

Felipe de Melo Santos

Cosmologia de Teorias de Gravitação com Dependência de Escala

Vitória

2021

Felipe de Melo Santos

Cosmologia de Teorias de Gravitação com Dependência de Escala

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção do grau de doutor em Física.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Física

Orientador: Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues

Coorientador: Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito-Ricaldi

Vitória

2021

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

S237c Santos, Felipe de Melo, 1991-
Cosmologia de teorias de gravitação com dependência de escala / Felipe de Melo Santos. - 2021.
145 f. : il.

Orientador: Davi Cabral Rodrigues.
Coorientador: Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi.
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Gravitação estendida. 2. Grupo de renormalização. 3. Cosmologia. I. Rodrigues, Davi Cabral. II. Ricaldi, Wiliam Santiago Hipólito. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

“Cosmologia de Teorias de Gravitação com Dependência de Escala”

Felipe de Melo Santos

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por webconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Aprovada por:

Prof. Dr. Ilia Chapiro
(UFJF)

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues
(Orientador - PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Armando Bartolome Bernui Leo
(ON)

Prof. Dr. Júlio César Fabris
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
(UEL)

Prof. Dr. Oliver Fabio Piattella
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito Ricaldi
(Coorientador – CEUNES)

Vitória-ES, 15 de julho de 2021.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
DAVI CABRAL RODRIGUES - SIAPE 1816732
Departamento de Física - DF/CCE
Em 16/07/2021 às 01:25

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/229388?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
OLIVER FABIO PIATTELLA - SIAPE 2847692
Departamento de Física - DF/CCE
Em 16/07/2021 às 04:09

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/229392?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
WILIAM SANTIAGO HIPOLITO RICALDI - SIAPE 1775040
Departamento de Ciências Naturais - DCN/CEUNES
Em 16/07/2021 às 07:41

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/229424?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JULIO CESAR FABRIS - SIAPE 297051
Departamento de Física - DF/CCE
Em 16/07/2021 às 10:11

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/229570?tipoArquivo=O>

Dedicado à Sara.

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues e Prof. Dr. Wiliam Santiago Hipólito-Ricaldi, pela paciência e dedicação durante todo o meu doutorado. Sou muito grato.

Aos amigos Rodrigo Marttens e David Camarena. Ambos ajudaram a compreender melhor o código que utilizei na construção desta tese.

Em especial, agradeço ao amigo Nicolas Bertini, pelos vários momentos de discussões construtivas que agregaram para o desenvolvimento desta tese.

Aos meus pais, Raimunda Nonata e Reinaldo Santos, por seus exemplos de carinho, atenção, ajuda e acima de tudo por seu amor incondicional.

Aos meus irmãos, Tiago Santos e Jaime Neto, pelo amor e pelos conselhos nessa jornada.

Às minhas cunhadas, Karla Renata e Dielle Petri e aos meus sobrinhos.

À minha esposa, Sara Aviz, que foi a força e paciência que precisei durante todo esse tempo de doutorado. Te amo hoje e sempre.

À minha sogra, meu sogro e meu cunhado.

Aos amigos de Belém: Bruno Rodrigues, Márcio Sousa, Livia Santos, Ingrid Costa, Isaac Torres e Glauber Tadaeisky.

Aos meus amigos de Vitória: Cássio Favarato, Denis Rodrigues, Pedro Otavio, Carla Almeida, Mariniel Galvão, Igor Badke, Michael Gusson, Eddy Chirinos, Álefe Freire, Mariana, Rahima, Renan Alves, Érico Vinícius, Raphael, Theo, Abner, Gabriel, Saulo, Alan, Daniel, Diego, Priscila.

Agradeço ao José Carlos, secretário do PPGFis, pelo suporte em todas as questões burocráticas pertinentes ao programa e também pelos divertidos assuntos.

Agradeço, acima de tudo, a Deus pelo sustento material e, principalmente, espiritual ao longo desse anos de doutorado.

Este trabalho usou o cluster de computadores Virgo do Núcleo Cosmo-Ufes, que é apoiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo (FAPES) e administrado por Renan Alves de Oliveira.

Este trabalho teve apoio financeiro da FAPES.

Resumo

Extensões de relatividade geral com acoplamentos G e Λ dependentes de escala têm sido propostas a partir de diferentes motivações, em particular inspiradas em efeitos não triviais da aplicação de grupo de renormalização à gravitação. Tratamos aqui de desenvolvimentos cosmológicos desse quadro, tanto sob a perspectiva de desenvolvimento de uma ação efetiva completa e consistente (ou seja, com toda a informação necessária para a dinâmica), quanto sob o ponto de vista numérico e observacional, considerando a viabilidade da proposta a partir de diversos dados cosmológicos. Com respeito aos aspectos teóricos dos princípios dinâmicos, o quadro desenvolvido é tal que toda a evolução de fundo está sujeita às mesmas equações que regem o fundo cosmológico do modelo padrão (Λ CDM), mas as perturbações possuem correções que dependem de duas escalas: uma principal dada por um escalar construído a partir de certa perturbação da métrica (escalar esse já usado em trabalhos anteriores fora do contexto cosmológico), e uma secundária que é deduzida por condição de consistência e depende do traço do tensor momento-energia. Com respeito à fenomenologia desse quadro, avaliamos via MCMC os dados de $f\sigma_8$, Supernovas Tipo Ia, oscilações acústicas bariônicas, distorção no espaço de *redshift* e dados da radiação cósmica de fundo. Nossa primeira análise para um caso particular nesse quadro, sugere pequenos desvios com respeito aos parâmetros de Λ CDM, quando todos os dados são analisados juntos.

Palavras-chave: Gravitação Estendida, Grupo de Renormalização, Cosmologia.

Abstract

The extensions of general relativity with scale-dependent G and Λ couplings have been proposed for different motivations, but inspired, in particular, by non-trivial effects of the application of a renormalization group to the gravitation. We will consider the cosmological scenario of this framework from two perspectives: developing a self-consistent action, with the necessary information to describe the dynamic of the model; and from a numerical and observational point of view, considering the viability of the proposal from several cosmological data. Regarding the theoretical aspects of dynamical principles, the framework is such that the background evolution is subject to the same equations that govern the cosmological background of the standard model (Λ CDM), but the perturbations have corrections that depend on the scalar factor coming from the perturbation of the metric, present in other non-cosmological scenarios, and on a secondary scalar originated from consistency conditions and dependent on the trace of the energy-moment tensor. For the phenomenology of this picture, we evaluated via MCMC the data from $f\sigma_8$, Supernovas type Ia, baryonic acoustic oscillations, distortion in redshift space, and data from the cosmic background radiation. Our first analysis with a complete data set for a particular case in this frame suggests small deviations in the parameters of Λ CDM.

Keywords: Extended Theories of Gravity, Renormalization Group, Cosmology.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráficos do espectro de potência de temperatura e polarização da radiação cósmica de fundo, retirados de [1].	71
Figura 2 – Gráficos retirados de [2]. Gráfico Esquerdo: curvas $f\sigma_8$ para quatro modelos que aparecem na tabela 1, apenas o modelo de melhor ajuste sem restrições não é mostrado (uma vez que viola o limite (4.84) e sua curva é semelhante à curva preta pontilhada). Λ CDM/Planck indica que os parâmetros Ω_{m0} e σ_8 são dados pela colaboração Planck 2018 [1]. A região azulada mostra o efeito de alterar o valor de ν , dentro dos limites permitidos (4.84), ao usar os valores de Ω_{m0} e σ_8 dados por Λ CDM/Planck [1]. Gráfico Direito: Este gráfico mostra as mesmas curvas exibidas no gráfico esquerdo e adiciona os dados observacionais $f\sigma_8$ (apresentados na seção 2.3.3).	108
Figura 3 – Espectros de potencia do modo TT (considerando $ \nu = 0.01$) e função de correlação de dois pontos (considerando $ \nu = 0.005$). Plots feitos no código CLASS [4] devidamente modificado e fixando os demais parâmetros com Λ CDM. Em laranja temos o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em preto temos os resultados com $\nu \neq 0$	116
Figura 4 – Curvas de contorno usando os dados de baixa correlação de $f\sigma_8$. Em vermelho temos o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em laranja temos os resultados para Λ CDM+GR (ν livre).	117
Figura 5 – Curvas de contorno da análise conjunta dos dados descritos na seção 2.3. Em vermelho o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em laranja os resultados para Λ CDM+GR (ν livre).	119

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados usando somente dados de $f\sigma_8$	107
Tabela 2 – Resultados estatísticos usando somente dados de $f\sigma_8$ 2.277, com intervalo de 68% de confiança.	117
Tabela 3 – Resultados da análise conjunta dos dados descritos na seção 2.3, com intervalo de 68% de confiança.	118

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
2	O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO ATUAL	21
2.1	Uma Breve História da Expansão do Universo	21
2.2	Modelo ΛCDM	23
2.2.1	Cosmologia de Fundo	24
2.2.1.1	Equações de Friedmann	27
2.2.1.2	Soluções das Equações de Friedmann	33
2.2.1.3	Medidas de Distância	34
2.2.2	Cosmologia Linear	36
2.2.2.1	Perturbações na Métrica de FLRW e o Tensor de Einstein Linearizado	37
2.2.2.2	Perturbação do Tensor de Momento-Energia	39
2.2.2.3	O Problema do Calibre e as Transformações de Calibre	42
2.2.2.3.1	Transformações de Coordenadas e Transformações de Calibre	43
2.2.2.3.2	A decomposição Escalar-Vetor-Tensor (EVT)	45
2.2.2.3.3	Calibres	49
2.2.2.4	Equações de Einstein para Perturbações Escalares	50
2.2.2.4.1	Equação de Poisson Relativística	50
2.2.2.4.2	Equação para a Tensão Anisotrópica	51
2.2.2.4.3	Equação para a Velocidade	52
2.2.2.4.4	Equação para a Perturbação da Pressão	52
2.2.2.5	Soluções das Perturbações Escalares para Casos Particulares	52
2.2.2.6	A Equação Linear de Conservação de $T_{\mu\nu}$	54
2.2.3	Condições Iniciais	56
2.2.3.1	Equações de Evolução no Limite de $k\eta \ll 1$	58
2.2.3.2	Multipolos no Limite $k\eta \ll 1$	59
2.2.3.3	Equações das Velocidades de Bárions e CDM	60
2.2.3.4	Equações de Campo no Limite $k\eta \ll 1$	61
2.2.3.5	Modo Primordiais Adiabáticos	62
2.2.4	Problemas em Aberto no Modelo Λ CDM	64
2.3	Dados Observacionais	65
2.3.1	Supernova Tipo Ia	65
2.3.2	Oscilações Acústicas Bariônicas	66
2.3.3	Distorção no Espaço de Redshift	67
2.3.4	Radiação Cósmica de Fundo	68

2.3.4.1	Espectro da CMB	68
3	TÓPICOS DE GRAVITAÇÃO ESTENDIDA	73
3.1	Parametrizações Generalizadas	73
3.2	Teoria $f(R)$	75
3.2.1	Considerações Iniciais	75
3.2.2	Cosmologia	77
3.3	Teoria Escalar-Tensorial	79
3.3.1	Considerações Iniciais	79
3.3.2	Cosmologia	81
4	MODELO COM G E Λ DEPENDENTES DE ESCALA	83
4.1	Considerações Iniciais	83
4.2	Implementação de Dependência de Escala na Gravitação no Nível de Ação	85
4.3	Abordagem em Escalas Cosmológicas	87
4.3.1	A Escala Principal	88
4.3.2	Cosmologia de Fundo	90
4.3.3	A Relação entre G e Λ no Vácuo	91
4.3.4	A Relação entre G e Λ na Presença de Matéria	91
4.3.5	Equações de Campo e Fluidos Perfeitos	93
4.3.6	Equações de Movimento na Presença de um Fluido Relativístico	94
4.4	Perturbações Cosmológicas	96
4.4.1	Equações para Perturbações Escalares	96
4.4.2	Soluções das Perturbações Escalares para Casos Particulares	98
4.4.3	Evolução do Contraste de Densidade	100
4.4.4	Parametrizações Generalizadas do Modelo	101
4.4.5	Restringindo ν Usando as Parametrizações Generalizadas	103
4.4.6	Interpretações Cosmológicas da Matéria Escura e da Energia Escura	104
4.4.7	Consequências para $f\sigma_8$	105
5	STATUS OBSERVACIONAL DO MODELO COM G E Λ DEPENDENTES DE ESCALA	109
5.1	Considerações Iniciais	109
5.2	Condições Iniciais do Modelo	111
5.3	Resultados da Análise de MCMC	115
6	CONCLUSÃO	121

APÊNDICES	125
APÊNDICE A – PRINCÍPIO VARIACIONAL PARA MODELO COM <i>G</i> E Λ DEPENDENTES DE ESCALA	127
REFERÊNCIAS	129

1 Introdução

Atualmente, as observações de fenômenos astrofísicos e cosmológicos revelam um cenário bastante enigmático do nosso universo. Conjuntos de dados provenientes de diferentes fontes, tais como Supernova Tipo Ia [5] e de estrutura em grande escala (oscilações acústicas bariônicas [6, 7], distorção no espaço de *redshift* [8, 9, 10] e Radiação Cósmica de Fundo¹ [1]), indicam que a maior parte do universo não é constituído da matéria usual (chamada comumente de matéria bariônica), mas a maior parte do conteúdo energético é composto por algo ainda não compreendido. De acordo com esses dados, a matéria bariônica corresponde a apenas $\sim 5\%$ da energia total do universo, enquanto que a radiação, corresponde a uma porção ínfima atualmente (cerca de $\sim 10^{-5}$), embora já tenha sido dominante no universo primordial, antes do desacoplamento matéria-radiação. Os outros 95% correspondem ao que chamamos hoje de matéria escura e energia escura.

A matéria escura, que corresponde a $\sim 25\%$ do conteúdo total do universo hoje, representa uma forma desconhecida de matéria que, embora não possa ser detectada diretamente, possui propriedades de aglomerações da matéria comum. É uma componente exótica com pressão quase nula que não é capaz de interagir com ondas eletromagnéticas, impossibilitando sua detecção através de observações diretas. Esta forma de matéria foi proposta na década de 1930 com objetivo de explicar observações de aglomerados de galáxias [11], e anos depois veio a ser utilizada novamente para estudar curvas de rotação de galáxias e para explicar o excesso de massa em galáxias que não era observada através de luminosidade [12, 13]. Sua existência foi reforçada por dados de emissão em raio-X de aglomerados de galáxias e de lentes gravitacionais. Além disso, teoricamente, a matéria escura desempenha um papel de destaque ao potencializar o crescimento de estruturas bariônicas após o desacoplamento, de modo que tais estruturas atinjam o regime não linear que é observado atualmente.

A energia escura, correspondente a $\sim 70\%$ da energia total hoje, indica uma forma desconhecida de energia que não é detectada diretamente e não se agrupa como a matéria ordinária. A energia escura, ao contrário da matéria escura, viola a condição de energia forte. Dada equação de estado $p = p(\varepsilon)$, com p a pressão e ε a densidade de energia do fluido que compõem o universo, temos que a matéria ordinária e matéria escura satisfazem a condição de energia forte ($\varepsilon + 3p \geq 0$), enquanto que a energia escura não satisfaz tal condição (as pressões no fluido se tornam negativas ao ponto de superar a contribuição de energia). Além disso, dentro da atual descrição do universo, esta energia escura parece se assemelhar a uma constante cosmológica que *a priori*, no contexto de Relatividade Geral (GR), corresponde a um termo de natureza geométrica. No entanto, tal identificação

¹ Em inglês *Cosmic Microwave Background*, ou CMB.

é análoga a um fluido com equação de estado do tipo vácuo e densidade de energia constante. A descrição desse tipo de energia parece satisfazer com sucesso os atuais dados observacionais, entretanto se encontra muito em desacordo com a previsão teórica da energia do vácuo vinda da teoria quântica de campos. Devido seu atual domínio sobre a matéria escura e matéria comum, a energia escura confere atualmente ao universo uma fase de expansão acelerada, comprovada por Adam Riess, Brian Schmidt e Saul Perlmutter (1998), através de observações da luminosidade de super novas tipo Ia [14, 15].

O modelo mais simples que se encaixa adequadamente aos dados é denominado de modelo Λ CDM (Λ Cold Dark Matter), que é atualmente o Modelo Padrão da Cosmologia. Este modelo é complementado por um cenário inflacionário, geralmente baseado em algum campo escalar, *inflaton*. Além de não explicar a origem do *inflaton* ou da natureza da matéria escura por si só, o modelo Λ CDM carrega consigo alguns problemas (ver, por exemplo, [16, 17, 18, 19, 20]). Por exemplo, o *problema do ajuste fino*, no qual, como citado anteriormente, o valor observado da energia escura (representada neste modelo por Λ) é muito pequeno comparado a estimativa teórica da energia do vácuo; o *problema da coincidência*, no qual a razão da densidade de energia da matéria e da constante cosmológica, medidas hoje, é de ordem 1; *tensões* entre medidas locais e de grandes escalas cosmológicas, envolvendo a constante de Hubble H_0 e o parâmetro referente a dispersão do campo de densidade da matéria σ_8 .

Estes problemas questionam a validade do modelo Λ CDM levando a estudos de modelos alternativos que possam descrever o universo. Alguns destes modelos têm como perspectiva um tratamento dinâmico na componente de energia escura [21], ou seja, ela deixaria de ser representada por uma constante cosmológica. Outra alternativa seria mudar a teoria gravitacional, estendendo a forma da ação da RG. Estas teorias que estendem são exemplos da inclusão de invariantes de ordem superior na ação, bem como campos escalares não minimamente acoplados à geometria [22]. Duas classes deste tipo de teoria são bastante estudadas na literatura [22, 23, 24, 25], são elas a teoria $f(R)$ e a teoria escalar-tensorial.

Aqui, tratamos uma abordagem na qual a constante gravitacional G e a constante cosmológica Λ dependem de escala, inspirada em efeitos do grupo de renormalização (GR), em um cenário cosmológico [2]. Abordagens nas quais os acoplamentos G e Λ dependem de certa escala podem ser encontradas, por exemplo, em [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43]).

De forma geral, determinamos a relação entre os acoplamentos G e Λ com a escala, denotada por μ , bem como a relação de μ com as quantidades físicas do sistema em análise. Esta última relação recebe o nome de configuração de escala. No modelo que vamos analisar consideramos que em grandes escalas cosmológicas deve existir uma ação clássica completa capaz de descrever efetivamente os efeitos decorrentes da dependência de escala de G e Λ ,

isto é, todas as informações físicas relevantes estão contidas em uma ação clássica, incluindo o significado da escala. Além disso, consideramos em nossa análise uma escala covariante, apresentada em [39], que depende das perturbações do espaço-tempo. Destacamos que nosso artigo [2] é o primeiro a aplicar essa escala covariante em cosmologia. Neste contexto, escalas (inspiradas em GR) que são funções do número de onda das perturbações podem ter um papel relevante em tempos tardios. Para selecionar esta escala consideramos que ela é explicitamente covariante no espaço-tempo, ou seja, é um escalar. Por conseguinte, precisamos que esta escala nos leve a uma dinâmica diferente da RG e das teorias de gravitação estendida (como $f(R)$ e Brans-Dicke), e nos diga que, fenomenologicamente, é razoável que os possíveis desvios estejam presentes apenas no nível perturbativo. Com este cenário, mostramos que para obter um quadro dinâmico cosmológico consistente precisamos de uma segunda escala, fixada a partir da consistência dinâmica do modelo. Tal que, considerando uma métrica espacialmente plana de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) com perturbações escalares, no calibre Newtoniano, mostramos que esta segunda escala é uma função do traço do tensor momento-energia do fundo cosmológico.

Nossos resultados atribuídos a partir dos vínculos cosmológicos são apresentados em duas etapas. A primeira, feita em [2], mostra os resultados obtidos por uma análise simplificada, nos focando na aproximação de um único fluido dominando a evolução do universo. Em especial, utilizamos parâmetros comumente aplicados para restringir modelos de gravitação estendida usando dados de distorção no espaço de *redshift* [10] afim de averiguar se esta abordagem pode aliviar as tensões nas medidas do parâmetro σ_8 . A segunda etapa, presente no artigo [3], apresenta os resultados obtidos por análise de MCMC e leva em conta uma modelagem mais realista do universo, considerando todas as componentes, assim como as interações durante o universo primordial. Neste caso, levamos em conta a componente de tensão anisotrópica no fluido, além disso, mostramos que as condições iniciais na era dominada pela radiação são modificadas. Esta análise estatística é feita através da análise conjunta dos dados de distorção no espaço de *redshift* com dados de supernova Tipo Ia [5], dados de oscilações acústicas bariônicas [6, 7] e dados de CMB do satélite Planck (modos de temperatura, de polarização, modos cruzados de temperatura e polarização e lenteamento da CMB) [1]. Introduzimos este modelo no código numérico CLASS [4] e, por fim, utilizamos o código numérico MontePython [44] que utiliza o método de *Markov Chain Monte Carlo* para a realizar a análise estatística, afim de explorar todo o espaço de parâmetros e encontrar o melhor ajuste para os parâmetros cosmológicos do modelo. Com esses testes numéricos, comparamos mais detalhadamente esta estrutura com o modelo Λ CDM e verificamos de forma mais precisa se esta proposta pode, de fato, aliviar os problemas presentes no modelo padrão, como por exemplo, as tensões envolvendo medidas de H_0 e σ_8 .

No segundo capítulo faremos uma revisão do modelo cosmológico padrão, o modelo Λ CDM. Antes de falar de fato deste modelo, mostraremos brevemente aspectos relacionados

à história da expansão do universo. Depois, vamos analisar a dinâmica de fundo e linear de Λ CDM, através do seu conteúdo material e de sua expansão. Consideraremos perturbações escalares no espaço-tempo de FLRW, a fim de estudar o processo de formação de estruturas em cada modelo que veremos. Em seguida, são apresentados alguns dos problemas em aberto do modelo cosmológico padrão. Na última seção deste capítulo apresentamos os dados observacionais que são usados para validar essas teorias. No terceiro capítulo, falamos brevemente de alguns tópicos de gravitação estendida, em especial da teoria $f(R)$ e da teoria escalar-tensorial (especificamente o modelo de Brans-Dicke). No quarto capítulo, analisamos o cenário cosmológico do modelo gravitacional dependente de escala, apresentado em [2], no qual os acoplamentos G e Λ são dependentes de escala, inspirada em efeitos de GR. No quinto capítulo averiguamos o status observacional, apresentado em [3] do modelo com dependência de escala. As considerações finais e as perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas na conclusão.

2 O Modelo Cosmológico Padrão Atual

2.1 Uma Breve História da Expansão do Universo

Durante a maior parte do século 20, as características mais importantes do nosso universo tiveram que ser consideradas como uma hipótese, conhecida como o *Princípio Cosmológico*. Especificamente, este princípio diz que

Em escalas suficientemente grandes o universo é estatisticamente homogêneo e isotrópico

O *Princípio Cosmológico* é uma hipótese bem sustentada por dados empíricos confiáveis. Observações como os fótons da radiação cósmica de fundo (CMB) [45, 1] vindos de diferentes partes do céu com quase a mesma temperatura, apoiam a homogeneidade e isotropia¹. Claro que observamos inomogeneidades e irregularidades na região local do universo, como estrelas e galáxias. Essas inomogeneidades cresceram com o tempo por meio da instabilidade gravitacional de uma distribuição de matéria que era mais homogênea no passado. Então, podemos considerar essas inomogeneidades como pequenas perturbações que evoluem no universo. Mais detalhes sobre homogeneidade e isotropia de nosso universo ver [46, 47, 48, 49, 50].

Outra importante comprovação observacional de nosso universo é sua expansão. Sua primeira evidência surgiu na década de 1920, quando Slipher e Hubble descobriram que o comprimento de onda das linhas de absorção observadas da radiação emitida por galáxias distantes eram maiores do que o comprimento de onda λ medidas na terra [51, 52, 53, 54, 25, 55]. Isto ocorre devido ao comprimento de onda ser esticado em proporção ao fator de escala de um universo em expansão. Para quantificar esse impacto, introduzimos a medida de distância, chamada *desvio para o vermelho* (ou *redshift*) [25]

$$z \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda} - 1 = \frac{a_0}{a} - 1, \quad (2.1)$$

sendo $z = 0$ para épocas atuais, de forma que, conforme voltamos ao passado, z aumenta. O fator de escala do universo é representado por a . O λ_0 indica o valor observado atualmente para o comprimento de onda. Vamos considerar que o seu valor no tempo presente, a_0 , é normalizado a 1, isto é, consideramos no decorrer do trabalho $a_0 = 1$ (isto é pelo fato de que a dinâmica é invariante se multiplicarmos o fator de escala por uma constante [52, 53, 54, 25, 55]).

¹ A rigor a CMB nos diz que o universo jovem ($z \approx 1100$) era altamente isotrópico. A CMB é compatível com a hipótese de homogeneidade, mas não a confirma.

Consideremos uma radiação observada no tempo presente t_0 , emitida, por exemplo, por uma galáxia em um instante t . Tal objeto está próximo o suficiente do observador, nos permitindo assumir uma expansão em série de Taylor até a primeira ordem de aproximação do fator de escala

$$\frac{1}{a} \approx 1 - (t - t_0)H_0 \rightarrow z = (t_0 - t)H_0. \quad (2.2)$$

Nestas equações temos definido o parâmetro de Hubble

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.3)$$

o ponto denota derivação em relação ao tempo t . A constante H_0 é o valor atual de $H(t)$ e recebe o nome de constante de Hubble. Para um intervalo de tempo pequeno o termo $(t_0 - t)$ coincide com a distância $D = c(t_0 - t)$ percorrida pela onda eletromagnética, e então obtemos uma relação de proporcionalidade entre o parâmetro de desvio para o vermelho e a distância entre o observador e a fonte de ondas eletromagnéticas

$$cz \simeq DH_0 \quad (2.4)$$

conhecida Lei de Hubble-Lemaître [51] (ver também em [52, 53, 54, 25, 55]).

Em 1929, com dados escassos, superficiais e ruidosos, Hubble relatou (2.4) traçando a velocidade de recessão v versus a distância r , e confirmou que o universo está em expansão, de tal maneira que H_0 representa a taxa com a qual o universo está se expandindo. A constante de Hubble H_0 é geralmente escrita como

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2.1332h \times 10^{-42} \text{ GeV}, \quad (2.5)$$

sendo

$$1 \text{ Mpc} = 3.08568 \times 10^{24} \text{ cm} = 3.26156 \times 10^{26} \text{ anos luz}, \quad (2.6)$$

h descreve a incerteza sobre o valor H_0 . Os últimos resultados cosmológicos, usando dados de radiação cósmica de fundo [1], indicam que

$$h = 0.6766 \pm 0.0042, \quad (2.7)$$

isto é,

$$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.8)$$

Medidas locais [56] indicam que seu valor atual é da ordem de $73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Definimos o tempo de Hubble

$$t_H \equiv 1/H_0 = 9.78 \times 10^9 h^{-1} \text{ anos}. \quad (2.9)$$

que é uma medida aproximada da idade do Universo[25]. O atual raio de Hubble é definido por

$$D_H \equiv \frac{c}{H_0} = 9.27 h^{-1} \times 10^{25} \text{m} = 3.00 h^{-1} \text{Gpc}, \quad (2.10)$$

Com essa medidas podemos também introduzir[25]

$$\rho_{cr,0} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.878h^2 \times 10^{-29} \text{g cm}^{-3}, \quad (2.11)$$

que representa a densidade de massa média no universo hoje, e também pode ser chamada de densidade de energia crítica do universo hoje. Esta forma matemática será determinada na próxima seção, já o resultado numérico usamos (2.6) e (2.8) e o valor de $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{seg}^{-2}$ [1]. Esta densidade crítica é muito pequena se comparada com a densidade da estrutura local do universo (cerca de $\rho \simeq 5 \text{g/cm}^3$ na terra e $\rho \simeq 10^{-24} \text{g/cm}^3$ para a densidade homogênea de bárions/matéria escura em nossa galáxia). Uma fração ainda menor é responsável pela atual expansão acelerada do Universo[25].

Outro observável que pode ser usado para medir a expansão do universo é a CMB. Ela é uma das fontes mais ricas de informação sobre o universo primordial, dentre outras coisas. O valor de H_0 em (2.8) calculada por [1] foi obtido analisando a combinação de diversos dados, nos quais a CMB está inclusa (além de se assumir o modelo Λ CDM, o qual veremos a seguir). Este observável nos dá uma "fotografia" do universo primitivo, que mostra que após a recombinação, até o nível atual, o universo era extremamente homogêneo e isotrópico em grande aproximação, com desvios de isotropia de $\sim 10^{-5}$. Hoje o universo tem uma estrutura não linear bem desenvolvida. Essa estrutura assume a forma de galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias e, em escalas maiores, de regiões vazias e filamentos de galáxias.

Na próxima seção apresentaremos o atual modelo padrão da cosmologia. Ele será nosso ponto de partida sobre modelos viáveis para compreender a dinâmica do nosso universo.

2.2 Modelo Λ CDM

O modelo Λ CDM é o modelo cosmológico de maior sucesso atualmente, pois é aquele que melhor se ajusta com os dados disponíveis hoje. Ele é composto por uma constante cosmológica positiva Λ , matéria escura fria (*Cold Dark Matter*), matéria bariônica (matéria ordinária) sem pressão e radiação (fótons e neutrinos sem massa). Ele representa um aprimoramento da teoria do *big bang* ao postular que a dinâmica do universo é regida em sua maioria por uma componente chamada energia escura, simbolizada por Λ , e pela componente CDM. Como dito anteriormente, a CDM não interage eletromagneticamente e, por isso, não podem ser detectada de maneira direta. Este tipo de matéria foi inicialmente

proposta para explicar fenômenos locais, como as curvas de rotações de galáxias, no entanto, como veremos adiante, ela desempenha um papel muito importante nas perturbações da matéria bariônica afim de que as estruturas se formem, tal como se observa hoje. Em adição, a componente de energia escura é uma forma de energia que tem como principal característica uma forte pressão negativa responsável pela expansão acelerada tardia do nosso universo. [52, 53, 54, 25, 55].

O foco desta seção é mostrar a dinâmica, os resultados e os problemas deste modelo. Ele será nosso ponto de partida de teorias que tentam entender a evolução do nosso universo. Além disso, dentro dessa seção apresentaremos a geometria e o conteúdo material usados no escopo deste trabalho.

2.2.1 Cosmologia de Fundo

Quase todas as teorias cosmológicas partem da simples suposição do princípio cosmológico. Observações atuais fornecem motivações fortes de que, ao menos o universo visível obedece o princípio cosmológico. Podemos descrever esta homogeneidade e isotropia do universo do ponto de vista matemático, considerando um espaço-tempo espacialmente folheado com simetria máxima. No cenário de geometria diferencial as simetrias são descritas por vetores de Killing, tais vetores anulam a derivada de Lie do tensor métrico. Matematicamente, podemos argumentar que existem um número máximo de vetores de Killing para estas seções espaciais, de tal forma a obtermos um tensor métrico compatível com o princípio cosmológico (para mais detalhes ver [57] e complementar com [53, 25, 55]). O resultado é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [52, 53, 54, 25, 55]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.12)$$

sendo $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$. A coordenada de tempo usada aqui é chamada de tempo cósmico, enquanto as coordenadas espaciais são chamadas de coordenadas comóveis. A máxima simetria das fatias espaciais estão relacionadas com a coordenada t de cada fatia. A função $a(t)$ é o fator de escala definido anteriormente. O termo K descreve a curvatura das seções espaciais, e deve ser constante, uma vez que a condição de simetria máxima deve ser satisfeita. Destacamos que a geometria de fundo (aquela que obedece o *princípio cosmológico*) de todos os modelos apresentados neste trabalho será descrita por (2.12).

Estendendo um pouco mais a discussão feita aqui sobre (2.12), uma forma muito útil de escrevê-la é via o tempo conforme η , tal que

$$ad\eta = dt \rightarrow \eta - \eta_i = \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.13)$$

A linha indica dependência de t' , ao invés de t . Pela integração acima, o termo $c(\eta - \eta_i)$ representa a distância percorrida por um fóton entre os tempos η_i e η , ou t_i e t . Logo, em

termos de η , (2.12) fica

$$ds^2 = a^2(\eta) \left(-c^2 d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.14)$$

Note que o fator de escala torna-se um fator conforme, daí o nome atribuído a η . Perceba também que se $a(\eta)$ tem dimensão, então o termo $c\eta$ é adimensional. Por outro lado, se $a(\eta)$ for adimensional, η possui dimensão de tempo [55].

A dinâmica do modelo Λ CDM é bem sustentada pelas equações da RG. Não iremos entrar em detalhes de cálculos, mas caso o leitor esteja interessado veja, por exemplo, [25, 52, 53, 54, 55]. As equações deste modelo são derivadas a partir das equações de Einstein com constante cosmológica, que por sua vez são derivadas do princípio variacional da ação de Einstein-Hilbert acoplada com a ação da constante cosmológica e da ação de matéria

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int (R - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^4x + S_m[g, \Upsilon], \quad (2.15)$$

sendo $\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}$, S_m representa a ação de matéria com campos Υ . Temos também $R = g_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ o escalar de Ricci,² Λ a constante cosmológica e S_m a ação de matéria total do universo. A variação desta ação com relação ao tensor métrico fornece as equações de Einstein com constante cosmológica

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

sendo $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ o tensor de Einstein. A forma do tensor que representa o conteúdo material do universo, o tensor momento-energia,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.17)$$

Agora, a partir da invariância de difeomorfismo da ação de matéria S_m [59], podemos determinar

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\zeta S_m[g, \Upsilon] = \int \left(-T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \nabla^\mu \zeta^\nu + \frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} \delta_\zeta \Upsilon \right) d^4x \\ &= \int \left(\nabla^\mu T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \zeta^\nu + \frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} \delta_\zeta \Upsilon \right) d^4x, \end{aligned} \quad (2.18)$$

o termo δ_ζ representa uma mudança infinitesimal de coordenadas, dada por uma derivada de Lie ao longo do vetor ζ^ν [59], tal que em relação a métrica temos $\delta_\zeta g^{\mu\nu} = \nabla^\mu \zeta^\nu + \nabla^\nu \zeta^\mu$. Para o sistema representado pela ação (2.15), a variação da ação de matéria em relação aos campos de matéria é igual a zero, $\frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} = 0$. Portanto, o quadridivergente do tensor momento-energia satisfaz

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.19)$$

² A definições relacionadas a transporte paralelo (símbolo de Christoffel), tensor e escalar de curvatura estão fora do escopo desse texto, mas deixo ao leitor o que considero ótimas referências para compreender esse contexto geométrico de RG, [57, 58, 59, 60, 61].

Esta equação representa a conservação de $T_{\mu\nu}$ da matéria. Tal equação também pode ser determinada a partir das identidades Bianchi [57, 58, 59, 60, 61].

Em nosso trabalho consideramos que a ação de matéria está associada à ação de um fluido relativístico. Na dinâmica de fundo do universo, é natural considerar que o fluido cósmico é representado por um fluido perfeito [52, 53, 54, 25, 55]. Portanto, consideramos a seguinte ação que modela um fluido perfeito relativístico arbitrário [62]

$$S_{FP}[g_{\mu\nu}, U^\alpha, \rho, s, \eta_m, X] = \int \left[-\varepsilon(\rho, s) + \eta_1(c^2 + U^\alpha U_\alpha) + \eta_2 \nabla_\alpha(\rho U^\alpha) + \eta_3 U^\alpha \nabla_\alpha X + \eta_4 U^\alpha \nabla_\alpha s \right] \sqrt{-g} d^4x \quad (2.20)$$

A variáveis fundamentais desta ação são a métrica $g_{\mu\nu}$, a quadrivelocidade do fluido U^α , densidade de massa do fluido ρ , a entropia específica de repouso s , os multiplicadores de Lagrange associados as equações de vínculos do fluido e a variável X , denominada identidade da partícula, introduzida por [62], sendo relevante para a descrição de fluidos com fluxo rotacional. Podemos verificar diretamente que a variação desta ação com respeito a cada multiplicador de Lagrange fornece as equações de vínculo do fluido que são, respectivamente, a normalização da quadrivelocidade, equação de conservação de massa, a conservação de identidade da partícula e equação do movimento adiabático. A função $\varepsilon(\rho, s)$ representa a densidade de energia do fluido. Existem outras formulações de ação equivalente capazes de descrever um fluido perfeito arbitrário [63], mas a ação acima é adequada para aplicação apresentada na seção 4. Portanto, usando a equação (2.17) temos

$$T_{\alpha\beta} = 2\eta_1 \frac{U_\alpha U_\beta}{c^2} + g_{\alpha\beta}(-\rho U^\alpha \partial_\alpha \eta_2 - \varepsilon) \quad (2.21)$$

Em (2.21) consideramos alguns dos vínculos inferidos a partir da variação de (2.20) com relação aos seus respectivos multiplicadores de Lagrange, η_m . Agora, a variação da ação do fluido em relação aos campos de matéria ρ e U^α nos leva, respectivamente, as seguintes equações

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + U^\alpha \partial_\alpha \eta_2 = 0, \quad (2.22)$$

$$2\eta_1 U_\alpha - \rho \partial_\alpha \eta_2 = 0. \quad (2.23)$$

Agora, usando o vínculo $U^\alpha U_\alpha = -c^2$, podemos usar (2.22) e (2.23) em (2.21) e assim encontrar a forma do tensor momento-energia de um fluido perfeito (mais detalhes ver [62])

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + p) \frac{U_\alpha U_\beta}{c^2} + g_{\alpha\beta} p, \quad (2.24)$$

sendo $p \equiv \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon$ [62]. Considerando o sistema de referencia comóvel ao fluido, que define a parte espacial da quadrivelocidade seja $U^i = 0$, as componentes deste tensor são dadas por

$$T_{00} = \varepsilon(t), \quad T_{0i} = 0, \quad T_{ij} = g_{ij} p(t). \quad (2.25)$$

Assumimos que no fundo cosmológico ε depende somente de ρ .

