , chamada de **conexão de Levi-Civita**.

Uma definição de  $\Gamma$  que satisfaça a simetria  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  e forneça um vetor transportado paralelamente de modo a preservar sua norma nos leva a definição formal de conexão afim.

**Definição 16.** Uma **conexão afim**  $\nabla$  é um mapa  $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ , ou  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , que satisfaz as seguintes condições

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad (4.9a)$$

$$\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad (4.9b)$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad (4.9c)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y, \quad (4.9d)$$

onde  $f \in \mathcal{F}(M)$  e  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ .

Tome uma carta  $(U, \phi)$  com coordenadas  $x = \phi(p)$  em  $M$ , definimos os **coeficientes de conexão**  $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$  como

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (4.10)$$

onde  $e_\mu = \{\partial/\partial x^\mu\}$  na base coordenada em  $T_p M$ . Como consequência temos que a derivada covariante de um vetor  $W$  em relação a um campo vetorial  $V$  é dada por

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu + W^\nu \nabla_{e_\mu} e_\nu) \\ &= V^\mu \left( \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right) e_\lambda \equiv V^\mu (\nabla_\mu W^\nu) e_\nu, \end{aligned} \quad (4.11)$$

ou

$$\nabla_\mu W^\nu \equiv \frac{\partial W^\lambda}{\partial x^\mu} + W^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (4.12)$$

A derivada covariante de um campo escalar  $f \in \mathcal{F}(M)$  é definida como a derivada direcional ordinária

$$\nabla_X f = f[X]. \quad (4.13)$$

Exigindo que a derivada covariante obedeça a regra de Leibniz para quaisquer produtos tensoriais, como  $\langle \omega, Y \rangle \in \mathcal{F}(M)$  para  $\omega \in \Omega^1(M)$  e  $Y \in \mathcal{X}(M)$ , temos

$$X[\langle \omega, Y \rangle] = \nabla_X[\langle \omega, Y \rangle] = \langle \nabla_X \omega, Y \rangle + \langle \omega, \nabla_X Y \rangle. \quad (4.14)$$

Escrevendo ambos os lados em termos de suas componentes, temos

$$(\nabla_X \omega)_\nu = X^\mu \partial_\mu \omega_\nu - X^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda. \quad (4.15)$$

Generalizando para um tensor  $t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}$ , temos

$$\begin{aligned} \nabla_\nu t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} &= \delta_\mu^\nu t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_1} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\kappa \lambda_2 \dots \lambda_p} + \dots + \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda_p} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \kappa} \\ &\quad - \Gamma_{\nu\mu_1}^\kappa t_{\kappa \mu_2 \dots \mu_q}^{\lambda_1 \dots \lambda_p} - \dots - \Gamma_{\nu\mu_q}^\kappa t_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \kappa}^{\lambda_1 \dots \lambda_p}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Em particular, para a métrica  $g_{\mu\nu}$ ,

$$\nabla_\nu g_{\lambda\mu} = \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\lambda\kappa}. \quad (4.17)$$

Agora colocamos a exigência de que a derivada covariante da métrica seja nula, em outras palavras exigimos que a derivada covariante seja compatível com a métrica  $g_{\mu\nu}$  da variedade Riemanniana, isto é equivalente a demandar que o produto interno entre dois vetores transportados paralelamente por uma curva se mantenha constante, ou

$$\nabla_\kappa g_{\mu\nu} = 0. \quad (4.18)$$

Da Eq. (4.17), temos

$$\partial_\nu g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\lambda\kappa} = 0. \quad (4.19)$$

Combinando permutações cíclicas de  $(\lambda, \mu, \nu)$  definimos o **tensor torção**

$$T_{\lambda\mu}^\kappa \equiv 2\Gamma_{[\lambda\mu]}^\kappa = \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa. \quad (4.20)$$

Notavelmente, simetrizando a conexão, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\kappa &= \Gamma_{(\mu\nu)}^\kappa + \Gamma_{[\mu\nu]}^\kappa \\ &= \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + K_{\mu\nu}^\kappa. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Chamamos o primeiro termo de **coeficientes de Christoffel** e é dado por

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}), \quad (4.22)$$

enquanto o segundo é chamado de **contorsão** e é dado por

$$K_{\mu\nu}^\kappa \equiv \frac{1}{2} (T_{\nu\mu}^\kappa + T_{\mu\nu}^\kappa - T_{\mu\nu}^\kappa). \quad (4.23)$$

Se o tensor de torção se anula numa variedade  $M$ , a conexão métrica é chamada de conexão de Levi-Civita.

### 4.2.3 Curvatura

**Definição 17.** Definimos o **tensor torção**  $T : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  e o **tensor de Riemann**  $Rie : \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \otimes \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  por

$$T(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (4.24)$$

$$Rie(X, Y, Z) \equiv \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (4.25)$$

$T$  é um tensor multilinear de tipo  $(1, 2)$  e de forma  $T(X, Y) = X^\mu Y^\nu T(e_\mu, e_\nu)$ . Com respeito à base coordenada  $\{e_\mu\}$  e à base dual  $\{dx^\mu\}$ , suas componentes são

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\lambda &= \langle dx^\lambda, T(e_\nu, e_\mu) \rangle = \langle dx^\lambda, \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu \rangle \\ &= \langle dx^\lambda, \Gamma_{\mu\nu}^\eta e_\eta - \Gamma_{\nu\mu}^\eta e_\eta \rangle = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \end{aligned} \quad (4.26)$$

E os componentes de  $Rie$ , denotados por  $R_{\lambda\mu\nu}^\kappa$ , são

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^\kappa &= \langle dx^\kappa, Ric(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle = \langle dx^\kappa, Ric(e_\mu, e_\nu)e_\lambda \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, \nabla_\mu(\Gamma_{\nu\lambda}^\eta e_\eta) - \nabla_\nu(\Gamma_{\mu\lambda}^\eta e_\eta) \rangle \\ &= \langle dx^\kappa, (\partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\eta) e_\eta + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\xi e_\xi - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\eta) e_\eta - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\xi e_\xi \rangle \\ &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Tem-se imediatamente

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = -T_{\nu\mu}^{\lambda}, R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} = -R^{\kappa}_{\lambda\nu\mu}. \quad (4.28)$$

A partir do tensor de Riemann construímos o **tensor de Ricci**  $Ric$  como

$$Ric(X, Y) \equiv \langle dx^{\mu}, Ric(e_{\mu}, Y)X \rangle, \quad (4.29)$$

cujos componentes, denotados por  $R_{\mu\nu}$ , são

$$R_{\mu\nu} = Ric(e_{\mu}, e_{\nu}) = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}. \quad (4.30)$$

Contraindo os índices do tensor de Ricci obtemos o **escalar de curvatura**

$$R \equiv g^{\mu\nu} Ric(e_{\mu}, e_{\nu}) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (4.31)$$

#### 4.2.4 Equação de Einstein

O tensor de Riemann satisfaz as seguintes simetrias

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu} \quad (4.32)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu} \quad (4.33)$$

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\kappa\lambda}, \quad (4.34)$$

com  $R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\zeta} R^{\zeta}_{\lambda\mu\nu}$ . Munidos dessas relações podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 4 (Identidades de Bianchi).** *Seja Ric o tensor de Riemann definido com respeito à conexão de Levi-Civita. Então Ric satisfaz as seguintes identidades,*

$$Ric(X, Y)Z + Ric(Z, X)Y + Ric(Y, Z)X = 0 \quad (4.35)$$

**primeira identidade de Bianchi**

$$(\nabla_X Ric)(Y, Z)V + (\nabla_Z Ric)(X, Y)V + (\nabla_Y Ric)(Z, X)V = 0 \quad (4.36)$$

**segunda identidade de Bianchi**

Em termos de suas componentes, as identidades de Bianchi são

$$R^{\kappa}_{\lambda\mu\nu} + R^{\kappa}_{\mu\nu\lambda} + R^{\kappa}_{\nu\lambda\mu} = 0 \quad (4.37)$$

**primeira identidade de Bianchi**

$$(\nabla_{\kappa} R)^{\xi}_{\lambda\mu\nu} + (\nabla_{\mu} R)^{\xi}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_{\nu} R)^{\xi}_{\lambda\kappa\mu} = 0 \quad (4.38)$$

**segunda identidade de Bianchi**

Contraindo os índices  $\xi$  e  $\mu$  da segunda identidade de Bianchi, obtemos a importante relação

$$(\nabla_{\kappa} R)_{\lambda\nu} + (\nabla_{\mu} R)^{\mu}_{\lambda\nu\kappa} + (\nabla_{\nu} R)_{\lambda\kappa} = 0. \quad (4.39)$$

Contraindo os índices  $\lambda$  e  $\nu$ , obtemos  $\nabla_\mu(R\delta_\nu^\mu + 2R_\kappa^\mu) = 0$ , ou

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 . \quad (4.40)$$

Onde  $G^{\mu\nu}$  é o **tensor de Einstein**, definido por

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R . \quad (4.41)$$

#### 4.2.5 Ação de Einstein-Hilbert

De acordo com a teoria da Relatividade Geral de Einstein, a atração gravitacional entre dois objetos é efeito da curvatura do espaço-tempo. A matéria determina a configuração geométrica do espaço-tempo, ao mesmo tempo que o espaço-tempo determina o movimento da matéria. A descrição precisa da dinâmica dum sistema gravitacional clássico é obtida através da solução da **Equação de Einstein**,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} , \quad (4.42)$$

onde  $\kappa$  é uma constante introduzida para reproduzir o limite Newtoniano e  $T_{\mu\nu}$  é o **tensor de densidade de momento-energia**.

A ação que leva à equação de Einstein é conhecida como **ação de Einstein-Hilbert** e é definida por

$$S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa} \int R\sqrt{-g}d^4x . \quad (4.43)$$

As equações de Einstein são obtidas através da extremização da ação de Einstein-Hilbert, ou seja, fazendo-se  $\delta S_{E-H} = 0$ . Realizando esse procedimento, temos

$$\begin{aligned} \delta R\sqrt{-g} &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g}) \\ &= \delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\sqrt{-g} + g^{\mu\nu}\delta R\sqrt{-g} + R\delta(\sqrt{-g}) \\ &= -g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}\delta g_{\kappa\lambda}R_{\mu\nu} \\ &\quad + g^{\mu\nu}\left(\nabla_\kappa\delta\Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \nabla_\nu\delta\Gamma_{\kappa\mu}^\kappa\right)\sqrt{-g} + \frac{1}{2}R\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Onde usamos

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} , \quad (4.45)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\kappa}g^{\nu\lambda}\delta g_{\kappa\lambda} , \quad (4.46)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\kappa\delta\Gamma_{\nu\mu}^\kappa - \nabla_\nu\Gamma_{\kappa\mu}^\kappa . \quad (4.47)$$

O segundo termo é uma derivada total

$$\nabla_\kappa\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\nu\mu}^\kappa\sqrt{-g}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\kappa\mu}^\kappa\sqrt{-g}\right) \quad (4.48)$$

e portanto seus termos se anulam na borda. Dos termos restantes obtemos

$$\delta S_{E-H} = \frac{1}{2\kappa} \int \left( -R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (4.49)$$

Ou equivalentemente,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0. \quad (4.50)$$

Agora consideremos ação de Einstein-Hilbert mais uma contribuição de matéria qualquer como

$$S_M \equiv \int \mathcal{L}(\phi) \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.51)$$

onde  $\mathcal{L}(\phi)$  é a densidade Lagrangiana da teoria considerada. Fazendo a extremização da ação de matéria com respeito à métrica, obtemos o **tensor momento-energia**  $T_{\mu\nu}$  definido por

$$\delta S_M = \frac{1}{2} \int T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.52)$$

Assim,

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.53)$$

Pelo o princípio da mínima ação,  $\delta(S_{E-H} + S_M) = 0$ , donde obtemos finalmente a equação de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (4.54)$$

## 4.3 Geometria de Hiperssuperfícies

### 4.3.1 Foliação do Espaço-Tempo

A formulação adequada de uma teoria canônica para a gravitação requer uma separação do espaço e do tempo. No contexto de relatividade especial, existe uma escolha natural para a coordenada temporal, além disso a métrica é invariante pelas transformações de especial interesse, as transformações de Lorentz. Já para o caso geral não existem simetrias de fundo ou observadores inerciais prediletos, tornando a noção de tempo muito mais generalizada. Nesse caso podemos simplesmente considerar superfícies “esaciais”, digamos  $\Sigma$ , parametrizadas para alguma função  $t \in \mathbb{R}$  constante, assim  $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ .

Em geometria Riemmaniana, dada a função  $t$ , sempre existe um vetor normal a  $\Sigma$  dado por  $\nabla^\mu t$ . Para todo campo vetorial  $s^\mu \in T\Sigma$  a  $t$  constante, temos que  $g_{\mu\nu} s^\mu \nabla^\nu t = s^\mu \nabla_\mu t = 0$ .

Agora falta apenas definir um vetor que aponte na direção da passagem do “tempo”. Da não degenerescência da métrica definimos o vetor normalizado

$$n^\mu \equiv \frac{\nabla^\mu t}{\sqrt{-g_{\alpha\beta} \nabla^\alpha t \nabla^\beta t}}, \quad (4.55)$$

tal que  $g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1$ . Exigimos que esse vetor não mude de sentido (o qual denominamos futuro), assim  $n^\mu \nabla_\mu t > 0$ .

Esta divisão do espaço-tempo fornece à subvariedade  $\Sigma$  uma estrutura riemanniana própria. Temos, então, a *métrica induzida* definida por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu, \quad (4.56)$$

que é única por conta de sua propriedade de *operador projetor*, a saber, verifica-se imediatamente que

$$h_\mu^\sigma h_\nu^\mu = h_\nu^\sigma, \quad (4.57)$$

$$h_{\mu\nu} n^\nu = 0 \quad (4.58)$$

e

$$h_{\mu\nu} s^\nu = g_{\mu\nu} s^\nu, \quad \forall s^\nu \in T\Sigma. \quad (4.59)$$

Podemos considerar  $h_{\mu\nu}$  como sendo a parte espacial de  $g_{\mu\nu}$ , definindo uma métrica positivo definida em  $\Sigma$ , daí simplesmente escrevemos  $h_{ab}$ . Assim  $h^{ab}$  equivale à inversa de  $h_{ab}$  quando aplicada a vetores tangentes a  $\Sigma$ .

Nas seções abaixo até a seção (4.4) usaremos a notação com índices  $a, b, c$  etc, significando que, dado um vetor  $s^a \in TM$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$ .

### 4.3.2 Derivadas Temporais

Segundo a interpretação da métrica induzida  $h_{ab}$  como sendo a métrica espacial, faz sentido definirmos uma derivada temporal da métrica induzida. Introduzimos o *campo vetorial evolução temporal*  $t^a$  para definir a direção da derivada temporal, que é dado por

$$t^a \nabla_a t = 1. \quad (4.60)$$

Esta condição, junto com uma a condição  $t^a \nabla_a s^b = 0$ , com  $s^a \in T\Sigma$ , garante que (4.60) possa ser interpretada como uma componente temporal. Podemos simplesmente decompor  $t^a$  em

$$t^a = n^a N + N^a, \quad (4.61)$$

onde utilizamos a definição a seguir.

**Definição 18.** Definimos função lapso e vetor deslocamento, respectivamente, por

$$N \equiv -n_a t^a \quad e \quad N^a \equiv h^{ab} t_b . \quad (4.62)$$

Com isso é possível escrever a seguinte proposição [105]:

**Proposição 1.** Seja  $T$  um tensor arbitrário definido em  $M$ , sua derivada temporal é dada por

$$\dot{T}_{b_1, \dots, b_m}^{a_1, \dots, a_n} \equiv h_{c_1}^{a_1} \dots h_{c_n}^{a_n} h_{b_1}^{d_1} \dots h_{b_m}^{d_m} \mathcal{L}_t T_{d_1, \dots, d_m}^{c_1, \dots, c_n} , \quad (4.63)$$

onde  $\mathcal{L}_t$  é a derivada de Lie ao longo do vetor evolução temporal  $t^a$ .

### 4.3.3 Curvatura Intrínseca

Da equação (4.55), em geral temos que

$$n_a n^a = \begin{cases} -1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-espaço,} \\ 1, & \text{se } \Sigma \text{ é tipo-tempo.} \end{cases} \quad (4.64)$$

Para o caso em que o produto interno é nulo, é possível construir uma *conexão de Levi-Civita única*  $D$ , sem torção e com métrica compatível com  $\Sigma$  [94]. A própria métrica espacial é uma quantidade intrínseca, e como ela é de fato uma métrica em  $\Sigma$  é possível definir o operador  $D_a$ , tal que  $D_a h_{bc} = 0$  :

**Definição 19.**

$$D_c T_{b_1, \dots, b_m}^{a_1, \dots, a_n} \equiv h_{d_1}^{a_1} \dots h_{d_k}^{a_k} h_{b_1}^{e_1} \dots h_{b_l}^{e_l} h_c^f \nabla_f T_{e_1, \dots, e_l}^{d_1, \dots, d_k} . \quad (4.65)$$

A derivada covariante  $D_a$  imediatamente satisfaz a condição de linearidade, a regra de Leibniz e preserva a métrica espacial. De fato,

$$h_a^d h_b^e h_c^f \nabla_f h_{de} = h_a^d h_b^e h_c^f \nabla (g_{de} + n_d n_e) = 0 , \quad (4.66)$$

onde usamos que  $g_{de}$  é covariante a  $\nabla_f$ , além da relação (4.58). Com uma derivada covariante definida é possível definir outras quantidades geométricas da foliação.

**Definição 20.** O tensor curvatura intrínseca é definido como o tensor de Riemann tridimensional

$${}^{(3)}R_{abc}^d \omega_d = D_a D_b \omega_c - D_b D_a \omega_c , \quad (4.67)$$

para todo  $\omega_c \in T^* \Sigma$ .

Como usamos somente a derivada espacial  $D_a$ , aplicada a formas espaciais  $\omega_c$ ,  ${}^{(3)}R_{abc}^d$  é definido intrinsecamente. Do tensor de Riemann intrínseco obtemos o 3-tensor de Ricci e o 3-escalar de Ricci usando as contrações usuais.

### 4.3.4 Curvatura Extrínseca

Acabamos de identificar que a curvatura intrínseca é uma quantidade completamente definida na seção espacial do espaço-tempo, logo falta a informação associada à derivação na direção temporal. O resultado é derivação da componente geométrica extrínseca.

Ao contrário da geometria intrínseca, que se aplica somente à variedade  $(\Sigma, h_{ab})$ , não importando como ela está imersa na variedade do espaço-tempo, a geometria extrínseca de  $\Sigma$  em  $\Sigma \times \mathbb{R}$  se refere ao modo como a variedade imersa  $\Sigma$  “se dobra” em torno de sua vizinhança. Isso significa que, em geral,  $n^a$  é variável ao longo de  $\Sigma$ .

**Definição 21.** *O tensor de curvatura extrínseca é definido por*

$$K_{ab} \equiv D_a n_b = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d . \quad (4.68)$$

O tensor  $K_{ab}$  possui as seguintes propriedades úteis para nossa exposição:

1.  $K_{ab} = h_a^c \nabla_c n_b = \nabla_a n_b + n_a n^c \nabla_c n_b$ . Ou seja, pode-se dispensar um projetor da definição de  $D_a$ . Prova:

$$K_{ab} = h_b^d h_a^c \nabla_c n_d = (\delta_b^d + n_b n^d) h_a^c \nabla_c n_d \quad (4.69)$$

$$= h_a^c \nabla_c n_b + n_b n^d h_a^c . \quad (4.70)$$

Notando que  $n^d \nabla_c n_d = \frac{1}{2} (n^d \nabla_c n_d + n_d \nabla_c n^d) = \frac{1}{2} \nabla_c (n_d n^d) = 0$ , temos o resultado.

2. É simétrico,  $K_{ab} = K_{ba}$ .
3. A curvatura extrínseca é dada pela metade da derivada de Lie da métrica induzida ao longo do vetor normal

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} . \quad (4.71)$$

A demonstração é imediata:

$$\mathcal{L}_n h_{ab} = n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a n^c + h_{ac} \nabla_b n^c \quad (4.72)$$

$$= n^c \nabla_c (n_a n_b) + \nabla_a n_b + \nabla_b n_a$$

$$= (\delta_a^c + n_a n^c) \nabla_c n_b + (\delta_b^c + n_b n^c) \nabla_c n_a$$

$$= h_a^c \nabla_c n_b + h_b^c \nabla_c n_a = K_{ab} + K_{ba} = 2K_{ab} .$$

- 4.

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a) , \quad (4.73)$$

onde  $\dot{h}_{ab} = h_a^c h_b^d \mathcal{L}_t h_{cd}$ . Esse resultado segue de

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} \quad (4.74)$$

$$= \frac{1}{2N} (N n^c \nabla_c h_{ab} + h_{cb} \nabla_a (N n^c) + h_{ac} \nabla_b (N n^c))$$

$$= \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d \mathcal{L}_{t-N} h_{cd} = \frac{1}{2N} h_a^c h_b^d (\mathcal{L}_t h_{cd} - \mathcal{L}_N h_{cd}) ,$$

onde fizemos a substituição  $Nn^a = t^a - N^a$ .

### 4.3.5 Decomposição da Métrica

**Definição 22.** *Sejam  $(y^a)$  as coordenadas induzidas da superfície  $\Sigma_t$ , chamamos de coordenadas adaptadas à foliação as coordenadas*

$$x^\alpha = x^\alpha(y^a). \quad (4.75)$$

O operador projeção pode, então, ser escrito como

$$e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}. \quad (4.76)$$

E o elemento de linha de  $\Sigma_t$  é

$$ds_{\Sigma_t}^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta} \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} dy^a \right) \left( \frac{\partial x^\beta}{\partial y^b} dy^b \right) = h_{ab} dy^a dy^b, \quad (4.77)$$

de modo que a métrica induzida é dada por

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta. \quad (4.78)$$

Expandindo a 3-métrica induzida  $h$  relativa às coordenadas  $(x^i) \in \Sigma_t$ , temos a métrica

$$h = h_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.79)$$

Como o vetor deslocamento é tangente à superfície  $\Sigma_t$ , a métrica induzida pode ser usada para abaixar e levantar índices desse vetor,

$$N_i = h_{ij} N^j. \quad (4.80)$$

A expansão da métrica do espaço-tempo  $g$  nas coordenadas correspondentes é a métrica

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.81)$$

Como  $g$  é um morfismo que leva dois vetores em um número real, podemos ver seus componentes como a função

$$g_{\alpha\beta} = g(\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_N). \quad (4.82)$$

Portanto, utilizando (4.61), temos

$$\begin{aligned} g_{00} = g(\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_t) &= t^a t_a \\ &= (n^a N + N^a)(n_a N + N_a) \\ &= -N^2 + N^a N_a, \end{aligned} \quad (4.83)$$

onde utilizamos  $n_a n^a = -1$ , da eq. (4.55), e  $n^a h_{ab} = 0$ , da eq. (4.58). Também

$$\begin{aligned} g_{0i} = g(\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_i) &= \vec{t} \cdot \vec{\partial}_i \\ &= (\vec{n}N + \vec{N}) \cdot \vec{\partial}_i = \vec{N} \cdot \vec{\partial}_i \\ &= N_a (\partial^a \partial_i) = N_a \delta_i^a \\ &= N_i \end{aligned} \quad (4.84)$$

e

$$g_{ij} = g(\vec{\partial}_i, \vec{\partial}_j) = \vec{\partial}_i \cdot \vec{\partial}_j = h_{ij}. \quad (4.85)$$

Portanto, a matriz que representa a métrica do espaço tempo em uma foliação 3+1 é

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0j} \\ g_{i0} & g_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & N^j \\ N^i & h_{ij} \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Podemos então avaliar explicitamente a métrica do espaço tempo:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (-N^2 + N_i N^i) dt dt \quad (4.87)$$

$$+ N_j dt dx^j + N_i dt dx^i \quad (4.88)$$

$$+ h_{ij} dx^i dx^j \quad (4.89)$$

$$= (-N^2 + N_i N^i) dt dt \quad (4.90)$$

$$+ h_{ij} N^i dt dx^j + h_{ij} N^i dt dx^j \quad (4.91)$$

$$+ h_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.92)$$

e obtemos a 2-forma métrica do formalismo ADM.

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt dt + h_{ij} (dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (4.93)$$

Esse resultado chave é o verdadeiro início do formalismo ADM, a partir daqui podem ser derivadas as equações de Hamilton para a Relatividade Geral e outras teorias de gravitação. Agora passemos a procurar a 2-forma dual da métrica. Suponha que a métrica dual tenha a forma

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & v^k \\ v^j & b^{jk} \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Por definição, o produto interno das duas matrizes tem que ser a matriz identidade, ou

$$\begin{pmatrix} -N^2 + N^i N_i & N^j \\ N^i & h_{ij} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & v^k \\ v^j & b^{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{pmatrix}. \quad (4.95)$$

Da multiplicação da primeira linha de  $g_{\alpha\mu}$  com a primeira coluna de  $g^{\alpha\mu}$ , temos

$$(-N^2 + N_j N^j) a + N_j v_j = 1. \quad (4.96)$$

Da multiplicação da segunda linha de  $g_{\alpha\mu}$  com a primeira coluna de  $g^{\alpha\mu}$ , temos

$$aN_i + h_{ij}v^j = 0 \Rightarrow aN_i = v_i . \quad (4.97)$$

Assim, temos

$$(-N^2 + N_j N^j)a - aN_j N^j = 1 . \quad (4.98)$$

Das equações (4.97) e (4.98), temos que  $a = -\frac{1}{N^2}$  e  $v^j = \frac{N^j}{N^2}$ . Da multiplicação da segunda linha de  $g_{\alpha\mu}$  com a segunda coluna de  $g^{\alpha\mu}$  temos que

$$N_i v^k + h_{ij}b^{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \delta_{ik} - \frac{N_i N^k}{N^2} , \quad (4.99)$$

ou

$$b^{ij} = h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} . \quad (4.100)$$

Logo, a matriz métrica dual de  $g_{\alpha\mu}$  é

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{0j} \\ g^{i0} & g^{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix} . \quad (4.101)$$

Utilizando a regra de Cramer[108] é possível estabelecer o determinante da métrica ADM do espaço-tempo. Primeiro, denotemos  $g = \det(g_{\alpha\beta})$  e  $h = \det(h_{ij})$ . Observe que  $g$  e  $h$  são independentes das coordenadas.

Da regra de Cramer

$$g^{00} = \frac{C_{00}}{g} = \frac{h}{g} . \quad (4.102)$$

Assim, temos que

$$\frac{h}{g} = -\frac{1}{N^2} . \quad (4.103)$$

Portanto, a relação entre o determinante da métrica do espaço tempo no formalismo usual e o determinante da métrica induzida é

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} . \quad (4.104)$$

## 4.4 Relações de Curvatura

A curvatura do espaço-tempo é completamente descrita pelas curvaturas intrínseca (4.68) e extrínseca (4.67) de  $\Sigma$ , da mesma forma que a métrica induzida  $h_{\alpha\beta}$  e o vetor normal  $n^\mu$  descrevem a métrica  $g_{\mu\nu}$ . Somente as quantidades de 3-curvatura por si só não descrevem toda a informação sobre a curvatura da variedade foliada, como é possível mostrar através da contagem de componentes independentes: O tensor de Riemann de  $n$  dimensões tem  $n^2(n^2 - 1)/12$  componentes independentes, o que resulta em 20 componentes independentes para  $n = 4$  e 6 para  $n = 3$ , tomando o tensor de curvatura extrínseca que fornece mais 6 componentes, temos um total de 12 componentes de 3-curvatura contra 20 de 4-curvatura. Essa aparente contradição é resolvida ao encontrar qual a correspondência entre o tensor de Riemann e os tensores de curvatura intrínseca e extrínseca.

### 4.4.1 Relações de Gauss

A primeira relação que temos é a *equação de Gauss*

$$h_\alpha^\eta h_\beta^\phi h_\kappa^\gamma h_\sigma^\delta R_{\eta\phi\gamma}^\sigma = {}^{(3)}R_{\alpha\beta\kappa}^\delta + K_{\alpha\kappa} K_\beta^\delta - K_{\beta\kappa} K_\alpha^\delta, \quad (4.105)$$

que segue de

$$\begin{aligned} D_\alpha D_\beta \omega_\kappa &= D_\alpha (h_\beta^\delta h_\kappa^\eta \nabla_\delta \omega_\eta) = h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma h_\kappa^\sigma \nabla_\phi (h_\gamma^\delta h_\sigma^\eta \nabla_\delta \omega_\eta) \\ &= h_\alpha^\phi h_\beta^\delta h_\kappa^\eta \nabla_\phi \nabla_\delta \omega_\eta + h_\kappa^\eta (h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma \nabla_\phi h_\gamma^\delta) \nabla_\delta \omega_\eta + h_\beta^\delta (h_\alpha^\phi h_\kappa^\sigma \nabla_\phi h_\sigma^\eta) \nabla_\delta \omega_\eta, \end{aligned} \quad (4.106)$$

mas

$$h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma \nabla_\phi h_\gamma^\delta = h_\alpha^\phi h_\beta^\gamma \nabla_\phi (g_\beta^\gamma + n_\gamma n^\delta) = n^\delta h_\beta^\gamma \nabla_\alpha n_\gamma = K_{\alpha\beta} n^\delta, \quad (4.107)$$

também

$$h_\beta^\delta (h_\alpha^\phi h_\kappa^\sigma \nabla_\phi h_\sigma^\eta) \nabla_\delta \omega_\eta = h_\beta^\delta K_{\alpha\kappa} n^\eta \nabla_\delta \omega_\eta = -K_{\alpha\kappa} h_\beta^\delta \omega_\eta \nabla_\delta n^\eta = -K_{\alpha\kappa} K_\beta^\eta \omega_\eta. \quad (4.108)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{\alpha\beta\kappa}^\eta \omega_\eta &= D_\alpha D_\beta \omega_\kappa - D_\beta D_\alpha \omega_\kappa \\ &= h_\alpha^\phi h_\beta^\delta h_\kappa^\eta (\nabla_\phi \nabla_\delta \omega_\eta - \nabla_\delta \nabla_\phi \omega_\eta) - K_{\alpha\kappa} K_\beta^\eta \omega_\eta + K_{\beta\kappa} K_\alpha^\eta \omega_\eta. \end{aligned} \quad (4.109)$$

O que prova a identidade.

### 4.4.2 Relações de Codazzi

A *equação de Codazzi*

$$h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa R_{\alpha\beta\kappa\delta} n^\delta = D_\eta K_{\phi\gamma} - D_\phi K_{\eta\gamma} \quad (4.110)$$

segue diretamente fazendo

$$\begin{aligned} h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa R_{\alpha\beta\kappa\delta} n^\delta &= h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa (\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) n_\kappa \\ &= h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa (\nabla_\alpha (g_\beta^\delta \nabla_\delta n_\kappa) - \nabla_\beta (g_\alpha^\delta \nabla_\delta n_\kappa)) \\ &= D_\eta K_{\phi\gamma} - h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa \nabla_\alpha (n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) - D_\phi K_{\eta\gamma} + h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa \nabla_\beta (n_\alpha n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) \\ &= D_\eta K_{\phi\gamma} - D_\phi K_{\eta\gamma} - h_\eta^\alpha h_\phi^\beta h_\gamma^\kappa (n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) (\nabla_\alpha n_\beta - \nabla_\beta n_\alpha), \end{aligned} \quad (4.111)$$

considerando que o último termo é nulo por conta da simetria da projeção espacial de  $\nabla_\alpha n_\beta$ , temos demonstrado a relação.

### 4.4.3 A Relação de Ricci

A *equação de Ricci* é

$$R_{\alpha\kappa\beta\delta} n^\kappa n^\delta = -\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\kappa} K_\beta^\kappa + D_{(\alpha} a_{\beta)} + a_\alpha a_\beta, \quad (4.112)$$

onde definimos a *aceleração normal* como  $a_\alpha \equiv n^\kappa \nabla_\kappa n_\alpha$ , com  $a_\alpha n^\alpha = 0$ . Esta equação será deduzida por partes. Primeiro, temos

$$\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta} = n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\kappa} \nabla_\beta n^\kappa + K_{\beta\kappa} \nabla_\alpha n^\kappa. \quad (4.113)$$

Usando  $K_{\alpha\beta} = h_\alpha^\kappa \nabla_\kappa n_\beta = \nabla_\alpha n_\beta + n_\alpha n^\kappa \nabla_\kappa n_\beta$ , o primeiro termo fica

$$\begin{aligned} n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} &= n^\kappa \nabla_\kappa \nabla_\alpha n_\beta + (n^\kappa \nabla_\kappa n_\alpha)(n^\delta \nabla_\delta n_\beta) + n_\alpha n^\kappa \nabla_\kappa (n^\delta \nabla_\delta n_\beta) \\ &= n^\kappa \nabla_\kappa \nabla_\alpha n_\beta + a_\alpha a_\beta - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) - n^\delta \nabla_\alpha \nabla_\delta n_\beta + h_\alpha^\kappa \nabla_\kappa (n^\delta \nabla_\delta n_\beta). \end{aligned}$$

No último termo, onde foi utilizada a relação  $n_\alpha n^\kappa = -g_\alpha^\kappa + h_\alpha^\kappa$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} h_\alpha^\kappa (h_\beta^\eta - n_\beta n^\eta) \nabla_\kappa a_\eta &= D_\alpha a_\beta - h_\alpha^\kappa n_\beta n^\eta \nabla_\kappa a_\eta \\ &= D_\alpha a_\beta + n_\beta a_\eta \nabla_\alpha n^\eta + n_\alpha n^\kappa n_\beta a_\eta \nabla_\kappa n^\eta. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} n^\kappa \nabla_\kappa K_{\alpha\beta} &= n^\kappa (\nabla_\kappa \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\kappa) n_\beta + a_\alpha a_\beta + D_\alpha a_\beta - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) \\ &\quad + n_\beta \nabla_\alpha n^\eta (n^\kappa \nabla_\kappa n_\eta) + n_\alpha n_\beta (n^\kappa \nabla_\kappa n^\eta) (n^\delta \nabla_\delta n_\eta). \end{aligned}$$

Os dois últimos termos de  $\mathcal{L}_n K_{\alpha\beta}$  podem ser escritos como

$$\begin{aligned} K_{\alpha\kappa} \nabla_\beta n^\kappa + K_{\beta\kappa} \nabla_\alpha n^\kappa &= (\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) + n_\beta n^\kappa (\nabla_\kappa n^\delta)(\nabla_\alpha n_\delta) + K_{\alpha\kappa} (K_\beta^\kappa - n_\beta n^\delta \nabla_\delta n^\kappa) \\ &= (\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) + K_{\alpha\kappa} K_\beta^\kappa - n_\alpha n^\delta (\nabla_\delta n_\kappa) n_\beta n^\eta \nabla_\eta n^\kappa. \end{aligned}$$

Notando que

$$\begin{aligned} &(\nabla_\alpha n_\kappa)(\nabla_\beta n^\kappa) - (\nabla_\alpha n^\delta)(\nabla_\delta n_\beta) + n_\beta \nabla_\alpha n^\eta (n^\kappa \nabla_\kappa n_\eta) \\ &= (\nabla_\alpha n^\kappa)(\nabla_\beta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\beta + n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) \\ &= (\nabla_\alpha n^\kappa)(h_\beta^\delta (\nabla_\delta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\delta) + n_\beta n^\delta \nabla_\delta n_\kappa) = 0, \end{aligned}$$

onde utilizamos na primeira linha o fato de  $n_a$  ser normalizado para sumir com o último termo, e

$$\begin{aligned} h_\beta^\delta (\nabla_\delta n_\kappa - \nabla_\kappa n_\delta) &= h_\beta^\delta h_\kappa^\eta (\nabla_\delta n_\eta - \nabla_\eta n_\delta) - h_\beta^\delta n_\kappa n^\eta (\nabla_\delta n_\eta - \nabla_\eta n_\delta) \\ &= -n_\kappa n^\eta \nabla_\eta n_\beta, \end{aligned}$$

para zerar o resto.

Reagrupando os termos obtemos a equação de Ricci.

#### 4.4.4 Escalar de Curvatura no Formalismo ADM

Primeiro chamamos atenção para a importante relação

$$R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta = (K_\alpha^\alpha)^2 - K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha + \nabla_\alpha v^\alpha. \quad (4.114)$$

A relação (4.114) segue diretamente de

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta &= R_{\alpha\kappa\beta}{}^\kappa n^\alpha n^\beta = -n^\alpha(\nabla_\alpha \nabla_\kappa - \nabla_\kappa \nabla_\alpha)n^\kappa \\ &= (\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\kappa n^\kappa) - (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\kappa) - \nabla_\alpha(n^\alpha \nabla_\kappa n^\kappa) + \nabla_\kappa(n^\alpha \nabla_\alpha n^\kappa), \end{aligned}$$

usando

$$\begin{aligned} (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\alpha n^\kappa) &= g_\alpha^\delta g_\eta^\kappa (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &= (h_\eta^\kappa \nabla_\kappa n^\alpha)(h_\alpha^\delta \nabla_\delta n^\eta) - h_\alpha^\delta n^\sigma n_\sigma (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &\quad + h_\eta^\kappa n_\alpha n^\delta (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) + n_\alpha n^\delta n^\kappa n_\eta (\nabla_\kappa n^\alpha)(\nabla_\delta n^\kappa) \\ &= K_\eta^\alpha K_\alpha^\eta. \end{aligned}$$

Analogamente,  $(\nabla_\alpha n^\alpha)(\nabla_\kappa n^\kappa) = (K_\eta^\alpha)(K_\alpha^\eta) = (K_\alpha^\alpha)^2$  e o resultado segue, notando que  $v^\alpha = -n^\alpha \nabla_\kappa n^\kappa + n^\kappa \nabla_\kappa n^\alpha$ .

Agora, passando para o cálculo do escalar de curvatura, temos

$$\begin{aligned} R &= g^{\alpha\beta} g^{\kappa\delta} R_{\alpha\kappa\beta\delta} = (h^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)(h^{\kappa\delta} - n^\kappa n^\delta) R_{\alpha\kappa\beta\delta} \\ &= h^{\alpha\beta} h^{\kappa\delta} R_{\alpha\kappa\beta\delta} - 2R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \\ &= h^{\eta\varphi} h^{\gamma\sigma} h_\eta^\alpha h_\varphi^\beta h_\gamma^\kappa h_\sigma^\delta R_{\alpha\kappa\beta\delta} - 2R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \\ &= h^{\eta\varphi} [(^3)R_{\eta\gamma\varphi}{}^\gamma + K_{\eta\varphi} K_\gamma^\gamma - K_{\gamma\varphi} K_\eta^\gamma] - 2[(K_\alpha^\alpha)^2 - K_\beta^\alpha K_\alpha^\beta + \nabla_\alpha v^\alpha], \end{aligned}$$

onde utilizamos as equações (4.105) e (4.114). Portanto, o *escalar de Ricci no formalismo ADM* é

$$R = (^3)R - (K_\alpha^\alpha)^2 + K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - 2\nabla_\alpha v^\alpha \quad (4.115)$$

e, finalmente, escrevemos todas as quantidades geométricas que definem RG covariante na formulação 3 + 1.



# 5 Gravitações canônicas no formalismo simplético

## 5.1 Introdução

A relatividade geral é a teoria que descreve a dinâmica do espaço-tempo. Por ser uma teoria essencialmente geométrica, suas equações descrevem um comportamento fundamentalmente diferente do de outras teorias de calibre. Quando se trata da formulação canônica, as teorias de gravitação modernas apresentam uma série de sutilezas alheias às demais teorias de campo, a começar pela necessidade da quebra da covariância explícita apresentada na foliação ADM e a subsequente construção de Dirac para a quantização canônica.

O formalismo simplético segundo FJ foi aplicado à RG, sem a utilização do algoritmo simplético em Refs. [109, 110], com o propósito de se encontrar os parênteses generalizados (de Dirac). Em geral, para encontrar a matriz simplética (e, portanto, os parênteses generalizados) usando esse método, é necessário fazer uma fixação do calibre. Entretanto, esse trabalho visa a obtenção dos geradores de calibre e dos vínculos duma dada teoria gravitacional, não havendo necessidade de fixar o calibre. De modo que visamos interromper o procedimento iterativo de BW num certo passo  $r' \leq r$  em que nenhuma fixação de calibre é feita e todos os vínculos são encontrados. Esse procedimento também é suficiente para se realizar a contagem dos graus de liberdade.

Nesse capítulo, baseado no trabalho em Ref. [51], apresentamos como a teoria da relatividade geral e a extensão de Brans-Dicke são escritas segundo a expressão geométrica da mecânica de Hamilton, isto é, segundo a geometria simplética. Conforme explicado, aplicamos o algoritmo de BW para o formalismo simplético de Faddeev-Jackiw para encontrar os vínculos da teoria e a matriz pré-simplética de última ordem, apontar as transformações de calibre *on-shell* e *off-shell*<sup>1</sup> dos principais campos das teorias e proceder a contagem de graus de liberdade.

## 5.2 Teoria da Relatividade Geral na forma canônica

### 5.2.1 Obtenção da Lagrangiana de ordem zero

Até a obtenção do potencial simplético os principais resultados abaixo podem ser encontrados em [95, 105].

---

<sup>1</sup> Trabalho atualmente em desenvolvimento.

Utilizamos a equação (4.115) para escrever a ação de Einstein-Hilbert, a menos de um termo de superfície, como

$$L[h_{ij}, N, N^i] = \frac{1}{2\kappa} \int d^3x N \sqrt{h} \left[ {}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - (K^a_a)^2 \right]. \quad (5.1)$$

Os campos da teoria são  $N$ ,  $N^a$  e  $h^{ab}$ . A Lagrangiana não é linear nas velocidades. Por conveniência, pela maior proximidade explícita com o formalismo de Dirac, escolhemos usar os momentos para linearizar a Lagrangiana.

Os momentos conjugados aos campos que compõem a teoria são<sup>2</sup>

$$\Pi_N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (5.2)$$

$$\Pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}^a}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (5.3)$$

$$\Pi_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}^{ab}} = \frac{1}{2N} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K^{ab}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (K_{ab} - K^c_c h_{ab}), \quad (5.4)$$

de modo que, temos usado  $K_{ab} = \frac{1}{N} (\dot{h}_{ab} D_{(a} N_{b)})$ . Levando em conta

$$\Pi^a_a = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (K^a_a - 3K^c_c) = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (-2K^a_a), \quad (5.5)$$

resultando

$$K^a_a = -\frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \frac{\Pi^c_c}{2}, \quad (5.6)$$

e, notando que

$$K^{ab} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \Pi^{ab} + K^c_c h^{ab} = \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left( \Pi^{ab} - \frac{\Pi^c_c}{2} h^{ab} \right), \quad (5.7)$$

vemos que

$$\dot{h}_{ab} = 2N \left( \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \right) \left( \Pi_{ab} - \frac{\Pi^c_c}{2} h_{ab} \right) + 2D_{(a} N_{b)}. \quad (5.8)$$

Considerando a Hamiltoniana como o potencial de ordem zero, isto é,  $V^{(0)} \equiv H$ , temos que

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= \left( \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \right) N \left( 2\Pi^{ab} - \Pi^c_c h^{ab} \right) \Pi_{ab} - 2D_{(a} N_{b)} \Pi^{ab} - \\ &\quad - N \left( \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) \left[ {}^{(3)}R + K^{ab} K_{ab} - (K^c_c)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.9)$$

<sup>2</sup> Usando a definição  $\tilde{\Pi}_{ij} \equiv \partial \mathcal{L} / \partial \dot{h}^{ij}$ , os momentos irão diferir da eq. (5.4) por um sinal global, i.e.  $\tilde{\Pi}_{ij} = -\Pi_{ij}$ . Nós usamos  $\Pi^{ij}$  uma vez que essa é a convenção comumente adotada (e.g., [95, 105, 111]).

Mas

$$\begin{aligned}
\Pi^{ab}\Pi_{ab} &= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^2 (K^{ab} - K^c{}_c h^{ab})(K_{ab} - K^c{}_c h_{ab}) \\
&= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^2 (K_{ab}K^{ab} - K^c{}_c K^{ab}h_{ab} - K^c{}_c K_{ab}h^{ab} + 3(K^c{}_c)^2) \\
&= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^2 (K_{ab}K^{ab} - 2(K^c{}_c)^2 + 3(K^c{}_c)^2) \\
&= \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right)^2 (K_{ab}K^{ab} + (K^c{}_c)^2). \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Então

$$\frac{2\kappa}{\sqrt{h}} (2\Pi_{ab}\Pi^{ab} - (\Pi^c{}_c)^2) = \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right) (2K_{ab}K^{ab} + 2(K^a{}_a)^2 - 4(K^a{}_a)^2), \tag{5.11}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) (2\Pi_{ab}\Pi^{ab} - (\Pi^c{}_c)^2) = \left(\frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\right) (K_{ab}K^{ab} - (K^a{}_a)^2). \tag{5.12}$$

Assim, reescrevendo o potencial utilizando somente as variáveis do espaço de fase,

$$V^{(0)} = \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) N \left[ \Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right] + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} - N \left(\frac{\sqrt{h}}{\kappa}\right) {}^{(3)}R. \tag{5.13}$$

E a densidade de Lagrangiana da iteração zero é então

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{h}^{ab}\Pi_{ab} - \left(\frac{2\kappa}{\sqrt{h}}\right) N \left[ \Pi_{ab}\Pi^{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right] + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} - N \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} {}^{(3)}R. \tag{5.14}$$

### 5.2.2 Notação

Para aplicações do método simplético de BW em teorias do tipo tensoriais é fácil se perder entre todos os índices da teoria, pois além dos índices que denotam os componentes de cada campo, outros são adicionados para denotar o espaço simplético, ou seja, cada campo em si. A notação proposta indica como tensores são contraídos mediante produtos internos no espaço simplético.

Tensores no espaço tangente a  $\Sigma_t$  são escritos em **negrito**, representando o conjunto de seus componentes que, por sua vez, são denotados por letras do alfabeto romano,  $i, j, k$  e assim por diante, por exemplo  $\mathbf{N} = (N^i)$ ,  $\mathbf{h} = (h_{ij})$ . A dependência nas coordenadas espaciais são expressas nos tensores correspondentes pelo uso ou não de “linhas”, e.g.  $\Pi^i = \Pi^i(x')$ , para campos que dependam tanto de  $x$  quanto de  $x'$  nenhuma linha é usada. Tensores no espaço simplético são denotados por uma “barra” e em **negrito**, enquanto seus componentes são escritos com letras do alfabeto grego  $\alpha, \beta, \gamma$ , por exemplo  $\bar{\xi} = (\xi^\alpha)$ ,  $\bar{\mathbf{f}} = (f_{\alpha\beta})$ . Cada elemento de uma coordenada simplética está associado a um

campo, e não a uma componente de um campo, portanto, por exemplo,  $\xi^2 = \mathbf{N}$ , ou  $\xi^{2i} = N^i$ . A contração de índices simpléticos implica na contração dos índices correspondentes no espaço tangente, por exemplo

$$(\bar{\nu} \cdot \bar{\mathbf{f}})_{\beta kl} = \nu^\alpha f_{\alpha\beta kl} = \sum_{\alpha, i, j} \nu^{\alpha ij} f_{\alpha ij\beta kl}. \quad (5.15)$$

A matriz identidade  $3 \times 3$  é denotada por  $\mathbf{1}$ . Também  $(\mathbf{1})_j^i = \delta_j^i$  e  $(\mathbf{1})_j = \mathbf{1}_j = (\delta^i)_j$ , i.e.,  $\mathbf{1}_j$  é a  $j$ -ésima linha da matriz identidade, em particular  $\mathbf{1}_1 = (1 \ 0 \ 0)$ . Para denotar uma quantidade que aparece frequentemente em nossas contas, introduzimos a simbologia  $\mathbf{I}$  como

$$\frac{\delta h_{ij}}{\delta h'_{kl}} = \delta_{(i}^k \delta_{j)}^l \delta^{(3)}(x - x') \equiv I_{ij}^{kl}, \quad (5.16)$$

onde os parênteses em  $i$  e  $j$  indicam simetrização.

Produtos internos entre dois campos no espaço simplético indicam que o número máximo de índices sendo contraídos no espaço interno (i.e. em  $\Sigma_t$ ), assim temos que o produto interno entre um tensor de ordem 2 e um tensor de ordem quatro implica na contração de dois índices. A contração dos índices sempre ocorre entre campos de mesma coordenada espacial. Seja  $\mathbf{A} = (A^i)$ ,  $\mathbf{B} = (B^i)$  e  $\mathbf{C} = (C^i)$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \frac{\delta \mathbf{C}'}{\delta \mathbf{B}} &= A^i \frac{\delta \mathbf{C}'}{\delta B^i} = \left( A^i \frac{\delta C'_j}{\delta B^i} \right), \\ \mathbf{A} \cdot \frac{\delta \mathbf{C}}{\delta \mathbf{B}'} &= A^i \frac{\delta C_i}{\delta B'^i} = \left( A^i \frac{\delta C_i}{\delta B'^j} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

O índice que indica a iteração  $(i)$  no algoritmo de BW aparece somente quando necessário, geralmente no início de cada iteração onde são declaradas as variáveis significativas.

### 5.2.3 Iteração de ordem zero: obtenção dos vínculos

A partir da Lagrangiana de ordem zero podemos identificar o vetor simplético de ordem zero como

$$\bar{\xi}^{(0)} = (N \ \mathbf{N} \ \mathbf{h} \ \mathbf{\Pi}) = (N \ N^i \ h_{ij} \ \Pi^{ij}), \quad (5.18)$$

$$\bar{\mathbf{a}}^{(0)} = (0 \ 0 \ \mathbf{\Pi} \ 0) = (0 \ 0_k \ \Pi^{kl} \ 0_{kl}). \quad (5.19)$$

A partir das quantidade acima declaradas obtemos

$$\frac{\delta a'_\beta}{\delta \xi^\alpha} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \frac{\delta \mathbf{\Pi}'}{\delta \mathbf{\Pi}} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \mathbf{I}. \quad (5.20)$$

Portanto, a estrutura pré-simplética é

$$f_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \mathbf{I} - \delta_\beta^4 \delta_\alpha^3 \mathbf{I}. \quad (5.21)$$

A matriz associada à estrutura simplética acima é claramente degenerada, uma vez que as primeiras duas colunas/linhas são nulas. Como seus modos-zero devem satisfazer

$$0 = (\bar{\nu} \cdot \bar{f})_\beta = \delta_\beta^3 \nu^4 \cdot \mathbf{I} - \delta_\beta^4 \nu^3 \cdot \mathbf{I} = \left( \delta_\beta^3 \nu^4 - \delta_\beta^4 \nu^3 \right) \delta^{(3)}(x - x'), \quad (5.22)$$

temos que  $\nu^{3ij}$  e  $\nu^{4ij}$  devem ser nulos. Portanto, os modos-zero da primeira iteração são

$$\bar{\nu}_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

$$\bar{\nu}^{(0)p} = \begin{pmatrix} 0 & 1^p & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Da condição de consistência (2.65), para o modo-zero  $\bar{\nu}_0^{(0)}$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta V'^{(0)}}{\delta N} &= \int \left\{ \left( \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \right) \left[ \Pi_{ab} \Pi^{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) {}^3R \right\} \delta^3(x - x') d^3x' = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Assim, definimos o vínculo Hamiltoniano como

$$\omega_0 \equiv \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left[ \Pi_{ab} \Pi^{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right] - \left( \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) {}^3R. \quad (5.26)$$

Aplicando a condição de consistência para o modo-zero  $\nu^{(0)p}$ , temos que

$$\begin{aligned} \int \frac{\delta}{\delta N^a(x)} \left( 2D_{(c} N^{b)} \Pi^c{}_b \right) (x') d^3x' &= \int 2 \frac{\delta}{\delta N^a} \left( D_b N^c \Pi^b{}_c \right) d^3x' \\ &= - \int 2 \frac{\delta}{\delta N^a} \left( N^c D_b \Pi^b{}_c \right) d^3x' \\ &= -2 \int \delta_a^c(x - x') D_b \Pi^b{}_c(y) d^3x' \\ &= -2 D_b \Pi^b{}_a(x) = 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

É oportuno comentar que a integração por partes na penúltima linha só é possível pois  $\Pi^b{}_a$  é um tensor densidade em  $\Sigma$ , — o termo  $\sqrt{h}$  está incorporado nele — enquanto  $N^a$  é vetor um em  $\Sigma$ .