2.2.1.1 Equações de Friedmann

Ao aplicar a métrica (2.12) nas equações (2.16), encontramos

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{3c^2}T_{00} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.26)$$

$$g_{ij} \left(H^2 + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{Kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 \right) = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{ij} \quad (2.27)$$

conhecidas como equações de Friedmann[52, 53, 54, 55].

Dada as componentes do tensor momento-energia de fluido perfeito (2.25), a equação de Friedmann torna-se

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (2.28)$$

enquanto que a equação da aceleração ficam

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.29)$$

Devemos notar que estas equações foram obtidas a partir da métrica (2.12) escrita no tempo cósmico t . Considerando a métrica de FLRW no tempo conforme (2.14), a equação de Friedmann fica

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}a^2\varepsilon + \frac{\Lambda c^2 a^2}{3} - Kc^2 \quad (2.30)$$

e a equação de aceleração fica

$$\frac{a''}{a} = \frac{4\pi G}{3c^2}a^2(\varepsilon - 3p) + \frac{2\Lambda c^2 a^2}{3} - Kc^2, \quad (2.31)$$

a linha “''” representa a derivação com relação ao tempo conforme η . Além disso, temos

$$\mathcal{H} \equiv \frac{a'}{a} \quad (2.32)$$

que é o parâmetro de Hubble conforme.

Devemos notar que as equações de Friedmann e da aceleração são escritas em termos da densidade de energia total e pressão total do fluido perfeito. Portanto, embora nosso universo em sua totalidade possa ser descrito unicamente pelo fluido perfeito, este conteúdo energético pode ser representado pela soma de diferente componentes do universo. Estes componentes são a radiação (que denotaremos pelo índice r), matéria bariônica sem pressão (que denotaremos pelo índice b), CDM (que denotaremos pelo índice c) e energia escura (que denotaremos pelo índice Λ). Mas, de forma geral, a densidade de energia total e a pressão total são escritas como

$$\varepsilon \equiv \sum_y \varepsilon_y, \quad p \equiv \sum_y p_y. \quad (2.33)$$

Em relação a constante cosmológica, podemos considerar sua contribuição como sendo na parte geométrica ou como sendo um componente de matéria que possui densidade de energia e pressão definidas como

$$\varepsilon_\Lambda \equiv \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}, \quad p_\Lambda \equiv -\varepsilon_\Lambda. \quad (2.34)$$

Devemos notar que, por definição, o fator de escala é positivo, mas sua derivada pode ser positiva ou negativa. A partir da equação de Friedmann (2.28) podemos verificar que nosso universo irá se expandir indefinidamente quando $K \leq 0$ e se houver um instante para o qual $\dot{a} > 0$. Nos casos em que $\dot{a} < 0$ temos um universo em contração.

Constante de Hubble

Na seção 2.1 já introduzimos o valor observacional da constante de Hubble, dada por

$$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Essa constante aparece quando o parâmetro de Hubble H é avaliado no tempo presente (t_0). Vimos que esta constante nos auxilia a determinar a idade aproximada de nosso universo, bem como a ordem de magnitude do tamanho do universo visível (Raio de Hubble). Mas o que significa este “tempo presente” que usamos para medir estas constantes? Referenciando a explicação de [55]: *o tempo flui, portanto, t_0 não pode ser uma constante! Isso é verdade, mas se compararmos um período de tempo de 100 anos (o período de algumas vidas humanas) com a idade do universo (cerca de 14 bilhões de anos), vemos que a proporção é de cerca de 10^{-8} ; como isso é muito pequeno, podemos considerar t_0 como uma constante, também referida como a idade do universo.* Portanto, podemos calcular este t_0 da seguinte forma[55]

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{da}{\dot{a}} = \int_0^1 \frac{da}{H(a)a} = \int_0^\infty \frac{dz}{H(z)(1+z)}. \quad (2.35)$$

lembrando que z é a medida de distância cosmológica definida em (2.1), o redshift. Para esta integração presumimos que $a(t=0) = 0$, ou seja, o *Big Bang*. Essa condição nem sempre é verdadeira, uma vez que existem modelos como o universo de Sitter, no qual o fator de escala desaparece somente quando $t \rightarrow -\infty$. O outro limite de integração, $a(t_0) = 1$, trata-se da normalização definida na seção 2.1. Em resumo, na cosmologia, quando uma quantidade tem subscrito 0, geralmente significa que ela é avaliada em $t = t_0$ [55].

Parâmetro de Desaceleração

A equação da aceleração (2.29), que contém o termo \ddot{a} , descreve como a expansão do universo está acelerando. Devemos notar que se o lado direito desta equação é positivo,

ou seja, $\varepsilon + 3p < 0$, portanto, $\ddot{a} > 0$. Na literatura defini-se um parâmetro, chamado *parâmetro de desaceleração*, com o qual medimos a entidade da aceleração. Ela é dada por [52, 53, 54, 55]

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (2.36)$$

A análise baseada em observações de supernovas tipo Ia em [14] e [15] mostraram que o valor do atual do parâmetro de desaceleração é negativo, ou seja, $q_0 < 0$, portanto, o universo está em um estado de expansão acelerada.

Densidade Crítica

Na seção 2.1 introduzimos o valor da densidade de massa média no universo hoje. A definição desta densidade crítica de massa pode ser determinada a partir da equação de Friedmann (2.28) tal que

$$\rho_{cr} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.37)$$

que ao avaliar no tempo presente t_0 encontramos o valor (2.11). Acontece que o valor presente da densidade total ρ_0 possui um valor muito próximo da densidade crítica avaliada hoje, indicando que nosso universo é espacialmente quase plano. Este surpreendente ajuste fino extremo do valor de K é conhecido como problema de planura. Uma possível solução é fornecida pela teoria inflacionária.

Parâmetros de Densidade

É muito comum e útil utilizar o chamado parâmetro de densidade Ω no lugar das densidades. Este parâmetro é definido pela equação

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G\varepsilon}{3H_0^2 c^2} = \sum_y \Omega_y, \quad (2.38)$$

ou seja, este parâmetro nada mais é do que a normalização da densidade total em relação a densidade crítica no tempo hoje. Logo, a equação de Friedmann (2.28) pode ser escrita como

$$1 = \sum_y \Omega_y + \Omega_K, \quad (2.39)$$

sendo

$$\Omega_K \equiv -\frac{Kc^2}{H_0^2 a^2}, \quad (2.40)$$

ou seja, associamos a curvatura espacial uma densidade de energia. Notamos que a soma de todos os parâmetros de densidade, incluindo a curvatura, é sempre igual à unidade.

A partir da equação (2.39) podemos ilustrar como a geometria do espaço-tempo está relacionada com a distribuição de matéria no universo. Reunindo todo o conteúdo material em um único parâmetro de densidade Ω , é possível relacionar a distribuição da matéria com a curvatura do espaço,

$$\Omega - 1 = \frac{Kc^2}{H_0^2 a^2}, \quad (2.41)$$

desta forma a geometria do espaço-tempo pode assumir três formas: $\Omega > 1$ que indica *espaço-tempo fechado (esférico)*; $\Omega < 1$ que indica *espaço-tempo aberto (hiperbólico)*, $\Omega = 1$ que indica *espaço-tempo plano*. Em particular, se descobrir que $\Omega \simeq 1$, isso implica que $\Omega_K \simeq 0$, ou seja, nosso universo de fato é espacialmente plano.

A partir dos resultados de [1], sabemos que

$$\Omega_{K0} = 0.0007 \pm 0.0037, \quad (2.42)$$

ou seja, os dados atuais ainda indicam que o universo é espacialmente aplanado.

Portanto, com a definição do parâmetro de densidade Ω , podemos escrever a equação de Friedmann (2.28) como

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_y \Omega_{y0} f_y(a) + \frac{\Omega_{K0}}{a^2}, \quad (2.43)$$

a função $f_y(a)$ fornece a dependência de cada componente material y com o fator de escala a , de maneira que $f_y(a_0 = 1) = 1$. Logo,

$$\sum_y \Omega_{y0} + \Omega_{K0} = 1. \quad (2.44)$$

Esta equação é conhecida como relação de fechamento [52, 53, 54, 55].

A Equação de Conservação de $T_{\mu\nu}$

Agora, vamos ver como fica a conservação do tensor momento-energia (2.19), dado conteúdo material como fluido perfeito e considerando a métrica (2.12). Para $\mu = 0$ em (2.19), obtemos

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p) = 0, \quad (2.45)$$

que chamamos de equação de continuidade relativística do fluido [57, 58, 59, 60, 61]. Se assumirmos uma equação de estado de fluido barotrópico ($P = P(\varepsilon)$) especificamente da forma $P = w\varepsilon$, sendo w o parâmetro de equação de estado, e possui valor constante, a equação de continuidade tem como solução analítica geral

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3(1+w)}, \quad (2.46)$$

sendo $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(a_0 = 1)$.

Em relação as componentes do fluido, cada uma terá sua própria equação (2.45)

$$\dot{\varepsilon}_y + 3H(\varepsilon_y + p_y) = 0, \quad (2.47)$$

e seu parâmetro de equação de estado correspondente. Vejamos os seguintes casos

Matéria Relativística: Neste caso temos $w = 1/3$, tal que $p = \frac{\varepsilon}{3}$. Na literatura este caso também é conhecido como matéria quente. A solução correspondente de (2.46) para este caso fica $\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-4}$. O adjetivo “quente” refere-se ao fato de que as partículas que compõem esse tipo de matéria são relativísticas. Por esse fato, elas também são conhecidas como radiação e abrangem não apenas as partículas elementares relativísticas conhecidas, mas possivelmente as desconhecidas (ou seja, matéria escura quente).

Matéria Não Relativística: Neste caso temos $w = 0$, tal que $p = 0$. Na literatura este caso também é conhecido como matéria fria ou também como poeira. A solução correspondente de (2.46) para este caso fica $\varepsilon = \varepsilon_0 a^{-3}$. O adjetivo “fria” refere-se ao fato de que as partículas que compõem este tipo de matéria possuem uma energia cinética muito menor do que a energia de massa, ou seja, não são relativísticas. Este tipo de matéria abrange todas as partículas elementares não relativísticas. Aquelas que interagem eletromagneticamente, ou seja, partículas que compõem sistemas físicos conhecidos, a matéria bariônica (bárions). Caso existam partículas não relativísticas desconhecidas, que não interagem eletromagneticamente com a matéria ordinária, elas compõem a CDM. Do ponto de vista matemático, as equação da dinâmica de fundo dos bárions e da CDM são equivalentes, isto significa que na dinâmica de fundo cosmológico é impossível distinguir essas duas componentes. Neste sentido, na análise observacional com dados de fundo cosmológico (por exemplo, dados de supernovas do tipo Ia), convenientemente combina-se essas duas componentes a fim de forma uma única componente de matéria total (denotada pelo índice m). A distinção entre bárions e material escura fria se dá no nível perturbativo. No universo primordial a matéria bariônica está acoplada na primeira ordem com a radiação enquanto as perturbações da CDM crescem livremente. Após o desacoplamento, os bárions caem nos poços de potenciais de matéria escura e por este fato seu crescimento se dá de maneira mais rápida.

Energia Com Pressão Negativa: Neste caso temos $w = -1$, tal que $p = -\varepsilon$. Ela se comporta como uma constante cosmológica (como contribuição de fluido) e fornece a melhor (e a mais simples) descrição que temos para a energia escura. Este valor de w corresponde a equação de estado constante do tipo vácuo. A densidade de energia é dada por $\varepsilon_\Lambda = \text{const}$. Essa associação com o vácuo é uma tentativa de associar

a energia escura à energia quântica do vácuo. No entanto, no caso da constante cosmológica, a densidade de energia observada destoa muito das previsões da teoria quântica de campos. Há ainda um caso mais geral no qual a constante cosmológica é negligenciada e a energia escura é descrita por um fluido cujo parâmetro de estado é constante, mas não necessariamente igual ao do vácuo. Para tal, é necessário que $w < -\frac{1}{3}$ para que o fluido origine uma expansão acelerada. Neste caso, a densidade de energia é dado puramente por (2.46).

Para mais detalhes o leitor pode consultar [52, 53, 54, 55] e suas referências.

O modelo Λ CDM

No início desta seção descrevemos resumidamente o que seria o modelo Λ CDM, também conhecido como modelo padrão da cosmologia. Lembremos que a composição desse modelo é dada pela constante Λ , CDM, bárions, fótons e neutrinos sem massa. Desta maneira, a equação de Friedmann para este modelo é dada por [52, 53, 54, 55]

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_\Lambda + \frac{\Omega_{c0}}{a^3} + \frac{\Omega_{b0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{K0}}{a^2}. \quad (2.48)$$

Baseado nos resultados de [1] já identificamos a contribuição da curvatura espacial Ω_{K0} , indicando que nosso universo é espacialmente quase plano (a partir daqui assumimos apenas o caso em que $K = 0$). Na mesma referência, encontramos o valor da contribuição da constante cosmológica, CDM e bárions, que são dadas por

$$\Omega_\Lambda = 0.6897 \pm 0.0057, \quad (2.49)$$

$$\Omega_{b0}h^2 = 0.02234 \pm 0.00014, \quad (2.50)$$

$$\Omega_{c0}h^2 = 0.11907 \pm 0.00094. \quad (2.51)$$

No fundo cosmológico a dinâmica de bárions e CDM é a mesma para este modelo, portanto podemos escrever $\Omega_{m0} = \Omega_{c0} + \Omega_{b0}$, tal que [1]

$$\Omega_{m0} = 0.3103 \pm 0.0057. \quad (2.52)$$

com 68% de nível de confiança. O conteúdo de radiação representado por fótons e neutrinos pode ser calculado via temperatura da CMB [52, 53, 54, 55], seus valores giram em torno de

$$\Omega_{\gamma 0}h^2 \approx 2.47 \times 10^{-5}, \quad (2.53)$$

$$\Omega_{n0}h^2 \approx 1.71 \times 10^{-5}, \quad (2.54)$$

o índice γ representa os fótons, enquanto que o índice n representa os neutrinos.

Portanto, dado (2.44) e $h = 0.68$, vemos, de acordo com os resultados deste modelo, que a quantidade de energia escura corresponde a 69% do conteúdo material do nosso

universo, seguido por 26% de CDM, 5% de bárions. O conteúdo de fótons e neutrinos é desprezível hoje. Notamos que a maior parte do conteúdo energético do universo é composto por algo ainda não completamente compreendido.

Baseado nesses resultados podemos calcular a idade do universo para o modelo Λ CDM. A partir da equação (2.35) temos

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 da \frac{a}{\sqrt{\Omega_\Lambda a^4 + \Omega_{m0} a + \Omega_{r0} + \Omega_{K0} a^2}} = \frac{0.95}{H_0} = 13.73 \text{ Giga anos.} \quad (2.55)$$

O valor encontrado por [1] é dado por 13.787 ± 0.020 Giga anos.

2.2.1.2 Soluções das Equações de Friedmann

De acordo com o modelo Λ CDM, após o período inflacionário, o universo teve uma fase dominada pela radiação (fótons e neutrinos), seguida por uma fase de dominação pela matéria (bárions e CDM) até atingir uma fase atual na qual a energia escura (Λ) predomina. A partir da equação de Friedmann (2.28), com $\Omega_K \simeq 0$, e da equação de continuidade relativística (2.45) podemos determinar analiticamente como o fator de escala e a densidade de energia, para cada umas dessas fases, evoluem com o tempo [52, 53, 54, 55].

Universo Dominado Pela Radiação

Nesta fase temos $\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} a^{-4}$ e $\Lambda = 0$, logo, o fator de escala no tempo cósmico evolui como

$$a \propto \sqrt{t}. \quad (2.56)$$

Neste cenário o parâmetro de desaceleração é positivo, $q_0 = 1$, ou seja, o universo estaria numa fase de expansão desacelerada.

Universo Dominado Pela Matéria

Neste caso o universo é composto apenas de matéria e isto inclui matéria bariônica e CDM uma vez que ambas possuem a mesma dinâmica de fundo. Esta fase também conhecida na literatura como universo de Einstein-de Sitter. Nesta fase temos $\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} a^{-3}$ e $\Lambda = 0$, logo, o fator de escala no tempo cósmico evolui como

$$a \propto t^{2/3}. \quad (2.57)$$

Novamente, o parâmetro de desaceleração é positivo, $q_0 = 1/2$, ou seja, o universo estaria numa fase de expansão desacelerada.

Universo Dominado Pela Energia Escura

Neste sistema lidamos com um universo preenchido apenas por energia escura do tipo vácuo representada pela constante cosmológica Λ . Este modelo é chamado na

literatura de modelo de de-Sitter. Aqui, o fluido possui uma densidade de energia constante, $\varepsilon_\Lambda = \text{const.}$ Logo, o fator de escala evolui exponencialmente com o tempo

$$a(t) \propto e^{\Lambda t}. \quad (2.58)$$

Para o sistema em questão o parâmetro de desaceleração tem o valor $q_0 = -1$, ou seja, o universo estaria em expansão acelerada.

2.2.1.3 Medidas de Distância

Agora, iremos apresentar medidas de distância que são empregadas na cosmologia. Essas medidas são importantes quando queremos compreender como a luz, da radiação que chega até nós, se propaga e como medir distâncias num universo em expansão (veja [64] e também [52, 53, 54, 55]).

Distância Própria

Em um universo homogêneo e isotrópico, a trajetória da luz ao longo da coordenada radial r satisfaz a equação da geodésica $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0$, ou seja, a não deve possuir variação angular. Neste sentido, definimos a distância própria como o comprimento espacial da geodésica percorrida. A equação que descreve a distância própria é dada pela integração

$$d_p(t_0) \equiv r = \int_0^r dr' = \int_{t_i}^{t_0} \frac{c}{a(t')} dt'. \quad (2.59)$$

A partir da (2.1) temos $dt = -dz/[H(1+z)]$, portanto, podemos escrever a distância própria em termos do parâmetro de Hubble e do *redshift* como

$$d_p = \int_0^z \frac{c}{H(z')} dz'. \quad (2.60)$$

Distância de Diâmetro Angular

Podemos definir a distância de diâmetro angular para objetos com comprimento transversal já conhecido. Estes objetos recebem o nome de réguas padrão. Essa distância é definida pela seguinte equação

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta \theta}, \quad (2.61)$$

sendo Δx o tamanho transversal de um objeto conhecido e $\Delta \theta$ o ângulo definido em relação ao observador. Estas distâncias transversais referem-se à distância própria entre as extremidades da régua padrão no tempo t , medida por um observador em t_0 , e também são muito menores que a distância percorrida pela luz até o observador.

Dada métrica (2.12) para um Universo espacialmente plano, a razão entre um deslocamento transversal infinitesimal e o respectivo deslocamento angular, em um tempo fixo t , é dada por

$$d_A = \frac{ds}{d\theta} = a(t)r, \quad (2.62)$$

devemos nota que mudanças na variável radial r e na variável angular ϕ são nulas. A variável radial r indica a distância percorrida pela luz até o observador. Em um universo espacialmente plano, essa distância r coincide com a distância própria (2.59), desta maneira

$$d_A = \frac{d_p}{1+z}. \quad (2.63)$$

Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade é uma forma indireta de medir distâncias através de fontes de luz cuja luminosidade é conhecida. Tais objetos, como supernovas tipo Ia, são denominados de velas padrão. A equação que define a distância de luminosidade é dada por

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}, \quad (2.64)$$

sendo L a luminosidade intrínseca do objeto ao qual desejamos medir a distância, e f o fluxo de luz emitida por esse objeto que atinge o observador.

De forma geral, as fontes luminosas possuem dimensões desprezíveis em comparação à distância percorrida pela luz até o observador. Isto significa que podemos considerar tais fontes de luz como um ponto. Desta maneira, em um universo espacialmente plano, a luz deve se propagar com simetria esférica, de modo que

$$f = \frac{E_0}{\Delta t_0 A_0}, \quad (2.65)$$

sendo $A_0 = 4\pi r^2$ a área da superfície em que a radiação é espalhada, E_0 a energia do fóton que chega ao observador e Δt_0 é o intervalo de tempo entre o recebimento de dois fótons.

A energia dos fótons observada não é mesma da emitida, devido o *redshift*, ou seja,

$$\frac{E_0}{E} = \frac{1}{1+z}, \quad (2.66)$$

Finalmente, o intervalo de tempo calculado na fonte, Δt , também é diferente daquele calculado no local do observador, ou seja,

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (2.67)$$

Esta ultima relação pode ser facilmente obtida pela métrica (2.12) com $ds^2 = 0$, isto é, $cdt = a(t)dr$ (em um universo homogêneo e isotrópico) e, claro, considerando que Δt e Δt_0

são variações infinitesimais de tempo. Considerando o mesmo dr na fonte e no observador, temos, $cdt = a(t)dr$ e $cdt_0 = dr$, dividindo essas duas equações chegamos em (2.67).

Portanto, dado (2.67) o fluxo que chega ao observador pode ser escrito como

$$f = \frac{L}{4\pi r^2(1+z)^2}, \quad (2.68)$$

tal que $L = \frac{E}{\Delta t}$. Novamente, em um universo homogêneo e isotrópico, a variável r é identificada como a distância própria percorrida pela luz emitida por uma fonte até o observador. Logo, a distância de luminosidade é escrita como

$$d_L = (1+z)d_p, \quad (2.69)$$

ou, em termos da distância de diâmetro angular

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (2.70)$$

2.2.2 Cosmologia Linear

Como já vimos no início neste capítulo, o princípio cosmológico estabelece que nosso universo é homogêneo e isotrópico em grandes distâncias. As inomogeneidades começam a ficar evidentes ao investigarmos como as estruturas (galáxias e seus aglomerados) se formam. Acredita-se que a origem de tais estruturas advêm da evolução de flutuações quânticas no universo inflacionário.

No contexto do modelo Λ CDM conseguimos explicar, de certa forma, a origem dessas inomogeneidades considerando perturbações no campo escalar *inflaton* que decaem em matéria no momento do reaquecimento. A partir da recombinação tais inomogeneidades são descritas por pequenos desvios na métrica do fundo cosmológico da ordem de 10^{-5} . Desta forma, percebemos que as quantidades dinamicamente relevantes devem ser escritas como a soma da contribuição do fundo homogêneo e isotrópico e da contribuição dessas inomogeneidades. Os dados da CMB (seção 2.3.4) para essa época reforçam a atribuição de uma teoria perturbativa na primeira ordem para essas inomogeneidades.

Neste seção, faremos uma breve descrição do processo de formação de estruturas no cenário de Λ CDM, considerando perturbações na métrica espacialmente plano de FLRW. O texto dessa seção segue a referência [55], mas outras referências importantes sobre o assunto são [65, 66, 52, 53, 67, 68, 54].³ Também, a partir daqui, adotamos unidades naturais $\hbar = c = 1$.

³ Não entraremos em detalhes com a álgebra, mas o leitor pode consultar as referências mencionadas para visualizar a forma linear do símbolo de Christoffel, do tensor e do escalar de curvatura.

2.2.2.1 Perturbações na Métrica de FLRW e o Tensor de Einstein Linearizado

A métrica que descreve a soma da contribuição do fundo homogêneo e isotrópico e da contribuição das inhomogeneidades geralmente é chamada de métrica perturbada. O termo “perturbada” está relacionado a esses pequenos desvios do fundo cosmológico.

A métrica de FLRW, escrita no tempo conforme, que descreve o espaço-tempo de fundo (ou a *variedade*), espacialmente plano, é dada por

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 \left(-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (2.71)$$

Entretanto, agora nosso espaço-tempo físico real será uma variedade diferente, descrita pela métrica $g_{\mu\nu}$, que soma as contribuições de fundo cosmológico (representado agora por $\bar{g}_{\mu\nu}$) com as perturbações. Portanto, definimos

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x). \quad (2.72)$$

Escrever essa diferença em um certa coordenada x do espaço-tempo é uma afirmação mal formulada, pois as métricas $g_{\mu\nu}$ e $\bar{g}_{\mu\nu}$ são definidas em variedades diferentes, enquanto que a coordenada x é uma definida por referenciais diferentes. Esta diferença continuaria sendo uma operação mal definida mesmo se uníssemos essas duas *variedades* para forma somente uma. Neste sentido, para que (2.72) tenha significado, precisamos definir um mapa que identifique os pontos da variedade do fundo com os pontos da variedade física. Este mapa é arbitrário e nos permite usar um sistema de coordenadas fixo (um referencial específico) na variedade de fundo e também para pontos na variedade física. Chamamos este mapa de calibre. Portanto, isto nos permite usar ainda o tempo conforme (ou cósmico) junto com as coordenadas espaciais comóveis, ao descrever quantidades perturbativas. Essa propriedade nos leva ao que denominamos *problema de calibre*, que veremos na seção 2.2.2.3 [69, 70].

Em geral, a métrica da variedade física possui 10 componente independentes. Em um calibre genérico, a métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser escrita da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -[1 + 2\Psi(\eta, \mathbf{x})] & \omega_i(\eta, \mathbf{x}) \\ \omega_i(\eta, \mathbf{x}) & \delta_{ij}[1 - 2\Phi(\eta, \mathbf{x})] + \chi_{ij}(\eta, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \delta^{ij} \chi_{ij} = 0 \quad (2.73)$$

sendo $\Psi = \Psi(\eta, \mathbf{x})$, $\Phi = \Phi(\eta, \mathbf{x})$, $w_i = w_i(\eta, \mathbf{x})$ e $\chi_{ij} = \chi_{ij}(\eta, \mathbf{x})$ (com $i, j = 1, 2, 3$), ou seja, funções das coordenadas do espaço-tempo de fundo x^μ , que aqui consideramos como sendo tempo conforme η e as coordenadas espaciais comóveis.

A liberdade de usar um calibre nos permite escolher um sistema de coordenadas na variedade de fundo homogêneo e isotrópico. Portanto, poderíamos usar qualquer parametrização de tempo (que aqui escolhemos com o tempo conforme,⁴) enquanto que, para as coordenadas espaciais, devemos sempre escolher o sistema comóvel, para as quais,

⁴ O tempo conforme tem importante significado físico para horizonte de partícula comóvel (ver [67, 52, 53, 68, 54, 55])

em qualquer tempo (determinado e fixo), a métrica espacial de fundo é euclidiana, ou seja, $\delta_{ij}dx^i dx^j$. Por esse motivo, podemos considerar as perturbações em (2.73) como vetores espaciais usuais, definidos a partir do grupo de rotação $SO(3)$. De maneira formal, considere a seguinte transformação de coordenadas

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^i_j \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

sendo R^i_j uma matriz de rotação. Por definição, a transposta da matriz de rotação é igual a sua inversa, ou seja, a matriz de rotação é caracterizada pela relação $R^T R = I$. Consequentemente temos $\delta_{kl}R^k_i R^l_j = \delta_{ij}$. Portanto, podemos aplicar essa transformação nas componentes da métrica (2.73) de forma a obter⁵

$$\Psi' = \Psi, \quad \omega'_i = R^k_i \omega_k, \quad \Phi' = \Phi, \quad \chi'_{ij} = R^k_i R^l_j \chi_{kl} \quad (2.75)$$

Logo, esta transformação indica que Ψ e Φ são escalares, w_i (com $i = 1, 2, 3$) é um vetor espacial, χ_{ij} é um tensor espacial (com $i, j = 1, 2, 3$). Note que a partir da igualdade $\delta^{ij}\chi_{ij} = 0$ em (2.73), 6 componentes de χ_{ij} não são independentes, ou seja, χ_{ij} não tem traço. Também, já colocamos em evidência o traço espacial da métrica através de Φ . Também, fazemos isto pelo fato da curvatura espacial intrínseca depender apenas de Φ e não de χ_{ij} .

Agora, se o calibre escolhido na métrica (2.73) é tal que $|\bar{g}_{\mu\nu}| \gg |\delta g_{\mu\nu}|$, isto indica que $\delta g_{\mu\nu}$ representa as perturbações (os desvios da homogeneidade e isotropia). Como já afirmamos anteriormente, essas perturbações são pequenas, ou lineares, ou de primeira ordem, se desprezarmos potências da perturbação com expoente maior do que um em suas quantidades e em suas derivadas. Além disso, as combinações entre diferentes perturbações também são negligenciadas. Combinações como, Ψ^2 , Φw_i , $w_i \chi_{ij}$, $\Phi \frac{\partial}{\partial \eta} \Phi$ e assim por diante são todas perturbações de segunda ordem, logo, são desprezíveis.

Em um cenário de perturbações cosmológicas escrevemos a métrica total, no tempo conforme, como

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (2.76)$$

o fundo cosmológico é dado por

$$\bar{g}_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu} \quad (2.77)$$

sendo $\eta_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo de Minkowski. As perturbações cosmológicas são representadas pelo tensor $h_{\mu\nu}$.

Portanto, a métrica contravariante perturbada é

$$\delta g^{00} = -\frac{1}{a^2} h_{00} \quad \delta g^{0i} = -\frac{1}{a^2} \delta^{il} h_{0l} = \frac{1}{a^2} h_{0i}, \quad \delta g^{ij} = -\frac{1}{a^2} \delta^{il} h_{lm} \delta^{mj} = -\frac{1}{a^2} h_{ij}. \quad (2.78)$$

Aqui usamos a propriedade $h^{ij} = h_{ij}$. Sendo $\delta g^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} \bar{g}^{\nu\sigma}$.

⁵ Nestas equações a linha “'” indica que o campo é medido em outro referencial, não confunda com a derivada no tempo conforme.

Tensor de Einstein Linearizado

Agora, vamos decompor o tensor de Einstein da mesma forma que decompos a métrica (2.72). Para isto, vamos trabalhar com índices mistos, logo,

$$G_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\rho} R_{\rho\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = \bar{g}^{\mu\rho} \bar{R}_{\rho\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \bar{R} + \bar{g}^{\mu\rho} \delta R_{\rho\nu} + \delta g^{\mu\rho} \bar{R}_{\rho\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \delta R, \quad (2.79)$$

sendo $\bar{G}_{\nu}^{\mu} = \bar{R}_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \bar{R}$ o tensor de Einstein de fundo, que depende somente da métrica de fundo (homogênea e isotrópica, no tempo conforme) $\bar{g}_{\mu\nu}$. O tensor de Einstein linearmente perturbado, que depende de $\bar{g}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$, é dado por

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \bar{g}^{\mu\rho} \delta R_{\rho\nu} + \delta g^{\mu\rho} \bar{R}_{\rho\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} \delta R. \quad (2.80)$$

Desta maneira, os componentes mistos do tensor de Einstein perturbado são dados por (lembrando que os detalhes de álgebra podem ser encontrados em [67, 52, 53, 68, 54, 55])

$$2a^2 \delta G_0^0 = -6\mathcal{H}^2 h_{00} + 4\mathcal{H} h_{k0,k} - 2\mathcal{H} h'_{kk} + \nabla^2 h_{kk} - h_{kl,kl}, \quad (2.81)$$

$$2a^2 \delta G_i^0 = 2\mathcal{H} h_{00,i} + \nabla^2 h_{0i} - h_{k0,ki} + h'_{kk,i} - h'_{ki,k}, \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} 2a^2 \delta G_j^i = & \left[-4 \frac{a''}{a} h_{00} - 2\mathcal{H} h'_{00} - \nabla^2 h_{00} + 2\mathcal{H}^2 h_{00} - 2\mathcal{H} h'_{kk} + \nabla^2 h_{kk} \right. \\ & \left. - h_{kl,kl} + 2h'_{k0,k} + 4\mathcal{H} h_{k0,k} - h''_{kk} \right] \delta_j^i + h_{00,ij} - \nabla^2 h_{ij} + h_{ki,kj} \\ & + h_{kj,ki} - h_{kk,ij} + h''_{ij} + 2\mathcal{H} h'_{ij} - (h'_{0i,j} + h'_{0j,i}) - 2\mathcal{H} (h_{0i,j} + h_{0j,i}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

sendo $\nabla^2 \equiv \delta^{ij} \partial_i \partial_j$.

Agora, vamos analisar o tensor momento-energia.

2.2.2.2 Perturbação do Tensor de Momento-Energia

Vamos começar essa subseção escrevendo o tensor momento-energia do fundo cosmológico

$$\bar{T}_{\alpha\beta} = (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) \bar{U}_{\alpha} \bar{U}_{\beta} + \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{p}. \quad (2.84)$$

Ele é o tensor que descreve um fluido sem dissipação (entropia constante ao longo do fluxo). A densidade de energia do fluido corresponde a projeção do tensor de momento-energia ao longo da quadrivelocidade do fluido e a pressão é a projeção de $T_{\alpha\beta}$ a uma hipersuperfície tridimensional ortogonal à U^{α} , isto é,

$$\bar{\varepsilon} = \bar{T}_{\alpha\beta} \bar{U}^{\alpha} \bar{U}^{\beta}, \quad 3\bar{p} = \bar{T}_{\alpha\beta} \bar{\theta}^{\alpha\beta}, \quad \bar{T} \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{T}_{\alpha\beta} = -\bar{\varepsilon} + 3\bar{p}, \quad (2.85)$$

sendo $\bar{\theta}^{\alpha\beta} \equiv \bar{g}^{\alpha\beta} + \bar{U}^{\alpha} \bar{U}^{\beta}$. Este tensor atua como um projetor sobre hipersuperfície ortogonal à quadrivelocidade.

Agora, considerando perturbações no fluido, em nosso trabalho vamos usar a seguinte forma para o tensor de momento-energia com perturbações

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + p)U_\alpha U_\beta + p g_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta}. \quad (2.86)$$

A nova componente $\pi_{\alpha\beta}$ é a tensão anisotrópica do fluido. Ela é uma quantidade que contribui somente no nível linear. Não possui traço e satisfaz $\pi_{\alpha\beta}U^\alpha = 0$, logo, fornece 5 componentes independentes. Outras formas de dissipação podem ser incluídas em (2.86), mas consideremos em nosso trabalho somente a contribuição da tensão anisotrópica do fluido (na referência [71] encontramos mais detalhes sobre os processos dissipativos). A tensão anisotrópica não está necessariamente relacionada à viscosidade, mas ela pode existir para espécies relativísticas tais como fótons e neutrinos devido aos seus momentos de quadrupolo relacionadas com suas distribuições (veja para mais [67, 52, 53, 68, 54, 55]). Portanto, nosso tensor momento-energia é composto pela soma

$$T_{\alpha\beta} = \bar{T}_{\alpha\beta}(\eta) + \delta T_{\alpha\beta}(\eta, \mathbf{x}). \quad (2.87)$$

Suas componentes são escritas da mesma forma

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon(\eta, \mathbf{x}), \quad p = \bar{p} + \delta p(\eta, \mathbf{x}), \quad U^\alpha = \bar{U}^\alpha + \delta U^\alpha(\eta, \mathbf{x}), \quad (2.88)$$

Lembre que a quantidade de fundo do tensor momento-energia (representada pela barra) é um fluido perfeito. Assim, podemos escrever nosso tensor momento-energia como

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} = & \bar{T}_{\alpha\beta} + \delta\varepsilon\bar{U}_\alpha\bar{U}_\beta + \bar{\varepsilon}\delta U_\alpha\bar{U}_\beta + \bar{\varepsilon}\bar{U}_\alpha\delta U_\beta \\ & + (\bar{g}_{\alpha\beta} + \bar{U}_\alpha\bar{U}_\beta)\delta p + \bar{p}(\delta g_{\alpha\beta} + \delta U_\alpha\bar{U}_\beta + \bar{U}_\alpha\delta U_\beta) + \pi_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

Agora, sabendo que a quadrivelocidade de fundo satisfaz a normalização

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\bar{U}^\alpha\bar{U}^\beta = -1. \quad (2.90)$$

em um referencial comóvel ($\bar{U}^i = 0$) temos $\bar{U}^0 = 1/a$ e $\bar{U}_0 = -a$. Quando escolhemos esse referencial, a relação $\pi_{\alpha\beta}U^\alpha = 0$ implica em $\pi_{\alpha 0} = 0$, ou seja, a tensão anisotrópica possui apenas componentes espaciais.

Portanto, as componentes do tensor momento-energia (2.89) são dadas por

$$T_{00} = \bar{\varepsilon}(1 + \delta)a^2 - 2a(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\delta U_0 + \bar{p}\delta g_{00}, \quad (2.91)$$

$$T_{0i} = -a(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\delta U_i + \bar{p}\delta g_{0i}, \quad (2.92)$$

$$T_{ij} = (\bar{p} + \delta p)a^2\delta_{ij} + \bar{p}\delta g_{ij} + \pi_{ij}, \quad (2.93)$$

na equação (2.91) introduzimos a quantidade denominada contraste de densidade, definida como

$$\delta \equiv \frac{\delta\varepsilon}{\bar{\varepsilon}}. \quad (2.94)$$

Esta quantidade é muito importante pois quantifica o processo de formação de estruturas. Devemos notar também como as componentes de perturbações nas quadravelocidades dão origem a misturas de componentes do espaço-tempo no tensor momento-energia, ou seja, a quebra de homogeneidade e isotropia permite fluxos extras além do fluxo de Hubble.