Do cálculo acima definimos o vínculo de difeomorfismo

$$\omega_a \equiv -2 D_b \Pi^b{}_a. \quad (5.28)$$

Os nomes desses vínculos não são adequados ao formalismo simplético, uma vez que apontam para simetrias de calibres geradas por um tipo especial de vínculos segundo a conjectura de Dirac, enquanto que no método empregado aqui as transformações de calibre são geradas por um tipo especial de modo-zero. Na próxima iteração nos ocupamos dessa questão.

### 5.2.4 Iteração de ordem um: descobrindo as simetrias de calibre

Com a iteração zero completa podemos proceder para a próxima iteração. Eliminando os vínculos do potencial e adicionando-os ao setor cinético, escrevemos a Lagrangiana da iteração um como

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{h}_{ij}\Pi^{ij} + \dot{\lambda}^0\omega_0 + \dot{\lambda}^i\omega_i. \quad (5.29)$$

Onde o potencial de ordem um é

$$\mathcal{V}^{(1)} = 0. \quad (5.30)$$

Como o potencial é nulo, podemos garantir que não há novos vínculos a serem encontrados. As transformações de calibre infinitesimais para a métrica induzida são encontradas na próxima subseção.<sup>3</sup>

O vetor simplético e a um-forma simplética da primeira iteração são identificados como

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^{(1)} &= (\mathbf{h} \ \mathbf{\Pi} \ \lambda^0 \ \boldsymbol{\lambda}) = (h_{ij} \ \Pi^{ij} \ \lambda^0 \ \lambda^i), \\ \bar{\mathbf{a}}^{(1)} &= (\mathbf{\Pi} \ 0 \ \omega_0 \ \boldsymbol{\omega}) = (\Pi^{kl} \ 0_{kl} \ \omega_0 \ \omega_k). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Todos os campos que não aparecem em  $\mathcal{L}^{(1)}$  foram omitidos de  $\bar{\xi}^{(1)}$ . Com os dados acima, temos

$$\frac{\delta a'_{\beta}}{\delta \xi^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^3 \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{h}} + \delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^4 \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{h}} + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^1 \mathbf{I} + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^3 \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{\Pi}} + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^4 \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{\Pi}}. \quad (5.32)$$

Acima estamos usando a notação de (5.17), em particular  $\delta \omega'_0 / \delta \mathbf{h} = \delta \omega_0(x') / \delta h_{ij}(x)$ . A estrutura pré-simplética pode ser encontrada pela anti-simetrização da eq. (5.32). Representando matricialmente, temos

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} & \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{h}} & \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{h}} \\ \mathbf{I} & 0 & \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{\Pi}} & \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{\Pi}} \\ -\frac{\delta \omega_0}{\delta \mathbf{h}'} & -\frac{\delta \omega_0}{\delta \mathbf{\Pi}'} & 0 & 0 \\ \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta \mathbf{h}'} & \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta \mathbf{\Pi}'} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Podemos calcular explicitamente o determinante da matriz acima e mostrar que ela não é degenerada no espaço simplético em geral, exceto na superfície de vínculos, como mostrado

<sup>3</sup> Do ponto de vista do formalismo de Dirac, se a Hamiltoniana pode ser escrita como uma combinação linear dos vínculos conhecidos, nenhum vínculo novo será encontrado. Nesse caso  $\dot{\omega}_m \approx \{\omega_m, H\} \approx \sum_{m'} \lambda_{m'} \{\omega_m, \omega_{m'}\}$ , portanto ou todos os vínculos são de primeira classe, e logo todos os multiplicadores de Lagrange ficarão indeterminados, ou alguns dos vínculos serão de segunda classe, levando à determinação de alguns dos multiplicadores de Lagrange [48]. Em ambos os casos não surgem vínculos novos.

no Apêndice D. Portanto, precisamos encontrar modos-zero tais que  $\int \bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \bar{\boldsymbol{f}} d^3x \approx 0$ . Primeiro consideramos os seguintes dois componentes,

$$0 \approx \int (\bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \bar{\boldsymbol{f}})_3 d^3x = \int \left( \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{h}} + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \frac{\delta \omega'_0}{\delta \mathbf{\Pi}} \right) d^3x, \quad (5.34)$$

$$0 \approx \int (\bar{\boldsymbol{\nu}} \cdot \bar{\boldsymbol{f}})_4 d^3x = \int \left( \boldsymbol{\nu}^1 \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{h}} + \boldsymbol{\nu}^2 \cdot \frac{\delta \boldsymbol{\omega}'}{\delta \mathbf{\Pi}} \right) d^3x. \quad (5.35)$$

Para escolhas particulares de  $\boldsymbol{\nu}^1$  e  $\boldsymbol{\nu}^2$ , a estrutura acima pode ser expressa como parênteses de Poisson entre um campo qualquer e os vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismos espaciais. Como os modos-zero podem depender somente das coordenadas espaciais  $x$ , não há como escrevê-los em função de uma dependência de derivadas funcionais<sup>4</sup> de  $\omega_0$  ou  $\omega_i$ , embora possa depender de derivadas do funcional  $\Omega_\mu = \int \omega_\mu d^3x$  (com  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ). Então, usando a conhecida álgebra de Dirac (veja e.g., [17, 68, 112]) para os vínculos de RG,

$$\begin{aligned} \{\omega_0, \omega'_0\} &= (\omega^i + \omega'^i) \partial_i \delta^{(3)}(x - x'), \\ \{\omega_i, \omega'_0\} &= \omega_0 \partial_i \delta^{(3)}(x - x'), \\ \{\omega_i, \omega'_j\} &= \omega'_i \partial_j \delta^{(3)}(x - x') + \omega_j \partial_i \delta^{(3)}(x - x'), \end{aligned} \quad (5.36)$$

podemos obter as quatro soluções das eqs. (5.34, 5.35):

$$\boldsymbol{\nu}_\mu^1 = \frac{\delta \Omega_\mu}{\delta \mathbf{\Pi}}, \quad \boldsymbol{\nu}_\mu^2 = -\frac{\delta \Omega_\mu}{\delta \mathbf{h}}. \quad (5.37)$$

A partir do conhecimento das componentes 1 e 2, podemos inferir imediatamente o restante das componentes. Os quatro modos-zero são

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_0 = \left( \frac{\delta \Omega_0}{\delta \mathbf{\Pi}} \quad -\frac{\delta \Omega_0}{\delta \mathbf{h}} \quad -1 \quad 0 \right), \quad (5.38)$$

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_p = \left( \frac{\delta \Omega_p}{\delta \mathbf{\Pi}} \quad -\frac{\delta \Omega_p}{\delta \mathbf{h}} \quad 0 \quad -\mathbf{1}_p \right). \quad (5.39)$$

Podemos verificar que os  $\bar{\boldsymbol{\nu}}_\mu$  são de fato modos-zero na superfície de vínculos, de agora em diante denominados “modos-zero fracos”,

$$\int (\bar{\boldsymbol{\nu}}_\mu \cdot \bar{\boldsymbol{f}})_\beta d^3x = \delta_\beta^3 \{\omega'_0, \Omega_\mu\} + \delta_\beta^4 \{\boldsymbol{\omega}', \Omega_\mu\} \approx 0. \quad (5.40)$$

De modo a descobrir as simetrias de calibre, os modos-zero fracos devem ser generalizados introduzindo-se um campo infinitesimal arbitrário. Da álgebra (5.36), encontramos, para qualquer  $\varepsilon^\nu$ ,

$$\int \{\omega_\mu, \varepsilon'^\nu \omega'_\nu\} d^3x' = \int (\varepsilon'^\nu \{\omega_\mu, \omega'_\nu\} + \{\omega_\mu, \varepsilon'^\nu\} \omega'_\nu) d^3x' \approx 0. \quad (5.41)$$

Isso implica que os modos-zero (5.38, 5.39) podem ser generalizados para depender de um campo vetorial infinitesimal arbitrário  $\varepsilon^\mu$ , o que é obtido ao substituir  $\Omega_\mu$  por

<sup>4</sup> Uma vez que  $\delta\omega_0(x)/\delta\omega_i(x')$  depende tanto de  $x$  quanto de  $x'$ .

$\Omega_\varepsilon \equiv \int \varepsilon^\mu(x) \omega_\mu(x) d^3x$ . De fato, podemos escrever o seguinte modo-zero fraco generalizado,

$$\bar{\nu}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi} & -\frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta h} & -\varepsilon^0 & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

Cada um dos quatro modos-zero (5.38, 5.39) são encontrados a partir de  $\bar{\nu}_\varepsilon$  por uma escolha particular de  $\varepsilon^\mu$ .

As transformações infinitesimais de  $h_{ij}$  na superfície de vínculos são encontradas a partir da primeira componente de  $\bar{\nu}_\varepsilon$ . De maneira que os candidatos (5.38) e (5.39) funcionam como uma espécie de “modos-zero” na superfície de vínculos. Isso sugere a existência transformações de calibre válidas somente na superfície de vínculos. Assumindo que de fato isto ocorra, temos, de (2.74),

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon h_{ij}(x) &= - \int d^3z \frac{\delta\omega_0(z)}{\delta\Pi^{ij}(x)} \varepsilon(z) \\ &= - \int d^3z \frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ij}(z) - \frac{1}{2} h_{ij}(z) \Pi_a{}^a(z) \right) \\ &= \int d^3z (-2K_{ij}(z)) \varepsilon \delta^3(z-x) \\ \delta_\varepsilon h_{ij}(x) &= -2\varepsilon K_{ij}(x) \end{aligned} \quad (5.43)$$

e

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon^b} h_{ij}(x) &= \int d^3z \frac{\delta\omega^b(z)}{\delta\Pi^{ij}(x)} \varepsilon(z) = \int d^3z \frac{\delta}{\delta\Pi^{ij}(x)} (\Pi^{ab}(z) D_a \varepsilon_b) \\ &= 2 \int d^3z D_a (h_{bc} \varepsilon^c)(z) \delta_{ij}^{ab}(z, x) \\ &= 2 \int d^3z h_{bc} (\partial_a \varepsilon^c + G_{ad}^c \varepsilon^d)(z) \delta_{ij}^{ab}(z, x) = 2 \int d^3z (h_{bc} \partial_a \varepsilon^c + (h_{bc} \frac{1}{2} [h_{ad}^{cf} \\ &\quad (\partial_a h_{df} + \partial_d h_{af} - \partial_f h_{ad}) \varepsilon^d](z)) \delta_{ij}^{ab}(z, x) \\ &= 2 \int d^3z \left[ h_{bc} \partial_a \varepsilon^c + \frac{1}{2} (\partial_a h_{bd} + \partial_d h_{ab} - \partial_b h_{ad}) \right] (z) \delta_{ij}^{ab}(z, x) \\ &= 2 \int d^3z \left( \frac{1}{2} (h_{bc} \partial_a \varepsilon^c + h_{ac} \partial_d \varepsilon^c) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (\partial_a h_{bd} + \partial_b h_{ad}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \partial_d h_{ab} - \frac{1}{2} (\partial_b h_{ad} + \partial_a h_{bd}) \right] \varepsilon^d \right) (z) \delta_{ij}^{ab}(z, x) \\ &= \int d^3z (h_{bc} \partial_a \varepsilon^c + h_{ac} \partial_b \varepsilon^c + \varepsilon^d \partial_d h_{ab})(z) \delta_{ij}^{ab}(z, x) \\ \delta_{\varepsilon^b} h_{ij}(x) &= \varepsilon^d \partial_d h_{ij} + h_{jc} \partial_i \varepsilon^c + h_{ic} \partial_j \varepsilon^c. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Portanto, a transformação do campo  $h^{ij}$  que apresenta invariância de calibre fornecida pelo formalismo simplético é

$$\delta_{\varepsilon^\mu} h_{ij}(x) = -2\varepsilon K_{ij}(x) + \varepsilon^d(x) \partial_d h_{ij}(x) + h_{jc}(x) \partial_i \varepsilon^c(x) + h_{ic}(x) \partial_j \varepsilon^c(x), \quad (5.45)$$

que representa exatamente a invariância por difeomorfismo em relatividade geral no formalismo ADM [17], em concordância com o obtido no formalismo *à la* Dirac [66], [67].

O resultado acima, deduzido a partir do formalismo simplético, pode ser encontrado em <sup>5</sup> Ref. [17], mais precisamente, na eq. (44). O termo  $2D_{(i}\varepsilon_{j)}$  na equação acima é uma derivada de Lie, logo é imediato interpretá-la como uma transformação de coordenadas na subvariedade  $\Sigma_t$  apenas. A expressão acima está correta. Resultados equivalentes podem ser obtidos para a variável  $\Pi^{ij}$  do espaço de fase, embora os deslocamentos de calibre normais à  $\Sigma_t$  são muito mais complicadas nesse caso. Para mais detalhes acerca da interpretação das transformações de calibre em RG escrita em variáveis ADM, veja Refs. [15–18, 68, 113].

Na seção (5.2.6) usaremos a teoria desenvolvida no capítulo 3 para encontrar o conjunto completo das transformações de calibre para os campos que formam a Lagrangiana de RG no formalismo ADM.

### 5.2.5 Contagem dos graus de liberdade

Agora analisamos o número de campos independentes em Relatividade Geral segundo o esquema simplético. Temos que o número de graus de liberdade da teoria é igual a: ( número de campos iniciais - o número de modos-zero - o número de vínculos)/2, nesse caso temos ( 20 (campos iniciais) – 12 (modos-zero) – 4 (1 vínculo hamiltoniano mais 3 vínculos de difeomorfismo ) )/2 = 2 graus de liberdade.

### 5.2.6 Conjunto completo das transformações de calibre de RG

A partir da teoria desenvolvida no capítulo (3) iremos agora deduzir o conjunto completo das transformações de calibre da teoria da Relatividade Geral no formalismo ADM.

Logo acima foi possível obter a expressão correta para a transformação de calibre da métrica induzida, porém essa relação não é suficiente para recuperar a invariância por difeomorfismos em toda a variedade  $M$ , uma vez que a métrica do espaço-tempo  $g_{\alpha\beta}$  depende tanto da métrica induzida na subvariedade  $\Sigma_t$ ,  $h_{ij}$ , quanto da função lapso temporal  $N$  e do vetor deslocamento espacial  $N^i$ . Esses dois últimos campos aparecem na teoria como multiplicadores de Lagrange, mais precisamente, comparando as eqs (5.17) e (5.29),  $N = -\dot{\lambda}^0$  e  $N^i = -\dot{\lambda}^i$ . Se tomarmos o modo-zero (5.42) como referência para a obtenção das transformações de calibre para os multiplicadores de Lagrange obtemos as seguintes transformações *on-shell*,

$$\delta N = \dot{\varepsilon}^0, \quad (5.46)$$

$$\delta N^i = \dot{\varepsilon}^i. \quad (5.47)$$

Como veremos, as expressões *on-shell* obtidas acima para a invariância de calibre da função lapso e do vetor deslocamento não concordam com as expressões *off-shell*.

<sup>5</sup> Há uma diferença de sinal no termo proporcional à  $\varepsilon^0$  que é atribuído à definição de curvatura extrínseca, que difere da nossa por um sinal global.

Como uma teoria “já parametrizada” poderíamos esperar que a evolução temporal dessas grandezas concordasse com a invariância de calibre na superfície de vínculos. Esse fato, que parece estranho a primeira vista, na verdade é uma consequência da aplicação do formalismo ADM e já havia sido estabelecido em outros trabalhos como em Refs. [96, 114] e principalmente em Ref. [115]. Ocorre que a necessária fixação arbitrária de superfícies “espaciais” e vetores “temporais”, bem como a fixação de um sistema de coordenadas arbitrário, são condições fortes e impõem alguma limitação. Um difeomorfismo aplicado a função lapso, por exemplo, em geral torce a hipersuperfície espacial e altera a direção do vetor normal, o que faz com que a teoria da RG canônica apresente uma estrutura de vínculos que não fornece um grupo verdadeiro [115].

Para encontrarmos as relações de transformação *off-shell* precisamos usar as eqs. (3.57) e (3.58),

$$0 = \frac{d\varepsilon^{n_i}}{dt} - \sum_{j \geq i-1} \varepsilon^{n_j} V_{n_j}^{n_i} + \eta^{n_1} \sum_{j \geq i} \varepsilon^{n_j} C_{n_1 n_j}^{m_i},$$

$$\delta_\varepsilon \lambda^{n_1} = \frac{d\varepsilon^{n_1}}{dt} - \sum_j \varepsilon^{n_j} V_{n_j}^{n_1} - \lambda^{m_1} \sum_j \varepsilon^{n_j} C_{m_1 n_j}^{n_1},$$

desenvolvidas anteriormente. No que segue usaremos a notação da Ref. [17] para denotar os parâmetros de calibre de modo a tornar a análise mais transparente, diferenciando claramente entre parâmetros de calibre dependentes e independentes. Para tanto renomearemos os vínculos Hamiltoniano e de difeomorfismos espaciais como

$$\omega_0 \rightarrow \phi_4, \omega_i \rightarrow \phi_{4+i}. \quad (5.48)$$

Para resolver as equações (3.57) e (3.58) precisamos encontrar as “constantes”<sup>6</sup> de estrutura resolvendo as eqs. 3.23 e ???. Além dos vínculos encontrados no formalismo simplético, devemos considerar também a existência dos vínculos primários derivados das eqs. (5.2) e (5.3),

$$\phi_0 := \Pi_N, \phi_i := \Pi_i. \quad (5.49)$$

Note, porém, que todas as constantes de estrutura  $C_{a_1 b}^c$  são nulas<sup>7</sup> As constantes de

<sup>6</sup> Em RG os vínculos não formam uma álgebra entre si, mas um algebróide[116]. Esse fato decorre justamente de o parêntese de Poisson entre os vínculos Hamiltonianos ser proporcional à métrica induzida.

<sup>7</sup> Se trata das constantes que acompanham o parênteses de Poisson entre  $\phi_0, \phi_i, \phi_4$  e  $\phi_{4+i}$ , enquanto a derivada funcional de todos esses vínculos em relação aos campos  $N$  e  $N^k$  é igual a zero.

estrutura não nulas são[115]

$$\begin{aligned}
V_4^{4+s}(x, x') &= N(x')h^{rs}(x')\partial'_r\delta(x-x') - \partial_r N h^{rs}\delta(x-x'), \\
V_4^4(x, x') &= N^i(x')\partial'_i\delta(x-x') \\
V_{4+s}^4(x, x') &= -\partial_s N(x)\delta(x-x') \\
V_{4+s}^{4+i}(x, x') &= -\delta_s N^i\delta(x-x') + N^l(x')\delta'_l\delta(x-x')\delta_s^i, \\
V_\mu^4(x, x') &= \delta_\mu^0\delta(x-x'), \\
V_\mu^{4+i} &= \delta_\mu^i\delta(x-x').
\end{aligned} \tag{5.50}$$

A equação básica que relaciona os parâmetros de calibre da teoria é, então,

$$0 = \frac{d\epsilon^{\rho_i}(x)}{dt} - \sum_{j \geq i-1} \int d^3x' \epsilon^{\rho_j}(x') V_{\rho_j}^{\rho_i}(x, x'), \tag{5.51}$$

com  $j \geq 2$ . Resolvendo essa equação obtemos

$$0 = \dot{\epsilon}^4 - \epsilon + \epsilon^{4+s}\partial_s N - N^i\partial_i\epsilon^4, \tag{5.52}$$

$$0 = \dot{\epsilon}^{4+i} - \epsilon^i + \epsilon^{4+s}\partial_s N^i - N^l\partial_l\epsilon^{4+i} - N h^{ri}\partial_r\epsilon^4 + \epsilon^4 h^{ri}\partial_r N. \tag{5.53}$$

Logo, das eqs. (5.46), (5.47), (5.52) e (5.53), temos que as transformações de calibre para os campos lapso temporal e deslocamento espacial são

$$\delta_{\epsilon^\alpha} N = \dot{\epsilon}^4 + \epsilon^{4+s}\partial_s N - N^i\partial_i\epsilon^4, \tag{5.54}$$

$$\delta_{\epsilon^\alpha} N^i = \dot{\epsilon}^{4+i} + \epsilon^{4+s}\partial_s N^i - N^l\partial_l\epsilon^{4+i} - N h^{ri}\partial_r\epsilon^4 + \epsilon^4 h^{ri}\partial_r N \tag{5.55}$$

que juntamente com para a transformação de calibre da métrica induzida,

$$\delta_{\epsilon^\alpha} h_{ij}(x) = -2\epsilon^4 K_{ij}(x) + \epsilon^{4+d}(x)\partial_d h_{ij}(x) + h_{jc}(x)\partial_i\epsilon^{4+c}(x) + h_{ic}(x)\partial_j\epsilon^{4+c}(x), \tag{5.45'}$$

compõem o conjunto completo das transformações de calibre da métrica em termos das variáveis ADM.

### 5.3 Teoria Canônica da Gravitação de Brans-Dicke

Através da teoria da relatividade geral de Einstein obtemos uma representação elegante e concisa da gravitação. O espaço e o tempo perdem seus status de entidades absolutas e se tornam quantidades dinâmicas que fluem e têm comportamento afetado pela distribuição de matéria na região.

A teoria de Einstein prova seu sucesso por medidas que não podiam ser obtidas pela gravitação newtoniana [95]. Mas, além disso, a relatividade geral abriu caminho para se estudar o universo como um sistema dinâmico, acabando por criar uma ciência crucial no esquema fundamental da descrição física da natureza.

Ironicamente, ou talvez como era de se esperar, a própria cosmologia passou a sugerir que a relatividade geral poderia não ser a descrição definitiva do espaço-tempo. Problemas como a singularidade do Big-Bang e o problema do horizonte e da planura trouxeram a atenção para teorias alternativas da gravitação. Dentre as alternativas surgidas estão as teorias escalares-tensoriais que estendem a teoria de Einstein ao introduzir campos adicionais e/ou dependências de tensores métricos de ordem maior que o escalar de Ricci.

Trataremos aqui a teoria de Brans-Dicke, protótipo das teorias escalares-tensoriais [9], que admite mais soluções que RG e é tendencialmente equivalente à primeira para campos fracos[117, 118]. Partimos da Lagrangiana da Brans-Dicke, fazemos a foliação 3 + 1 da teoria, aplicamos o algoritmo BW e finalizamos apresentando as transformações de calibre da teoria e fazendo a contagem dos graus de liberdade.

A foliação da teoria de Brans-Dicke que se segue foi obtida em Refs. [119–121] e agora é apresentada em seus detalhes. A análise simplética foi considerada primeiramente em nosso trabalho.

### 5.3.1 Forma simplética

Da a ação de Brans-Dicke [9, 122, 123]

$$S[g^{\mu\nu}, \phi] = \int_{\Sigma} d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2\kappa} \left( \phi {}^{(4)}R - \frac{\omega}{\phi} \partial_{\alpha} \phi \partial^{\alpha} \phi \right) - P(\phi) \right], \quad (5.56)$$

com  $\omega$  sendo uma constante e  $P(\phi)$  o campo escalar potencial. Essa ação não corresponde à teoria gravitacional escalar-tensorial mais geral, mas é suficientemente simples e interessante. Ela inclui a proposta original de Brans-Dicke ( $P(\phi) = 0$ ) [122], é dual à gravitação  $f(R)$ , se  $\omega = 0$  e é dual à gravitação de Palatini  $f(R)$ , se  $\omega = -3/2$  [9, 124]. Essa ação é conhecida por ter três graus de liberdade, se  $\omega \neq -3/2$ , e dois graus de liberdade, se  $\omega = -3/2$  [125]. No vácuo a teoria com  $\omega = -3/2$  tem simetria conforme e é possível mapear suas soluções nas soluções de RG[126]. A ação correspondente é uma reformulação de RG no vácuo e é um bom exemplo de como aplicar o formalismo, pois algumas sutilezas relevantes são desenvolvidas com mais detalhes no final dessa seção e no Apêndice E.

Por foliação 3 + 1, o escalar de Ricci  ${}^{(4)}R$  é dado por

$${}^{(4)}R = K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\nabla_c (n^c \nabla_a n^a - n^a \nabla_a n^c), \quad (5.57)$$

sendo  $K_{ab} = h_a{}^c h_b{}^a \nabla_c n_d$ ,  $K = K_{ab}h^{ab}$  e  ${}^{(3)}R$  o escalar de curvatura tridimensional, conforme definido no capítulo 4.

E podemos reescrever a ação de Brans-Dicke na forma foliada 3 + 1 como

$$L = \int d^4x N \sqrt{h} \left\{ \frac{1}{2\kappa} \phi \left[ {}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - K^2 - 2(n^c \nabla_c n^a - n^a \nabla_a n^c) \nabla_c \right] - \frac{\omega(\phi)}{\sqrt{\phi}} \left[ N^2 h^{ab} D_a \phi D_b \phi - (\dot{\phi} - N^a D_a \phi)^2 \right] - P(\phi) \right\}, \quad (5.58)$$

onde

$$\begin{aligned}
g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi &= g^{00}\dot{\phi}^2 - 2g^{0a}\dot{\phi}\partial_a\phi + g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi \\
&= -\frac{1}{N^2}\dot{\phi}^2 + 2\frac{N^a}{N^2}\dot{\phi}\partial_a\phi + \left(h^{ab} - \frac{N^aN^b}{N^2}\right)\partial_a\phi\partial_b\phi \\
&= \frac{1}{N^2}\left[N^2h^{ab}D_a\phi D_b\phi - \left(\dot{\phi}^2 - 2N^a\dot{\phi}D_a\phi + N^aN^bD_a\phi D_b\phi\right)\right] \\
&= \frac{1}{N^2}\left[N^2h^{ab}D_a\phi D_b\phi - \left(\dot{\phi} - N^aD_a\phi\right)^2\right], \tag{5.59}
\end{aligned}$$

e usando

$$\begin{aligned}
N(n^c\nabla_a n^a - n^a\nabla_a n^c)\nabla_c\phi &= N\nabla_a(n_b g^{ab})\left(\frac{t^c - N^c}{N}\right)\partial_c\phi - Nn^a\nabla_c\phi\nabla_a n^c \\
&= g^{ab}\nabla_a n_b(t^c - N^c)\partial_c\phi - Nn^a\nabla^a\phi\nabla_a(n_b g^{bc}) \\
&= (h^{ab} - n^a n^b)\nabla_a n_b(t^c\phi - N^c D_c\phi) - N(h^{bc} - n^b n^c)n^a\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^{ab}\nabla_a n_b(\dot{\phi} - N^a D_a\phi) - n^a n^b\nabla_a n_b Nn^c\nabla_c\phi \\
&\quad - Nn^a h^{bc}\nabla_a n_b\nabla_c\phi + Nn^a n^b n^c\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^a{}_c h^{bc}\nabla_a n_b(\dot{\phi} - N^a\nabla_a\phi) - Nh^{bc}n^a\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= h^{bc}K_{bc}(\dot{\phi} - N^a D_a\phi) - Nh^{bc}n^a\nabla_a n_b\nabla_c\phi \\
&= K(\dot{\phi} - N^a D_a\phi) - h^{ad}h^c{}_d\nabla_c\phi h^b{}_a\nabla_b N \\
&= -h^{ad}D_a N D_d\phi + K(\dot{\phi} - N^a D_a\phi), \tag{5.60}
\end{aligned}$$

onde usamos as relações  $K_{ab} = h_a{}^c\nabla_c n_b$ ,  $\dot{\phi} = t^a\partial_a\phi$  e  $h^{ab}n_b = 0$ . Portanto, a densidade de Lagrangiana é

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa}\left\{N\phi\left(R + K_{ab}K^{ab} - K^2\right) + 2h^{ab}D_a N D_b\phi - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega}{N\phi}\left[N^2h^{ab}D_a\phi D_b\phi - \left(\dot{\phi} - N^a D_a\phi\right)^2\right] - \right. \\
&\quad \left. - 2K(\dot{\phi} - N^a D_a\phi) - NP(\phi)\right\}. \tag{5.61}
\end{aligned}$$

Os campos originais da teoria são  $(g^{ab}, \phi) \equiv (N, N^a, h^{ab}, \phi)$ . Os momentos canônicos conjugados à função lapso temporal e ao vetor deslocamento espacial são, respectivamente,

$$\Pi_N = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}} = 0, \tag{5.62}$$

$$\Pi_a = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{N}^a} = 0. \tag{5.63}$$

O momento canonicamente conjugado à métrica induzida é

$$\begin{aligned}
\Pi_{ab} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{h}^{ab}} \\
&= \frac{\sqrt{h}}{2}\left[\phi(K_{ab} - Kh_{ab}) - \frac{h_{ab}}{N}(\dot{\phi} - N^c D_c\phi)\right], \tag{5.64}
\end{aligned}$$

onde utilizamos

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} K^{ab} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} \left[ \frac{1}{2N} (\dot{h}^{ab} - 2D^{(a} N^{b)}) \right] = \frac{1}{2N} \quad (5.65)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} K = \frac{\partial}{\partial \dot{h}^{ab}} h_{ab} K^{ab} = h_{ab} \frac{\partial K^{ab}}{\partial \dot{h}^{ab}} = \frac{h_{ab}}{2N}. \quad (5.66)$$

Finalmente, o momento conjugado ao campo  $\phi$  é dado por

$$\Pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ -2K + \frac{2\omega}{N\phi} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right]. \quad (5.67)$$

Tal como em relatividade geral, o momento conjugado para  $N$  e  $N^a$  são equações de vínculos triviais, ou seja,  $\Pi \approx \Pi_a \approx 0$ . Por outro lado, a partir da combinação de  $\Pi_h \equiv h_{ab} \Pi^{ab}$  e  $\Pi_\phi$ , encontramos que

$$\begin{aligned} \Pi_h - \phi \Pi_\phi &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \phi (K - 3K) - \frac{3}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] - \\ &\quad - \left[ -2K\phi + \frac{2\omega}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] \\ &= - \left( \frac{3 + 2\omega}{N} \right) \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi), \end{aligned} \quad (5.68)$$

também desaparece quando  $\omega = -\frac{3}{2}$ , que é o caso associado à  $f(R)$  Palatini [120]. Para  $\omega \neq -\frac{3}{2}$  obtemos o caso geral. Na exposição que se segue trataremos do caso geral.

Tomando

$$\begin{aligned} \Pi^{ab} \Pi_{ab} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \phi (K^{ab} - Kh^{ab}) - \frac{h^{ab}}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] \times \\ &\quad \times \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \phi (K_{ab} - Kh_{ab}) - \frac{h_{ab}}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] \\ &= \frac{h}{4\kappa^2} \left\{ \phi^2 (K^{ab} - Kh^{ab}) (K_{ab} - Kh_{ab}) - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \phi (K^{ab} - Kh^{ab}) \frac{h_{ab}}{N} + \phi (K_{ab} - Kh_{ab}) \frac{h^{ab}}{N} \right] (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h^{ab} h_{ab}}{N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right\} \\ &= \frac{h}{4\kappa^2} \left[ \phi^2 (K^{ab} K_{ab} - 2K^2 + 3K^2) - \right. \\ &\quad \left. - 2\phi (K^{ab} - Kh^{ab}) \frac{h_{ab}}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi^2 &= h_{ab}\Pi^{ab} h_{cd}\Pi^{cd} = \\
&= \frac{h}{4\kappa^2} \left[ \phi(K - 3K) - \frac{3}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] \left[ \phi(K - 3K) + \frac{3}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right] \\
&= \frac{h}{4\kappa^2} \left[ \phi^2(4K^2) + \frac{12K\phi}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \frac{9}{N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right]. \quad (5.70)
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi^2}{2} &= \frac{h}{4\kappa^2} \left\{ \phi^2 (K^{ab}K_{ab} + K^2) - \frac{2\phi}{N} (K - 3K) (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 - \left[ \phi^2(2K^2) + \frac{6K\phi}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{9}{2N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{h}{4\kappa^2} \left\{ \phi^2 \left( K^{ab}K_{ab} + K^2 + \frac{4\phi K}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right) + \frac{6}{2N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \phi^2(2K^2) + \frac{6K\phi}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) + \frac{9}{2N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right] \right\} \\
&= \frac{h}{4\kappa^2} \left[ \phi^2 (K^{ab}K_{ab} - K^2) - \frac{2\phi K}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) - \frac{3}{2N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right] \\
&= \frac{\sqrt{h}\phi}{2\kappa} \left[ \frac{\sqrt{h}\phi}{2\kappa} (K^{ab}K_{ab} - K^2) + \frac{\sqrt{h}K}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{3\sqrt{h}}{2N^2} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 \right], \quad (5.71)
\end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
\frac{2N\kappa}{\sqrt{h}\phi} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi^2}{2} \right) + \frac{3}{2N} \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ N\phi (K^{ab}K_{ab} - K^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2K (\dot{\phi} - N^c D_c \phi) \right]. \quad (5.72)
\end{aligned}$$

De modo que a Lagrangiana pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left\{ N \left[ \phi R + \frac{4\kappa^2}{h\phi} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi^2}{2} \right) \right] + (3 + 2\omega) \frac{(\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2}{2N\phi} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{N\omega}{\phi} D^a \phi D_a \phi D^b \phi D_b N - NV(\phi) \right\} + D^c \phi D_c N. \quad (5.73)
\end{aligned}$$

Mas, notemos que

$$(\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2 = \left[ -\frac{2\kappa}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3 + 2\omega} \right) (\Pi_h - \phi \Pi_\phi) \right]^2. \quad (5.74)$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} (3 + 2\omega) \frac{(\dot{\phi} - N^c D_c \phi)^2}{2N\phi} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \frac{(3 + 2\omega)}{2N\phi} \frac{4\kappa^2}{h} \left( \frac{N}{3 + 2\omega} \right)^2 (\Pi_h - \phi \Pi_\phi)^2 \\
&= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \frac{1}{(3 + 2\omega)} \frac{4\kappa^2}{h} \frac{N}{2\phi} (\Pi_h - \phi \Pi_\phi)^2 \quad (5.75)
\end{aligned}$$

E a Lagrangiana pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left\{ N \left[ \phi R + \frac{4\kappa^2}{h\phi} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi_h^2}{2} \right) \right] - \right. \\ & - \frac{N\omega}{\phi} D_c\phi D^c\phi - NP(\phi) + \\ & \left. + \frac{2N}{h\phi} \frac{1}{(3+2\omega)} (\Pi_h - \phi\Pi_\phi)^2 \right\} + \\ & + \frac{2\sqrt{h}}{2} D_c\phi D^c N . \end{aligned} \quad (5.76)$$

Agora vamos encontrar a Hamiltoniana da teoria

$$H = \int (p\dot{q}(q,p) - L) d^3x . \quad (5.77)$$

Primeiro, calculamos  $\dot{h}_{ab}$ . Tomando o traço de seu momento conjugado

$$\begin{aligned} \Pi^a{}_a &= \frac{h}{2\kappa} \left[ 2\phi(K - 3K) - \frac{3}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) \right] \\ &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \frac{3}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) \right] , \end{aligned} \quad (5.78)$$

resultando

$$-K = \frac{\Pi^a{}_a}{\phi\sqrt{h}} + \frac{3}{2} \frac{(\dot{\phi} - N^c D_c\phi)}{N\phi} , \quad (5.79)$$

também

$$\frac{2\Pi^{ab}}{\sqrt{h}} = \phi (K^{ab} - Kh^{ab}) - \frac{h^{ab}}{N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) , \quad (5.80)$$

obtendo

$$\frac{2\Pi^{ab}}{\phi\sqrt{h}} + \frac{h^{ab}}{\phi N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) = K^{ab} - Kh^{ab} . \quad (5.81)$$

Usando (5.79), temos

$$\begin{aligned} K^{ab} &= \frac{2\Pi^{ab}}{\phi\sqrt{h}} + \frac{h^{ab}}{\phi N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) - \frac{\Pi^c{}_c h^{ab}}{\phi\sqrt{h}} - \frac{3h^{ab}}{2N\phi} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) \\ &= \frac{2}{\phi\sqrt{h}} \left( \Pi^{ab} - \frac{1}{2} \Pi^c{}_c h^{ab} \right) - \frac{h^{ab}}{2\phi N} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) . \end{aligned} \quad (5.82)$$

Da relação  $\dot{h}_{ab} = 2NK_{ab} + 2D_{(a}N_{b)}$ ,

$$\dot{h}_{ab} = \frac{2N}{\phi} \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^c{}_c h_{ab} \right) - \frac{h_{ab}}{\phi} (\dot{\phi} - N^c D_c\phi) + 2D_{(a}N_{b)} , \quad (5.83)$$

e usando  $\dot{\phi} - N^c D_c\phi = -\left(\frac{N}{3+2\omega}\right) \frac{2}{\sqrt{h}} (h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_\phi)$ , temos

$$\dot{h}_{ab} = \frac{2N}{\phi} \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \Pi_{ab} - \frac{1}{2} \Pi^c{}_c h_{ab} \right) + \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) \frac{h_{ab}}{\phi} (h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_\phi + 2D_{(a}N_{b)}) \quad (5.84)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} &= \frac{2N}{\phi} \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right) - \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) (h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_\phi) \frac{\Pi_h}{\phi} + 2\Pi^{ab}D_{(a}N_{b)}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Também

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) (h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_\phi) + N^a D_a \phi \quad (5.86)$$

e

$$\dot{\phi}\Pi_\phi = \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) (h_{ab}\Pi^{ab} - \phi\Pi_\phi) \Pi_\phi + \Pi_\phi N^a D_a \phi, \quad (5.87)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{\phi}\Pi_\phi &= \frac{2N}{\phi} \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right) + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} + \\ &\quad + N^a D_a \phi \Pi_\phi - \frac{2}{\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) (h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_\phi) \left( \frac{\Pi_h}{\phi} - \Pi_\phi \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{h}} \frac{2N}{\phi} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{1}{2} (\Pi^c{}_c)^2 \right) + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab} + \\ &\quad + N^c D_c \phi \Pi_\phi + \frac{2}{\phi\sqrt{h}} \left( \frac{N}{3+2\omega} \right) (h_{cd}\Pi^{cd} - \phi\Pi_\phi)^2. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Logo, a densidade Hamiltoniana é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{h}_{ab}\Pi^{ab} + \dot{\phi}\Pi_\phi - \mathcal{L} \\ &= \left( \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \right) N \left[ -\phi R + \frac{4\kappa^2}{h\phi} \left( \Pi^{ab}\Pi_{ab} - \frac{\Pi_h^2}{2} \right) + \frac{\omega}{\phi} D_c \phi D^c \phi + \right. \\ &\quad \left. + P(\phi) + \frac{2}{h\phi(3+2\omega)} (\Pi_h - \phi\Pi_\phi)^2 \right] - \frac{\sqrt{h}}{2} \times 2D_c \phi D^c N + \\ &\quad + N^c \Pi_\phi D_c \phi + 2D_{(a}N_{b)}\Pi^{ab}. \end{aligned} \quad (5.89)$$

### 5.3.2 Brans-Dicke com $\omega \neq -3/2$

A densidade Lagrangiana linearizada nas velocidades é[127],

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \dot{h}_{ij}\Pi^{ij} + \dot{\phi}\Pi_\phi + \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \left( \phi {}^{(3)}R - \frac{2\kappa^2}{h\phi} (2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2) - \frac{\omega}{\phi} D_i \phi D^i \phi - \right. \\ &\quad \left. - 2D_i D^i \phi - \frac{2\kappa^2}{h\phi(3+2\omega)} (\Pi - \phi\Pi_\phi)^2 - 2P(\phi) \right) + N^j (2D^i \Pi_{ij} - \Pi_\phi D_j \phi). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Para o vetor simplético escolhemos a seguinte forma em que campos que não aparecem no setor cinético são ignorados,

$$\bar{\xi}^{(0)} = (N \quad N^i \quad h_{ij} \quad \Pi^{ij} \quad \phi \quad \Pi_\phi), \quad (5.91)$$

$$\bar{\mathbf{a}}^{(0)} = (0 \quad 0_k \quad \Pi^{kl} \quad 0_{kl} \quad \Pi_\phi \quad 0). \quad (5.92)$$

Para esses vetores calculamos

$$f_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 I_{ij}^{kl} + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 \delta^{(3)}(x - x') - \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 I_{kl}^{ij} - \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 \delta^{(3)}(x - x'). \quad (5.93)$$

Os modos-zero de  $\bar{\mathbf{f}}$  são vetores  $\bar{\nu}$  tais que todos seus componentes são nulos, exceto por  $\bar{\nu}^1$  e  $\bar{\nu}^2$ , que assumem valores arbitrários. Encontramos quatro modos-zero independentes que levam aos seguintes vínculos,

$$\begin{aligned} \omega_0 = & \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left( -\phi^{(3)}R + \frac{2\kappa^2}{h\phi} (2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2) + \frac{\omega}{\phi} D_i\phi D^i\phi + 2D_i D^i\phi + \right. \\ & \left. + \frac{2\kappa^2}{h\phi(3+2\omega)} (\Pi - \phi\Pi_\phi)^2 + 2P(\phi) \right), \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\omega_j = -2D^i\Pi_{ij} + \Pi_\phi D_j\phi. \quad (5.95)$$

A Lagrangiana da primeira iteração, tendo removido os vínculos do potencial simplético, fica

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{h}_{ij}\Pi^{ij} + \dot{\phi}\Pi_\phi + \dot{\lambda}^0\omega_0 + \dot{\lambda}^i\omega_i. \quad (5.96)$$

O potencial da primeira iteração é zero, portanto  $\omega_0$  e  $\omega_i$  são todos os vínculos da teoria.

O vetor simplético e a 1-forma simplética da primeira iteração são tomadas como sendo

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^{(1)} &= \left( h_{ij} \quad \Pi^{ij} \quad \phi \quad \Pi_\phi \quad \lambda^0 \quad \lambda^i \right) \\ \bar{\mathbf{a}}^{(1)} &= \left( \Pi^{kl} \quad 0_{kl} \quad \Pi_\phi \quad 0 \quad \omega_0 \quad \omega_k \right). \end{aligned} \quad (5.97)$$

A estrutura pré-simplética é, então,

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\omega'}{\delta\mathbf{h}} \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\mathbf{\Pi}} & \frac{\delta\omega'}{\delta\mathbf{\Pi}} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^{(3)} & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\phi} & \frac{\delta\omega'}{\delta\phi} \\ 0 & 0 & \delta^{(3)} & 0 & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\Pi_\phi} & \frac{\delta\omega'}{\delta\Pi_\phi} \\ -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{h}'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{\Pi}'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\phi'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\Pi'_\phi} & 0 & 0 \\ -\frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{h}'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{\Pi}'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\phi'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\Pi'_\phi} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.98)$$

com  $\delta^{(3)} \equiv \delta^{(3)}(x - x')$ . A matriz acima  $\bar{\mathbf{f}}$  pode ser prontamente vista como uma extensão da eq. (5.33), contendo apenas modos-zero na superfície de vínculos. Seguindo os passos

analogamente, os modos-zero fracos devem ser dados por

$$\bar{\nu}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\delta\Omega_0}{\delta\Pi} & -\frac{\delta\Omega_0}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\Omega_0}{\delta\Pi_\phi} & -\frac{\delta\Omega_0}{\delta\phi} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.99)$$

$$\bar{\nu}_p = \begin{pmatrix} \frac{\delta\Omega_p}{\delta\Pi} & -\frac{\delta\Omega_p}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\Omega_p}{\delta\Pi_\phi} & -\frac{\delta\Omega_p}{\delta\phi} & 0 & -\mathbf{1}_p \end{pmatrix}. \quad (5.100)$$

De modo a verificar que os vetores acima satisfazem  $\int \bar{\nu} \cdot \bar{\mathbf{f}} d^3x \approx 0$ , precisamos usar a álgebra de vínculos de Brans-Dicke. É suficiente dizer que a matriz de Dirac para Brans-Dicke, tal como em RG, é  $\{\Omega_\mu, \omega_\nu\} \approx 0$  (ver, por exemplo, Ref. [127]). Por outro lado, mesmo sem conhecer a álgebra de Brans-Dicke, mas sabendo que sua ação é um escalar, a última condição teria que ser verdadeira, caso contrário não existiria simetria de calibre na superfície de vínculos e, portanto, não haveria invariância por difeomorfismos.

A teoria de Brans-Dicke com  $\omega \neq -3/2$  tem três graus de liberdade. De fato, da eq. (2.103):  $(18 - 2 \times 4 - 4)/2 = 3$  graus de liberdade.

As transformações de calibre são encontradas a partir do do modo-zero generalizado, nada mais que uma extensão da eq. (5.42), sendo

$$\bar{\nu}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi} & -\frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi_\phi} & -\frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\phi} & -\varepsilon^0 & -\boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (5.101)$$

A transformação de calibre para os campos  $\mathbf{h}$  e  $\phi$  são encontradas, respectivamente, a partir da primeira e da terceira componentes de  $\bar{\nu}_\varepsilon$ , a saber,

$$\begin{aligned} \delta_G h_{ij} &= \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi^{ij}} \\ &= 2\kappa\varepsilon^0 K_{ij} + \frac{2\kappa\varepsilon^0}{\sqrt{h}\phi(3+2\omega)}(\Pi - \phi\Pi_\phi)h_{ij} + 2D_{(i}\varepsilon_{j)} \\ &= 2\kappa\varepsilon^0 K_{ij} + \frac{\varepsilon^0}{\phi N}(N^l D_l \phi - \dot{\phi})h_{ij} + 2D_{(i}\varepsilon_{j)}, \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} \delta_G \phi &= \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi_\phi} \\ &= \frac{\varepsilon^0}{\phi N}(N^l D_l \phi - \dot{\phi})\phi + \varepsilon^i D_i \phi. \end{aligned} \quad (5.103)$$

As transformações de calibre para  $\Pi_{ij}$  e  $\Pi_\phi$  podem ser obtidas da mesma maneira. Expressões para a transformação de calibre na teoria de Brans-Dicke com um conjunto diferente de variáveis, apresentando uma simetria tipo  $SU(2)$ , são encontradas em Ref. [127]. Similarmente ao caso de RG, a invariância por difeomorfismos na superfície  $\Sigma_t$  pode ser imediatamente verificada pelos últimos termos das eqs. (5.102, 5.103), ambas derivadas de Lie.

Procedendo a contagem dos campos independentes da teoria temos (22 (campos iniciais) – 8 ( $\nu_1, \nu_{2p}, \nu_3, \nu_{4p}$ ) – 4 ( $\nu_5, \nu_{6p}$ ) – 4 (1 vínculo hamiltoniano mais 3 vínculos de difeomorfismo) )/2 = 3 graus de liberdade.

### 5.3.3 Brans-Dicke com $\omega = -3/2$

O caso com  $w = -3/2$  deve ter um grau de liberdade a menos que o caso anterior com  $w \neq 3/2$ , veja Refs. [9, 126]). De fato, da eq. (5.90) podemos verificar a presença de um novo vínculo,

$$\eta_1 \equiv \Pi - \Pi_\phi \phi = 0. \quad (5.104)$$

Na linguagem de Dirac esse é um vínculo primário, pois vem diretamente da definição dos momentos, assim, ou resolvemos o vínculos e eliminamos um dos campos, ou o vínculo deve ser inserido na Lagrangiana. Para adicionarmos à Lagrangiana, precisamos seguir as mesmas regras que vimos usando no formalismo até agora, isto é, precisamos adicionar o vínculos proporcionalmente a um multiplicado de Lagrange derivado no tempo. Chamamos a atenção para o fato de que usar um multiplicador de Lagrange sem a derivada temporal é incompatível com o formalismo simplético da forma como o estamos adotando, como indicamos nas conclusões e demonstramos no Apêndice E.