A quadravelocidade total também satisfaz uma relação de normalização, em relação à métrica total,

$$g_{\alpha\beta}U^\alpha U^\beta = -1. \quad (2.95)$$

Se usarmos a expansão até a primeira ordem, a equação (2.90) e $\bar{U}^i = 0$, podemos relacionar a perturbação da métrica h_{00} com δU^0 da seguinte maneira

$$\delta U^0 = \frac{h_{00}}{2a}. \quad (2.96)$$

Devemos tomar cuidado ao calcular as componentes covariantes das perturbações da quadravelocidade δU_α , pois determiná-las não é simplesmente fazer $\delta U_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}\delta U^\beta$. Para isto, definimos

$$\delta U_i = av_i \quad (2.97)$$

sendo v_i as componentes de um vetor tridimensional, tal que, seu índice é levantado por δ^{ij} de modo que $v^i = v_i$. Portanto, a partir destas equações e usando também $\bar{U}_\alpha + \delta U_\alpha = g_{\alpha\beta}U^\beta$, temos

$$\delta U_\alpha = \bar{g}_{\alpha\beta}\delta U^\beta + \delta g_{\alpha\beta}\bar{U}^\beta \quad \text{e} \quad \delta U^\alpha = \bar{g}^{\alpha\beta}\delta U_\beta - g^{\alpha\nu}\delta g_{\nu\beta}\bar{U}^\beta \quad (2.98)$$

Portanto, note que existe um termo extra, $\delta g_{\alpha\beta}\bar{U}^\beta$, quando queremos encontrar δU^α de δU_β e vice-versa. Isso vem do fato de que $\bar{g}_{\alpha\beta}$ levanta e baixa os índices apenas das quantidades de fundo, enquanto $g_{\alpha\beta}$ atua nos índices apenas das quantidades totais, e δU^α não é nenhum dos dois. Logo, de (2.98) temos

$$\delta U_0 = \frac{h_{00}a}{2}, \quad a\delta U^i = v_i - 1h_{i0} \quad (2.99)$$

Assim, podemos reescrever as componentes do tensor momento-energia da seguinte forma

$$T_{00} = \bar{\varepsilon}(1 + \delta)a^2 - \bar{\varepsilon}a^2h_{00}, \quad (2.100)$$

$$T_{0i} = -a^2(\bar{\varepsilon} + \bar{p})v_i + \bar{p}a^2h_{0i}, \quad (2.101)$$

$$T_{ij} = (\bar{p} + \delta p)a^2\delta_{ij} + \bar{p}a^2h_{ij} + \pi_{ij}, \quad (2.102)$$

Podemos usar a relação padrão

$$T_\beta^\alpha = g^{\alpha\nu}T_{\nu\beta} = \bar{g}^{\alpha\nu}T_{\nu\beta} + \bar{g}^{\alpha\nu}\delta T_{\nu\beta} + \delta g^{\alpha\nu}\bar{T}_{\nu\beta}. \quad (2.103)$$

e encontrar as componentes mistas do tensor momento-energia

$$T_0^0 = -\bar{\varepsilon}(1 + \delta), \quad (2.104)$$

$$T_i^0 = (\bar{\varepsilon} + \bar{p})v_i, \quad (2.105)$$

$$T_0^i = -(\bar{\varepsilon} + \bar{p})(v_i - h_{0i}), \quad (2.106)$$

$$T_j^i = \delta_j^i(\bar{p} + \delta p) + \pi_j^i. \quad (2.107)$$

Assim, podemos determinar as perturbações das componentes de T_β^α (para mais detalhes ver [55]) como sendo

$$\delta T^0_0 = -\delta\varepsilon, \quad (2.108)$$

$$\delta T^0_i = (\bar{\varepsilon} + \bar{p})v_i \quad \text{e} \quad \delta T^i_0 = -(\bar{\varepsilon} + \bar{p})v_i \quad (2.109)$$

$$\delta T^i_j = \delta^i_j \delta p + \pi^i_j, \quad (2.110)$$

note que assumimos $h_{0i} = 0$ [55]. Podemos definir a perturbação da pressão como a parte do traço

$$\delta p = \frac{1}{3} \delta^{ij} \delta T_{ij} \quad (2.111)$$

e a tensão anisotrópica como a parte sem traço

$$\pi_j^i = \delta T_j^i - \frac{1}{3} \delta_j^i \delta^{lm} \delta T_{lm} \quad (2.112)$$

Determinamos as equações de evolução das perturbações a partir das equações de Einstein linearizadas

$$\delta G_\beta^\alpha = 8\pi G \delta T_\beta^\alpha. \quad (2.113)$$

Esta equação junto com equação linearizada do divergente do tensor momento-energia (que veremos mais a frente) descrevem o comportamento da matéria e das quantidades métricas se os componentes do fluido forem mais de um.⁶ O comportamento da matéria pode também ser entendido por meio do uso das equações de Boltzmann linearizadas (ver [55]).

2.2.2.3 O Problema do Calibre e as Transformações de Calibre

Um calibre nada mais é do que um mapa entre os pontos da variedade física e os pontos do fundo que nos permite definir a diferença entre os tensores definidos nas duas variedades. Supomos mudança de calibre \mathcal{G} para $\hat{\mathcal{G}}$. Portanto, de (2.73)

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -[1 + 2\hat{\Psi}(\eta, \mathbf{x})] & \hat{\omega}_i(\eta, \mathbf{x}) \\ \hat{\omega}_i(\eta, \mathbf{x}) & \delta_{ij}[1 - 2\hat{\Phi}(\eta, \mathbf{x})] + \hat{\chi}_{ij}(\eta, \mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad \delta^{ij} \chi_{ij} = 0 \quad (2.114)$$

⁶ De fato, isto é verdade somente em tempos recentes quando a interação entre radiação e bárions é desprezível, senão as equações de Boltzmann precisam ser utilizadas [52, 53, 55].

Lembre que η e \mathbf{x} são as coordenadas do espaço-tempo de fundo. Como dito em [55]: *O problema ao considerar flutuações em RG é que não podemos ter certeza, apenas olhando para uma métrica, que existem flutuações reais sobre um fundo conhecido ou se é a métrica que está escrita em um sistema de coordenadas não muito apropriado.* Por exemplo, se consideramos a transformação de tempo $d\eta = g(t, \mathbf{x})dt$ na métrica FLRW temos

$$ds^2 = -a(t, \mathbf{x})^2 g(t, \mathbf{x})^2 dt^2 + a(t, \mathbf{x})^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.115)$$

e, recuperando η pela troca $t \rightarrow \eta$ obtemos

$$ds^2 = -a(\eta, \mathbf{x})^2 g(\eta, \mathbf{x})^2 d\eta^2 + a(\eta, \mathbf{x})^2 \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.116)$$

Perceba que agora os coeficientes da métrica dependem da posição, isto nos leva a pensar que a homogeneidade e a isotropia foram perdidas, no entanto, o que fizemos foi apenas uma transformação de coordenadas. No entanto, isto é apenas a covariância geral típica de RG, não um problema do calibre. Este *problema do calibre* é a dependência das perturbações no calibre. Na próxima subseção veremos como uma transformação de calibre se manifesta por meio de uma transformação de coordenadas e como podemos lidar com o problema de calibre introduzindo os chamados *invariantes de calibre*. Mas, de forma geral, o calibre é a dependência funcional das grandezas perturbativas nas coordenadas, enquanto que quantidades de fundo mantêm sua forma funcional (mais detalhes ver [69, 67, 70, 55]).

2.2.2.3.1 Transformações de Coordenadas e Transformações de Calibre

Para que possamos entender como a transformação de calibre pode afetar a dependência funcional das grandezas perturbativas, expressamos a mudança do calibre \mathcal{G} para $\hat{\mathcal{G}}$ a partir da seguinte transformação de coordenadas infinitesimal

$$x^\alpha \rightarrow \hat{x}^\alpha = x^\alpha + \zeta^\alpha(x), \quad (2.117)$$

sendo x^μ as coordenadas de fundo e ζ^μ é um campo vetorial genérico. Este campo vetorial genérico é o gerador de calibre, tal que $|\zeta^\mu| \ll 1$ para que possamos preservar a pequenez da perturbação. De forma geral, fixamos um ponto na variedade de fundo e, pela mudança de calibre, mudamos o ponto correspondente na variedade física, que possui coordenadas diferentes do ponto da variedade de fundo. Tais coordenadas são determinadas pela equação (2.117). Portanto, este gerador de calibre pode ser visto como um campo vetorial na variedade física e a derivada de Lie da métrica ao longo de ζ nos diz como muda a forma funcional das quantidades físicas perturbativas.

Agora, a partir da transformação de coordenadas do tensor métrico $g_{\mu\nu}$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial \hat{x}^\varepsilon}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\sigma}{\partial x^\beta} \hat{g}_{\varepsilon\sigma}(\hat{x}), \quad (2.118)$$

obtemos, depois de certa álgebra, e até a primeira ordem perturbativa, a seguinte equação (para mais detalhes ver [55])

$$g_{\alpha\beta}(x) = \hat{g}_{\alpha\beta}(x) + \nabla_{\beta}\zeta_{\alpha} + \nabla_{\alpha}\zeta_{\beta}. \quad (2.119)$$

Tal equação nos mostra como a forma funcional dos componentes métricos muda sob uma transformação de coordenadas, ou seja, como o calibre muda sob uma transformação de coordenadas.⁷

Aplicando a transformação nas quantidades da métrica de fundo observamos que o fator de escala mantém sua forma funcional, confirmando a propriedade do calibre

$$\hat{a}(\eta) = a(\eta) \quad (2.120)$$

Na primeira ordem temos as seguintes relações de transformação

$$\hat{\Psi} = \Psi - \mathcal{H}\xi^0 - (\xi^0)', \quad \hat{\omega}_i = \omega_i - \zeta'_i + \partial_i\xi^0 \quad (2.121)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + \mathcal{H}\xi^0 + \frac{1}{3}\partial_l\xi^l \quad \hat{\chi}_{ij} = \chi_{ij} - \partial_j\zeta_i - \partial_i\zeta_j + \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_l\xi^l, \quad (2.122)$$

sendo $\zeta \equiv \delta_{il}\xi^l$.

Em relação ao tensor momento-energia, a regra de transformação para suas componentes é dada pela equação

$$\hat{T}_{\alpha\beta}(x) = T_{\alpha\beta}(x) - \partial_{\mu}T_{\alpha\beta}(x)\zeta^{\mu} - \partial_{\alpha}\zeta^{\nu}T_{\nu\beta}(x) - \partial_{\beta}\zeta^{\nu}T_{\nu\alpha}(x). \quad (2.123)$$

Usando a regra de transformação acima, encontramos na ordem zero

$$\hat{\varepsilon}(\eta) = \bar{\varepsilon}(\eta) \quad \hat{p}(\eta) = \bar{p}(\eta). \quad (2.124)$$

Percebemos que as quantidade de fundo da densidade e a pressão mantêm suas formas funcionais. Agora, na primeira ordem temos

$$\hat{\delta\varepsilon} = \delta\varepsilon - \bar{\varepsilon}'\zeta^0 \quad \hat{v}_i = v_i + \partial_i\zeta^0 \quad (2.125)$$

$$\hat{\delta p} = \delta p - \bar{p}'\zeta^0 \quad \hat{\pi}_{ij} = \pi_{ij}. \quad (2.126)$$

De forma geral, podemos notar que perturbações de quantidades desaparecem ou são constantes no fundo são automaticamente invariantes de calibre, tal característica pode ser vista explicitamente acima na tensão anisotrópica. Esta propriedade é formalizada no lema de Stewart-Walker [72].

⁷ Observe que se a equação (2.117) é uma isometria ($g_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\nu}$) obtemos a equação de Killing $\nabla_{\nu}\zeta_{\mu} + \nabla_{\mu}\zeta_{\nu} = 0$.

2.2.2.3.2 A decomposição Escalar-Vetor-Tensor (EVT)

Introduzida por Lifshitz [73] (ver também [74, 68]), a decomposição EVT consiste no seguinte procedimento. Sabemos que a métrica perturbada pode ser escrita em termos de dois escalares Ψ e Φ , de um vetor tridimensional ω_i e de um tensor χ_{ij} . No entanto, podemos ter neste conjunto mais dois escalares a partir ω_i e χ_{ij} e mais um vetor a partir de χ_{ij} .

A partir do teorema de Helmholtz (ver [55]) podemos afirmar que, sob certas condições de regularidade, qualquer vetor espacial pode ser decomposto, a princípio, em sua parte longitudinal mais sua contribuição ortogonal, isto é, $\omega_i = \omega_i^{\parallel} + \omega_i^{\perp}$. A parte longitudinal é irrotacional, enquanto a parte ortogonal é solenoidal (sem divergência), ou seja,

$$\epsilon^{ijk} \partial_j \omega_k^{\parallel} = 0, \quad \partial^k \omega_k^{\perp} = 0, \quad (2.127)$$

ϵ^{ijk} é o símbolo Levi-Civita. A partir do teorema de Stokes podemos escrever a parte irrotacional como o gradiente de um escalar, para ter finalmente

$$w_i = \partial_i w + S_i, \quad (2.128)$$

sendo $S_i \equiv \omega_i^{\perp}$. Desta equação notamos que w é a parte escalar de ω_i , enquanto S_i é a parte vetorial de ω_i . Normalmente em cosmologia quando falamos sobre uma perturbação vetorial nos referimos a S_i , isto é, a um vetor que não pode ser escrito como um gradiente de um escalar.

Da mesma forma como fizemos para o vetor, qualquer tensor espacial de ordem 2 pode ser decomposto em sua parte longitudinal mais sua parte ortogonal mais a contribuição transversal, isto é, $\chi_{ij} = \chi_{ij}^{\parallel} + \chi_{ij}^{\perp} + \chi_{ij}^T$, definido por

$$\epsilon^{ijk} \partial^l \partial_j \chi_{lk}^{\parallel} = 0, \quad \partial^i \partial^j \chi_{ij}^{\perp} = 0, \quad \partial^j \chi_{ij}^T = 0. \quad (2.129)$$

Basicamente construímos um vetor tomando a divergência de χ_{ij} e, em seguida, aplicamos nele o teorema de Helmholtz [55]. Isso implica que as partes longitudinais e ortogonais podem ser decompostas como

$$\chi_{ij}^{\parallel} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) 2\mu \quad \chi_{ij}^{\perp} = \partial_j A_i + \partial_i A_j, \quad \partial^i A_i = 0, \quad (2.130)$$

sendo μ um escalar, A_i um vetor sem divergência e $\nabla^2 \equiv \delta^{lm} \partial_l \partial_m$. Podemos, portanto, escrever

$$\chi_{ij} = \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) 2\mu + \partial_j A_i + \partial_i A_j + \chi_{ij}^T. \quad (2.131)$$

Portanto, percebemos que a componente χ_{ij}^T não pode ser decomposta em qualquer escalar ou vetor sem divergência. Logo, constitui uma perturbação tensorial.

Esta decomposição EVT é uma ferramenta fundamental para a investigação de perturbações de primeira ordem porque as três classes (escalar, vetor e tensor) não se misturam e, portanto, podem ser analisadas de forma independente [55].

Podemos aplicar o teorema de Helmholtz no vetor ζ^μ de forma a obter

$$\zeta^0 \equiv \alpha, \quad \varsigma_i \equiv \partial_i \beta + \epsilon_i, \quad (\partial^l \epsilon_l = 0), \quad (2.132)$$

sendo α e β escalares e ϵ^i um vetor sem divergência.

Agora, usamos a decomposição EVT nas transformações encontradas em (2.121) e (2.122)

$$\hat{\Psi} = \Psi - \mathcal{H}\alpha - \alpha', \quad (2.133)$$

$$\partial_i \hat{w} + \hat{S}_i = \partial_i w + S_i - \partial_i \beta' - \epsilon'_i + \partial_i \alpha, \quad (2.134)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + \mathcal{H}\alpha + \frac{1}{3} \nabla^2 \beta, \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) 2\hat{\mu} + \partial_j \hat{A}_i + \partial_i \hat{A}_j + \hat{\chi}_{ij}^T &= \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla_{ij} \nabla^2 \right) 2\mu \\ &+ \partial_j A_i + \partial_i A_j + \chi_{ij}^T - 2\partial_j \partial_j \beta - \partial_j \epsilon_i - \partial_i \epsilon_j + \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \beta. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Desta maneira, vamos escrever explicitamente as regras de transformação para cada classe das perturbações (mais detalhes sobre essas classes veja [67, 52, 53, 68, 54, 55]).

Perturbações Escalares

As equações de transformação apenas para as perturbações escalares são representadas pelo sistema

$$\hat{\Psi} = \Psi - \mathcal{H}\alpha - \alpha' \quad (2.137)$$

$$\hat{w} = w - \beta' + \alpha \quad (2.138)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + \mathcal{H}\alpha + \frac{1}{3} \nabla^2 \beta \quad (2.139)$$

$$\hat{\mu} = \mu - \beta. \quad (2.140)$$

As seguintes combinações das perturbações escalares são invariantes de calibre

$$\psi = \Psi + \frac{1}{a} [(w - \mu')a]' \quad \phi = \Phi - \mathcal{H}(w - \mu') + \frac{1}{3} \nabla^2 \mu \quad (2.141)$$

denominadas Potenciais de Bardeen[65].

Aplicando a decomposição EVT na velocidade v_i , temos

$$v_i = \partial_i v + u_i, \quad (\partial^l u_l = 0), \quad (2.142)$$

portanto, podemos obter as perturbações escalares para as quantidades de matéria

$$\hat{\delta}\varepsilon = \delta\varepsilon - \bar{\varepsilon}'\alpha \quad \Rightarrow \quad \hat{\delta} = \delta + 3\mathcal{H}(1 + \bar{p}/\bar{\varepsilon})\alpha \quad (2.143)$$

$$\hat{v} = v + \alpha \quad (2.144)$$

$$\hat{\delta}p = \delta p - \bar{p}'\alpha. \quad (2.145)$$

Assim como para as grandezas geométricas, as quantidades de matéria também possuem perturbação invariante de calibre, representada pela equação

$$\Gamma \equiv \delta p - \frac{\bar{p}'}{\bar{\varepsilon}'}\delta\varepsilon. \quad (2.146)$$

Este invariante de calibre é denominado Perturbação da Entropia. Denominamos a razão $\frac{\delta p}{\delta\varepsilon}$ como velocidade efetiva do som, enquanto $\frac{\bar{p}'}{\bar{\varepsilon}'}$ é a velocidade adiabática do som. Quando as duas razões são iguais ($\Gamma = 0$) temos adiabaticidade ($dS = 0$). Em nosso trabalho adotamos que as perturbações são adiabáticas.

Podemos obter também invariantes de calibre para densidade de energia e para a pressão. Esses invariantes são dados por

$$\delta\varepsilon_m^{(gi)} \equiv \bar{\varepsilon}\Delta \equiv \delta\varepsilon + \bar{\varepsilon}'v \quad \delta p_m^{(gi)} \equiv \delta p + \bar{p}'v. \quad (2.147)$$

Usamos a notação de [65] escrevendo o subscrito m (matéria) uma vez que também é possível construir perturbações invariantes de calibre da densidade e pressão usando quantidades métricas, como veremos mais a frente.

Combinando as transformações geométricas e de matéria (total de 7 relações) podemos criar novas variáveis invariantes de calibre. Uma delas é a chamada Perturbação da Curvatura Comóvel (também chamada de Variável Lukash [75]) dada por

$$\mathcal{R} \equiv -\Phi + \mathcal{H}v - \frac{1}{3}\nabla^2\mu. \quad (2.148)$$

A outra quantidade, introduzida por [76], é dada por

$$\varsigma \equiv -\Phi + \frac{\delta\varepsilon}{3(\bar{\varepsilon} + \bar{p})} - \frac{1}{3}\nabla^2\mu. \quad (2.149)$$

Esses dois invariantes de calibre são especialmente importantes quando tratamos de inflação⁸ porque são conservados em grandes escalas cosmológicas [67, 52, 53, 68, 54, 55] e para perturbações adiabáticas (pelo menos para \mathcal{R} [65]).

Podemos escrever novamente perturbações invariantes de calibre para densidade, velocidade e pressão

$$\delta\varepsilon_g^{(gi)} \equiv \delta\varepsilon + \bar{\varepsilon}'(w - \mu'), \quad v^{(gi)} \equiv v - (w - \mu'), \quad \delta p_g^{(gi)} \equiv \delta p + \bar{p}'(w - \mu'), \quad (2.150)$$

⁸ Neste trabalho não entraremos em detalhes sobre modelos inflacionários mas o leitor pode consultar os artigos [52, 53, 54, 55].

o subscrito g indica que estas perturbações invariantes de calibre são escritas usando quantidade geométricas.

Portanto, podemos concluir que, em geral, tendo em mãos duas variáveis de calibre, α e β , e sete transformações para estas perturbações, teremos um total de cinco perturbações escalares invariantes de calibre independentes.

São as perturbações escalares que dão origem às estruturas no universo. O objetivo do nosso trabalho é estudar somente essas modos de perturbação.

Perturbações Vetoriais

As transformações para perturbações vetoriais são dadas pelas seguintes equações

$$\bar{S}_i = S_i - \epsilon'_i \quad \text{e} \quad \hat{A}_i = A_i - \epsilon_i. \quad (2.151)$$

Definimos o invariante de calibre relacionado a essas perturbações vetoriais da seguinte forma

$$W_i \equiv S_i - A'_i. \quad (2.152)$$

Podemos usar (2.142) e verificar que no setor de matéria a contribuição vetorial de v_i é um invariante de calibre

$$\hat{u}_i = u_i, \quad (2.153)$$

Estas perturbações são as que produzem, por exemplo, os campos magnéticos, e costumam decair rapidamente.

Perturbações Tensoriais

Em relação as perturbação tensoriais verificamos que a parte transversal de χ_{ij} já é invariante de calibre

$$\hat{\chi}_{ij}^T = \chi_{ij}^T. \quad (2.154)$$

As perturbações tensoriais são responsáveis pela produção de ondas gravitacionais.

Portanto, devemos notar que as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais nos fornecem o total de 10 componentes independentes, que são quebradas em 4 escalares, 2 vetores espaciais sem divergência (cada um com duas componentes independentes) e um tensor espacial transversal sem traço de ordem 2, χ_{ij}^T , com 2 componentes independentes. Como deveria ser.

2.2.2.3.3 Calibres

Pela liberdade de calibre podemos igualar a zero quaisquer 4 componente da métrica. Agora, vamos mostrar duas particulares e conhecidas opções de calibre.

Calibre Síncrono

O calibre síncrono consiste em considerar $\delta g_{\mu 0} = 0$ o que implica em

$$\hat{\Psi} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\omega}_i = 0. \quad (2.155)$$

Escolher $\hat{\omega}_i = 0$ indica que tanto a parte escalar quanto a parte vetorial do vetor ω_i são definidas a zero. Usando as transformações encontradas anteriormente, temos

$$\begin{aligned} \Psi - \mathcal{H}\alpha - \alpha' &= 0, \\ w - \beta' + \alpha &= 0, \\ S_i - \epsilon'_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Devemos interpretar isto como um sistema de equações para as variáveis α , β e ϵ_i , ou seja, a partir de um calibre genérico, queremos saber quais transformações realizamos para ir ao calibre síncrono. Este sistema de equações implica em

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{a} \int d\eta a \Psi + f(\mathbf{x}), \\ \beta &= \int d\eta (w + \alpha) + g(\mathbf{x}), \\ \epsilon_i &= \int d\eta S_i + h_i(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.157)$$

As integrações deram origem a funções puramente dependentes do espaço (f , g e h). Tais funções são modos espúrios deste calibre [67, 52, 53, 68, 54, 55].

Calibre Newtoniano

O calibre Newtoniano, também conhecido como calibre longitudinal, é caracterizado pela seguinte escolha

$$\hat{w} = 0, \quad \hat{\mu} = 0, \quad \hat{\chi}_{ij}^\perp = 0. \quad (2.158)$$

Pelas transformações encontradas anteriormente, chegamos no seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned} w - \beta' + \alpha &= 0, \\ \mu - \beta &= 0, \\ A_i - \epsilon_i &= 0. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Podemos perceber que a partir da segunda e terceira equação determinamos β e ϵ_i . Substituindo o valor encontrado de β na primeira equação encontramos α . Este sistema não possui nenhum modo espúrio.

Uma característica importante no calibre Newtoniano é que as perturbações da métricas tornam-se idênticas aos potenciais de Bardeen, $\hat{\Psi} = \psi$ e $\hat{\Phi} = \phi$. A partir daqui consideraremos somente o calibre Newtoniano, uma vez que a modificação do código numérico CLASS foi realizada utilizando tal calibre. Também, como dito anteriormente, somente os graus de liberdade escalares serão considerados neste texto, logo, a métrica que consideraremos a partir daqui é dada por

$$ds^2 = -a^2(\eta)(1 + 2\psi)d\eta^2 + a^2(\eta)(1 - 2\phi)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (2.160)$$

Nesta métrica ψ desempenha o papel do potencial Newtoniano e ϕ é a perturbação da curvatura espacial. Podemos determinar a relação entre o calibre síncrono e o calibre Newtoniano, para isto recomendamos ao leitor a referência [55] para maiores detalhes.

2.2.2.4 Equações de Einstein para Perturbações Escalares

Agora, podemos determinar as equações de Einstein para as perturbações dada métrica (2.160). Desta forma, das equações (2.81), (2.82) e (2.83) temos

$$a^2\delta G^0_0 = 6\mathcal{H}\phi' + 6\mathcal{H}^2\psi - 2\nabla^2\phi, \quad (2.161)$$

$$a^2\delta G^0_i = -2\partial_i(\phi' + \mathcal{H}\psi), \quad (2.162)$$

$$a^2\delta G^i_j = \left[2\phi'' + 4\mathcal{H}\phi' + 2\mathcal{H}\psi' + 4\mathcal{H}'\psi + \mathcal{H}^2\psi + \nabla^2(\psi - \phi)\right]\delta_j^i - \partial^i\partial_j(\psi - \phi), \quad (2.163)$$

2.2.2.4.1 Equação de Poisson Relativística

A partir da componente $0 - 0$ das equações de Einstein e usando o componente δT^0_0 do tensor momento-energia (2.108), temos

$$-3\mathcal{H}\phi - 3\mathcal{H}^2\psi + \nabla^2\phi = 4\pi G a^2 \delta\varepsilon_{tot}. \quad (2.164)$$

Esta equação é denominada Equação de Poisson Relativística. Nesta equação temos a densidade de energia total que é a soma das densidades perturbadas de todos as componentes do fluido (como no fundo cosmológico)

$$\delta\varepsilon_{tot} = \sum_y \delta\varepsilon_y = \sum_y \bar{\varepsilon}_y \delta y, \quad (2.165)$$

lembrando que o índice y representa cada componente que compõe o fluido que, no caso, consideramos 4 contribuições: fótons, neutrinos, CDM e bárions. E, como sabemos, cada componente possui seu próprio tensor de momento-energia, de maneira que o $T_{\alpha\beta}$ total é a

soma de cada contribuição. No modelo Λ CDM, a constante cosmológica contribui apenas no nível de fundo.

Podemos escrever a equação de Poisson relativística em termos de contraste de densidade,

$$-3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}^2\psi + \nabla^2\phi = 4\pi Ga^2(\bar{\varepsilon}_c\delta_c + \bar{\varepsilon}_b\delta_b + \bar{\varepsilon}_\gamma\delta_\gamma + \bar{\varepsilon}_\nu\delta_\nu). \quad (2.166)$$

Aplicando a transformada de Fourier (veja [55] para mais detalhes) nesta última equação obtemos assim uma equação diferencial ordinária linear

$$-3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}^2\psi - k^2\phi = 4\pi Ga^2(\bar{\varepsilon}_c\delta_c + \bar{\varepsilon}_b\delta_b + \bar{\varepsilon}_\gamma\delta_\gamma + \bar{\varepsilon}_\nu\delta_\nu). \quad (2.167)$$

2.2.2.4.2 Equação para a Tensão Anisotrópica

Agora, vamos determinar a equação correspondente a parte sem traço de δG^i_j , relacionada a tensão anisotrópica π_{ij} . Portanto, do traço e a parte sem traço de δG^i_j obtemos

$$a^2\delta G^i_j - \frac{1}{3}\delta^i_j a^2\delta G^l_l = -\left(\partial^i\partial_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\nabla^2\right)(-\phi + \psi), \quad (2.168)$$

sendo

$$a^2\delta G^l_l = 6\phi'' + 12\mathcal{H}\phi' + 6\mathcal{H}\psi' + 12\frac{a''}{a}\psi - 6\mathcal{H}^2\psi + 2\nabla^2(-\phi + \psi). \quad (2.169)$$

Podemos aplicar a transformada de Fourier em (2.168), de tal maneira que possamos escrever a equação de Einstein espacial sem traço, denominada Equação para a Tensão Anisotrópica

$$k^2\left(\hat{k}^2\hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\right)(-\phi + \psi) = 8\pi Ga^2\pi^i_j, \quad (2.170)$$

uma vez que π^i_j é a parte espacial sem traço do tensor momento-energia. Nesta última equação usamos $k^i = k\hat{k}^i$ e \hat{k}^i é o vetor unitário que denota a direção de \mathbf{k} . Contraindo a última equação com $\hat{k}_i\hat{k}^j$, obtemos

$$k^2(\psi - \phi) = 12\pi Ga^2\hat{k}_i\hat{k}^j\pi^i_j. \quad (2.171)$$

O termo $\hat{k}_i\hat{k}^j\pi^i_k$ corresponde ao termo $(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\sigma$ usado em [68]. Este termo é originado pelos momentos quadrupolares das distribuições de fótons e neutrinos, mas sua contribuição é subdominante a partir da recombinação ($z \sim 1100$) [67, 52, 53, 68, 54, 55].

Na ausência do termo de momento quadrupolo da distribuição do conteúdo de energia, a equação (2.171) nos diz que $\phi = \psi$. Isto pode ser identificado na época dominada pela matéria. No entanto, este não é o caso no início do universo, devido a contribuição da radiação. Mesmo quando o CDM ou energia escura domina, mas a teoria da gravidade subjacente não é RG, pode-se ter $\phi \neq \psi$, como veremos mais a frente.

2.2.2.4.3 Equação para a Velocidade

A partir da componente $0 - i$ das equações de Einstein e usando a componente δT^0_i do tensor momento-energia, obtemos a Equação para a Velocidade das Perturbações

$$k(\phi' + \mathcal{H}\psi) = 4\pi G a^2 (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) V, \quad (2.172)$$

sendo $V = i\hat{k}^i v_i$. Comparando com a notação de [68], temos $\theta = kV$, correspondente ao divergente da velocidade das perturbações. Além disso, devemos notar que $(\bar{\varepsilon} + \bar{p})V$ corresponde a contribuição total do fluido. Logo, podemos escrever a ultima equação da forma

$$k(\phi' + \mathcal{H}\psi) = 4\pi G a^2 \left(\varepsilon_c V_c + \varepsilon_b V_b + \frac{4}{3} \varepsilon_\gamma V_\gamma + \frac{4}{3} \varepsilon_\nu V_\nu \right), \quad (2.173)$$

na qual $\bar{p}_c = \bar{p}_b = 0$, $\bar{p}_\gamma = \frac{\bar{\varepsilon}_\gamma}{3}$ e $\bar{p}_\nu = \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{3}$.

2.2.2.4.4 Equação para a Perturbação da Pressão

Usando a equação (2.169), podemos escrever imediatamente a Equação para a Perturbação da Pressão

$$-\phi'' - 2\mathcal{H}\phi' - \mathcal{H}\psi' - (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi + \frac{k^2}{3}(\psi - \phi) = -4\pi G a^2 \delta p. \quad (2.174)$$

2.2.2.5 Soluções das Perturbações Escalares para Casos Particulares

Podemos determinar de forma analítica soluções das perturbações escalares para o caso do universo dominado por poeira ou radiação, sem constante cosmológica. Como dito anteriormente, estamos assumindo perturbações adiabáticas, ou seja, $\Gamma = 0$, logo de (2.146)

$$\delta p = c_s^2 \delta \varepsilon, \quad (2.175)$$

sendo $c_s^2 \equiv \left(\frac{\bar{p}'}{\bar{\varepsilon}'} \right)_S$ o quadrado da velocidade do som nas perturbações. Usando (2.175) junto com a equação de Poisson relativística e a equação para a perturbação da pressão, temos a seguinte equação diferencial

$$\psi'' + 3\mathcal{H}(1 + c_s^2)\psi' + \left[c_s^2 k^2 + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' \right] \psi = 0, \quad (2.176)$$

aqui assumimos também a relação $\phi = \psi$. Vamos agora as soluções particulares (mais detalhes [53]). Também, se a pressão depende apenas da densidade de energia, tal que $p = w\varepsilon$, com w constante, então temos $c_s^2 = w$, que é válido tanto para a matéria quanto para a radiação.

Matéria Não Relativística

Em um universo plano dominado por matéria com $p = 0$ temos $a \propto \eta^2$, $\mathcal{H} = 2/\eta$ e $c_s^2 \approx 0$. Portanto, a partir da equação (2.176) temos

$$\psi'' + \frac{6}{\eta}\psi' = 0, \quad (2.177)$$

resultado na seguinte solução

$$\psi = C_1 + C_2\eta^{-5}, \quad (2.178)$$

sendo C_1 e C_2 constantes de integração com respeito a η . Estas constantes dependem somente do número de onda k . Podemos determinar a solução do contraste de densidade a partir desta solução do potencial Newtoniano. Para isto, usamos a equação de Poisson relativística (2.167) para o caso de um fluido

$$\delta = \frac{1}{6} - \left\{ C_1 [12 + k^2\eta^2] + C_2 [18 - k^2\eta^2] \eta^{-5} \right\}. \quad (2.179)$$

Em relação ao potencial ψ notamos que o modo de não-decaimento, C_1 , permanece constante independentemente da escala, enquanto que o comportamento das perturbações da densidade depende crucialmente da escala k . Em escala de super-horizonte $k \ll \mathcal{H} = aH$ ($k\eta \ll 1$), que corresponde ao comprimento de onda físico das perturbações $\lambda_f \sim a/k$ ser muito maior do que o raio de Hubble H^{-1} (embora esta aproximação corresponda apenas aos casos particulares apresentados aqui) temos

$$\delta \simeq -2C_1 + 3C_2\eta^{-5}. \quad (2.180)$$

Negligenciando o modo decrescente, esta relação em escalas de super-horizonte torna-se $\delta \simeq -2\psi$.

Agora, considerando escalas de sub-horizonte, $k\eta \gg 1$, temos

$$\delta_\epsilon \simeq -\frac{k^2}{6}(C_1\eta^2 + C_2\eta^{-3}) = \tilde{C}_1 t^{2/3} + \tilde{C}_2 t^{-1}, \quad (2.181)$$

o que está de acordo com o resultado Newtoniano [53].

Matéria Relativística

Considerando o universo dominado por matéria relativista com equação de estado $p = w\epsilon$. Neste caso, temos $a \propto \eta^{2/(1+3w)}$ e $c_s^2 = w$, então, a partir de (2.176)

$$\psi'' + \frac{6(1+w)}{1+3w} \frac{1}{\eta} \psi' + wk^2\psi = 0. \quad (2.182)$$

que tem como solução

$$\psi = \eta^{-b} \left[C_1 J_b(\sqrt{w}k\eta) + C_2 Y_b(\sqrt{w}k\eta) \right], \quad b \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{5+3w}{1+3w} \right), \quad (2.183)$$

sendo J_b e Y_b funções de Bessel de ordem b . Considerando escalas de super-horizonte, nas quais temos $\sqrt{w}k\eta \ll 1$, e usando a expansão de pequenos argumentos das funções de Bessel, vemos que o não-decaimento de ψ é dado por uma constante. Novamente, a partir de (2.167) temos

$$\delta \simeq -2\psi. \quad (2.184)$$

As perturbações em escalas de sub-horizonte, para as quais $\sqrt{w}k\eta \gg 1$, comportam-se como ondas com amplitude decrescente

$$\psi \propto \eta^{-b-\frac{1}{2}} e^{\pm i\sqrt{w}k\eta}. \quad (2.185)$$

A componente de radiação ($w = 1/3$) é um exemplo de matéria relativística, portanto, neste caso a ordem das funções de Bessel é $b = 3/2$, logo

$$\psi = \frac{1}{x^2} \left[C_1 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_2 \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right]. \quad (2.186)$$

As perturbações de densidade de energia são dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon = 2C_1 & \left[\left(\frac{2-x^2}{x^2} \right) \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) - \frac{\sin x}{x} \right] \\ & + 4C_2 \left[\left(\frac{1-x^2}{x^2} \right) \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) + \frac{\sin x}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.187)$$

sendo $x \equiv k\eta/\sqrt{3}$.

2.2.2.6 A Equação Linear de Conservação de $T_{\mu\nu}$

Agora, vamos derivar as equações de perturbação escalar vindas da divergência do tensor momento-energia. Esta equação, para cada componente, junto com as equações de Einstein formam um sistema de equações a ser resolvido tendo como objetivo analisar a formação de estruturas no nível linear. Em modelos em que $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$, como o caso de Λ CDM, com tensor momento-energia dado por (2.86) e equação de estado $p = w\varepsilon$, temos o seguinte sistema de equações

$$\delta'_y + 3\mathcal{H} (c_{s(y)}^2 - w_y) \delta_y = (1 + w_y)(3\phi' - (\partial_i v^i)_y), \quad (2.188)$$

$$(\partial_i v^i)'_y + \mathcal{H}(1 - 3w_y)(\partial_i v^i)_y + c_{s(y)}^2 \frac{\nabla^2 \delta_y}{1 + w_y} - \nabla^2(\sigma_y - \psi) = 0, \quad (2.189)$$

com $c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \varepsilon}$ (2.175). Aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\delta'_y + 3\mathcal{H} (c_{s(y)}^2 - w_y) \delta_y = (1 + w_y)(3\phi' - kV_y), \quad (2.190)$$

$$V'_y + \mathcal{H}(1 - 3w_y)V_y - c_{s(y)}^2 \frac{k}{1 + w_y} \delta_y + k(\sigma_y - \psi) = 0, \quad (2.191)$$

Obtemos a equação (2.188) quando tomamos $\beta = 0$ em $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0$. Esta equação é denominada Equação de Continuidade Perturbada. Enquanto que para (2.189) obtemos quando $\beta = i$ no divergente do tensor momento-energia. Ela corresponde a Equação de Euler no contexto Newtoniano. A equação (2.189) nos diz que a velocidade das perturbações de cada componente depende do gradiente da soma dos potenciais da métrica e das perturbações do fluido. Em um contexto de perturbação de fluido perfeito o termo correspondente a tensão anisotrópica é zero. Mais detalhes consultar [67, 52, 53, 68, 54, 55]. Modelos com $\nabla_\alpha T^\alpha_\beta \neq 0$ dão origem a termos extras nas equações da dinâmica do fluido. Na seção 4 estudaremos um modelo no qual $T_{\alpha\beta}$ não se conserva. Essa não conservação também pode ser verificada em modelos de interação no setor escuro (ver, por exemplo, [21] e sua referências).