A Lagrangiana linearizada nas velocidades é [125, 127]),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} = & \dot{h}_{ij}\Pi^{ij} + \dot{\phi}\Pi_\phi + \dot{\zeta}_1\eta_1 + N^j \left( 2D^i\Pi_{ij} - \Pi_\phi D_j\phi \right) \\ & + N \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left( \phi^{(3)}R - \frac{2\kappa^2}{h\phi} \left( 2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2 \right) + \frac{3}{2\phi} D_i\phi D^i\phi - 2D_i D^i\phi - 2P(\phi) \right). \end{aligned} \quad (5.105)$$

O vetor simplético e a 1-forma canônica são escritos como

$$\bar{\xi}^{(0)} = \left( N \quad N^i \quad h_{ij} \quad \Pi^{ij} \quad \phi \quad \Pi_\phi \quad \zeta_1 \right), \quad (5.106)$$

$$\bar{a}^{(0)} = \left( 0 \quad 0_k \quad \Pi^{kl} \quad 0_{kl} \quad \Pi_\phi \quad 0 \quad \eta_1 \right). \quad (5.107)$$

Donde obtemos

$$\frac{\delta a'_\beta}{\delta \xi^\alpha} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \mathbf{I} + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 \delta^{(3)}(x - x') + \left( \delta_\alpha^3 \mathbf{\Pi} + \delta_\alpha^4 \mathbf{h} - \delta_\alpha^5 \Pi_\phi - \delta_\alpha^6 \phi \right) \delta_\beta^7 \delta^{(3)}(x - x'). \quad (5.108)$$

Assim, para satisfazer a relação  $(\bar{\nu} \cdot \bar{\mathbf{f}})_\beta = 0$ , encontramos as seguintes equações (uma para cada valor diferente de  $\beta$ ),

$$0 = \nu^4 - \nu^7 \mathbf{\Pi}, \quad (5.109)$$

$$0 = \nu^3 + \nu^7 \mathbf{h}, \quad (5.110)$$

$$0 = \nu^6 + \nu^7 \Pi_\phi, \quad (5.111)$$

$$0 = -\nu^5 + \nu^7 \phi, \quad (5.112)$$

$$0 = \nu^3 \cdot \mathbf{\Pi} + \nu^4 \cdot \mathbf{h} - \nu^5 \Pi_\phi - \nu^6 \phi. \quad (5.113)$$

As quatro primeiras equações fixam quatro componentes de  $\bar{\nu}$  como funções de  $\nu^7$ . A quinta equação não é independente e pode ser encontrada a partir das quatro equações anteriores. Assim, existem quatro modos-zero linearmente independentes para serem encontrados, denotados por  $\nu_\sigma^\alpha$ , com  $\sigma = 1, 2, 3$ , a lista completa é

$$\bar{\nu}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.114)$$

$$\bar{\nu}_{2_p} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.115)$$

$$\bar{\nu}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathbf{h} & \mathbf{\Pi} & \phi & -\Pi_\phi & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.116)$$

Os modos-zero  $\bar{\nu}_1$  e  $\bar{\nu}_2$ , da equação de consistência, fornecem respectivamente os seguintes vínculos,

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left( \phi {}^{(3)}R - \frac{2\kappa^2}{h\phi} (2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2) + \frac{3}{2\phi} D_i\phi D^i\phi - 2D_i D^i\phi - 2P(\phi) \right), \quad (5.117)$$

$$\omega_i = -2D^k \Pi_{ki} + \Pi_\phi D_i\phi. \quad (5.118)$$

O modo-zero  $\nu_3$  fornece o vínculo

$$\begin{aligned} 0 &= \int \left( -h_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} + \Pi^{ij} \frac{\delta}{\delta \Pi^{ij}} + \phi \frac{\delta}{\delta \phi} - \Pi_\phi \frac{\delta}{\delta \Pi_\phi} \right) V d^3x \\ &\approx \int N \sqrt{h} (-2P + \phi \partial_\phi P) d^3x. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Mais detalhes das contas acima podem ser encontrados no Apêndice F. Da equação acima, identificamos um novo vínculo<sup>8</sup>

$$\eta_2 = -2P + \phi \partial_\phi P. \quad (5.120)$$

Cuja solução é simplesmente

$$P = \lambda \phi^2, \quad (5.121)$$

onde  $\lambda$  é uma constante adimensional. Note que  $\lambda$  não é um escalar de massa. De fato, fazendo a redefinição  $\phi = \varphi^2$  de modo a colocar o termo cinético do campo escalar no formato canônico na Lagrangiana (5.56), obtemos o conhecido potencial invariante por transformações conformes  $\lambda \varphi^4$ , sendo o único com uma constante de acoplamento adimensional. Nenhum outro campo escalar potencial pode ser feito compatível com invariância conforme, uma vez que isso introduziria uma constante dimensional levando a existência de uma escala fundamental na teoria. Essa é uma importante observação para um resultado encontrado mais abaixo.

Não há porquê manter o vínculo  $\eta_2$  em sua forma explícita, uma vez que não há o que se encontrar além da solução acima. Logo, simplesmente eliminaremos o vínculo. O potencial escalar  $P$  é, de agora em diante, dado pela eq. (5.121).

<sup>8</sup> Esse vínculos pode ser encontrado diretamente pela variação da ação (e.g., [9]).

A Lagrangiana da primeira iteração, com os vínculos removidos do potencial simplético, é

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{h}_{ij}\Pi^{ij} + \dot{\phi}\Pi_\phi + \dot{\lambda}^0\omega_0 + \dot{\lambda}^i\omega_i + \dot{\zeta}_1\eta_1. \quad (5.122)$$

Como o potencial desapareceu nessa iteração, nenhum vínculo novo pode ser encontrado. O vetor simplético e a 1-forma simplética são escritos como

$$\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \left( h_{ij} \quad \Pi^{ij} \quad \phi \quad \Pi_\phi \quad \zeta_1 \quad \lambda^0 \quad \lambda^i \right), \quad (5.123)$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}^{(1)} = \left( \Pi^{kl} \quad 0_{kl} \quad \Pi_\phi \quad 0 \quad \eta_1 \quad \omega_0 \quad \omega_k \right). \quad (5.124)$$

A estrutura simplética é

$$\bar{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 & \mathbf{\Pi} & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\omega'}{\delta\mathbf{h}} \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h} & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\mathbf{\Pi}} & \frac{\delta\omega'}{\delta\mathbf{\Pi}} \\ 0 & 0 & 0 & -\delta^{(3)} & -\Pi_\phi & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\phi} & \frac{\delta\omega'}{\delta\phi} \\ 0 & 0 & \delta^{(3)} & 0 & -\phi & \frac{\delta\omega'_0}{\delta\Pi_\phi} & \frac{\delta\omega'}{\delta\Pi_\phi} \\ -\mathbf{\Pi}' & -\mathbf{h}' & \Pi'_\phi & \phi' & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{h}'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{\Pi}'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\phi'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\Pi'_\phi} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{h}'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{\Pi}'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\phi'} & -\frac{\delta\omega}{\delta\Pi'_\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como esse modelo vem de uma ação invariante sob transformações de coordenadas, já é sabido que deve existir um modo-zero, parametrizado por  $\varepsilon^\mu$ , que estende a eq. (5.42) (ver também a eq. (5.101)). De fato, usando que  $\{\Omega_\mu, \omega'_\nu\} \approx 0$ , é imediato verificar que o seguinte vetor é um modo-zero na superfície de vínculos,

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_{\lambda\varepsilon} = \left( \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\mathbf{\Pi}} \quad -\frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\mathbf{h}} \quad \frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\Pi_\phi} \quad -\frac{\delta\Omega_\varepsilon}{\delta\phi} \quad 0 \quad -\varepsilon^0 \quad -\boldsymbol{\varepsilon} \right). \quad (5.125)$$

Uma vez que a superfície de vínculos é formada por cinco vínculos independentes, podem existir até cinco modos-zero linearmente independentes. Considerando as primeiras cinco colunas de  $\bar{\boldsymbol{f}}$ , podemos encontrar um candidato a modo-zero adicional [ver também a eq. (5.116)],

$$\bar{\boldsymbol{\nu}}_\eta = \eta \left( -\mathbf{h} \quad \mathbf{\Pi} \quad \phi \quad -\Pi_\phi \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right), \quad (5.126)$$

onde  $\eta$  é um campo infinitesimal arbitrário. Para verificar que  $\bar{\boldsymbol{\nu}}_\eta$  é de fato um modo-zero fraco de  $\bar{\boldsymbol{f}}$ , usamos as mesmas contas derivadas no Apêndice F.

Contando o número de graus de liberdade para a teoria de Brans-Dicke com  $\omega = -3/2$ , usamos a eq. (2.103):  $(19 - 2 \times 5 - 5)/2 = 2$  graus de liberdade.

As transformações de calibre para  $\mathbf{h}$  e  $\phi$  agora dependem de cinco parâmetros ( $\varepsilon^\mu$  and  $\eta$ ) e são respectivamente encontradas pelas primeira e terceira componentes do modo-zero generalizado,  $\bar{\nu}_\varepsilon + \bar{\nu}_\eta$ , portanto,

$$\begin{aligned}\delta_G h_{ij} &= \frac{\delta \Omega_\varepsilon}{\delta \Pi^{ij}} - \eta h_{ij} \\ &= 2k\varepsilon^0 K_{ij} + 2D_{(i}\varepsilon_{j)} - \eta h_{ij}.\end{aligned}\quad (5.127)$$

$$\begin{aligned}\delta_G \phi &= \frac{\delta \Omega_\varepsilon}{\delta \Pi_\phi} + \eta \phi \\ &= \varepsilon^i D_i \phi + \eta \phi.\end{aligned}\quad (5.128)$$

Mostrando que no presente caso particular de Brans-Dicke, além da simetria de calibre relacionada à transformações de coordenadas, parametrizadas por  $\varepsilon^\mu$ , também aparece uma transformação de calibre conforme parametrizada por  $\eta$ .



## 6 Ação de Holst-Dirac

### 6.1 Introdução

A introdução do formalismo de tétrades utilizando-se variáveis de Ashtekar tem sido fundamental na pesquisa de teorias de gravitação quântica nos últimos anos. Essa abordagem reescreve o espaço de fase em termos de uma teoria de calibre  $SU(2)$  tipo Yang-Mills, útil no desenvolvimento de uma formulação independente de fundo, através da introdução de conexões de Ashtekar.

Um dos méritos em relação à formulação de Ashtekar é a obtenção de uma equação simples para o vínculo Hamiltoniano, em contraste com a complicada equação de Wheeler-Dewitt na formulação ADM tradicional, entretanto complicadas “condições de realidade” devem ser resolvidas para obter uma teoria real em termos das variáveis de Ashtekar com espaços-tempo de assinaturas Lorentzianas [128, 129]. Essas questões foram tratadas por Barbero através da introdução de conexões  $SU(2)$ , eliminando equações de condição de realidade, embora para isso seja necessária uma escolha apropriada do vínculo Hamiltoniano resultando numa expressão mais complicada. Ambas abordagens foram generalizados e unificados pelo tratamento dado por Immirzi pela introdução do parâmetro  $\beta$  através da transformação canônica  $(P_i^a, K_a^i) \rightarrow (P_i^a, A_a^i -: \Gamma_a^i + \beta K_a^i)$  [130, 131]. Em sua formulação  $\beta$  imaginário equivale à formulação de Ashtekar, enquanto  $\beta = \pm 1$  equivale à formulação de Barbero.

Holst generaliza os resultados anteriores ao introduzir sua formulação Lagrangiana da teoria Ashtekar-Barbero-Immirzi, realizada a partir da generalização da ação de Hilbert-Palatini, conhecida como ação de Holst [132]. A modificação de Holst é “topológica” no vácuo, mas não na presença de acoplamento mínimo a campos fermiônicos. Nesse caso ocorre o surgimento de termos de torção na II Equação de Estrutura de Cartan, com a equação de Bianchi assumindo a forma geral  $R_b^a \wedge e^b = dT^a + \omega_b^a \wedge T^b$ , o que implica no aparecimento de termos proporcionais ao parâmetro de Immirzi nas equações de campo de Einstein, de modo que não mais teríamos Relatividade Geral como descrição clássica.

De fato espera-se que seja possível encontrar uma ação do tipo Holst-Dirac que leve à uma teoria efetiva compatível com a ação de Einstein-Cartan quando acoplada com férmions. Motivado por esse problema, Mercuri propôs uma ação de Holst não minimamente acoplada a campos fermiônicos em que os termos adicionais em relação à ação de Einstein-Cartan resultam em uma divergência total, equivalente ao invariante topológico de Nieh-Yan. A análise canônica da ação proposta é realizada em [105, 133, 134].

A análise simplética nos termos de Faddeev-Jackiw foi realizada para teorias de

gravitação com parâmetros de Immirzi como foco na obtenção dos parênteses generalizados [135, 136], com análises simplética e à la Dirac sempre coincidentes, além de análises canônicas pelo método de Dirac [137], embora possam aparecer diferenças quanto ao conjunto de vínculos da teoria [136]. Também existem análises simpléticas de teorias com campos de spin semi-inteiro não acopladas à gravidade [50]. Entretanto, a nosso entender, não existem análises canônicas sistematizadas de teorias de gravitação acopladas à férmions utilizando-se métodos simpléticos. A princípio não está claro se o formalismo simplético não apresenta particularidades em relação ao de Dirac para o problema em questão. A teoria de Holst-Dirac é marcada pela presença de termos de torção, o que levanta a questão de como torções no espaço-tempo invariante por difeomorfismos podem afetar a geometria do espaço simplético descrito a partir da estrutura simplética no algoritmo BW. Outra questão de possível divergência entre diferentes análises canônicas dessa teoria é acerca do cálculo das simetrias de calibre geradas pelo vínculo Hamiltoniano, que no caso da análise de Dirac é resolvido somente a partir da Teoria Quântica de Lacetes. Nossa proposta é apresentar um tratamento simplético, a saber o formalismo de Faddeev-Jackiw no algoritmo Barcelos Neto-Wotzasek, de maneira sistemática da teoria gravitacional de Holst-Dirac e estabelecer o procedimento correto para o conjunto de teorias tecnicamente próximas a esta.

Nesse capítulo introduzimos o formalismo de tetrades usado na descrição de teorias de gravitação e conduzimos a análise simplética da ação de Holst-Dirac. O formalismo é apresentado de forma geral junto com seus principais resultados geométricos. Demonstramos como o formalismo de tetrades é usado em Relatividade Geral comum e na descrição de Palatini, nesse contexto conhecida como ação de Holst. Em seguida esse formalismo é estendido para o caso em que temos acoplamento mínimo de férmions na ação de Holst. É apresentado o desenvolvimento do formato canônico, isto é, com foliação tipo ADM, da ação de Holst-Dirac aplicando-se o formalismo simplético, onde tratamos os vínculos da teoria, encontramos a estrutura pré-simplética, obtemos a expressão de transformação de calibre para os principais campos da teoria e fazemos a contagem de graus de liberdade.

## 6.2 Gravitação com Tétrades

### 6.2.1 Tétrades e Conexões

Tétrades. Em uma base coordenada,  $T_p M$  é formada por  $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$  e  $T_p^* M$  por  $\{dx^\mu\}$ . Se a variedade  $M$  é dotada de uma métrica, podemos escolher uma base alternativa. Considere a combinação linear

$$\hat{e}_I = e_I^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad (6.1)$$

onde  $\det e_I^\mu > 0$ . Definimos os campos *tétrades*  $e_I^\alpha$  de modo que  $\hat{e}_I$  seja ortonormal com respeito à  $g$ ,

$$g(\hat{e}_I, \hat{e}_J) = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta = \eta_{IJ} , \quad (6.2)$$

onde  $e_0^\alpha$  é um vetor tipo-tempo e  $e_i^\alpha$  são vetores tipo-espaço, com  $i = 1, \dots, 3$ . Podemos interpretar as tétrades como campos vetoriais duplos, ou melhor, um campo vetorial no fibrado tangente do espaço-tempo assumindo valores em um espaço Minkowskiano interno.

Como corolário de (6.2) temos também

$$\eta^{IJ} e_I^\alpha e_{\beta J} = \delta_\beta^\alpha \quad (6.3)$$

com  $e_{\beta J} = g_{\beta\gamma} e_J^\gamma$ . Chamamos de co-tétrade o campo  $e_\alpha^I$  dado por

$$e_\alpha^I = \eta^{IJ} e_J^\beta g_{\alpha\beta} . \quad (6.4)$$

Formalmente, seja  $V_p$  o espaço tangente  $V_p = T_p M$  em cada ponto e seja  $M_p$  o espaço de Minkowski interno em cada ponto  $p$ . A tétrade é uma isometria

$$\begin{aligned} e_I^\alpha(p) : M_p &\longrightarrow V_p \\ v^I &\mapsto e_I^\alpha(p) v^I \end{aligned} , \quad (6.5)$$

com mapa inverso

$$e_\alpha^I(p) : V_p \rightarrow M_p . \quad (6.6)$$

Para cada campo tensorial  $T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$

$$T_{J_1 \dots J_m}^{I_1 \dots I_n} = e_{\alpha_1}^{I_1} \dots e_{\alpha_n}^{I_n} e_{J_1}^{\beta_1} \dots e_{J_m}^{\beta_m} . \quad (6.7)$$

**Conexões** Para um campo vetorial  $v^I$  no espaço interno definimos a derivada covariante

$$\mathcal{D}_\alpha = \nabla_\alpha v^I + \omega_{\alpha J}^I v^J , \quad (6.8)$$

onde a 1-forma de conexão-spin  $\omega_{\alpha J}^I$  é análoga a  $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ . Dada uma transformação de Lorentz geral  $\Lambda_J^I$ , a derivada covariante  $\mathcal{D}$  deve satisfazer

$$\mathcal{D}'_\alpha v^{I'} = \Lambda_J^{I'} \mathcal{D}_\alpha v^J , \quad (6.9)$$

se  $v^{I'} = \Lambda_J^{I'} v^J$  e  $\mathcal{D}'_\alpha v^{I'} = \nabla_\alpha v^{I'} + \omega'_{\alpha J'}^{I'} v^{J'}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\alpha (\Lambda_J^{I'} v^J) &= \Lambda_J^{I'} \nabla_\alpha v^J + (\omega'_{\alpha J'}^{I'} \Lambda_K^{J'} + \nabla_\alpha \Lambda_K^{J'}) v^K \\ &= \Lambda_J^{I'} \left\{ \nabla_\alpha v^J + [(\Lambda^{-1})_{L'}^J \omega'_{\alpha M'}^{L'} \Lambda_K^{M'} + (\Lambda^{-1})_{L'}^I \nabla_\alpha \Lambda_K^{M'}] \right\} \\ &= \Lambda_J^{I'} \mathcal{D}_\alpha v^J , \end{aligned} \quad (6.10)$$

desde que a 1-forma de conexão-spin transforma como

$$\omega_{\alpha}^{JK} = (\Lambda^{-1})_{L'}^J \omega'_{\alpha M'}^{L'} \Lambda_K^{M'} + (\Lambda^{-1})_{L'}^I \nabla_{\alpha} \Lambda_K^{M'} . \quad (6.11)$$

Logo, 1-forma de conexão-spin não é um tensor, assim com os coeficientes de Christoffel não são tensores.

Exemplo (Métrica de Minkowski) Exigimos que

$$0 = \mathcal{D}_{\alpha} \eta_{IJ} = \nabla_{\alpha} \eta_{IJ} - \omega_{\alpha}^K{}_I \eta_{KJ} - \omega_{\alpha}^K{}_J \eta_{IK} = -\omega_{\alpha JI} - \omega_{\alpha IJ} . \quad (6.12)$$

1-forma de conexões que deixam a métrica de Minkowski invariante devem ser anti-simétricas em seus índices internos. Portanto, transporte paralelo ao longo de uma curva é uma transformação de Lorentz:  $v^{\alpha} \omega_{\alpha J}^I \in \text{SO}(3, 1)$ .

A co-tétrade também deve ser covariantemente constante. O que ocorre se

$$\omega_{\alpha J}^I \equiv e^{\beta I} \nabla_{\alpha} e_{\beta J} \quad (6.13)$$

e, portanto, temos uma definição da 1-forma de conexão-spin.

Tomando a derivada covariante da tétrade

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\alpha} e_{\beta}^I &= \nabla_{\alpha} e_{\beta}^I + \omega_{\alpha J}^I e_{\beta}^J = \nabla_{\alpha} e_{\beta}^I + e^{\gamma I} \nabla_{\alpha} (e_{\gamma J}) e_{\beta}^J \\ &= \nabla_{\alpha} e_{\beta}^I - e^{\gamma I} e_{\gamma J} \nabla_{\alpha} e_{\beta}^J \\ &= \nabla_{\alpha} e_{\beta}^I - \nabla_{\alpha} e_{\beta}^I = 0 . \end{aligned} \quad (6.14)$$

Logo,  $\mathcal{D}_{\alpha} e_{\beta}^I = 0$  e a derivada covariante com respeito à tétrade também é derivada covariante com respeito à co-tétrade, assim como também o é com respeito à métrica de Minkowski  $\eta_{IJ}$  e à sua inversa  $\eta^{IJ}$ .

Obtemos o tensor de Riemann interno fazendo

$$R_{IJKL} = R_{\alpha\beta\gamma\sigma} e_I^{\alpha} e_J^{\beta} e_K^{\gamma} e_L^{\sigma} = e_I^{\alpha} e_J^{\beta} e_K^{\nu} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} - \nabla_{\beta} \nabla_{\alpha}) e_{\nu L} . \quad (6.15)$$

Podemos escrever o tensor de Riemann como

$$\begin{aligned} R_{IJKL} &= e_I^{\alpha} e_J^{\beta} (e_K^{\gamma} \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} e_{\gamma L} - \alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= e_I^{\alpha} e_J^{\beta} [\nabla_{\alpha} (e_K^{\gamma} \nabla_{\beta} e_{\gamma L} - \nabla_{\alpha} e_K^{\gamma} \nabla_{\beta} e_{\gamma L})] \\ &= e_I^{\alpha} e_J^{\beta} (\nabla_{\alpha} \omega_{\beta KL} - \eta^{MN} e_M^{\gamma} e_N^{\nu} \nabla_{\alpha} e_{\nu K} - \nabla_{\alpha} e_K^{\gamma} \nabla_{\beta} e_{\gamma L} - \alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= e_I^{\alpha} e_J^{\beta} (\nabla_{\alpha} \omega_{\beta KL} - \eta^{MN} \omega_{\alpha NK} \omega_{\beta ML} - \alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= e_I^{\alpha} \nabla_{\alpha} \omega + JKL - e_I^{\alpha} \omega_{\beta KL} \nabla_{\alpha} e_J^{\beta} - \eta^{MN} \omega_{INK} \omega_{JML} - \alpha \leftrightarrow \beta , \end{aligned} \quad (6.16)$$

mas

$$\begin{aligned} e_I^{\alpha} \omega_{\beta KL} \nabla_{\alpha} e_J^{\beta} &= e_I^{\alpha} \omega_{\beta KL} g^{\gamma\beta} \nabla_{\alpha} e_{\gamma J} = e_I^{\alpha} \omega_{\beta KL} \eta^{MN} e_M^{\gamma} e_N^{\beta} \nabla_{\alpha} e_{\gamma J} \\ &= \eta^{MN} e_N^{\beta} \omega_{\beta KL} e_I^{\alpha} \omega_{\alpha MJ} = \eta^{MN} \omega_{NKL} \omega_{IMJ} , \end{aligned} \quad (6.17)$$

então,

$$R_{IJKL} = e_I^\alpha \nabla_\alpha \omega_{JKL} - e_I^\alpha \nabla_\alpha \omega_{IKL} - \eta^{MN} (\omega_{INK} \omega_{JML} - \omega_{JNK} \omega_{IML} + \omega_{NKL} \omega_{IMJ} - \omega_{MKL} \omega_{INJ}), \quad (6.18)$$

onde usamos os coeficientes e rotação de Ricci

$$\omega_{IJK} = e_I^\alpha \omega_{\alpha JK} = e_I^\alpha e_J^\beta \nabla_\alpha e_{\beta K}. \quad (6.19)$$

E podemos, então, escrever o tensor de Ricci interno como

$$R_{IJ} = \eta^{KL} R_{IKLJ}. \quad (6.20)$$

Em termos de notação diferencial algumas equações surgem de forma recorrente no contexto de gravitação. Primeiro escrevamos

$$\eta^{IJ} e_{I[\alpha} \omega_{\beta]KJ} = \nabla_{[\alpha} e_{\beta]K} = (de_K)_{\alpha\beta} \quad (6.21)$$

then we have the so called Primeira Equação de Estrutura

$$de_I = e_J \wedge \omega_I^J. \quad (6.22)$$

Introduzindo  $R_{\alpha\beta IJ}$  podemos enxergar a 2-forma

$$R_I^J = d\omega_I^J + \omega_I^K \wedge \omega_K^J, \quad (6.23)$$

conhecida como a Segunda Equação de Estrutura, como equação de curvatura focada no espaço interno. Definimos a 2-forma de curvatura da 1-forma de conexão-spin  $\omega_{\alpha I}^J$  como

$$F_{\alpha\beta I}^J = 2\partial_{[\alpha} \omega_{\beta]I}^J + 2\omega_{[\alpha I}^K \omega_{\beta]K}^J. \quad (6.24)$$

### 6.2.2 Relatividade Geral no formalismo de tétrades

A ação de Relatividade Geral no formalismo das tétrades é

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2\kappa} \int_M dx^4 |e| e_I^\mu e_J^\nu F_{\mu\nu}^{IJ}(\omega), \quad (6.25)$$

sendo  $e = \det(h_{ab})$ ,  $\kappa = 1/8\pi G$  e

$$F_{\mu\nu}^{IJ}(\omega) = 2\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} + 2\omega_{[\mu}^{IK} \omega_{\nu]}^{LJ} \eta_{KL} \quad (6.26)$$

é a 1-forma de curvatura da conexão- $so(1, 3)$ ,  $\omega_\mu^I{}_J$ . Os campos independentes são  $e_I^\mu$  e  $\omega_a^I{}_J$ .

### 6.2.3 Equações de Einstein na formulação de tétradas

Primeiramente, usemos da útil relação

$$2ee_I^{[\mu}e_J^{\nu]} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}e_\sigma^K e_\rho^L, \quad (6.27)$$

sendo que  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  e  $\epsilon_{IJKL}$  são os símbolos de Levi-Civita em quatro dimensões definidos por

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} = \begin{cases} +1 & \text{se } (\mu, \nu, \sigma, \rho) \text{ é uma permutação par de } (0,1,2,3), \\ -1 & \text{se } (\mu, \nu, \sigma, \rho) \text{ é uma permutação ímpar de } (0,1,2,3), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.28)$$

Para encontrar a Equação (6.27) fazemos

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}e_\mu^I e_\nu^J e_\sigma^K e_\rho^L = e \\ \Rightarrow & \epsilon_{IJKL}(e_\mu^I e_M^\mu)(e_\nu^J e_N^\nu)e_\sigma^K e_\rho^L = ee_M^\mu e_N^\nu \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \\ & \epsilon_{MNKLE}^K e_\sigma^K e_\rho^L = ee_M^\mu e_N^\nu = ee_M^\mu e_N^\nu \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} \\ \Rightarrow & \varepsilon_{\mu\nu}\epsilon_{MNKLE}^K e_\nu^K e_\rho^L = 2ee_M^\mu e_N^\nu \varepsilon_{\sigma\rho} \\ \Rightarrow & \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{MNKLE} = 2ee_M^\mu e_N^\nu \\ & \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL} = 2ee_I^{[\mu}e_J^{\nu]} \quad \square \end{aligned} \quad (6.29)$$

Assim, a ação pode ser escrita como

$$S[e, \omega] = \frac{1}{4\kappa} \int_M \epsilon_{IJKL} \underline{e}^I \wedge \underline{e}^J \wedge \underline{F}^{KL}(\underline{\omega}). \quad (6.30)$$

A variação da curvatura é

$$\delta F_{ab}^{IJ} = 2\nabla_{[a}\delta\omega_{b]}^{IJ}, \quad \text{or} \quad \delta \underline{F}^{IJ} = \mathcal{D}\delta\underline{\omega}^{IJ}. \quad (6.31)$$

Onde usamos

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{IJ}(\omega) &= 2\partial_{[\mu}\omega_{\nu]}^{IJ} + 2\omega_{[\mu}^{IK}\omega_{\nu]}^{LJ}\eta_{KL} \\ \Rightarrow \delta F_{\mu\nu}^{IJ}(\omega) &= 2\partial_{[\mu}\delta\omega_{\nu]}^{IJ} + 2\delta\omega_{[\mu}^{IK}\omega_{\nu]}^{LJ}\eta_{KL} + 2\delta\omega_{[\mu}^{IK}\delta\omega_{\nu]}^{LJ}\eta_{KL} \\ &= 2\left(\nabla_{[\mu}\delta\omega_{\nu]}^{IJ} + \delta\omega_{[\mu}^{IK}\omega_{\nu]}^{LJ}\eta_{KL} + \delta\omega_{[\mu}^{IK}\delta\omega_{\nu]}^{LJ}\eta_{KL}\right) \\ &= 2\mathcal{D}_{[\mu}\delta\omega_{\nu]}^{IJ} \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\quad (6.33)$$

Variando a ação em termos de  $\omega_a^\mu$  e integrando por parte, temos

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}\mathcal{D}_a(e_\sigma^I e_\rho^L) = 0, \quad (6.34)$$

que é equivalente à condição de compatibilidade

$$\mathcal{D}_{[\mu}e_{\nu]}^I = \partial_{[\mu}e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu|J}^I e_{\nu]}^J = 0. \quad (6.35)$$

Variando a equação anterior com respeito a  $e^I_\mu$ , temos

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}e^I_\mu F^JK_{\nu\sigma} = 0. \quad (6.36)$$

Fazendo uso da condição de compatibilidade (6.35), isto é, sabendo que nesse caso a derivada covariante  $D$  é compatível com a tetrade, temos que  $F^IJ_{\mu\nu} = R^IJ_{\mu\nu}$  – veremos adiante que certos termos de matérias podem quebrar a condição de compatibilidade ao surgirem termos de torção. Nesse caso a Eq. (6.36) fica

$$R^I_\mu - \frac{1}{2}Re^K_\mu = 0. \quad (6.37)$$

Onde fizemos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}e^I_\mu R^JK_{\nu\sigma} &= 6e(e^\nu_J e^\sigma_K e^\rho_L + e^\nu_L e^\sigma_J e^\rho_K + e^\nu_K e^\sigma_L e^\rho_J - e^\nu_J e^\sigma_L e^\rho_K - e^\nu_L e^\sigma_K e^\rho_J + e^\nu_K e^\sigma_J e^\rho_L) R^JK_{\nu\sigma} = 0 \\ &Re^\rho_L + (-R^\rho_L) + (-R^\rho_L) - R^\rho_L - R^\rho_L - (-Re^\rho_L) = 0 \\ &2Re^\rho_L - 4R^\rho_L = 0 \quad \square \end{aligned} \quad (6.38)$$

Usando  $\epsilon^{IJ}_{KL}F^KL_{\mu\nu}$  ao invés de somente  $F^IJ_{\mu\nu}$  na ação obtemos, no lugar da Eq. (6.34), a equação

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\mathcal{D}_\mu(e^I_\sigma e^J_\rho) = 0, \quad (6.39)$$

que também é compatível com a condição de compatibilidade. Prosseguindo da forma anterior, a Eq. (6.36) fornece

$$0 = \varepsilon^{I\mu\nu\sigma}\epsilon_{IJKL}\epsilon^{JK}_{MN}R^MN_{\mu\nu} = -2\varepsilon^{I\mu\nu\sigma}R_{\mu\nu IL} \quad (6.40)$$

que é identicamente satisfeita por conta das propriedades de simetria do tensor de Riemann. Ora

$$\begin{aligned} \varepsilon^{I\mu\nu\sigma}R_{\mu\nu IL} &= -\varepsilon^{I\mu\nu\sigma}R_{L\mu\nu I} \\ &= -(R_{L\mu\nu I} + R_{L\nu I\mu} + R_{LI\mu\nu}) = 0, \end{aligned} \quad (6.41)$$

pois (6.41) se trata da identidade de Bianchi. O espaço das soluções é dramaticamente aumentado e contém todas as combinações possíveis de tétrades e conexões compatíveis entre si (compatíveis no sentido que se satisfaça a Eq. (6.13)). Esse fato motiva a formulação da ação generalizada de Palatini, chamada de ação de Holst, dada por

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x |e| e^\mu_I e^\nu_J P^{IJ}_{KL} F^KL_{\mu\nu}(\omega) \quad (6.42)$$

com

$$P^{IJ}_{KL} = \delta^{[I}_K \delta^{J]}_L - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL}. \quad (6.43)$$

Variando a ação com respeito à conexão temos

$$\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{IJKL}P^{IJ}{}_{MN}\mathcal{D}_\mu(e_\sigma^M e_\rho^N) = 0, \quad (6.44)$$

ainda resultando na condição de compatibilidade, ou seja, a derivada covariante da teoria é compatível com a tetrade. O símbolo  $P^{IJ}{}_{KL}$  pode ser interpretado como uma aplicação de um produto tensorial de dois espaços de Minkowski neles mesmos.  $P^{IJ}{}_{KL}$  possui inversa dada por

$$(P^{-1})_{IJ}{}^{KL} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} \left( \delta_I^{[K} \delta_J^{L]} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{IJ}{}^{KL} \right). \quad (6.45)$$

Variando a ação com respeito à tetrade, temos

$$R_L^\sigma - \frac{1}{2}R e_L^\sigma = -\epsilon^{I\mu\nu\sigma} R_{\mu\nu IL} = 0. \quad (6.46)$$

### 6.3 Ação de Holst

Agora nos ocuparemos de escrever a ação de Holst em variáveis 3+1. Analogamente à métrica espacial canônica, consideramos o campo tensorial espaço-temporal

$$\mathcal{E}_I^\mu = e_I^\mu + n^\mu n_I, \quad (6.47)$$

com  $n_I = e_I^\mu n_\mu$ , satisfazendo  $\mathcal{E}_I^\mu n_\mu = \mathcal{E}_I^\mu n^I = 0$ .

Outra condição é necessária para separar as direções internas do espaço de Minkowski, alcançamos esse objetivo usando uma fixação de calibre parcial, fixando as transformações  $so(3,1)$  internas. Escolhendo um vetor interno tipo-tempo

$$n^I = \delta_0^I \quad (6.48)$$

fixamos o “boost” interno impondo que

$$e_0^\mu = n^I e_I^\mu = n^\mu \quad (6.49)$$

seja a unidade normal da foliação. Em termos dos componentes da unidade normal,

$$n^\mu = \frac{1}{N}(t^\mu - N^\mu), \quad (6.50)$$

decompomos a ação de Holst como

$$S[e, \omega] = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{h} P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} (N \mathcal{E}_I^\mu - 2n_I t^\mu + 2N^\mu n_I) \mathcal{E}_J^\nu, \quad (6.51)$$

onde  $N\sqrt{h} = |e|$ .

Para chegar até a ação foliada de Holst fizemos

$$\begin{aligned}
e_I^\mu e_J^\nu &= (\mathcal{E}_I^\mu - n^\mu n_I)(\mathcal{E}_J^\nu - n^\nu n_J) \\
&= \mathcal{E}_I^\mu \mathcal{E}_J^\nu - \mathcal{E}_I^\mu n^\nu n_J - \mathcal{E}_J^\nu n^\mu n_I + n^\mu n^\nu n_I n_J \\
&= \mathcal{E}_I^\mu \mathcal{E}_J^\nu - \mathcal{E}_I^\mu n^\nu n_J - \mathcal{E}_J^\nu n^\mu n_I + \mathcal{E}_I^\nu n^\mu n_J - \mathcal{E}_J^\nu n^\mu n_I + n^\mu n^\nu n_I n_J \\
&= \mathcal{E}_I^\mu \mathcal{E}_J^\nu - 2\mathcal{E}_I^{(\mu} n^{\nu)} n_J - 2\mathcal{E}_{[J}^\nu n^\mu n_{I]} + n^{(\mu} n^{\nu)} n_{(I} n_{J)}.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Usando a anti-simetria de  $F_{\mu\nu}^{KL}$  nos índices  $KL$  e  $\mu\nu$ , temos que

$$F_{\mu\nu}^{KL} e_I^\mu e_J^\nu = \mathcal{E}_I^\mu \mathcal{E}_J^\nu - 2\mathcal{E}_J^\nu n^\mu n_I \tag{6.53}$$

ou

$$F_{\mu\nu}^{KL} e_I^\mu e_J^\nu = \left( \mathcal{E}_I^\mu - 2\frac{n^\mu}{N} n_I t^\mu + 2\frac{N^\mu}{N} n_I \right) \mathcal{E}_J^\nu \quad \square \tag{6.54}$$

Continuando com a foliação da ação de Holst, a partir de agora vamos usar as variáveis ADM em coordenadas adaptadas, ou seja,  $\mu \rightarrow a$ , além disso, analisaremos termo a termo da ação (6.51), a começar pelo termo multiplicado por  $t^a$ , também chamado de termo simplético. Isto é, seja

$$S[e, \omega] = S_{\text{symp}} + S_{\text{diff}} + S_{\text{ham}}, \tag{6.55}$$

onde

$$S_{\text{symp}} = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{h} P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} (-2n_I t^\mu) \mathcal{E}_J^\nu \tag{6.56}$$

é chamado de termo simplético,

$$S_{\text{diff}} \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{h} P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} (2N^\mu n_I) \mathcal{E}_J^\nu \tag{6.57}$$

é chamado de termo de difeomorfismos espaciais e

$$S_{\text{ham}} = \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x \sqrt{h} P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL} (N \mathcal{E}_I^\mu) \mathcal{E}_J^\nu \tag{6.58}$$

é chamado de termo Hamiltoniano, faremos a foliação de cada um em separado.

### 6.3.1 Termo Simplético

A começar pelo termo simplético, primeiro introduzimos o termo puramente espacial

$$P_i^a \equiv \frac{\sqrt{h}}{\kappa\gamma} \mathcal{E}_i^a, \tag{6.59}$$

convenientemente escolhido como momento associado à conexão de Ashtekar  $A_a^i$ . Usando (6.48), temos que

$$\begin{aligned}
S_{\text{symp}} &= -\gamma \int_M d^4x n_I t^a P_J^{IJ} {}_{KL} F_{ab}^{KL} = \\
&= \gamma \int_M d^4x t^a \left( F_{ab}^{0j} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{0j} {}_{KL} F_{ab}^{KL} \right) \\
&= \gamma \int_M d^4t^a P_j^b \left[ \partial_a \omega_b^{0j} - \partial_b \omega_a^{0j} + 2\omega_{[a}^{0k} \omega_{b]}^j + \frac{1}{\gamma} \epsilon_{kl}^j \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{kl} + \omega_{[a}^{kK} \omega_{b]K}^l \right) \right] \\
&= \gamma \int_M d^4t^a P_j^b \left[ \partial_a \omega_b^{0j} - \partial_b \omega_a^{0j} + 2\omega_a^{0k} \omega_b^j - 2\omega_b^{0k} \omega_a^j \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\gamma} \epsilon_{kl}^j \left( \partial_a \omega_b^{kl} - \partial_b \omega_a^{kl} + \omega_a^{k0} \omega_{b0}^l - \omega_b^{k0} \omega_{a0}^l + \omega_a^{km} \omega_{bm}^l - \omega_b^{km} \omega_{am}^l \right) \right]. \quad (6.60)
\end{aligned}$$

Note que, desconsiderando a contribuição de termos de superfície,

$$0 = - \int d^4x \partial_b (t^a \omega_a^{0j} P_j^b) = - \int d^4x (t^a P_j^b \partial_b \omega_a^{0j} + \omega_a^{0j} \partial_b (t^a P_j^b)) \quad (6.61)$$

logo,

$$- \int d^4x t^a P_j^b \partial_b \omega_a^{0j} = \int d^4x \left( P_j^b \omega_a^{0j} \partial_b t^a + t^a \omega_a^{0j} \partial_b P_j^b \right), \quad (6.62)$$

analogamente,

$$- \int d^4x t^a P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon^j {}_{kl} \partial_b \omega_a^{kl} = \int d^4x \frac{1}{2\gamma} \epsilon^j {}_{kl} \left( P_j^b \omega_a^{kl} \partial_b t^a + t^a \omega_a^{kl} \partial_b P_j^b \right), \quad (6.63)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
-\gamma \int_M d^4x n_I t^a P_J^{IJ} {}_{KL} F_{ab}^{KL} &= \gamma \int d^4x \left( P_j^b t^a \partial_a \omega_b^{0j} + P_j^b \omega_a^{0j} \partial_b t^a + \omega_t^{0j} \partial_b P_j^b + P_j^b \omega_t^{0k} \omega_{bk}^j \right. \\
&\quad - P_j^b \omega_b^{0k} \omega_{tk}^j + P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j t^a \partial_a \omega_b^{kl} + P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_a^{kl} \partial_b t^a + \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{kl} \partial_b P_j^b + P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{k0} \omega_{b0}^l \\
&\quad \left. + P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{km} \omega_{bm}^l - P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_b^{k0} \omega_{t0}^l - P_j^b \frac{1}{2\gamma} \epsilon_{kl}^j \omega_b^{km} \omega_{tm}^l \right) \\
&= \int d^4x \left[ P_j^b \mathcal{L}_t \left( \gamma \omega_b^{0j} + \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^j \omega_b^{kl} \right) + \gamma \omega_t^{0j} \partial_b P_j^b + \gamma P_j^b \omega_t^{0k} \omega_{bk}^j - \gamma P_j^b \omega_b^{0k} \omega_{tk}^j \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{kl} \partial_b P_j^b + \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \omega_t^{k0} \omega_{b0}^l + \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \omega_t^{km} \omega_{bm}^l - \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \omega_b^{k0} \omega_{t0}^l - \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \omega_b^{km} \omega_{tm}^l \right]. \quad (6.64)
\end{aligned}$$

Nos concentrando nos termos de (6.64) que não envolvem a derivada temporal, temos

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \left[ \gamma \omega_t^{0j} \partial_b P_j^b + \gamma P_j^b \omega_t^{0k} \omega_{bk}^j + \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \left( \omega_t^{k0} \omega_{b0}^l - \omega_b^{k0} \omega_{t0}^l \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{kl} \partial_b P_j^b + \frac{1}{2} P_j^b \epsilon_{kl}^j \left( \omega_t^{km} \omega_{bm}^l - \omega_b^{km} \omega_{tm}^l \right) - \gamma P_j^b \epsilon_{kl}^j \omega_b^{kl} \omega_{t0}^l \right] \quad (6.65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \left[ \gamma \omega_t^{0j} \left( \partial_b P_j^b + \omega + b^j{}_k P_k^b - \frac{1}{\gamma} \epsilon_{jl}^k \omega_{b0}^l P_k^b \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^j \omega_a^{kl} \left( \partial_b P_j^b - \frac{1}{2} \epsilon_j^{mn} \epsilon_{nqp} \omega_b^{qp} P_m^b + \gamma \epsilon_{nj}^m \omega_b^{0n} P_m^b \right) \right]. \quad (6.66)
\end{aligned}$$

Para se chegar da Eq. (6.65) até a Eq. (6.66) usamos

$$\frac{1}{2}P_j^b \epsilon_{kl}^j (\omega_t^{k0} \omega_{b0}^l - \omega_b^{k0} \omega_{t0}^l) = -\epsilon_{jl}^k \omega_t^{0j} \omega_{b0}^l P_k^b \quad (6.67)$$

e

$$\frac{1}{2}P_j^b \epsilon_{kl}^j (\omega_t^{km} \omega_{bm}^l - \omega_b^{km} \omega_{tm}^l) = \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^j \omega_t^{kl} \left( -\frac{1}{2} \epsilon_j^{mn} \epsilon_{nqp} \omega_b^{qp} P_m^b \right). \quad (6.68)$$

Para chegar na Eq. (6.67) note que

$$\begin{aligned} \omega_t^{j0} \omega_{b0}^l - \omega_b^{j0} \omega_{t0}^l &= (e^{aj} \nabla_t e_a^0) \omega_{b0}^l - (e^{aj} \nabla_b e_a^0) \omega_{t0}^l \\ &= \nabla_t (e_a^0 e^{aj}) \omega_{b0}^l - \omega_t^{0j} \omega_{b0}^l - \nabla_b (e_a^0 e^{aj}) \omega_{t0}^l + \omega_b^{0j} \omega_{t0}^l, \end{aligned} \quad (6.69)$$

mas

$$\begin{aligned} \epsilon_{jl}^k \nabla_t (e_a^0 e^{aj}) \omega_{b0}^l - \epsilon_{jl}^k \nabla_b (e_a^0 e^{aj}) \omega_{t0}^l &= \epsilon_{jl}^k \nabla_t (e_a^0 e^{aj}) \omega_{0b}^l + \epsilon_{jl}^k \nabla_b (e_a^0 e^{aj}) \omega_{0t}^j \\ &= \epsilon_{jl}^k (\omega_t^{0j} + \omega_t^{j0}) \omega_{0b}^l + \epsilon_{jl}^k (\omega_b^{0l} + \omega_b^{l0}) \omega_{0t}^j \\ &= \epsilon_{jl}^k (2\omega_{t0}^j \omega_b^{(l0)} + 2\omega_t^{0j} \omega_{b0}^l) \\ &= 4\epsilon_{jl}^k \omega_{t0}^j \omega_b^{(l0)} = 0. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Então

$$\begin{aligned} \epsilon_{jl}^k (-\omega_t^{0j} \omega_{b0}^l + \omega_b^{0j} \omega_{t0}^l) &= -\epsilon_{jl}^k \omega_t^{0j} \omega_{b0}^l - \epsilon_{jl}^k \omega_t^{0j} \omega_{b0}^l \\ &= -2\epsilon_{jl}^k \omega_t^{0j} \omega_{b0}^l \quad \square \end{aligned} \quad (6.71)$$

Já para se encontrar (6.68) fazemos

$$\frac{1}{2}P_j^b \epsilon_{kl}^j (\omega_t^{km} \omega_{bm}^l - \omega_b^{km} \omega_{tm}^l) = \frac{1}{2}P_j^b \frac{1}{4} (4\epsilon_{kl}^j \omega_t^{km} \omega_{bm}^l - 4\epsilon_{kl}^j \omega_b^{km} \omega_{tm}^l). \quad (6.72)$$

Todavia note que

$$\epsilon_{kl}^j \omega_t^{km} \omega_{bm}^l = -\epsilon_{kj}^l \omega_{tk}^m \omega_{bm}^l \quad (6.73)$$

e

$$\epsilon_{kl}^j \omega_b^{km} \omega_{tm}^l = -\epsilon_{kj}^l \omega_b^{km} \omega_{tm}^l. \quad (6.74)$$

Usando as Eqs. (G.21) e G.23),  $\epsilon_l^{nj} \epsilon^{lkm} \epsilon_{nqp} \omega_{akm} \omega_b^{qp} P_j^b = 3! \epsilon_l^{nj} \delta_{[n}^l \delta_q^k \delta_p^m] \omega_{akm} \omega_b^{qp} P_j^b = 4\epsilon_l^{kj} \omega_{ak}^m \omega_{bm}^l P_j^b$ , temos que (6.73) é igual a

$$-\frac{1}{4} \epsilon_l^{nj} \epsilon^{lkm} \epsilon_{nqp} \omega_{tkm} \omega_b^{qp}. \quad (6.75)$$

E 4 vezes (6.74) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} -\epsilon_l^{nj} \epsilon^{lkm} \epsilon_{nqp} \omega_{bkm} \omega_t^{qp} &= -\epsilon_l^{nj} \epsilon_{qp}^l \epsilon_n^{km} \omega_{tkm} \omega_b^{qp} \\ &= \epsilon_l^{nj} \epsilon^{lkm} \epsilon_{nqp} \omega_{tkm} \omega_b^{qp}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

de modo que a Eq. (6.72) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\left(-\frac{1}{2}\epsilon_j^{nm}\epsilon_{nqp}\omega_b^{qp}\right) \quad \square \quad (6.77)$$

Em seguida escrevemos a Eq. (6.66) como

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left[ \gamma\omega_t^{0j} \left( \partial_b P_j^b + \omega_{bj}^k P_k^b - \frac{1}{\gamma}\epsilon_{jl}^k\omega_{b0}^l P_k^b \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_a^{kl} \left( \partial_b P_j^b - \frac{1}{2}\epsilon_j^{mn}\epsilon_{nqp}\omega_b^{qp} P_m^b + \gamma\epsilon_{nj}^m\omega_b^{0n} P_m^b \right) \right] \\ = & \int d^4x \left( \gamma\omega_t^{0j}\partial_b P_j^b + \gamma\omega_t^{0j}\omega_{bj}^k P_k^b - \frac{1}{\gamma}\epsilon_{jl}^k\omega_t^{0j}\omega_{b0}^l P_k^b \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\partial_b P_j^b - \frac{1}{4}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\epsilon_j^{mn}\epsilon_{nqp}\omega_b^{qp} P_m^b + \gamma\frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\epsilon_{nj}^m\omega_b^{0n} P_m^b \right) \\ = & \int d^4x \left( \gamma\omega_t^{0j}\partial_b P_j^b + \gamma\omega_t^{0j}\omega_{bj}^k P_k^b - \epsilon_{jl}^k\omega_t^{0j}\omega_{b0}^l P_k^b \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\partial_b P_j^b - \frac{1}{4}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\epsilon_j^{mn}\epsilon_{nqp}\omega_b^{qp} P_m^b - \gamma\omega_{tn}^j\omega_b^{0n} P_j^b \right) \\ = & \int d^4x \left( \gamma\omega_t^{0j}\partial_b P_j^b + \frac{1}{2}\gamma\delta_m^{[j}\delta_n^{k]}\omega_t^0\omega_b^{mn} P_k^b - \epsilon_{jl}^k\omega_t^{0j}\omega_{b0}^l P_k^b \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\partial_b P_j^b - \frac{1}{4}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl}\epsilon_j^{mn}\epsilon_{nqp}\omega_b^{qp} P_m^b - \frac{1}{2}\gamma\delta_m^{[j}\delta_n^{k]}\omega_t^{mn}\omega_b^0 P_j^b \right) \\ = & \int d^4x \left[ \left( \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl} + \gamma\omega_t^{0j} \right) \left( \partial_b P_j^b + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^k\epsilon^i{}_{mn}\omega_b^{mn} P_k^b + \gamma\epsilon_{ij}^k\omega_b^{0i} P_k^b \right) \right. \\ & \quad \left. - (1 + \gamma^2)\epsilon_{jm}{}^n\omega_t^{0m} K_b^m P_n^b \right] , \end{aligned} \quad (6.78)$$

ou simplesmente

$$\int d^4x \left[ \Lambda^j \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b - \omega_t^{0i}(1 + \gamma^2)\epsilon_{im}{}^n K_b^m P_n^b \right] , \quad (6.79)$$

onde fica definida a conexão de Ashtekar-Barbero como

$$A_a^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^i\omega_a^{kl} + \gamma\omega_a^{0i} , \quad (6.80)$$

e  $\mathcal{D}_b^{(A)}$  é definida como a derivada covariante em relação à conexão de Ashtekar-Barbero, ou seja,

$$\mathcal{D}_a^{(A)} v_i = \nabla_a v_i + \epsilon_{ij}{}^k \Gamma_a^j v_k + \gamma\epsilon_{ij}{}^k K_a^j v_k . \quad (6.81)$$

Em contraste com a derivada covariante espacial

$$\mathcal{D}_a v^i = \nabla_a v^i + h_a^b \omega_b^i{}_{j} v^j = \nabla_a v^i - \epsilon^i{}_{jk} \Gamma_a^j v^k . \quad (6.82)$$

Adicionalmente introduzimos as quantidades

$$\Lambda^i \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{kl}^j\omega_t^{kl} + \gamma\omega_t^{0j} . \quad (6.83)$$

Também é útil definir a conexão espinorial como

$$\Gamma_a^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{kl}^i \omega_a^{kl} . \quad (6.84)$$

E, notando que

$$K_{ac} = h_a^b h_c^d \nabla_b n_d = -h_a^b \mathcal{E}_{ci} e^{di} \nabla_b e_d^0 = -\mathcal{E}_{ci} \omega_a^{i0} , \quad (6.85)$$

definimos

$$K_a^i \equiv \omega_a^{0i} , \quad (6.86)$$

note a ordem dos índices internos da 1-forma de conexão-spin. De maneira que a conexão de Ashtekar-Barbero (6.80) pode ser escrita também como

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i . \quad (6.87)$$

Agora vamos expandir os outros dois termos da ação de Holst (6.51), a começar pelo termo que fornece o vínculo de difeomorfismos espaciais.