Agora, vamos considerar o caso de escalas menores que o Raio de Hubble (sub-horizonte), $k \gg \mathcal{H}$ e um fluido tipo poeira ($w = 0$). As flutuações deste fluido podem crescer indefinidamente devido ausência de força contrária (em geral, a pressão de um fluido genérico resiste à gravidade e impede o colapso) Vamos então derivar as equações no caso do universo dominado por poeira, na ausência de perturbações, considerando um pequena velocidade do som $c_s^2 \ll 1$. Então de (2.173) temos $\phi' + \mathcal{H}\psi \simeq 0$. Assim, com o auxílio adicional da equação de Friedmann, podemos escrever equação (2.167) da seguinte forma

$$-k^2\phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta. \quad (2.192)$$

sendo $\phi = \psi$. Tomando a derivada de (2.192) e substituindo o resultado desta derivada em (2.190), obtemos no limite de sub-horizonte

$$\delta' \simeq -\theta. \quad (2.193)$$

Aqui, usamos o divergente da velocidades das perturbações $\theta = kV$. Perceba que esta equação se reduz à equação de conservação no limite Newtoniano [25]. Portanto, temos os seguinte conjunto de equações no limite do sub-horizonte

$$\delta' = -\theta, \quad (2.194)$$

$$\theta' = -\mathcal{H}\theta + c_s^2 k^2 \delta + k^2 \phi, \quad (2.195)$$

juntamente com (2.192). Deste sistema de equações obtemos a seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\right)\delta = 0. \quad (2.196)$$

Esta equação nos mostra as perturbações não crescem se $c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 > 0$, ou seja, se o comprimento de onda físico for menor do que o comprimento de Jeans (comprimento no qual ocorre o colapso gravitacional),

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\varepsilon}}. \quad (2.197)$$

Para escalas menores que o comprimento de Jeans λ_J , as perturbações sofrem oscilações amortecidas. Neste regime linear a dispersão de velocidade das partículas de matéria escura é sempre desprezível. Em relação aos fótons, temos $c_s = c/\sqrt{3}$, de modo que $\lambda_J \approx H^{-1}$. Logo, notamos que o crescimento de perturbações é evitado em todas as escalas menores que o raio de Hubble. Antes da época do desacoplamento, as perturbações dos bárions são amortecidas devido a pressão do fluido fóton-bárion, cuja maior contribuição vem dos fótons. Além disso, nesta época a velocidade dos bárions é semelhante à velocidade dos fótons. Após o desacoplamento os bárions estão livres para cair dentro dos poços de potencial de matéria escura (mais detalhes ver, por exemplo, [25]).

Agora, quando temos $c_s k \ll \mathcal{H}$, as perturbações crescem livremente devido a gravidade superar a pressão (regime ligado a instabilidade gravitacional). Portanto, em escalas de sub-horizonte, considerando o caso de um fluido simples sem pressão, a equação (2.196)

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0. \quad (2.198)$$

Lembrando que neste caso temos $\mathcal{H} = \eta^{-1}$, esta equação diferencial tem como solução a mesma que encontramos anteriormente, dada por (2.181).

2.2.3 Condições Iniciais

Até o presente momento derivamos equações de evolução relacionadas as pequenas perturbações escalares na métrica de FLRW. Para que possamos ter um problema de Cauchy bem estabelecido para estas equações diferenciais, precisamos saber quais condições iniciais devemos usar. Para isto, consideremos a influência de cada componente do fluido em nosso sistema. Tais condições são estabelecidas logo após o período inflacionário. Portanto, aqui faremos uma análise resumida para o modelo Λ CDM seguindo a referência [55]. O resultados apresentados nessa seção podem ser vistos também [68].

O conjunto de equações que mostraremos a seguir, relacionado com as flutuações de temperatura e polarização dos fótons, bem como as equações relacionadas aos neutrinos, bárions e matéria escura, são equações determinadas a partir da equação de Boltzmann [77] (ver também [52, 53, 54, 55, 67, 68])

$$\frac{df}{d\lambda} = \mathcal{C}[f], \quad (2.199)$$

sendo f a função de distribuição, $\mathcal{C}[f]$ um funcional de f que descreve um termo de colisão e λ um parâmetro afim. Não vamos nos preocupar em como determinar esses conjunto de equações aqui, então recomendamos ao leitor que veja a referências citadas anteriormente para maior esclarecimento. Portanto,

- Para a flutuação da temperatura dos fótons ($\Theta = \frac{\delta T}{T}$)

$$(2l + 1)\Theta'_l + k[(l + 1)\Theta_{l+1} - l\Theta_{l-1}] = \tau'(2l + 1)\Theta_l, \quad (l > 2), \quad (2.200)$$

$$10\Theta'_2 + 2k\left(3\Theta_3 - \frac{2}{3}V_\gamma\right) = 10\tau'\Theta_2 - \tau'\Pi, \quad (2.201)$$

$$V'_\gamma + k\left[2\Theta_2 - \frac{\delta_\gamma}{4}\right] = k\psi + \tau'(V_\gamma - V_b), \quad (2.202)$$

$$\delta'_\gamma + \frac{4}{3}kV_\gamma - 4\phi' = 0, \quad (2.203)$$

sendo τ denominado profundidade ótica (sua derivada no tempo representa a taxa de interação fóton-elétron) e o índice l é a ordem do polinômio de Legendre associado a essas funções. O lado direito de (2.202) surge devido a interação Compton com os bárions. Nesta equação, a velocidade é equivalente ao dipolo e ao contraste do monopolo dos fótons. Além disso, note que a última equação pode ser determinada também a partir de (2.190).

- Para o campo de polarização dos fótons

$$(2l + 1)\Theta'_{Pl} + k[(l + 1)\Theta_{P(l+1)} - l\Theta_{P(l-1)}] = \tau'(2l + 1)\Theta_{Pl}, \quad (l > 2), \quad (2.204)$$

$$10\Theta'_{P2} + 2k(3\Theta_{3P} - 2\Theta_{P1}) = 10\tau'\Theta_{P2} - \tau'\Pi, \quad (2.205)$$

$$3\Theta'_{P1} + k[2\Theta_{P2} - \Theta_{P0}] = 3\tau'\Theta_P, \quad (2.206)$$

$$2\Theta'_{P0} + 2k\Theta_{P1} = 2\tau'\Theta_{P0} - \tau'\Pi, \quad (2.207)$$

sendo $\Pi = \Theta_2 + \Theta_{P2} + \Theta_{P0}$.

- Para neutrinos

$$(2l + 1)\mathcal{N}'_l + k[(l + 1)\mathcal{N}_{l+1} - l\mathcal{N}_{l-1}] = 0, \quad (l > 1), \quad (2.208)$$

$$V'_n + 2k\mathcal{N}_2 - k\frac{\delta_n}{4} = k\psi, \quad (2.209)$$

$$\delta'_n + \frac{4}{3}kV_n - 4\phi' = 0. \quad (2.210)$$

As duas últimas equações podem ser determinadas também a partir de (2.190) e (2.191).

- Para bárions

$$V'_b + \mathcal{H}V_b - k\psi = \frac{4\tau'\rho_\gamma}{3\rho_b}(V_b - V_\gamma), \quad (2.211)$$

$$\delta'_b + kV_b - 3\phi' = 0, \quad (2.212)$$

- Para matéria escura

$$V'_c + \mathcal{H}V_c - k\psi = 0, \quad (2.213)$$

$$\delta'_c + kV_c - 3\phi' = 0, \quad (2.214)$$

As equações referentes a matéria escura também podem ser determinadas via (2.190) e (2.191).

Finalmente, fazemos uso da equação de Poisson relativística

$$3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\psi) + k^2\phi = -4\pi G_0 a^2 (\epsilon_c \delta_c + \epsilon_b \delta_b + \epsilon_\gamma \delta_\gamma + \epsilon_n \delta_n), \quad (2.215)$$

bem como da equação para tensão anisotrópica

$$k^2[-\phi + \psi] = -32\pi G_0 a^2 (\epsilon_\gamma \Theta_2 + \epsilon_n \mathcal{N}_2). \quad (2.216)$$

Nesta última equação escrevemos as tensões anisotrópicas dos fótons e dos neutrinos em termos dos seus momentos quadripolares, isto é, $\sigma_\gamma = 2\Theta_2$ e $\sigma_n = 2\mathcal{N}_2$.

As condições iniciais que devemos determinar, referentes às quantidades Θ_l , \mathcal{N}_l , δ_c , δ_b , V_c , V_b , ϕ e ψ , são determinadas em um momento inicial $\eta_i > 0$. Estas quantidades iniciais são definidas no regime de super-horizonte. Eles também são chamados de modos primordiais para as escalas de interesse observacional hoje devido ao fato de estarem profundamente inseridas na época em que o universo é dominado pela radiação. Por esse motivo, usamos a aproximação $a \propto \eta$.

2.2.3.1 Equações de Evolução no Limite de $k\eta \ll 1$

Consideramos a época em que nosso universo é dominado pela radiação e escalas de distancias muito grandes, ou seja, $k\eta \ll 1$. Portanto, vamos realizar uma expansão das variáveis perturbativas em relação a quantidade $k\eta$. Nessas variáveis perturbativas usamos a expansão $Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}(k\eta)^n$, n é a ordem da expansão. Vejamos isto na equação de monopolo de fóton (2.203)

$$\delta_\gamma^{(1)}(k\eta) + \frac{4}{3}V_\gamma^{(0)}(k\eta) + \frac{4}{3}V_\gamma^{(1)}(k\eta)^2 = 4\phi^{(1)}(k\eta), \quad (2.217)$$

considerando a soma até $n = 1$. Vemos que $V_\gamma^{(0)}$ está acoplado a $\delta_\gamma^{(1)}$ e $\phi^{(1)}$ nesta expansão, ou seja, V_γ é da ordem de $(k\eta)\delta_\gamma$ e $(k\eta)\phi$, por isso é subdominante em relação a δ_γ e ϕ . Então, na ordem mais baixa, temos

$$\delta'_\gamma = 4\phi'. \quad (2.218)$$

O mesmo processo é válido para as outras componentes

$$\delta'_\gamma = 4\phi', \quad (2.219)$$

$$\delta'_n = 4\phi', \quad (2.220)$$

$$\delta'_b = 3\phi', \quad (2.221)$$

$$\delta'_c = 3\phi'. \quad (2.222)$$

Integrando estas equações obtemos

$$\delta_\gamma = 4\phi + 4C_\gamma, \quad (2.223)$$

$$\delta_n = \delta_\gamma + S_n, \quad (2.224)$$

$$\delta_b = \frac{3}{4}\delta_\gamma + S_b, \quad (2.225)$$

$$\delta_c = \frac{3}{4}\delta_\gamma + S_c, \quad (2.226)$$

Nas soluções acima definimos os modos de entropia ou modos de densidade de isocurvatura [55], dados por

$$S_n \equiv C_n - 4C_\gamma, \quad S_c \equiv C_c - 3C_\gamma \quad \text{e} \quad S_b \equiv C_b - 3C_\gamma, \quad (2.227)$$

Devemos notar também que as quantidades C 's, e conseqüentemente S 's, são funções do numero de ondas das perturbações k , mas são constantes em relação ao tempo η .

2.2.3.2 Multipolos no Limite $k\eta \ll 1$

Das equações relacionadas aos fótons, mais especificamente ao multipolo Θ_l , podemos notar que $\Theta_{l+1} \approx (k\eta)\Theta_l$, isto indica que cada multipolar é subdominante em relação ao anterior. Tal característica também é vista nas equações para Θ_{Pl} e \mathcal{N}_l . Portanto, podemos aplicar o limite $k\eta \ll 1$ e obter, para a ordem dominante,

- Para o flutuação de temperatura dos fótons

$$(2l + 1)\Theta'_l - kl\Theta_{l-1} = \tau'(2l + 1)\Theta_l, \quad l > 2, \quad (2.228)$$

$$10\Theta'_2 - \frac{4}{3}kV_\gamma = \tau'(9\Theta_2 - \Theta_{P0} - \Theta_{P2}), \quad (2.229)$$

$$V'_\gamma - k\frac{\delta_\gamma}{4} = k\Psi + \tau'(V_\gamma - V_b). \quad (2.230)$$

- Para o campo de polarização dos fótons

$$(2l + 1)\Theta'_{Pl} - kl\Theta_{P(l-1)} = \tau'(2l + 1)\Theta_{Pl}, \quad l > 2, \quad (2.231)$$

$$10\Theta'_{P2} - 4k\Theta_{P1} = \tau'(9\Theta_{P2} - \Theta_{P0} - \Theta_2), \quad (2.232)$$

$$3\Theta'_{P1} - k\Theta_{P0} = 3\tau'\Theta_{P1}, \quad (2.233)$$

$$2\Theta'_{P0} = \tau'(\Theta_{P0} - \Theta_{P2} - \Theta_2). \quad (2.234)$$

Podemos considerar a seguinte aproximação $-\tau' \propto a^{-2} \propto \eta^{-2}$ [55]. Esta aproximação indica que a taxa de interação fóton-elétron diverge quando $\eta \rightarrow 0$. Tal conclusão é plausível dado que o universo torna-se mais denso a medida que recuamos no tempo, logo mais interações ocorrem. No entanto, para que as perturbações não divirjam, as funções

que aparecem multiplicando a derivada da profundidade óptica devem desaparecer quando $\eta \rightarrow 0$, ou seja:

$$\Theta_l = \Theta_{Pl} = 0, \quad l > 2, \quad (2.235)$$

$$\Theta_2 = \Theta_{P2} = \Theta_{P0} = \Theta_{P1} = 0, \quad (2.236)$$

$$V_\gamma = V_b. \quad (2.237)$$

Este resultados nos dizem que o acoplamento entre elétrons e fótons é tão eficiente que elimina o quadrupolo e os momentos (de mais alta ordem) das flutuações de temperatura e todos os momentos de polarização. Além disso, vemos também que os fótons e bárions estão firmemente acoplados num único fluido com velocidade $V_\gamma = V_b$.

Agora, aplicando o limite $k\eta \ll 1$ nas equações dos neutrinos temos

$$(2l + 1)\mathcal{N}'_l - kl\mathcal{N}_{l-1} = 0, \quad l \geq 2, \quad (2.238)$$

$$V'_n - k\frac{\delta_n}{4} = k\psi. \quad (2.239)$$

A partir destas equações podemos ver que $V_n \sim (k\eta)\delta_n$, $\mathcal{N}_2 \sim (k\eta)^2\delta_n$ e assim por diante. No entanto, os multipolos da temperatura de neutrinos não são nulos e, portanto, precisamos determinar condições iniciais para todos eles. Em acréscimo, podemos determinar uma relação entre esses multipolos de neutrinos, para isso, supomos, na ordem mais baixa, a seguinte solução $\mathcal{N}_l = c_l(k\eta)^l$ [55], sendo c_l uma constante arbitrária. Substituindo essa solução em (2.238) obtemos $c_l = \frac{1}{2l+1}c_{l-1}$. Isto nos leva ao seguinte resultado

$$\mathcal{N}_l = \frac{k\eta}{2l+1}\mathcal{N}_{l-1} \quad l \geq 2. \quad (2.240)$$

Isto nos indica que basta conhecer a condição inicial sobre \mathcal{N}_1 que assim podemos determinar as condições iniciais para todos os multipolos subsequentes dos neutrinos.

Em relação a velocidade dos neutrinos V_ν podemos usar (2.219), (2.220), (2.230) e (2.239), e encontrar $V'_\gamma = V''_n$, que tem como solução⁹

$$V_\gamma = V_n. \quad (2.241)$$

2.2.3.3 Equações das Velocidades de Bárions e CDM

Tomando a mais baixa ordem em $k\eta$ nas equações (2.212) e (2.213) obtemos

$$\eta V'_b + V_b - (k\eta)\psi = \frac{4\eta\tau'\rho_\gamma}{3\rho_b}(V_b - V_\gamma), \quad (2.242)$$

$$\eta V'_c + V_c - (k\eta)\psi = 0. \quad (2.243)$$

⁹ A forma geral desta solução seria $V_\gamma = V_n + q_n$, sendo q_n uma função de η . Esta quantidade q_n é denominada fluxo de calor relativo dos neutrino, que para nosso fluido assumimos como sendo zero.

Consideramos a aproximação $\eta\tau'\rho_\gamma/\rho_b \propto 1/a^2 \propto 1/\eta^2$ [55], verificamos que a velocidade dos bárions não sofrerá divergência, quando $\eta \rightarrow 0$, se assumimos que $V_\gamma = V_b$. Esta condição nos leva ao seguinte resultado

$$\eta V_c' + V_c = (k\eta)\psi, \quad (2.244)$$

$$\eta V_b' + V_b = (k\eta)\psi. \quad (2.245)$$

Portanto, notamos a partir destas equações a velocidade da matéria escura e dos bárions são subdominantes com relação ao potencial ψ .

2.2.3.4 Equações de Campo no Limite $k\eta \ll 1$

Agora, vamos determinar a forma das equações de campo de ordem linear no regime $k\eta \ll 1$. Para isto, consideremos a equação de Friedmann

$$4\pi G a^2 = \frac{3\mathcal{H}^2}{2\bar{\varepsilon}_{total}} = \frac{3}{2\bar{\varepsilon}_{total}\eta^2}. \quad (2.246)$$

Definimos a fração de densidade $R_i \equiv \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_{total}}$ para cada componente do fluido, tal que $R_\gamma + R_n + R_c + R_b = 1$. Mas, uma vez que aqui estamos no universo dominado pela radiação, os fótons e os neutrinos dominam, portanto a seguinte aproximação é válida

$$R_\gamma + R_n \approx 1. \quad (2.247)$$

Desta maneira, podemos escrever a equação de Poisson relativística da seguinte forma

$$-2\eta\phi' - 4\phi - 2\psi = 4C_\gamma + R_n S_n + R_b S_b + R_c S_c, \quad (2.248)$$

aqui negligenciamos termos de $(k\eta)^2$. Nesta época a fração de densidade de neutrinos vale $R_n = 0.4089$ [55].

Agora, sendo $\Theta_2 = 0$, a equação para tensão anisotrópica fica

$$(k\eta)^2(-\phi + \psi) = -12R_n\mathcal{N}_2, \quad (2.249)$$

derivando duas vezes esta equação

$$\begin{aligned} 2k^2[-\phi + \psi] + 4k^2\eta[-\phi' + \psi'] + k^2\eta^2[-\phi'' + \psi''] &= -\frac{8}{5}R_n k V_n' \\ &= -\frac{8}{5}R_n k^2 \left(\psi + \frac{\delta_n}{4} \right), \end{aligned} \quad (2.250)$$

simplicando k^2 e derivando novamente temos

$$6[-\phi' + \psi'] + 6\eta[-\phi'' + \psi''] + \eta^2[-\phi''' + \psi'''] = -\frac{8}{5}R_n(\psi' + \phi'), \quad (2.251)$$

sendo usado $\delta_n' = 4\phi'$ e notando que R_n é constante quando a radiação domina.

Portanto, obtivemos uma equação diferencial que relaciona unicamente os campos ϕ e ψ . Mais a frente veremos como resolvê-la.

2.2.3.5 Modo Primordiais Adiabáticos

Como dito anteriormente, vamos considerar somente sistemas adiabáticos em nosso trabalho. Os modos adiabáticos são definidos quando $S_\nu = S_c = S_b = 0$. Neste sistema, somente $C_\gamma \neq 0$. Portanto, os contrastes de densidade ficam

$$\frac{1}{3}\delta_c = \frac{1}{3}\delta_b = \frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{1}{4}\delta_n = \phi + C_\gamma. \quad (2.252)$$

A partir de (2.248)

$$-2\phi - \eta\phi' - \psi = 2C_\gamma. \quad (2.253)$$

Combinando este resultado com (2.251) e obter

$$\eta^3\phi'''' + 12\eta^2\phi''' + 4\left(9 + \frac{2}{5}R_\nu\right)\eta\phi'' + 8\left(3 + \frac{2}{5}R_n\right)\phi' = 0. \quad (2.254)$$

Esta equação pode ser resolvida de forma exata uma vez que R_n é constante. Suas soluções são

$$\phi = \text{constante} \quad \phi \propto \eta^{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{32R_n}{5}}}, \quad \phi \propto \frac{1}{\eta}. \quad (2.255)$$

O único modo não decrescente é a solução $\phi = \text{constante}$. Esta é a solução a ser considerada. As demais soluções são modos decrescentes, tal que, os modos $\phi \propto \eta^{-\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{32R_n}{5}}}$ são complexos se $R_n > 5/32$.

Desta forma, dado C_γ e ϕ , encontramos a partir de (2.253) que ψ também é constante. Usando estes resultados nas equações (2.250) e (2.253) podemos determinar os ϕ e ψ em termos de C_γ , e a relação entre esses campos,

$$\phi = -\frac{2C_\gamma(5 + 2R_n)}{15 + 4R_n}, \quad \psi = -\frac{10C_\gamma}{15 + 4R_n}, \quad \phi = \psi \left(1 + \frac{2}{5}R_n\right) \quad (2.256)$$

Devemos notar que a presença de neutrinos por R_n impede $\phi = \psi$. Comparando com os resultados de [68], C_γ corresponde a $-2C$ desta referencia.

Portanto, podemos agora determinar as outras condições iniciais. Para o contraste de densidade dos fótons

$$\delta_\gamma = \frac{20C_\gamma}{15 + 4R_n} = -2\psi. \quad (2.257)$$

O modo primordial do momento quadrupolar dos neutrinos é

$$\mathcal{N}_2 = \frac{k^2\eta^2}{30}\psi. \quad (2.258)$$

Vejamos agora os modos das velocidades. Acabamos de determinar que as condições iniciais nos dizem que $\psi \sim (k\eta)^0$, então se $V_c \sim V_b \sim (k\eta)^0$ também, as equações (2.244) e (2.245) tornam-se, na ordem mais baixa,

$$\eta V_c' + V_c = 0, \quad (2.259)$$

$$\eta V_b' + V_b = 0. \quad (2.260)$$

As soluções são $V_c \propto V_b \propto \frac{1}{\eta}$. Essas soluções não são admissíveis porque divergem para $\eta \rightarrow 0$. Isso significa que realmente precisamos de $V_c \sim V_b \sim (k\eta)$, na ordem mais baixa. Substituindo este *ansatz* novamente nas equações (2.244) e (2.245), encontramos

$$V_c = V_b = \frac{k\eta\psi}{2}.$$

Logo,

$$V_n = V_\gamma = V_b = V_c = \frac{k\eta\psi}{2}. \quad (2.261)$$

Devemos notar que todos os modos dependem da mesma constante C_γ , que são as perturbações, geradas em uma época inflacionária e que influirá nas perturbações da métrica e nas inhomogeneidades presentes no universo.

Podemos estabelecer um valor para C_γ via mecanismo de inflação. Recomendamos o leitor a referência [55] onde encontramos tais resultados. Podemos também relacionar esta constante com \mathcal{R} (2.148) e ς (2.149). Do calibre Newtoniano temos

$$\mathcal{R} = -\phi + \mathcal{H}v_{total} \quad \text{e} \quad \varsigma = -\phi + \frac{R_\gamma\delta_\gamma + R_n\delta_n + R_c\delta_c + R_b\delta_b}{3 + R_\gamma + R_n}. \quad (2.262)$$

A velocidade indicada por v_{total} não é a soma dos v 's dos componentes individuais, uma vez que a decomposição do EVT não é feita diretamente em v_i , mas sim no tensor momento-energia perturbado δT^0_i tal que

$$\delta T^0_i(\text{total}) = (\bar{\varepsilon} + \bar{p})v_i(\text{total}). \quad (2.263)$$

Logo, v_{total} é definido por meio de uma média ponderada com peso $\bar{\varepsilon} + \bar{p}$. Portanto, no modelo com quatro componentes, temos

$$v_{total} = \frac{4R_\gamma v_\gamma + 4R_n v_n + 3R_c v_c + 3R_b v_b}{3 + R_\gamma + R_n}. \quad (2.264)$$

Agora, usando $v = -\frac{V}{k}$ e (2.261), obtemos a relação

$$\mathcal{R} = -\phi - \frac{4R_\gamma V_\gamma + 4R_n V_n + 3R_c V_c + 3R_b V_b}{k\eta(3 + R_\gamma + R_n)} = -\phi - \frac{\psi}{2}. \quad (2.265)$$

Encontramos o mesmo resultado para ς . Logo, temos a seguinte relação

$$\mathcal{R} = \varsigma = -\phi - \frac{\psi}{2} = C_\gamma. \quad (2.266)$$

Com isso mostramos como a constante C_γ está relacionada com as perturbações de curvatura. Além disso, provamos que estas perturbações de curvatura são iguais e constantes em grandes escalas cosmológicas para perturbações adiabáticas.

2.2.4 Problemas em Aberto no Modelo Λ CDM

O modelo padrão da cosmologia reproduz satisfatoriamente alguns fenômenos observacionais como a expansão acelerada do universo, a CMB, oscilações acústicas bariônicas, distorção no espaço de *redshift*, dentre outros. Além disso, sabe-se que o modelo Λ CDM possui relativo sucesso observacional, denominado em vários momentos como modelo de concordância, uma vez que prevê resultados que estão de acordo com os testes feitos no fundo homogêneo e isotrópico e testes feitos no nível perturbativo. Entretanto, apesar das inúmeras previsões e explicações, ela descreve incorretamente alguns fenômenos, tendo assim a necessidade de introduzir conceitos como matéria e energia escuras. Como dito anteriormente, a hipótese da matéria escura surgiu da tentativa de consertar falhas da RG para descrever curvas de rotação de galáxias, bem como efeitos de lentes gravitacionais produzidos por aglomerados de galáxias. E a energia escura como sendo a responsável pela expansão acelerada do nosso universo.

Na verdade, se o modelo Λ CDM estiver correto, cerca de 95% da matéria total do nosso universo deveria estar na forma de densidades de energia que não interagem eletromagneticamente. Uma composição tão estranha levou alguns a especular sobre a possibilidade de que a RG (o pilar do modelo Λ CDM) pode não ser, de fato, a teoria da gravidade correta para descrever o universo em grande escalas de distancia. O universo escuro pode ser apenas mais um sinal de que precisamos ir além da teoria proposta por Einstein.

Vamos falar brevemente de alguns problemas que estão presentes no modelo padrão da cosmologia [55] (ver também [52, 53, 54, 55, 67, 68])

- **Problema da Constante Cosmológica:** A RG prevê o mesmo comportamento dinâmico entre a constante cosmológica Λ , vista como uma componente geométrica pura, e a energia do vácuo. No entanto, existe uma inconsistência entre a previsão teórica da energia do vácuo (através de teoria quântica de campos) e o resultado observacional. Este é denominado de *problema de ajuste fino da constante cosmológica*.
- **Problema da Coincidência Cósmica:** Sabemos que a densidade de energia da matéria diminui com a^{-3} , enquanto que a densidade de energia associada a constante cosmológica é constante. No entanto, o problema vem do fato de que atualmente essas duas densidades são da mesma ordem de grandeza. Dos resultados que tivemos até aqui, a razão entre essas duas densidades nos leva a $\frac{\epsilon_m}{\epsilon_\Lambda} = \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} a^{-3}$. Logo, com os dados observacionais [1], encontramos que esta razão é da ordem 1 para o universo atual. No entanto, dada a dependência do fator de escala, notamos que este fato só foi alcançado "recentemente". No entanto, não existe nenhuma razão para que essa equivalência entre matéria e energia escura se dê somente agora, pois, como mostrado anteriormente, o modelo Λ CDM não prevê uma interação entre os fluidos

cósmicos, desta forma a dinâmica de cada fluido é completamente independente. Isto é extremamente intrigante, pois se a constante cosmológica tivesse dominado o universo antes do que sabemos, as estruturas não teriam tido tempo para se formar, por outro lado, se a constante cosmológica tivesse dominado depois, o universo seria mais jovem do que algumas de suas estruturas mais antigas (como os aglomerados globulares). Algumas abordagens entendem que esta coincidência cósmica não é exatamente um problema [78]. Entretanto, a física não gosta de coincidências, desta forma, investigar este problema nos dá alguma luz sobre a natureza da energia escura.

- **Tensões Cosmológicas:** Essas tensões são problemas técnicos que envolvem o modelo padrão. Isso acontece quando as observações de diferentes fontes de dados fornecem restrições diferentes até um nível de confiança de 68% ou 95%. Existe tensão entre a determinação de H_0 em baixo *redshift* e de alto *redshift* (CMB) (veja um resumo em [18]). Além disso, existe uma tensão na determinação de σ_8 (veja um resumo em [19]).

2.3 Dados Observacionais

Agora, apresentamos algum dos conjuntos de dados observacionais usados para validar dada teoria cosmológica. Damos foco a este conjunto de dados, pois o mesmo foi utilizado para a análise do modelo cosmológico apresentado na seção 4.

2.3.1 Supernova Tipo Ia

As supernovas tipo Ia (SNe Ia) são as ferramentas mais diretas para estudar a aceleração cósmica. Elas são as ferramentas usadas para descobrir diretamente a aceleração do nosso universo [14, 15]. Tais objetos possuem um brilho intenso e característico, permitindo assim que sejam usadas como velas padrão.

Em geral, se defini para objetos luminosos, com fluxo de luminosidade f conhecido, a magnitude relativa a soma da contribuição de todo o espectro eletromagnético, chamada de magnitude bolométrica aparente,

$$m = -2.5 \log(f) + C, \quad (2.267)$$

sendo C uma constante que determina a escala de medida da magnitude aparente. Podemos reescrever esta relação em termos da distância de luminosidade, definida em (2.64), como

$$m = -2.5 \log \left(\frac{L}{4\pi d_L^2} \right) + C. \quad (2.268)$$

Agora, podemos definir a chamada magnitude bolométrica absoluta que representa o valor da magnitude aparente na qual a distância do objeto até o observador seja de 10pc, ou

seja,

$$m = -2.5 \log \left(\frac{L}{4\pi(10\text{pc})^2} \right) + C. \quad (2.269)$$

Através da diferença desta duas magnitudes, podemos escrever o módulo de distancia,

$$\mu = 5 \log \left[(z + 1) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \right] - 5 \log(h) + 42.384. \quad (2.270)$$

Esta é a quantidade crucial para a análise de dados de SNe Ia. Note que nesta equação incluímos a distância de luminosidade (2.69). Neste trabalho será usado o conjunto completo de dados do PANTHEON [5], que conta com 1048 dados.

2.3.2 Oscilações Acústicas Bariônicas

Antes do desacoplamento a taxa de espalhamento Thomson era muito alta. Desta forma, os fótons estavam fortemente acoplados aos bárions, formando o que chamamos de fluido fóton-bárion. Essa interação exerce uma pressão dos fótons nos bárions. Em contrapartida, dado que a matéria escura não interage eletromagneticamente, não há pressão de radiação sobre ela, ocorrendo somente a aglomeração gravitacional da matéria escura, que interage gravitacionalmente com a matéria bariônica, atraindo-a. Entretanto, neste período de forte acoplamento entre os bárions e fóton, o colapso gravitacional dos bárions é impedido. Num palco no qual a gravidade e a força de pressão da radiação medem “forças” há o surgimento de oscilações neste fluido fóton-bárion.

Com a recombinação e o universo se expandindo, a escala de energia dos fótons se torna menor que 0.25eV. A partir disto, a taxa de espalhamento Thomson é reduzida drasticamente, levando ao desacoplamento entre os bárions e a radiação,¹⁰ parando assim, as oscilações acústicas. No entanto, tais ondas deixam marcas que podem ser medidas hoje. Em relação aos bárions existe tal característica em distâncias cosmológicas. Podemos quantificar isto através da combinação de parâmetros [79]

$$D_V(z) = \left[(1 + z)^2 d_A^2 \frac{z}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (2.271)$$

tal quantidade é denominada média geométrica. Esta quantidade é medida em relação à escala do horizonte do som dada por

$$r_s(z) = c \int_0^a \frac{c_s da}{a^2 H(a)}. \quad (2.272)$$

Para nossa análise usamos os dados a partir de 6dF Galaxy Survey [6] e BOSSDR12 [7].

¹⁰ Quando usamos o termo desacoplamento, estamos nos referindo ao instante em que o livre caminho médio dos fótons supera o raio de Hubble.

2.3.3 Distorção no Espaço de Redshift

Distorção no Espaço de *Redshift* é uma importante sonda quando queremos analisar estruturas em grandes escalas cosmológicas. De forma geral, essas medidas quantificam o campo de velocidade das galáxias [8, 9] (distorções da distribuição das galáxias no espaço *redshift* gerado por seus movimentos peculiares caindo em direção a regiões densas). Esta importante sonda é sensível à taxa de crescimento das perturbações de densidade da matéria, que depende da teoria gravitacional e fornece medidas de σ_8 que dependem do potencial gravitacional, através da quantidade $f\sigma_8(a) \equiv f(a)\sigma(a)$, sendo f a taxa de crescimento, dada por

$$f(a) = \frac{d \ln \delta_\varepsilon(a)}{d \ln a}, \quad (2.273)$$

e $\sigma(a)$ definida como a dispersão do campo de densidade em uma determinada escala comóvel R [80]

$$\sigma^2(R, a) = \int_0^\infty W^2(kR) \Delta^2(k, a) \frac{dk}{k} \quad (2.274)$$

sendo $W(kR)$ denominada função janela e

$$\Delta^2(k, a) = 4\pi k^3 P_\delta(k, a). \quad (2.275)$$

com $P_\delta(k)$ sendo o espectro de potencia relacionado aos campos de matéria. A função $\sigma_8(a)$ é a função $\sigma(a)$ quando assumimos a escala comóvel $R = 8h^{-1}\text{Mpc}$, enquanto que σ_8 e o valor avaliado hoje [80]. Comumente pode-se escrever

$$\sigma(a) = \sigma_8 \frac{\delta(a)}{\delta(a=1)}. \quad (2.276)$$

O dados de distorção no espaço de *redshift* podem ser obtidos medindo a proporção dos monopolos e quadrupolos do espectro de potência do espaço *redshift* que depende de $\beta = f/b$ [81], sendo b o *bias*, definido pela teoria linear (veja [82, 83, 84]). A combinação $f\sigma_8(a)$ é independente do *bias*, uma vez que toda a dependência nesta combinação é cancelada [10]. Podemos ver em [82] que esta combinação é uma ferramenta muito usada quando queremos estudar formação de estrutura em modelos alternativos a ΛCDM . Se, por exemplo, usamos (2.276) e (2.273), teremos a seguinte combinação

$$f\sigma_8(a) = \frac{\sigma_8}{\delta(a=1)} a \partial_a \delta(a). \quad (2.277)$$

Utilizamos em nossa análise o conjunto de dados apresentados na tabela VI de [10]. Estes dados dependem do modelo fiducial usado pelas colaborações para converter ângulos e *redshift* em distâncias para avaliar a função de correlação. A correção fiducial, em termos do *redshift*, é implementada como [10]

$$q(z_i) = \frac{H(z_i) d_A(z_i)}{H^{fid}(z_i) d_A^{fid}(z_i)}, \quad (2.278)$$

sendo $i = 1, \dots, N$, com N representado o número total de pontos e fid indica a cosmologia fiducial usada para medir esses pontos. Desta maneira, usamos essa correção para construir a função de distribuição de probabilidade dos parâmetros do modelo no contexto dos conjuntos de dados $f\sigma_8$. Para a construção de $\chi_{f\sigma_8}^2$ usamos [10]

$$V^i(z_i, p^j) = f\sigma_{8,i} - \frac{f\sigma_8(z_i, p^j)}{q(z_i)} \quad (2.279)$$

sendo $f\sigma_{8,i}$ é o valor i -ésimo ponto, enquanto $f\sigma_8(z_i, p^j)$ é a previsão teórica e p^j é o número de parâmetros a serem restringidos. Então,

$$\chi_{f\sigma_8}^2 = V^i C_{ij}^{-1} V^j \quad (2.280)$$

sendo C_{ij}^{-1} o inverso da matriz de covariância dos dados, dada por

$$C_{ij}^{\text{total}} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & C_{ij}^{\text{WiggleZ}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix},$$

com σ_i os erros associados aos dados e C_{ij}^{WiggleZ}

$$C_{ij}^{\text{WiggleZ}} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 6.400 & 2.570 & 0.000 \\ 2.570 & 3.969 & 2.540 \\ 0.000 & 2.540 & 5.184 \end{pmatrix}.$$

a matriz de covariância associada aos dados de WiggleZ [85].

2.3.4 Radiação Cósmica de Fundo

A análise dos dados da radiação cósmica de fundo (CMB) será feita utilizando os dados obtidos pelo satélite Planck [1]. A análise desses dados é de extrema relevância no cenário cosmológico atual, uma vez que eles conseguem restringir certos parâmetros com uma grande precisão. A seguir, mostramos um breve resumo teórico relacionado a esses dados [52, 86, 87, 53, 88, 55, 1].

2.3.4.1 Espectro da CMB

Até a recombinação a evolução da matéria escura e da matéria bariônica são diferentes, uma vez que os bárions estão fortemente acoplados com os fótons. A partir da recombinação os fótons se desacoplam dos bárions e viajam livremente em nossa direção de todas as direções. Esses fótons mantêm a memória dos processos que sofreram antes e depois da superfície de ultimo espalhamento.

Podemos calcular os anisotropias de temperatura (Θ) na última superfície de espalhamento (ver, por exemplo, [52, 53, 55]). Observando as anisotropias na CMB podemos

compreender várias características do universo. Para isto, escrevemos as flutuações de temperatura como uma função sobre uma esfera, portanto, é mais fácil descrever estas flutuações através de harmônicos esféricos $Y_{lm}(\hat{p})$, tal que

$$\Theta(\mathbf{x}, \eta, \hat{p}) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{p}) \quad (2.281)$$

\hat{p} define a direção no céu ($\theta_{\text{céu}}, \phi_{\text{céu}}$) e os coeficientes $a_{lm}(\mathbf{x}, \eta)$ contém todas as informações sobre as flutuações de temperatura. As informações cosmológicas são determinadas nos multipolos com $l > 1$ (ver, por exemplo, [52, 53, 55]). Graças à ortogonalidade dos harmônicos esféricos, temos

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^*(\hat{p}) Y_{lm}(\hat{p}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.282)$$

sendo Y^* o complexo conjugado de Y e $d\Omega = d \cos \theta_{\text{céu}} d\phi_{\text{céu}}$. Logo, obtemos

$$a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{\Omega=4\pi} d\Omega Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\mathbf{k}, \eta, \hat{p}). \quad (2.283)$$

Supondo isotropia estatística, o valor esperado de a_{lm} é zero, enquanto que sua a variância é dada por

$$\langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \quad (2.284)$$

O valor esperado de a_{lm} é calculado sobre infinitas realizações do universo. Contudo, como só podemos observar um universo, a média do conjunto pode ser substituída, graças ao princípio ergódico [55], por uma média sobre as direções do céu, supondo que as propriedades estatísticas do universo sejam todas iguais em todas as direções. Isto é equivalente, no espaço multipolar, a uma média sobre m , pois espera-se que todos os a_{lm} tenham a mesma variância para cada valor de l , com $-l < m < +l$. Logo, podemos construir \hat{C}_l , um estimador do C_l real, como

$$\hat{C}_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}^* a_{lm}. \quad (2.285)$$

Este estimador tem uma variância, chamada variância cósmica, intrínseca à definição do próprio estimador e muda com l , uma vez que l pequenos tem menos m do que l altos ($N(m) = 2l + 1$)

$$\frac{\Delta C_l}{C_l} = \frac{\hat{C}_l - C_l}{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \quad (2.286)$$

Agora, vamos relacionar a_{lm} com os momentos multipolares das anisotropias de temperatura observados hoje $\Theta_l(\mathbf{k}, \eta_0)$. Considerando que as flutuações de temperatura de uma única onda plana possa ser decomposta como

$$\Theta(\mathbf{k}, \hat{p}, \eta) = \sum_l (-i)^l (2l+1) \Theta_l(\mathbf{k}, \eta) P_l(\hat{p} \cdot \hat{k}). \quad (2.287)$$

O polinômio de Legendre, P_l , está ligado aos harmônicos esféricos pela relação

$$P_l(\hat{k} \cdot \hat{p}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{p}) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (2.288)$$

Podemos reescrever (2.283) como

$$a_{lm} = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (-i)^l \Theta_l(\mathbf{k}, \eta) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (2.289)$$

Portanto, pode-se mostrar que a variância $C_l = \langle a_{lm} a_{l'm'} \rangle$ pode ser relacionada com os momentos multipolares das anisotropias observadas hoje como [52, 53, 55]

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_\phi(k, 0) \left| \frac{\Theta_l(k, \eta_0)}{\phi_p(k)} \right|^2 \quad (2.290)$$

o campo ϕ_p está ligado com as perturbações primordiais e P_ϕ é o espectro de potência primordial. Portanto, medindo o espectro de potência de temperatura CMB é possível obter informações tais como do universo primordial e, por exemplo, sobre como este evoluiu antes da recombinação.

Além disso, sabemos que os fótons da CMB são linearmente polarizados e, observando a sua polarização, é possível extrair informações complementares sobre a evolução do universo. De fato, os fótons da CMB são polarizados via componente quadrupolares de temperatura que podem ser originados tanto por perturbações escalares quanto por perturbações tensoriais de ondas gravitacionais produzidas por uma inflação primordial [52, 53, 55]. É possível descrever a polarização da CMB através dos modos E e modos B , distinguidos pelo padrão de polarização em torno de um ponto considerado no céu. Para o caso de um modo E , a polarização é paralela ou perpendicular a direção de propagação da onda. Para o modo B , a polarização é girada em 45° . Quanto à temperatura, as informações cosmológicas podem ser obtidas a partir dos espectros de potência de polarização e também de suas correlações cruzadas com temperatura. Logo, podemos definir os seguintes espectros de potência angular

$$C_l^{TT} = \langle a_{lm}^{*T} a_{lm}^T \rangle, \quad (2.291)$$

$$C_l^{EE} = \langle a_{lm}^{*E} a_{lm}^E \rangle, \quad (2.292)$$

$$C_l^{BB} = \langle a_{lm}^{*B} a_{lm}^B \rangle, \quad (2.293)$$

$$C_l^{TE} = \langle a_{lm}^{*T} a_{lm}^E \rangle, \quad (2.294)$$

$$C_l^{TB} = \langle a_{lm}^{*T} a_{lm}^B \rangle, \quad (2.295)$$

$$C_l^{EB} = \langle a_{lm}^{*E} a_{lm}^B \rangle. \quad (2.296)$$

Espera-se que as correlações cruzadas TB e EB desapareçam devido ao fato de B ter paridade oposta a T e E . Os modos disponíveis na pesquisa Planck [1] são TT , EE e TE . Na figura 1 (plots retirado diretamente de [1]) podemos ver os espectros de temperatura e de polarização.

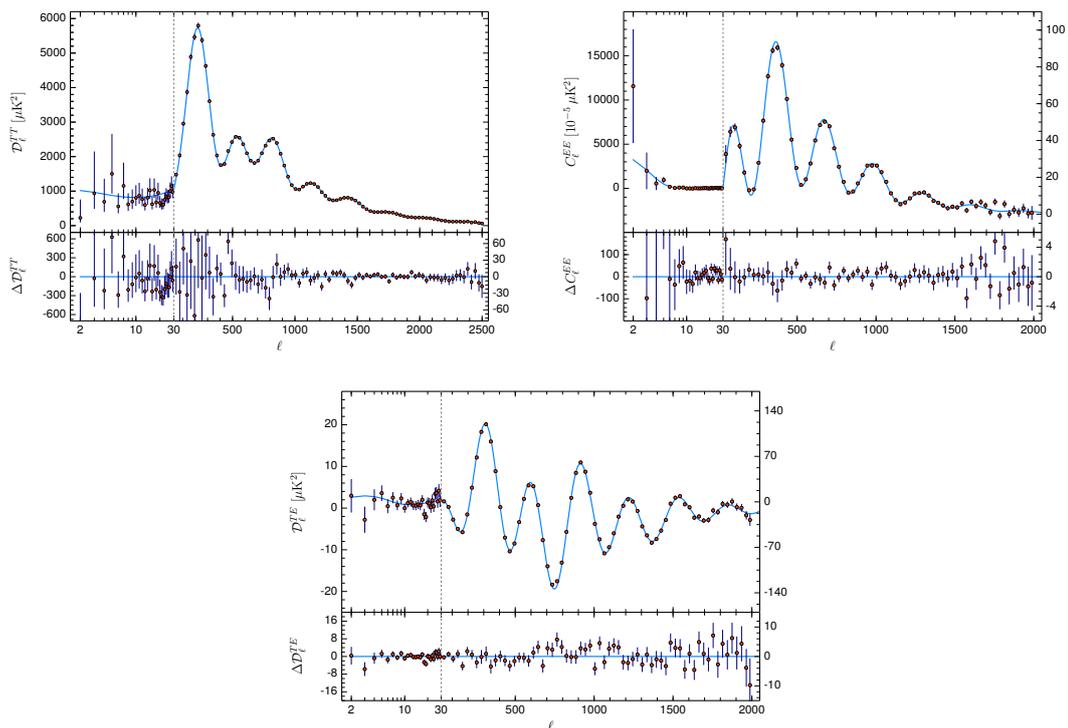


Figura 1 – Gráficos do espectro de potência de temperatura e polarização da radiação cósmica de fundo, retirados de [1].

Lenteamento da CMB

A direção de propagação dos fótons da CMB é desviada por regiões nas quais se têm variação espacial de gravidade. Essas regiões de variação de gravidade são, basicamente, as estruturas que existem no caminho dos fótons da superfície de último espalhamento até nós. Desta maneira, estudar lenteamento nos daria uma ideia da distribuição dessas estruturas.

O lenteamento gravitacional que afetam a CMB, podem ajudar a melhorar significativamente as restrições sobre vários parâmetros cosmológicos (como podemos ver, por exemplo, em [1]), podendo quebrar importantes degenerescências nos parâmetros cosmológicos. Portanto, estudos com dados de lenteamento da CMB possibilitam reconstruir a distribuição da matéria após a última superfície de espalhamento.

Podemos relacionar o campo de deflexão de lenteamento, d , com o potencial de lenteamento, φ , através da equação como $d = \nabla\varphi$. No espaço harmônico, a deflexão e o potencial de lenteamentos dos multipolos estão relacionados pela seguinte equação

$$d_l^m = -i\sqrt{l(l+1)}\varphi_l^m, \quad (2.297)$$

e, portanto, os espectros de potência, $C_l^{dd} \equiv \langle d_l^m d_l^{m*} \rangle$ e $C_l^{\varphi\varphi} \equiv \langle \varphi_l^m \varphi_l^{m*} \rangle$, são dados por

$$C_l^{dd} = l(l+1)C_l^{\varphi\varphi}. \quad (2.298)$$

3 Tópicos de Gravitação Estendida

Com os problemas relacionados ao modelo Λ CDM, modelos alternativos vêm sendo estudados e testados como forma de explicar e descrever a dinâmica do nosso universo. No entanto, o teorema de Lovelock [89, 90] garante que as únicas equações derivadas a partir de uma ação local e contendo no máximo derivadas segundas na métrica, em um espaço de quatro dimensões com densidade de Lagrangiana da forma $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu})$, são as equações de Einstein. Logo, se queremos descrever uma teoria da gravitação que possua equações diferentes de RG, devemos adicionar mais graus de liberdade em nossa densidade de Lagrangiana, ou seja, escalares, vetores ou tensores. As bem conhecidas teorias estendidas da gravitação (ETGs) [22] são exemplos de abordagens baseadas na adição de invariantes de curvatura de ordem superior (por exemplo, R^2 , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$) e campos escalares não minimamente acoplados à geometria (como $\phi^2 R$). Os últimos termos podem ser vistos como correções ou ampliações de RG.

Este capítulo tem como objetivo analisar brevemente o formalismo e as implicações cosmológicas de algumas classes particulares de ETGs, em particular duas dessas classes, a teoria $f(R)$ e a teoria escalar-tensorial (mais detalhes ver [22, 23, 24, 25]).

3.1 Parametrizações Generalizadas

Antes de começar a discutir teorias que vão além do modelo padrão, vamos introduzir alguns parâmetros que são relacionados diretamente a estes modelos (indicamos ao leitor a referencia [91] para mais detalhes).

Qualquer modificação genérica, porém linear, da dinâmica das perturbações escalares em relação ao cenário de Λ CDM pode ser representada pela introdução de dois novos graus de liberdade nas equações de campo lineares. Estes graus de liberdade são obtidos da seguinte maneira. Em Λ CDM, após a igualdade radiação-matéria não existe mais tensão anisotrópica presente e as equações de Poisson relativística e a equação para a tensão anisotrópica tornam-se,

$$-k^2\phi = 4\pi G a^2 \bar{\varepsilon} \Delta, \quad \phi = \psi. \quad (3.1)$$

aqui usamos o contraste de densidade invariante de calibre

$$\Delta \equiv \delta + 3 \left(1 + \frac{\bar{p}}{\bar{\varepsilon}} \right) \frac{\mathcal{H}V}{k}. \quad (3.2)$$

Os dois graus de liberdade são introduzido quando reescrevemos o sistema (3.1) como

$$-k^2\phi = 4\pi GQ(a, k)a^2\bar{\epsilon}\Delta, \quad (3.3)$$

$$\frac{\phi}{\psi} = \eta(a, k). \quad (3.4)$$

O comportamento não trivial de Q e η pode ocorrer devido a algum agrupamento associado a componente de energia escura ou alguma teoria que estenda a RG. Nos modelos alternativos a RG, a função $Q(a, k)$ representa um efeito de blindagem (*screening*) devido a modificações locais da gravidade e modifica efetivamente a constante de Newton. Nos modelos dinâmicos de energia escura, Q representa o agrupamento adicional devido às perturbações na componente de energia escura. Por outro lado, a função $\eta(a, k)$, que denominamos de *slip* gravitacional parametriza a tensão anisotrópica efetiva que é introduzida ou por modelos de energia escura ou modelos de gravitação estendida. Devemos notar que seu valor em Λ CDM é $\eta(a, k) = 1$.

Dada teoria alternativa ao modelo padrão, a dependência no fator de escala e no tempo das funções Q e $\eta(a, k)$ podem ser derivadas e suas previsões são projetadas no plano (Q, η) (veja, por exemplo, [92] para uma visão geral das previsões para diferentes modelos alternativos ao modelo padrão).

Agora, é interessante notar que usando as equações (3.3) e (3.4), as equações de dinâmica de fluido, (2.188) e (2.189), podem ser expressas da seguinte forma [93]

$$\Delta' = -\frac{1/\eta - 1 + (\ln Q)'}{x_Q^2 + \frac{9}{2}\Omega} \frac{9}{2}\Omega\Delta - \frac{x_Q^2 - 3(\ln H)'/Q}{x_Q^2 + \frac{9}{2}\Omega} \frac{\theta}{aH}, \quad (3.5)$$

$$\theta' = -\theta - \frac{3}{2}aH\Omega\frac{Q}{\eta}\Delta, \quad (3.6)$$

aqui a linha “'” representa a derivada com relação a $\ln a$. Também temos $\theta = kV$, $x_Q \equiv k/(aH\sqrt{Q})$ e $\Omega = \Omega(a)$ (lembre que este é o parâmetro de densidade do fluido). Note que é Q/η que modifica o termo fonte da equação θ e também o crescimento de Δ . Junto com as equações (3.3) e (3.4), estas equações de evolução formam um sistema fechado para $(\Delta, \theta, \phi, \psi)$ que pode ser resolvido para determinado (Q, η) .

A influência do fator de escala é modificada por Q , de maneira que, agora, o comprimento de x_Q determina o comportamento de Δ . Em escalas de sub-horizonte, sendo $x_Q \gg 1$, encontramos

$$\Delta'' + [2 + (\ln H)']\Delta' = \frac{3}{2}\Omega(a)\frac{Q}{\eta}\Delta \quad (3.7)$$

e $\theta = -aH\Delta'$. A equação de crescimento é modificada apenas pelo fator Q/η . Na escala super-horizonte, tal que $x_Q \ll 1$, temos

$$\Delta' = -[1/\eta - 1 + (\ln Q)']\Delta + \frac{2}{3\Omega} \frac{(\ln H)'}{aH} \frac{1}{Q}\theta, \quad (3.8)$$

$$\theta' = -\theta - \frac{3}{2}\Omega aH\frac{Q}{\eta}\Delta. \quad (3.9)$$

Q e η agora criam um termo adicional de arrasto na equação de Δ , exceto se $\eta(a, k) > 1$. Em [93] podemos ver também que os potenciais da métrica evoluem de forma independente e são invariantes de escalas sob escalas de super-horizonte, desde que $x_Q \rightarrow 0$ para $k \rightarrow 0$. Isto é necessário para que a perturbação da curvatura comóvel, ς , seja constante em escalas de super-horizonte [91].

Como observado acima, a combinação Q/η modifica o termo fonte na equação de crescimento. Além disso, as velocidades das perturbações seguem gradientes do potencial Newtoniano, ψ , e portanto, a comparação destas velocidades com o campo de densidade também é sensível à Q/η . Logo, definimos

$$Y \equiv Q/\eta \quad \Rightarrow \quad -k^2\psi = 4\pi G a^2 Y(a, k) \bar{\epsilon} \Delta. \quad (3.10)$$

Por outro lado, lentes fracas, por exemplo, medem $(\phi + \psi)/2$ tal que

$$\Sigma \equiv \frac{1}{2}Q(1 + 1/\eta) = \frac{1}{2}Y(\eta + 1) \quad \Rightarrow \quad -k^2(\phi + \psi) = 8\pi G a^2 \Sigma(a, k) \bar{\epsilon} \Delta. \quad (3.11)$$

Um resumo de diferentes outras variáveis utilizadas pode ser visto em [94].

Qualquer combinação de duas variáveis do conjunto (η, Q, Y, Σ) é uma alternativa válida para o par (Q, η) . Acontece que o par (Y, Σ) é particularmente bem adaptado quando os dados de CMB, lentes fracas e estrutura em larga escala são combinados por serem menos correlacionados que outros [95, 96]. Em [97] os autores encontram resultados independentes de escala para o *slip* gravitacional.

3.2 Teoria $f(R)$

3.2.1 Considerações Iniciais

As chamadas teorias $f(R)$ generalizam a ação de Einstein-Hilbert tornando esta ação uma função mais geral do escalar de Ricci. Elas foram intensamente estudadas e possuem várias revisões [98, 99, 100, 101, 102, 24, 22, 25]. O interesse por tais teorias foi estimulado nas décadas de 60, 70 e 80 observando que a quantização dos campos de matéria em um espaço-tempo não quantizado pode levar a tais teorias [103], que podem ter melhores propriedades de renormalização [104] e que podem levar a um período de expansão acelerada no início da história do nosso universo [105]. Mais recentemente, estes modelos têm sido de considerável interesse como uma possível explicação para a expansão acelerada tardia observada no Universo.

Como dito anteriormente, as teorias $f(R)$ são caracterizadas por uma simples generalização da ação de Einstein-Hilbert, logo,

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int f(R) \sqrt{-g} d^4x + S_m[g, \Upsilon], \quad (3.12)$$

sendo $\kappa^2 = 8\pi G$. Devemos notar que esta ação preserva a covariância geral e a invariância de local que estão dentro de RG. Além disso, os campos de matéria em S_m obedecem a equações de conservação padrão e, portanto, a métrica $g_{\mu\nu}$ corresponde ao referencial físico (também chamado de referencial de Jordan[24, 22, 25]).

Existem algumas abordagens para derivar as equações de campo da ação (3.12). A primeira abordagem é denominada de formalismo métrico no qual a conexão $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ é definida em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ (conexão de Levi-Civita). A outra abordagem é denominada de formalismo de Palatini o qual trata a métrica e a conexão como campos independentes na teoria, sendo a ação um funcional desses dois campos. Existe também a chamada abordagem métrica-afim na qual considera-se novamente a métrica e a conexão como campos independentes, como no formalismo de Palatini, mas agora a ação da matéria é uma função tanto da métrica quanto da conexão (ao invés de apenas da métrica, como é o caso em Palatini e no formalismo métrico). Aqui, estamos interessados em nos concentrar na dinâmica descrita pelo formalismo métrico, portanto, variando a ação (3.12) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ encontramos

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = \kappa^2 T_{\mu\nu} , \quad (3.13)$$

com $F(R) \equiv \partial f / \partial R$ e $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. O traço da equação (3.13) nos fornece

$$3\square F(R) + F(R)R - 2f(R) = \kappa^2 T , \quad (3.14)$$

sendo $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$ o traço do tensor momento-energia. Note que recuperamos RG quando $f(R) = R$ e $F(R) = 1$, de forma que o termo $\square F(R)$ em (3.14) desaparece.

As teorias $f(R)$ derivadas da abordagem variacional métrica podem ser transformadas conformalmente em um referencial no qual as equações de campo da teoria assumem a forma de equações de Einstein mais um campo escalar minimamente acoplado (referencial de Einstein)[23, 24, 22, 25]. Desta forma, aplicamos a transformação conforme sobre a métrica, $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ (o til representa a quantidade no referencial de Einstein), tal que [24, 25]

$$\Omega^2 = F(R) . \quad (3.15)$$

Assim, definindo a variável

$$\kappa \hat{\Phi} \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} \ln F , \quad (3.16)$$

a ação (3.12) no referencial de Einstein é [25]

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \hat{\Phi} \tilde{\nabla}_\nu \hat{\Phi} - V(\hat{\Phi}) \right] + S_m[F^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Upsilon] , \quad (3.17)$$

sendo

$$V(\hat{\Phi}) = \frac{RF - f}{2\kappa^2 F^2} . \quad (3.18)$$

Desta maneira, devemos notar que teorias derivadas de uma ação da forma (3.12) podem sempre ser levadas à RG com um campo escalar minimamente acoplado e com um acoplamento não métrico aos campos de matéria, desde que $F \neq 0$.

Nas próximas subseções apresentamos alguns resultados interessantes encontrados na literatura sobre a dinâmica cosmológica de fundo e linear para as teorias $f(R)$ [25].

3.2.2 Cosmologia

Como mencionado, a motivação inicial para o estudo da gravidade $f(R)$ veio de considerações cosmológicas a respeito das fases iniciais do Universo, incluindo a presença de uma singularidade primordial e a expansão inflacionária. Um importante trabalho neste contexto pode ser visto em [106]. No presente, grande parte da motivação vem da necessidade de explicar a aparente expansão acelerada do Universo que é observada nos tempos atuais. Dadas as várias contribuições e revisões a cerca da exploração de modelos $f(R)$ presentes na literatura, o escopo desta seção é apresentar as principais previsões e resultados a cerca da cosmologia neste modelo. A viabilidade de modelos dentro da proposta $f(R)$ no espaço-tempo de FLRW é estudado em [107] e [108].

Utilizando a métrica (2.160) escrita em termos do tempo conforme, juntamente com o tensor energia momento para um fluido perfeito dado em (2.21) na equação de campo (3.13), as equações de Friedmann modificadas são

$$\mathcal{H}^2 = \frac{1}{3F} \left[8\pi G a^2 \bar{\varepsilon} - \frac{a^2}{2} (f - RF) - 3\mathcal{H}F' \right], \quad (3.19)$$

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}^2 = -\frac{1}{2F} (8\pi G \bar{\varepsilon} + 8\pi G \bar{p} + F'' - 2\mathcal{H}F'), \quad (3.20)$$

para o fundo cosmológico. Aqui é válida a conservação do tensor momento-energia (2.45).

Para ordem linear, as componentes (0-0) e (0-i) de (3.13) fornecem, respectivamente,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\psi) &= \frac{1}{2F} \left[8\pi G a^2 \delta\varepsilon + \nabla^2 \delta F \right. \\ &\quad \left. + 3(\mathcal{H}'\delta F - \mathcal{H}\delta F') + 3F'(2\mathcal{H}\psi + \phi') \right], \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\left[\phi' + \mathcal{H}\psi + \frac{F'}{2F}\psi - \frac{1}{2F}(\delta F' - \mathcal{H}\delta F) \right]_{,i} = \frac{4\pi G a^2}{F} (\bar{\varepsilon} + \varepsilon) v_i. \quad (3.22)$$

Além disso, o traço da equação (3.13) gera

$$\begin{aligned} \delta F'' + 2\mathcal{H}\delta F' - 2(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\delta F - \nabla^2 \delta F + 2F\phi'' + 3(2\mathcal{H}F - F')(\phi' + \psi') \\ + 2\left(2F(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}') - 2\mathcal{H}F' - F''\right)\psi = \frac{8\pi G a^2}{3} (\delta\varepsilon - 3\delta p) - \frac{2a^2 F}{3} \delta R, \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que

$$\delta R = -\frac{2}{a^2} \left(\nabla^2 \psi - 2\nabla^2 \phi + 6(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\psi + 3\mathcal{H}(3\phi' + \psi') + 3\phi'' \right). \quad (3.24)$$

Além disso, o traço e a parte sem traço da componente (i, j) das equações de campo deste modelo são dadas, respectivamente, por

$$2F\phi'' + (2F\mathcal{H} + F')(2\phi' + \psi') + 2(F(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}') + \mathcal{H}F' + F'')\psi - \nabla^2(F(\phi - \psi) - \delta F) - \delta F'' - \mathcal{H}\delta F' + (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\delta F = 8\pi G\delta p, \quad (3.25)$$

$$\phi - \psi = \frac{\delta F}{F}. \quad (3.26)$$

De modo geral, as equações de campo acima podem ser escritas em termos dos parâmetros apresentados na seção 3.1, e como pode ser visto em [109] e [110]

$$Y = \frac{1}{f_R} \left(\frac{1 + 4(f_{RR}/f_R)(k/a)^2}{1 + 3(f_{RR}/f_R)(k/a)^2} \right) \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1 + 2(f_{RR}/f_R)(k/a)^2}{1 + 4(f_{RR}/f_R)(k/a)^2}, \quad (3.27)$$

com a quais podemos tirar algumas conclusões qualitativas a respeito do comportamento geral de modelos $f(R)$. Propostas viáveis para modelar energia escura a partir de modelos $f(R)$ foram construídas para ter massa, $M = 1/(2f_{RR})$, grande bem no meio do período da evolução do Universo dominado pela matéria, ou seja, $f_{RR} \gg 1$ e $f_R \simeq 1$ para $R \gg H_0$. No Regime $(f_{RR}/f_R)(k/a)^2 \ll 1$, ou ainda $M^2 f_R \gg k^2/a^2$, se obtém $Y \simeq 1$ e $\eta \simeq 1$. Com isso a evolução da perturbação da densidade é similar ao obtido em RG. Em tempos tardios, no qual temos $(f_{RR}/f_R)(k/a)^2 \gg 1$ [25] os parâmetros $Y \simeq 4/(3f_R)$ e $\eta \simeq 1/2$, e a taxa de crescimento das perturbações da matéria é maior do que no modelo Λ CDM.

Independentemente da proposta, qualquer modelo candidato à gravitação modificada deve ser confrontado com as observações. Para sondar a expansão de fundo de um universo de FLRW, por exemplo, pode-se investigar as posições do pico do espectro das flutuações da temperatura da CMB e das Oscilações Acústicas de Bárions. Portanto, as observações dessas quantidades permitem que a forma da $a(t)$ seja restringida. Entretanto, devido a liberdade na escolha de $f(R)$, tais observações não são capazes de falsear a forma mais geral dessa teoria diretamente. Portanto, para ir mais longe usando as observações cosmológicas, deve-se considerar modelos específicos. Para ilustrar, podemos considerar o modelo de Hu & Sawicki [111], por exemplo, que é descrito por

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}{1 + c_2 \left(\frac{R}{m^2}\right)^n}, \quad (3.28)$$

em que $m^2 = \kappa^2 \rho_0/3$, sendo ρ_0 a atual densidade média de massa-energia e c_1 e c_2 são parâmetros livres a serem determinados pelas observações e, para o espaço-tempo plano, dados por

$$c_2 = -\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} \frac{n}{f_{R0}} \left(\frac{12}{\Omega_m} - 9 \right)^{-n-1}, \quad (3.29)$$

$$c_1 = 6 \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m} c_2, \quad (3.30)$$

em que f_{R0} é f_R avaliada hoje. Ou seja, o modelo possui dois parâmetros livres, f_{R0} e n . No trabalho [112] os autores fizeram uma análise dos conjuntos de dados da CMB e Oscilações Acústicas Bariônicas mais recentes, bem como restrições independentes na relação entre a amplitude de agrupamento de matéria σ_8 e a densidade de matéria Ω_m das contagens de números de aglomerados de galáxias de Planck Sunyaev Zeldovich (PSZ) [113], obtendo a principal restrição

$$|f_{R0}| < 3,7 \times 10^{-6}, \quad (3.31)$$

com intervalo de confiança de 95%, para $\Omega_m = 0,291_{-0,002}^{+0,006}$ e $\sigma_8 = 0,798_{-0,002}^{+0,003}$. Em [112] não é fornecida a restrição sobre o parâmetro n , pois, de acordo com os autores o efeito de n nos observáveis cosmológicos é muito mais suave do que o efeito induzido por f_{R0} .

3.3 Teoria Escalar-Tensorial

3.3.1 Considerações Iniciais

As teorias escalares-tensoriais são provavelmente os exemplos mais simples de modelos alternativos de gravitação, além de serem uma das alternativas mais intensamente estudadas na literatura [23, 24, 22, 25]. A implementação de campos escalares como mediadores da gravitação, junto com a métrica, tiveram seu início na teoria de Brans-Dicke [114], que tentou reviver o princípio de Mach, segundo o qual a inércia de um corpo é o resultado de sua interação com relação à distribuição de massa global no universo, e também incorporou a ideia de Dirac de que a constante gravitacional Newtoniana varia no tempo. A teoria de Brans-Dicke é um caso particular das teorias escalares-tensoriais. Com a descoberta da aceleração cósmica estas teorias foram e são intensamente estudadas como uma forma de generalizar a constante cosmológica assim como explicar o problema da constante cosmológica e o problema da coincidência cósmica [115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 25]. Desta maneira, a ação que representa as teorias escalares-tensoriais é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\varphi, R) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(\varphi) g^{\mu\nu} \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi \right] + S_m[g, \Upsilon], \quad (3.32)$$

aqui assumimos unidades tais que $\kappa = 1$. Esta ação inclui uma ampla variedade de teorias, dentre elas estão teoria de Brans-Dicke e a teoria $f(R)$. A correspondência com a teoria $f(R)$ esta na escolha de $f(\varphi, R) = f(R)$ e $\mathcal{Q} = 0$, enquanto que a teoria de Brans-Dicke está na escolha de $f = \varphi R$ e $\mathcal{Q} = \omega_{BD}/\varphi$, sendo ω_{BD} chamado de parâmetro Brans-Dicke [114]. Além disso, podemos generalizar a teoria de Brans-Dicke adicionando o potencial $U(\varphi)$ à ação original, ou seja, $f = \varphi R - 2U(\varphi)$ e $\mathcal{Q} = \omega_{BD}/\varphi$.

A ação (3.32) está escrita no referencial de Jordan, no entanto, podemos realizar uma transformação conforme sobre a métrica de tal forma que esta ação possa ser escrita

no referencial de Einstein[23, 24, 22, 25]. Logo, a ação (3.32) pode ser transformada para o referencial de Einstein através da seguinte escolha

$$\Omega^2 = F(\varphi, R) \equiv \frac{\partial}{\partial R} f(\varphi, R) . \quad (3.33)$$

Para que o fator conforme seja uma função apenas de φ consideramos teorias tais que a função $f(\varphi, R)$ tenha a forma

$$f(\varphi, R) = F(\varphi)R - 2U(\varphi) . \quad (3.34)$$

Desta forma, no referencial de Einstein a ação (3.32) toma a forma [25]

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \Psi \tilde{\nabla}_\nu \Psi - V(\Psi) \right] + S_m(F^{-1} \tilde{g}_{\mu\nu}, \Upsilon) , \quad (3.35)$$

Novamente, levando em consideração a ação (3.35) o tensor momento-energia não é conservado [24, 22]. Para escrever esta ação com termo cinético canônico usamos

$$\Psi = \int d\varphi \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{F_{,\varphi}}{F} \right)^2 + \frac{\mathcal{Q}}{F}} . \quad (3.36)$$

O potencial é escrito como

$$V(\Psi) = \frac{U}{F^2} . \quad (3.37)$$

O termo $F_{,\varphi}$ representa a derivada de F com relação ao campo φ . Neste referencial o campo escalar se acopla à matéria dando origem a uma interação de quinta força. Desta maneira, a fim de descrever a força do acoplamento introduzimos a seguinte quantidade (ver [25])

$$\Gamma \equiv -\frac{F_{,\Psi}}{2F} = -\frac{F_{,\varphi}}{2F} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{F_{,\varphi}}{F} \right)^2 + \frac{\mathcal{Q}}{F} \right]^{-1/2} . \quad (3.38)$$

Aqui, vamos considerar teorias escalares-tensoriais nas quais Γ é constante (teorias $f(R)$ são um exemplo em que este acoplamento é constante). Desta forma, a partir de (3.36) e (3.38) encontramos

$$F = e^{-2\Gamma\Psi} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q} = (1 - 6\Gamma^2)F \left(\frac{d\Psi}{d\varphi} \right)^2 . \quad (3.39)$$

Portanto, a ação (3.32) no referencial de Jordan fica [25, 123]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F(\Psi)R - \frac{1}{2} (1 - 6\Gamma^2)F(\Psi)g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Psi \nabla_\nu \Psi - U(\Psi) \right] + S_m[g, \Upsilon] . \quad (3.40)$$

Lembrando que estamos considerando aqui teorias do tipo (3.34). Devemos notar que no limite em que $\Gamma \rightarrow 0$ a ação (3.40) se reduz à ação de um campo escalar Ψ minimamente

acoplado a gravidade, com o potencial $U(\Psi)$. Entretanto, se consideramos a transformação conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\Psi)g_{\mu\nu}$ na ação no referencial de Jordan (3.40), obtemos a ação no referencial de Einstein (3.35) com um acoplamento constante Γ [25].

Agora, através da definição $\Phi = F = e^{-2\Gamma\Psi}$ é fácil ver que a ação (3.40) é equivalente a ação de Brans-Dicke mais um potencial U

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \Phi R - \frac{\omega_{BD}}{2\Phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - U(\Phi) \right] + S_m[g_{\mu\nu}, \Upsilon], \quad (3.41)$$

de maneira que, o acoplamento constante Γ e o parâmetro de Brans-Dicke se relacionam pela seguinte equação [123, 25]

$$3 + 2\omega_{BD} = \frac{1}{2\Gamma^2}. \quad (3.42)$$

Devemos notar que no limite em que $\Gamma \rightarrow 0$ (RG) temos $\omega_{BD} \rightarrow \infty$, como esperado [25, 114].

Agora, considerando que a ação (3.41) seja um funcional de $g_{\mu\nu}$ e Φ , a variação desta ação com relação a estes campos nos fornece

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{\Phi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Phi} g_{\mu\nu} U + \frac{1}{\Phi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi) + \frac{\omega_{BD}}{\Phi^2} \left[\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Phi \nabla_\beta \Phi \right], \quad (3.43)$$

$$(3 + 2\omega_{BD}) \square \Phi + 4U(\Phi) - 2\Phi \frac{dU}{d\Phi} = T. \quad (3.44)$$

Podemos determinar a relação entre a teoria de Brans-Dicke com as teorias $f(R)$ considerando a seguinte correspondência

$$\Phi = F(R) \quad \text{e} \quad U(\Phi) = \frac{1}{2} [R(\Phi)F - f(R(\Phi))]. \quad (3.45)$$

Portanto, é fácil ver que a teoria $f(R)$ corresponde à uma teoria de Brans-Dicke, com $\omega_{BD} = 0$, mais um potencial U . Além disso, podemos substituir este valor de ω_{BD} em (3.42) e determinar o acoplamento Γ para teorias $f(R)$, no formalismo métrico, que vale $\Gamma = -1/\sqrt{6}$ [25].

A seguir apresentamos alguns resultados interessantes encontrados na literatura sobre a dinâmica cosmológica de fundo e linear para as teorias escalares-tensoriais, em particular para a teoria de Brans-Dicke.

3.3.2 Cosmologia

O modelo de Brans-Dicke, como foi originalmente proposto em [114], tem a ação na forma (3.41) com $U = 0$. Com esta restrição, com a métrica de FLRW (2.14) e o tensor

energia momento (2.21), a componente (0-0) de (3.43) leva a

$$\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} \frac{\Phi'}{\Phi} = \frac{8\pi G a^2}{3\Phi} \bar{\varepsilon} + \frac{\omega_{BD}}{6} \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2, \quad (3.46)$$

e a equação (3.44) fornece

$$\Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' = \frac{8\pi G a^2}{(2\omega_{BD} + 3)} (\bar{\varepsilon} - 3\bar{p}). \quad (3.47)$$

Nas expressões acima, as dimensões foram retomadas para que Φ seja adimensional. Além disso, a relação entre ε e p é dada pela equação de continuidade na forma usual. Para as perturbações escalares, utilizando a métrica no calibre Newtoniano (2.160) e introduzindo a perturbação $\Phi \rightarrow \Phi + \delta\Phi$, se obtém, para a componente temporal de (3.43)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a^2} (\nabla^2 \phi - 3\mathcal{H}\phi' - 3\mathcal{H}^2\psi) + \frac{\omega_{BD}}{a^2\Phi} \left[\delta\Phi \left(\frac{\Phi'}{\Phi} \right)^2 + \frac{\Phi'^2}{\Phi} \psi - \frac{\Phi'}{\Phi} \delta\Phi' \right] \\ & - \frac{1}{a^2\Phi} \left[\nabla^2 \delta\Phi + 3\mathcal{H} \frac{\Phi'}{\Phi} \delta\Phi + 3\Phi'(\phi' + 2\mathcal{H}\psi) - 3\mathcal{H}\delta\Phi' \right] = \frac{8\pi G}{\Phi} \delta\varepsilon - \frac{8\pi G}{\Phi} \bar{\varepsilon} \frac{\delta\Phi}{\Phi}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

e para (3.44)

$$\nabla^2 \delta\Phi - 2H\delta\Phi' - \delta\Phi'' + 2\Phi''\psi + \Phi'(4\mathcal{H}\psi + 3\phi' + \psi') = \frac{8\pi G a^2}{2\omega_{BD} + 3} (\delta\varepsilon - 3\delta p). \quad (3.49)$$

Além disso, se obtém as restrições

$$\frac{2}{a^2} (\phi' + \mathcal{H}\psi)_{,i} + \frac{1}{a^2\Phi} (\Phi'\psi + \mathcal{H}\delta\Phi - \delta\Phi')_{,i} + \frac{\omega_{BD}\Phi'}{a^2\Phi^2} \delta\Phi_{,i} = \frac{8\pi}{\Phi} (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) v_i, \quad (3.50)$$

e

$$\phi - \psi = \frac{\delta\Phi}{\Phi}. \quad (3.51)$$

Vários trabalhos foram feitos desde a publicação do modelo de Brans-Dicke. No contexto cosmológico, por exemplo, os autores de [124] utilizaram dados das anisotropias da radiação cósmica de fundo, incluindo os da Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) [125], e obtiveram a restrição $\omega_{BD} > 120$. A restrição cosmológica atual é $\omega_{BD} > 890$ reportada em [126]. É importante mencionar que o limite mais rigoroso é obtido a partir de observações no Sistema Solar com medições utilizando a sonda Cassini [127], fornecendo um limite inferior de $\omega_{BD} > 4 \times 10^4$.

4 Modelo com G e Λ Dependentes de Escala

4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo vamos analisar em detalhes uma classe de modelo de gravitação estendida inspirada em efeitos de Grupo de Renormalização (GR) em grandes escalas cosmológicas. Nesta abordagem, a constante gravitacional G e a constante cosmológica Λ variam de acordo com certa escala.