### 6.3.2 Termo de difeomorfismos espaciais

Primeiramente definimos, a partir da Eq. (6.26),

$$\begin{aligned} F_{ab}^l &\equiv \frac{1}{2} \epsilon^l{}_{ij} F_{ab}^{ij} = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^l + \epsilon^l{}_{ij} \epsilon^i{}_{km} \epsilon^{kj}{}_n \Gamma_{[a}^m \Gamma_{b]}^n \\ &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^l - \epsilon^l{}_{jk} \Gamma_a^j \Gamma_b^k , \end{aligned} \quad (6.88)$$

usando a conexão espinorial. Uma vez que a conexão canônica é a conexão de Ashtekar-Barbero, e não a conexão espinorial, é útil reescrever a curvatura usando  $A_a^i$ , assim

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{ab}^l &= 2\partial_{[a} (\Gamma_{b]}^l + \gamma K_{b]}^l) - \epsilon^l{}_{jk} (\Gamma_{[a}^j + \gamma K_{[a}^j) (\Gamma_{b]}^k + \gamma K_{b]}^k) \\ &= 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^l - \epsilon^l{}_{jk} \Gamma_{[a}^j \Gamma_{b]}^k + \Gamma_{[a}^k + 2\gamma \partial_{[a} K_{b]}^l - \gamma \epsilon^l{}_{jk} \Gamma_{[a}^j K_{b]}^k - \gamma \epsilon^l{}_{jk} K_{[a}^j \Gamma_{b]}^k - \gamma^2 \epsilon^l{}_{jk} K_{[a}^j K_{b]}^k \\ &= F_{ab}^l + 2\gamma \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^l - \gamma^2 \epsilon^l{}_{jk} K_{[a}^j K_{b]}^k \end{aligned} \quad (6.89)$$

A contribuição na ação de Holst do termo multiplicado pelo vetor deslocamento

$N^\mu$  é, então,

$$\begin{aligned}
S_{\text{diff}} &= \gamma n_I N^a P_j^b P^{IJ}_{KL} F_{ab}^{KL} \\
&= \gamma n_I N^a P_j^b \left( \delta_K^{[I} \delta_L^{J]} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL} \right) F_{ab}^{KL} \\
&= \gamma N^a P_j^b \left( \delta_K^{[I} \delta_L^{J]} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{IJ}_{KL} \right) F_{ab}^{KL} \\
&= \gamma N^a P_j^b \left( n^M \eta_{M[K} \delta_L^{J]} - \frac{n^M}{2\gamma} \eta_{MI} \epsilon^{IJ}_{KL} \right) F_{ab}^{KL} \\
&= \gamma N^a P_j^b \left( \eta_{0[k} \delta_{l]}^j - \frac{1}{2\gamma} \eta_{0i} \epsilon^{ij}_{kl} \right) F_{ab}^{kl} \\
&= -\gamma N^a P_j^b \left( F_{ab}^{0j} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{0j}_{kl} F_{ab}^{kl} \right) \\
&= -2\gamma N^a P_j^b \left[ \partial_{[a} \omega_{b]}^{0j} + \omega_{[a}^{0k} \omega_{b]k}{}^j + \frac{1}{2\gamma} \left( 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^j + \epsilon^j_{kl} \omega_{[a}^{kL} \omega_{b]L}{}^l \right) \right] \\
&= -2\gamma N^a P_j^b \left[ \partial_{[a} K_{b]}^j + K_{[a}^k \omega_{b]k}{}^j + \frac{1}{2\gamma} \left( 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^j + \epsilon^j_{kl} \omega_{[a}^{k0} \omega_{b]0}{}^l + \epsilon^j_{kl} \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^l \right) \right] \\
&= -2N^a P_j^b \left[ \partial_{[a} \left( \Gamma_{b]}^j + \gamma K_{b]}^j \right) + \gamma K_{[a}^k \omega_{b]k}{}^j + \frac{1}{2} \epsilon^j_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l + \frac{1}{2} \epsilon^j_{kl} \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^l \right] \\
&= -N^a P_j^b \left[ 2\partial_{[a} \left( \Gamma_{b]}^j + \gamma K_{b]}^j \right) - \epsilon^j_{kl} \Gamma_{[a}^k \Gamma_{b]}^l + \epsilon^j_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l - 2\gamma \epsilon^j_{mk} \Gamma_{[a}^m K_{b]}^k \right] \\
&= -N^a P_j^b \left[ \mathcal{F}_{ab}^j + (1 + \gamma^2) \epsilon^j_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l \right]. \tag{6.90}
\end{aligned}$$

Sendo que para chegar da sexta para a oitava utilizamos

$$\begin{aligned}
K_{[a}^k \omega_{b]k}{}^j &= -\omega_{[a}{}^{kj} K_{b]k} = \frac{1}{2} \left( \omega_{[a}{}^{jk} - \omega_{[a}{}^{kj} \right) K_{b]k} \\
&= \frac{1}{2} \left( \delta_p^j \delta_q^k - \delta_p^k \delta_q^j \right) \omega_{[a}{}^{pq} K_{b]k} = \delta_p^{[j} \delta_q^{k]} \omega_{[a}{}^{pq} K_{b]k} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{ljk} \epsilon_{lpq} \omega_{[a}{}^{pq} K_{b]k} = \frac{1}{2} \epsilon_l^j \epsilon_k^l \epsilon_{pq} \omega_{[a}{}^{pq} K_{b]k} \\
&= -\epsilon^j_{lk} \Gamma_a^l K_b^k \tag{6.91}
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\omega_{[a}{}^{km} \omega_{b]m}{}^l &= \frac{1}{4} \left( \omega_{[a}{}^{km} - \omega_{[a}{}^{mk} \right) \left( \omega_{b]}{}^{nl} - \omega_{b]}{}^{ln} \right) \delta_{mn} \\
&= \frac{1}{4} \delta_p^{[k} \delta_q^{m]} \omega_{[a}{}^{pq} \delta_s^{[n} \delta_r^{l]} \omega_{b]}{}^{rs} \delta_{mn} \\
&= -\frac{1}{4} \epsilon^{ikm} \epsilon_{ipq} \epsilon^{jml} \epsilon_{jrs} \omega_{[a}{}^{pq} \omega_{b]}{}^{rs} \delta_{mn} \\
&= \frac{1}{4} \epsilon^{ikm} \epsilon_{ipq} \epsilon^{jnl} \epsilon_{jrs} \omega_{[a}{}^{pq} \omega_{b]}{}^{rs} \delta_{mn} \\
&= -\frac{1}{4} \epsilon^{ikm} \epsilon_m^{jl} \epsilon_{ipq} \epsilon_{jrs} \omega_{[a}{}^{pq} \omega_{b]}{}^{rs} \\
&= -\frac{1}{4} \left( \delta_j^i \delta_l^k - \delta_j^k \delta_l^i \right) \epsilon_{ipq} \epsilon_{rs}^j \omega_{[a}{}^{pq} \omega_{b]}{}^{rs} \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{pq}^l \omega_{[a}{}^{pq} \frac{1}{2} \epsilon_{rs}^k \omega_{b]}{}^{rs} \\
&= -\Gamma_{[a}^k \Gamma_{b]}^l, \tag{6.92}
\end{aligned}$$

onde usamos  $\delta_l^k \epsilon^j_{kl} = 0$  da antepenúltima para a penúltima linha.

Por último, escrevemos o termo Hamiltoniano.

### 6.3.3 Termo Hamiltoniano

A contribuição para o termo multiplicado pela função lapso  $N$  é

$$\begin{aligned}
S_{\text{ham}} &= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \left( \delta_K^{[i} \delta_L^{j]} F_{ab}^{KL} - \frac{1}{2\gamma} \epsilon^{ij}_{KL} F_{ab}^{KL} \right) \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \left[ 2\partial_{[a} \omega_{b]}^{ij} + 2\omega_{[a}^{iK} \omega_{b]}^{Lj} \eta_{KL} + \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_k \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \left[ 2\partial_{[a} \omega_{b]}^{ij} - 2\omega_{[a}^{i0} \omega_{b]0}{}^j + 2\omega_{[a}^{ik} \omega_{b]k}{}^j + \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_k \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \left[ F_{ab}^{ij} + 2\omega_{[a}^{i0} \omega_{b]0}{}^j - \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_k \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{0k} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \left[ F_{ab}^{ij} + 2K_{[a}^i K_{b]}^j - \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_k \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a}{\sqrt{h}} \left[ P_n^b \frac{1}{2} \epsilon^i{}_j{}^n \epsilon^j{}_{qp} F_{ab}^{qp} + \frac{2}{2} P_n^b \epsilon^i{}_j{}^n \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - \frac{2}{\gamma} P_j^b \epsilon^{ij}_k \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}_k \left[ F_{ab}^k + \left( 2\gamma \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k - \gamma^2 \epsilon^k{}_{qp} K_a^q K_b^p \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\gamma \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k + \gamma^2 \epsilon^k{}_{qp} K_a^q K_b^p \right) + \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - \frac{2}{\gamma} \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right] \\
&= \frac{N\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}_k \left[ \mathcal{F}_{ab}^k + (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right], \quad (6.93)
\end{aligned}$$

onde da primeira para a segunda linha usamos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\gamma} \epsilon^{ij}_{KL} F_{ab}^{KL} &= -\frac{2}{2\gamma} \epsilon^{ij}_{k0} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) - \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_{0l} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{0l} + \omega_{[a}^{0m} \omega_{b]m}{}^l \right) \\
&= -\frac{1}{\gamma} \epsilon^{ij}_{k0} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) + \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_{l0} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{0l} - \omega_{[b}^{0m} \omega_{a]m}{}^l \right) \\
&= -\frac{1}{\gamma} \epsilon^{ij}_{k0} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) - \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_{l0} \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{l0} + \omega_{[a}^{ml} \omega_{b]m}{}^0 \right) \\
&= \frac{2}{\gamma} \epsilon^{ij}_k \left( \partial_{[a} \omega_{b]}^{k0} + \omega_{[a}^{kl} \omega_{b]l}{}^0 \right) \quad (6.94)
\end{aligned}$$

e da quinta para a sexta linha usamos

$$P_k^b F_{ab}^{[ik]} = P_k^b \delta_q^{[i} \delta_p^{k]} F_{ab}^{qp} = \frac{1}{2} P_k^b \epsilon^{jik} \epsilon_{jpp} F_{ab}^{qp} = P_k^b \epsilon_j{}^{ik} F_{ab}^j = P_j^b \epsilon^{ij}_k F_{ab}^k. \quad (6.95)$$

Note ainda que

$$\mathcal{D}_a K_b^k = \mathcal{D}_a^{(A)} K_b^k + \gamma \epsilon_{pq}{}^k K_a^p K_b^q = \mathcal{D}_a^{(A)} K_b^k - \gamma \epsilon_{pq}{}^k K_a^p K_b^q, \quad (6.96)$$

logo

$$\epsilon^{ij}{}^k \left( \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right) = \epsilon^{ij}{}^k \left( -\epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a}^{(A)} K_{b]}^k \right). \quad (6.97)$$

Finalmente, coletando os termos (6.79), (6.90) e (6.93), temos a ação de Holst no formalismo ADM,

$$\begin{aligned} S_{\text{Holst}} = & \int dt d^3x \left\{ \dot{A}_a^i P_i^a + \Lambda^j \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b + \omega_t^{0i} (1 + \gamma^2) \epsilon_{jm}{}^n K_b^m P_n^b \right. \\ & + N \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}{}^k \left[ \mathcal{F}_{ab}^k + (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a} K_{b]}^k \right] \\ & \left. - N^a P_j^b \left[ \mathcal{F}_{ab}^j + (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Ou, levando a Eq. (6.97) em consideração,

$$\begin{aligned} S_{\text{Holst}} = & \int dt d^3x \left\{ \dot{A}_a^i P_i^a + \Lambda^j \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b + \omega_t^{0i} (1 + \gamma^2) \epsilon_{jm}{}^n K_b^m P_n^b \right. \\ & + N \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}{}^k \left[ \mathcal{F}_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a}^{(A)} K_{b]}^k \right] \\ & \left. - N^a P_j^b \left[ \mathcal{F}_{ab}^j + (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{kl} K_{[a}^k K_{b]}^l \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.99)$$

com uma diferença de sinal no termo  $N \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}{}^k (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p$  em relação à Ref. [105].

### 6.3.4 Ação de Dirac

Fermions de Dirac são representados por bi-espinores  $\Psi = (\psi, \eta)^T$ , onde  $\psi$  e  $\eta$  são 2-espinores, isto é, se transformam segundo a representação fundamental da álgebra  $sl(2, \mathbb{C})$ , a complexificação da álgebra  $su(2)$ . Usamos matrizes  $\gamma$  definidas pela propriedade de satisfação da álgebra de Clifford

$$\gamma_I \gamma_J + \gamma_J \gamma_I = 2\eta_{IJ} \mathbf{1}, \quad (6.100)$$

sendo  $\eta_{IJ}$  a métrica de Minkowski. Segundo a métrica utilizada nesse trabalho, isso implica em

$$\gamma_0^2 = -\mathbf{1}, \quad (6.101)$$

$$\gamma_j^2 = \mathbf{1}, \quad (6.102)$$

$$\gamma_I \gamma_J = -\gamma_J \gamma_I \quad \text{para } I \neq J. \quad (6.103)$$

Explicitamente, podemos representá-las por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.104)$$

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^j \\ i\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.105)$$

com  $\sigma^j$  igual as matrizes de Pauli.

Transformações de Lorentz infinitesimais  $\lambda_I^K$ , atuando em vetores no espaço interno  $v_K$ , satisfazem as relações

$$\lambda_I^K \eta_{KJ} + \eta_{IL} \lambda_J^L = 0, \quad (6.106)$$

tal que  $\lambda_{IJ}$  é anti-simétrico. Usando as matrizes gama, encontramos as seguintes combinações anti-simétricas

$$\sigma_{IJ} = \frac{1}{4} [\gamma_I, \gamma_J] \quad (6.107)$$

e a identidade de Jacobi, mais as relações de anti-comutação para matrizes gama, temos

$$[\gamma_I, \lambda^{IK} \sigma_{JK}] = \lambda_I^K \gamma_K. \quad (6.108)$$

Portanto, as matrizes de pauli fornecem uma representação matricial para transformações de Lorentz infinitesimais. Além do mais,

$$\sigma_{ij}^\dagger = -\sigma_{ij} \quad \text{e} \quad \sigma_{0j}^\dagger = \sigma_{0j}. \quad (6.109)$$

Sob um espinor  $\Psi$  podemos definir a ação do grupo de Lorentz por

$$\Psi'(x) = S(\Lambda) \Psi(\Lambda^{-1}x), \quad (6.110)$$

onde  $S(\Lambda) = \exp(\lambda^{IJ} \sigma_{IJ})$  para  $\Lambda_I^J = \exp(\lambda)^J_I$ . As matrizes  $S(\Lambda)$  satisfazem as seguintes relações úteis

$$-\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}, \quad (6.111)$$

$$S^{-1} \gamma^I S = \Lambda_J^I \gamma^J. \quad (6.112)$$

Outra relação útil é

$$\bar{\Psi} = i \Psi^\dagger \gamma^0 = i (\Psi^*)^T \gamma^0 \quad (6.113)$$

para espinores e

$$\bar{A} = -\gamma^0 A^\dagger \gamma^0 \quad (6.114)$$

para matrizes. Isso garante que  $\bar{AB} = \bar{B}\bar{A}$  e que  $\bar{A}\bar{\Psi} = \bar{\Psi}A$ . Para as matrizes encontradas até o momento  $\bar{\gamma}^I = -\gamma^I$  e  $\bar{\sigma}_{IJ} = \sigma_{IJ}$ .

Note que a densidade de corrente  $i\bar{\Psi}\gamma^I\Psi$  se transforma como um vetor de Lorentz, enquanto  $i\bar{\Psi}\Psi$  como um escalar,

$$\begin{aligned} i\bar{\Psi}'\gamma^I\Psi' &= -\Psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 \gamma^I S \Psi \\ &= -\Psi^\dagger \gamma^0 S^{-1} \gamma^I S \Psi \\ &= i\Lambda_J^I \bar{\Psi} \gamma^J \Psi. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Outra construção útil é

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \quad (6.116)$$

Nessa representação, temos

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.117)$$

Essa matriz é Hermitiana, satisfaz  $\bar{\gamma}^5 = -\gamma^5$  e anticomuta com todas as matrizes gama iniciais.

Também temos o pseudo-escalar

$$\bar{\Psi}\gamma^5\Psi \quad (6.118)$$

e o pseudo-vetor

$$i\bar{\Psi}\gamma^5\gamma^I\Psi, \quad (6.119)$$

chamado de densidade de corrente axial.

Em um espaço-tempo curvo obtemos campos tensoriais a partir de espinores usando a téttrade  $e_I^\mu$  para mapear internamente quantidade do espaço de Minkowski para objetos no espaço tangente. A corrente vetorial fermiônica, por exemplo, é

$$e_I^\mu\bar{\Psi}\gamma^I\Psi. \quad (6.120)$$

A definição para uma derivada covariante  $SO(3,1)$  em um campo espinorial é dada por

$$\nabla_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi + \frac{1}{2}\omega_\mu^{IJ}\sigma_{IJ}\Psi \quad (6.121)$$

$$= \partial_\mu\Psi + \frac{1}{4}\omega_\mu^{IJ}\gamma_{[I}\gamma_{J]}\Psi. \quad (6.122)$$

O que nos permite definir uma ação fermiônica genericamente covariante, cujo termo cinético é

$$S_{\text{Dirac}} = \frac{1}{2} \int_M d^4x |e| \left( \bar{\Psi}\gamma^I e_I^\mu \nabla\Psi - \overline{\nabla_\mu\Psi} \gamma^I e_I^\mu \Psi \right). \quad (6.123)$$

Entretanto essa ação acoplada à ação de Einstein-Cartan fornece a II equação de estrutura de Cartan com termo de torção diferente de zero, resultando em contribuições do parâmetro  $\beta$  nas equações de campo clássicas. De modo a cancelar esse efeito Mercuri[133] introduz a ação de Holst-Dirac, onde a contribuição fermiônica aparece como um termo topológico de Nieh-Yan, deixando as equações clássicas inalteradas. O termo proposto é

$$S_{\text{Dirac}}^\alpha = \frac{1}{2} \int_M d^4x |e| \left[ \bar{\Psi}\gamma^I e_I^\mu \left( 1 - \frac{i}{\alpha}\gamma^5 \right) \nabla_\mu\Psi - \overline{\nabla_\mu\Psi} \left( 1 - \frac{i}{\alpha}\gamma^5 \right) \gamma^I e_I^\mu \Psi \right] \quad (6.124)$$

e considera um acoplamento não mínimo para campo de férmions. Nossa intenção é desenvolver a Lagrangiana generalizada considerando um valor  $\alpha$  constante arbitrário, mas concluiremos nossa análise fazendo  $\alpha = \gamma$ , ou seja, igual ao parâmetro de Immirzi. Agora, tomando a equação com acoplamento não mínimo mais os termos de gravitação temos

$$\begin{aligned}
S[e, \omega, \Psi] &= S_G[e, \omega] + S_{\text{Dirac}}^\alpha[e, \omega, \Psi] \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x |e| e_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} F_{\mu\nu}^{KL}(\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_M d^4x |e| \left[ \bar{\Psi} \gamma^I e_I^\mu \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \nabla_\mu \Psi - \overline{\nabla_\mu \Psi} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma^I e_I^\mu \Psi \right] \\
&= \frac{1}{2\kappa} \int_M d^4x |e| e_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL} \left(2\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{KL} + 2\omega_{[\mu}^{IK} \omega_{\nu]}^{LJ} \eta_{KL}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_M d^4x |e| \left[ \bar{\Psi} \gamma^I e_I^\mu \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \partial_\mu \Psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma^I e_I^\mu \Psi \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} \int_M d^4x |e| e_I^\mu \omega_\mu^{JK} \left[ \bar{\Psi} \gamma^I \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma_{[J} \gamma_{K]} \Psi - \overline{\gamma_{[J} \gamma_{K]} \Psi} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma^I \Psi \right].
\end{aligned} \tag{6.125}$$

Usando  $\overline{\sigma_{IJ}} = -\sigma_{IJ}$ ,

$$\gamma^I \sigma_{JK} + \sigma_{JK} \gamma^I = \gamma^I \gamma_J \gamma_K = i \epsilon^I{}_{JKL} \gamma^5 \gamma^L \tag{6.126}$$

e

$$-i \gamma^I \gamma^5 \sigma_{JK} - i \sigma_{JK} \gamma^5 \gamma^I = i \gamma^5 (\gamma^I \sigma_{JK} - \sigma_{JK} \gamma^I) = 2i \gamma^5 \gamma_L \delta_{[J}^L \delta_{K]}^I, \tag{6.127}$$

temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8} \left[ \bar{\Psi} \gamma^I \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma_{[J} \gamma_{K]} \Psi - \overline{\gamma_{[J} \gamma_{K]} \Psi} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma^I \Psi \right] \\
&= \frac{1}{8} \left[ 2\bar{\Psi} \gamma^I \sigma_{JK} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \Psi - 2\bar{\Psi} \overline{\sigma_{JK}} \left(1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5\right) \gamma^I \Psi \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[ \bar{\Psi} \gamma^I \sigma_{JK} \Psi + \bar{\Psi} \sigma_{JK} \gamma^I \Psi - \frac{i}{\alpha} \left( \bar{\Psi} \gamma^I \sigma_{JK} \gamma^5 \Psi + \bar{\Psi} \sigma_{JK} \gamma^5 \gamma^I \Psi \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} \left( i \epsilon^I{}_{JKL} \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^L \Psi + \frac{2i}{\alpha} \delta_{[J}^L \delta_{K]}^I \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma_L \Psi \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( i \epsilon^I{}_{JKL} J^L + \frac{2i}{\alpha} \delta_{[J}^L \delta_{K]}^I J_L \right).
\end{aligned} \tag{6.128}$$

De modo que

$$S_{\text{Dirac}}^\alpha = \frac{i}{4} \int_M d^4x |e| e_I^\mu \omega_\mu^{JK} \left( \epsilon^I{}_{JKL} J^L + \frac{2}{\alpha} \delta_{[J}^L \delta_{K]}^I J_L \right) + S_2, \tag{6.129}$$

onde  $S_2$  representa os termos da segunda integral na última igualdade da eq. (6.125).

Tomemos agora a variação da ação em relação à 1-forma de conexão-spin, temos

$$\frac{\delta S_G}{\delta \omega_\mu^{IJ}} = \epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda} \epsilon_{IJKL} P_{MN}^{KL} D_\nu (e_\sigma^M e_\lambda^N) \frac{|e|}{\kappa}. \tag{6.130}$$

Então,  $\frac{\delta S}{\delta \omega_\mu^{IJ}} = 0$ , implica em

$$\frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}\epsilon_{IJKL}P^{KL}}{\kappa}D_\nu(e_\sigma^M e_\lambda^N) - \frac{e_M^\mu}{4}\left(i\epsilon^I{}_{JKL}J^L + \frac{2i}{\alpha}\delta_{[J}^I\delta_{K]}^L J_L\right) = 0. \quad (6.131)$$

Logo,

$$\frac{\epsilon^{\mu\nu\sigma\lambda}\epsilon_{IJKL}P^{KL}}{\kappa}D_\nu(e_\sigma^M e_\lambda^N) = \frac{e_M^\mu}{4}\left(i\epsilon^I{}_{JKL}J^L + \frac{2i}{\alpha}\delta_{[J}^I\delta_{K]}^L J_L\right), \quad (6.132)$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{4}{\kappa}D_\nu(e_\sigma^M e_\lambda^N) &= e_M^\mu(P^{-1})_{IJ}{}^{KL}\left(i\epsilon^I{}_{JKL}J^L + \frac{2i}{\alpha}\delta_{[J}^I\delta_{K]}^L J_L\right) \\ &= e_M^\mu\frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}\left(\delta_I^{[K}\delta_J^{L]} + \frac{1}{2\gamma}\epsilon_{IJ}{}^{KL}\right)\left(i\epsilon^I{}_{JKL}J^L + \frac{2i}{\alpha}\delta_{[J}^I\delta_{K]}^L J_L\right) \\ &= e_M^\mu\frac{\gamma^2}{\gamma^2+1}\left(\epsilon_{IJN}^M J^N + \frac{2}{\alpha}\delta_{[I}^M\delta_{J]}^N J_N + \frac{1}{2\gamma}4\delta_{[I}^M\delta_{L]}^N J_N + \frac{1}{\alpha\gamma}\epsilon_{IJ}{}^{MN}J_N\right) \\ &= e_M^\mu\frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left(\gamma\epsilon_{IJN}^M J^N + \frac{1}{\alpha}\epsilon_{IJ}{}^{MN}J_N + 2\delta_{[I}^M\delta_{L]}^N J_N + \frac{2\gamma}{\alpha}\delta_{[I}^M\delta_{J]}^N J_N\right), \end{aligned} \quad (6.133)$$

onde usamos  $\epsilon_{IJ}{}^{KL}\epsilon_{KL}{}^{MN} = -\epsilon_{IJKL}\epsilon^{KLMN} = -2!(4-2)!\delta_{[I}^M\delta_{J]}^N = 4\delta_{[I}^M\delta_{J]}^N$ , logo

$$D_\nu(e_I^\nu e_J^\mu) = \frac{\kappa}{4}e_M^\mu\frac{\gamma}{\gamma^2+1}\left[\left(\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\epsilon_{IJN}^M J^N - 2\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\right)\delta_{[I}^M\delta_{J]}^N J_N\right]. \quad (6.134)$$

Multiplicando por  $e_{\mu L}$ , temos

$$\begin{aligned} D_\nu(e_I^\nu e_J^\mu)e_{\mu L} &= \eta_{J[L}D_\nu(e_{I]}^\nu) = \eta_{J[L}\nabla_\nu(e_{I]}^\nu) - \eta_{J[L}\omega_\nu{}^K{}_I e_{K]}^\nu \\ &:= \eta_{J[L}\tilde{\nabla}_\nu(e_{I]}^\nu) - \eta_{J[L}\omega_\nu{}^K{}_I e_{K]}^\nu + C_{\nu JL}e_I^\nu. \end{aligned} \quad (6.135)$$

Então

$$e_I^\nu C_{\nu JL} = \frac{\kappa\gamma}{4}\frac{1}{(\gamma^2+1)}\left[\left(\gamma + \frac{1}{\alpha}\right)\epsilon_{LIJN}J^N - 2\left(1 - \frac{\gamma}{\alpha}\eta_{I[J}J_{L]}\right)\right], \quad (6.136)$$

Podemos então escrever a Lagrangiana de Holst como

$$\frac{|e|}{2\kappa}e_I^\mu e_J^\nu P^{IJ}{}_{KL}F_{\mu\nu}{}^{KL} = \frac{|e|}{2\kappa}e_I^\mu e_J^\nu\left(\delta_K^{[I}\delta_L^{J]} - \frac{1}{2\gamma}\epsilon^{IJ}{}_{KL}\right)\left(2\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{IJ} + [\omega_\mu, \omega_\nu]{}^{IJ}\right). \quad (6.137)$$

### 6.3.5 Variação da ação com respeito a conexão

Para  $\alpha = \gamma$  obtemos

$$D_a(ee_I^{[a}e_J^{b]}) = \frac{\kappa}{4}|e|e_K^b\epsilon_{IJ}{}^{KL}J_L. \quad (6.138)$$

Da Eq. (6.135), temos que a conexão não é compatível com a tetrade, porém há uma contribuição de termo de torção à conexão de Lorentz que pode ser escrita como

$$\omega_a{}^{IJ} = \tilde{\omega}[e]_a{}^{IJ} + C_a{}^{IJ}. \quad (6.139)$$

De modo que a Eq. (6.138) pode ser resolvida fornecendo

$$C_{aJK} = \frac{\kappa}{4}e_a^I\epsilon_{IJKL}J^L. \quad (6.140)$$

### 6.3.6 Decomposição canônica da ação de Holst com fermions

Utilizando as Eqs. (6.48), (6.49) e (6.50), podemos reescrever a ação de Holst-Dirac como

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left[ \mathcal{E}_I^\mu - \frac{1}{N} (t^\mu - N^\mu) n_I \right] \times \left[ \bar{\Psi} \gamma^I e_I^\mu \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \right) \nabla_\mu \Psi - \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \right) \gamma^I e_I^\mu \Psi \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left[ \mathcal{E}_i^\mu \left( \bar{\Psi} \gamma^i \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^i \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \nabla_\mu \Psi - \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \gamma^i \Psi - \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \gamma^i \Psi \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{N} (t^\mu - N^\mu) \left( \bar{\Psi} \gamma^0 \nabla_\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \nabla_\mu \Psi - \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \bar{\nabla}_\mu \bar{\Psi} \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \left[ \mathcal{E}_i^\mu \left( \bar{\Psi} \gamma^i \left( \partial_\mu \Psi + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) - \frac{i}{\alpha} \bar{\Psi} \gamma^i \gamma^5 \left( \partial_\mu \Psi + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) \right) \right. \\
&\quad - \left( \partial_\mu \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \gamma^i \Psi - \frac{i}{\alpha} \left( \partial_\mu \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \gamma^5 \gamma^i \Psi \\
&\quad \left. + \frac{1}{N} (t^\mu - N^\mu) \left( \bar{\Psi} \gamma^0 \left( \partial_\mu \Psi + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) - \bar{\Psi} \gamma^0 \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \left( \partial_\mu \Psi + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \partial_\mu \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \gamma^0 \Psi - \left( \partial_\mu \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_\mu^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \frac{i}{\alpha} \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right] . \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Como na Seção (6.3), iremos tratar separadamente o termos simplético, de difeomorfismos espaciais e Hamiltoniano, a começar pelo termo simplético.

### 6.3.7 Termo simplético

Assumindo que estamos lidando com o problema em coordenadas adaptadas, podemos substituir o índice  $\mu$  do espaço tangente pelo índice  $a$ , indicando que tais vetores se encontram completamente na variedade imersa  $\Sigma_t$ . Nesse caso o termo simplético pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
S_{\text{symp}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \frac{t^a}{N} \left[ \bar{\Psi} \gamma^0 \left( \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) - \frac{i}{\alpha} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \left( \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \partial_a \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \gamma^0 \Psi + \frac{i}{\alpha} \left( \partial_a \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \Psi} \right) \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} t^a \left[ \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \bar{\Psi} \gamma^0 [\gamma_I, \gamma_J] \Psi - \frac{i}{\alpha} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \partial_a \Psi - \frac{i}{\alpha} \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right. \\
&\quad \left. - \partial_a \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \bar{\Psi} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \gamma^0 \Psi} + \frac{i}{\alpha} \partial_a \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^0 \Psi + \frac{i}{\alpha} \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} \bar{\Psi} \overline{[\gamma_I, \gamma_J] \gamma^5 \gamma^0 \Psi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} t^a \left[ \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{ij} \bar{\Psi} \gamma^0 [\gamma_i, \gamma_j] \Psi + \frac{2}{8} \omega_a^{0k} \bar{\Psi} \gamma^0 [\gamma_0, \gamma_k] \Psi \right. \\
&\quad - \frac{i}{\alpha} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \partial_a \Psi - \frac{i}{\alpha} \frac{1}{8} \omega_a^{ij} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 [\gamma_i, \gamma_j] \Psi - \frac{i}{\alpha} \frac{2}{8} \omega_a^{0k} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 [\gamma_0, \gamma_k] \Psi \\
&\quad - \partial_a \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{ij} \bar{\Psi} [\gamma_i, \gamma_j] \gamma^0 \Psi - \frac{2}{8} \omega_a^{0k} \bar{\Psi} [\gamma_0, \gamma_k] \gamma^0 \Psi \\
&\quad \left. + \frac{i}{\alpha} \partial_a \bar{\Psi} \gamma^5 \gamma^0 \Psi - \frac{i}{\alpha} \frac{1}{8} \omega_a^{ij} \bar{\Psi} [\gamma_i, \gamma_j] \gamma^5 \gamma^0 \Psi + \frac{i}{\alpha} \frac{2}{8} \omega_a^{0k} \bar{\Psi} [\gamma_0, \gamma_k] \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right] , \tag{6.142}
\end{aligned}$$

onde usamos  $\overline{[\gamma_i, \gamma_j]} = -[\gamma_i, \gamma_j]$  e  $\overline{[\gamma_0, \gamma_k]} = [\gamma_0, \gamma_k]$ , além de

$$\begin{aligned}\omega_a^{0k}[\gamma_0, \gamma_k] + \omega_a^{k0}[\gamma_k, \gamma_0] &= \omega_a^{0k}[\gamma_0, \gamma_k] + (-\omega_a^{0k})(-[\gamma_0, \gamma_k]) \\ &= 2\omega_a^{0k}[\gamma_0, \gamma_k].\end{aligned}\quad (6.143)$$

De modo que a Eq. (6.142) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} t^a \left[ \overline{\Psi} \gamma^0 \partial_a \Psi - \frac{i}{\alpha} \overline{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \partial_a \Psi - \partial_a \overline{\Psi} \gamma^0 \Psi + \frac{i}{\alpha} \partial_a \overline{\Psi} \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right. \\ &+ \frac{1}{8} \omega_a^{ij} \overline{\Psi} \left( \gamma^0 [\gamma_i, \gamma_j] - \frac{i}{\alpha} \gamma^0 \gamma^5 [\gamma_i, \gamma_j] + [\gamma_i, \gamma_j] \gamma^0 - \frac{i}{\alpha} [\gamma_i, \gamma_j] \gamma^5 \gamma^0 \right) \Psi \\ &\left. + \frac{2}{8} \omega_a^{0k} \overline{\Psi} \left( \gamma^0 [\gamma_0, \gamma_k] - \frac{i}{\alpha} \gamma^0 \gamma^5 [\gamma_0, \gamma_k] - [\gamma_0, \gamma_k] \gamma^0 + \frac{i}{\alpha} [\gamma_0, \gamma_k] \gamma^5 \gamma^0 \right) \Psi \right] \quad (6.144)\end{aligned}$$

Agora, usando os resultados do Apêndice (H), podemos escrever

$$\begin{aligned}S_{\text{symp}} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} t^a \left( (i\psi^\dagger \partial_a \psi + i\eta^\dagger \partial_a \eta) - \frac{i}{\alpha} (-i\psi^\dagger \partial_a \psi + i\eta^\dagger \partial_a \eta) - (i\psi^\dagger \partial_a \psi + i\eta^\dagger \partial_a \eta) \right. \\ &+ \frac{i}{\alpha} (i\psi^\dagger \partial_a \psi - i\eta^\dagger \partial_a \eta) \\ &+ \frac{1}{8} \omega_a^{ij} (2i\epsilon_{ij}{}^k) \left[ (i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) - \frac{i}{\alpha} (-i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) + (i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) \right. \\ &\left. - \frac{i}{\alpha} (i\psi^\dagger \sigma_k \psi - i\eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] \\ &+ \frac{1}{4} \omega_a^{0k} (2) \left[ -(-i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) - \frac{i}{\alpha} (i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) - (-1)(-i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) \right. \\ &\left. - \frac{i}{\alpha} (i\psi^\dagger \sigma_k \psi + i\eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] \Big) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) (i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\eta^\dagger \dot{\eta}) - \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) (i\psi^\dagger \psi - i\eta^\dagger \eta) \\ &+ \frac{i^2}{4} \omega_t^{ij} \epsilon_{ij}{}^k \left[ 2(\psi^\dagger \sigma_k \psi + \eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] + \frac{1}{2} \omega_t^{0k} \left[ \frac{-2i^2}{\alpha} (\psi^\dagger \sigma_k \psi + \eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) (i\psi^\dagger \dot{\psi} - i\eta^\dagger \dot{\eta}) - \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) (i\psi^\dagger \psi - i\eta^\dagger \eta) - \frac{1}{2} \omega_t^{ij} \epsilon_{ij}{}^k J_k \\ &+ \frac{1}{\alpha} \omega_t^{0k} J_k + (1-1)\gamma \omega_t^{0k} J_k \\ &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} i \left[ \theta_L (\psi^\dagger \dot{\psi} - \eta^\dagger \dot{\eta}) - \theta_R (\psi^\dagger \psi - \eta^\dagger \eta) \right] - \frac{1}{2} \Lambda^i J_i + \frac{\beta}{2} \omega_t^{0k} J_k, \quad (6.145)\end{aligned}$$

onde  $\theta_{L/R} = \frac{1}{2} \left( 1 \pm \frac{i}{\alpha} \right)$ ,  $\Lambda^i = \frac{1}{2} \omega_t^{ij} \epsilon_{ij}{}^k + \gamma \omega_t^{0k}$ , tal como definido na Eq. (6.83), e  $\beta = \gamma + \frac{1}{\alpha}$ .

Em seguida prosseguimos para o cálculo do termo de difeomorfismos espaciais.

### 6.3.8 Termo de difeomorfismos

O termo seguinte da Eq. (6.141) a ser analisado é a parte proporcional ao vetor deslocamento  $N^\mu$ . Novamente, utilizando coordenadas adaptadas, temos que esse termo é

igual a

$$\begin{aligned}
S_{\text{diff}} &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \frac{N^a}{N} \left[ \bar{\Psi} \gamma^0 \left( \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) - \frac{i}{\alpha} \bar{\Psi} \gamma^0 \gamma^5 \left( \partial_a \Psi + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\gamma_I, \gamma_J] \Psi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left( \partial_a \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\overline{[\gamma_I, \gamma_J]}] \bar{\Psi} \right) \gamma^0 \Psi + \frac{i}{\alpha} \left( \partial_a \bar{\Psi} + \frac{1}{8} \omega_a^{IJ} [\overline{[\gamma_I, \gamma_J]}] \bar{\Psi} \right) \gamma^5 \gamma^0 \Psi \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} N^a \left[ \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) (i\psi^\dagger \mathcal{D}_a \psi - i\overline{\mathcal{D}_a \eta \eta}) - \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) (i\overline{\mathcal{D}_a \psi} \psi - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a \eta) + \frac{1}{\alpha} K_a^k \right] \quad (6.146)
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado essencialmente idêntico ao da Eq. (6.145), exceto pela substituição  $t^a \rightarrow -N^a$ , notando, particularmente, que  $t^a \omega_a^{0k} \rightarrow -N^a \omega_a^{0k} = -N^a K_a^k$ . Além disso, como na última linha estamos lidando com derivadas covariantes espaciais, definimos a expressão para derivadas covariantes de espinores, dada pela Eq. (6.121), como

$$\mathcal{D}_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{1}{4} \omega_a^{ij} [\gamma_i, \gamma_j] \Psi \quad (6.147)$$

no caso espacial. De modo que podemos definir a derivada covariante em relação à conexão de Ashtekar-Barbero, assim como seu complexo conjugado, respectivamente, como

$$\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \Psi = \mathcal{D}_a \Psi + i \frac{1}{4} \gamma K_a^i [\gamma_0, \gamma_i] \Psi, \quad (6.148)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \bar{\Psi} &= \overline{\mathcal{D}_a \bar{\Psi}} - i \frac{1}{4} \gamma K_a^i [\overline{[\gamma_0, \gamma_i]}] \bar{\Psi} \\
&= \overline{\mathcal{D}_a \bar{\Psi}} - i \frac{1}{4} \gamma K_a^i \bar{\Psi} [\gamma_0, \gamma_i], \quad (6.149)
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi} \mathcal{D}_a^{(A)} \Psi &= \bar{\Psi} \mathcal{D}_a \Psi + i \frac{1}{4} \gamma K_a^i \bar{\Psi} [\gamma_0, \gamma_i] \Psi = \bar{\Psi} \mathcal{D}_a \Psi + \frac{i^2 \gamma}{2} K_a^i (\psi^\dagger \sigma_i \psi - \eta^\dagger \sigma_i \eta) \\
&= i\psi^\dagger \mathcal{D}_a \psi + \frac{i^2 \gamma}{2} K_a^i \psi^\dagger \sigma_i \psi + i\eta^\dagger \mathcal{D}_a \eta - \frac{i^2 \gamma}{2} K_a^i \eta^\dagger \sigma_i \eta, \quad (6.150)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \bar{\Psi} \Psi &= \overline{\mathcal{D}_a \bar{\Psi}} \Psi + i \frac{1}{4} \gamma K_a^i \bar{\Psi} [\gamma_0, \gamma_i] \Psi = \overline{\mathcal{D}_a \bar{\Psi}} \Psi - \frac{i\gamma}{2} K_a^i (\psi^\dagger \sigma_i \psi + \eta^\dagger \sigma_i \eta) \\
&= i\overline{\mathcal{D}_a \psi} \psi - \frac{i^2 \gamma}{2} K_a^i \psi^\dagger \sigma_i \psi + \overline{\mathcal{D}_a \eta \eta} + \frac{i^2 \gamma}{2} K_a^i \eta^\dagger \sigma_i \eta, \quad (6.151)
\end{aligned}$$

Utilizando as definições acima podemos reescrever a expressão (6.146) como

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} N^a \left[ i \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) \left( \psi^\dagger \mathcal{D}_a \psi + \frac{i\gamma}{2} K_a^k \psi^\dagger \sigma_k \psi - \overline{\mathcal{D}_a \eta \eta} + \frac{i\gamma}{2} K_a^k \eta^\dagger \sigma_k \eta \right) \right. \\
&\quad \left. - i \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) \left( \overline{\mathcal{D}_a \psi} \psi - \frac{i\gamma}{2} K_a^k \psi^\dagger \sigma_k \psi - \eta^\dagger \mathcal{D}_a \eta - \frac{i\gamma}{2} K_a^k \eta^\dagger \sigma_k \eta \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i^2}{2} \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) \gamma K_a^k (\psi^\dagger \sigma_k \psi + \eta^\dagger \eta) - \frac{i^2}{2} \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) \gamma K_a^k (\psi^\dagger \sigma_k \psi + \eta^\dagger \eta) + \frac{1}{\alpha} K_a^k J_k \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} N^a \left[ 2\theta_L (i\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \eta \eta) - 2\theta_R (i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \psi \psi - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) \right. \\
&\quad \left. + \left( \gamma + \frac{1}{\alpha} \right) K_a^k J_k \right] \\
&= -\int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} N^a \left[ \theta_L (i\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \eta \eta) - \theta_R (i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)}} \psi \psi - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) + \frac{\beta}{2} K_a^k J_k \right]. \quad (6.152)
\end{aligned}$$

E por último temos a tarefa de explicitar o termo Hamiltoniano escrito nas variáveis de Ashtekar.

### 6.3.9 Termo Hamiltoniano

Já o termo Hamiltoniano em (6.141) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \mathcal{E}_i^a \left\{ i \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \psi + \overline{\mathcal{D}_a \eta} \sigma^i \eta) - i \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \eta + \overline{\mathcal{D}_a \psi} \sigma^i \psi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \omega_a^{0k} \left[ \psi^\dagger (\sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i) \psi + \eta^\dagger (\sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i) \eta + \frac{i}{\alpha} (\psi^\dagger (\sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i) \psi - \eta^\dagger (\sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i) \eta) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \mathcal{E}_i^a \left\{ i \left( 1 + \frac{i}{\alpha} \right) (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \psi + \overline{\mathcal{D}_a \eta} \sigma^i \eta) - i \left( 1 - \frac{i}{\alpha} \right) (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \eta + \overline{\mathcal{D}_a \psi} \sigma^i \psi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \omega_a^{0k} (\psi^\dagger [\sigma^i, \sigma_k] \psi + \eta^\dagger [\sigma^i, \sigma_k] \eta) \right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \mathcal{E}_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \psi + \overline{\mathcal{D}_a \eta} \sigma^i \eta) - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \eta + \overline{\mathcal{D}_a \psi} \sigma^i \psi) - \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} K_a^j J^k \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \mathcal{E}_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \psi - \frac{i\gamma}{2} K_a^k \psi^\dagger \sigma^i \sigma_k \psi + \overline{\mathcal{D}_a \eta} \sigma^i \eta + \frac{i\gamma}{2} K_a^k \eta^\dagger \sigma_k \sigma^i \eta) \right. \\
&\quad \left. - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a \eta - \frac{i\gamma}{2} K_a^k \eta^\dagger \sigma_k \sigma^i \eta + \overline{\mathcal{D}_a \psi} \sigma^i \psi + \frac{i\gamma}{2} K_a^k \psi^\dagger \sigma^i \sigma_k \psi) + \frac{i^2 \gamma}{4} K_a^k (\psi^\dagger \sigma^i \sigma_k \psi + \psi^\dagger \sigma_k \sigma^i \psi) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{\alpha} (\psi^\dagger \sigma^i \sigma_k \psi - \psi^\dagger \sigma_k \sigma^i \psi) - \eta^\dagger \sigma^i \sigma_k \eta - \eta^\dagger \sigma_k \sigma^i \eta - \frac{i}{\alpha} (\eta^\dagger \sigma^i \sigma_k \eta - \eta^\dagger \sigma_k \sigma^i \eta) \right] - \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} K_a^j J^k \\
&= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \sqrt{h} \mathcal{E}_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \sigma^i \eta) - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \sigma^i \psi) \right. \\
&\quad \left. - \frac{i\gamma}{4} (2i \epsilon^i{}_{jk}) K_a^j J^k - \frac{1}{2} \epsilon^i{}_{jk} K_a^j J^k \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x N \gamma \kappa P_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \sigma^i \eta) - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \sigma^i \psi) \right] \\
&\quad - \frac{\gamma \kappa}{2} \theta \epsilon^i{}_{jk} P_i^a K_a^j J^k, \tag{6.153}
\end{aligned}$$

onde utilizamos  $\theta = 1 - \frac{\gamma}{\alpha}$  e a definição de  $P_i^a$  dada pela Eq. (6.59).

### 6.3.10 Contribuição Fermiônica

Coletando os termos (6.145), (6.152) e (6.153), temos a contribuição fermiônica da ação de Holst com férmions nas variáveis de Ashtekar

$$\begin{aligned}
S_{\text{Dirac}}^\gamma &= \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left\{ \left[ (i\sqrt{h}\theta_L \psi^\dagger) \dot{\psi} - (i\sqrt{h}\theta_L \eta^\dagger) \dot{\eta} - \dot{\psi}^\dagger (i\sqrt{h}\theta_R \psi) + \dot{\eta}^\dagger (i\sqrt{h}\theta_R \eta) \right] - \frac{1}{2} \Lambda^i J_i \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta}{2} \omega_t^{0k} J_k + N \gamma \kappa P_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \sigma^i \eta) - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \sigma^i \psi) - \frac{1}{2} \theta \epsilon^i{}_{jk} K_a^j J^k \right] \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{h} N^a \left[ \theta_L (i\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \eta) - \theta_R (i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \psi - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) + \frac{\beta}{2} K_a^k J_k \right] \right\}. \tag{6.154}
\end{aligned}$$

### 6.3.11 Ação Canônica de Holst-Dirac

Somando os resultados para a ação canônica de Holst, Eq. (6.99), e para a ação canônica de Dirac minimamente acoplada, Eq. (6.154), temos a ação canônica de Holst-

Dirac dada por

$$\begin{aligned}
S_{\text{H-D}} = & \int dt d^3x \left( \left[ (i\sqrt{\hbar}\theta_L\psi^\dagger)\dot{\psi} - (i\sqrt{\hbar}\theta_L\eta^\dagger)\dot{\eta} - \psi^\dagger(i\sqrt{\hbar}\theta_R\psi) + \eta^\dagger(i\sqrt{\hbar}\theta_R\eta) \right] + P_i^a \mathcal{L}_t(+A_a^i) \right. \\
& + \Lambda^j \left( \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b - \frac{1}{2} J_i \right) + \omega_t^{0i} \left( (1 + \gamma^2) \epsilon_{jmn} K_b^m P_n^b - \frac{\beta}{2} J_k \right) \\
& + N \left\{ \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{\hbar}} \epsilon^{ij} \left[ \mathcal{F}_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \epsilon_{qp}^j K_a^q K_b^p - 2 \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) \mathcal{D}_{[a}^{(A)} K_{b]}^k \right] \right. \\
& + \gamma \kappa P_i^a \left[ i\theta_L(\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta \sigma^i \eta}) - i\theta_R(\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi \sigma^i \psi}) - \frac{1}{2} \theta \epsilon^i{}_{jk} K_a^j J^k \right] \\
& - N^a \left\{ P_j^b \left[ \mathcal{F}_{ab}^j + (1 + \gamma^2) \epsilon_{kl}^j K_{[a}^k K_{b]}^l \right] \right. \\
& \left. \left. + \left[ \theta_L(i\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta \eta}) - \theta_R(i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi \psi} - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) + \frac{\beta}{2} K_a^k J_k \right] \right\} \right) \quad (6.155)
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} D_a S^j = \epsilon^j{}_m{}^n \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{\hbar}} (1 + \gamma^2) D_a K_b - \frac{\beta}{2\sqrt{\hbar}} P_j^a D_a (\sqrt{\hbar} J^j) + (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_m{}^n K_b^m \frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} D_a P_n^b. \quad (6.156)$$

Donde o uso de  $S^i$  é motivado pelo surgimento do vínculo de segunda classe  $S^i = 0$ , encontrado logo abaixo (eq. (6.196)), associado ao multiplicador de Lagrange  $\omega_t^{0j}$ , cujo valor pode ser encontrado como uma função das demais variáveis da teoria, como ficará explícito mais adiante.