Efeitos do grupo de renormalização na gravitação em grandes distâncias (astrofísicas ou cosmológicas) não são uma novidade e podem ser vistas a partir de diferentes abordagens (por exemplo, [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42]). Eles incluem abordagens dentro de gravitação quântica (como gravitação assintoticamente segura,¹) teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo e fenomenologias que enfatizam os vínculos dos dados observacionais e simetrias clássicas. Sendo mais específico, no contexto de teoria quântica de campos em espaço-tempo curvo, precisamos complementar a ação Einstein-Hilbert com termos de derivadas superior com o objetivo de quantizar adequadamente o setor da matéria. Estes termos de derivada superior são dinamicamente relevantes em pequenas distâncias, mas sua importância diminui à medida que estas distâncias aumentam. Pode-se mostrar que seus acoplamentos possuem fluxos de GR triviais no infravermelho (ou seja, tornam-se, de fato, constantes)[128, 129]. Este comportamento é semelhante ao da eletrodinâmica quântica, em que, no limite do infravermelho, o acoplamento torna-se constante [130, 131]. Entretanto, os dois acoplamentos da gravitação, G e Λ , não precisam ter o mesmo comportamento e podem variar no infravermelho (ver, por exemplo, [33]). Embora os acoplamentos para gravitação possam variar em contextos diferentes de outros acoplamentos, não se sabe exatamente como variam. Os obstáculos por trás desta questão estão em duas etapas, determinar a relação entre esses acoplamentos e a escala, que chamamos de μ , e a relação desta escala com as quantidades físicas do sistema em análise, tal relação denominamos *configuração de escala* (ver, por exemplo, [28, 31, 132, 133]).

Desta forma, vamos analisar o cenário cosmológico desenvolvido em [2]. Considerando que G e Λ não se comportam mais como constantes em distâncias astrofísicas ou cosmológicas, consideramos duas hipóteses principais

- i) Em grandes escalas cosmológicas, deve existir uma descrição efetiva que esteja totalmente dentro da estrutura clássica. Em particular, deve haver uma ação clássica

¹ Do inglês *asymptotically safe gravity*.

completa capaz de descrever efetivamente os efeitos nos quais G e Λ dependem de escala, em grandes escalas cosmológicas.

- ii) Consideramos uma escala μ que é essencialmente uma medida das perturbações do espaço-tempo. Esta escala foi apresentada de forma covariante em [39], que pode ser vista como uma extensão covariante de uma escala baseada no potencial Newtoniano [38, 134], que por sua vez estende outros casos de distribuições contínuas de matéria [28, 31].

Vale destacar que nossa hipótese i) é uma extensão da abordagem de “ação aprimorada” descrita em [28]. As informações relevantes são colocadas em uma ação clássica, incluindo o significado da escala (ver também [135]). Além disso, outra possibilidade é implementar esses efeitos à nível das equações de campo da RG [28, 37, 136, 137]. Neste caso, não se considera uma ação completa, ou até mesmo não se parte de uma ação. Já em [138], parte-se de uma ação e encontra-se equações de campo similares ao caso em que as funções que representam G e Λ são implementadas no nível das equações de campo. Para tanto, utiliza-se um campo externo que implementa uma simetria conforme.

Destacamos o fato de que nosso trabalho [2] é o primeiro à aplicar a escala covariante em cosmologia.

Para a cosmologia, distinguimos duas classes de escalas: aquelas com base no tempo cosmológico t e aquelas baseadas no número de onda das perturbações, k . Em particular, a classe que depende do tempo cósmico inclui escalas que são funções do parâmetro Hubble [139] (ver também [31, 29, 140]). De maneira que, para tratar de fenômenos próximos à singularidade, parece natural considerar os efeitos das escalas baseados no tempo (assim, havendo efeitos no fundo cosmológico). Entretanto, especialmente para tempos tardios, as escalas baseadas no número de onda podem ter um papel relevante. Para selecioná-la, consideramos também que esta escala

- a) É explicitamente covariante no espaço-tempo (é um escalar), sendo uma propriedade bem-vinda para que possamos inserir esta escala na ação efetiva e, assim, lidar com perturbações cosmológicas;
- b) Nos leva a uma dinâmica diferente da RG e das teorias de gravitação estendida que apresentamos na seção anterior. Por exemplo, escolher $\mu = f(R)$ leva à $f(R)$ padrão [133, 141];
- c) Nos diga que, fenomenologicamente, é razoável que os possíveis desvios estejam no nível perturbativo, levando em consideração o sucesso geral do cenário cosmológico padrão.

Com o cenário descrito acima, vamos mostrar que um quadro dinâmico consistente dentro da cosmologia requer o uso de uma segunda escala [2] (métodos com múltiplas escalas já foram analisados e podem ser encontrados em [142, 143, 144]). Esta segunda escala, entretanto, é fixada a partir da consistência dinâmica do modelo.

Portanto, como fizemos em [2], começamos por rever a ação apresentada em [39] ampliando-a para um número arbitrário de escalas. Mostramos que, dada a métrica de FLRW plana mais perturbações escalares no calibre Newtoniano, a forma mais natural e consistente para segunda escala é uma função do traço do tensor momento-energia do fundo cosmológico. Em seguida, mostramos os resultados que os vínculos cosmológicos atribuem a nossa teoria, apresentando primeiro os resultados qualitativos obtidos em [2] e, depois, os resultados obtidos por análise estatística de seleção de parâmetros. Esta análise estatística é feita através do código cosmológico CLASS [4] (devidamente modificado para esta abordagem) combinado com o código estatístico MCMC-MontePython[44]. Este teste observacional é feito através da análise conjunta dos dados de supernova Tipo Ia 2.3.1 com dados de dados de oscilações acústicas bariônicas 2.3.2, dados de distorção no espaço de *redshift* 2.3.3 e dados de CMB 2.3.4.

4.2 Implementação de Dependência de Escala na Gravitação no Nível de Ação

Dedicamos esta seção a uma breve revisão dos desenvolvimentos feitos em [39], em que os autores apresentam uma abordagem na qual as informações importantes para implementar a dependência de escala são totalmente codificadas na ação. Enfatizamos também a importância de ter uma ação completa para descrever um determinado fenômeno. Como mencionado, formas de incluir esse dependência de escala não é uma novidade, e nas referências [28, 31, 30, 38, 145, 146] os autores argumentam a favor da seguinte ação²

$$S[g] = \frac{1}{16\pi} \int \frac{R - 2\Lambda}{G} \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.1)$$

que incluem a dependência de escala em grandes escalas cosmológicas. Em (4.1) G e Λ não são constantes, são campos escalares externos (ou seja, não são consideradas a variação em relação a G ou Λ). A forma das funções G e Λ são determinadas a partir de argumentos de GR. Devemos notar que, embora esta simples ação tenha algumas propriedades interessantes [28, 31, 38], nem todas informações físicas relevantes estão incluídas nela. Perceba que em (4.1) as dependências de escala de G e Λ não são explícitas e, além disso, esta ação não nos fornece o significado físico da escala (a configuração da escala). Todas essas informações são anexadas nas equações de campo.

² Aqui assumimos que $c = 1$.

Colocar todas as informações relevantes na ação é importante para compreender a dinâmica e simetrias do sistema, que são, independentemente da microfísica subjacente, vistas como efetivamente clássicas em grandes escalas cosmológicas. Em geral, colocar as informações no nível das equações de campo não é equivalente a colocar as informações na ação e proceder com a variação completa da mesma (este é o caso, por exemplo, de sistemas vinculados). Para sistemas clássicos fechados (mesmo que de forma efetiva) espera-se que exista uma ação completa. Além disso, a utilização de uma ação incompleta limita nossa análise. Por exemplo, as consequências dinâmicas da invariância por difeomorfismo da ação tornam-se obscuras no caso de uma ação incompleta.

Para que se possa ter a configuração de escala no nível da ação, bem como a relação entre μ e outras quantidades físicas do sistema, os autores em [39] argumentam a favor da ação

$$S = \int \left[\frac{R - 2\Lambda(\mu)}{16\pi G(\mu)} + \lambda [\mu - f(g, \Upsilon)] \right] \sqrt{-g} d^4x + S_m, \quad (4.2)$$

sendo $S = S[g, \mu, \lambda, \Upsilon]$. Lembrando que Υ representa os campos de matéria. Como está explícito em (4.2), G e Λ dependem da escala μ , que deve ser vista como um campo fundamental. Deve-se notar que μ pode ser visto na ação (4.2) como um campo auxiliar, pois resolver a equação $\mu - f = 0$ e proceder com a variação em todos os campos, leva às mesmas equações de campo que manter μ e configurar a escala depois, no nível das equações de campo (isto está demonstrado no apêndice de [39]). Observamos a escala não deve ser um novo campo independente com sua própria dinâmica (tal argumento pode ser encontrando também em [135]).

Em geral, a ação (4.2) impõe uma relação entre as funções G e Λ [39] (ver também [28, 31]), tal relação está indiretamente relacionada à invariância por difeomorfismo e à conservação do tensor momento-energia [39]. Se estabelecemos a forma de uma destas funções considerando argumentos naturais inspirados em efeitos de GR, isto é suficiente para fixar a outra, que podemos encontrar a partir das equações de campo (ou seja, a partir da exigência de que tenhamos um quadro clássico consistente).

De forma geral, estes efeitos não dependem necessariamente de uma única escala. Tais métodos com dependência em várias escalas podem ser encontrados em [142, 143, 144]. Como veremos na próxima seção, a aplicação da ação (4.2) à cosmologia pode exigir mais de uma escala. Vamos rotular essas várias escalas por μ_p . Neste caso, a ação (4.2) pode ser estendida de forma direta como

$$S[g, \mu, \lambda, \Upsilon] = S_m[g, \Upsilon] + \frac{1}{16\pi} \int \left[\frac{R - 2\Lambda(\mu)}{G(\mu)} + \sum_p \lambda_p [\mu_p - f_p(g, \Upsilon)] \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.3)$$

Omitimos os índices quando escrevemos as dependências de funções ou funcionais em (4.3), portanto, o que temos na ação acima é $\Lambda(\mu) = \Lambda(\mu_1, \mu_2, \dots)$. A variação desta ação com

relação aos seus campos fundamentais resulta nas seguintes equações (ver apêndice A)

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{16\pi} \sum_p \int \lambda'_p \frac{\delta f'_p}{\delta \Upsilon} \sqrt{-g'} d^4 x' = \frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon}, \quad (4.5)$$

$$\mu_p - f_p = 0, \quad (4.6)$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \mu_p} \frac{\Lambda}{G} - R \frac{\partial}{\partial \mu_p} G^{-1} = \lambda_p, \quad (4.7)$$

a linha indica dependência na coordenada x' , ao invés de x . Do sistema acima, temos

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} + G \square G^{-1} g_{\alpha\beta} - G \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{-1}, \quad (4.8)$$

$$f_{\alpha\beta} \equiv -\frac{G}{\sqrt{-g}} \sum_p \int \lambda'_p \frac{\delta f'_p}{\delta g^{\alpha\beta}} \sqrt{-g'} d^4 x'. \quad (4.9)$$

Lembrando que a definição do tensor momento-energia é dada pela equação (2.17). Para este sistema, a variação da ação S_m em relação aos campos de matéria não é zero, devido a dependência da função f_p em relação a Υ . Logo, a invariância por difeomorfismo da ação de matéria S_m fica

$$\begin{aligned} 0 &= \delta_\zeta S_m[g, \Upsilon] \\ &= \int \left(-T_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \nabla^\alpha \zeta^\beta + \frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} \delta_\zeta \Upsilon \right) d^4 x \\ &= \int \left(\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \zeta^\beta + \frac{1}{16\pi} \sum_p \int \lambda'_p \frac{\delta f'_p}{\delta \Upsilon} \sqrt{-g'} d^4 x' \delta_\zeta \Upsilon \right) d^4 x. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notamos que a violação da conservação do tensor momento-energia requer que algum λ_p não seja zero.

Em [39] foram considerados sistemas mais simples do que o sistema cosmológico com perturbações que é tratado aqui. Para tanto, em [39], uma única escala μ foi suficiente e o multiplicador de Lagrange correspondente $\lambda = 0$ no nível das equações de campo, implicando assim na conservação do tensor momento-energia. Mas, como mostraremos, para a cosmologia encontraremos uma modesta violação da conservação de momento-energia devido um multiplicador de Lagrange do conjunto λ_p não ser nulo.

4.3 Abordagem em Escalas Cosmológicas

De forma semelhante aos modelos cosmológicos tratados anteriormente, assumimos que o universo em grandes escalas cosmológicas pode ser descrito por uma métrica de fundo espacialmente plana, homogênea e isotrópica, mais perturbações. Ou seja, consideraremos para nossa análise a métrica, no calibre Newtoniano, dada por (2.160) com o objetivo de estudar a formação de estruturas nesta abordagem.

4.3.1 A Escala Principal

Como mencionado, consideramos uma escala μ que pode ser escrita como um escalar, de tal forma que possamos inseri-la explicitamente na ação. Consideramos o caso em que tal escala está diretamente ligada às perturbações cosmológicas (ou seja, ligada ao número de onda k). Estas escolhas foram motivadas por três considerações

- i) Existe uma candidata a escala que satisfaz estas condições, que é a escala proposta em [39] e que será detalhada a seguir;
- ii) Como já vimos, modelo Λ CDM enfrenta algumas problemas, mas alcançou sucesso relevante em um grande classe de fenômenos cosmológicos e astrofísicos. Portanto, modelos cosmológicos cujas equações de dinâmica de fundo são as mesmas da Λ CDM, mas com diferenças no nível perturbativo, parecem promissores e merecem ser investigados;
- iii) É uma possibilidade, até então, não investigada em cosmologia.

Embora a proposta em [39] possa ser vista como uma extensão de várias outras propostas, em particular da proposta para galáxias em [31, 38, 145], o modelo cosmológico apresentado em [31], e em alguns outros trabalhos que possuem equações de campo semelhantes (por exemplo, [137, 138]), é diferente do modelo cosmológico proposto aqui. Os limites de outros modelos cosmológicos, independente da forma adotada para G , não se aplicam em nosso caso. Como exemplo, os limites por BBN (*Big Bang Nucleosynthesis*, ver, por exemplo, [52, 55]) foram avaliados para um modelo cosmológico com efeitos de GR em [137], mas estes limites não se aplicam à abordagem que estamos tratando aqui, pois as equações de fundo não possuem dependência de escala.

Consideramos que o conteúdo do nosso sistema é composto pelo fluido descrito por (2.86). Devemos notar que este fluido, que possui quadrivelocidade dada por U^α , é composto por tensor momento-energia de um fluido perfeito (que contribui na dinâmica do fundo cosmológico), somado com as perturbações de cada componente do fluido.

A escala principal, que chamamos aqui como μ_1 , é definida como sendo uma função de um certo escalar W . Este escalar foi introduzido em [39] e é uma função da quadrivelocidade do fluido U^α , da métrica $g_{\alpha\beta}$ e de um certo tensor denotado por $\gamma_{\alpha\beta}$. Desta maneira, temos

$$\mu_1 = f_1(W), \quad (4.11)$$

$$W \equiv U^\alpha U^\beta (g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}). \quad (4.12)$$

Como definido, W é uma medida escalar da diferença $g_{\alpha\beta} - \gamma_{\alpha\beta}$, de maneira que o tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ fornece a geometria de referência para essa diferença. Para completar esta interpretação,

$\gamma_{\alpha\beta}$ não deve possuir um termo cinético e deve aparecer apenas dentro de W . Todas estas afirmações são assumidas a partir de agora. A principal motivação que nos leva a escolha de W é que o fundo possa vir a ser preservado em nosso sistema.

As equações acima particularizam a dependência geral de $f_1 = f_1(g, \Upsilon)$, pois agora temos $f_1 = f_1(W(g, U, \gamma))$. Como a definição de μ_1 é feita no nível de ação, as equações de campo dependem em geral da variação de f_1 em relação aos campos Υ . Pode-se notar isso a partir das equações (4.4), (4.5) e (4.9). Esta característica está ausente em outras implementações do GR em que o ajuste da escala é feito no nível de equações de campo, mas entendemos isso como uma necessidade quando se busca uma ação com todas as informações dinâmicas (incluindo a configuração da escala).

O tensor $\gamma_{\alpha\beta}$ entra na ação (4.3) como um campo fundamental, sendo um dos campos que compõem o conjunto de campos Υ (note que U^α é outro campo que também faz parte de Υ). Desta maneira, vamos verificar como está a estrutura atual de nossa ação. A métrica de referência $\gamma_{\alpha\beta}$ é um campo que só aparece dentro da f_1 . Definimos $\hat{\Upsilon}$ como sendo o conjunto de campos que inclui todos os campos Υ exceto a métrica de referência $\gamma_{\alpha\beta}$ (ou seja, $\delta\hat{\Upsilon}/\delta\gamma_{\alpha\beta} = 0$). Portanto, podemos reescrever a ação (4.3) como

$$S[g, \mu, \lambda, \gamma, \hat{\Upsilon}] = S_{\text{matéria}}[g, \hat{\Upsilon}] + \frac{1}{16\pi} \int \left[\frac{R - 2\Lambda(\mu)}{G(\mu)} + \lambda_1[\mu_1 - f_1(W)] + \sum_{p \geq 2} \lambda_p [\mu_p - f_p(g, \hat{\Upsilon})] \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.13)$$

Ressaltamos que W não é um campo fundamental nesta ação, ele é uma função de $g_{\alpha\beta}$, $\gamma_{\alpha\beta}$ e U^α (ou seja, $W = W(g, U, \gamma)$), e a quadrivelocidade U^α é um dos campos que faz parte do conjunto $\hat{\Upsilon}$.

Uma consequência relevante da utilização do $\gamma_{\alpha\beta}$ como campo fundamental na ação (ao invés de um campo externo), é que a variação da ação com respeito a $\gamma_{\alpha\beta}$ implica que $\lambda_1 = 0$. Mostramos isso explicitamente na próxima subseção. Portanto, isto implica que o ajuste da escala no nível da ação ou no nível das equações de campo nos leva as mesmas equações de campo. Esta última afirmação é válida para a escala μ_1 .

No contexto das estruturas locais (por exemplo, sistema solar, galáxias,...), uma escolha natural para a métrica de referência $\gamma_{\alpha\beta}$ seria a métrica Minkowski ($\eta_{\alpha\beta}$), de tal forma que, longe do sistema $g_{\alpha\beta}$ torna-se assintoticamente Minkowski e W torna-se assintoticamente zero. Portanto, neste contexto e em um referencial comóvel, W pode ser escrito como³

$$W \stackrel{*}{=} U^0 U^0 (g_{00} - \eta_{00}) \propto g_{00} - \eta_{00}. \quad (4.14)$$

Portanto, W é o potencial Newtoniano computado em referencial comóvel (além de um fator 2 e correções de ordens superiores). Essa escolha do potencial Newtoniano foi

³ O símbolo $\stackrel{*}{=}$ indica que nossas quantidades estão sendo calculadas no referencial comóvel

utilizada no contexto de galáxias e do sistema solar e pode ser vistas nas referências [38, 134, 147, 148, 149] (além de um caso tipo-estrela analisada em [39]). Este escalar também constitui uma extensão de algumas outras configurações de escala considerados no contexto de uma partícula pontual (por exemplo, [28, 31, 145]).

Em um contexto cosmológico, e de acordo com a motivação de utilizar uma escala baseada principalmente no número de onda das perturbações k , consideramos soluções nas quais a métrica de referencia $\gamma_{\alpha\beta}$ é o fundo cosmológico, ou seja

$$\gamma_{\alpha\beta} = \bar{g}_{\alpha\beta}. \quad (4.15)$$

Portanto, utilizando o elemento de linha (2.160), obtemos

$$W \stackrel{*}{=} \frac{1}{a^2}(g_{00} - \bar{g}_{00}) = -2\psi. \quad (4.16)$$

Esta é a mesma escala utilizada nas outras referencias citadas acima, sendo em essência o potencial Newtoniano.

Em nossa abordagem não será necessário especificar mais a função f_1 , o passo importante é mostrar sua dependência, como na equação (4.11). Com este cenário, estes efeitos serão sensíveis e mudarão as perturbações cosmológicas, mas as equações de fundo não dependerão delas.

4.3.2 Cosmologia de Fundo

Se em determinada região do espaço-tempo temos $W = 0$, então G e Λ não dependerão da escala, ou seja, devem ser constantes naquela região. Portanto, temos

$$G|_{W=0} = G_0 \quad \text{e} \quad \Lambda|_{W=0} = \Lambda_0. \quad (4.17)$$

sendo G_0 e Λ_0 constantes. Estas condições serão utilizadas como condições de contorno que levam a soluções únicas no vácuo.

Uma vez que a dependência da ação em relação a $\gamma_{\alpha\beta}$ é somente através de f_1 (4.11), isto implica, a partir das equações de campo, que $\lambda_1 = 0$ no nível das equações de campo [39]. De fato, usando $\gamma_{\alpha\beta}$ no lugar de Υ na equação (4.5), o lado direito é zero, portanto,

$$0 = \int \lambda_1' \frac{\delta f_1'}{\delta \gamma_{\alpha\beta}} \sqrt{-g'} d^4 x' = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial W} U^\alpha U^\beta \sqrt{-g}. \quad (4.18)$$

Uma vez que assumimos $\frac{\partial f_1}{\partial W} \neq 0$ e como as outras quantidades não podem ser zero, a solução é

$$\lambda_1 = 0. \quad (4.19)$$

Lembremos que as equações de fundo são determinadas negligenciando todas as contribuições de primeira ordem ou ordens superiores na métrica. Neste regime, a equação (4.7) junto com as equações (4.17) e (4.19) implicam que todos os multiplicadores de Lagrange são zero no fundo, ($\lambda_p \approx 0$). Consequentemente, as equações do campo de matéria (4.5), tornam-se simplesmente $\delta S_m / \delta Y \approx 0$. Além disso, uma vez que temos no fundo $f_{\alpha\beta} \approx 0$ e $\mathcal{G}_{\alpha\beta} \approx G_{\alpha\beta}$, a equação (4.4) torna-se as equações de campo de Einstein. Isto completa a verificação de que, no fundo cosmológico, não há dependência de escala (no sentido de que a forma das equações são as mesmas de RG no fundo cosmológico). Ressaltamos que este resultado não tem dependência de como G e Λ dependem das escalas μ_p , nem sobre a forma precisa das funções f_p (configuração de escala), com exceção de $\mu_1 = f_1(W)$. Uma segunda escala também será necessária, mas isso não muda este resultado (nem pode).

Portanto, nossas equações de Friedmann são as mesmas equações do modelo Λ CDM. Logo⁴

$$3\mathcal{H}^2 - \Lambda_0 a^2 = 8\pi G_0 a^2 \bar{\varepsilon}, \quad (4.20)$$

$$2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 - \Lambda_0 a^2 = -8\pi G_0 a^2 \bar{p}. \quad (4.21)$$

4.3.3 A Relação entre G e Λ no Vácuo

A estrutura apresentada até este ponto é suficiente para derivar a relação de G e Λ na ausência de fluido usual. A generalização para muitas escalas (inspiradas em efeitos de GR) não altera a relação derivada em [39] (que assume uma única escala).

Como no fundo cosmológico a RG é válida, então, no vácuo ($T_{\alpha\beta} = 0$),

$$\bar{R} = 4\Lambda_0. \quad (4.22)$$

Portanto, a partir da equação (4.7) e até a primeira ordem das perturbações

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} \Lambda = \Lambda_0 G_0 \frac{\partial}{\partial \mu_1} G^{-1}. \quad (4.23)$$

Dada condição de contorno (4.17), a solução geral da equação acima é

$$\Lambda = \Lambda_0 G_0 G^{-1}. \quad (4.24)$$

Inserindo a solução acima na equação (4.7), mas considerando outros valores para p , podemos concluir que, no vácuo, $\lambda_p = 0$. Portanto, sem mudanças na solução acima.

4.3.4 A Relação entre G e Λ na Presença de Matéria

Diferente do caso anterior, aqui vamos considerar a presença de um tensor de momento-energia $T_{\alpha\beta}$ na dinâmica do sistema. Com o auxílio das equações de fundo

⁴ Lembrando para qualquer quantidade X , \bar{X} indica seu valor no fundo cosmológico.

cosmológico, temos a partir equação (4.7)

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mu_p} = \xi G_0 \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu_p} + \frac{1}{2} G_0 \lambda_p, \quad (4.25)$$

até a primeira ordem perturbativa. Desta última equação temos

$$\xi \equiv \Lambda_0 - 4\pi G_0 \bar{T}. \quad (4.26)$$

Como definido acima, ξ é uma quantidade de fundo. Como μ_1 é uma função de W (que é uma função do espaço-tempo), enquanto ξ depende apenas do tempo, estas duas funções são independentes. Por outro lado, Λ não pode ser simplesmente escrito em função de μ_1 e do tempo η , ele deveria depender apenas de μ_p . Caso contrário, não seria compatível com a ação (4.3). Para que possamos expressar Λ como uma função de μ_p , a equação (4.25) mostra que p não pode assumir um único valor, isto é, serão necessárias escalas adicionais além da primeira já definida. Para $p = 1$, lembrando que $\lambda_1 = 0$, e da condição de contorno (4.17), é possível integrar (4.25) e encontrar

$$\Lambda = \Lambda_0 + \xi \delta_G, \quad (4.27)$$

com

$$\delta_G \equiv G_0 G^{-1} - 1. \quad (4.28)$$

Inserindo o resultado acima novamente na (4.25), com $p = 2$, verifica-se que

$$\xi \frac{\partial \delta_G}{\partial \mu_2} + \delta_G \frac{\partial \xi}{\partial \mu_2} = \xi \frac{\partial \delta_G}{\partial \mu_2} + \frac{1}{2} G_0 \lambda_2. \quad (4.29)$$

Portanto,

$$\lambda_2 = 2G_0^{-1} \delta_G \frac{\partial \xi}{\partial \mu_2}. \quad (4.30)$$

Este resultados indicam que μ_2 deve ser visto como uma função da quantidade do fundo ξ . Assim, consideremos

$$\mu_2 = f_2(\xi). \quad (4.31)$$

Da mesma forma, podemos afirmar que μ_2 é uma função de \bar{T} . Mais a frente mostraremos que a forma precisa da função f_2 é irrelevante, o que é de fato importante é dizer que f_2 é uma função somente de ξ .

Uma vez que assumimos todas as escalas μ_p são independentes entre si (por exemplo, $\frac{\partial \mu_2}{\partial \mu_3} = 0$), das equações (4.25) e (4.30) concluímos que

$$\lambda_p = 0 \quad \forall p \neq 2. \quad (4.32)$$

Embora não seja impossível introduzir novas escalas independentes, a equação (4.32) é uma afirmação clara de que duas escalas são suficientes neste contexto.

Portanto, a solução para a relação entre Λ e G é dada por (4.27), mostrando que em geral Λ não é uma função somente de G , ou seja, ela também depende dos campos de matéria por meio de \bar{T} . O conjunto de escalas μ_1 e μ_2 , indicadas pelas equações (4.11) e (4.31), é suficiente para uma derivação consistente das funções Λ e G . Note que encontramos a solução geral para todos os multiplicadores de Lagrange λ_p .

4.3.5 Equações de Campo e Fluidos Perfeitos

As soluções de Λ e λ_p podem ser inseridas nas equações de campo (4.4) e (4.5) para que possamos ter

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} + (\Lambda_0 + \xi\delta_G)g_{\alpha\beta} - \frac{2}{\sqrt{-g}} \int \delta'_G \frac{\partial \xi'}{\partial \mu'_2} \frac{\delta f'_2}{\delta g^{\alpha\beta}} \sqrt{-g'} d^4 x' = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (4.33)$$

$$\frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} = \frac{1}{8\pi G_0} \int \delta'_G \frac{\partial \xi'}{\partial \mu'_2} \frac{\delta f'_2}{\delta \Upsilon} \sqrt{-g'} d^4 x'. \quad (4.34)$$

Como f_2 é uma função de \bar{T} , em geral, esta função pode depender tanto dos campos de matéria quanto da métrica. Entretanto, nosso fundo cosmológico é permeado por um fluido perfeito, ξ é simplesmente uma função da densidade da energia e da pressão, portanto o termo $\delta f'_2 / \delta g^{\alpha\beta}$ é zero. Além disso, $f_2(\xi)$ não depende de derivadas no espaço-tempo, portanto $\frac{\delta f'_2}{\delta \Upsilon} = \frac{\partial f_2}{\partial \Upsilon} \delta(x - x')$. Desta maneira,

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} + (\Lambda_0 + \xi\delta_G)g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon} = \frac{1}{8\pi G_0} \delta_G \frac{\partial \xi}{\partial \Upsilon} \sqrt{-g}. \quad (4.36)$$

Notemos que estas equações não dependem da forma explícita da função f_2 , apenas usamos que f_2 é uma função (diferenciável) de ξ .

Lembre que em nosso fundo cosmológico não há dependência de escala, portanto, dado que este fundo é constituído por um fluido perfeito, temos $\bar{T} = -\bar{\varepsilon} + 3\bar{p}$, lembrando que $\bar{\varepsilon}$ e \bar{p} são a densidade de energia e a pressão no fundo. Isto implica que, adotando uma descrição termodinâmica, para este fluido perfeito, baseada na densidade de massa ρ e na entropia específica s , então ξ é, no máximo, uma função de ρ e s :

$$\xi = \xi(\rho, s). \quad (4.37)$$

Em particular, para um fluido tipo poeira, ξ depende apenas de ρ , enquanto para um fluido de radiação ξ não depende nem de ρ e nem de s , logo, é uma constante.

Como o $\partial \xi / \partial \Upsilon$ pode ser diferente de zero, o tensor momento-energia da matéria não é conservado. Esta é uma possibilidade bem conhecida no contexto em que G e Λ

variam (por exemplo, [37, 150]). No entanto, como veremos mais a frente, este é um caso suave de violação da conservação do tensor momento-energia.

Para que possamos compreender melhor as consequências de nossa abordagem na presença de matéria, consideramos a ação de fluido perfeito que apresentamos em (2.20). Esta ação é adequada para nossa aplicação pois U^α entra como um campo fundamental.

Portanto, usando a equação do tensor momento-energia, (2.17), obtemos ainda a equação (2.21) para nosso sistema. Entretanto, as equações correspondentes de (2.22) e (2.23) são

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + U^\alpha \partial_\alpha \eta_2 = -\frac{1}{8\pi G_0} \delta_G \frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \delta_G \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho}, \quad (4.38)$$

$$2\eta_1 U_\alpha - \rho \partial_\alpha \eta_2 = 0. \quad (4.39)$$

note que usamos a definição de ξ dada por (4.26). Assim, usando o vínculo $U^\alpha U_\alpha = -1$ junto com as equações (4.38) e (4.39) em (2.21) temos

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \delta_{G\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \right) U_\alpha U_\beta + g_{\alpha\beta} \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \delta_{G\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} - \varepsilon \right), \quad (4.40)$$

assim, nosso tensor momento-energia de fluido perfeito é dado por

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}}) U_\alpha U_\beta + g_{\alpha\beta} p_{\text{ef}}, \quad (4.41)$$

sendo

$$p_{\text{ef}} = p + \frac{1}{2} \delta_{G\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\varepsilon} - 3\bar{p}), \quad (4.42)$$

$$\varepsilon_{\text{ef}} = \varepsilon, \quad (4.43)$$

lembrando que $p \equiv \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \varepsilon$. Estas quantidades efetivas (“ef”) são dadas de tal maneira que a posição que ocupam na forma de $T_{\alpha\beta}$ são as mesmas como definidas em (2.21). Na seção 5 consideraremos que o $T_{\alpha\beta}$ do fluido possui a contribuição de tensão anisotrópica. Na próxima subseção vamos mostrar o impacto dinâmico dessas quantidades.

4.3.6 Equações de Movimento na Presença de um Fluido Relativístico

Como vimos, no modelo padrão a invariância por difeomorfismo implica na conservação do tensor momento-energia, $\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$, e como sabemos, tal equação determina as equações do movimento do fluido. No modelo proposto, a invariância por difeomorfismo da ação de matéria implica na relação geral apresentada em (4.10) e a partir dela podemos escrever o divergente do tensor momento-energia. Para isto, consideramos (4.32) em (4.10) que nos fornece

$$0 = \int \left(\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \zeta^\beta + \frac{1}{16\pi} \int \lambda_2 \frac{\delta f_2'}{\delta \Upsilon} \sqrt{-g'} d^4 x' \delta_\zeta \Upsilon \right) d^4 x.$$

Para o fluido perfeito relativístico, usando (4.26), (4.30), (4.32) e (4.37) temos

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{8\pi G_0} \delta_G \left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho} \partial_\beta \rho + \frac{\partial \xi}{\partial s} \partial_\beta s \right).$$

Na última equação utilizamos que $\delta_\zeta \Upsilon = \zeta^\alpha \partial_\alpha \Upsilon$ (para Υ igual a ρ ou s). Agora, usando (4.26) e o fato de que \bar{T} não depende de s , temos

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = \frac{\delta_G}{2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \rho} \partial_\beta \rho. \quad (4.44)$$

Como exemplo, consideramos que o fundo cosmológico é dominado por um fluido tipo poeira, $\bar{p} = 0$ (o que implica $\bar{\varepsilon} \propto \bar{\rho}$). Assim, a expressão acima se torna, até a primeira ordem,

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = -\frac{\delta_G}{2} \partial_\beta \bar{\varepsilon}. \quad (4.45)$$

Entretanto, assim como em (2.25), vamos considerar que a densidade de energia do fundo cosmológico será somente uma função da densidade de massa. Isto implica que, no caso geral, \bar{T} será somente uma função de ρ . Assim, podemos escrever, de forma geral,

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = Q^\beta, \quad (4.46)$$

sendo Q^β uma quantidade de primeira ordem, a única componente não nula ocorre quando $\beta = 0$, uma vez que as quantidades de fundo só dependem do tempo.

Para tornar claro o quão modesta é a violação da conservação do tensor energia-momento exibida na relação (4.46), dadas as restrições sobre Q^β vistas acima, vamos analisá-la em mais detalhes. Um efeito que vale a pena mencionar neste momento é que, para um referencial que se move com o fluido no fundo cosmológico, as equações para a dinâmica do fluido até a primeira ordem nas perturbações podem ser escritas de forma independente de Q^β . Para concluir isto, a equação (4.46), considerando um fluido perfeito efetivo, pode ser escrita na forma

$$\nabla_\alpha \left((\varepsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}}) U^\alpha U^\beta + g^{\alpha\beta} p_{\text{ef}} \right) = Q^\beta. \quad (4.47)$$

Multiplicando por U^β ,

$$-\nabla_\alpha [(\varepsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}}) U^\alpha] + \frac{Dp_{\text{ef}}}{D\tau} = U_\beta Q^\beta = U_0 Q^0, \quad (4.48)$$

sendo, para qualquer quantidade X , $\frac{DX}{D\tau} \equiv U^\alpha \nabla_\alpha X$.⁵ Inserindo este resultado em (4.47),

$$U^\beta \frac{Dp_{\text{ef}}}{D\tau} + (\varepsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}}) \frac{DU^\beta}{D\tau} + \nabla^\beta p_{\text{ef}} = Q^\beta + U^\beta U_0 Q^0. \quad (4.49)$$

Está é a mesma equação que podemos encontrar em RG (ou, por exemplo, no modelo Λ CDM) para um fluido com densidade de energia ε_{ef} e pressão p_{ef} , com $Q^\beta \rightarrow 0$. Entretanto,

⁵ Nesta subseção escrevemos τ como um parâmetro afim. Não confundir com a profundidade ótica.

o limite anterior não é necessário, já que o lado direito já é zero até a primeira ordem de perturbação. Podemos verificar isto diretamente considerando os casos $\beta = 0$ e $\beta = i$. Portanto, até a primeira ordem de perturbação,

$$(\varepsilon_{\text{ef}} + p_{\text{ef}}) \frac{DU^\beta}{D\tau} + \nabla^\beta p_{\text{ef}} + U^\beta \frac{Dp_{\text{ef}}}{D\tau} = 0, \quad (4.50)$$

assim como um fluido relativista padrão. Em particular, para $p_{\text{ef}} = 0$, encontra-se a equação geodésica $\frac{DU^\beta}{D\tau} = 0$. É importante ressaltar que estes são resultados para primeira ordem de perturbação que se mantém em qualquer referencial que se mova com o fluido no nível de fundo cosmológico.

Os resultados acima mostram que dinamicamente, em um referencial comóvel, ε_{ef} e p_{ef} têm o mesmo papel de ε e p em teorias com $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Portanto, em sistemas em que a equação de estado do fluido é fixada a partir da fenomenologia, apenas ε_{ef} e p_{ef} são relevantes, uma vez que a diferença entre p e p_{ef} não pode ser medido independentemente. Considerando que, em situações físicas nas quais assumimos que a equação de estado seja conhecida independentemente dos efeitos gravitacionais, a relação entre ε e p é conhecida de antemão, portanto a pressão (4.42) deve ser considerada. Independentemente do caso, para radiação, a pressão efetiva (p_{ef}) e a pressão fundamental (p) são sempre iguais.

Como fizemos em [2], levando em consideração clareza e simplicidade, vamos desenvolver a cosmologia baseada na pressão efetiva (p_{ef}), não a fundamental (p). Isto significa que para um fluido tipo poeira temos $p_{\text{ef}} = 0$. Assim, como vamos considerar somente quantidades efetivas, para simplificar a notação o “ef” com ε e p não será mais utilizado: $\varepsilon_{\text{ef}} \rightarrow \varepsilon$ e $p_{\text{ef}} \rightarrow p$. Adiantamos que nossa análise estatística em 5 é baseada somente nos efeitos de fluido efetivo. Mas, de fato, seria interessante procurar também o caso baseado na pressão fundamental p , mas deixamos este caso para um trabalho futuro.

4.4 Perturbações Cosmológicas

4.4.1 Equações para Perturbações Escalares

Antes de escrevermos as equações referentes as perturbações escalares é relevante particularizar a dependência de escala de G , que afirma G como uma função do escalar μ_1 , e a configuração de escala que expressa μ_1 como uma função das quantidades físicas. Ao invés de argumentar a favor de realizações particulares de cada etapa, consideramos uma abordagem que inclui uma classe relevante de funções para explorar esta estrutura para pequenos valores de W . Ou seja, consideramos que a combinação das duas etapas anteriores leva a uma função analítica em torno de $W = 0$, o que implica

$$G_0 G^{-1}(W) = 1 + \nu W + O(W^2), \quad (4.51)$$

sendo ν uma constante sem dimensão que pode ser positiva ou negativa e que parametriza a amplitude da variação de G . Ressaltamos que a expressão (4.51) é bastante geral para pequenos valores de W no sentido de que exigimos somente que $G(W)$ fosse compatível com uma expansão linear em torno de $W = 0$. No entanto, há um caso relevante que não está explicitamente incluído na expansão acima, que será comentado mais adiante.

Portanto, utilizando (4.16) e (4.28) em um referencial comóvel, temos

$$G_0 G^{-1}(W) \stackrel{*}{=} G_0 G^{-1}(\psi) = 1 - 2\nu\psi + O(\psi^2), \quad (4.52)$$

$$\delta_G \stackrel{*}{\approx} -2\nu\psi. \quad (4.53)$$

Existem vários trabalhos que consideram que $G(\mu_1)$ varia logicamente (por exemplo, ver [31, 138, 151, 152, 153]). Algumas destas funções podem ser capturadas pela expansão linear acima. Por exemplo, consideramos

$$G_{\ln}(\mu_1) \equiv \frac{G_0}{1 + 2\nu \ln \mu_1}, \quad (4.54)$$

A partir desta função particular de $G(\mu_1)$, a escolha $\mu_1 = W$ não é viável, já que G_{\ln} não seria finito no nível de fundo ($W = 0$), portanto a condição (4.17) não seria possível. As equações (4.51) e (4.52) podem ser encontradas na configuração $\mu_1 = 1 + \frac{1}{2}W \stackrel{*}{=} 1 - \psi$ e até a primeira ordem em ψ . Qualquer outra relação linear entre μ_1 e W é viável (com termo constante não nulo), e elas diferem por um simples redimensionamento no ν e G_0 . Podemos assumir correções de ordem quadráticas ou superiores em W , mas são irrelevantes para as perturbações cosmológicas lineares. Considerações sobre o uso de $\mu = 1 - \psi$ junto com a G_{\ln} também podem ser encontrados em [149, 154]. Ressaltamos que todos os resultados aqui apresentados não dependem de (4.54), esta equação aparece aqui apenas como um caso particular relevante. No entanto, existem casos interessantes não cobertos pela expressão (4.54), que comentaremos mais tarde.

Agora, das equações (4.26), (4.27) e (4.53) encontramos

$$\Lambda = \Lambda_0 + \delta\Lambda = \Lambda_0 + (4\pi G_0 \bar{T} - \Lambda_0) 2\nu\psi. \quad (4.55)$$

Portanto, das expressões para G e lembrando que $T^{\alpha\beta} = \bar{T}^{\alpha\beta} + \delta T^{\alpha\beta}$, dada métrica (2.160) e as equações de campo (4.35), as equações diferenciais de primeira ordem para perturbações cosmológica são

$$3\mathcal{H}(\phi' + \nu\psi') - \nabla^2(\phi + \nu\psi) + 3\mathcal{H}^2\psi + \frac{\delta\Lambda a^2}{2} = 4\pi G_0 a^2 (\delta T_0^0 + 2\nu\psi \bar{T}_0^0), \quad (4.56)$$

$$\partial_i [\psi' + \nu\psi' + \mathcal{H}\psi(1 - \nu)] = -4\pi G_0 a^2 \delta T_i^0, \quad (4.57)$$

$$\left[\phi'' + \nu\psi'' + \mathcal{H}(\psi' + 2\phi' + \nu\psi') + \frac{1}{2}\nabla^2(\psi - \phi - 2\nu\psi) + \psi(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) + \frac{\delta\Lambda a^2}{2} \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}\partial_j \partial^i (\psi - \phi - 2\nu\psi) = 4\pi G_0 a^2 (\delta T_j^i + 2\nu\psi \bar{T}_j^i). \quad (4.58)$$

Notando que nestas equações a linha “ $'$ ” denota derivadas em relação ao tempo de conforme. Perceba também que não estamos mais usando “ $\stackrel{*}{=}$ ” para enfatizar o uso de referencial particular, e assumimos que todos os cálculos são para primeira ordem perturbativa. Todos os cálculos serão exatos em ν , salvo indicação em contrário. Isto é importante para obter os limites teóricos para ν e para completude do modelo. Observamos também que o limite $\nu \rightarrow 0$ leva ao modelo padrão. Devemos lembrar que nesta seção estamos considerando para nossa análise o tensor energia-momento de um fluido perfeito e que na seção 5 levaremos em conta a contribuição de tensão anisotrópica em $T_{\alpha\beta}$. Portanto, podemos inferir o nosso parâmetro de *slip* gravitacional (3.4) da parte não diagonal da equação (4.58),

$$\frac{\phi}{\psi} = 1 - 2\nu. \quad (4.59)$$

As demais parametrizações generalizadas serão mostradas na subseção 4.4.4. A partir deste resultado, as equações de campo podem ser escritas, no espaço de Fourier, como

$$3\mathcal{H}(1 - \nu)\psi' + 3\mathcal{H}^2\psi + 8\pi G_0 \bar{\varepsilon} a^2 \nu \psi + k^2(1 - \nu)\psi + \frac{\delta\Lambda a^2}{2} = -4\pi G_0 a^2 \delta\varepsilon, \quad (4.60)$$

$$k(\psi' + \mathcal{H}\psi)(1 - \nu) = 4\pi G_0 a^2 (\bar{\varepsilon} + \bar{p}) V, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} (1 - \nu)\psi'' + 3\mathcal{H}(1 - \nu)\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi - 8\pi G_0 a^2 \bar{p} \nu \psi + \frac{\delta\Lambda a^2}{2} = \\ = 4\pi G_0 a^2 \delta p. \end{aligned} \quad (4.62)$$

A equação (4.60) é nossa equação de Poisson relativística e (4.62) é nossa equação para perturbação da pressão e (4.61) é a nossa equação para velocidade das perturbações. Note também que estas equações mostram $\nu = 1$ como sendo um caso muito especial do modelo. Detalhamos mais a frente este caso.

4.4.2 Soluções das Perturbações Escalares para Casos Particulares

Como feito na subseção 2.2.2.5, podemos determinar de forma analítica soluções das perturbações escalares para um universo com $\Lambda_0 = 0$ e dominado por poeira ou radiação. A partir das equações (4.60) e (4.62), dada equação de estado $p = w\epsilon$ (w constante) e perturbações adiabáticas, encontramos

$$\begin{aligned} [\psi'' + 3\mathcal{H}(1 + \omega)\psi'] (1 - \nu) + \\ + \left[\omega k^2(1 - \nu) + (1 + 3\omega)\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + \right. \\ \left. + (1 + \omega)\nu\Lambda_0 a^2 - 3\nu(1 + \omega)(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Podemos verificar diretamente que para $\omega = 1/3$ e $\Lambda_0 = 0$ não haverá efeitos do GR em ψ , ou seja, para radiação a solução para ψ é a mesma que em RG. A solução para ϕ também será a mesma que RG, além de um fator constante, que vem de (4.59).

Para o caso de um universo dominado por poeira, com $w = 0$ e $\Lambda_0 = 0$, a equação (4.63) torna-se

$$(\psi'' + 3\mathcal{H}\psi')(1 - \nu) - \frac{3}{2}\nu\mathcal{H}^2\psi = 0, \quad (4.64)$$

nesta equação usamos $\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^2$, vinda das equações de Friedmann. A solução é dada por

$$\psi = C_1\eta^{\tilde{\nu}} + C_2\eta^{\tilde{\nu}-5}, \quad (4.65)$$

novamente, C_1 e C_2 são constantes de integração com respeito a η , elas dependem somente do número de onda k . A constante $\tilde{\nu}$ é dada por

$$\tilde{\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{24}{1-\nu}} - 5 \right). \quad (4.66)$$

Esta constante é uma notação abreviada e é tal que $\nu = 0$ implica $\tilde{\nu} = 0$. Ele também é uma função crescente monótona no domínio $-\infty < \nu < 1$, de modo que $-2 < \tilde{\nu} < \infty$. O termo ψ que depende do C_2 necessariamente decai com o tempo. A solução de RG (ou seja, $\psi = C_1 + C_2\eta^{-5}$) é reproduzida no limite $\nu \rightarrow 0$. A solução acima é exata em ν e coloca um limite superior nele, a saber

$$\nu < 1. \quad (4.67)$$

O caso $\nu > 25$ também fornece resultados reais para ψ , mas não tem limite em RG e não consideraremos aqui.

Considerando uma expansão em ν até sua primeira ordem de perturbação, a equação (4.65) torna-se especialmente simples

$$\psi \approx C_1 \left(1 + \frac{6}{5}\nu \ln \eta \right) + \frac{C_2}{\eta^5} \left(1 - \frac{6}{5}\nu \ln \eta \right). \quad (4.68)$$

Assim, além do modo decrescente (proporcional a constante de integração C_2), para um universo dominado por poeira, a primeira correção não trivial é a introdução de uma dependência logarítmica no tempo no potencial Newtoniano, contrastando com o caso de RG em que o potencial Newtoniano é constante em um universo dominado por poeira.

Em resumo, para $\Lambda_0 = 0$ e num universo dominado por radiação ($T = 0$) não há correções nas soluções em ψ . Para um universo dominado por poeira e para $|\nu| \ll 1$, a única mudança na solução ψ é a adição de um termo $\ln \eta$ (4.68), proporcionando assim uma lenta variação de tempo para ψ em um universo dominado pela matéria. Para ambos os casos, a solução de ϕ é derivada usando (4.59), que é uma constante. Este *slip* constante representa uma diferença clara em relação aos modelos de $f(R)$ e muitas teorias escalar-tensoriais, incluindo o caso de Brans-Dicke (que não possui *slip* constante).

4.4.3 Evolução do Contraste de Densidade

Agora, vamos explorar qualitativamente os efeitos das variações de G e Λ para a formação de estruturas. Aqui, consideramos o caso do universo dominado por matéria com pressão nula (poeira) e $\Lambda_0 = 0$. Lembrando que neste caso particular, podemos determinar a evolução do contraste de densidade da matéria (perturbações da matéria) simplesmente a partir da componente 0-0 das equações de campo na ordem linear (4.60), com o auxílio da solução ψ (4.65). Logo, temos

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon = & \frac{C_1}{6} \eta^{\tilde{\nu}} \left[-12 \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) - k^2 \eta^2 (1 - \nu) - 6(1 - \nu) \tilde{\nu} \right] + \\ & + \frac{C_2}{6} \eta^{-\tilde{\nu}-5} \left[18(1 - 2\nu) - k^2 \eta^2 (1 - \nu) + 6(1 - \nu) \tilde{\nu} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Aqui, $\delta_\varepsilon = \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}$. Para chegar neste resultado usamos também a solução de Λ dada por (4.55). As constantes de integração C_1 e C_2 em (4.69) são as mesmas que aparecem na solução ψ (4.65). A solução de RG é claramente recuperada no limite $\nu \rightarrow 0$. Se assumimos que ν é pequeno, a solução de δ_ε até a primeira ordem em ν é dada por

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \approx & -\frac{C_1}{6} \left[12 \left(1 + \nu \frac{11}{10} + \nu \frac{6}{5} \ln \eta \right) + k^2 \eta^2 \left(1 - \nu + \nu \frac{6}{5} \ln \eta \right) \right] + \\ & + \frac{C_2}{6\eta^5} \left[18 \left(1 - \frac{8}{5}\nu - \frac{6}{5}\nu \ln \eta \right) + k^2 \eta^2 \left(-1 + \nu + \frac{6}{5}\nu \ln \eta \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Em escalas de sub-horizonte, e até a primeira ordem em ν , usando (4.68), podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon & \approx -\frac{k^2 \eta^2}{6} \left[C_1 \left(1 - \nu + \nu \frac{6}{5} \ln \eta \right) + \frac{C_2}{\eta^5} \left(1 - \nu - \frac{6}{5} \nu \ln \eta \right) \right] \\ & \approx -\frac{1}{6} k^2 \eta^2 (1 - \nu) \psi. \end{aligned} \quad (4.71)$$

A relação entre δ_ε e ψ acima é a mesma que encontramos no capítulo anterior (quando particularizamos os casos no modelo Λ CDM), com exceção da correção proporcional a ν . Poderíamos encontrar esta relação em (4.69) sem a aproximação feita em ν . Em pequenas escalas de distância, podemos encontrar também este fator $1 - \nu$ analisando o comprimento de Jeans, como será mostrado. No final, podemos pontuar duas correções em pequenas escalas e até primeira ordem em ν

- i) A presença da correção do acoplamento gravitacional $1 - \nu$;
- ii) A dependência logarítmica em η no potencial Newtoniano ψ e no contraste de densidade δ_ε .

Para encontrar o comprimento do Jeans usamos as equações de dinâmica do fluido advindas do divergente do tensor momento-energia deste fluido. Sabendo que $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = Q^\beta$ e dada equação de estado $p = w\varepsilon$ (w constante), $\delta p = c_s^2 \delta\varepsilon$ (tratamos nesta tese somente

de perturbações adiabáticas), e como Q^0 é uma quantidade de primeiro ordem enquanto Q^i é zero, encontramos, até a primeira ordem, as seguintes equações de perturbações do fluido

$$\delta'_\varepsilon + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta_\varepsilon = (1 + \omega)(3\phi' - kV) - \frac{Q_0}{\bar{\varepsilon}}, \quad (4.72)$$

$$V' + \mathcal{H}(1 - 3w)V - c_s^2 \frac{k}{1 + w} \delta_\varepsilon - k\psi = 0. \quad (4.73)$$

Lembrando que para o universo dominado por poeira temos $Q_\beta = -\frac{\delta_G}{2} \partial_\beta \bar{\varepsilon}$ e, no fundo, $\bar{\varepsilon}' + 3\mathcal{H}\bar{\varepsilon} = 0$, portanto,

$$Q_0 = -\frac{\delta_G}{2} \bar{\varepsilon}' = -3\nu\psi\mathcal{H}\bar{\varepsilon}. \quad (4.74)$$

com δ_G dado por (4.53). Ao derivar (4.72) e combiná-la com as equações (4.21), (4.59), (4.73) e (4.74), podemos encontrar a correspondente equação de segunda ordem do contraste de densidade de um fluido tipo poeira (lembre que tal equação rege a dinâmica de δ_ε), dada por

$$\delta''_\varepsilon + \mathcal{H}\delta'_\varepsilon + \left(\frac{3}{2}\mathcal{H}^2 + k^2\right) c_s^2 \delta_\varepsilon = 3(1 - 2\nu)\psi'' + 3(1 - \nu)\mathcal{H}\psi' - \left(k^2 - \frac{27}{2}\nu\mathcal{H}^2\right) \psi. \quad (4.75)$$

Como feito no capítulo anterior, aqui consideramos também que $c_s^2 \ll 1$.

Desta maneira, para calcular o comprimento do jeans, estamos interessados no limite de sub-horizonte e sem negligenciar c_s . Lembrando que, no limite do sub-horizonte, a equação (4.61) implica que $\psi' = -\mathcal{H}\psi$, então podemos escrever (4.75) como

$$\delta''_\varepsilon + \mathcal{H}\delta'_\varepsilon + \left(k^2 c_s^2 - \frac{4\pi G_0}{1 - \nu} a^2 \bar{\varepsilon}\right) \delta_\varepsilon = 0. \quad (4.76)$$

Portanto, o comprimento da jeans é

$$\lambda_J \equiv \frac{2\pi a}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{(1 - \nu)\pi}{G_0 \bar{\varepsilon}}}. \quad (4.77)$$

Com estes resultados, podemos concluir que para escalas de sub-horizonte e para $0 < \nu < 1$, os efeitos com dependência de escala reduzem o valor de λ_J e aumentam, assim, o colapso de estruturas, enquanto que para $\nu < 0$ a formação de estruturas diminui. Assim, a “força” que atua sobre as partículas teste aumentam para $\nu > 0$, de forma semelhante ao que encontramos nas referências [38, 149].

4.4.4 Parametrizações Generalizadas do Modelo

Na subseção 4.4.1 definimos o parâmetro *slip* gravitacional que é um dos parâmetros generalizados de nossa teoria. Nesta subseção vamos definir os demais. Para calcular o parâmetro $Q(a, k)$ da equação (3.3), usamos nosso parâmetro de *slip* (4.59), a equação de

Poisson do modelo (4.60) e a equação para a velocidade das perturbações (4.61). Portanto, temos

$$Q(a, k) = \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu + \nu \frac{\varrho(a)}{k^2}}, \quad (4.78)$$

sendo

$$\varrho(a) = 12\pi G_0(\bar{\varepsilon} + \bar{p})a^2. \quad (4.79)$$

Enfatizamos que este resultado é independente do valor Λ_0 . Além disso, em (4.79), $\bar{\varepsilon}$ e \bar{p} são quantidades de fundo dos campos de matéria que não englobam Λ_0 . Portanto, se consideramos $\bar{p} \ll \bar{\varepsilon}$, isto não impõe nenhum limite a Λ_0 . Além disso, observamos que as expressões do *slip* gravitacional e $Q(a, k)$ não são comuns pois, em particular, diferem das expressões da teoria $f(R)$ e da teoria escalar-tensorial (por exemplo, Brans-Dicke). Assim, para um universo com Λ_0 , com matéria e radiação insignificante,

$$\begin{aligned} \varrho(a)|_{\bar{p} \ll \bar{\varepsilon}} &= 12\pi G_0 \bar{\varepsilon}(\eta_0) a^{-1} = \frac{9}{2a} \Omega_{m0} H_0^2 \\ &\approx \frac{1}{a} (4\text{Gpc})^{-2}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Sendo $\bar{\varepsilon}(\eta_0)$ o valor da densidade de energia do fundo medida no tempo presente. Baseamos nossa estimativa para $\varrho(a)$ no valor do Λ CDM para $\Omega_{m0} H_0^2$ (considerando $c = 1$ e $a(\eta_0) = a_0 = 1$). Escrevendo (4.78) em função do *redshift*, temos

$$Q(z, k) \approx \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu + \nu(1+z)/(4k\text{Gpc})^2}. \quad (4.81)$$

Para $z \approx 0$, a dependência de k só se torna relevante para distâncias da ordem de Gpc ou maiores (ou seja, distâncias da ordem do horizonte de Hubble ou maiores). Para $\nu > 0$, e $z \gg 1$, vê-se que Q diminui com z . Este comportamento indica desvios do Λ CDM para o universo primordial, mas apenas no nível perturbativo. Devemos lembrar que a expressão acima para Q não pode ser estendida para valores arbitrários de z , uma vez que antes da igualdade matéria-radiação a pressão da radiação não é desprezível. E também, como mostrado na seção 4.4.2, a solução ψ para um universo dominado pela radiação é a mesma de RG. Embora o comportamento de $Q(z, k)$ seja interessante e deva ser mais estudado, aqui, em nossa análise qualitativa, vamos continuar nos concentrando no universo em épocas mais presentes. Também enfatizamos que a suposição de análise de $G(W)$ pode funcionar como uma boa aproximação dentro de um determinado intervalo para W , não necessariamente para qualquer valor de W .

Como sabemos, dado *slip* gravitacional e Q , podemos determinar a expressão para Y , ver seção 4.4.4 (a quantidade análoga com ϕ substituída por ψ no lado esquerdo de (3.3)). Portanto,

$$Y = \frac{Q}{\phi/\psi} = \frac{1}{1 - \nu + \nu \varrho(a)/k^2}. \quad (4.82)$$

O parâmetro de lente deste modelo é dado por

$$\Sigma = \frac{1}{2}Q(1 + \psi/\phi) = \frac{1 - \nu}{1 - \nu + \nu \rho(a)/k^2}. \quad (4.83)$$

O que mostra que em distâncias menores que 1Gpc e para $z \lesssim 1$, Σ não depende de ν e satisfaz $\Sigma = 1$, que é o mesmo valor de RG.

Como falamos na subseção 3.1, um conjunto com dois dos quatro parâmetros $(\phi/\psi, Q, Y, \Sigma)$ é suficiente para descrever a dinâmica das perturbações de primeira ordem para muitas teorias gravitacionais que vão além do modelo padrão. Entretanto, estamos considerando aqui uma estrutura na qual o tensor momento-energia nem sempre é conservado, portanto as perturbações da matéria podem depender de dois dos parâmetros anteriores e do vetor Q^β (4.46).

4.4.5 Restringindo ν Usando as Parametrizações Generalizadas

Agora, vamos utilizar os parâmetros generalizados para restringir ν . Para fazer isto temos duas questões a serem consideradas:

- i) Muitos vínculos encontrados na literatura assumem dependência particulares no tempo e em k que não correspondem àquelas aqui encontradas;
- ii) A conservação do tensor momento-energia é comumente assumida na literatura, enquanto que nesta estrutura ela é em geral violada.

Considerando o item (ii), observamos as seguintes particularidades deste caso específico

- a) O tensor momento-energia é sempre conservado no nível de fundo;
- b) Qualquer tensor momento-energia com traço nulo no nível de fundo é conservado mesmo na primeira ordem das perturbações;
- c) em uma referencial comóvel com o fundo cosmológico, as partículas seguem a equação da geodésia (como mostramos na seção 4.3.6). Em particular, isto implica que, para um referencial comóvel, e até a primeira ordem perturbativa, a trajetória da luz e a das partículas maciças isoladas são as mesmas que em RG, para uma determinada métrica.

Em [2] são utilizados limites inferidos para o *slip* gravitacional propostos por [155, 97]. Tais limites baseiam-se numa comparação entre o potencial ψ inferido a partir da dinâmica interna de aglomerados de galáxias com efeitos de lente dos mesmos aglomerados. Os limites de [155] não são particularmente fortes, mas são suficientes para dar $|1 - \phi/\psi| \leq$

0.61 com intervalo de confiança de 2σ (e além de erros sistemáticos), o que implica, a partir de (4.59), que

$$|\nu| \leq 0.30 \quad (4.84)$$

com intervalo de confiança de 2σ . Em [97] é feita uma previsão considerando pesquisas futuras, no qual encontramos um limite mais forte $|1 - \phi/\psi| \leq 0.09$, com intervalo de confiança de 2σ . Consequentemente,

$$|\nu| \leq 0.04, \quad (4.85)$$

com intervalo de confiança de 2σ . Esta é uma restrição significativa para as perturbações. Lembrando que este é um teste qualitativo (sem considerações estatísticas sofisticadas), ou seja, assumindo que as observações atuais estão de acordo com o Λ CDM, ele afirma qual poderia ser o maior desvio do *slip* gravitacional do valor fiducial de 1 (RG) que ainda estaria de acordo com observações. Na seção 5 mostramos restrições mais refinadas para ν .

Podemos encontrar muitas outras restrições na literatura com diferentes hipóteses (por exemplo, [1, 156]), cuja aplicação a esta estrutura requer o uso de algumas aproximações que podem ou não ser razoáveis (por exemplo, sobre a dependência do *redshift*). No entanto, elas implicam em restrições em ν , para $z \approx 0$, em torno da mesma ordem do valor encontrado em (4.84).

4.4.6 Interpretações Cosmológicas da Matéria Escura e da Energia Escura

Dada estrutura apresentada até aqui, esta mudança dinâmica proporcionada por estas correções pode ter um impacto direto sobre a matéria escura em escalas cosmológicas? Considerando mudanças da ordem de 10% em grandes estruturas (digamos um filamento de matéria escura ou um grande aglomerado de galáxias) para o limite (4.84), podemos concluir que há espaço para mudanças não negligenciáveis ($\sim 10\%$). Estas mudanças, no entanto, estariam presentes apenas como aprimoramentos globais constantes dos efeitos dinâmicos, uma vez que o parâmetro Y pode ser aprimorado devido as alterações da constante ν (4.82). Isto também está intimamente relacionado ao redimensionamento do comprimento de Jeans devido as mudanças de ν , como mostramos em (4.77). Mesmo sem considerar o limite de (4.84), haveria ainda uma grande necessidade de matéria escura em escalas cosmológicas, visto que, além do redimensionamento constante de Y , o único efeito dependente da escala acontece em escalas de Gpc (4.80), enquanto que a matéria escura se aglomera em escalas menores.

Enquanto $\nu > 0$ implica um aumento da atração gravitacional local, a distâncias de Gpc o termo $\varrho(a)$ no parâmetro Y pode se tornar relevante, e o efeito do último é diminuir Y , reduzindo assim a atração gravitacional em grandes escalas cosmológicas para ν positivo. Da mesma forma que no caso da matéria escura, isso não eliminará a necessidade de

admitir uma constante cosmológica Λ_0 , mas pode ter um impacto não desprezível. Como as equações de fundo dessa estrutura são de Λ CDM, os melhores ajustes de Λ_0 e H_0 serão os mesmos considerando apenas os observáveis de fundo. Para as perturbações, devido ao parâmetro extra ν , esperamos possíveis barras de erro maiores. No fim, esta estrutura é uma variação do modelo Λ CDM, e pode ter impacto em algumas tensões de Λ CDM, tais como no valor de H_0 e no valor de σ_8 [18, 19].

4.4.7 Consequências para $f\sigma_8$

Outro observável que usamos em nossa análise em [2] foram os dados de $f\sigma_8$. Perceba que, uma vez que as equações de fundo desta estrutura são as mesmas do Λ CDM, temos que procurar observáveis sensíveis às perturbações. Fizemos isso com as parametrizações de gravidade modificadas avaliadas nas subseções anteriores, que levam a limites para ν , mas sem ligações explícitas para resolver algumas das anomalias atuais do Λ CDM. Portanto, seguindo ainda nosso trabalho [2], consideramos para presente análise os dados de $f\sigma_8$ (dados de distorção no espaço de *redshift*, subseção 2.3.3).

Consideremos o universo composto por matéria tipo poeira e Λ_0 . Desta forma, nossa equação de segunda ordem do contraste de densidade é dada por (3.7)

$$\delta_\varepsilon'' + \mathcal{H}\delta_\varepsilon' - 4\pi G_0 Y(a, k) a^2 \bar{\varepsilon} \delta_\varepsilon = 0. \quad (4.86)$$

Nesta equação, Y é dado por (4.82). Para escalas de distância muito menores que $4\text{Gpc}a^{-1/2}$, o termo $\varrho(a)/k^2$ dentro de Y é insignificante, portanto $Y \approx 1/(1-\nu)$. A expressão resultante é exata em ν e é equivalente a (4.76) para $c_s^2 = 0$. Embora não haja uma dependência explícita de Λ_0 , seu efeito está presente nas quantidades de fundo.

Podemos reescrever (4.86) da seguinte forma

$$\partial_a^2 \delta_\varepsilon + \left(\frac{\partial_a H}{H} + \frac{3}{a} \right) \partial_a \delta_\varepsilon - \frac{3H_0^2 \Omega_{m0}}{2a^5 H^2} \frac{1}{1-\nu} \delta_\varepsilon = 0. \quad (4.87)$$

Em (4.87) o termo ∂_a é a derivada com relação ao fator de escala a , H é o fator de Hubble medido no tempo cósmico e usamos o fato de que $Y \approx (1-\nu)^{-1}$. Destacamos aqui uma característica particular desta estrutura em escalas de sub-horizonte: notamos que não é a mudança de Y com z que permite uma possível redução da tensão entre as medidas da CMB e medida “local” de σ_8 , mas a incompatibilidade entre a constante gravitacional de fundo (G_0) e a constante gravitacional efetiva ($Y G_0$) que atua sobre as perturbações, acrescentando, assim, um novo parâmetro relevante para a dinâmica.

Agora, a partir de (2.43), o parâmetro Hubble na atual configuração é

$$H^2(a) = \left(\frac{\Omega_{m0}}{a^3} + 1 - \Omega_{m0} \right) H_0^2. \quad (4.88)$$

Neste caso, que consideramos a influência do Λ_0 , não conhecemos uma solução analítica explícita para δ_ε , mas podemos determinar uma solução numérica usando (4.87). Desta maneira, a quantidade principal para este teste é $f\sigma_8(a)$ (2.277).

Para resolver numericamente a equação (4.87) é importante conhecer quais as condições iniciais devemos usar. Considerando o fundo cosmológico de Λ CDM, em $z \sim 10^3$ o universo é dominado por poeira, portanto, o uso das condições iniciais neste z a partir da solução de δ_ε (4.69) (para universo dominado por poeira) deve funcionar como uma boa aproximação no contexto de Λ CDM (ou seja, $\nu = 0$, ver, por exemplo, [10]). A fim de avaliar melhor o impacto de tal aproximação ao atual cenário ($\nu \neq 0$), consideramos também a imposição de condições iniciais e o uso de (4.69) em $z = 100$. Descobrimos que não há alterações relevantes em nenhum dos nossos resultados usando qualquer um dos casos, a diferença nos parâmetros inferidos é de cerca de $\sim 10^{-4}$.

Em escalas de sub-horizonte, somente os termos que se multiplicam $k^2\eta^2$ são relevantes. O modo proporcional a C_1 acabará dominando sobre o modo proporcional a C_2 , portanto consideramos apenas o modo C_1 (que, com exceção do caso $\nu \ll -1$, é uma modo crescente, enquanto C_2 é o coeficiente de um modo decrescente). Como já sabemos, negligenciar o modo decrescente é algo comumente feito, pois simplifica consideravelmente a questão das condições iniciais, além de ser uma boa aproximação. De fato, em $z \sim 100$ estamos profundamente na fase dominada pela matéria, proporcionando assim tempo suficiente para que o modo decrescente seja insignificante.

Para um universo dominado pela poeira sabemos que $a \propto \eta^2$, portanto (4.69) nos dá as seguintes condições iniciais

$$\delta_\varepsilon(a) \propto a^{\frac{\tilde{\nu}}{2}+1} \quad e \quad \partial_a \delta_\varepsilon(a) \propto \left(\frac{\tilde{\nu}}{2} + 1\right) a^{\frac{\tilde{\nu}}{2}}, \quad (4.89)$$

no limite do sub-horizonte e apenas com o modo crescente. Um vez que (4.87) é invariante sob qualquer redimensionamento constante de δ_ε , apenas o termo dependente de a é mantido em $\delta_\varepsilon(a)$, enquanto que, para derivar $\partial_a \delta_\varepsilon(a)$, não redimensionamos δ_ε . Sabendo que, dentro de RG, para $z = 10^3$, pode-se usar as condições de contorno $\delta_\varepsilon(10^3) = 10^{-3}$ e $\partial_a \delta_\varepsilon(10^3) = 1$.

Usando todo conjunto de dados apresentados na subseção 2.3.3, chegamos nos resultados que podem ser vistos na tabela 1 e na figura 2 usando análise de χ^2 mínimo. Os resultados mostram que ν tem um impacto relevante em $f\sigma_8$ mesmo dentro do limite (4.84), e, portanto, esta estrutura pode aliviar possíveis incompatibilidades entre σ_8 conforme inferido do CMB com valores σ_8 inferidos em baixo *redshift*. Em mais detalhes, na tabela 1 mostramos os resultados para Λ CDM e consideramos sua versão estendida na qual G e Λ dependem de escala (inspirada em efeitos de GR), como aqui proposto e rotulado como Λ CDM+GR. O caso mais simples que consideramos aqui é o de Λ CDM com parâmetros Ω_{m0} e σ_8 fixados a partir dos resultados de [1], enquanto ν varia para melhor acomodar

o modelo dentro dos dados $f\sigma_8$ (a terceira linha da tabela 1). Claramente, ν tem um impacto neste ajuste e o resultado é tão bom quanto (considerando o valor de χ_{min}^2) o caso em que tanto Ω_{m0} como σ_8 variam dentro de Λ CDM. A mesma tabela mostra o caso em que Ω_{m0} , σ_8 e ν variam livremente, o que reduz ainda mais o valor χ_{min}^2 , mas o valor resultante ν está fora do limite (4.84). Quando obrigamos que ν fique dentro desse limite, o resultado χ_{min}^2 muda em apenas 0.10 enquanto o Ω_{m0} e σ_8 se aproximam dos valores do Λ CDM/Planck (como mostrado na última linha da tabela 1). Como comentado anteriormente, o impacto sobre a quantidade de matéria escura é pequeno, e ele está longe de substituir a matéria escura em escalas cosmológicas; e na verdade esses dados sugerem um ligeiro aumento no conteúdo de matéria escura, como esperado, uma vez que esses dados favorecem valores negativos de ν .

Na figura 2 [2], mostramos as curvas correspondentes a quatro dos melhores resultados apresentados na tabela 1. Omitimos apenas o caso que viola a restrição (4.84). O gráfico também mostra explicitamente que uma mudança de ν pode ter um efeito considerável em $f\sigma_8$, e isso especialmente para baixos z , mesmo considerando a restrição (4.84). Para valores maiores de z (ou seja, $z \approx 1.5$), valores diferentes de ν levam essencialmente às mesmas previsões. Esta estrutura pode ser ainda mais testada, ampliando esta análise para dados CMB completos (seção 5) ou pelos resultados de futuros limites para o *slip* gravitacional. Este último pode apoiar ainda mais esta abordagem, ou pode tornar menores os possíveis efeitos desta estrutura em $f\sigma_8$, conforme implícito pelo limite previsto em (4.85). A análise com dados de CMB é feita no próximo capítulo através de estatística MCMC (esta análise pode ser encontrada também em [3]).

Em [157], os autores encontram soluções de gravidade Brans-Dicke particulares que podem imitar certas correções do GR em gravitação [158, 159] e aliviar tanto as tensões H_0 como σ_8 [18, 19]. Em seu caso, as equações de campo de fundo são diferentes de Λ CDM, que é diferente do nosso caso, mas, por outro lado, em sub-horizonte o principal efeito novo é um redimensionamento da constante gravitacional efetiva. Ambos os modelos apresentam um afastamento da RG que favorece perturbações cosmológicas cuja constante gravitacional efetiva é reduzida em relação à constante gravitacional da RG.

Tabela 1 – Resultados usando somente dados de $f\sigma_8$.

Modelo	Variação	Parâmetros	χ_{min}^2	Ω_{m0}	σ_8	ν
Λ CDM	Parâmetros Planck-2018	Nenhum	51.34	0.315	0.811	0
Λ CDM	Ajustes com dados de $f\sigma_8$	Ω_{m0}, σ_8	32.40	0.283	0.769	0
Λ CDM+GR	Somente ν é Ajustado	ν	32.42	0.315	0.811	-0.167
Λ CDM+GR	Melhor Ajuste, Sem Restrições	$\Omega_{m0}, \sigma_8, \nu$	32.04	0.355	0.981	-0.769
Λ CDM+GR	Melhor Ajuste com $ \nu \leq 0.3$	$\Omega_{m0}, \sigma_8, \nu$	32.14	0.316	0.855	-0.300

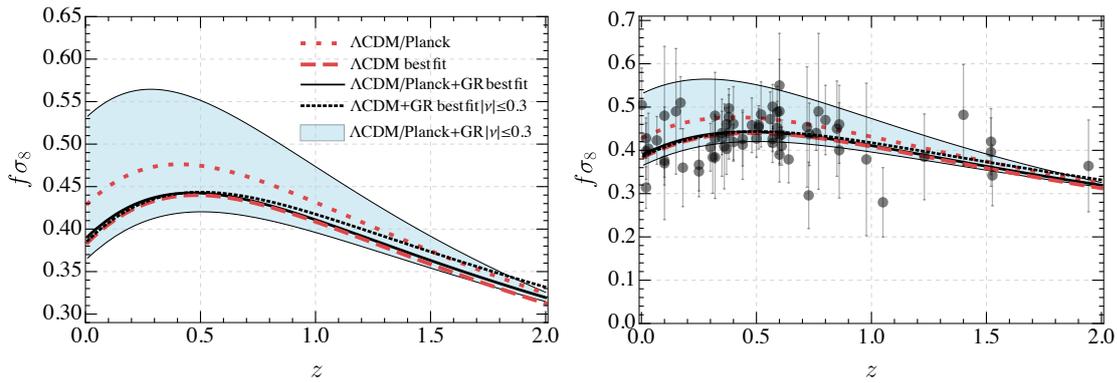


Figura 2 – Gráficos retirados de [2]. **Gráfico Esquerdo:** curvas $f\sigma_8$ para quatro modelos que aparecem na tabela 1, apenas o modelo de melhor ajuste sem restrições não é mostrado (uma vez que viola o limite (4.84) e sua curva é semelhante à curva preta pontilhada). Λ CDM/Planck indica que os parâmetros Ω_{m0} e σ_8 são dados pela colaboração Planck 2018 [1]. A região azulada mostra o efeito de alterar o valor de ν , dentro dos limites permitidos (4.84), ao usar os valores de Ω_{m0} e σ_8 dados por Λ CDM/Planck [1]. **Gráfico Direito:** Este gráfico mostra as mesmas curvas exibidas no gráfico esquerdo e adiciona os dados observacionais $f\sigma_8$ (apresentados na seção 2.3.3).

5 Status Observacional do Modelo com G e Λ Dependentes de Escala

5.1 Considerações Iniciais

No capítulo anterior estudamos a estrutura cosmológica do modelo em que os acoplamentos G e Λ dependem de escala inspirada em efeitos de grupo de renormalização, assumindo certas aproximações. Esta estrutura foi apresentada no artigo [2]. Agora, vamos estudar o caso mais realista para este modelo, que inclui todas as componentes do universo assim como as interações entre elas e analisar suas consequências através de uma análise estatística de MCMC [3]. Uma diferença importante é que, por exemplo, temos a presença no fluido da tensão anisotrópica, decorrente do momento quadrupolar das componentes relativísticas. Outro exemplo, é a inclusão da interação Compton entre elétrons e fótons antes da recombinação.