Porém, partindo do fato que a derivada covariante de uma co-tetrada é igual a zero, ou seja,  $D_a e_b^i = 0$ , temos que

$$D_a \frac{P_i^b}{\sqrt{\hbar}} = \frac{1}{\gamma \kappa} D_a \mathcal{E}_i^a = \frac{1}{\gamma \kappa} D_a (e_i^a + n^a n_i) = \frac{1}{\gamma \kappa} D_a e_i^a = 0. \quad (6.157)$$

Assim, de

$$D_a \left( \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{\hbar}} \right) = P_n^b D_a \left( \frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} \right) + \frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} D_a P_n^b = \frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} D_a P_n^b \quad (6.158)$$

e

$$D_a \left( \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{\hbar}} \right) = \frac{P_n^b}{\sqrt{\hbar}} D_a P_j^a + P_j^a D_a \left( \frac{P_n^b}{\sqrt{\hbar}} \right) = \frac{P_n^b}{\sqrt{\hbar}} D_a P_j^a, \quad (6.159)$$

temos

$$\frac{P_j^a}{\sqrt{\hbar}} D_a P_n^b = \frac{P_n^b}{\sqrt{\hbar}} D_a P_j^a, \quad (6.160)$$

de modo que podemos escrever a Eq. (6.156) como

$$\begin{aligned}
\frac{P_j^a}{\sqrt{h}} D_a S^j &= \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} (1 + \gamma^2) D_a K_b - \frac{\beta}{2\sqrt{h}} P_j^a D_a (\sqrt{h} J^j) + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} D_a P_j^a \\
&= \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} (1 + \gamma^2) D_a K_b - \frac{\beta}{2\sqrt{h}} P_j^a D_a (\sqrt{h} J^j) + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} D_a^{(A)} P_j^a \\
&\quad - \gamma \frac{(1+\gamma^2)}{\sqrt{h}} \epsilon_m^{jn} K_b^m P_n^b \epsilon_q^{jp} K_a^q P_p^a \\
&= \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} (1 + \gamma^2) D_a K_b - \frac{\beta}{2\sqrt{h}} P_j^a D_a (\sqrt{h} J^j) + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} \left( D_a^{(A)} P_j^a - \frac{\sqrt{h}}{2} J^j \right) \\
&\quad + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} \frac{\sqrt{h}}{2} J^j - \gamma \epsilon_q^{jp} K_a^q P_p^a \left( \frac{(1+\gamma^2)}{\sqrt{h}} \epsilon_m^{jn} K_b^m P_n^b - \frac{\beta}{2} J^j \right) - \gamma \frac{\beta}{2} \epsilon_{jq}^p K_a^q P_p^a J^j \\
&= \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} (1 + \gamma^2) D_a K_b - \frac{\beta}{2\sqrt{h}} P_j^a D_a (\sqrt{h} J^j) + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} \left( \frac{\gamma}{1+\gamma^2} \right) S_j \\
&\quad + (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} K_b^m \frac{P_n^b}{\sqrt{h}} \frac{\sqrt{h}}{2} J^j - \gamma \epsilon_q^{jp} K_a^q P_p^a S_j - \gamma \frac{\beta}{2} \epsilon_{jq}^p K_a^q P_p^a J^j \\
&= (1 + \gamma^2) \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} D_a K_b - \frac{1+\gamma^2}{2\gamma} \frac{P_j^a}{\sqrt{h}} D_a^{(A)} (\sqrt{h} J^j) - \frac{1+\gamma^2}{2} \epsilon_{km}^l K_a^k P_l^a J^m . \quad (6.161)
\end{aligned}$$

onde, a partir de agora, usamos  $\alpha = \gamma$  por uma questão de simplicidade. Usando  $\frac{P_j^a}{\sqrt{h}} D_a S^j = D_a \left( \frac{P_j^a S^j}{\sqrt{h}} \right) = \tilde{D}_a \left( \frac{P_j^a S^j}{\sqrt{h}} \right) = \left( \frac{1+\gamma^2}{\gamma} \right) \tilde{D}_a \left( \frac{P_j^a G^j}{\sqrt{h}} \right)$  e  $\epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} D_a K_b = \epsilon_m^{jn} \frac{P_j^a P_n^b}{\sqrt{h}} D_{[a} K_{b]}$ , temos

$$\begin{aligned}
-\gamma \kappa (1 + \gamma^2) \epsilon^{jk}_l \frac{P_j^a P_k^b}{\sqrt{h}} D_{[a} K_{b]}^l &= (1 + \gamma^2) \kappa \tilde{D}_a \left( \frac{P_j^a G^j}{\sqrt{h}} \right) + \kappa (1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{h}} D_a^{(A)} (\sqrt{h} J^j) \\
&\quad + \gamma \kappa \frac{1 + \gamma^2}{2} \epsilon_{km}^l K_a^k P_l^a J^m . \quad (6.162)
\end{aligned}$$

Portanto, a ação de Holst-Dirac pode ser finalmente escrita como

$$\begin{aligned}
S_{\text{H-D}} &= \int dt d^3x \left( \dot{A}_a^i P_i^a + \dot{\psi} \pi_\psi + \dot{\eta} \pi_\eta + \dot{\psi}^\dagger \pi_{\bar{\psi}} + \dot{\eta}^\dagger \pi_{\bar{\eta}} + \Lambda^j \left( \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b - \frac{1}{2} J_j \right) \right. \\
&\quad + \omega_t^{0i} \left( (1 + \gamma^2) \epsilon_{im}^n K_b^m P_n^b - \frac{\beta}{2} J_i \right) \\
&\quad + N \left\{ \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{h}} \epsilon^{ij}_k \left[ \mathcal{F}_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \epsilon_{qp}^j K_a^q K_b^p \right] + (1 + \gamma^2) \kappa \tilde{D}_a \left( \frac{P_j^a G^j}{\sqrt{h}} \right) \right. \\
&\quad + \kappa (1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{h}} D_a^{(A)} (\sqrt{h} J^j) + \gamma \kappa \frac{1 + \gamma^2}{2} \epsilon_{km}^l K_a^k P_l^a J^m \\
&\quad \left. + \gamma \kappa P_i^a \left[ i \theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \sigma^i \eta) - i \theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \sigma^i \psi) - \frac{1}{2} \theta \epsilon^i_{jk} K_a^j J^k \right] \right\} \\
&\quad \left. - N^a \left\{ P_j^b \mathcal{F}_{ab}^j + \left[ \theta_L (i \psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \eta) - \theta_R (i \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \psi - i \eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) \right] - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} K_a^j G_j \right\} \right) . \quad (6.163)
\end{aligned}$$

## 6.4 Análise Simplética da Ação de Holst-Dirac

Nessa seção fazemos a análise canônica da ação de Holst-Dirac no formalismo simplético utilizando o algoritmo de Barcelos-Neto e Wotzasek. Na análise a seguir obtemos os vínculos da teoria, eliminamos graus de liberdade espúrios através da resolução de

alguns dos vínculos e explicitamos os vínculos restantes como geradores de transformações de calibre, fazemos também a contagem de graus de liberdade do sistema e, finalmente, obtemos as transformações de calibre associadas aos campos que descrevem completamente a teoria.

Primeiro definimos a Lagrangiana de ordem zero por

$$S_{\text{H-D}} = \int dt d^3x \mathcal{L}^{(0)} \quad (6.164)$$

ou

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_a^i P_i^a + \dot{\psi}(i\sqrt{\hbar}\theta_L\psi^\dagger) + \dot{\psi}^\dagger(-i\sqrt{\hbar}\theta_R\psi) + \dot{\eta}(-i\sqrt{\hbar}\theta_L\eta^\dagger) + \dot{\eta}^\dagger(i\sqrt{\hbar}\theta_R\eta) - \mathcal{V}^{(0)}, \quad (6.165)$$

com

$$\mathcal{V}^{(0)} \equiv \Lambda^i G_i + \omega_t^{0i} S_i + NC + N^a C_a. \quad (6.166)$$

Seguindo a análise simplética a partir de (6.164), temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \alpha \end{pmatrix}^{(0)} &= \begin{pmatrix} A_a^i & P_i^a & \psi & \psi^\dagger & \eta & \eta^\dagger & \Lambda^i & K_a^i & \omega_t^{0i} & N & N^a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}^{(0)} &= \begin{pmatrix} P_j^b & 0 & i\sqrt{\hbar}\theta_L\psi^\dagger & -i\sqrt{\hbar}\theta_R\psi & -i\sqrt{\hbar}\theta_L\eta^\dagger & i\sqrt{\hbar}\theta_R\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.167)$$

Para escrever o vetor simplético escolhemos os campos  $\psi$ ,  $\psi^\dagger$ ,  $\eta$  e  $\eta^\dagger$  como variáveis da teoria, assim como as expressões indicadas como 1-forma simpléticas correspondentes. Tal escolha não é livre de problemas, discutiremos o caso mais adiante.

Donde obtemos a 2-forma simplética através de

$$\begin{aligned} \frac{\delta a_\beta}{\delta \xi^\alpha} &= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 (\delta_j^i \delta_a^b) + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \frac{\delta}{\delta \psi^\dagger} (i\sqrt{\hbar}\theta_R\psi^\dagger) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 \frac{\delta}{\delta \psi} (-i\sqrt{\hbar}\theta_L\psi) \\ &\quad + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 \frac{\delta}{\delta \eta^\dagger} (-i\sqrt{\hbar}\theta_L\eta^\dagger) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 \frac{\delta}{\delta \eta} (i\sqrt{\hbar}\theta_R\eta) \\ &\quad + \delta_\alpha^2 \left[ \delta_\beta^3 (i\theta_L\psi^\dagger) + \delta_\beta^4 (-i\theta_R\psi) + \delta_\beta^5 (-i\theta_L\eta^\dagger) + \delta_\beta^6 (i\theta_R\eta) \right] \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} \\ &= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 (\delta_j^i \delta_a^b) + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 (i\sqrt{\hbar}\theta_R) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 (-i\sqrt{\hbar}\theta_L) + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 (-i\sqrt{\hbar}\theta_L) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 (i\sqrt{\hbar}\theta_R) \\ &\quad + \delta_\alpha^2 \left[ \delta_\beta^3 (i\theta_L\psi^\dagger) + \delta_\beta^4 (-i\theta_R\psi) + \delta_\beta^5 (-i\theta_L\eta^\dagger) + \delta_\beta^6 (i\theta_R\eta) \right] \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}, \end{aligned} \quad (6.168)$$

resultando na estrutura pré-simplética dada por

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{(0)} &= \frac{\delta a_\beta}{\delta \xi^\alpha} - (-1)^{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta} \frac{\delta a_\alpha}{\delta \xi^\beta} \\
&= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 (\delta_j^i \delta_a^b) - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 (\delta_i^j \delta_b^a) + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 (i\sqrt{\hbar} \theta_R) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 (i\sqrt{\hbar} \theta_R) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 (-i\sqrt{\hbar} \theta_L) \\
&\quad + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 (-i\sqrt{\hbar} \theta_L) + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 (-i\sqrt{\hbar} \theta_L) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 (-i\sqrt{\hbar} \theta_L) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 (i\sqrt{\hbar} \theta_R) + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 (i\sqrt{\hbar} \theta_R) \\
&\quad + \left( \delta_\alpha^2 \left[ \delta_\beta^3 (i\theta_L \psi^\dagger) + \delta_\beta^4 (-i\theta_R \psi) + \delta_\beta^5 (-i\theta_L \eta^\dagger) + \delta_\beta^6 (i\theta_R \eta) \right] \frac{\delta \sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} + \alpha \leftrightarrow \beta \right) \\
&= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 (\delta_j^i \delta_a^b) - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 (\delta_i^j \delta_b^a) + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 (i\sqrt{\hbar} (\theta_R - \theta_L)) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 (i\sqrt{\hbar} (\theta_R - \theta_L)) \\
&\quad + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 (i\sqrt{\hbar} (\theta_R - \theta_L)) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 (i\sqrt{\hbar} (\theta_R - \theta_L)) \\
&\quad + \left( \delta_\alpha^2 \left[ \delta_\beta^3 (i\theta_L \psi^\dagger) + \delta_\beta^4 (-i\theta_R \psi) + \delta_\beta^5 (-i\theta_L \eta^\dagger) + \delta_\beta^6 (i\theta_R \eta) \right] \frac{\delta \sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} - \alpha \leftrightarrow \beta \right) \\
&= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 (\delta_j^i \delta_a^b) - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 (\delta_i^j \delta_b^a) + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 (\sqrt{\hbar}) + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 (\sqrt{\hbar}) + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 (\sqrt{\hbar}) + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 (\sqrt{\hbar}) \\
&\quad + \left( \delta_\alpha^2 \left[ \delta_\beta^3 (i\theta_L \psi^\dagger) + \delta_\beta^4 (-i\theta_R \psi) + \delta_\beta^5 (-i\theta_L \eta^\dagger) + \delta_\beta^6 (i\theta_R \eta) \right] \frac{\delta \sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} - \alpha \leftrightarrow \beta \right). \quad (6.169)
\end{aligned}$$

cuja matriz pré-simplética associada possui 5 modos-zero triviais no espaço simplético, a saber,

$$(\nu_1)^i = (0_4 \ 1^i \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (6.170)$$

$$(\nu_2)_a^i = (0_4 \ 0 \ 1_a^i \ 0 \ 0 \ 0), \quad (6.171)$$

$$(\nu_3)^i = (0_4 \ 0 \ 0 \ 1^i \ 0 \ 0), \quad (6.172)$$

$$(\nu_4) = (0_4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0), \quad (6.173)$$

$$(\nu_5)^a = (0_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1^a). \quad (6.174)$$

Através da condição de consistência aplicadas em cada um dos modos-zero obtemos

os seguinte vínculos triviais,

$$G^i = \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b - \frac{1}{2} J_i = 0, \quad (6.175)$$

$$\omega_{[2]a}^i = \frac{\delta \mathcal{V}^{(0)}}{\delta K_a^i} = 0, \quad (6.176)$$

$$S_i = \mathcal{D}_b^{(A)} P_j^b - \frac{1}{2} J_i - (1 + \gamma^2) \epsilon_{im} {}^n K_b^m P_n^b + \frac{\beta}{2} J_i = 0, \quad (6.177)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{\kappa}{2} \gamma^2 \frac{P_i^a P_j^b}{\sqrt{\hbar}} \epsilon^{ij}{}_k [\mathcal{F}_{ab}^k - (1 + \gamma^2) \epsilon^j{}_{qp} K_a^q K_b^p] + (1 + \gamma^2) \kappa \tilde{D}_a \left( \frac{P_j^a G_j}{\sqrt{\hbar}} \right) \\ &+ \kappa (1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{\hbar}} D_a^{(A)} (\sqrt{\hbar} J^j) + \gamma \kappa \frac{1 + \gamma^2}{2} \epsilon_k{}^l{}_m K_a^k P_l^a J^m \\ &+ \gamma \kappa P_i^a \left[ i\theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta \sigma^i \eta}) - i\theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi \sigma^i \psi}) \right], \end{aligned} \quad (6.178)$$

$$C^a = P_j^b \mathcal{F}_{ab}^j + \left[ \theta_L (i\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta \eta}) - \theta_R (i\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi \psi} - i\eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) \right] - \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} K_a^j G_j. \quad (6.179)$$

Calculamos o resultado da Equação (6.176) por partes, primeiro temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta(N^a C_a)}{\delta \Gamma_c^l} &= \frac{\delta}{\delta \Gamma_c^l} \left[ -(\gamma^2 + 1) \frac{(A_a^i - \Gamma_a^i)}{\gamma} \left( \epsilon_{ik} {}^m (A_a^i - \Gamma_a^i) P_m^b - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J_i \right) N^a \right] \\ &= -2 \frac{(\gamma^2 + 1)}{\gamma^2} \epsilon_{lk} {}^m P_m^b N^c (A_a^i - \Gamma_a^i) - \frac{(\gamma^2 + 1)}{2\gamma} \sqrt{\hbar} J_l N^c. \end{aligned} \quad (6.180)$$

Também temos

$$\frac{\delta(\omega_t^{0i} S_i)}{\delta \Gamma_c^l} = (1 + \gamma^2) \omega_t^{0i} \frac{\delta}{\delta \Gamma_c^l} \left[ \epsilon_{ik} {}^m \frac{1}{\gamma} (A_b^k - \Gamma_b^k) P_m^b \right] = -\frac{(1 + \gamma^2)}{\gamma} \omega_t^{0i} \epsilon_{il} {}^m P_m^c. \quad (6.181)$$

Da parte relativa ao termo Hamiltoniano primeiro reescrevamos a Eq. (6.178) como

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma^2 \kappa N}{2\sqrt{\hbar}} P_i^a P_j^b \left[ \epsilon^{ij}{}_k \left( 2\partial_{[\alpha} A_{\beta]}^k + \epsilon_{qp}^k A_\alpha^q A_\beta^p \right) - 2(\gamma^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j - 2 \frac{(1 + \gamma^2)}{\gamma} \epsilon^{jk}{}_m \left( \partial_{[\alpha} K_{\beta]}^m + \epsilon_{qp}^m K_\alpha^q K_\beta^p \right) \right] \\ &+ i\gamma \kappa N P_i^a \left[ \theta_L \left( \psi^\dagger \sigma^i \partial_\alpha \psi + \partial_\alpha \eta^\dagger \sigma^i \eta \right) - \theta_R \left( \eta^\dagger \sigma^i \partial_\alpha \eta + \partial_\alpha \psi^\dagger \sigma^i \psi \right) \right] \\ &+ \gamma \kappa P_i^a \frac{N}{2} \Gamma_a^k \left[ \psi^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i \right) \psi - \eta^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i \right) \eta + \frac{i}{\gamma} \left( \psi^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i \right) \psi + \eta^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i \right) \eta \right) \right] \\ &+ \gamma \kappa P_i^a \frac{iN}{2} K_a^k \left[ \psi^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i \right) \psi + \eta^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k + \sigma_k \sigma^i \right) \eta + \frac{i}{\gamma} \left( \psi^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i \right) \psi - \eta^\dagger \left( \sigma^i \sigma_k - \sigma_k \sigma^i \right) \eta \right) \right] \end{aligned} \quad (6.182)$$

Antes de prosseguirmos vamos estabelecer duas relações úteis. Usando  $P^{ai} \Gamma_a^k \sigma_{(a} \sigma_b) = P^{a(i} \Gamma_a^k) \sigma_{(a} \sigma_b)$ , temos

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma_c^l} \left( P^{ai} \Gamma_a^k \sigma_{(a} \sigma_b) \right) = P^{ai} \delta_a^k \sigma_{(a} \sigma_b) = \frac{1}{2} \left( P_l^c \sigma^k \sigma_k + P^{ck} \sigma_{[l} \sigma_k] \right) = \frac{1}{2} P_l^c \sigma^k \sigma_k = \frac{1}{2} P_l^c \mathbf{1}, \quad (6.183)$$

$$\frac{\delta}{\delta \Gamma_c^l} \left( P^{ai} \Gamma_a^k \sigma_{[a} \sigma_b] \right) = P^{a[i} \delta_a^k] \sigma_{[a} \sigma_b] = \frac{1}{2} \left( P^{ck} \sigma^{[l} \sigma_k] + P_l^c \sigma_{[k} \sigma_k] \right) = \frac{1}{2} P_k^c \sigma^{[l} \sigma^k]. \quad (6.184)$$

Tomando a variação do termo Hamiltoniano considerando somente a parte de matéria, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(NC)_\Psi}{\delta\Gamma_c^l} &= \gamma\kappa\frac{N}{2}\left[2\frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left(P^{ai}\Gamma_a^k(\psi^\dagger\sigma_{(i}\sigma_k)\psi - \eta^\dagger\sigma_{(i}\sigma_k)\eta)\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{2i}{\gamma}\frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left(P^{ai}\Gamma_a^k(\psi^\dagger\sigma_{[i}\sigma_k]\psi - \eta^\dagger\sigma_{[i}\sigma_k]\eta)\right)\right] \\
&\quad +i\gamma\kappa\frac{N}{2}\left[2\frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left(P^{ai}\frac{(A_a^k - \Gamma_a^k)}{\gamma}(\psi^\dagger\sigma_{[i}\sigma_k]\psi - \eta^\dagger\sigma_{[i}\sigma_k]\eta)\right)\right. \\
&\quad \left.+\frac{2i}{\gamma}\frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left(P^{ai}\frac{(A_a^k - \Gamma_a^k)}{\gamma}(\psi^\dagger\sigma_{(i}\sigma_k)\psi - \eta^\dagger\sigma_{(i}\sigma_k)\eta)\right)\right] \\
&= \gamma\kappa N\left[\frac{P_l^c}{2}(\psi^\dagger\psi - \eta^\dagger\eta) + \frac{i}{2\gamma}P^{ck}(\psi^\dagger\sigma_{[l}\sigma_k]\psi + \eta^\dagger\sigma_{[l}\sigma_k]\eta)\right] \\
&\quad -i\gamma\kappa N\left[\frac{P_l^c}{2\gamma}(\psi^\dagger\sigma_{[l}\sigma_k]\psi + \eta^\dagger\sigma_{[l}\sigma_k]\eta) + \frac{i}{2\gamma^2}P_l^c(\psi^\dagger\psi - \eta^\dagger\eta)\right] \\
&= \gamma\kappa NP_l^c\left(1 + \frac{1}{\gamma^2}\right)(\psi^\dagger\psi - \eta^\dagger\eta) = \kappa N\left(\frac{1 + \gamma^2}{\gamma}\right)P_l^c J_0. \tag{6.185}
\end{aligned}$$

Enquanto a variação da parte gravitacional do termo Hamiltoniano é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\delta(NC)_{\text{grav}}}{\delta\Gamma_c^l} &= -\frac{\gamma^2\kappa N}{2\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)P_i^a P_j^b \frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left[K_{[a}^i K_{b]}^j + \frac{\epsilon^{ij}}{\gamma}(\partial_{[a}K_{b]}^k + \epsilon^k_{qp}\Gamma_a^q K_b^p)\right] \\
&= -\frac{\gamma^2\kappa N}{2\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)P_i^a P_j^b \frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left[\frac{(A_{[a}^i - \Gamma_{[a}^i)(A_{b]}^j - \Gamma_{b]}^j)}{\gamma} + \frac{\epsilon^{ij}}{\gamma}(\partial_{[a}K_{b]}^k + \epsilon^k_{qp}\Gamma_a^q \frac{(A_b^p - \Gamma_b^p)}{\gamma})\right] \\
&= -\frac{\gamma^2\kappa N}{2\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)\left[2P_{[k}^a P_{l]}^b \frac{(A_c^k - \Gamma_c^k)}{\gamma^2} + \frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left[2\frac{\delta_q^{[i}\delta_p^{j]}}{\gamma^2}(A_b^p - \Gamma_b^p) + \frac{\epsilon^{ij}}{\gamma}\partial_{[a}K_{b]}^k\right]P_i^a P_j^b\right] \\
&\quad = -\frac{\gamma^2\kappa N}{2\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)\left[2P_{[k}^a P_{l]}^b \frac{(A_c^k - \Gamma_c^k)}{\gamma^2} + 2P_{[l}^a P_{k]}^b \frac{(A_c^k - \Gamma_c^k)}{\gamma^2}\right] \\
&\quad + \epsilon^{ij} \frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left[\frac{P_i^a P_j^b N}{\sqrt{h}}(\partial_{[a}(A_{b]}^k - \Gamma_{b]}^k))\gamma\kappa(\gamma^2 + 1)\right] - \frac{2}{\gamma^2}\Gamma_a^i \frac{P_{[i}^a P_{l]}^c N}{\sqrt{h}} \\
&= \frac{\kappa N}{\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)\Gamma_a^i P_{[i}^a P_{l]}^c + \epsilon^{ij} \frac{\delta}{\delta\Gamma_c^l}\left[\frac{NP_i^a P_j^c}{\sqrt{h}}\right] \partial_{[a}\left(\frac{NP_i^a P_j^c}{\sqrt{h}}\right). \tag{6.186}
\end{aligned}$$

Da Eq. (6.27) obtemos a relação

$$e_a^i \varepsilon^{abc} \epsilon_{ijk} = 2\sqrt{h} e_{[j}^b e_{k]}^c, \tag{6.187}$$

ao fazer uso dessa relação temos

$$\frac{(\gamma^2 + 1)\gamma\kappa}{2}\epsilon^{ij} \partial_{[a}\left(\frac{NP_i^a P_j^c}{\sqrt{h}}\right) = \frac{(\gamma^2 + 1)\gamma\kappa}{2\gamma^2\kappa^2}\epsilon^{ij} \partial_{[a}(Ne_i^a e_j^c \sqrt{h}) = \frac{(\gamma^2 + 1)}{4\gamma\kappa}\varepsilon^{ac} \partial_a(Ne_l^d) \tag{6.188}$$

e

$$\frac{\kappa N}{\sqrt{h}}(\gamma^2 + 1)\Gamma_a^i P_{[i}^a P_{l]}^c = \frac{\kappa N}{\sqrt{h}}\frac{(\gamma^2 + 1)}{\gamma^2\kappa^2}\sqrt{h}\Gamma_a^i e_{[i}^a e_{l]}^c = N\text{sgn det}(e_a^i)\frac{(\gamma^2 + 1)}{\kappa\gamma}\sqrt{h}\Gamma_a^i e_{[i}^a e_{l]}^c \tag{6.189}$$

De modo que reescrevemos a Eq. (6.186) como

$$\frac{\delta(NC)_{\text{grav}}}{\delta\Gamma_c^i} = N \text{sgn det}(e_a^i) \frac{(\gamma^2 + 1)}{\kappa\gamma} \sqrt{h} \Gamma_a^i e_{[i}^a e_{l]}^c + \frac{(\gamma^2 + 1)}{4\gamma\kappa} \varepsilon^{ac} \partial_a (N e_l^d). \quad (6.190)$$

Finalmente, coletando os termos (6.180), (6.181), (6.185) e (6.190), temos o vínculo

$$\begin{aligned} C_a^i = \frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\Gamma_c^i} &= -\frac{(1 + \gamma^2)}{\gamma} \omega_t^{0i} \epsilon_{il}{}^m P_m^c - 2 \frac{(\gamma^2 + 1)}{\gamma^2} \epsilon_{lk}{}^m P_m^b N^c (A_a^i - \Gamma_a^i) - \frac{(\gamma^2 + 1)}{2\gamma} \sqrt{h} J_l N^c \\ &+ \kappa N \left( \frac{1 + \gamma^2}{\gamma} \right) P_l^c J_0 + N \text{sgn det}(e_a^i) \frac{(\gamma^2 + 1)}{\kappa\gamma} \sqrt{h} \Gamma_a^i e_{[i}^a e_{l]}^c + \frac{(\gamma^2 + 1)}{4\gamma\kappa} \varepsilon^{ac} \partial_a (N e_l^d) \end{aligned} \quad (6.191)$$

Em seguida vamos resolver a equação anterior de modo a obter uma expressão para  $\omega_t^{0i}$  e, com isso, eliminar essa variável do espaço de fase da teoria. Contraindo a Equação (6.191) com  $e_c^m$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma^2} \omega_t^{0i} \epsilon_{il}{}^k e_k^c e_c^m - 2\gamma\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \epsilon_{lk}{}^j e_j^b e_c^m N^c K_b^k - \sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{2\gamma} J_l N^c e_c^m \\ &+ \kappa\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma^2} e_l^c e_c^m J^0 - \frac{(1 + \gamma^2)}{4\gamma\kappa} \varepsilon^{acd} e_c^m \partial_a (N e_{dl}) + \Gamma_a^i N \text{sgn det}(e_a^i) \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \sqrt{h} e_{[i}^a e_{l]}^c e_c^m \\ &= -\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma^2} \omega_t^{0i} \epsilon_{il}{}^m - 2\gamma\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} (\epsilon_{lk}{}^j e_j^b e_c^m N^c - \epsilon_{lk}{}^j e_j^c e_c^m N^b) K_b^k - \sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{2\gamma} J_l N^c e_c^m \\ &+ \sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\gamma^2} \delta_l^m J^0 - \frac{(1 + \gamma^2)}{4\gamma\kappa} \varepsilon^{acd} e_c^m \partial_a (N e_{dl}) + \Gamma_a^i N \text{sgn det}(e_a^i) \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \sqrt{h} e_{[i}^a \delta_{l]}^c \\ &= -\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma^2} \omega_t^{0i} \epsilon_{il}{}^m - 2\gamma\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \epsilon_{lk}{}^j e_j^b e_c^m N^c K_b^k + 2\gamma\sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \epsilon_{lk}{}^j e_j^c e_c^m N^b K_b^k \\ &- \sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{2\gamma} J_l N^c e_c^m + \sqrt{h} \frac{(1 + \gamma^2)}{\gamma^2} \delta_l^m J^0 - \frac{(1 + \gamma^2)}{4\gamma\kappa} \varepsilon^{acd} e_c^m \partial_a (N e_{dl}) \\ &+ \Gamma_a^i N \text{sgn det}(e_a^i) \frac{(1 + \gamma^2)}{\kappa\gamma} \sqrt{h} e_{[i}^a \delta_{l]}^c = 0. \end{aligned} \quad (6.192)$$

O que implica em

$$\begin{aligned} \omega_t^{0i} \epsilon_{il}{}^m - 2\gamma\epsilon_{lk}{}^j e_j^b e_c^m N^c K_b^k + 2\gamma\epsilon_{lk}{}^j e_j^c e_c^m N^b K_b^k - \frac{\kappa\gamma}{2} J_l N^c e_c^m + \kappa\delta_l^m J^0 - \frac{\gamma}{4\sqrt{h}} \varepsilon^{acd} e_c^m \partial_a (N e_{dl}) \\ + \text{sgn det}(e_a^i) N \gamma e_{[j}^a \delta_{l]}^c \Gamma_a^j = 0. \end{aligned} \quad (6.193)$$

Usando a identidade  $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk} = 6$ , podemos escrever o resultado acima como

$$\begin{aligned} 6\omega_t^{0i} - 2\gamma\epsilon^{il}{}^m \epsilon_{lk}{}^j e_j^b e_c^m N^c K_b^k + 2\gamma\epsilon^{il}{}^m \epsilon_{lk}{}^m N^b K_b^k - \frac{\kappa\gamma}{2} \epsilon^{il}{}^m J_l N^c e_c^m - \frac{\gamma}{4\sqrt{h}} \varepsilon^{acd} \epsilon^{il}{}^m e_c^m \partial_a (N e_{dl}) \\ + \text{sgn det}(e_a^i) N \gamma \epsilon^{il}{}^m e_{[j}^a \delta_{l]}^c \Gamma_a^j = 0. \end{aligned} \quad (6.194)$$

Usando agora  $\epsilon^{il}{}_m \epsilon_{lm}{}^j = -\epsilon^{li}{}_m \epsilon_{lk}{}^j = -2\delta_k^{[i} \delta_m^{j]}$ , temos finalmente a expressão do multiplicador de Lagrange  $\omega_t{}^{i0}$  em função das triádes.

$$\begin{aligned} \omega_t{}^{0i} &= \frac{2}{3}\gamma\delta_k^{[i} \delta_m^{j]} e_j^b e_c^m N^c K_b^k + \frac{2}{3}\gamma N^b K_b^i + \frac{\kappa\gamma}{12}\epsilon^{il}{}_m J_l N^c e_c^m + \frac{\gamma}{12}e^{d[i} e^{a]l} \partial_a(Ne_{dl}) \\ &\quad + N\gamma \text{sgn} \det(e_a^i) \epsilon^{il}{}_m e_l^a \Gamma_a^m. \end{aligned} \quad (6.195)$$

Em relação ao vínculo (6.177), temos, da Eq. (6.175), que ele pode ser simplesmente escrito como

$$S_i = (1 + \gamma^2)\epsilon_{im}{}^n K_b^m P_n^b - \frac{\beta}{2}J_i = 0 \quad (6.196)$$

e incorporado nas equações dos demais vínculos.

Agora passemos a examinar os problemas relativos à escolha das variáveis fermiônicas na composição do espaço de fase. Podemos encontrar os parênteses de Poisson das variáveis originais da teoria fazendo uso do bloco invertível da matriz dada por (6.169), sendo[58]

$$\{E(\xi), G(\xi)\} = \frac{\partial E}{\partial \xi^\alpha} \left( f^{-1} \right)_{\text{inv}}^{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}. \quad (6.197)$$

Explicitamente, o setor invertível da matriz simplética é

$$\left( f_{\alpha\beta} \right)_{\text{inv}} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_i^j \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_j^i \delta_a^b & 0 & i\theta_L \psi^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} & -i\theta_R \psi \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} & -i\theta_L \eta^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} & i\theta_R \eta \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a} \\ 0 & -i\theta_L \psi^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b} & 0 & \sqrt{\hbar} & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_R \psi \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b} & \sqrt{\hbar} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_L \eta^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\hbar} \\ 0 & -i\theta_R \eta \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b} & 0 & 0 & \sqrt{\hbar} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.198)$$

Invertendo a matriz acima, temos

$$\left( f^{-1} \right)_{\text{inv}}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \delta_a^b & \frac{i\theta_R \psi \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b}}{\sqrt{\hbar}} & -\frac{i\theta_L \psi^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b}}{\sqrt{\hbar}} & -\frac{i\theta_R \eta \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b}}{\sqrt{\hbar}} & \frac{i\theta_L \eta^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_j^b}}{\sqrt{\hbar}} \\ -\delta_i^j \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{i\theta_R \psi \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}}{\sqrt{\hbar}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\hbar}} & 0 & 0 \\ \frac{i\theta_L \psi^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}}{\sqrt{\hbar}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\hbar}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{i\theta_R \eta \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}}{\sqrt{\hbar}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \\ -\frac{i\theta_L \eta^\dagger \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}}{\sqrt{\hbar}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\hbar}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.199)$$

Esse resultado é problemático do ponto de vista da mecânica quântica, pois os campos que formam o espaço de fase devem ser promovidos a operadores em um espaço de Hilbert, no entanto os parênteses de Poisson entre os campos fermiônicos e a conexão de Ashtekar-Barbero são todos não nulos, e.g.  $\{\psi, A_i^a\} = -\frac{i\theta_R}{\sqrt{\hbar}} \frac{\delta\sqrt{\hbar}}{\delta P_i^a}$ . Logo, tal escolha de variáveis não é adequada.

Alternativamente, a fim a linearizar a teoria, podemos tomar os campos  $\psi$  e  $\eta$  como variáveis independentes e usar os momentos canônicos, assim

$$\pi_\psi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\psi}} = i\sqrt{h}\theta_L\psi^\dagger, \quad (6.200)$$

$$\pi_\eta = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\eta}} = -i\sqrt{h}\theta_L\eta^\dagger. \quad (6.201)$$

Note que  $\overline{\pi_\psi} = \overline{\pi_\psi}$  e  $\overline{\pi_\eta} = \overline{\pi_\eta}$ . Entretanto essas variáveis canônicas também não podem ser promovidas a operadores num espaço de Hilbert por conta da presença de  $\sqrt{h}$  [138]. Outro problema com essa escolha é a mudança que ela induz no termo de conexão de Ashtekar-Barbero. Note que o setor cinético da ação (6.163) fica escrito como

$$\begin{aligned} \Theta &= i \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h} (\theta_L \psi^\dagger \dot{\psi} - \theta_R \dot{\psi}^\dagger \psi - \theta_L \eta^\dagger \dot{\eta} + \theta_R \dot{\eta}^\dagger \eta) \\ &= \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h} \left[ \pi_\psi \dot{\psi} + \pi_\eta \dot{\eta} - \frac{i}{2} \gamma \kappa \theta_R e_c^i J^0 \dot{P}_i^c \right], \end{aligned} \quad (6.202)$$

descartando termos de derivada total. Ocorre que do segundo termo da integral fornece ao termo de conexão  $A_a^i$  uma correção imaginária igual a  $\frac{i}{2} \gamma \kappa \theta_R e_c^i J^0$ , deixando a teoria com uma conexão complexa, o que gera mais uma série de complicações.

A solução para o problema de encontrar uma conexão de Ashtekar-Barbero real numa ação com contribuições fermiônicas foi redefinir os campos dos férmions em variáveis de Grassmann de densidade igual a 1/2. Então temos que

$$\xi := \sqrt[4]{h} \psi \quad \text{e} \quad (6.203)$$

$$\chi := \sqrt[4]{h} \eta \quad (6.204)$$

são as novas variáveis canônicas e

$$\pi_\xi = -i\xi^\dagger \quad \text{e} \quad (6.205)$$

$$\pi_\chi = -i\chi^\dagger \quad (6.206)$$

são seus momentos canônicos conjugados. Dessa forma o termo simplético da ação 6.163, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{Dirac}} &= -\frac{i}{2} \int d^3x \sqrt{h} \left[ \left(1 + \frac{i}{\gamma}\right) (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\eta}^\dagger \eta) - \left(1 - \frac{i}{\gamma}\right) (\dot{\psi}^\dagger \psi - \eta^\dagger \dot{\eta}) \right] \\ &= -\frac{i}{2} \int d^3x \sqrt{h} \left[ (\psi^\dagger \dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger \psi + \eta^\dagger \dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger \eta) + \frac{i}{\gamma} (\psi^\dagger \dot{\psi} + \dot{\psi}^\dagger \psi + \eta^\dagger \dot{\eta} + \dot{\eta}^\dagger \eta) \right] \\ &= \int d^3x \left[ -i (\xi^\dagger \dot{\xi} + \dot{\chi}^\dagger \chi) + \frac{\kappa}{4} P_i^a \mathcal{L}_t(e_a^i J^0) \right] \\ \Theta_{\text{Dirac}} &= \int d^3x \left[ \pi_\xi \dot{\xi} + \pi_\chi \dot{\chi} + \frac{\kappa}{4} P_i^a \mathcal{L}_t(e_a^i J^0) \right]. \end{aligned} \quad (6.207)$$

Para chegar até o último resultados seguimos os passos seguintes. Temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{h}\psi^\dagger\dot{\psi} &= \sqrt{h}\psi^\dagger\partial_t\left(\frac{\psi\sqrt[4]{h}}{\sqrt[4]{h}}\right) = \sqrt[4]{h}\psi^\dagger\sqrt[4]{h}\partial_t\left(\frac{\psi\sqrt[4]{h}}{\sqrt[4]{h}}\right) \\
&= \xi^\dagger\sqrt[4]{h}\partial_t\left(\frac{\xi}{\sqrt[4]{h}}\right) \\
&= \xi^\dagger\sqrt[4]{h}\partial_t(h^{-\frac{1}{4}}) + \xi^\dagger\partial_t\xi = \xi^\dagger\xi\left(-\frac{1}{4\sqrt{h}}\right)\partial_t h + \xi^\dagger\dot{\xi}, \tag{6.208}
\end{aligned}$$

mas  $\partial_t h = hh^{ab}\partial_t h_{ab} = he_a^i\partial_t e_i^a$ , então

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\sqrt{h}}\xi^\dagger\xi\partial_t h &= -\frac{h}{4\sqrt{h}}\xi^\dagger\xi e_a^i\partial_t e_i^a = -\frac{1}{4}\xi^\dagger\xi e_a^i\sqrt{h}\partial_t\left(\frac{\gamma^\kappa P_i^a}{\sqrt{h}}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\xi^\dagger\xi e_a^i D_t\left(\frac{\gamma^\kappa P_i^a}{\sqrt{h}}\right) = -\frac{\gamma^\kappa}{4}\xi^\dagger\xi e_a^i h_b^\mu t^b \nabla_\mu(P_i^a), \tag{6.209}
\end{aligned}$$

logo

$$\int d^3x \sqrt{h}\psi^\dagger\dot{\psi} = \int d^3x \left[ \xi^\dagger\dot{\xi} + \frac{\gamma^\kappa}{4}P_i^a\mathcal{L}_t(\psi^\dagger\psi e_a^i) \right]. \tag{6.210}$$

Analogamente,

$$-\int d^3x \sqrt{h}\dot{\psi}^\dagger\psi = \int d^3x \left[ -\dot{\xi}^\dagger\xi - \frac{\gamma^\kappa}{4}P_i^a\mathcal{L}_t(\psi^\dagger\psi e_a^i) \right] = \int d^3x \left[ \xi^\dagger\dot{\xi} - \frac{\gamma^\kappa}{4}P_i^a\mathcal{L}_t(\psi^\dagger\psi e_a^i) \right], \tag{6.211}$$

de modo que

$$\int d^3x \sqrt{h}(\psi^\dagger\dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger\psi) = \int d^3x 2\xi^\dagger\dot{\xi} \tag{6.212}$$

e

$$\int d^3x \sqrt{h}(\psi^\dagger\dot{\psi} + \dot{\psi}^\dagger\psi) = \int d^3x \frac{\gamma^\kappa}{2}P_i^a\mathcal{L}_t(\psi^\dagger\psi e_a^i), \tag{6.213}$$

Da mesma maneira, temos

$$\int d^3x \sqrt{h}(\psi^\dagger\dot{\psi} - \dot{\psi}^\dagger\psi + \eta^\dagger\dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger\eta) = \int d^3x 2(\xi^\dagger\dot{\xi} + \chi^\dagger\dot{\chi}) \tag{6.214}$$

e

$$\int d^3x \sqrt{h}(\psi^\dagger\dot{\psi} + \dot{\psi}^\dagger\psi - \eta^\dagger\dot{\eta} - \dot{\eta}^\dagger\eta) = \int d^3x \frac{\gamma^\kappa}{2}P_i^a\mathcal{L}_t(e_a^i J^0). \tag{6.215}$$

Substituindo os resultados das equações (6.214) e (6.215) na equação (6.207) obtemos o resultado encontrado acima.

Então que podemos reescrever o setor cinético da Ação de Holst-Dirac como

$$S_{\text{H-D}}^{\text{kin}} = \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma} d^3x \left\{ \pi_\xi\dot{\xi} + \pi_\chi\dot{\chi} + P_i^a\mathcal{L}_t\left(\frac{\kappa}{4}e_a^i J^0 + A_a^i\right) \right\}. \tag{6.216}$$

Portanto, dadas as transformações do campos fermiônicos em meia-densidades, a conexão de Ashtekar-Barbero corrigida pode ser escrita como

$$\mathcal{A}_a^i := A_a^i + \frac{\kappa}{4} e_a^i J^0 . \quad (6.217)$$

Tomando o vínculo Gaussiano (6.175) mais o vínculo (6.196), temos

$$\mathcal{D}_a^{(A)} P_i^a - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J_i = \mathcal{D}_a P_i^a + \gamma \epsilon_{ij}{}^k K_a^j P_k^a - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J_i = \mathcal{D}_a P_i^a = 0 . \quad (6.218)$$

Mesmo na presença de férmions, de modo que

$$\epsilon^{ij}{}^k \Gamma_b^k P_j^b = \epsilon^{ij}{}^k \tilde{\Gamma}_b^k P_j^b , \quad (6.219)$$

o que implica em dizer que

$$\epsilon^{ij}{}^k C_b^k P_j^b = 0 \quad (6.220)$$

na superfície de vínculo circunscrita por  $S^i = 0$ . O que está de acordo com a descrição da teoria dotada de uma conexão de Lorentz mais um termo de conexão. Projetando espacialmente a contribuição espaço-temporal da torção  $C_\mu^{IJ}$  dada pela Eq. (6.140), temos a contribuição em termos das tríadas como

$$C_a^j = \frac{1}{2} h_a^b \epsilon^{IJ}{}_{KL} n_I C_b^{KL} = -\frac{\kappa}{4} e_a^j J^0 . \quad (6.221)$$

Donde obtemos, analogamente a Eq. (6.139), que

$$\Gamma_b^k = \tilde{\Gamma}_b^k - \frac{\kappa}{4} e_b^k J^0 . \quad (6.222)$$

Podemos, então, escrever a conexão de Ashtekar-Barbero como

$$A_a^i = \tilde{\Gamma}_a^i + \gamma K_a^i - \frac{\kappa}{4} e_a^i J^0 \quad \text{e} \quad (6.223)$$

$$\mathcal{D}_a^{(A)} P_i^a = \mathcal{D}_a^{(A)} P_i^a := \mathcal{D} P_i^a + \epsilon_{ij}{}^k \mathcal{A}_a^j P_k^a . \quad (6.224)$$

A partir desse resultado definimos a conexão corrigida de Ashtekar-Barbero como

$$\mathcal{A}_a^i = \tilde{\Gamma}_a^i + \gamma K_a^i . \quad (6.225)$$

Abaixo vamos reescrever os vínculos de primeira classe usando as variáveis fermiônicas de meia densidade e a conexão corrigida de Ashtekar-Barbero. Começando pelo vínculo Gaussiano, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b^{(A)} P_i^b - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J_i &= \mathcal{D}_b^{(A)} P_i^b - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} (\psi^\dagger \sigma_i \psi + \eta^\dagger \sigma_i \eta) \\ &= \mathcal{D}_b^{(A)} P_i^b - \frac{1}{2} (\sqrt{\hbar} \psi^\dagger \sigma_i \sqrt{\hbar} \psi + \sqrt{\hbar} \eta^\dagger \sigma_i \sqrt{\hbar} \eta) \\ &= \mathcal{D}_b^{(A)} P_i^b + \left[ -i \xi^\dagger \left( \frac{-i \sigma_i}{2} \right) \xi - i \chi^\dagger \left( \frac{-i \sigma_i}{2} \right) \chi \right] \\ G_i &= \mathcal{D}_b^{(A)} P_i^b + (\pi_\xi \tau_i \xi + \chi \tau_i \chi) , \end{aligned} \quad (6.226)$$

com  $\tau_i := \frac{\sigma}{2i}$ .

Agora vamos reescrever o vínculo Hamiltoniano (6.178), a começar do primeiro termo, temos

$$\begin{aligned}
\int d^3x \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \mathcal{F}_{ab}^k &= \int d^3x \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} \left( P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \left[ 2\partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k + \epsilon^k{}_{qp} (\mathcal{A}_a^q + C_a^q) (\mathcal{A}_b^p + C_b^p) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2\partial_{[a} C_{b]}^k \right] \right) \\
&= \int d^3x \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} \left( P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \left[ 2\partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k + \epsilon^k{}_{qp} \mathcal{A}_a^q \mathcal{A}_b^p \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \epsilon^k{}_{qp} (\mathcal{A}_a^q C_b^p + C_a^q \mathcal{A}_b^p + C_a^q C_b^p) + 2\partial_{[a} C_{b]}^k \right] \right) \\
&= \int d^3x \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} \left( P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \left[ \mathcal{F}_{ab}^{(A)k} + \epsilon^k{}_{qp} (2\mathcal{A}_a^q C_b^p + C_a^q C_b^p) + 2\partial_{[a} C_{b]}^k \right] \right), \tag{6.227}
\end{aligned}$$

Usando o resultado (6.220) e a relação

$$\begin{aligned}
\int d^3x \epsilon^{ij}{}_k P_i^a P_j^b \partial_{[a} C_{b]}^k &= - \int d^3x \epsilon^{ij}{}_k \partial_{[a} (P_i^a P_j^b) C_{b]}^k \\
&= -2 \int d^3x \epsilon^{ij}{}_k C_b^k P_i^a \partial_a P_j^b \\
&= \int d^3x \frac{2\kappa}{4} \epsilon^{ij}{}_k e_b^k J^0 P_i^a \partial_a P_j^b \\
&= \int d^3x \frac{2i\kappa}{4} \epsilon^{ij}{}_k e_b^k (\pi_\xi \xi - \pi_\chi \chi) P_i^a \partial_a P_j^b, \tag{6.228}
\end{aligned}$$

temos

$$\int d^3x \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \mathcal{F}_{ab}^k = \int d^3x \left( \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} P_i^a P_j^b \epsilon^{ij}{}_k \mathcal{F}_{ab}^{(A)k} + i \frac{\gamma^2 \kappa^2}{4\sqrt{\hbar}} \epsilon^{ij}{}_k P_i^a e_b^k (\pi_\xi \xi - \pi_\chi \chi) \partial_a P_j^b \right). \tag{6.229}$$

O segundo termo da Eq. (6.178) permanece inalterado, analisemos então o terceiro termo,

$$\begin{aligned}
&\kappa(1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{\hbar}} D_a^{(A)}(\sqrt{\hbar} J^j) \\
&= \kappa(1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{\hbar}} \left( \partial_a(\sqrt{\hbar} J^j) + \epsilon^i{}_{jk} A_a^j J^k \sqrt{\hbar} + \epsilon^i{}_{jk} C_a^j J^k \sqrt{\hbar} - \epsilon^i{}_{jk} C_a^j J^k \sqrt{\hbar} \right) \\
&= \kappa(1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{\hbar}} \left( \partial_a(\sqrt{\hbar} J^j) + \epsilon^i{}_{jk} \mathcal{A}_a^j J^k \sqrt{\hbar} - \epsilon^i{}_{jk} C_a^j J^k \sqrt{\hbar} \right) \\
&= \kappa(1 + \gamma^2) \frac{P_j^a}{2\sqrt{\hbar}} D_a^{(A)}(\sqrt{\hbar} J^j) \\
&= -\frac{\kappa(\gamma^2 + 1)}{\sqrt{\hbar}} P_i^a \mathcal{D}_a^{(A)}(\pi_\xi \tau_i \xi + \pi_\chi \tau_i \chi), \tag{6.230}
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado (6.220). Daqui em diante usaremos esse resultado para justificar operações do tipo  $P_i^a \mathcal{D}_a^{(A)} = P_i^a \mathcal{D}_a^{(A)}$ . Seguindo para o quarto termo do vínculo

Hamiltoniano temos

$$\begin{aligned}
\int d^3x \frac{\kappa}{\gamma} \tilde{D}_a \left( \frac{P_i^a S^i}{\sqrt{q}} \right) &= \int d^3x \frac{\kappa}{\gamma} D_a \left( \frac{P_i^a S^i}{\sqrt{q}} \right) = \int d^3x \frac{\kappa}{\gamma} P_i^a D_a \left( \frac{S^i}{\sqrt{q}} \right) \\
&= \int d^3x \kappa(1 + \gamma^2) P_i^a D_a \left[ \left( \mathcal{D}_b^{(A)} P^{bi} - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J^i \right) \frac{1}{\sqrt{q}} \right] \\
&= \int d^3x \kappa(1 + \gamma^2) P_i^a D_a \left( \frac{\mathcal{D}_b P^{bi}}{\sqrt{q}} \right) \\
&= - \int d^3x \frac{\kappa(1 + \gamma^2)}{\sqrt{\hbar}} (D_a P_i^a) \mathcal{D}_b P^{bi} = 0, \tag{6.231}
\end{aligned}$$

onde usamos o resultado (6.218). Para o quinto termo de (6.178) temos

$$\begin{aligned}
&\int d^3x \gamma \kappa P_i^a \left[ i\theta_L (\psi^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \psi + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta} \sigma^i \eta) - i\theta_R (\eta^\dagger \sigma^i \mathcal{D}_a^{(A)} \eta + \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi} \sigma^i \psi) \right] \\
&= \int d^3x i\gamma \kappa P_i^a \left[ \frac{2i}{\sqrt{\hbar}} \theta_L \xi^\dagger \frac{\sigma^i}{2i} \mathcal{D}_a^{(A)} \xi - \frac{2i}{\sqrt{\hbar}} \theta_R \chi^\dagger \frac{\sigma^i}{2i} \mathcal{D}_a^{(A)} \chi - c.c. \right] \\
&= - \int d^3x i \frac{2\gamma \kappa}{\sqrt{\hbar}} P_i^a \left[ \theta_L \xi^\dagger \tau^i \mathcal{D}_a^{(A)} \xi - \theta_R \chi^\dagger \tau^i \mathcal{D}_a^{(A)} \chi - c.c. \right], \tag{6.232}
\end{aligned}$$

onde usamos (6.220) entre a primeira e a segunda linhas.

O último termo de (6.178), usando  $S^i = 0$ , pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa \gamma}{2} (\gamma^2 + 1) \epsilon_m^n K_a^m P_n^a J^j &= \frac{\kappa}{4} (\gamma^2 + 1) \sqrt{\hbar} J_j J^j \\
&= i^2 \frac{\kappa}{4\sqrt{\hbar}} (\gamma^2 + 1) \left( \sqrt[4]{\hbar} \psi^\dagger \frac{\sigma_j}{2i} \sqrt[4]{\hbar} \psi + \sqrt[4]{\hbar} \eta^\dagger \frac{\sigma_j}{2i} \sqrt[4]{\hbar} \eta \right) \\
&\quad \times \left( \sqrt[4]{\hbar} \psi^\dagger \frac{\sigma^j}{2i} \sqrt[4]{\hbar} \psi + \sqrt[4]{\hbar} \eta^\dagger \frac{\sigma^j}{2i} \sqrt[4]{\hbar} \eta \right) \\
&= \frac{\kappa}{4\sqrt{\hbar}} (\gamma^2 + 1) (\pi_\xi \tau_j \xi + \pi_\chi \tau_j \chi) (\pi_\xi \tau^j \xi + \pi_\chi \tau^j \chi). \tag{6.233}
\end{aligned}$$

Coletando os resultados (6.229), (6.230), (6.231) e (6.232), reescrevemos o vínculo Hamiltoniano com conexão de Ashtekar-Barbero corrigida e meia-densidades fermiônicas como

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \frac{\gamma^2 \kappa}{2\sqrt{\hbar}} P_i^a P_j^b \left( \epsilon^{ij}{}_k \mathcal{F}_{ab}^{(A)k} - 2(\gamma^2 + 1) K_{[a}^i K_{b]}^j \right) - \frac{\kappa(\gamma^2 + 1)}{\sqrt{\hbar}} P_i^a \mathcal{D}_a^{(A)} (\pi_\xi \tau_i \xi + \pi_\chi \tau_i \chi) \\
&\quad - i \frac{2\gamma \kappa}{\sqrt{\hbar}} P_i^a \left( \theta_L \pi_\xi \tau^i \mathcal{D}_a^{(A)} \xi - \theta_R \pi_\chi \tau^i \mathcal{D}_a^{(A)} \chi - c.c. \right) + i \frac{\gamma^2 \kappa^2}{4\sqrt{\hbar}} \epsilon^{ij}{}_k P_i^a e_b^k (\pi_\xi \xi - \pi_\chi \chi) \partial_a P_j^b \\
&\quad + \frac{\kappa}{4\sqrt{\hbar}} (\gamma^2 + 1) (\pi_\xi \tau_j \xi + \pi_\chi \tau_j \chi) (\pi_\xi \tau^j \xi + \pi_\chi \tau^j \chi). \tag{6.234}
\end{aligned}$$

Finalmente reescrevemos o vínculo de difeomorfismos espaciais com as novas

variáveis. Primeiro notemos que

$$\begin{aligned}
\int d^3x P_k^b \mathcal{F}_{ab}^k &= \int d^3x \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k + C_a^k \partial_b P_k^b + P_k^b \partial_a C_b^k + \epsilon^k{}_{ij} A_a^i A_b^j P_k^b \right) \\
&= \int d^3x \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k - (A_a^k - C_a^k) \partial_b P_k^b + A_a^k \partial_b P_k^b + P_k^b \partial_a C_b^k + \epsilon^k{}_{ij} A_a^i A_b^j P_k^b \right) \\
&= \int d^3x \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k - \mathcal{A}_a^k \partial_b P_k^b \right) + \int d^3x \left( A_a^k \partial_b P_k^b + P_k^b \partial_a C_b^k + \epsilon^k{}_{ij} A_a^i A_b^j P_k^b \right) \\
&= \int d^3x \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k - \mathcal{A}_a^k \partial_b P_k^b \right) + \int d^3x \left( A_a^k \mathcal{D}_b^{(A)} P_k^b + P_k^b \partial_a C_b^k \right). \quad (6.235)
\end{aligned}$$

Já com o segundo termo, temos

$$\begin{aligned}
&i\sqrt{\hbar} \theta_L (\psi^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \psi - \overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \eta \eta}) - i\sqrt{\hbar} \theta_R (\overline{\mathcal{D}_a^{(A)} \psi \psi} - \eta^\dagger \mathcal{D}_a^{(A)} \eta) \\
&= i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} \left( 1 + \frac{i}{\gamma} \right) (\psi^\dagger \partial_a \psi + \frac{i}{2} A_a^k \psi^\dagger \sigma_k \psi - \partial_a \eta^\dagger \eta - \frac{i}{2} A_a^k \eta^\dagger \sigma_k \eta) \\
&\quad - i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} \left( 1 - \frac{i}{\gamma} \right) (\partial_a \psi^\dagger \psi + \frac{i}{2} A_a^k \psi^\dagger \sigma_k \psi - \eta^\dagger \partial_a \eta - \frac{i}{2} A_a^k \eta^\dagger \sigma_k \eta) \\
&= i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} \left( 1 + \frac{i}{\gamma} \right) \left[ \psi^\dagger \partial_a \psi - \partial_a \eta^\dagger \eta + \frac{i}{2} A_a^k (\psi^\dagger \sigma_k \psi - \eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] \\
&\quad - i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} \left( 1 - \frac{i}{\gamma} \right) \left[ \partial_a \psi^\dagger \psi - \eta^\dagger \partial_a \eta + \frac{i}{2} A_a^k (\psi^\dagger \sigma_k \psi - \eta^\dagger \sigma_k \eta) \right] \\
&= i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} (\psi^\dagger \partial_a \psi - \partial_a \psi^\dagger \psi - \partial_a \eta^\dagger \eta + \eta^\dagger \partial_a \eta) - \frac{\sqrt{\hbar}}{2\gamma} (\psi^\dagger \partial_a \psi + \partial_a \psi^\dagger \psi - \partial_a \eta^\dagger \eta - \eta^\dagger \partial_a \eta) \\
&\quad - i\frac{\sqrt{\hbar}}{2} \frac{i}{2} A_a^k (\psi^\dagger \sigma_k \psi + \eta^\dagger \sigma_k \eta) \\
&= \frac{1}{2} (\pi_\xi \partial_a \xi - (\partial_a \pi_\xi) \xi - \pi_\chi \partial_a \chi + (\partial_a \pi_\chi) \chi) - \frac{\sqrt{\hbar} \kappa}{4} P_j^b \partial_a (e_b^j J^0) - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} A_a^k J_k. \quad (6.236)
\end{aligned}$$

Combinando as expressões (6.235) e (6.236) temos que a expressão para o vínculo de difeomorfismos espaciais nas novas coordenadas é

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_a &= \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k - \mathcal{A}_a^k \partial_b P_k^b \right) + A_a^k \left( \mathcal{D}_b^{(A)} P_k^b - \frac{\sqrt{\hbar}}{2} J_k \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\pi_\xi \partial_a \xi - (\partial_a \pi_\xi) \xi - \pi_\chi \partial_a \chi + (\partial_a \pi_\chi) \chi) + P_k^b \partial_a C_b^k - \frac{\sqrt{\hbar} \kappa}{4} P_j^b \partial_a C_b^j \\
&= \left( 2P_k^b \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^k - \mathcal{A}_a^k \partial_b P_k^b \right) + \frac{1}{2} (\pi_\xi \partial_a \xi - (\partial_a \pi_\xi) \xi - \pi_\chi \partial_a \chi + (\partial_a \pi_\chi) \chi) \quad (6.237)
\end{aligned}$$

Tendo fatorado os vínculos e reescrito as variáveis segundo novas referências podemos escrever a Lagrangiana de ordem um como

$$\mathcal{L}^{(1)} = P_i^a \dot{\mathcal{A}}_a^i + \pi_\xi \dot{\xi} + \pi_\chi \dot{\chi} + \dot{\lambda}^i \mathcal{G}_i + \dot{\lambda} \mathcal{C} + \dot{\lambda}^a \mathcal{C}_a, \quad (6.238)$$

com vetor simplético de ordem um e 1-forma simplética de ordem um dados, respectivamente, por

$$(\xi^\alpha)^{(1)} = \left( \mathcal{A}_a^i \quad P_i^a \quad \xi \quad \pi_\xi \quad \chi \quad \pi_\chi \quad \lambda^i \quad \lambda \quad \lambda^a \right), \quad (6.239)$$

$$(\mathcal{a}_\beta)^{(1)} = \left( P_j^b \quad 0 \quad \pi_\xi \quad 0 \quad \pi_\chi \quad 0 \quad \mathcal{G}_j \quad \mathcal{C} \quad \mathcal{C}_b \right). \quad (6.240)$$

Donde obtemos a estrutura pré-simplética de ordem um

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{\delta a_\beta}{\delta \xi^\alpha} - (-1)^{\varepsilon_R \varepsilon_S} \frac{\delta a_\alpha}{\delta \xi^\beta} \\
&= \delta_\alpha^2 \delta_\beta^1 \delta_b^a \delta_j^i - \delta_\alpha^1 \delta_\beta^2 \delta_a^b \delta_j^i + \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 + \delta_\alpha^3 \delta_\beta^4 + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 + \delta_\alpha^5 \delta_\beta^6 \\
&\quad + \left[ \left( \delta_\alpha^1 \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} + \delta_\alpha^2 \frac{\delta}{\delta P_i^a} + \delta_\alpha^3 \frac{\delta}{\delta \xi} + \delta_\alpha^4 \frac{\delta}{\delta \pi_\xi} + \delta_\alpha^5 \frac{\delta}{\delta \chi} + \delta_\alpha^6 \frac{\delta}{\delta \pi_\chi} \right) \mathcal{G}_j \delta_\beta^7 - (-1)^{\varepsilon_R \varepsilon_S} \alpha \leftrightarrow \beta \right] \\
&\quad + \left[ \left( \delta_\alpha^1 \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} + \delta_\alpha^2 \frac{\delta}{\delta P_i^a} + \delta_\alpha^3 \frac{\delta}{\delta \xi} + \delta_\alpha^4 \frac{\delta}{\delta \pi_\xi} + \delta_\alpha^5 \frac{\delta}{\delta \chi} + \delta_\alpha^6 \frac{\delta}{\delta \pi_\chi} \right) \mathcal{C} \delta_\beta^8 - (-1)^{\varepsilon_R \varepsilon_S} \alpha \leftrightarrow \beta \right] \\
&\quad + \left[ \left( \delta_\alpha^1 \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} + \delta_\alpha^2 \frac{\delta}{\delta P_i^a} + \delta_\alpha^3 \frac{\delta}{\delta \xi} + \delta_\alpha^4 \frac{\delta}{\delta \pi_\xi} + \delta_\alpha^5 \frac{\delta}{\delta \chi} + \delta_\alpha^6 \frac{\delta}{\delta \pi_\chi} \right) \mathcal{C}_a \delta_\beta^9 - (-1)^{\varepsilon_R \varepsilon_S} \alpha \leftrightarrow \beta \right].
\end{aligned} \tag{6.241}$$

Os modos-zero da estrutura de nível um devem ser

$$(\nu_{[6]i})^\alpha = \left( \frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta P_j^b} \quad -\frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta \mathcal{A}_b^j} \quad \frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta \pi_\xi} \quad \frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta \xi} \quad \frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta \pi_\chi} \quad \frac{\delta \mathcal{G}_i}{\delta \chi} \quad -\delta_i^j \quad 0 \quad 0 \right), \tag{6.242}$$

$$(\nu_{[6]})^\alpha = \left( \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta P_j^b} \quad -\frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \mathcal{A}_b^j} \quad \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \pi_\xi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \xi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \pi_\chi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}}{\delta \chi} \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right), \tag{6.243}$$

$$(\nu_{[7]a})^\alpha = \left( \frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta P_j^b} \quad -\frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta \mathcal{A}_b^j} \quad \frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta \pi_\xi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta \xi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta \pi_\chi} \quad \frac{\delta \mathcal{C}_a}{\delta \chi} \quad 0 \quad 0 \quad -\delta_a^b \right). \tag{6.244}$$

Após a obtenção dos modos-zero na superfície de vínculo podemos fazer o cálculo para as expressões de transformação de calibre, desse modo teremos para um parâmetro infinitesimal  $\rho^i$ , as transformações de calibre da conexão de Ashtekar-Barbero corrigida e para o seu momento conjugado são, respectivamente,

$$\delta_{\vec{\rho}} \mathcal{A}_a^i = \frac{\delta}{\delta P_i^a} \int_\Sigma d^3x \rho^i G_i = -(D)_a^A \rho^i, \tag{6.245}$$

$$\delta_{\vec{\rho}} P_i^a = -\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} \int_\Sigma d^3x \rho^i G_i = \epsilon_{ij}^k \rho^j P_k^a, \tag{6.246}$$

e

$$\delta_{\vec{\rho}} \xi = \frac{\delta}{\delta \pi_\xi} \int_\Sigma d^3x \rho^i G_i = \rho^i \tau_i \xi. \tag{6.247}$$

A eq. (6.247) tem o efeito de rotações locais[131].

Dado outro parâmetro infinitesimal distinto,  $\varepsilon^a$ , temos que a transformação de calibre por difeomorfismos espaciais da conexão de Ashtekar-Barbero corrigida e para o seu momento conjugado são, respectivamente,

$$\begin{aligned}
\delta_{\vec{\varepsilon}} \mathcal{A}_a^i &= \frac{\delta}{\delta P_i^a} \int_\Sigma d^3x \varepsilon^a \mathcal{C}_a = \varepsilon^b \mathcal{F}_{ba}^{(A)i} + \mathcal{D}_a^{(A)} (\varepsilon^c \mathcal{A}_a^i) \\
&= \mathcal{L}_{\vec{\varepsilon}} \mathcal{A}_a^i,
\end{aligned} \tag{6.248}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{\tilde{\varepsilon}} P_i^a &= -\frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} \int_{\Sigma} d^3x \varepsilon^a \mathcal{C}_a = -\int_{\Sigma} d^3x \left[ 2 \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_a^i} \left( \varepsilon^b P_j^c \partial_{[a} \mathcal{A}_{b]}^j \right) - \varepsilon^a \partial_c P_i^c \right] \\
&= -\int_{\Sigma} d^3x \left[ -2 \partial_{[c} \left( \varepsilon^c P_i^b \right) \delta_{b]}^a + P_i^c \partial_c \varepsilon^a \right] \\
&= -\int_{\Sigma} d^3x \left[ -\partial_c \left( \varepsilon^c P_i^a \right) - \partial_b \left( \varepsilon^a P_i^b \right) + P_i^c \partial_c \varepsilon^a \right] \\
&= \int_{\Sigma} d^3x \left[ \varepsilon^c \partial_c P_i^a - P_i^b \partial_b \varepsilon^a + P_i^a \partial_b \varepsilon^b \right] \\
&= \mathcal{L}_{\tilde{\varepsilon}} P_i^a
\end{aligned} \tag{6.249}$$

e

$$\begin{aligned}
\delta_{\tilde{\varepsilon}} \xi &= \frac{\delta}{\delta \pi_{\xi}} \int_{\Sigma} d^3x \varepsilon^a \mathcal{C}_a = \int_{\Sigma} d^3x \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \pi_{\xi}} \left( \varepsilon^a \pi_{\xi} \partial_a \xi - (\partial_a \pi_{\xi}) \varepsilon^a \xi \right) \\
&= \varepsilon^a \partial_a \xi + \frac{1}{2} \xi \partial_a \varepsilon^a = \mathcal{L}_{\tilde{\varepsilon}} \xi,
\end{aligned} \tag{6.250}$$

conforme encontrado em Ref. [139].

As transformações de calibre geradas pelo vínculo Hamiltoniano são bem mais complexas do ponto de vista técnico, além disso, sua forma depende de outro conjunto de transformações de modo a tratar o problema no contexto da teoria de Gravitação Quântica de Lacetes. Tal desenvolvimento está além do escopo do nosso trabalho e seu resultado está descrito no trabalho em que nos baseamos[134].

Para contarmos o número de graus de liberdade seguimos a eq. (2.103). Na última iteração temos 33 componentes de campo (eq. 6.239), considerando que  $\psi$  e  $\eta$  são bi-espinores, então  $\xi$ ,  $\chi$  e seus momentos contabilizam dois componentes cada; das eqs. (6.226), (6.234) e (6.237) temos 7 vínculos não eliminados; e, na última iteração, 7 modos-zero geradores de calibre foram encontrados (eqs. (6.242), (6.243), (6.244)), então o número de graus de liberdade da teoria é

$$\text{NGL} = \frac{1}{2} (N^{(1)} - 2M - G) = \frac{1}{2} (33 - 2 \times 7 - 7) = 6. \tag{6.251}$$

Essencialmente dois graus de liberdade relativos à teoria gravitacional equivalente à Relatividade Geral[51] no nível das equações de campo e mais quatro graus de liberdade relativos ao termo de matéria fermiônica de massa nula[140].

## 7 Considerações Finais

Nessa tese apresentamos uma revisão do formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados, incluindo teorias de calibre. As funções básicas do formalismo foram fundamentadas e inseridas, foi mostrado como as quantidades definidas se relacionam entre si na obtenção da análise canônica de Dirac para uma teoria, ou seja, a obtenção das equações de vínculos, o tratamento desses vínculos, a derivação das equações de transformação de calibre, contagem de graus de liberdade e dedução das equações de movimento, tanto em teorias de partículas como em teorias de campo. Tal tratamento possibilitou que introduzíssemos de maneira clara a descrição geométrica do formalismo Hamiltoniano no que conhecemos como formalismo simplético.

Aqui deduzimos minuciosamente a descrição geométrica da teoria mecânica canônica. Expusemos todos os pressupostos matemáticos básicos para o formalismo simplético que essencialmente generaliza o formalismo para formas canônicas equivalentes por uma transformação de Darboux. Após construirmos os principais resultados da teoria simplética apresentamos o método de Faddeev-Jackiw no tratamento de sistemas de calibre, alcançando a representação equivalente àquela de Dirac, com a vantagem da generalização do espaço de fase que o acompanha. Apresentamos ainda de forma completa o algoritmo de Barcelos Neto-Wotzasek para o método de FJ que sistematiza sua aplicação, com resultados comparáveis e equivalentes ao do algoritmo de Dirac-Bergmann. O algoritmo de BW foi apresentado tanto para variáveis bosônicas quanto fermiônicas.

Mostramos no capítulo 3 como a teoria da relatividade geral e, por conseguinte, demais teorias baseadas no comportamento dinâmico da métrica do espaço-tempo, pode ser matematicamente transformada em uma teoria Hamiltoniana com evolução dada por um tipo especial de espaço de fase construído a partir de métodos de foliação de variedades Riemannianas. Fizemos uma descrição detalhada do formalismo de Arnowitt-Deser-Misner onde são deduzidas todas as quantidades fundamentais do espaço-tempo foliado.

Abaixo listamos separadamente as conclusões de cada um dos trabalhos originais desenvolvidos e expostos nessa tese.

Em Ref. [51], mostramos como aplicar o formalismo simplético iterativo[23, 25–27] para teorias de gravitação no formato tensorial, à saber, relatividade geral e dois casos da teoria de Brans-Dicke. No processo esclarecemos questões do formalismo geral e abrimos o caminho para aplicações de outras formulações de gravidade estendida. Abaixo frisamos e comentamos alguns dos resultados desse trabalho:

(1) Contagem de graus de liberdade. Como consequência da pesquisa do método simplético em teorias de gravitação, introduzimos um método completamente circunscrito ao

formalismo simplético para a contagem dos graus de liberdade, aqui exposto na Seção 2.4.

(2) Modo-zero generalizado e transformações de calibre. Introduzimos o modo-zero mais geral possível parametrizado por um campo arbitrário. Para sistemas de partículas a simples multiplicação do modo-zero por um parâmetro de calibre  $\varepsilon(t)$  é suficiente para se obter a expressão para sua transformação, entretanto mostramos que esse processo depende, em geral, de integrações dos parâmetros arbitrários (5.42), o que leva à introdução da função especial  $\Omega_\varepsilon$ .

(3) Modos-zero fracos e invariância pro difeomorfismos. No formalismo simplético, autovetores e autovalores escritos como uma combinação linear dos vínculos precisam ser considerados como modos-zero da matriz simplética[33]. Esses modos-zero foram nomeados de modos-zero fracos, em referência à igualdade fraca introduzida por Dirac. Pelo que sabemos, nosso trabalho foi o primeiro a apontar sua relação com a invariância por difeomorfismos e derivar explicitamente os modos-zero que geram as simetrias de calibre de RG, por sua vez parametrizadas por  $\varepsilon^\mu$  [see eq. (5.42)].

(4) Da abordagem de Escalante e colaboradores. Nas Refs. [39, 141, 142] outra abordagem do algoritmo iterativo simplético pode ser encontrada. Nesta, algumas colunas da matriz pré-simplética foram ignoradas no processo de se encontrar modos-zero. A razão pela qual é difícil encontrar modos-zero da matriz completa (5.33) foi esclarecida em nosso trabalho e explicado logo acima: a matriz não possui modos-zero, apenas modos-zero fracos. Em alguns casos, esta abordagem pode levar a resultados corretos, mas não existe prova de que podemos simplesmente ignorar algumas colunas e sempre encontrar respostas corretas. Do ponto de vista do algoritmo de Dirac-Bergmann, isso seria análogo a dizer que alguns vínculos são de primeira classe sem verificar os parênteses de Poisson entre eles. Pode até funcionar, mas para cada sistema considerado deve haver uma boa explicação do porquê não ser necessário verificar os parênteses de Poisson. De qualquer forma, aqui fornecemos prova detalhada de que o formalismo simplético pode ser aplicado para RG e teorias de gravitação estendida, sem que seja necessário negligenciar partes da matriz pré-simplética. Também, como demonstrado na Sec. 5.2.4, as últimas colunas da matriz pré-simplética são úteis na obtenção dos modos-zero (fracos). Assim, mesmo nos casos em que seja possível ignorar as últimas colunas, esse procedimento não implica necessariamente num caminho mais rápido.

(5) Da importância da ordem em que se adicionam os vínculos e dos multiplicadores de Lagrange derivados no tempo. Em Ref. [143], quando comentando sobre o formalismo simplético, afirma que derivadas temporais nos multiplicadores de Lagrange podem ser usadas, mas não inúteis, uma vez que multiplicadores de Lagrange são sempre arbitrários. Grosso modo a observação é verdadeira, mas frisamos que dentro do formalismo simplético (e provavelmente qualquer formalismo Hamiltoniano), essa afirmação deve ser entendida com bastante cuidado. Como mostrado explicitamente no Apêndice E, mudar um multi-

plicador de Lagrange para sua versão derivada no tempo de fato altera a física deduzida do formalismo simplético: pode causar mudanças no número de vínculos encontrados, levando a resultados fisicamente não equivalentes. Essa questão aparece, em particular, na aplicação apresentada na Sec. 5.3.3.

(6) Notação e tensores de ordem arbitrária. A notação introduzida em nosso trabalho, que associa cada índice simplético a um campo, e não a componentes de um campo, pode ser imediatamente empregada em teorias com tensores de ordem arbitrárias.

(7) Vínculos primários em cálculos de transformação de calibre. Nosso trabalho mostrou a importância de se considerar explicitamente o método de linearização da Lagrangiana para a obtenção das expressões de transformação de calibre. Da linearização obtemos os vínculos primários, cujas variáveis são instrumentais no cálculo dos parênteses generalizados de Poisson e, por sua vez, nas constantes de estrutura da teoria, indispensáveis na obtenção das expressões de calibre.

(8) Solução das equações de calibre no espaço simplético fora da superfície de vínculos. Derivamos inteiramente dentro do formalismo simplético as expressões iterativas para a solução das equações de calibre no espaço simplético completo. Nosso resultado generaliza e confirma as expressões do formalismo de Dirac, devido ao caráter geral da 1-forma simplética inerente à formulação geométrica.

O trabalho sobre a ação de Holst-Dirac traz uma revisão da formulação canônica da gravitação utilizada em uma teoria de gravitação quântica não perturbativa quando acoplada à matéria fermiônica. Após obtermos a forma Lagrangiana linearizada, encontramos os vínculos da teoria e a estrutura pré-simplética. Nesse processo elucidamos como campos de spin semi-inteiros são incorporados na análise através de técnicas que lidam com variáveis de Grassmann, em especial investigamos a transformação canônica que altera a representação dos campos fermiônicos em variáveis de Grassmann com meia densidades, desenvolvida por Thiemann[138, 144]. É demonstrado mais um ponto de vista do problema de representação dos campos fermiônicos com destaque à solução de Thiemann. Resolvemos os vínculos de segunda classe reduzindo o espaço de fase da teoria, chegando à Lagrangiana pré-simplética formada unicamente por vínculos geradores de transformações de calibre. Obtemos então as expressões para as transformações de calibre para os principais campos da teoria e fazemos a contagem de graus de liberdade. Nessa abordagem a obtenção dos vínculos e a redução do espaço de fase é realizada de maneira sistemática pelo uso do algoritmo BW do método Faddeev-Jackiw.

Finalmente, esperamos que esse método, e as extensões baseadas nele, se mostre frutífero na análise de sistemas específicos nos contextos de RG e teorias de gravitação estendidas. O formalismo aqui apresentado também fornece um esquema que pode ser usado como prova para resultados derivados utilizando-se outras abordagens.



## Referências

- [1] Wigner, Eugene: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences*. Commun. Pure Appl. Math., 13(1):1–14, fevereiro 1960. Citado na página 15.
- [2] Lagrange, J.L.: *Mécanique analytique*. Número v. 1 em *Mécanique analytique*. Ve Courcier, 1811. <https://books.google.co.uk/books?id=Q8MKAAAAYAAJ>. Citado na página 15.
- [3] Byron, F.W. e R.W. Fuller: *Mathematics of Classical and Quantum Physics*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2012, ISBN 9780486135069. <https://books.google.com.br/books?id=kzeiyDgckvIC>. Citado na página 15.
- [4] Bambi, Cosimo: *Classical Tests of General Relativity*, páginas 163–178. Springer Singapore, Singapore, 2018, ISBN 978-981-13-1090-4. [https://doi.org/10.1007/978-981-13-1090-4\\_9](https://doi.org/10.1007/978-981-13-1090-4_9). Citado na página 15.
- [5] Will, Clifford M.: *The Confrontation between General Relativity and Experiment*. Living Rev. Rel., 17:4, 2014. Citado na página 15.
- [6] Abbott, B. P. et al.: *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*. Phys. Rev. Lett., 119(16):161101, 2017. Citado na página 15.
- [7] Rodrigues, Davi C., Valerio Marra, Antonino del Popolo e Zahra Davari: *Absence of a fundamental acceleration scale in galaxies*. Nature Astron., 2(8):668–672, 2018. Citado na página 15.
- [8] Collett, Thomas E., Lindsay J. Oldham, Russell J. Smith, Matthew W. Auger, Kyle B. Westfall, David Bacon, Robert C. Nichol, Karen L. Masters, Kazuya Koyama e Remco van den Bosch: *A precise extragalactic test of General Relativity*. Science, 360:1342, 2018. Citado na página 15.
- [9] Capozziello, S. e V. Faraoni: *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. Fundamental Theories of Physics. Springer Netherlands, 2010, ISBN 9789400701656. <https://books.google.com.br/books?id=eBFpiXXVcKkC>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 96, 104 e 105.
- [10] Iorio, Lorenzo: *Gravitational Anomalies in the Solar System?* Int. J. Mod. Phys. D, 24(06):1530015, 2015. Citado na página 15.

- [11] Amendola, Luca e Shinji Tsujikawa: *Dark Energy: Theory and Observations*. Cambridge University Press, janeiro 2015, ISBN 978-1-107-45398-2. Citado na página 15.
- [12] Freedman, Wendy L.: *Cosmology at a Crossroads*. Nature Astron., 1:0121, 2017. Citado na página 15.
- [13] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *The Dynamics of general relativity*. Gen. Rel. Grav., 40:1997–2027, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 67.
- [14] Deser, S.: *The legacy of ADM*. Phys. Scripta, 90(6):068006, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 67.
- [15] Kiriushcheva, N., S. V. Kuzmin, C. Racknor e S. R. Valluri: *Diffeomorphism Invariance in the Hamiltonian formulation of General Relativity*. Phys. Lett. A, 372:5101–5105, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 93.
- [16] Frolov, A. M., N. Kiriushcheva e S. V. Kuzmin: *On canonical transformations between equivalent Hamiltonian formulations of General Relativity*. Grav. Cosmol., 17:314–323, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 93.
- [17] Mukherjee, P. e A. Saha: *Gauge invariances vis-a-vis diffeomorphisms in second order metric gravity*. Int. J. Mod. Phys., A24:4305–4315, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 15, 49, 91, 92, 93, 94 e 186.
- [18] Kiriushcheva, N. e S. V. Kuzmin: *The Hamiltonian formulation of General Relativity: Myths and reality*. Central Eur. J. Phys., 9:576–615, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 93.
- [19] Pons, J. M., D. C. Salisbury e K. A. Sundermeyer: *Revisiting observables in generally covariant theories in the light of gauge fixing methods*. Phys. Rev. D, 80:084015, 2009. Citado na página 15.
- [20] Dirac, P. A. M.: *Lectures on quantum mechanics*, volume 2 de *Belfer Graduate School of Science Monographs Series*. Belfer Graduate School of Science, New York, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 172.
- [21] Gitman, D.M. e I.V. Tyutin: *Quantization of fields with constraints*. Mary K.Gaillard. Springer, 1990, ISBN 9783540516798. <https://books.google.com.br/fs?id=0hBPAQAIAAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 187.
- [22] Anderson, J. L. e P. G. Bergmann: *Constraints in covariant field theories*. Phys. Rev., 83:1018–1025, 1951. Citado na página 15.

- [23] Faddeev, L. D. e R. Jackiw: *Hamiltonian Reduction of Unconstrained and Constrained Systems*. Phys. Rev. Lett., 60:1692–1694, 1988. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 23, 25 e 149.
- [24] Jackiw, R.: *(Constrained) quantization without tears*. Em *2nd Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods Montepulciano, Italy, June 28-July 1, 1993*, 1993. <http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0167133>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 17, 23, 26 e 45.
- [25] Barcelos-Neto, J. e C. Wotzasek: *Faddeev-Jackiw quantization and constraints*. Int. J. Mod. Phys., A7:4981–5004, 1992. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 27 e 149.
- [26] Barcelos-Neto, J. e C. Wotzasek: *Symplectic quantization of constrained systems*. Mod. Phys. Lett., A7:1737–1748, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 16, 27 e 149.
- [27] Montani, H. e C. Wotzasek: *Faddeev-Jackiw quantization of nonabelian systems*. Mod. Phys. Lett., A8:3387–3396, 1993. Citado 5 vezes nas páginas 16, 43, 44, 47 e 149.
- [28] Rodrigues, D. C.: *Electromagnetic dualities on noncommutative space-time and symplectic formalisms*. Tese de Doutorado, Rio de Janeiro Federal U., 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 35.
- [29] Abreu, E. M. C., A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira, R. C. N. Silva e C. Wotzasek: *Obtaining non-Abelian field theories via Faddeev-Jackiw symplectic formalism*. Phys. Lett., A374:3603–3607, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 16, 61, 63 e 64.
- [30] Huang, Y. e J. Yang: *Modified Faddeev-Jackiw quantization of massive non-Abelian Yang-Mills fields and Lagrange multiplier fields*. Phys. Lett., B668:438–441, 2008. Citado na página 16.
- [31] Kulshreshtha, D. S. e H. J. W. Muller-Kirsten: *Faddeev-Jackiw quantization of selfdual fields*. Phys. Rev., D45:393–397, 1992. Citado na página 16.
- [32] Blas, H. e B. M. Pimentel: *The Faddeev-Jackiw approach and the affine  $sl(2)$  Toda model coupled to matter field*. Annals Phys., 282:67–86, 2000. Citado na página 16.
- [33] Wotzasek, C.: *Faddeev-Jackiw approach to hidden symmetries*. Annals Phys., 243:76–89, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 16, 23, 43, 44 e 150.
- [34] Neves, C., W. Oliveira, D. C. Rodrigues e C. Wotzasek: *Embedding commutative and noncommutative theories in the symplectic framework*. Phys. Rev., D69:045016, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 43.

- [35] Mendes, A. C. R., C. Neves, W. Oliveira e D. C. Rodrigues: *Symplectic embedding of second class systems*. Nucl. Phys. Proc. Suppl., 127:170–173, 2004. Citado na página 16.
- [36] Abreu, E. M. C., A. C. R. Mendes, C. Neves, W. Oliveira e F. I. Takakura: *Duality through the symplectic embedding formalism*. Int. J. Mod. Phys., A22:3605–3620, 2007. Citado na página 16.
- [37] Neves, C., W. Oliveira, D. C. Rodrigues e C. Wotzasek: *Hamiltonian symplectic embedding of the massive noncommutative  $U(1)$  theory*. J. Phys., A37:9303–9316, 2004. Citado na página 16.
- [38] Hong, S., Y. Kim, Y. Park e K. D. Rothe: *Symplectic embedding and Hamilton-Jacobi analysis of Proca model*. Mod. Phys. Lett., A17:435–452, 2002. Citado na página 16.
- [39] Escalante, A. e J. Manuel-Cabrera: *Faddeev–Jackiw quantization of an Abelian and non-Abelian exotic action for gravity in three dimensions*. Annals Phys., 361:585–604, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 150.
- [40] Escalante, A. e O. Rodríguez-Tzompantzi: *Dirac’s and generalized Faddeev–Jackiw brackets for Einstein’s theory in the  $G \rightarrow 0$  limit*. Annals Phys., 364:136–147, 2016. Citado na página 16.
- [41] Gotay, M. e J. Isenberg: *The Symplectization of Science*. Gazette des Mathématiciens, fevereiro 1992. <http://www.pims.math.ca/gotay/Symplectization> Citado na página 17.
- [42] Silva, A.C. da: *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, ISBN 9783540453307. [https://www.google.com.br/books/edition/Lectures\\_on\\_Symplectic\\_Geometry/CMRsCQAAQBAJ?hl=en&gbpv=0](https://www.google.com.br/books/edition/Lectures_on_Symplectic_Geometry/CMRsCQAAQBAJ?hl=en&gbpv=0). Citado na página 17.
- [43] Moshayedi, Nima: *Lectures on Symplectic Geometry, Poisson Geometry, Deformation Quantization and Quantum Field Theory*. dezembro 2020. Citado na página 17.
- [44] Vogtmann, K., A. Weinstein e V.I. Arnol’d: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997, ISBN 9780387968902. [https://books.google.com.br/books?id=Pd8-s6r0t\\_cC](https://books.google.com.br/books?id=Pd8-s6r0t_cC). Citado na página 17.
- [45] Castillo, G.F.T.: *Differentiable Manifolds: A Theoretical Physics Approach*. Birkhäuser Boston, 2011, ISBN 9780817682712. <https://books.google.com.br/books?id=V2YWDPGpiZgC>. Citado na página 17.

- [46] Do Carmo, M.P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces: Second Edition*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2016, ISBN 9780486806990. <https://books.google.com.br/books?id=v4vqjgEACAAJ>. Citado na página 17.
- [47] Nakahara, M.: *Geometry, topology and physics*. 2003. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 189.
- [48] Henneaux, M. e C. Teitelboim: *Quantization of gauge systems*. Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 520 p, 1992, ISBN 0691037698, 9780691037691. Citado 6 vezes nas páginas 31, 46, 53, 56, 90 e 167.
- [49] Govaerts, Jan: *Hamiltonian Reduction of First Order Actions*. Int. J. Mod. Phys. A, 5:3625–3640, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 46.
- [50] Dengiz, Suat: *Faddeev–Jackiw Hamiltonian reduction for free and gauged Rarita–Schwinger theories*. Eur. Phys. J. C, 76(10):566, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 110.
- [51] Rodrigues, Davi C., Mariniel Galvão e Nelson Pinto-Neto: *Hamiltonian analysis of General Relativity and extended gravity from the iterative Faddeev–Jackiw symplectic approach*. Phys. Rev. D, 98(10):104019, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 35, 85, 148 e 149.
- [52] Rham, Claudia de: *Massive Gravity*. Living Rev. Rel., 17:7, 2014. Citado na página 35.
- [53] Golovnev, Alexey: *On the Hamiltonian analysis of non-linear massive gravity*. Phys. Lett. B, 707:404–408, 2012. Citado na página 35.
- [54] Huang, Qing Guo, Ke Chao Zhang e Shuang Yong Zhou: *Generalized massive gravity in arbitrary dimensions and its Hamiltonian formulation*. JCAP, 08:050, 2013. Citado na página 35.
- [55] Molaee, Zahra e Ahmad Shirzad: *Massive gravity, canonical structure and gauge symmetry*. Nucl. Phys. B, 933:248–261, 2018. Citado na página 35.
- [56] Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998, ISBN 9780471309321. Citado na página 40.
- [57] Montani, H.: *Symplectic analysis of constrained systems*. Int. J. Mod. Phys., A8:4319–4338, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 47.
- [58] Montani, H. e R. Montemayor: *Lagrangian approach to a symplectic formalism for singular systems*. Phys. Rev. D, 58:125018, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 140.

- [59] Abreu, Everton M. C., Albert C. R. Mendes, Clifford Neves, Wilson Oliveira e Rodrigo C. N. Silva: *QCD gauge symmetries through Faddeev-Jackiw symplectic method*. JHEP, 06:093, 2013. Citado na página 43.
- [60] Thomson, Mark: *Modern particle physics*. Cambridge University Press, New York, 2013, ISBN 978-1-107-03426-6. Citado na página 43.
- [61] Land, M. C. e L. P. Horwitz: *Off-shell quantum electrodynamics*. J. Phys. Conf. Ser., 437:012011, 2013. Citado na página 43.
- [62] Schwamb, Michael e Hartmuth Arenhovel: *Off-shell effects in electromagnetic reactions on the deuteron*. Nucl. Phys. A, 696:556–580, 2001. Citado na página 43.
- [63] Adelberg, M. L. e A. M. Saperstein: *Obtainability of two-body off-shell information from elastic nucleon-nucleus scattering at intermediate-energy*. Phys. Rev. C, 7:63–74, 1973. Citado na página 43.
- [64] Arkani-Hamed, Nima, Jacob L. Bourjaily, Freddy Cachazo, Alexander B. Goncharov, Alexander Postnikov e Jaroslav Trnka: *Grassmannian Geometry of Scattering Amplitudes*. Cambridge University Press, abril 2016, ISBN 978-1-107-08658-6, 978-1-316-57296-2. Citado na página 43.
- [65] Seidewitz, Ed: *Axiomatic, Parameterized, Off-Shell Quantum Field Theory*. setembro 2016. Citado na página 43.
- [66] Banerjee, R., H. J. Rothe e K. D. Rothe: *Master equation for Lagrangian gauge symmetries*. Phys. Lett., B479:429–434, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 49, 92, 187 e 188.
- [67] Banerjee, R., H. J. Rothe e K. D. Rothe: *Hamiltonian approach to Lagrangian gauge symmetries*. Phys. Lett., B463:248–251, 1999. Citado 4 vezes nas páginas 49, 92, 187 e 188.
- [68] Castellani, Leonardo: *Symmetries in Constrained Hamiltonian Systems*. Annals Phys., 143:357, 1982. Citado 4 vezes nas páginas 49, 59, 91 e 93.
- [69] Mukunda, N. e G. Sudarshan: *Classical dynamics: a modern perspective*. 1974. Citado na página 49.
- [70] Henneaux, M., C. Teitelboim e J. Zanelli: *Gauge Invariance and Degree of Freedom Count*. Nucl. Phys. B, 332:169–188, 1990. Citado na página 53.
- [71] Bengtsson, Ingemar: *SELF DUAL YANG-MILLS FIELDS AND ASHTEKAR'S VARIABLES*. Class. Quant. Grav., 7:L223–L227, 1990. Citado na página 61.

- [72] Pons, J. M., D. C. Salisbury e L. C. Shepley: *Gauge transformations in Einstein-Yang-Mills theories*. J. Math. Phys., 41:5557–5571, 2000. Citado na página 64.
- [73] Becchi, C., A. Rouet e R. Stora: *Renormalization of Gauge Theories*. Annals Phys., 98:287–321, 1976. Citado na página 64.
- [74] Tuynman, G. M.: *Geometric quantization of the BRST charge*. Commun. Math. Phys., 150:237–265, 1992. Citado na página 64.
- [75] Bratchikov, A. V.: *Classical BRST charges in reducible BRST-anti-BRST theories*. setembro 2014. Citado na página 64.
- [76] Henneaux, M.: *CLASSICAL FOUNDATIONS OF BRST SYMMETRY: LECTURES AT THE UNIVERSITY OF NAPLES*. 1988. Citado na página 64.
- [77] Henneaux, M. e C. Teitelboim: *BRST Cohomology in Classical Mechanics*. Commun. Math. Phys., 115:213–230, 1988. Citado na página 64.
- [78] Ciambelli, Luca e Robert G. Leigh: *Lie Algebroids and the Geometry of Off-shell BRST*. janeiro 2021. Citado na página 64.
- [79] Hong, Soon Tae: *BRST symmetry and de Rham cohomology*. Springer, Dordrecht, 2015, ISBN 978-94-024-0401-2, 978-94-017-9750-4. Citado na página 65.
- [80] Cattaneo, Alberto S. e Nima Moshayedi: *Introduction to the BV-BFV formalism*. Rev. Math. Phys., 32(09):2030006, 2020. Citado na página 65.
- [81] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*. Phys. Rev., 116:1322–1330, 1959. Citado na página 67.
- [82] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *Canonical variables for general relativity*. Phys. Rev., 117:1595–1602, 1960. Citado na página 67.
- [83] Arnowitt, R., S. Deser e C. W. Misner: *Finite Self-Energy of Classical Point Particles*. Phys. Rev. Lett., 4:375–377, 1960. Citado na página 67.
- [84] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *Gravitational-electromagnetic coupling and the classical self-energy problem*. Phys. Rev., 120:313–320, 1960. Citado na página 67.
- [85] Arnowitt, R., S. Deser e C. W. Misner: *Interior Schwarzschild solutions and interpretation of source terms*. Phys. Rev., 120:321, 1960. Citado na página 67.
- [86] Arnowitt, R., S. Deser e C. W. Misner: *Energy and the Criteria for Radiation in General Relativity*. Phys. Rev., 118:1100–1104, 1960. Citado na página 67.

- [87] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *Coordinate invariance and energy expressions in general relativity*. Phys. Rev., 122:997, 1961. Citado na página 67.
- [88] Arnowitt, Richard L., Stanley Deser e Charles W. Misner: *Wave zone in general relativity*. Phys. Rev., 121:1556, 1961. Citado na página 67.
- [89] Arnowitt, R. e S. Deser: *Quantum Theory of Gravitation: General Formulation and Linearized Theory*. Phys. Rev., 113:745–750, 1959. Citado na página 67.
- [90] Deser, Stanley, R. Arnowitt e C. W. Misner: *Canonical Variables, Energy and Criteria for Radiation in General Relativity*. Nuovo Cim., 15:487, 1960. Citado na página 67.
- [91] Deser, Stanley, R. Arnowitt e C. W. Misner: *Note on Positive-Definiteness of Energy of the Gravitational Field*. Annals Phys., 11:116–121, 1960. Citado na página 67.
- [92] Deser, Stanley, R. Arnowitt e C. W. Misner: *Consistency of Canonical Reduction of General Relativity*. J. Math. Phys., 1:434, 1960. Citado na página 67.
- [93] Deser, Stanley, R. Arnowitt e C. W. Misner: *Heisenberg Representation in Classical General Relativity*. Nuovo Cim., 19:668, 1961. Citado na página 67.
- [94]ourgoulhon, E.: *3+1 formalism and bases of numerical relativity*. gr-qc/0703035, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 67, 68 e 76.
- [95] Wald, R. M.: *General Relativity*. Chicago, Usa: Univ. Pr. ( 1984) 491p, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 67, 85, 86 e 95.
- [96] Kuchař, Karel: *Canonical Quantization of Gravity*. Em Israel, Werner (editor): *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, páginas 237–288, Dordrecht, 1973. Springer Netherlands, ISBN 978-94-010-2639-0. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 94.
- [97] Deser, Stanley e Bayram Tekin: *Energy in generic higher curvature gravity theories*. Phys. Rev. D, 67:084009, 2003. Citado na página 67.
- [98] Deser, Stanley e Bayram Tekin: *New energy definition for higher curvature gravities*. Phys. Rev. D, 75:084032, 2007. Citado na página 67.
- [99] Goldberg, J. N.: *Asymptotic Invariants in Gravitational Radiation Fields*. Phys. Rev., 131:1367–1378, 1963. Citado na página 67.
- [100] Hayward, Sean A.: *Spatial and null infinity via advanced and retarded conformal factors*. Phys. Rev. D, 68:104015, 2003. Citado na página 67.

- [101] Schaefer, Gerhard: *The Gravitational Quadrupole Radiation Reaction Force and the Canonical Formalism of Adm.* Annals Phys., 161:81–100, 1985. Citado na página 67.
- [102] Geroch, Robert P.: *Structure of the gravitational field at spatial infinity.* J. Math. Phys., 13:956–968, 1972. Citado na página 67.
- [103] Liebling, Steven L. e Carlos Palenzuela: *Dynamical Boson Stars.* Living Rev. Rel., 15:6, 2012. Citado na página 67.
- [104] Di Giovanni, Fabrizio, Saeed Fakhry, Nicolas Sanchis-Gual, Juan Carlos Degollado e José A. Font: *Dynamical formation and stability of fermion-boson stars.* Phys. Rev. D, 102(8):084063, 2020. Citado na página 67.
- [105] Bojowald, Martin: *Canonical Gravity and Applications Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity.* Cambridge University Press, dezembro 2010, ISBN 978-0-521-19575-1, 978-0-511-98513-3. Citado 6 vezes nas páginas 68, 76, 85, 86, 109 e 124.
- [106] Dengiz, S.: *3+1 Orthogonal and Conformal Decomposition of the Einstein Equation and the ADM Formalism for General Relativity.* 1103.1220, 2011. Citado na página 68.
- [107] Neto, N.P.: *Hamiltonian formulation of General Relativity and applications.* Editora Livraria da Física, 2020, ISBN 9786555630428. Citado na página 68.
- [108] Callioli, C.A., R.C.F. Costa e H.H. Domingues: *Álgebra linear e aplicações.* Atual, 1990, ISBN 9788570562975. <https://books.google.com.br/books?id=AjsRRwAACAAJ>. Citado na página 80.
- [109] Garriga, Jaume, Xavier Montes, Misao Sasaki e Takahiro Tanaka: *Canonical quantization of cosmological perturbations in the one-bubble open universe.* Nucl. Phys. B, 513:343–374, 1998. [Erratum: Nucl.Phys.B 551, 511–511 (1999)]. Citado na página 85.
- [110] Vitenti, S. D. P., F. T. Falciano e N. Pinto-Neto: *Quantum Cosmological Perturbations of Generic Fluids in Quantum Universes.* Phys. Rev. D, 87(10):103503, 2013. Citado na página 85.
- [111] Hanson, Andrew J., Tullio Regge e Claudio Teitelboim: *Constrained Hamiltonian Systems.* Accademia Nazionale dei Lincei, 1976. Citado na página 86.
- [112] Dirac, P. A. M.: *The Hamiltonian form of field dynamics.* Can. J. Math., 3:1–23, 1951. Citado na página 91.

- [113] Shestakova, T. P.: *Hamiltonian formulation for the theory of gravity and canonical transformations in extended phase space*. *Class. Quant. Grav.*, 28:055009, 2011. Citado na página 93.
- [114] Hojman, S. A., K. Kuchar e C. Teitelboim: *Geometrodynamics Regained*. *Annals Phys.*, 96:88–135, 1976. Citado na página 94.
- [115] Teitelboim, Claudio: *How commutators of constraints reflect the space-time structure*. *Annals Phys.*, 79:542–557, 1973. Citado 2 vezes nas páginas 94 e 95.
- [116] Bojowald, Martin, Suddhasattwa Brahma, Umut Buyukcam e Fabio D’Ambrosio: *Hypersurface-deformation algebroids and effective spacetime models*. *Phys. Rev. D*, 94(10):104032, 2016. Citado na página 94.
- [117] Faraoni, Valerio: *Cosmology in scalar tensor gravity*. 2004, ISBN 978-1-4020-1988-3. Citado na página 96.
- [118] Wagoner, Robert V.: *Scalar tensor theory and gravitational waves*. *Phys. Rev. D*, 1:3209–3216, 1970. Citado na página 96.
- [119] Olmo, G. J.: *Palatini Approach to Modified Gravity:  $f(R)$  Theories and Beyond*. *Int. J. Mod. Phys.*, D20:413–462, 2011. Citado na página 96.
- [120] Salgado, M.: *The Cauchy problem of scalar tensor theories of gravity*. *Class. Quant. Grav.*, 23:4719–4742, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 98.
- [121] Zhang, X. e Y. Ma: *Loop Quantum Brans-Dicke Theory*. *J. Phys. Conf. Ser.*, 360:012055, 2012. Citado na página 96.
- [122] Brans, C. e R. H. Dicke: *Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation*. *Phys. Rev.*, 124:925–935, 1961. Citado na página 96.
- [123] Fujii, Y. e K. Maeda: *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, julho 2007, ISBN 978-0-521-03752-5, 978-0-521-81159-0, 978-0-511-02988-2. Citado na página 96.
- [124] Rodrigues, Davi C., Filipe de O. Salles, Ilya L. Shapiro e Alexei A. Starobinsky: *Auxiliary fields representation for modified gravity models*. *Phys. Rev. D*, 83:084028, 2011. Citado na página 96.
- [125] Olmo, G. J. e H. Sanchis-Alepuz: *Hamiltonian Formulation of Palatini  $f(R)$  theories a la Brans-Dicke*. *Phys. Rev.*, D83:104036, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 104.

- [126] Ferraris, Marco, Mauro Francaviglia e Igor Volovich: *The Universality of vacuum Einstein equations with cosmological constant*. *Class. Quant. Grav.*, 11:1505–1517, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 104.
- [127] Zhang, Xiangdong e Yongge Ma: *Nonperturbative Loop Quantization of Scalar-Tensor Theories of Gravity*. *Phys. Rev. D*, 84:104045, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 101, 103 e 104.
- [128] Barbero G., J.Fernando: *Reality conditions and Ashtekar variables: A Different perspective*. *Phys. Rev. D*, 51:5498–5506, 1995. Citado na página 109.
- [129] Barbero G., J.Fernando: *Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space times*. *Phys. Rev. D*, 51:5507–5510, 1995. Citado na página 109.
- [130] Immirzi, Giorgio: *Real and complex connections for canonical gravity*. *Class. Quant. Grav.*, 14:L177–L181, 1997. Citado na página 109.
- [131] Immirzi, Giorgio: *Quantum gravity and Regge calculus*. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 57:65–72, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 147.
- [132] Holst, Soren: *Barbero’s Hamiltonian derived from a generalized Hilbert-Palatini action*. *Phys. Rev. D*, 53:5966–5969, 1996. Citado na página 109.
- [133] Mercuri, Simone: *Fermions in Ashtekar-Barbero connections formalism for arbitrary values of the Immirzi parameter*. *Phys. Rev. D*, 73:084016, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 126.
- [134] Bojowald, Martin e Rupam Das: *Canonical gravity with fermions*. *Phys. Rev. D*, 78:064009, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 109 e 148.
- [135] Escalante, Alberto e J. Manuel-Cabrera: *Hamiltonian dynamics and Faddeev–Jackiw formulation of 3D gravity with a Barbero–Immirzi like parameter*. *Eur. Phys. J. C*, 77(5):303, 2017. Citado na página 110.
- [136] Escalante, Alberto e Prihel Cavildo-Sánchez: *Faddeev–Jackiw quantization of four dimensional BF theory*. *Annals Phys.*, 374:375–394, 2016. Citado na página 110.
- [137] Sengupta, Sandipan e Romesh K. Kaul: *Canonical supergravity with Barbero-Immirzi parameter*. *Phys. Rev. D*, 81:024024, 2010. Citado na página 110.
- [138] Thiemann, T.: *Kinematical Hilbert spaces for Fermionic and Higgs quantum field theories*. *Class. Quant. Grav.*, 15:1487–1512, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 141 e 151.
- [139] Date, Ghanashyam: *Revisiting canonical gravity with fermions*. outubro 2011. Citado na página 148.

- [140] Schwartz, Matthew D.: *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, março 2014, ISBN 978-1-107-03473-0, 978-1-107-03473-0. Citado na página 148.
- [141] Escalante, Alberto e Omar Rodriguez-Tzompantzi: *On the Faddeev–Jackiw symplectic framework for topologically massive gravity*. Eur. Phys. J. C, 76(10):577, 2016. Citado na página 150.
- [142] Escalante, Alberto e Carlos Medel-Portugal: *Faddeev–Jackiw quantization of topological invariants: Euler and Pontryagin classes*. Annals Phys., 391:27–46, 2018. Citado na página 150.
- [143] Toms, David J.: *Faddeev–Jackiw quantization and the path integral*. Phys. Rev. D, 92(10):105026, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 150, 195 e 197.
- [144] Thiemann, Thomas: *Modern canonical quantum general relativity*. 2001. Citado na página 151.
- [145] Lemos, N. A.: *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007, ISBN 9788588325241. <https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>. Citado na página 167.
- [146] Greiner, W. e J. Reinhardt: *Field quantization*. 1996. Citado na página 178.
- [147] Pitts, J. Brian: *A First Class Constraint Generates Not a Gauge Transformation, But a Bad Physical Change: The Case of Electromagnetism*. Annals Phys., 351:382–406, 2014. Citado na página 181.
- [148] Ellicott, P., G. Kunstatter e D. J. Toms: *Geometrical Interpretation of the Functional Measure for Supersymmetric Gauge Theories and of the Gauge Invariant Effective Action*. Annals Phys., 205:70–109, 1991. Citado na página 195.

# Apêndices



# APÊNDICE A – Sistemas Hamiltonianos Vinculados

## A.1 Introdução

Um sistema físico é idealmente descrito completamente a partir de sua **ação**, um funcional das coordenadas do sistema que, quando extremizado, fornece relações de dois tipos diferentes: cinemáticas e dinâmicas. Relações de tipo dinâmica são chamadas de **equações de movimento** e dizem respeito a ações e reações no interior do sistema, isto é, a interações entre seus elementos constitutivos. Relações cinéticas, por outro lado, dizem respeito à maneira como coordenadas de um sistema podem ser expressas por uma combinação de outras coordenadas, demonstrando uma situação de dependência entre as variáveis escolhidas na formulação teórica do problema, nesse caso essas expressões são chamadas de equações de **vínculos**.

Podemos brevemente definir uma **teoria de calibre** como aquela em que as variáveis dinâmicas possuem uma arbitrariedade contínua no espaço-tempo. As variáveis fisicamente relevantes são independentes da escolha de um referencial local, desse modo, as grandezas físicas são as invariante de calibre. Isto é, são grandezas que têm uma realidade independente da escolha do calibre.

O método comumente usado para o tratamento de teorias de calibre recorre à formulação Hamiltoniana. Partindo do formalismo Lagrangiano, vamos exibir a construção do formalismo Hamiltoniano e em seguida mostraremos como são tratados os sistemas que exibem características de invariância sob determinados aspectos.

Uma propriedade das teorias de calibre é que soluções gerais das equações de movimento contêm funções arbitrárias. A presença de grandezas arbitrárias, como será apresentado, leva a relações de dependência entre as grandezas que descrevem a teoria, se tratando, portanto, de equações de vínculos. Uma teoria de calibre é sempre um sistema hamiltoniano vinculado. Entretanto o contrário é falso<sup>1</sup>.

A seguir apresentaremos uma revisão de sistemas Hamiltonianos de calibre baseada especialmente nas Refs. [145] e [48].

---

<sup>1</sup> É possível se considerar qualquer conjunto de vínculos como surgidos de condições de calibre fixadas, porém tal descrição não é unívoca. A diferença entre equações de vínculos simples e de calibre é perfeitamente expressa no formalismo Hamiltoniano.

## A.2 Formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano

### A.2.1 Lagrangiana de um sistema

Assumimos logo de início que um sistema físico é completamente descrito por sua função Lagrangiana definida abaixo. Considere um sistema com  $n$  graus de liberdade — as coordenadas generalizadas  $q^i$  — com um parâmetro  $t$  fornecendo a evolução da trajetória no espaço de configuração. As equações que descrevem a evolução dinâmica desse sistema são aquelas que fazem o funcional

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (\text{A.1})$$

chamado ação, estacionário sob variações  $\delta q^i(t)$  das coordenadas generalizadas  $q^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), tomadas a zero no contorno  $t_1, t_2$ . A função  $L(q, \dot{q}, t)$  é a Lagrangiana do sistema.

A ação é estacionária se satisfaz as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.2})$$

As equações (A.2) podem ser escritas como

$$\ddot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \quad (\text{A.3})$$

Imediatamente vemos de (A.3) que as acelerações  $\ddot{q}^i$  são determinadas unicamente em função das velocidades e posições em um dado tempo se, e somente se, a matriz  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i$  pode ser invertida, ou seja, se o determinante

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right) := |W_{ij}| \quad (\text{A.4})$$

é não nulo. A matriz  $W_{ij}$  é chamada de matriz Hessiana. Se o determinante da matriz Hessiana é zero, ela é dita singular, caso contrário a matriz Hessiana é dita não singular.

## A.3 Vínculos Primários

Para tratar o problema sob o formalismo Hamiltoniano primeiro definimos o momento canônico  $p_i(q^j, \dot{q}^k)$  por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando essa relação na equação (A.4) temos  $W_{ij} = \partial p_i / \partial \dot{q}^j$ . Conseqüentemente, se a matriz Hessiana for singular, as equações das velocidades não podem ser resolvidas em termos das coordenadas e dos momentos canônicos porque não constituem um conjunto

de equações independentes. Por exemplo, se tivermos uma Lagrangiana  $L = L[q, \dot{q}]$  tal que  $p = f(q)$ , temos que  $W = 0$  e não existe  $\dot{q}(p)$ .

Em geral temos relações entre as coordenadas e os momentos do tipo

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{A.6})$$

Supondo que as  $M$  relações acima sejam independentes entre si, temos que  $N - M$  é o posto da matriz Hessiana de ordem  $N$ . As relações (A.6) são chamados de **vínculos primários**.

Considere a Hamiltoniana canônica, definida a partir da transformação de Legendre,

$$H = p_i(q, \dot{q})\dot{q}^i - L(q, \dot{q}). \quad (\text{A.7})$$

Quando existem vínculos primários se faz necessário incorporá-los à ação de modo a descrever o sistema vinculado, o que é obtido através da inserção dos vínculos por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange, de modo que o formalismo deve permanecer inalterado pela substituição  $H \rightarrow H + \lambda^m \phi_m$ , ou ainda

$$S \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i(q, p) - H(q, p) - \lambda^m \phi_m) dt. \quad (\text{A.8})$$

Utilizando o princípio variacional, para uma variação infinitesimal arbitrária da ação  $S$  temos

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H - \lambda^m \phi_m) dt = 0, \quad (\text{A.9})$$

dado que a variação da ação nos pontos de contorno seja igual a zero, isto é,  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$  e  $\delta p(t_1) = \delta p(t_2) = 0$ , obtemos as equações de Hamilton

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad (\text{A.10a})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}, \quad (\text{A.10b})$$

com as condições (A.6).

### A.3.1 Equações Fortes e Fracas

Os vínculos (A.6) determinam uma superfície de dimensão  $2N - M$  no espaço de fase (de dimensão  $2N$ ), esta é a superfície de vínculos primários ( $\Gamma$ ).

É útil e comum introduzir o símbolo de igualdade fraca “ $\approx$ ” para designar quantidades que se anulam em  $\Gamma$ . Em particular, todos os vínculos primários se anulam em  $\Gamma$ . Logo, podemos reescrever (A.6) como

$$\phi_m \approx 0 \quad (\text{A.11})$$

para enfatizar que a quantidade  $\phi_m$  é numericamente restrita a valer zero, mas não identicamente nula em todo o espaço de fase.

De modo geral, duas funções  $F$  e  $G$  coincidentes na subvariedade definida pelos vínculos  $\phi_m \approx 0$  são ditas fracamente iguais. Por outro lado, se a igualdade existe em todo o espaço de fase, dizemos que as duas funções são fortemente iguais e utilizamos o símbolo de igualdade usual. Logo

$$F \approx G \Leftrightarrow F - G = \lambda^m(q, p)\phi_m. \quad (\text{A.12})$$

### A.3.2 Parênteses de Poisson

Os parênteses de Poisson têm um papel importante no formalismo Hamiltoniano, por exemplo, são utilizados nas equações de movimento de Hamilton e na classificação dos vínculos, como veremos adiante.

**Definição 23.** *Seja um espaço de fase definido pelos eixos coordenados  $(q^i, p_i)$ , dadas duas funções  $f(q, p)$  e  $g(q, p)$ , o Parêntese de Poisson entre  $f$  e  $g$  é definido por*

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) \quad (\text{A.13})$$

para um sistema com um número finito de graus de liberdade.

Os parênteses de Poisson têm as seguintes propriedades:

1. Antissimetria:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ .
2. Linearidade:  $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$ .
3. Regra de Leibniz:  $\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g$ .
4. Identidade de Jacobi:  $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ .

Para uma função arbitrária das variáveis canônicas  $F(q, p)$ , as equações de movimento são dadas por

$$\dot{F} = \{F, H\} + \lambda^m \{F, \phi_m\}. \quad (\text{A.14})$$

### A.3.3 Restrição aos multiplicadores de Lagrange

Dos vínculos primários se requer que sejam preservados com a passagem do tempo. Assim, temos que

$$\{\phi_m, H\} + \lambda^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0. \quad (\text{A.15})$$

Da eq. (A.15) podemos encontrar equações independentes de  $\lambda$ 's, mas também podemos encontrar equações que efetivamente resolvem multiplicadores de Lagrange, de modo que podemos escrevê-los em termos das variáveis canônicas. No primeiro caso essas equações são chamadas de *vínculos secundários*. Desses vínculos também é requerido que sejam preservados no tempo, o que por sua vez pode levar à obtenção de novos vínculos secundários em um processo iterativo. Após realizar esse procedimento um número finito de vezes, teremos obtido  $J$  vínculos  $\phi_j \approx 0$ ,  $j = 1, \dots, (M + K = J)$ , em um sistema com  $K$  vínculos secundários.

Com um conjunto completo de vínculos podemos escrever a eq. (A.15) como

$$\{\phi_j, H\} + \lambda^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (\text{A.16})$$

A solução geral da eq. (A.16) tem a forma

$$\lambda^m = \Lambda^m + L^m, \quad (\text{A.17})$$

onde  $\Lambda^m$  é uma solução particular da equação não-homogênea (A.16) e  $L^m$  é a solução mais geral possível de

$$L^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (\text{A.18})$$

O  $L^m$  mais geral é uma combinação linear de soluções linearmente independentes  $L_{a_1}^m$ , para  $a_1 = 1, \dots, A'$ , do sistema (A.18). Logo, a solução mais geral possível de (A.17) pode ser escrita como

$$\lambda^m \approx \Lambda^m + l^{a_1} L_{a_1}^m, \quad (\text{A.19})$$

mas os  $l^{a_1}$  são funções completamente arbitrárias. Tendo separado  $\lambda^m$  em uma parte fixa dada completamente pelas condições de consistência e noutra parte essencialmente arbitrária, podemos escrever a função

$$H' = H + \Lambda^m \phi_m, \quad (\text{A.20})$$

livre de quaisquer ambiguidades.

Antes de continuar, em relação aos vínculos da teoria é útil fazer a seguinte definição.

**Definição 24.** *Uma função  $F(\xi)$  das variáveis canônicas é dita ser de primeira classe se*

$$\{F, \phi_j\} \approx 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (\text{A.21})$$

*Ou equivalentemente,*

$$\{F, \phi_j\} = d_j^{j'} \phi_{j'}, \quad (\text{A.22})$$

*denotando uma combinação linear de vínculos.*

Da definição trazida na eq. (A.20), temos que  $H'$  é uma função de primeira classe, deste modo a chamaremos de *Hamiltoniana de primeira classe*. Esse fato pode ser visto pela eq. (A.16) com

$$\{\phi_j, H'\} = \{\phi_j, H\} + \Lambda^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (\text{A.23})$$

Agora recuperamos a expressão (A.19) para escrever as equações de movimento com a forma alternativa

$$\dot{F} \approx \{F, H' + l^{a_1} \phi_{a_1}\}, \quad (\text{A.24})$$

com  $\phi_{a_1} \equiv L_{a_1}^m \phi_m$ , onde usamos

$$\{F, \Lambda^m \phi_m\} = \Lambda^m \{F, \phi_m\} + \{F, \Lambda^m\} \omega_m \approx \Lambda^m \{F, \phi_m\} \quad (\text{A.25})$$

e similarmente para  $\{F, L_a^m \phi_m\}$ .

Vínculos de primeira classe são preservados sob operações de parênteses de Poisson. Particularmente, note que os vínculos primários  $\omega_{a_1}$  são de primeira classe por construção,

$$\{\phi_{a_1}, \phi_j\} = L_{a_1}^m \{\phi_m, \phi_j\} + \phi_m \{L_{a_1}^m, \phi_j\} \approx 0. \quad (\text{A.26})$$

Adicionalmente, definimos como a *Hamiltoniana total* a função

$$H_T = H' + l^{a_1} \phi_{a_1} \quad (\text{A.27})$$

e podemos escrever as equações de movimento simplesmente como

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (\text{A.28})$$

## A.4 Condições de Consistência e Algoritmo de Dirac-Bergman

Podemos condensar os resultados obtidos nas seções anteriores no chamado algoritmo de Dirac-Bergman[20]. Esse método consiste em, dada uma Hamiltoniana, obter todos os vínculos da teoria, caracterizá-los completamente e construir equações de movimento através da obtenção de parênteses generalizados.

Os vínculos primários  $\phi_m$  devem ser preservados com a passagem do tempo, isto é, é necessário exigir que  $\dot{\phi}_m \approx 0$  por questão de consistência. Utilizando a equação (A.28) podemos expressar essa exigência por

$$\{\phi_m, H\} + \lambda^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0, \quad (\text{A.29})$$

chamada de *condição de consistência*. Devemos resolver a equação (A.29) e obter um conjunto correto de equações de movimento para qualquer sistema vinculado. Vamos agora apresentar o algoritmo.

Na solução das equações de condição de consistência podem ocorrer três casos distintos:

**Caso (i).** As condições de consistência são identicamente satisfeitas. Nesse caso os  $\phi_m$  são os únicos vínculos da teoria e os multiplicadores são arbitrários, ou seja, as equações de movimento têm funções arbitrárias dependentes do tempo. Esses vínculos geram transformações de calibre.

**Caso (ii).** As condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange. Nesse caso os vínculos podem todos ser escritos como uma combinação linear um dos outros. Isso ocorre se os parênteses de Poisson entre os vínculos são todos fracamente diferentes de zero, ou ainda, se

$$\det ||\{\phi_m, \phi_{m'}\}|| \neq 0. \quad (\text{A.30})$$

Seja  $||C^{mm'}||$  a inversa de  $||\{\phi_m, \phi_{m'}\}||$ , nesse caso

$$C^{mm'} \{\phi_{m''}, \phi_{m'}\} = \delta_{m'}^m. \quad (\text{A.31})$$

Então, das condições de consistência (A.29), temos

$$\lambda^m \approx C^{mm'} \{\phi_{m'}, H\}, \quad (\text{A.32})$$

portanto, para uma função qualquer  $F(q, p)$ ,

$$\dot{F} \approx \{F, H\} - \{F, \phi_m\} C^{mm'} \{\phi_{m'}, H\}. \quad (\text{A.33})$$

Oportunamente, definimos os parênteses de Dirac.

**Definição 25.** *Seja um espaço de fase definido pelos eixos coordenados  $(q^i, p_i)$ , dadas duas funções  $F(q, p)$  e  $G(q, p)$ , o Parêntese de Dirac entre  $F$  e  $G$  é definido por*

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_m\} C^{mm'} \{\phi_{m'}, G\}. \quad (\text{A.34})$$

Os parênteses de Dirac tem as mesmas propriedades dos parênteses de Poisson.

A equação de movimento para uma função  $F$  qualquer pode ser escrita como

$$\dot{F} = \{F, H\}^*. \quad (\text{A.35})$$

Com o sinal de igualdade forte, já que os parênteses de Dirac entre os vínculos e uma função qualquer são nulos,

$$\{F, \phi_m\}^* = \{F, \phi_m\} - \{F, \phi_{m'}\} C^{m'm''} \{\phi_{m''}, \phi_m\} = \{F, \phi_m\} - \{F, \phi_{m'}\} \delta_m^{m'} = 0. \quad (\text{A.36})$$

E por último temos o

**Caso (iii).** As condições de consistência geram novos vínculos

$$\chi_s(q, p) = 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (\text{A.37})$$

Os vínculos gerados dessa maneira são chamados de vínculos secundários. Nesse caso, a partir de então, os vínculos secundários devem ser tratados da mesma forma como foi feito com os vínculos primários, podendo recair nos casos (i), (ii), ou (iii), sendo que, caso ocorra o terceiro caso, o procedimento deve ser repetido, de forma que após um número finito de iterações ficamos com o conjunto de todos os vínculos secundários

$$\phi_k(q, p) \approx 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K, \quad (\text{A.38})$$

onde  $K$  é o número total de vínculos secundários. A distinção entre vínculos primários e secundários é meramente formal, sem qualquer implicação física, portanto podemos simplesmente escrever

$$\phi_j(q, p) \approx 0, \quad j = 1, \dots, M + K = J. \quad (\text{A.39})$$

Finalmente, temos que as condições de consistência finais são

$$\{\phi_j, H\} + \lambda^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (\text{A.40})$$

A solução geral do sistema de  $J$  equações para as  $M \leq J$  incógnitas  $\lambda^m$  é da forma

$$\lambda^m = U^m + v^a V_{(a)}^m, \quad (\text{A.41})$$

onde os coeficientes  $v^a$  são inteiramente arbitrários,  $U^m$  é uma solução particular das equações não-homogêneas (A.40)

$$\{\phi_j, \phi_m\} U^m \approx -\{\phi_j, H\} \quad (\text{A.42})$$

e  $V_{(a)}^m$ , com  $a = 1, \dots, A$ , são as soluções das equações homogêneas

$$\{\phi_j, \phi_m\} V_{(a)}^m \approx 0. \quad (\text{A.43})$$

A Hamiltoniana total deve ser escrita com todos os vínculos, ou seja,

$$H_T = H + U^m \phi_m + v^a V_{(a)}^m \phi_m \quad (\text{A.44})$$

e as equações de movimento podem ser escritas como

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (\text{A.45})$$

Essas funções contêm  $A$  funções arbitrárias  $v^a$  e são equivalentes as equações de movimento de Euler-Lagrange (A.2).

### A.4.1 Exemplos

Agora vamos ilustrar os resultados acima através de dois exemplos.

**Exemplo 1.** *Dada a Lagrangiana abaixo, encontrar os vínculos e classificá-los, encontrar as equações de movimento e mostrar que são idênticas às obtidas pelas equações de Euler-Lagrange.*

$$L = \frac{1}{2}[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta} - \xi)^2] - V(r) \quad (\text{A.46})$$

**Solução.**

Os momentos conjugados às coordenadas são

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r}; \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = r^2(\dot{\theta} - \xi); \quad p_\xi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = 0. \quad (\text{A.47})$$

De onde lemos o vínculo primário

$$\phi_1 \equiv p_\xi \approx 0. \quad (\text{A.48})$$

Da equação (A.7) temos que a Hamiltoniana é

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2r^2} + p_\theta \xi + V(r). \quad (\text{A.49})$$

Da condição de consistência (A.29) temos

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H\} + \lambda_1 \{\phi_1, \phi_1\} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial p_\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi} = -p_\theta \approx 0. \quad (\text{A.50})$$

E obtemos então o vínculo secundário

$$\phi_2 \equiv -p_\theta \approx 0. \quad (\text{A.51})$$

Novos vínculos não mais podem ser gerados, já que  $\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} + \lambda_2 \{\phi_1, \phi_2\} = 0$ , identicamente.

A partir daí, utilizando (A.45) obtemos as equações de movimento

$$\dot{p}_r \approx \{p_r, H_T\} \approx \{p_r, H + \lambda_1 p_\xi - \lambda_2 p_\theta\}, \quad (\text{A.52})$$

$$\Rightarrow \dot{p}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad (\text{A.53})$$

Procedendo do mesmo modo obtemos

$$\dot{r} = p_r; \quad \dot{p}_\theta = 0; \quad \dot{\theta} = \xi - \lambda_2; \quad \dot{p}_\xi = 0; \quad \dot{\xi} = \lambda_1. \quad (\text{A.54})$$

Através das equações de Euler-Lagrange (A.2) obtemos as equações de movimento sem recorrer à Hamiltoniana

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (\text{A.55})$$

E também obtemos

$$\Rightarrow \ddot{r} - r(\theta - \xi)^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0; \quad (\text{A.56})$$

$$\dot{r}(\dot{\theta} - \xi) = 0; \quad 2\dot{r}(\dot{\theta} - \xi) + 2r(\ddot{\theta} - \dot{\xi}) = 0. \quad (\text{A.57})$$

Resolvendo as equações diferenciais obtemos que as equações de movimento dos dois diferentes métodos fornecem resultados idênticos.

**Exemplo 2.** Dada a Lagrangiana abaixo, encontrar os vínculos e classificá-los, encontrar as equações de movimento e resolvê-las.

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + q_1\dot{q}_2 + \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 \quad (\text{A.58})$$

**Solução.**

Os momentos conjugados às coordenadas são

$$p_1 = \dot{q}_1 + q_2, \quad p_2 = q_1, \quad (\text{A.59})$$

donde obtemos os vínculo primário

$$\phi_1 \equiv p_2 - q_1 \approx 0. \quad (\text{A.60})$$

O hamiltoniano do sistema é

$$\frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2. \quad (\text{A.61})$$

Da condição de consistência (A.29) temos o vínculo secundário

$$\{\phi_1, H\} = q_1 - q_2 \approx 0 \quad (\text{A.62})$$

Utilizando a condição de consistência no último vínculo, temos que

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H\} + \lambda\{\phi_2, \phi_1\} = p_1 - q_2 - \lambda \approx 0. \quad (\text{A.63})$$

Segue que a Hamiltoniana total é

$$H_T = H + \lambda\phi_2 = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2}(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - q_2)(q_1 - q_2). \quad (\text{A.64})$$

Com o emprego dos parênteses de Dirac os vínculos podem ser postos iguais a zero, assim

$$H_T = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2. \quad (\text{A.65})$$

Podemos, então, obter as equações de movimento através de (A.45)

$$\dot{q}_1 \approx \{q_1, H_T\} \approx p_1 - q_2 \quad (\text{A.66})$$

e

$$\dot{p}_2 \approx \{p_2, H_T\} \approx p_1 - q_2 \quad (\text{A.67})$$

ou, utilizando as equações fracas (A.59) e (A.62), temos as equações de movimento

$$\dot{q}_1 = p_1 - q_1, \quad \dot{p}_2 = p_1 - q_1, \quad (\text{A.68})$$

cujas soluções são

$$q_1(t) = q_2(t) = p_2(t) = at + b - a, \quad p_1(t) = at + b, \quad (\text{A.69})$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes arbitrárias. Como os vínculos são de segunda classe, não existem funções arbitrárias do tempo e conseguimos encontrar diretamente as equações de movimento do sistema.

## A.5 Formalismo de Hamilton para teorias de campo clássicas

### A.5.1 Espaços de dimensão infinita

Nos referimos como *espaço de Hilbert* o espaço de funções, com dimensão infinita, no corpo dos reais ou complexos. As definições a seguir são úteis ao nos ocuparmos com a análise de teorias de campos, mas principalmente ao se tratar de campos definidos no espaço complexo, como é o caso da teoria desenvolvida no capítulo 6, de gravitação acoplada a bi-spinors de Dirac.

**Definição 26.** *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que também é um espaço de Banach (espaço métrico completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em  $E$  é convergente em  $E$ .) com a norma canônica definida pelo produto interno:  $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .*

O espaço de Hilbert é uma generalização do espaço Euclidiano de modo a possuir a estrutura de um *produto interno* que permite o cálculo de distâncias e ângulos. Além do mais, espaços de Hilbert são completos, em outras palavras, as ferramentas do cálculo diferencial e integral são aplicáveis em espaços de Hilbert.

Em análise funcional, cada operador linear em um espaço de Hilbert complexo tem um *operador Hermitiano* adjunto associado. Operadores adjuntos generalizam o conceito de transposto conjugado de matrizes quadradas para (possivelmente) dimensões infinitas.

Os operadores lineares contínuos  $A : H_1 \rightarrow H_2$  de um espaço de Hilbert  $H_1$  para um segundo espaço de Hilbert  $H_2$  são limitados no sentido de que eles mapeiam conjuntos fechados em conjuntos fechados. Por outro lado, se um operador é limitado, então ele é contínuo. O espaço de tais operadores lineares limitados são dotados de uma norma, cujo operador norma é dado por

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} . \quad (\text{A.70})$$

Para um  $y$  em  $H_2$ , o mapa que envia  $x \in H_1$  para  $\langle Ax, y \rangle$  é linear e contínuo e, de acordo com o teorema da representação de Riesz, pode ser representado na forma

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle \quad (\text{A.71})$$

para qualquer vetor  $A^*y \in H_1$ .

Em álgebra linear, uma matriz quadrada  $U$  é dita *unitária* se sua matriz transposta conjugada  $U^*$  também é sua inversa, i.e., se

$$U^*U = UU^* = I , \quad (\text{A.72})$$

onde  $I$  é matriz identidade. Um operador no espaço de Hilbert,  $U$ , é dito unitário, ou se seu operador adjunto,  $U^\dagger$ , satisfizer

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I . \quad (\text{A.73})$$

Matrizes unitárias preservam norma e, portanto, amplitudes de probabilidade.

## A.5.2 Teorias com variáveis contínuas

Nessa seção, baseada em Ref. [146], consideraremos teorias cujas coordenadas  $\phi(x, t)$  são variáveis que assumem valores para cada ponto  $x$  no espaço ao invés de um conjunto discreto de variáveis  $q^k(t)$ . Nesse caso a coordenada espacial funciona como um índice contínuo, dado que  $x \in \mathbb{R}^3$ , um espaço topológico cuja topologia tem uma base enumerável.

Em teorias de campo dizemos que a Lagrangiana é um **funcional** de um campo se ela mapeia um espaço de Hilbert aos números reais (ou complexos). Denotamos a dependência funcional como

$$L(t) = \int_{t_1}^{t_2} d^3x \mathcal{L}[\phi(x, t), \dot{\phi}(x, t)] , \quad (\text{A.74})$$

onde  $\mathcal{L}$  é chamada de **densidade Lagrangiana**. Definimos a **variação funcional de um funcional**  $F[\phi(x)]$  como

$$\begin{aligned} \delta F[\phi(x)] &= F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] \\ &:= \int d^3x \frac{\delta \mathcal{F}[\phi]}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) . \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Tomando a variação da ação  $S = \int dt L$ , temos

$$\begin{aligned} \delta S[\phi, \dot{\phi}] &= \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x, t)} \delta \phi(x, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi(x, t))} \delta (\partial_i \phi(x, t)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, t)} \delta (\dot{\phi}(x, t)) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x, t)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi(x, t))} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}(x, t)} \right) \delta \phi(x, t), \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

com  $\delta \phi(x, t_1) = \delta \phi(x, t_2) = 0$  e  $\delta \dot{\phi} = \partial / \partial t \delta \phi$ . Usando o *princípio de Hamilton*,  $\delta S = 0$ , obtemos as equações de Euler-Lagrange para campos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0, \quad (\text{A.77})$$

que é a generalização da Eq. (A.2). Aqui usamos  $\partial \phi / \partial x^\mu \equiv \partial_\mu \phi = (\partial_t, \partial_i) \phi$ , onde  $x^\mu = (x^i, t)$ .

Para uma dada função  $f = f(\phi)$  no espaço de funções, temos

$$\delta f(x) = \int \frac{\delta f(x)}{\delta \phi(x')} \delta \phi(x') d^3x', \quad (\text{A.78})$$

$$\dot{f}(x) = \int \frac{\delta f(x)}{\delta \phi(x')} \dot{\phi}(x') d^3x', \quad (\text{A.79})$$

onde as variações funcionais satisfazem

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(x')} = \delta^3(x, x'), \quad (\text{A.80})$$

$$\frac{\delta \partial_i \phi(x)}{\delta \phi(x')} = \partial_i^x \delta^3(x, x') = -\partial_i^{x'} \delta^3(x, x'). \quad (\text{A.81})$$

### A.5.3 Formalismo de Hamilton

Definimos o *momento canonicamente conjugado* a  $\phi(x)$  como

$$\pi(x, t) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x, t)}. \quad (\text{A.82})$$

A função Hamiltoniana, definida através de uma transformação de Legendre, é dada por

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \int d^3x \left( \pi(x, t) \dot{\phi}(x, t) - \mathcal{L} \right). \quad (\text{A.83})$$

Os parênteses de Poisson entre dois funcionais  $F[\phi, \pi]$  e  $G[\phi, \pi]$  são definidos como

$$\{F, G\} = \int d^3x \left( \frac{\delta F}{\delta \phi(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta \pi(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi(x)} \right). \quad (\text{A.84})$$

Os parênteses de Poisson entre os campos que formam o espaço de fase são

$$\begin{aligned} \{\phi(x, t), \pi(x', t)\} &= \int d^3x'' \frac{\delta\phi(x, t)}{\delta\phi(x'', t)} \frac{\delta\pi(x', t)}{\delta\pi(x'', t)} \\ &= \int d^3x'' \delta^3(x, x'') \delta^3(x', x'') \\ &= \delta^3(x, x') \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

e

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\} = \{\pi(x, t), \pi(x', t)\} = 0. \quad (\text{A.86})$$

#### A.5.4 Exemplo - Campo de Schrödinger

Considere a densidade Lagrangiana que descreve o campo de Schrödinger livre

$$\mathcal{L} = i\hbar\psi^*\dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^*. \quad (\text{A.87})$$

Tomando  $\psi$  e  $\psi^*$  como campos independentes, temos que seus campos conjugados são, respectivamente,

$$\pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}(x)} = i\hbar\psi^*(x), \quad (\text{A.88})$$

$$\pi_*(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*(x)} = 0. \quad (\text{A.89})$$

De modo que a Hamiltoniana é igual a

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} + \pi_*\dot{\psi}^* - \mathcal{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^*. \quad (\text{A.90})$$

Como as velocidades não aparecem nas Eqs. (A.88) e (A.89), temos que se tratam de equações do tipo (A.6), ou seja, se tratam de um vínculos primários,

$$\phi_1(x) \equiv \pi(x) - i\hbar\psi^*(x) \approx 0, \quad (\text{A.91})$$

$$\phi_2(x) \equiv \pi_*(x) \approx 0. \quad (\text{A.92})$$

A Hamiltoniana total é

$$\begin{aligned} H_T &= H + \int d^3x [\lambda_1(x)\phi_1(x) + \lambda_2(x)\phi_2(x)] \\ &= \int d^3x \left[ \frac{\hbar^2}{2m}\nabla\psi \cdot \nabla\psi^* + \lambda_1(x)(\pi(x) - i\hbar\psi^*(x)) + \lambda_2(x)\pi_*(x) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

O parênteses de Poisson entre os vínculos (A.91) e (A.92) é

$$\{\phi_1(x, t), \phi_2(x', t)\} = -i\hbar\{\psi^*(x, t), \pi_*(x', t)\} = -i\hbar\delta^3(x, x'), \quad (\text{A.94})$$

o que implica que os vínculos são de segunda classe. Dessa forma podemos calcular os parênteses generalizados entre dois campos  $F, G$  das variáveis do espaço de fase como

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \frac{1}{i\hbar} \int d^3x [\{F, \phi_1\}\{\phi_2, G\} - \{F, \phi_2\}\{\phi_1, G\}] \quad (\text{A.95})$$

e os parênteses generalizados entre as variáveis do espaço de fase são

$$\{\psi(x, t), \psi(x', t)\}^* = \{\psi^*(x, t), \psi^*(x', t)\}^* = 0, \quad (\text{A.96})$$

$$\{\psi(x, t), \psi^*(x', t)\}^* = \frac{1}{i\hbar} \delta^3(x, x'). \quad (\text{A.97})$$

## A.6 Transformações de calibre no formalismo Hamiltoniano

### A.6.1 Transformações de calibre

A presença de funções arbitrárias na Hamiltoniana total (eq. (A.44)) indicam ambiguidades nas equações de movimento, em outras palavras, existe mais de um conjunto de variáveis canônicas representando o mesmo estado físico, de modo que nem todas essas variáveis são observáveis propriamente ditos. Podemos afirmar que quantidades que dependam de tais funções arbitrárias não têm significado físico e, portanto, são irrelevantes.

Vamos investigar qual efeito de escolhas arbitrárias dos coeficientes  $v^a$  feitas em dois instantes diferentes têm nas equações de movimento. Suponhamos alguma função  $v^a(t)$  num instante  $t_1$  e calculemos o valor de um observável físico  $F$  num instante  $t_2 = t_1 + \delta t$ , então escolhamos alguma outra função  $\tilde{v}^a$  num instante  $t_1$  e calculemos o mesmo observável  $F$  em  $t_2$ , a diferença entre os dois valores é

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon F &= \{F, (v^a - \tilde{v}^a)\delta t \phi_a\} \\ &= \delta v^a \{F, \phi_a\}, \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

com  $\varepsilon := \delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a)\delta t$ . Vemos que a diferença do observável entre os dois instantes é proporcional a uma função arbitrária, ou seja, sem significado físico. Portanto, temos que a transformação (A.98) não altera o estado físico no instante  $t_2$ . Dizemos, então, que *vínculos de primeira classe geram transformações de calibre*. Adicionalmente, foi conjecturado por Dirac que *cada um* dos vínculos de primeira classe geram transformações de calibre. Conjectura que tem se demonstrado adequada para a maioria dos casos físicos de interesse<sup>2</sup>.

### A.6.2 Simetrias de calibre

Como vimos, simetrias de calibre estão associadas a vínculos de primeira classe, porém não precisamos até agora se a classificação entre vínculos primários e secundários

<sup>2</sup> Por outro lado, ver Ref. [147]

desempenha algum papel na obtenção de tais simetrias. De modo a considerar a função Hamiltoniana mais geral possível, onde todas as transformações de calibre estejam presentes, fazemos uma extensão das Hamiltonianas definidas até então. Como a Hamiltoniana total contém somente vínculos de primeira classe primários, também precisamos adicionar vínculos secundários, que aparecem multiplicados por multiplicadores de Lagrange arbitrários adicionais, definindo, assim, a **Hamiltoniana estendida**,

$$H_E = H' + \lambda^a \gamma_a, \quad (\text{A.99})$$

onde os  $\gamma_a$ ,  $a = 1, \dots, A$ , são *todos* os vínculos de primeira classe, primários e secundários.

As equações de movimento para o formalismo estendido podem ser obtidas pela **ação estendida**,

$$S_E[q^i, p_i, u^a(t)] = \int (p_i \dot{q}^i - H' - \lambda^j \phi_j) dt, \quad (\text{A.100})$$

onde os  $\phi$ 's são todos os vínculos do sistema, primários e secundários, de primeira e segunda classes. As equações de movimento encontradas a partir da ação estendida (A.100) implicam em  $\lambda^j = \lambda^a A_a^j$ , tal que os vínculos de primeira classe sejam dados por  $\gamma_a = A_a^j \phi_j$  e os  $\lambda^a$  sejam arbitrários (para verificar essa afirmação, basta refazer os passos da eq. (A.16) até a Eq. (A.24) e suas conclusões), então

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}, \quad (\text{A.101})$$

$$\phi_j \approx 0. \quad (\text{A.102})$$

Agora considere um sistema contendo *somente* vínculos de primeira classe

$$S_E[q^i, p_i, \lambda^a(t)] = \int (p_i \dot{q}^i - H - \lambda^a \gamma_a) dt. \quad (\text{A.103})$$

Queremos encontrar o conjuntos de simetrias de calibre da ação estendida simplificada  $S_E$ .

Porquê os  $\gamma_a$  são de primeira classe, temos

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = C_{ab}^c \gamma_c, \quad (\text{A.104})$$

$$\{H, \gamma_a\} = V_a^b \gamma_b. \quad (\text{A.105})$$

Tomando a transformação de calibre da ação, termo a termo, temos

$$\delta_\varepsilon(\dot{q}^n p_n) = \frac{dM}{dt} + \varepsilon^a \gamma_a, \quad \text{com } M = \varepsilon^a \left( \frac{\partial \gamma_a}{\partial p_n} p_n - \gamma_a \right), \quad (\text{A.106})$$

$$\delta_\varepsilon H = \varepsilon^a \{H, \gamma_a\} = \varepsilon^a V_a^b \gamma_b, \quad (\text{A.107})$$

$$\delta_\varepsilon \gamma_a = \varepsilon^b \{\gamma_a, \gamma_b\} = \varepsilon^b C_{ab}^c \gamma_c. \quad (\text{A.108})$$

Logo, a ação como um todo se transforma sob um parâmetro de calibre arbitrário como

$$\delta_\varepsilon S_E = \int dt \left( \frac{dM}{dt} + \varepsilon^a \gamma_a - \varepsilon^a V_a^b \gamma_b - \lambda^a \varepsilon^b C_{ab}^c \gamma_c - \delta_\varepsilon \lambda^a \gamma_a \right). \quad (\text{A.109})$$

O termo  $\frac{dM}{dt}$  é um termos de contorno e nulo por integração se  $\varepsilon^a(t_1) = \varepsilon^a(t_2) = 0$ . Extremizando a ação podemos inferir como os multiplicadores de Lagrange se transformam sob transformações de calibre. Temos que

$$\dot{\varepsilon}^a \gamma_a - \varepsilon^a V_a^b \gamma_b - \lambda^a \varepsilon^b C_{ab}^c \gamma_c - \delta_\varepsilon \lambda^a \gamma_a = 0, \quad (\text{A.110})$$

ou

$$\delta_\varepsilon \lambda^a = \dot{\varepsilon}^a - \varepsilon^b V_b^a + \lambda^c \varepsilon^b C_{bc}^a. \quad (\text{A.111})$$

Note que as eqs. (A.110) e (A.111) são transformações de calibre *off-shell*, uma vez que a transformação (A.109) não é uma minimização da ação, mas somente uma variação com respeito a um parâmetro de calibre infinitesimal.

### A.6.3 Transformações de calibre triviais

Agora introduzimos o conceito de transformações de calibre triviais, pois são úteis na análise de teorias de calibre covariantes, como é o caso da teoria da relatividade geral e extensões.

Uma transformação de calibre trivial é definida como

$$\delta_\mu y^i = \mu^{ij} \frac{\delta S}{\delta y^j}, \quad (\text{A.112})$$

onde  $\mu^{ij}$  é arbitrário e antissimétrico,  $\mu^{ij} = -\mu^{ji}$ , e pode, inclusive, depender de outros campos. Uma transformação de calibre trivial deixa a ação  $S$  invariante, não importando o formato que  $\mu^{ij}$  assuma,

$$\delta_\mu S = \frac{\delta S}{\delta y^j} \frac{\delta S}{\delta y^i} \mu^{ij} = 0. \quad (\text{A.113})$$

### A.6.4 Sistemas parametrizados

Um sistema é descrito de maneira geral por evoluções de acordo com um parâmetro tomado como sendo o tempo, mas existem casos onde precisamos lidar com o tempo como uma coordenada dinâmica em si mesma. Nesses casos podemos definir um parâmetro arbitrário de cujo valor outras variáveis dependem, mas que em si mesmo não tenha significado físico, que é o mesmo que escrever o sistema numa forma que seja invariante sobre reparametrizações, ou, em outras palavras, que seja invariante por transformações de Lorentz. No caso de teorias de campo não apenas no tempo, mas também nos parâmetros de espaço da teoria, de modo que o sistema seja invariante sob certas transformações no espaço-tempo.

Podemos sempre tomar um sistema dependente do tempo físico e parametrizá-lo para incluir o tempo como uma variável canônica e definir uma outra variável extra, vinculada de tal forma para que possa servir como um parâmetro para a evolução das

equações de movimento. Tais sistemas podem ser usados para se obter algum discernimento sobre teorias “naturalmente” geralmente invariantes, como em RG. Abaixo ilustramos tal procedimento.

Considere um sistema sem vínculos e ação

$$S[q^n(t), p_n(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( p_n \frac{dq^n}{dt} - H_0 \right) dt . \quad (\text{A.114})$$

Promovemos o parâmetro tempo à condição de variável canônica,  $t = q^0$  e tomamos seu momento conjugado  $p_0$ . Com essas alterações a ação acima fica

$$S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_0(\tau), p_i(\tau), \lambda^0(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} [p_0 \dot{q}^0 + p_n \dot{q}^n - \lambda^0 (p_0 + H_0)] d\tau , \quad (\text{A.115})$$

onde  $\dot{q} = \frac{dq}{d\tau}$ . É imediato verificar que ambas ações fornecem as mesmas equações de movimento. Extremizando com respeito  $\lambda^0$  e  $p_0$ , temos

$$\gamma_0 \equiv p_0 + H_0 = 0 \quad \text{e} \quad (\text{A.116})$$

$$\dot{q}_0 - \lambda^0 = 0 , \quad (\text{A.117})$$

onde  $\gamma_0$  é um vínculo de primeira classe e  $\lambda^0$  é um multiplicador de Lagrange. Substituindo (A.117) de volta na ação modificada, temos

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_n \dot{q}^n - H_0 \dot{q}^0) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left( p_n \frac{dq^n}{dt} - H_0 \right) dt . \quad (\text{A.118})$$

O vínculo  $\gamma_0 \approx 0$  é o único existente e, portanto, é de primeira classe. Note ainda que não existe uma Hamiltoniana de primeira classe  $H'$  ( $H = H'$ ), logo, a Hamiltoniana estendida é somente

$$H_E = -\lambda^0 \gamma_0 , \quad (\text{A.119})$$

e as equações de movimento são nada mais que o desenrolar de uma transformação de calibre.

Se a teoria original tem outros geradores de calibre, digamos,  $A$  vínculos  $\gamma_a$ , podemos escrever a ação como

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (p_\mu \dot{q}^\mu - H_E) d\tau , \quad (\text{A.120})$$

onde a Hamiltoniana estendida é agora

$$H_E = \lambda^a \gamma_a , \quad a = 0, \dots, A . \quad (\text{A.121})$$

A ação (A.120) é invariante sob a transformação

$$\begin{aligned} \delta q &= \dot{q} \varepsilon , \\ \delta p &= \dot{p} \varepsilon , \\ \delta \lambda^a &= (\lambda^a \varepsilon)' , \end{aligned} \quad (\text{A.122})$$

com  $\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2) = 0$ , como podemos ver ao realizar a variação

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon S &= \int (\delta p_\mu \dot{q}^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu - \delta \lambda^a \gamma_a - \lambda^a \delta \gamma_a) d\tau \\
&= \int [\varepsilon \dot{p}_\mu \dot{q}^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu - (\lambda^a \varepsilon) \dot{\gamma}_a - \lambda^a \delta \gamma_a] d\tau \\
&= \int \left[ \dot{p}_\mu \delta q^\mu + p_\mu \delta \dot{q}^\mu - (\lambda^a \varepsilon) \dot{\gamma}_a - \lambda^a \left( \frac{\partial \gamma_a}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \gamma_a}{\partial p} \delta p \right) \right] d\tau \\
&= \int \left[ (p_\mu \delta q^\mu) \dot{\phantom{x}} - (\lambda^a \varepsilon) \dot{\gamma}_a - \lambda^a \left( \frac{\partial \gamma_a}{\partial q} \frac{dq}{d\tau} \varepsilon + \frac{\partial \gamma_a}{\partial p} \frac{dp}{d\tau} \varepsilon \right) \right] d\tau \\
&= \int [(p_\mu \delta q^\mu) \dot{\phantom{x}} - (\lambda^a \varepsilon) \dot{\gamma}_a - (\lambda^a \varepsilon) \dot{\gamma}_a] d\tau \\
&= [(p_\mu \delta q^\mu) \dot{\phantom{x}} - (\lambda^a \varepsilon \dot{\gamma}_a)] d\tau = [(p_\mu \delta q^\mu) - (\lambda^a \gamma_a) \varepsilon]_{\tau_1}^{\tau_2} \\
&= [p_\mu \dot{q}^\mu - \lambda^a \gamma_a]_{\tau_1}^{\tau_2} (\varepsilon(\tau_2) - \varepsilon(\tau_1)) = 0 .
\end{aligned} \tag{A.123}$$

Agora note que, usando (A.113), a transformação (A.122) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
\delta q^\mu &= \dot{q}^\mu \varepsilon = \dot{q}^\mu \varepsilon - \lambda^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial p_\mu} \varepsilon + \lambda^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial p_\mu} \varepsilon \\
&= \frac{\delta S_E}{\delta p_\mu} \varepsilon + \varepsilon \lambda^a \{q^\mu, \gamma_a\} ,
\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\begin{aligned}
\delta p_\mu &= \dot{p}_\mu \varepsilon = \frac{\partial}{\partial q^\mu} [(p_\mu \dot{q}^\mu) \dot{\phantom{x}} - \dot{p}_\mu \dot{q}^\mu] \varepsilon + \lambda^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial q^\mu} \varepsilon - \lambda^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial q^\mu} \varepsilon \\
&= -\frac{\delta S_E}{\delta q^\mu} \varepsilon + \varepsilon \lambda^a \{p^\mu, \gamma_a\} ,
\end{aligned} \tag{A.125}$$

$$\delta \lambda^a = (\varepsilon \lambda^a) \dot{\phantom{x}} . \tag{A.126}$$

Fazendo a identificação  $\epsilon^a \equiv \varepsilon \lambda^a$  as transformações de calibre são, então,

$$\delta q^\mu = \frac{\delta S_E}{\delta p_\mu} \varepsilon + \epsilon^a \{q^\mu, \gamma_a\} , \tag{A.127a}$$

$$\delta p_\mu = -\frac{\delta S_E}{\delta q^\mu} \varepsilon + \epsilon^a \{p^\mu, \gamma_a\} , \tag{A.127b}$$

$$\delta \lambda^a = \dot{\epsilon}^a . \tag{A.127c}$$

Logo, as transformações (A.127) são iguais às simetrias geradas pelos geradores de calibre mais uma simetria de calibre trivial e uma “simetria de equação de movimento” ( $\delta \lambda^a = \dot{\epsilon}^a$ ). Portanto, vemos imediatamente que a eq. (A.127) é igual à eq. (A.110) e (A.111) *on-shell*. Donde consideramos a transformação acima como *on-shell* porque os parênteses (A.104) e (A.105) são nulos na superfície de vínculos.

## A.7 Resolvendo as transformações de calibre: a equação mestre para simetrias de calibre no formalismo Lagrangiano

Conhecer as relações dadas pelas eqs. (A.110) e (A.111) não é suficiente para escrever as transformações de calibre da teoria, porque nem todos os parâmetros de calibre são independentes uns dos outros. Devemos encontrar uma maneira de resolver essas equações de modo a encontrar um conjunto  $\{\varepsilon^a\}$  de parâmetros independentes e poder expressar o gerador de calibre  $G$  como  $G = \varepsilon^a \gamma_a$ . Nessa seção faremos uma revisão de um procedimento [17] para essa tarefa, uma abordagem *à la* Dirac para se obter transformações de calibre das variáveis canônicas de uma dada teoria.

Considere um sistema sem vínculos de segunda classe descrito pela Hamiltoniana total (A.27)

$$H_T = H' + l^{a_1} \phi_{a_1} ,$$

onde  $H' = H$  é a Hamiltoniana canônica de primeira classe,  $\{\phi_{a_1} \approx 0\}$  são os vínculos primários de primeira classe e  $l^{a_1}$  os multiplicadores de Lagrange a eles associados cujos valores são completamente arbitrários. O conjunto completo de vínculos é denotado por  $\{\gamma_a\} = \{\phi_{a_1}, \phi_{a_2}\}$ , com  $a = 1, \dots, A_1, A_1+1, \dots, A_1+A_2$ . A álgebra de Poisson dos vínculos com a Hamiltoniana canônica e eles mesmos é dada pelas eqs. (A.104), respectivamente e (A.105),

$$\begin{aligned} \{H, \gamma_a\} &= V_a^b \gamma_b , \\ \{\gamma_a, \gamma_b\} &= C_{ab}^c \gamma_c , \end{aligned}$$

onde  $V_a^b$  e  $C_{ab}^c$  podem inclusive ser funções do espaço de fase.

Considere agora uma transformação infinitesimal das coordenadas do tipo da eq. (A.98) gerada por  $G$ ,

$$\delta_G \xi^\alpha = \{\xi^\alpha, G\} , \quad (\text{A.128})$$

com

$$G = \varepsilon^a \gamma_a , \quad (\text{A.129})$$

onde a conjectura de Dirac foi usada e todos os vínculos de primeira classe estão incluídos na transformação dada. Aos parâmetros de calibre é permitido depender em geral do tempo e das variáveis do espaço de fase.

Temos, da eq. (A.28), que

$$\frac{dq^i}{dt} \approx \{q^i, H_T\} . \quad (\text{A.130})$$

Donde obtemos

$$\frac{d}{dt} \delta q^i \approx \{\{q^i, G\}, H_T\} + \{q^i, \frac{\partial}{\partial t} G\} \quad (\text{A.131})$$

e

$$\delta \frac{dq^i}{dt} \approx \{ \{q^i, H_T\}, G \}. \quad (\text{A.132})$$

Agora chamamos atenção para o fato de que o princípio da ação requer que um variação geral  $\delta$  comute com derivadas temporais, daí introduzimos o “requisito de comutatividade”[67]

$$\frac{d}{dt} \delta q^i = \delta \frac{dq^i}{dt}. \quad (\text{A.133})$$

Substituindo para os resultados acima e usando a identidade de Jacob, segue que

$$\{q^i, \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_T\}\} \approx 0 \quad (\text{A.134})$$

ou

$$\{q^i, \frac{dG}{dt}\} \approx 0. \quad (\text{A.135})$$

De (A.129), (A.104) e (A.105), podemos escrever a derivada temporal do gerador de calibre em termo dos vínculos como

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &\approx \{G, H\} + l^{a_1} \{G, \phi_{a_1}\} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ &= \varepsilon^b V_b^a \gamma_a + l^{a_1} \varepsilon^b C_{ba_1}^a \gamma_a + \dot{\varepsilon}^a \gamma_a, \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

assim a derivada temporal do gerador de calibre  $G$  pode ser escrita como uma combinação linear dos vínculos de primeira classe,

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_T\} = g^a \gamma_a. \quad (\text{A.137})$$

Substituindo (A.137) na eq. (A.135), temos que  $g^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial p_i} \approx 0$ , ou simplesmente

$$g^a \frac{\partial \gamma_a}{\partial \xi^\alpha} \approx 0. \quad (\text{A.138})$$

Para vínculos irreduzíveis de primeira classe,  $\frac{\partial \gamma_a}{\partial \xi^\alpha}$  pode ser construído, via transformações canônicas, de modo a se tornar um momento conjugado a alguma outra coordenada canônica num novo conjunto de variáveis canônicas equivalentes às coordenadas originais[21]. Como a eq. (A.138) é satisfeita para todo  $\alpha$ ,  $g^a \approx 0$ , ou similarmente  $g^a = g^{ab} \gamma_b$ , o que implica em dizer que o lado direito da eq. (A.137) é proporcional ao quadrado dos vínculos, o que nos permite, dentro do formalismo Hamiltoniano, reescrever a eq. (A.137) como

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, H_T\} = 0. \quad (\text{A.139})$$

Essa é a chamada “equação mestre” e gera as relações de invariância *off-shell* da ação[66].

Das relações (A.104) e (A.105) podemos reescrever a equação mestre (A.139) como

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \{G, \mathcal{V}_T\} = \left( \frac{d\varepsilon^b}{dt} - \varepsilon^a \left[ V_a^b + l^{a_1} C_{a_1 a}^b \right] \right) \gamma_b - \delta l^{a_1} \gamma_{a_1} = 0. \quad (\text{A.140})$$

Separando os índices  $b$  entre os vínculos primários e secundários temos

$$\delta l^{b_1} = \frac{d\varepsilon^{b_1}}{dt} - \varepsilon^a \left( V_a^{b_1} + l^{a_1} C_{a_1 a}^{b_1} \right), \quad (\text{A.141})$$

$$0 = \frac{d\varepsilon^{b_2}}{dt} - \varepsilon^a \left( V_a^{b_2} + l^{a_1} C_{a_1 a}^{b_2} \right). \quad (\text{A.142})$$

onde a derivada temporal é definida por

$$\frac{d\varepsilon^a}{dt} = \frac{D\varepsilon^a}{Dt} + \{\varepsilon^a, \mathcal{V}\} + l^{a_1} \{\varepsilon^a, \gamma_{a_1}\} \quad (\text{A.143})$$

com

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{l}^{a_1} \frac{\partial}{\partial l^{a_1}} + \ddot{l}^{a_1} \frac{\partial}{\partial \dot{l}^{a_1}} + \dots \quad (\text{A.144})$$

para multiplicadores de calibre arbitrários dependentes, possivelmente, das variáveis canônicas. É necessário resolver as eqs. (A.142) para se obter o conjunto  $\varepsilon^{a_1}$  de parâmetros invariantes a partir do conjunto  $\varepsilon^a$ . As condições (A.141) não são independentes, uma vez que podem ser derivadas diretamente das eqs. (A.142)[66,67]. Na seção 2.2 derivamos as equações para a solução das equações de calibre a partir do formalismo simplético.

## A.8 Contagem dos Graus de Liberdade

Em uma teoria que os vínculos são apenas equações que relacionam as variáveis canônicas originais não há a presença de funções arbitrárias. Após a fixação de calibre, mesmo os vínculos que geram transformações de calibre são reduzidos a relações numéricas entre as variáveis canônicas originais. Dessa forma chegamos à seguinte fórmula para a contagem de graus de liberdade:

$$\begin{aligned} 2 \times \left( \begin{array}{c} \text{Número de graus} \\ \text{de liberdade} \end{array} \right) &= \left( \begin{array}{c} \text{Número de variáveis} \\ \text{canônicas independentes} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variáveis canônicas} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Número de equações} \\ \text{de vínculos} \end{array} \right) \\ &- \left( \begin{array}{c} \text{Número de vínculos} \\ \text{que geram transf. de calibre} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Número de variáveis} \\ \text{de calibre fixadas} \end{array} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

## APÊNDICE B – Derivada de Lie

Um vetor é a derivada direcional de uma função no espaço tangente a um ponto. Sempre é possível calcular a projeção de um vetor num ponto sobre outro vetor definido nesse mesmo ponto. Dado um campo vetorial  $X$  definido em uma variedade  $M$ , podemos calcular derivadas de funções em  $M$  ao longo da direção do campo vetorial. A derivada de Lie para um escalar realiza, por definição, a operação descrita:  $\mathcal{L}_X f = X[f] = X^\mu \partial_\mu f$ . A generalização dessa mesma operação de projeção de campos tensoriais definidos em  $M$  em campos vetoriais é a derivada de Lie para tensores. Abaixo desenvolveremos o conceito de derivada de Lie de campos vetoriais e apresentaremos a generalização para vetores evocando a propriedade de linearidade. A explicação abaixo foi extraída de [47].

Sejam  $\sigma(s, x)$  e  $\tau(t, x)$  dois fluxos gerados por vetores  $X$  e  $Y$  (ver Seção 2.2.5),

$$\frac{d\sigma^\mu(s, x)}{ds} = X^\mu(\sigma(s, x)) , \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\tau^\mu(t, x)}{dt} = X^\mu(\tau(t, x)) . \quad (\text{B.2})$$

Queremos calcular a mudança do campo vetorial  $Y$  ao longo do fluxo  $\sigma(s, x)$ , isto é, comparar  $Y|_x$  com  $Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$ , onde  $\varepsilon$  denota um deslocamento infinitesimal ao longo de  $\sigma$ . Primeiro mapeamos  $Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  a partir de  $T_{\sigma_\varepsilon(x)}M$  de volta em  $T_xM$ , ou seja, fazemos  $(\sigma_{-\varepsilon})_* : T_{\sigma_\varepsilon(x)}M \rightarrow T_xM$ , em seguida tomamos a diferença entre os vetores  $(\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)}$  e  $Y|_x$ , ambos vetores pertencentes a  $T_xM$ . A **derivada de Lie** de um campo vetorial  $Y$  ao longo de um fluxo  $\sigma$  de  $X$  é definida por

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ (\sigma_{-\varepsilon})_* Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} - Y|_x \right] . \quad (\text{B.3})$$

Seja  $(U, \psi)$  uma carta com coordenadas  $x$  e sejam  $X = X^\mu \partial / \partial x^\mu$  e  $Y = Y^\mu \partial / \partial x^\mu$  campos vetoriais definidos em  $U$ . Então  $\sigma_\varepsilon(x)$  tem coordenadas  $x^\mu + \varepsilon X^\mu(x)$  e

$$\begin{aligned} Y|_{\sigma_\varepsilon(x)} &= Y^\mu(x^\nu + \varepsilon X^\nu(x)) e_\mu|_{x+\varepsilon X} \\ &\simeq \left[ Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x) \right] e_\mu|_{x+\Delta x} , \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

onde  $\{e_\mu\} = \{\partial / \partial x^\mu\}$ . Mapeando o vetor (B.4) definido em  $\sigma_\varepsilon(x)$  em  $x$  através do *pullback*  $(\sigma_{-\varepsilon})_*$ , temos

$$\begin{aligned} &\left[ Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x) \right] \partial_\mu [x^\nu - \varepsilon X^\nu(x)] e_\nu|_x \\ &= \left[ Y^\mu(x) + \varepsilon X^\lambda(x) \partial_\lambda Y^\mu(x) \right] \left[ \delta_\mu^\nu - \varepsilon \partial_\mu X^\nu(x) \right] e_\nu|_x \\ &= Y^\mu(x) e_\mu|_x + \varepsilon [X^\mu(x) \partial_\mu Y^\nu(x) - Y^\mu(x) \partial_\mu X^\nu(x)] e_\nu|_x + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

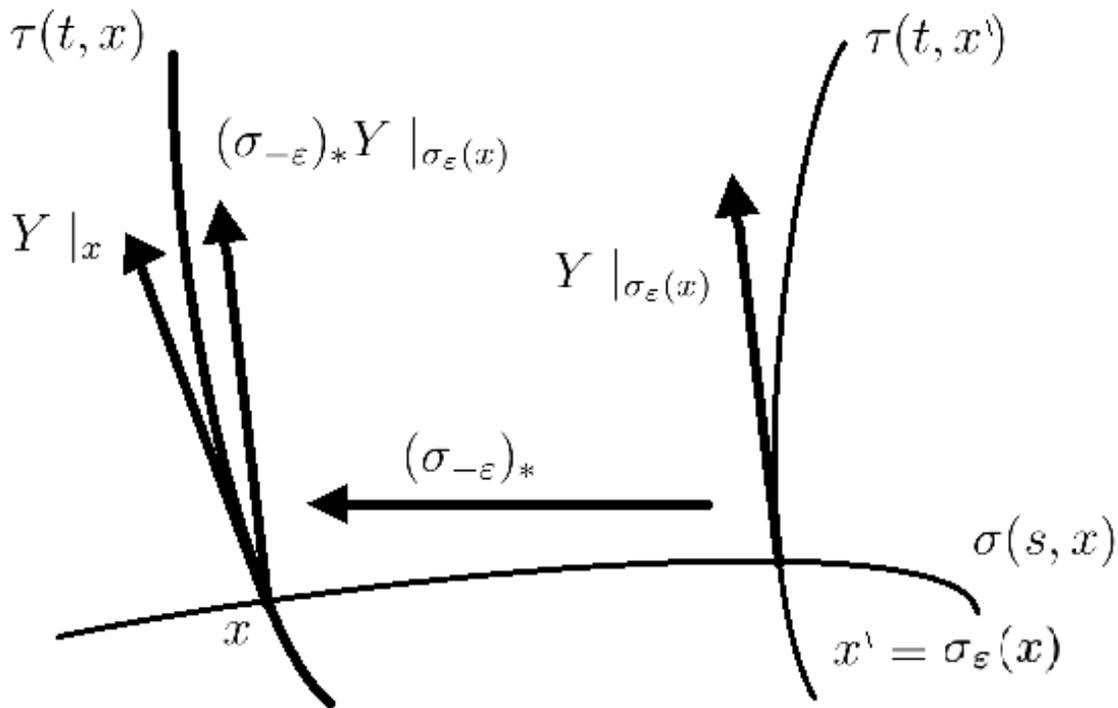


Figura 1 – Após sofrer uma variação ao se deslocar ao longo de  $\sigma$ , transportamos  $Y$  paralelamente de volta à coordenada  $x$ , onde podemos, enfim, compará-lo ao valor original.

Combinando as Eqs. (B.3) e (B.5), encontramos

$$\mathcal{L}_X Y = (X^\mu \partial_\mu Y^\nu - Y^\mu \partial_\mu X^\nu) e_\nu . \quad (\text{B.6})$$

Também é possível definir a derivada de Lie para uma 1-forma  $\omega \in \Omega^1(M)$  ao longo de  $X \in \mathfrak{X}(M)$  por

$$\mathcal{L}_X \omega \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ (\sigma_\varepsilon)^* \omega |_{\sigma_\varepsilon(x)} - \omega |_x \right] , \quad (\text{B.7})$$

onde  $\omega |_{x \in T_x^* M}$  é  $\omega$  em  $x$ . Fazendo  $\omega = \omega^\mu dx^\mu$  e repetindo a análise anterior, temos

$$(\sigma_\varepsilon)^* \omega |_{\sigma_\varepsilon(x)} = \omega_\mu(x) dx^\mu + \varepsilon [X^\nu(x) \partial_\nu \omega_\mu(x) + \partial_\mu X^\nu(x) \omega_\nu(x)] dx^\mu , \quad (\text{B.8})$$

o que implica em

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^\nu \partial_\nu \omega_\mu + \partial_\mu X^\nu \omega_\nu) dx^\mu . \quad (\text{B.9})$$

Propomos sem apresentar provas que a derivada de Lie satisfaz

$$\mathcal{L}_X(t_1 + t_2) = \mathcal{L}_X(t_1) + \mathcal{L}_X(t_2) \quad (\text{B.10})$$

para  $t_1$  e  $t_2$  dois tensores do mesmo tipo. E

$$\mathcal{L}_X(t_1 \otimes t_2) = (\mathcal{L}_X t_1) \otimes t_2 + t_1 \otimes (\mathcal{L}_X t_2) . \quad (\text{B.11})$$

De forma geral, a derivada de Lie de um tensor  $T$  de tipo  $(p, q)$  é, em coordenadas,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X T)^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} &= X^c (\partial_c T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}) \\
 &\quad - (\partial_c X^{a_1}) T^{c a_2 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} - \dots - (\partial_c X^{a_p}) T^{a_1 \dots a_{p-1} c}_{b_1 \dots b_q} \\
 &\quad + (\partial_{b_1} X^c) T^{a_1 \dots a_p}_{c b_2 \dots b_q} + \dots + (\partial_{b_q} X^c) T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_{q-1} c} . \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$



# APÊNDICE C – Redefinição da expressão do vínculo $e^{q_1}p_2$ e seus efeitos no cálculo das invariâncias de calibre

Para o sistema dado pela ação

$$S = \int \frac{1}{2} [(\dot{q}_2 - e^{q_1})^2 + (\dot{q}_3 - q_2)^2] dt \quad (\text{C.1})$$

é possível, alternativamente, redefinir o vínculo (3.66),  $\omega = e^{q_1}p_2$ , como

$$\omega'_1 = p_2 \quad (\text{C.2})$$

e fazer  $\dot{\eta}_1 = -e^{q_1}$ . Com essa modificação temos que a Lagrangiana de primeira ordem fica

$$L^{(0)} = \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 + \dot{\eta}_1 \omega'_1 - \left( \frac{p_3^2}{2} + q_2 p_3 \right), \quad (\text{C.3})$$

a partir da qual temos

$$\xi^{(0)\alpha} = (q_2 \quad p_2 \quad q_3 \quad p_3 \quad \eta_1), \quad (\text{C.4})$$

$$a_{\beta}^{(0)} = (p_2 \quad 0 \quad p_3 \quad 0 \quad \omega'_1), \quad (\text{C.5})$$

levando à matriz pré-simplética

$$f_{\alpha\beta}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -p_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

com modo-zero

$$\nu^\alpha = (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1) \quad (\text{C.7})$$

levando ao vínculo

$$\omega'_2 = -p_3. \quad (\text{C.8})$$

Em seguida temos, para  $\dot{\eta}_2 = q_2$ ,

$$L^{(1)} = \dot{q}_2 p_2 + \dot{q}_3 p_3 + \dot{\eta}_1 \omega'_1 + \dot{\eta}_2 \omega'_2, \quad (\text{C.9})$$

$$\xi^{(1)\alpha} = (q_2 \quad p_2 \quad q_3 \quad p_3 \quad \eta_1 \quad \eta_2), \quad (\text{C.10})$$

$$a_{\beta}^{(1)} = (p_2 \quad 0 \quad p_3 \quad 0 \quad \omega'_1 \quad \omega_2) \quad (\text{C.11})$$

com uma matriz pré-simplética

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

com dois modos-zero,

$$\nu^\alpha = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0), \quad (\text{C.13})$$

$$\nu^\alpha = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1), \quad (\text{C.14})$$

os quais não geram novos vínculos, mas são eles mesmos geradores de transformações de calibre dadas pelas equações

$$\delta_\mu q_2 = -\mu, \quad (\text{C.15})$$

$$\delta_\mu \eta_1 = \mu, \quad (\text{C.16})$$

$$\delta_\varepsilon q_3 = \varepsilon, \quad (\text{C.17})$$

$$\delta_\varepsilon \eta_2 = \varepsilon. \quad (\text{C.18})$$

Porém  $\dot{\eta}_2 = q_2$  e  $\dot{\eta}_1 = -e^{q_1}$ , de modo o conjunto completo de transformações de calibre fica

$$\delta_\varepsilon q_1 = e^{-q_1} \ddot{\varepsilon}, \quad (\text{C.19})$$

$$\delta_\varepsilon q_2 = \dot{\varepsilon}, \quad (\text{C.20})$$

$$\delta_\varepsilon q_3 = \varepsilon. \quad (\text{C.21})$$

Que são nada mais que o conjunto (3.89) com a redefinição  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon e^{q_1}$ . Mais explicitamente,

$$\begin{aligned} \delta q_1 \rightarrow e^{-q_1} \varepsilon \ddot{\varepsilon} &= e^{-q_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (\varepsilon e^{q_1}) \right) \\ &= e^{-q_1} \frac{d}{dt} (\dot{\varepsilon} e^{q_1} + \varepsilon \dot{q}_1 e^{q_1}) \\ &= e^{-q_1} (\ddot{\varepsilon} e^{q_1} + \dot{\varepsilon} \dot{q}_1 e^{q_1} + \dot{\varepsilon} \dot{q}_1 e^{q_1} + \varepsilon \ddot{q}_1 e^{q_1} + \varepsilon \dot{q}_1^2 e^{q_1}) \\ &= \ddot{\varepsilon} + 2\dot{\varepsilon} \dot{q}_1 + \varepsilon \ddot{q}_1 e^{q_1} + \varepsilon \dot{q}_1^2 e^{q_1}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

$$\delta q_2 \rightarrow \frac{d}{dt} (\varepsilon e^{q_1}) = e^{q_1} (\dot{\varepsilon} + \varepsilon \dot{q}_1), \quad (\text{C.23})$$

$$\delta q_3 \rightarrow \varepsilon e^{q_1}, \quad (\text{C.24})$$

como esperado.

# APÊNDICE D – O determinante da estrutura pré-simplética de RG

Para calcular o determinante de (5.33), usamos a mesma técnica de [143, 148]. Partimos de que, dada uma matriz quadrada  $M$  possivelmente dividida em blocos, podemos escrever

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(D - CA^{-1}B) \det A. \quad (\text{D.1})$$

Na equação acima assumimos que  $A$  e  $D$  são matrizes quadradas e que  $\det A \neq 0$ . As matrizes  $B$  e  $C$  não precisam ser matrizes quadradas.

Primeiro fazemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{\delta\omega'_0}{\delta\mathbf{h}} & \frac{\delta\omega'}{\delta\mathbf{h}} \\ \frac{\delta\omega'_0}{\delta\Pi} & \frac{\delta\omega'}{\delta\Pi} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{h}'} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\Pi'} \\ \frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{h}'} & \frac{\delta\omega}{\delta\Pi'} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

ou seja, a matriz  $M$  é a matriz pré-simplética  $\bar{\mathbf{f}}$  da eq. (5.33). Usando as definições acima para os blocos  $A, B, C, D$  e a álgebra (5.36), encontramos,

$$\begin{aligned} (CA^{-1}B)_{ab}(x, x''') &= \int C_{ac}(x, x') (A^{-1})^{cd}(x', x'') B_{ab}(x'', x''') d^3x' d^3x'' \\ &= \int \left[ \begin{pmatrix} \frac{\delta\omega_0}{\delta\Pi''} & -\frac{\delta\omega_0}{\delta\mathbf{h}''} \\ \frac{\delta\omega}{\delta\Pi''} & -\frac{\delta\omega}{\delta\mathbf{h}''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\delta\omega''_0}{\delta\mathbf{h}''} & \frac{\delta\omega''}{\delta\mathbf{h}''} \\ \frac{\delta\omega''_0}{\delta\Pi''} & \frac{\delta\omega''}{\delta\Pi''} \end{pmatrix} \right]_{ab} d^3x'' \\ &= \begin{pmatrix} \{\omega''_0, \omega_0\} & \{\omega''', \omega_0\} \\ \{\omega''_0, \omega\} & \{\omega''', \omega\} \end{pmatrix}_{ab} \\ &\approx 0. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

No espaço simplético inteiro  $\det \bar{\mathbf{f}} \neq 0$ , enquanto que na superfície de vínculos,  $\det \bar{\mathbf{f}} = 0$ . Isso implica que  $\bar{\mathbf{f}}$  não tem modos-zero no espaço simplético inteiro, mas os tem pelo menos na superfície de vínculos.



# APÊNDICE E – Do uso correto da derivada temporal dos vínculos

Na Lagrangiana da eq. (5.105) o vínculo  $\eta_1$  aparece no termo  $\eta_1 \dot{\zeta}_1$ , onde  $\zeta_1$  é o multiplicador de Lagrange. O vínculo  $\eta_1$  foi encontrado diretamente da definição dos momentos, quer dizer, na nomenclatura de Dirac é um vínculo primário. Contrário a outros vínculos primários que aparecem no capítulo (4), esse é o único que não implica numa eliminação óbvia de campos do algoritmo simplético. Por exemplo, o vínculo primário  $\Pi_N = 0$  encontrado na Sec. 5.2.1 simplesmente leva à eliminação de  $\Pi_N$ . Poderíamos inclusive resolver  $\eta_1$ , digamos eliminado  $\Pi_\phi$  em favor de outras variáveis, mas nesse caso existe mais de uma maneira que essa eliminação pode ser feita, no entanto quebrar essa simetria levanta outras questões, tanto técnicas quanto teóricas, além de ser inconveniente no tipo de análise sendo feita. Assim, esse é um vínculo primário cuja permanência no algoritmo acaba sendo útil. Os princípios simpléticos nos dizem que vínculos, uma vez encontrados, devem ser adicionado à Lagrangiana com multiplicadores de calibre derivados no tempo. Esse é o procedimento seguido na Sec. 5.3.3. Por outro lado, é possível conjecturar que não faria mal algum inseri-lo na Lagrangiana com um multiplicador de Lagrange não derivado no tempo, como por exemplo sugerido num comentário na Ref. [143]. Exploramos essa possibilidade aqui.

Usando  $\eta_1 \zeta_1$  na Lagrangiana (5.105),  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\mathbf{a}}$  se tornam

$$\bar{\xi}^{(0)} = \left( N \quad N^i \quad h_{ij} \quad \Pi^{ij} \quad \phi \quad \Pi_\phi \quad \zeta_1 \right), \quad (\text{E.1})$$

$$\bar{\mathbf{a}}^{(0)} = \left( 0 \quad 0_k \quad \Pi^{kl} \quad 0_{kl} \quad \Pi_\phi \quad 0 \quad 0 \right), \quad (\text{E.2})$$

ou seja,  $\eta_1$  não aparece em  $\bar{\mathbf{a}}$ . Consequentemente,

$$\frac{\delta a'_\beta}{\delta \xi^\alpha} = \delta_\alpha^4 \delta_\beta^3 \mathbf{I} + \delta_\alpha^6 \delta_\beta^5 \delta^{(3)}(x, x'). \quad (\text{E.3})$$

A matriz pré-simplética tem agora os seguintes modos-zero,

$$\bar{\nu}_1 = \left( 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right), \quad (\text{E.4})$$

$$\bar{\nu}_{2_p} = \left( 0 \quad \mathbf{1}_p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right), \quad (\text{E.5})$$

$$\bar{\nu}_3 = \left( 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right). \quad (\text{E.6})$$

Os dois primeiros modos-zero levam ao mesmo vínculo (5.117, 5.118), enquanto  $\eta_1$  é encontrado como um vínculo a partir do último modo-zero. Isso parece indicar a equivalência entre as duas abordagens, uma vez que mesmo colocando  $\eta_1$  na parte potencial

inicialmente, no final acaba aparecendo como um vínculo da mesma maneira. Entretanto, no procedimento de inseri-lo acompanhado de um multiplicador de Lagrange derivado no tempo desde o início, um novo vínculo,  $\eta_2$ , surge da iteração zero. O principal problema é que agora  $\eta_2$  não é nem encontrado na iteração zero, nem em iteração alguma: na primeira iteração o setor potencial se torna nulo (é nada mais que uma combinação linear dos vínculos) e, portanto, se torna impossível a obtenção de novos vínculos.

Em conclusão, se  $\eta_1 \zeta_1$  é inserido ao invés de  $\eta_1 \dot{\zeta}_1$ , não se pode dizer que o formalismo simplético está sendo seguido (uma vez que todos os vínculos devem ser inseridos na Lagrangiana derivados no tempo) e esses procedimentos diferentes não são fisicamente equivalentes. Nesse caso, o vínculo  $\eta_2$  não é obtido e uma informação fundamental do ponto de vista físico acaba se perdendo, pois desse vínculo encontramos que o único potencial não trivial compatível com a invariância conforme é do tipo  $\lambda\varphi^4$ .

Similarmente ao caso anterior, como  $N$  e  $N^i$  podem ser prontamente vistos como multiplicadores de Lagrange nas teorias da RG e de Brans-Dicke, podemos considerar substituir  $N$  e  $N^i$  por  $\dot{\lambda}^0$  e  $\dot{\lambda}^i$  antes da iteração inicial. Esse procedimento pode funcionar em alguns casos, levando a resultados corretos mais rapidamente, mas não necessariamente. De fato, para o caso de Brans-Dicke com  $\omega = -3/2$  esse procedimento falha em se obter  $\eta_2$ , que é um vínculo fundamental para a auto-consistência da teoria.

## APÊNDICE F – Determinação do vínculo $\eta_2$ para Brans-Dicke com $\omega = -3/2$

O vínculo  $\eta_2$  é derivado da seguinte relação [veja eq. (5.119)],

$$\int \left( -h_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} + \Pi^{ij} \frac{\delta}{\delta \Pi^{ij}} + \phi \frac{\delta}{\delta \phi} - \Pi_\phi \frac{\delta}{\delta \Pi_\phi} \right) V d^3x = 0. \quad (\text{F.1})$$

O potencial  $V$  vem da Lagrangiana(5.105) e lê-se

$$\begin{aligned} V = & - \int \left\{ N \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \phi {}^{(3)}R - \frac{2\kappa^2}{h\phi} (2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2) + \frac{3}{2\phi} D_i\phi D^i\phi + 2D_i D^i\phi - 2P(\phi) \right] \right. \\ & \left. + N^j (2D^i\Pi_{ij} - \Pi_\phi D_j\phi) \right\} d^3x = \int (-N\omega_0 + N^i\omega_i) d^3x. \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

Os vínculos  $\omega_0$  e  $\omega_i$  são definidos nas eqs. (5.117, 5.118).

De modo a facilitar os cálculos da eq. (F.1), subdividimos  $V$  em sete termos ( $V = \sum_{i=1}^7 V_i$ ). Esses termos são explicitamente indicados abaixo,

$$\begin{aligned} V_1 &= - \int \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \phi {}^{(3)}R d^3x, & V_2 &= \kappa \int \frac{N}{\sqrt{h}\phi} (2\Pi^{ij}\Pi_{ij} - \Pi^2) d^3x \\ V_3 &= - \frac{1}{2\kappa} \int \frac{3N\sqrt{h}}{2\phi} D^i\phi D_i\phi d^3x, & V_4 &= - \frac{1}{\kappa} \int \sqrt{h} D_i N D^i\phi d^3x, \\ V_5 &= \int \frac{N\sqrt{h}}{\kappa} P(\phi) d^3x, & V_6 &= \int N^i \Pi_\phi D_i\phi d^3x, \\ V_7 &= 2 \int \Pi^{km} D_k N^l h_{lm} d^3x. \end{aligned} \quad (\text{F.3})$$

Calculando primeiro a variação de cada um dos termos com resultado não nulo, começando pela variação em  $h^{ij}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_1}{\delta h^{ij}} &= -N \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \phi \left( R_{ij} - \frac{h_{ij}}{2} R \right) - \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \phi (h_{ij} D_k D^k N - D^i D^j N) \\ &= -N \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \phi \left( R_{ij} - \frac{h_{ij}}{2} R \right) + \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \phi (h_{ij} D_k D^k \phi - D^i D^j \phi) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_2}{\delta h^{ij}} &= \kappa \frac{\delta}{\delta h^{ij}} \left[ \frac{2N}{\sqrt{h}\phi} \left( \Pi_{kl}\Pi_{mn} h^{km} h^{ln} - \frac{1}{2} \Pi_{kl}\Pi_{mn} h^{kl} h^{mn} \right) \right] \\ &= \kappa \left[ \frac{2N}{\sqrt{h}\phi} (2) \left( \Pi_{ik}\Pi_{jl} h^{kl} - \frac{1}{2} \Pi_{ij}\Pi \right) - \frac{2N}{\sqrt{h}\phi} \frac{h_{ij}}{2} \left( \Pi^{kl}\Pi_{kl} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_3}{\delta h^{ij}} &= -\frac{1}{2\kappa} \frac{\sqrt{h}}{2} h_{ij} \frac{3}{2\phi} N D_k \phi D^k \phi + \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \frac{3N}{2\phi} \frac{\delta}{\delta h^{ij}} (h^{kl} D_k \phi D_l \phi) \\ &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \frac{3}{2\phi} \left( -\frac{1}{2} h_{ij} D_k \phi D^k \phi + D_i \phi D_j \phi \right),\end{aligned}\quad (\text{F.6})$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_4}{\delta h^{ij}} &= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{h}}{2} N h_{ij} (-2 D_k D^k \phi) + \frac{\sqrt{h}}{2} (-2N) \left[ - (D_k D_i \phi) \delta_{ij}^{kl} - (D_k \phi) D_l \delta_{ij}^{kl} + \right. \\ &\quad \left. (D_k \phi) D^k \frac{\delta}{\delta h^{ij}} (\ln \sqrt{h}) \right] \\ &= \frac{\sqrt{h}}{2} \left\{ -\frac{1}{2} N h^{ij} (-2 D_k D^k \phi) - \left[ -2 N D_i D_j \phi + 2 D_{(i} (N D_{j)} \phi) - 2 h_{ij} D^k (N D_k \phi) \right] \right\},\end{aligned}\quad (\text{F.7})$$

$$\frac{\delta V_5}{\delta h^{ij}} = -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \frac{h_{ij}}{2} (-2P), \quad (\text{F.8})$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_7}{\delta h^{ij}} &= 2 \frac{\delta}{\delta h} \left[ \Pi^{kl} h_{lm} (\partial_k N^m + G_{km}^m N^n) \right] \\ &= 2 \Pi^{kl} \delta_{lm}^{ij} D_k N^m + 2 \Pi^{kl} h_{lm} \frac{\delta G_{kn}^m}{\delta h_{ij}} N^n,\end{aligned}\quad (\text{F.9})$$

Usando

$$\delta G_{kn}^m = \frac{1}{2} h^{md} (D_k \delta h_{dn} + D_n \delta h_{kd} - D_d \delta h_{kn}), \quad (\text{F.10})$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_7}{\delta h^{ij}} &= 2 \Pi^{k(i} D_k N^{j)} + 2 \Pi^{kd} N^n (D_k \delta_{dn}^{ij} + D_n \delta_{kd}^{ij} - D_d \delta_{kn}^{ij}) \\ &= 2 \Pi^{k(i} D_k N^{j)} - \sqrt{h} \left[ \delta_{dn}^{ij} D_k \left( \frac{\Pi^{kd} N^n}{\sqrt{h}} \right) + \delta_{kd}^{ij} D_n \left( \frac{\Pi^{kd} N^n}{\sqrt{h}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \delta_{kn}^{ij} D_d \left( \frac{\Pi^{kd} N^n}{\sqrt{h}} \right) \right] \\ &\quad 2 \Pi^{k(i} D_k N^{j)} - \sqrt{h} \left[ D_k \left( \frac{\Pi^{k(i} N^{j)}}{\sqrt{h}} \right) + D_n \left( \frac{\Pi^{ij} N^n}{\sqrt{h}} \right) - D_d \left( \frac{\Pi^{d(i} N^{j)}}{\sqrt{h}} \right) \right] \\ &= 2 \Pi^{k(i} D_k N^{j)} - \sqrt{h} D_k (\Pi^{ij} N^k \sqrt{h}).\end{aligned}\quad (\text{F.11})$$

Para os termos com variação em  $\Pi_{ij}$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{\delta V_2}{\delta \Pi_{ij}} &= \kappa \frac{\delta}{\delta \Pi_{ij}} \left[ \frac{N}{\sqrt{h} \phi} (2 \Pi^{kl} \Pi_{kl} - \Pi_{kl} h^{kl} \Pi_{mn} h^{mn}) \right] \\ &= \kappa \frac{2N}{\sqrt{h} \phi} (2 \Pi^{ij} - h^{ij} \Pi),\end{aligned}\quad (\text{F.12})$$

$$\frac{\delta V_7}{\delta \Pi_{ij}} = 2D^{(i}N^{j)}. \quad (\text{F.13})$$

Para os termos com variação em  $\phi$ , temos

$$\frac{\delta V_1}{\delta \phi} = \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa}NR, \quad (\text{F.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_3}{\delta \phi} &= \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} \left[ -\frac{3N}{2\phi^2}D_i\phi D^i\phi + \frac{3N}{2\phi} \frac{\delta}{\delta \phi} (D_i\phi D^i\phi) \right] \\ &= \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} \left\{ -\frac{3N}{2\phi^2}D_i\phi D^i\phi - \frac{3}{2} \left[ 2D_i \left( \frac{N}{\phi} D^i\phi \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta V_4}{\delta \phi} &= \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} \frac{\delta}{\delta \phi} (2\phi D_i D^i N) \\ &= \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} D_i D^i N, \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

$$\frac{\delta V_5}{\delta \phi} = \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} 2\partial_\phi P(\phi), \quad (\text{F.17})$$

$$\frac{\delta V_6}{\delta \phi} = \Pi_\phi N^i D^i \phi, \quad (\text{F.18})$$

$$\frac{\delta V_2}{\delta \phi} = -\frac{2N\kappa}{\sqrt{\hbar}\phi^2} \left( \Pi^{kl}\Pi_{kl} - \frac{1}{2}\Pi^2 \right). \quad (\text{F.19})$$

E para o único termo cuja variação em  $\Pi_\phi$  é diferente de zero, temos

$$\frac{\delta V_6}{\delta \Pi_\phi} = N^i D^i \phi. \quad (\text{F.20})$$

Agora, multiplicando os resultados pelos coeficientes que aparecem na eq. F.2, temos

$$\begin{aligned} -h^{ij} \frac{\delta V_1}{\delta h^{ij}} &= -\frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} N \left( \phi R - \frac{3}{2}\phi R \right) + \frac{\sqrt{\hbar}}{2\kappa} N \left( (3)2D_k D^k - 2D_k D^k \phi \right) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \frac{\sqrt{\hbar}}{2} N \left[ \phi R - (2)(-2D_k D^k \phi) \right] \\ &= -\frac{V_1}{2} - V_4, \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

$$\begin{aligned}
-h^{ij} \frac{\delta V_2}{\delta h^{ij}} &= \frac{2N\kappa}{\sqrt{h}\phi} (2) \left( \Pi^{kl} \Pi_{kl} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) - \frac{2N\kappa}{\sqrt{h}\phi} \left( \frac{3}{2} \right) \left( \Pi^{kl} \Pi_{kl} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \\
&= -\frac{\sqrt{h}}{2} N\kappa \frac{2}{h\phi} \left( -\frac{1}{2} \right) \left( 2\Pi^{kl} \Pi_{kl} - \Pi^2 \right) \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{h}}{2} N\kappa \left( -\frac{2}{h\phi} \right) \left( 2\Pi^{kl} \Pi_{kl} - \Pi^2 \right) \\
&= -\frac{V_2}{2}, \tag{F.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\delta V_1}{\delta \phi} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N\phi R \\
&= V_1, \tag{F.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\delta V_2}{\delta \phi} &= -\frac{2N\kappa}{\sqrt{h}} \frac{1}{\phi^2} \phi \left( \Pi^{kl} \Pi_{kl} - \frac{1}{2} \Pi^2 \right) \\
&= -\frac{\sqrt{h}N\kappa}{2} \left( \frac{2}{h\phi} \right) \left( 2\Pi^{kl} \Pi_{kl} - \Pi^2 \right) \\
&= -V_2, \tag{F.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\delta V_3}{\delta \phi} &= -\frac{\sqrt{h}N}{2\kappa} \left( \frac{3}{2\phi} D_k \phi D^k \phi \right) \\
&= V_3, \tag{F.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_{ij} \frac{\delta V_2}{\delta \Pi_{ij}} &= (2) \frac{\sqrt{h}N\kappa}{2} \left( -\frac{2}{h\phi} \right) \left( 2\Pi^{kl} \Pi_{kl} - \Pi^2 \right) \\
&= 2V_2, \tag{F.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h^{ij} \frac{\delta V_3}{\delta h^{ij}} &= -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \frac{3h^{ij}}{2\phi} \left( -\frac{1}{2} h_{ij} D_k \phi D^k \phi + D_i \phi D_j \phi \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N \frac{3}{2\phi} D_k \phi D^k \phi \\
&= -\frac{V_3}{2}, \tag{F.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h^{ij} \frac{\delta V_4}{\delta h^{ij}} &= \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} \left[ \frac{1}{2} N(3) (-2D_k D^k \phi) + (-2ND_k D^k \phi) \right] \\
&= \left( \frac{5}{2} \right) \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N (-2D_k D^k \phi) \\
&= 5 \frac{V_4}{2}, \tag{F.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\delta V_4}{\delta \phi} &= -\frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N (-2D_k D^k \phi) \\
&= -V_4, \tag{F.29}
\end{aligned}$$

$$-h^{ij} \frac{\delta V_5}{\delta h^{ij}} = \left( \frac{3}{2} \right) \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N (-2P(\phi)), \tag{F.30}$$

$$\phi \frac{\delta V_5}{\delta \phi} = \frac{\sqrt{h}}{2\kappa} N (-2\phi \partial_\phi P(\phi)), \tag{F.31}$$

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\delta V_6}{\delta \phi} &= N^k \Pi_\phi D_k \phi \\
&= V_6, \tag{F.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Pi_\phi \frac{\delta V_6}{\delta \Pi_\phi} &= -N^k \Pi_\phi D_k \phi \\
&= -V_6, \tag{F.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-h^{ij} \frac{\delta V_7}{\delta h^{ij}} &= -2\Pi_{kl} D^k N^l \\
&= -V_7 \tag{F.34}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi^{ij} \frac{\delta V_7}{\delta h^{ij}} &= 2\Pi_{kl} D^k N^l \\
&= V_7. \tag{F.35}
\end{aligned}$$

A aplicação de cada variação que aparece em eq. (F.1) para cada um dos termos de  $V$  é mostrada na Tabela 1. Colocando os resultados individuais juntos, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 V_i - 2V_5 + \int \frac{N\sqrt{h}}{\kappa} \phi \partial_\phi P(\phi) d^3x \\ &\approx \int \frac{N\sqrt{h}}{\kappa} [-2P(\phi) + \phi \partial_\phi P(\phi)] d^3x, \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

onde foi usado que  $\sum_{i=1}^5 V_i \propto \omega_0$ . Assim, encontramos o vínculo  $\eta_2$ , como dado pela eq. (5.120).

Tabela 1 – Resultados da aplicação dos operadores na eq. (F.1) para os sete termos de  $V$ .

	$-\int h_{ij} \frac{\delta}{\delta h_{ij}}$	$\int \Pi^{ij} \frac{\delta}{\delta \Pi^{ij}}$	$\int \phi \frac{\delta}{\delta \phi}$	$-\int \Pi_\phi \frac{\delta}{\delta \Pi_\phi}$
$V_1$	$-V_1/2 - V_4$	0	$V_1$	0
$V_2$	$-V_2/2$	$2V_2$	$-V_2$	0
$V_3$	$-V_3/2$	0	$V_3$	0
$V_4$	$5V_4/2$	0	$-V_4$	0
$V_5$	$-3V_5/2$	0	$\int N\sqrt{h} \phi \partial_\phi P(\phi) d^3x / \kappa$	0
$V_6$	0	0	$V_6$	$-V_6$
$V_7$	$-V_7$	$V_7$	0	0

## APÊNDICE G – Símbolo de Levi-Civita

O símbolo de Levi-Civita é um pseudo-tensor completamente anti-simétrico que expressa o sinal de uma permutação entre números naturais  $1, 2, \dots, n$ , para algum inteiro  $n$ . Denotamos o símbolo de Levi-Civita por

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (\text{G.1})$$

onde cada índice  $i_j$  assume valores  $1, 2, \dots, n$ . A propriedade fundamental do símbolo é a anti-simetria completa, ou seja, a troca entre de posição entre dois índices quaisquer leva à troca de sinal do símbolo, isto é

$$\epsilon_{\dots i_p \dots i_q \dots} = -\epsilon_{\dots i_q \dots i_p \dots}, \quad (\text{G.2})$$

além disso, se quaisquer dois índices forem iguais, símbolo assume o valor zero.

O símbolo de Levi-Civita em  $n$  dimensões é definido por

$$\epsilon_{a_1 a_2 \dots a_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ é uma permutação par de } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{se } (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

Em particular, em três dimensões, temos

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (3, 2, 1), (1, 3, 2), \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & \text{se } i = j, \text{ ou } j = k, \text{ ou } k = i \end{cases} \quad (\text{G.4})$$

E em quatro dimensões

$$\epsilon_{IJKL} = \begin{cases} +1 & \text{se } (I, J, K, L) \text{ é uma permutação par de } (0, 1, 2, 3) \\ -1 & \text{se } (I, J, K, L) \text{ é uma permutação ímpar de } (0, 1, 2, 3) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{G.5})$$

### Propriedades

Em duas dimensões,

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{CD} = \delta_A^C \delta_B^D - \delta_A^D \delta_B^C, \quad (\text{G.6})$$

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{AC} = \delta_B^C, \quad (\text{G.7})$$

$$\epsilon_{AB} \epsilon^{AB} = 2. \quad (\text{G.8})$$

Em três dimensões,

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{imn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_j^n \delta_k^m, \quad (\text{G.9})$$

$$\epsilon_{jmn} \epsilon^{imn} = 2\delta_j^i, \quad (\text{G.10})$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon^{ijk} = 6. \quad (\text{G.11})$$

Em  $n$  dimensões,

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon^{j_1 \dots j_n} = n! \delta_{[i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_n]}^{j_n} = \delta_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}, \quad (\text{G.12})$$

$$\epsilon_{i_1 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} = k! (n-k)! \delta_{[i_{k+1}}^{j_{k+1}} \dots \delta_{i_n]}^{j_n} = k! \delta_{j_{k+1} \dots j_n}^{i_{k+1} \dots i_n}, \quad (\text{G.13})$$

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} \epsilon^{i_1 \dots i_n} = n!. \quad (\text{G.14})$$

### Aplicações e Exemplos

Seja  $E$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  composta pelos elementos  $e_{1,1}, \dots, e_{n,n}$ . O símbolo de Levi-Civita pode ser usado para expressar determinantes com

$$\det(E) = \epsilon^{i_1 \dots i_n} e_{1,i_1} \dots e_{n,i_n}, \quad (\text{G.15})$$

ou equivalentemente,

$$\det(E) =: e = \frac{1}{n!} \epsilon^{i_1 \dots i_n} \epsilon^{j_1 \dots j_n} e_{i_1, j_1} \dots e_{i_n, j_n}. \quad (\text{G.16})$$

Em particular, para  $n = 3$ ,

$$\det(e_a^i) \epsilon_{abc} = \epsilon_{ijk} e_a^i e_b^j e_c^k \quad (\text{G.17})$$

Outras relações úteis são

$$e_a^I \epsilon^{abcd} \epsilon_{IJKL} = 3! e e_{[J}^b e_K^c e_{L]}^d, \quad (\text{G.18})$$

Prova

$$e_a^I \epsilon^{abcd} \epsilon_{IJKL} = \epsilon^{Ibcd} \epsilon_{IJKL}, \quad (\text{G.19})$$

mas

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{3!} \epsilon^{bcd} \epsilon_{JKL} e_b^J e_c^K e_d^L \\ \Rightarrow 3! e e_{[J}^b e_K^c e_{L]}^d &= \epsilon^{bcd} \epsilon_{JKL}, \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

inserindo a Eq. (G.20) em (G.19), temos a Eq. (G.18).

Para um tensor  $\omega_a^{qp}$  antissimétrico em  $q$  e  $p$ ,

$$\frac{1}{2} \epsilon_{kj}^n \epsilon_{qp}^j \omega_a^{qp} P_n^b = -\omega_{ak}^j P_j^b. \quad (\text{G.21})$$

Prova

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \epsilon_{jk}^n \epsilon_{qp}^j \omega_a^{qp} P_n^b &= -\frac{1}{2} (\delta_k^q \delta_n^p - \delta_n^q \delta_k^p) \omega_{aqp} P^{bn} \\ &= -\frac{1}{2} (\omega_{akn} P^{bn} - \omega_{ank} P^{bn}) \\ &= -\omega_{ak}^j P_j^b. \end{aligned} \quad (\text{G.22})$$

E, finalmente,

$$\epsilon_l^{nj} \epsilon^{lkm} \epsilon_{nqp} \omega_{akm} \omega_b^{qp} P_j^b = 3! \epsilon_l^{nj} \delta_{[n}^l \delta_q^k \delta_p]^m \omega_{akm} \omega_b^{qp} P_j^b = 4 \epsilon_l^{kj} \omega_{ak}^m \omega_{bm}^l P_j^b. \quad (\text{G.23})$$

## APÊNDICE H – Álgebra de Spinors

Fermions de Dirac são construções covariantes em que objetos  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix}$  se transformam segundo a representação do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ , correspondente ao grupo de Lorentz – analogamente como  $SU(2)$  corresponde ao grupo das rotações  $O(3)$ . As variáveis  $\psi$  e  $\eta$  são cada um spinors de 2 componentes e  $\Psi$  é um spinor de 4 componentes.

Nesse trabalho usamos as matrizes gama de Dirac  $\gamma_I$  que satisfazem a álgebra de Clifford

$$\gamma_I \gamma_J + \gamma_J \gamma_I = 2\eta_{IJ} \mathbf{1} . \quad (\text{H.1})$$

De acordo com a assinatura utilizada aqui, temos

$$\gamma_0^2 = -\mathbf{1} \quad \text{e} \quad \gamma_j^2 = \mathbf{1} . \quad (\text{H.2})$$

Com

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{H.3})$$

e

$$\gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^j \\ i\sigma^j & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{H.4})$$

onde os  $\sigma^j$  são as matrizes de Pauli.

Definindo  $\sigma_{IJ} = \frac{1}{4} [\gamma_I, \gamma_J]$ , temos

$$\sigma_{ij}^\dagger = -\sigma_{ij} , \quad (\text{H.5})$$

$$\sigma_{0j}^\dagger = \sigma_{0j} . \quad (\text{H.6})$$

Sejam

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} , \quad (\text{H.7})$$

$$\bar{\Psi} = i(\Psi)^T \gamma^0 = (\eta^\dagger \quad \psi^\dagger) \quad (\text{H.8})$$

para spinors e  $\bar{A} = -\gamma^0 A^\dagger \gamma^0$  para matrizes. Daí temos  $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$  e  $\overline{A\Psi} = \bar{\Psi}\bar{A}$ . E

$$\overline{\gamma^I} = -\gamma^I , \quad (\text{H.9})$$

$$\overline{\sigma_{IJ}} = -\sigma_{IJ} . \quad (\text{H.10})$$

Outra matriz útil construída a partir das  $\gamma_I$  é a matriz Hermitiana

$$\gamma^5 =: i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (\text{H.11})$$

que satisfaz  $\overline{\gamma^5} = -\gamma^5$  e comuta com as demais matrizes gama. Aqui  $\gamma^5$  é dada por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{H.12})$$

As seguintes relações são úteis para os cálculos desenvolvidos nesse trabalho.

$$\overline{\Psi}\gamma^i\gamma_5\Psi = (\eta^\dagger \ \psi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\psi^\dagger\sigma^i\psi - i\eta^\dagger\sigma^i\eta, \quad (\text{H.13})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^0\gamma_5\Psi = (\eta^\dagger \ \psi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = -i\psi^\dagger\sigma^i\psi + i\eta^\dagger\sigma^i\eta, \quad (\text{H.14})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^i\Psi = (\eta^\dagger \ \psi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = i\psi^\dagger\sigma^i\psi - i\eta^\dagger\sigma^i\eta \quad (\text{H.15})$$

e

$$\overline{\Psi}\gamma^0\Psi = (\eta^\dagger \ \psi^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix} = i\psi^\dagger\psi + i\eta^\dagger\eta, \quad (\text{H.16})$$

Outras relações importantes são

$$\gamma_0\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma^i \\ i\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad (\text{H.17})$$

assim, temos

$$[\gamma_0, \gamma_i] = -2\sigma^i\gamma^5. \quad (\text{H.18})$$

Similarmente,

$$[\gamma_i, \gamma_j] = 2i\epsilon_{ij}^k\sigma_k\mathbf{1}. \quad (\text{H.19})$$

Dos resultados acima podemos listar os seguintes resultados úteis:

$$\overline{\Psi}\gamma^0\gamma_5[\gamma_0, \gamma_k]\Psi = -2(i\psi^\dagger\psi + i\eta^\dagger\eta), \quad (\text{H.20})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^0\gamma_5[\gamma_j, \gamma_k]\Psi = 2i\epsilon_{jk}^l(-i\psi^\dagger\sigma_l\psi + i\eta^\dagger\sigma_l\eta), \quad (\text{H.21})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^0[\gamma_0, \gamma_k]\Psi = -2(-i\psi^\dagger\sigma_k\psi + i\eta^\dagger\sigma_k\eta), \quad (\text{H.22})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^0[\gamma_j, \gamma_k]\Psi = 2i\epsilon_{jk}^l(i\psi^\dagger\sigma_l\psi + i\eta^\dagger\sigma_l\eta), \quad (\text{H.23})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^i\gamma_5[\gamma_0, \gamma_k]\Psi = -2(i\psi^\dagger\sigma^i\sigma_k\psi - i\eta^\dagger\sigma^i\sigma_k\eta), \quad (\text{H.24})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^i\gamma_5[\gamma_j, \gamma_k]\Psi = 2i\epsilon_{jk}^l(-i\psi^\dagger\sigma^i\sigma_l\psi - i\eta^\dagger\sigma^i\sigma_l\eta), \quad (\text{H.25})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^i[\gamma_0, \gamma_k]\Psi = -2(-i\psi^\dagger\sigma^i\sigma_k\psi + i\eta^\dagger\sigma^i\sigma_k\eta), \quad (\text{H.26})$$

$$\overline{\Psi}\gamma^i[\gamma_j, \gamma_k]\Psi = 2i\epsilon_{jk}^l(i\psi^\dagger\sigma^i\sigma_l\psi - i\eta^\dagger\sigma^i\sigma_l\eta). \quad (\text{H.27})$$