Para resolver o sistema de equações que descrevem a evolução das perturbações e flutuações neste caso, precisaremos da modificação de algum código que resolva essas equações. Nesta tese vamos modificar o código cosmológico CLASS [4]. Após a integração das equações usando o CLASS o seguinte passo é realizar a análise estatística, e para isso usaremos o código estatístico MCMC-MontePython [44], usando a combinação dos dados apresentados na seção 2.3.

Devemos lembrar que esta abordagem não altera a dinâmica do fundo cosmológico e, agora, o fluido que compõem o sistema será a soma das contribuições de matéria (bárions e CDM), radiação (fótons e neutrinos).

Na atual configuração, a equação de Poisson relativística no espaço de Fourier é dada por

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\psi) + k^2\phi + 3\nu\mathcal{H}\psi' + \nu k^2\psi - 3\mathcal{H}'\nu\psi = \\ = -4\pi G_0 a^2(\bar{\varepsilon}_c\delta_c + \bar{\varepsilon}_b\delta_b + \bar{\varepsilon}_\gamma\delta_\gamma + \bar{\varepsilon}_n\delta_n). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Na presença da tensão anisotrópica, a parte sem traço das equações para as perturbações, no espaço de Fourier, é dada por

$$k^2[-\phi + (1 - 2\nu)\psi] = -12\pi G_0 a^2(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\sigma, \quad (5.2)$$

lembrando que o termo $(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\sigma$ é originado pelos momentos quádruplos das distribuições de fótons e neutrinos e perde sua importância a partir da recombinação ($z \sim 1100$). Note também que esta equação nos leva ao *slip* gravitacional (4.59) quando $(\bar{\varepsilon} + \bar{p})\sigma$ é desprezível.

A equação para velocidade das perturbações torna-se

$$k(\phi' + \mathcal{H}\psi + \nu\psi' - \nu\mathcal{H}\psi) = 4\pi G_0 a^2 \left(\bar{\varepsilon}_c V_c + \bar{\varepsilon}_b V_b + \frac{4}{3}\bar{\varepsilon}_\gamma V_\gamma + \frac{4}{3}\bar{\varepsilon}_n V_n \right), \quad (5.3)$$

Finalmente, a equação para perturbação da pressão é dada por

$$\begin{aligned} & \phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + \mathcal{H}\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\psi + \frac{k^2}{3}(\phi - \psi) + \\ & + \nu\psi'' + \nu\mathcal{H}\psi' + \frac{2}{3}\nu k^2\psi - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\nu\psi = 4\pi G_0 a^2 \left(\frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_\gamma \delta_\gamma + \frac{1}{3}\bar{\varepsilon}_n \delta_n \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Em geral, sabemos que para melhor descrever a formação de estruturas e as características da CMB devemos resolver o conjunto de equações (4.72) e (4.73) para cada componente do fluido. Aqui, o comportamento dos bárions e da radiação (especificamente fótons) são os mesmos do modelo Λ CDM, interagindo entre si através do espalhamento Thomson antes da recombinação, mas não interagindo diretamente com a matéria escura e a energia escura. Portanto, as equações da dinâmica dessas componentes serão as mesmas que as equações bem estabelecidas no modelo Λ CDM (veja, por exemplo, [68, 55]). As consequências do modelo estudado aqui são vistas apenas na forma de como as diferentes espécies interagem gravitacionalmente.

Como sabemos, em nosso contexto o divergente do tensor momento-energia tem um termo fonte (4.44), que depende do traço do tensor momento-energia. Em princípio, esse termo fonte poderia também ter influência nos bárions, mas isto deve se estudar com muito cuidado pois teria fortes implicações na nucleossíntese primordial, na física do fluido fóton-bárion e nas características acústicas dos bárions. Por isso, decidimos estudar o caso mais simples no qual apenas a matéria escura sofre influência do termo fonte. Portanto, dado tensor momento-energia (2.86), as equações de dinâmica linear de fluido ficam

$$\delta'_y + 3\mathcal{H} \left(c_{s(y)}^2 - w_y \right) \delta_y = (1 + w_y)(3\phi' - kV_y) - \left(\frac{Q_0}{\bar{\varepsilon}} \right)_y \quad (5.5)$$

$$V'_y + \mathcal{H}(1 - 3w_y)V_y - c_{s(y)}^2 \frac{k}{1 + w_y} \delta_y + k\sigma_y - k\psi = 0, \quad (5.6)$$

lembrando que o índice y indica cada componente do fluido. Então, dado que $\left(\frac{Q_0}{\bar{\varepsilon}} \right)_c = \frac{-\delta_G \bar{\varepsilon}'_c}{2\bar{\varepsilon}_c} = -3\nu\psi\mathcal{H}\bar{\varepsilon}_c$, a equação (5.5) para componente de matéria escura é

$$\delta'_c + kV_c - 3\phi' = 3\mathcal{H}\nu\psi. \quad (5.7)$$

Para a integração do nosso sistema de equações é necessário ter as condições iniciais. Vamos mostrar que essas condições iniciais, em geral, são diferentes de Λ CDM.

5.2 Condições Iniciais do Modelo

Como dito anteriormente, consideramos aqui que o comportamento dos fótons, neutrinos e bárions são as mesmo que Λ CDM,¹ logo, as equações advindas das equações de Boltzmann para cada uma dessas componentes permanecem as mesmas, assim, as equações escritas na subseção 2.2.3 terão o mesmo formato para estas componentes do fluido cósmico. Entretanto, o comportamento dinâmico associado a matéria escura sofre influencia maior que as outras componentes, que pode ser visto na equação (5.7).

Aqui, fazemos uso das equações (5.1), (5.2) e (5.4). Assim, podemos determinar os modos primordiais das quantidades Θ_l , \mathcal{N}_l , δ_c , δ_b , V_c , V_b , ϕ e ψ . Lembrando que para determiná-los consideramos o regime de super-horizonte, $k\eta \ll 1$, em que a radiação domina no fluido, $a \propto \eta$.

As equações de evolução no limite $k\eta \ll 1$ para fótons, neutrinos e bárions permanecem as mesma em nesta abordagem, ou seja,

$$\delta'_\gamma = 4\phi', \quad (5.8)$$

$$\delta'_n = 4\phi' \quad (5.9)$$

$$\delta'_b = 3\phi'. \quad (5.10)$$

Agora, tomando a expansão $Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}(k\eta)^n$ (n é a ordem da expansão) em (5.7) obtemos

$$\delta_c^{(1)}(k\eta) + V_c^{(0)}(k\eta) + V_c^{(1)}(k\eta)^2 - 3\phi^{(1)}(k\eta) = 6\nu \left(\psi^{(0)} + \psi^{(1)}(k\eta) \right),$$

considerando a soma até $n = 1$. Aqui, percebemos que as velocidades das partículas de CDM são subdominantes em relação aos campos δ_c , ϕ e ψ , porém diferentes das equações das demais componentes, temos a presença do termo relacionado a escala. Então, para matéria escura, teremos

$$\delta'_c = 3\phi' + \frac{3\nu}{\eta}\psi. \quad (5.11)$$

Logo, o conjunto de soluções são

$$\delta_\gamma = 4\phi + 4C_\gamma, \quad (5.12)$$

$$\delta_n = \delta_\gamma, \quad (5.13)$$

$$\delta_b = \frac{3}{4}\delta_\gamma, \quad (5.14)$$

$$\delta_c = \frac{3}{4}\delta_\gamma + f(\eta), \quad (5.15)$$

sendo

$$f(\eta) = \int \frac{3\nu}{\eta}\psi d\eta. \quad (5.16)$$

¹ O qual segue o comportamento do modelo padrão de partículas.

Perceba que já assumimos que os modos de entropia (S_n , S_b e S_c), definidos na subseção 2.2.3, são nulos, uma vez que estamos interessados aqui somente em modo adiabáticos.

A relação para os fótons permanece a mesma como em Λ CDM. Então, para fótons temos

$$\Theta_l = \Theta_{Pl} = 0, \quad l > 2, \quad (5.17)$$

$$\Theta_2 = \Theta_{P2} = \Theta_{P0} = \Theta_{P1} = 0. \quad (5.18)$$

E para neutrinos temos

$$\mathcal{N}_l = \frac{k\eta}{2l+1} \mathcal{N}_{l-1}, \quad l \geq 2. \quad (5.19)$$

A relação entre a velocidade dos fóton e neutrinos continua sendo

$$V_\gamma = V_n. \quad (5.20)$$

Bem com a relação entre a velocidades de bárions e matéria escura

$$V_\gamma = V_b. \quad (5.21)$$

Agora, vamos ver como nossas equações de campo de ordem linear ficam. Como a dinâmica de fundo continua a mesma que Λ CDM, a equação de Friedmann é a mesma, ou seja,

$$4\pi G a^2 = \frac{3\mathcal{H}^2}{2\bar{\varepsilon}_{total}} = \frac{3}{2\bar{\varepsilon}_{total}\eta^2}. \quad (5.22)$$

Vamos lembrar que para construir nosso sistema de equações usamos a fração de densidade $R_i \equiv \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_{total}}$, tal que, $R_\gamma + R_n \approx 1$. Desta maneira, negligenciando termos de $(k\eta)^2$, nossa equação de Poisson relativística fica

$$-2\eta\phi' - 4\phi - 2\psi - 2\nu\eta\psi' - 2\nu\psi = 4C_\gamma + R_c f(\eta). \quad (5.23)$$

Nossa equação para tensão anisotrópica fica

$$(k\eta)^2(-\phi + (1 - 2\nu)\psi) = -12R_n\mathcal{N}_2, \quad (5.24)$$

derivando duas vezes esta equação

$$\begin{aligned} 2k^2[-\phi + (1 - 2\nu)\psi] + 4k^2\eta[-\phi' + (1 - 2\nu)\psi'] + k^2\eta^2[-\phi'' + (1 - 2\nu)\psi''] \\ = -\frac{8}{5}R_n k V_n' = -\frac{8}{5}R_n k^2 \left(\psi + \frac{\delta_\nu}{4} \right), \end{aligned} \quad (5.25)$$

simplificando k^2 derivando novamente, temos

$$\begin{aligned} 6[-\phi' + (1 - 2\nu)\psi'] + 6\eta[-\phi'' + (1 - 2\nu)\psi''] + \eta^2[-\phi''' + (1 - 2\nu)\psi'''] = \\ = -\frac{8}{5}R_n(\psi' + \phi'), \end{aligned} \quad (5.26)$$

aqui usamos $\delta'_n = 4\phi'$. Lembrando que R_n é constante quando a radiação domina.

A equação para perturbação da pressão (5.4) fica

$$-4\phi + 4\eta\phi' + 2\eta^2\phi'' - 2(1 + \nu)\psi + 2(1 + \nu)\eta\psi' + 2\nu\eta^2\psi'' = 4C_\gamma, \quad (5.27)$$

aqui negligenciamos termos de $(k\eta)^2$.

Agora, podemos determinar os modos primordiais adiabáticos de nosso sistema. Para isto, de (5.12), (5.13), (5.14) e (5.15), temos

$$\frac{1}{3}\delta_c - \frac{f(\eta)}{3} = \frac{1}{3}\delta_b = \frac{1}{4}\delta_\gamma = \frac{1}{4}\delta_n = \phi + C_\gamma \quad (5.28)$$

Assim, as equações (5.23), (5.26) e 5.27 tornam-se

$$-2\phi - \eta\phi' - (1 + \nu)\psi - \nu\eta\psi' = 2C_\gamma + R_c f(\eta), \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} 6[-\phi' + (1 - 2\nu)\psi'] + 6\eta[-\phi'' + (1 - 2\nu)\psi''] + \eta^2[-\phi''' + (1 - 2\nu)\psi'''] = \\ = -\frac{8}{5}R_n(\psi' + \phi') \end{aligned}, \quad (5.30)$$

$$-2\phi + 2\eta\phi' + \eta^2\phi'' - (1 + \nu)\psi + (1 + \nu)\eta\psi' + \nu\eta^2\psi'' - 2C_\gamma = 0. \quad (5.31)$$

Derivando a partir de (5.29) e usando (5.31), encontramos

$$3\nu R_c \psi = 0 \quad (5.32)$$

sendo $R'_c = \mathcal{H}R_c$. Como queremos $\nu \neq 0$ e $\psi \neq 0$, temos $R_c \approx 0$. É claro que isso tem que ser verdade, uma vez que estamos na época dominada pela radiação. Portanto, desconsideramos o termo $R_c f(\eta)$ na equação (5.29), logo

$$-2\phi - \eta\phi' - (1 + \nu)\psi - \nu\eta\psi' = 2C_\gamma, \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} 6[-\phi' + (1 - 2\nu)\psi'] + 6\eta[-\phi'' + (1 - 2\nu)\psi''] + \eta^2[-\phi''' + (1 - 2\nu)\psi'''] = \\ = -\frac{8}{5}R_n(\psi' + \phi'), \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$-2\phi + 2\eta\phi' + \eta^2\phi'' - (1 + \nu)\psi + (1 + \nu)\eta\psi' + \nu\eta^2\psi'' - 2C_\gamma = 0. \quad (5.35)$$

A partir de 5.33 temos

$$\eta\psi' = [-2\phi - 2\eta\phi' - (1 + \nu)\psi - 2C_\gamma] \nu^{-1},$$

substituindo em (5.35) e considerando termos até a ordem ν encontramos

$$\psi = \nu\eta^2\phi'' - (1 - 4\nu)\eta\phi' - 2(1 - \nu)\phi - 2(1 - \nu)C_\gamma. \quad (5.36)$$

Usando (5.36) em (5.34), e considerando novamente termos até a ordem ν , encontramos

$$-\nu\eta^4\phi'''' + (1 - 18\nu)\eta^3\phi'''' + 12\left[1 - \nu\left(8 + \frac{2R_n}{15}\right)\right]\eta^2\phi'''' + \\ + 4\left[9 + \frac{2}{5}R_n - \left(42 + \frac{12}{5}R_n\right)\nu\right]\eta\phi'' + 8(1 - 3\nu)\left(3 + \frac{2}{5}R_n\right)\phi' = 0.$$

Esta equação pode ser resolvida de forma exata uma vez que R_n é constante. Suas soluções são

$$\phi = \text{constante}, \quad \phi \propto \eta^{-\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5-32R_n}}{2\sqrt{5}}}, \quad \phi \propto \frac{1}{\eta}, \quad \phi \propto \frac{\eta^{\frac{1}{\nu}-2}}{\frac{1}{\nu}-2}. \quad (5.37)$$

Perceba que as quatro primeira soluções são semelhantes as do modelo Λ CDM. O único modo não decrescente é a solução $\phi = \text{constante}$. Esta é a solução a ser considerada. As demais soluções, semelhantes aos do modelo Λ CDM, são modos decrescentes. Descartamos a última solução em nossa análise devido possuir um limite indeterminado quando $\nu = 0$, e nosso objetivo aqui é estudar soluções que possuem um limite de Λ CDM.

Como C_γ e ϕ são constantes, então de (5.36) deduzimos que ψ também é constante. Portanto, a partir das equações (5.36) e (5.25) encontramos até a primeira ordem em ν

$$-2(1 - \nu)\phi - \psi = 2(1 - \nu)C_\gamma \\ -\phi + (1 - 2\nu)\Psi = -\frac{4}{5}R_n(\psi + \phi + C_\gamma).$$

Portanto, o modos correspondentes a ϕ e ψ são

$$\phi = -\frac{2C_\gamma(5 + 2R_n)}{15 + 4R_n}\left[1 - \frac{5\nu}{5 + 2R_n}\right], \quad (5.38)$$

$$\psi = -\frac{10C_\gamma}{15 + 4R_n}(1 + \nu), \quad (5.39)$$

com

$$\phi = \psi\left(1 + \frac{2}{5}R_n\right)\left[1 - 2\frac{5 + R_n}{5 + 2R_n}\nu\right]. \quad (5.40)$$

Agora, a partir da equação (5.12) temos

$$\delta_\gamma = \frac{20C_\gamma}{(15 + 4R_n)}(1 + 2\nu) \approx -2\psi(1 + \nu). \quad (5.41)$$

Substituindo em (5.28), podemos determinar as condições iniciais do contraste de densidade de cada componente. A função $f(\eta) = \int 3\nu\psi\frac{d\eta}{\eta}$ torna-se

$$f(\eta) = 3\nu\psi \ln\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right),$$

sendo η_0 uma constante de integração, correspondente a um tempo inicial. Para nosso código numérico consideramos que $\eta \sim \eta_0$, portanto,

$$f(\eta) \approx 0. \quad (5.42)$$

Até a primeira ordem em ν , podemos obter os modos primordiais dos momentos de quadrupolo dos neutrinos (\mathcal{N}_2) a partir de (5.24)

$$\mathcal{N}_2 = \frac{k^2 \eta^2}{30} \psi (1 - \nu). \quad (5.43)$$

Como em Λ CDM, os modos primordiais das velocidades são dados por

$$V_n = V_\gamma = V_b = V_c = \frac{k \eta \psi}{2}. \quad (5.44)$$

Assim como em Λ CDM, todos os modos dependem da mesma constante C_γ , que é a perturbação primordial. Comparando com os resultados do modelo padrão, nossos modos primordiais diferem de Λ CDM apenas por um fator que depende exclusivamente de ν . Além disso, podemos determinar a relação de C_γ com \mathcal{R} (2.148) e ς (2.149), no calibre Newtoniano. Lembramos que

$$\mathcal{R} = \phi + \mathcal{H}v_{total} \quad \text{e} \quad \varsigma = \phi + \frac{R_\gamma \delta_\gamma + R_n \delta_n + R_c \delta_c + R_b \delta_b}{3 + R_\gamma + R_n}. \quad (5.45)$$

O resultado para \mathcal{R} permanece o mesmo que o encontrado em 2.2.3, isto é,

$$\mathcal{R} = -\phi - \frac{\psi}{2}. \quad (5.46)$$

Em relação a ς temos

$$\varsigma = -\phi - \frac{\psi}{2} (1 + \nu). \quad (5.47)$$

Então, temos a seguinte relação

$$\varsigma = \mathcal{R} + \frac{5C_\gamma}{15 + 4R_n} \nu, \quad (5.48)$$

que difere do resultado de Λ CDM a partir de uma fator que depende de ν .

5.3 Resultados da Análise de MCMC

Todo conjunto de equações apresentadas até aqui é suficiente para modificar o código CLASS de acordo com o modelo e, assim, obter os resultados estatísticos com MCMC-MontePython que veremos a seguir. A figura 3 mostra o espectro de potencia do modo de temperatura da CMB (considerando $|\nu| = 0.01$) e a função de correlação de dois pontos que identifica os picos de BAO (considerando $|\nu| = 0.005$). Estes gráficos foram obtidos com o código CLASS. Neles fixamos os demais parâmetros com Λ CDM. Observamos como os efeitos de escala afetam a potencia da CMB e deslocam os picos BAO em D_ℓ^{TT} e em $r^2 \xi(r)$.

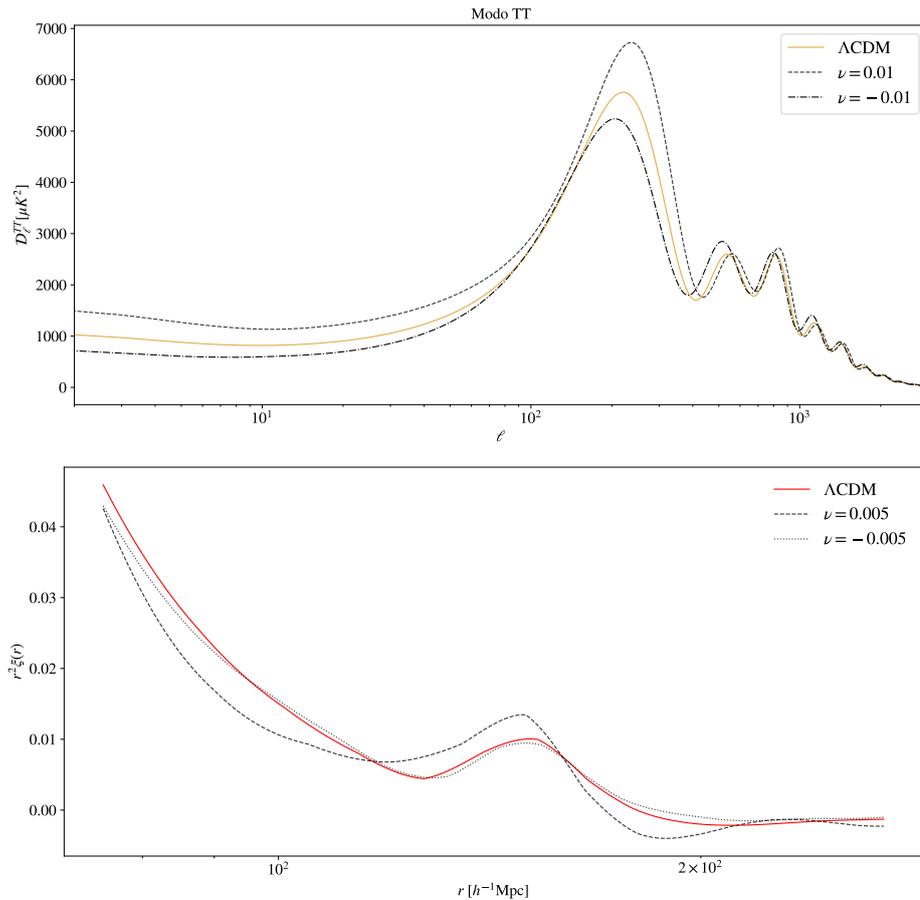


Figura 3 – Espectros de potencia do modo TT (considerando $|\nu| = 0.01$) e função de correlação de dois pontos (considerando $|\nu| = 0.005$). Plots feitos no código CLASS [4] devidamente modificado e fixando os demais parâmetros com Λ CDM. Em laranja temos o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em preto temos os resultados com $\nu \neq 0$.

A análise feita com todos os dados apresentados na seção 2.3 são mostrados na tabela 3 e na figura 5. Apresentamos também o resultado usando os dados de $f\sigma_8$ como consistência das conclusões na subseção 4.4.7. As figuras são apresentadas com um intervalo de confiança de 2σ e a tabela de dados com intervalo de 68% de confiança. Os resultados são identificados para Λ CDM ($\nu = 0$) e consideramos sua versão dependem de escala (inspirada em efeitos de GR), Λ CDM+GR (ν livre). Em todos os testes, o parâmetro de convergência Gelman-Rubin satisfaz a condição $\hat{R} - 1 < 0.01$ [160].

Na tabela 2 e na figura 4 mostramos os resultados de MCMC da análise em que foram utilizados somente os dados de $f\sigma_8$ de baixa correlação, do conjunto apresentado na subseção 2.3.3). Esta análise estatística reforça os resultados da análise qualitativa na subseção 4.4.7. Perceba que ν tem um impacto relevante em σ_8 , mostrado pela anticorrelação entre esses parâmetros, favorecendo um valor de ν negativo. Além disso, o resultado na figura 4 mostra também que o impacto sobre a quantidade de matéria escura

é sutil, estando longe de substituir a matéria escura em escalas cosmológicas.

Tabela 2 – Resultados estatísticos usando somente dados de $f\sigma_8$ 2.277, com intervalo de 68% de confiança.

Parâmetros	Λ CDM	Λ CDM+GR
σ_8	$0.7574^{+0.022}_{-0.022}$	$0.8516^{+0.057}_{-0.098}$
ν	0	-0.168(Sem barras de erro)
χ^2_{min}	28.81	28.81

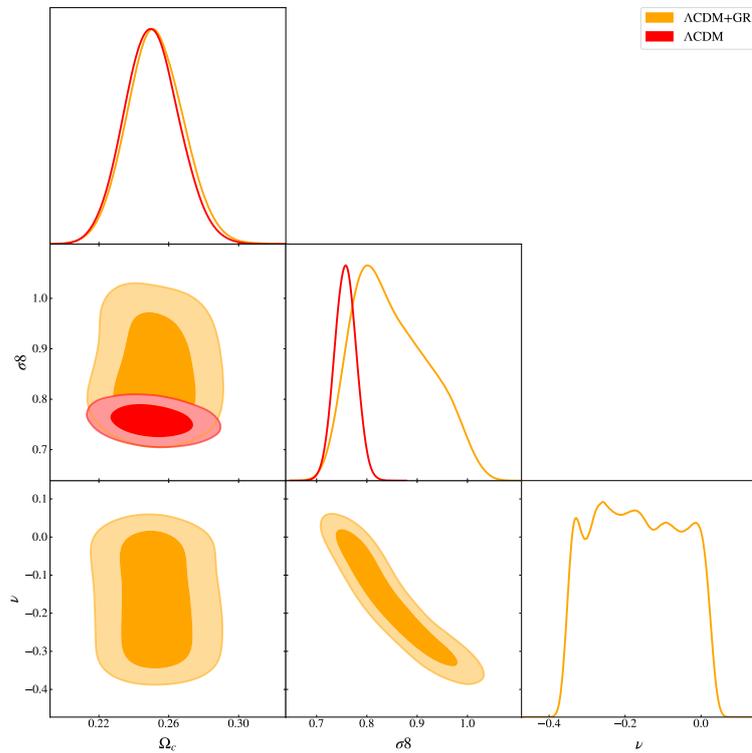


Figura 4 – Curvas de contorno usando os dados de baixa correlação de $f\sigma_8$. Em vermelho temos o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em laranja temos os resultados para Λ CDM+GR (ν livre).

A figura 5 apresenta os resultados da análise conjunta de todos os dados apresentados na seção 2.3. Em geral, esta análise mostra que o modelo Λ CDM+GR é quase degenerado com Λ CDM, mas vale destacar algumas observações em comparação à análise feita na seção anterior. Ao contrário da análise feita considerando somente dados de $f\sigma_8$, a figura 5 mostra que, na verdade, existe uma correlação positiva entre ν e σ_8 , com uma preferência para valores positivos de ν . Usando o resultado de KiDS-1000 ($z \lesssim 1$) [161] para S_8 ($\sigma_8 \sqrt{\frac{\Omega_m}{0.3}}$) verificamos que a tensão em relação ao valor de $S_8 - \Lambda$ CDM é de $\sim 2.63\sigma$, enquanto que para $S_8 - \Lambda$ CDM+GR temos $\sim 2.66\sigma$. Em relação H_0 podemos perceber que existe um alargamento dos resultados para este parâmetro em Λ CDM+GR, mas nada que seja

significativo em comparação ao modelo Λ CDM. Comparando com os resultados de medidas locais [56], verificamos que a tensão na medida de $H_0 - \Lambda$ CDM é de $\sim 3.92\sigma$, enquanto que para $H_0 - \Lambda$ CDM+GR temos $\sim 3.87\sigma$. Logo, percebemos que Λ CDM e Λ CDM+GR são indistinguíveis quando tratamos das tensões envolvendo dados de pequenas e grandes escalas cosmológicas para σ_8 e H_0 . Por último, notamos a partir da figura 5 um sutil impacto na quantidade de matéria escura. Notamos que existe um aumento da força quando $\nu > 0$, no entanto, esta amplificação da força não induz um efeito significativo na redução da quantidade de matéria escura.

Tabela 3 – Resultados da análise conjunta dos dados descritos na seção 2.3, com intervalo de 68% de confiança.

Parameter	Λ CDM	Λ CDM+GR
$100 \times h^2 \Omega_{b0}$	$2.244^{+0.013}_{-0.013}$	$2.242^{+0.013}_{-0.015}$
$h^2 \Omega_c$	$0.119^{+0.00089}_{-0.00086}$	$0.1189^{+0.00098}_{-0.00085}$
Ω_{Λ_0}	$0.6912^{+0.0053}_{-0.0054}$	$0.6919^{+0.0056}_{-0.0059}$
H_0	$67.84^{+0.4}_{-0.41}$	$67.9^{+0.43}_{-0.46}$
σ_8	$0.8069^{+0.0058}_{-0.0057}$	$0.8092^{+0.0081}_{-0.0084}$
$100 \times \theta_s$	$1.042^{+0.00028}_{-0.00029}$	$1.042^{+0.0005}_{-0.00051}$
$\ln 10^{10} A_s$	$3.042^{+0.014}_{-0.015}$	$3.04^{+0.015}_{-0.013}$
n_s	$0.9665^{+0.0036}_{-0.0037}$	$0.9674^{+0.0042}_{-0.0041}$
τ_{reio}	$0.05431^{+0.0068}_{-0.0077}$	$0.0538^{+0.0071}_{-0.0067}$
ν	0	$(6.698 \times 10^{-05})^{+0.00017}_{-0.00017}$
χ^2_{min}	3841	3840

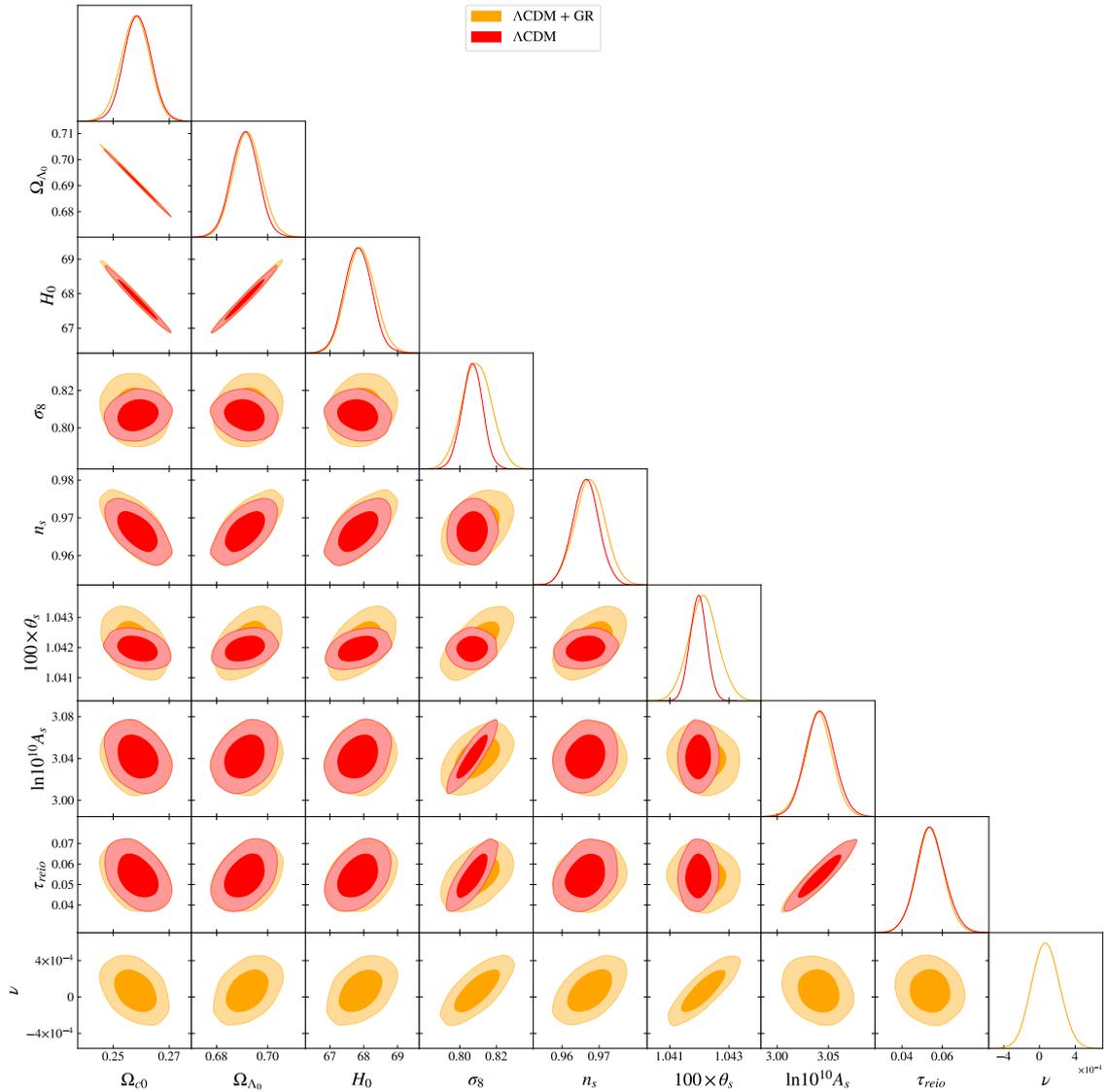


Figura 5 – Curvas de contorno da análise conjunta dos dados descritos na seção 2.3. Em vermelho o resultado para Λ CDM ($\nu = 0$) e em laranja os resultados para Λ CDM+GR (ν livre).

6 Conclusão

Neste trabalho apresentamos o modelo gravitacional no qual os acoplamentos G e Λ dependem de escala, inspirada por efeitos do Grupo de Renormalização (GR) em Relatividade Geral (RG) a grandes escalas cosmológicas. Este modelo e sua estrutura cosmológica foram apresentados no artigo [2]. As restrições cosmológicas mais precisas, usando análise MCMC, são apresentadas no artigo [3]. Nossa primeira análise para o quadro cosmológico dependente de escala, como aqui apresentada, indica apenas pequenos desvios com respeito aos parâmetros de medidos usando o modelo Λ CDM, quando todos os dados são analisados juntos. Ou seja, considerando os dados disponíveis atualmente, o parâmetro adicional ν não é capaz de melhorar o ajuste aos dados, ou levar a consequências qualitativamente diferentes.

Este modelo considera que todas as informações sobre a variação desses acoplamentos estão inclusas na ação, de maneira que deve haver uma ação clássica efetiva capaz de descrever completamente a dinâmica a distâncias cosmológicas. Apresentamos a ação completa do modelo, a qual estende a da referência [39], utilizando um número arbitrário de possíveis escalas. Avaliamos as equações de campo e as consequências para a conservação do tensor momento-energia. No contexto dos fluidos, utilizamos a mesma escala proposta em [39], dada pelo escalar W (4.12), a qual estende uma série de propostas não covariantes (por exemplo, [28, 31, 38, 145]). Tal escala sempre preserva o fundo, afetando somente as perturbações. A novidade no caso cosmológico é que o fundo em si é dinâmico e, portanto, como aqui encontrado, esta propriedade implica que uma segunda escala é necessária. Entretanto, não há escolha a ser feita, pois as equações de campo fixam a segunda escala como uma função do traço tensor momento-energia. Mostramos que não são necessárias outras escalas além da segunda. Para o vácuo ($T_{\alpha\beta} = 0$), a relação entre G e Λ é a mesma que em [39], ou seja, $\Lambda \propto G^{-1}$ (ver também [27, 162, 163]).

No geral, nossos resultados não são restritos por suposições sobre como G e Λ variam. O que supomos aqui é que podemos aproximar $G(\mu_1(W)) = G(W)$ por uma função linear em torno de $W = 0$ (correções de ordem superior são possíveis, mas não alteram nossos resultados). Existem diferentes estruturas cosmológicas nas quais os acoplamentos Λ e G dependem da escala. A maioria considera a implementação desses efeitos no nível das equações de campo, ou parcialmente no nível de ação (por exemplo, [28, 37, 136, 137, 164, 165]). No entanto, a abordagem que tratamos aqui visa uma estrutura na qual todas as informações relevantes vêm da ação, incluindo os ajustes de escala e, por conseguinte, a aplicamos à cosmologia. Assim, levando a um quadro que é diferente tanto da RG, como de outras teorias de gravitação. Ao contrário de várias abordagens dentro dos efeitos do GR no nível das equações de campo, no quadro proposto, não se pode

escolher se G irá variar, ou Λ irá, ou ambos (veja, por exemplo, [37, 137]). Esta liberdade aparece em tais teorias uma vez que uma ação completa não é usada nem conhecida, logo $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ não é fixo e pode ser zero ou pode depender de como G ou Λ variam. Em nossa estrutura, tal como em [39], não existe tal liberdade, uma vez que as escalas são fixadas, logo $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}$ também é fixado, o que está de acordo com a equação (4.10), uma consequência da invariância do difeomorfismo da ação.

Analisamos o modelo considerando primeiro o caso de um fluido perfeito, verificamos as consequências dinâmicas considerando a métrica de FLRW com perturbações escalares (2.160) do modelo. Obtivemos algumas soluções exatas, mostramos a evolução das perturbações e mostramos as parametrizações generalizadas do nosso modelo (subseção 4.4.4). Realizamos um análise utilizando dados de $f\sigma_8$ (apresentados na subseção 2.3.3) Encontramos que novos efeitos podem reduzir sensivelmente os valores de $f\sigma_8$ para baixos *redshifts* ($z < 1.5$), preservando, ao mesmo tempo, o resultados de $f\sigma_8$ para Λ CDM em altos *redshifts*, assim, apresentando um potencial de aliviar as tensões nas medidas de H_0 e σ_8 que estão presentes em Λ CDM [18, 19]. Este resultado nos motivou a ir além de uma análise exclusiva de $f\sigma_8$.

Afim de avaliar esta estrutura com mais precisão, consideramos a análise conjunta dos dados apresentados na seção 2.3. Neste caso, assumimos o tensor momento-energia dado por (2.86), no qual temos presença da tensão anisotrópica. Reescrevemos as equações e definimos as condições iniciais. Assim, analisamos os resultados da análise estatística feita pela combinação do código CLASS [4] com o código estatístico MCMC-MontePython [44]. A análise MCMC feita somente com dados de $f\sigma_8$ reforça os resultados obtidos na subseção 4.4.7, mencionados anteriormente. Verificamos uma anti-correlação entre nosso parâmetro ν e σ_8 , favorecendo um valor de ν negativo. No entanto, este resultado mostra que esta estrutura não substitui significativamente a componente de matéria escura. Depois, apresentamos os resultados da análise conjunta dos dados da seção 2.3, resumidos na tabela 3 e na figura 5. Considerando a análise completa verificamos que na verdade existe uma correlação positiva entre ν e σ_8 , com ν sendo positivo. Além disso, as tensões que envolvem os parâmetros H_0 [18] e σ_8 [19], da estrutura cosmológica que analisamos e do modelo Λ CDM são muito próximas. Notamos certo alargamento nas barras de erro de H_0 , comparando com o modelo padrão, no entanto, este fato não representa um impacto significativo em nossos resultados. Em relação matéria escura, notamos um aumento da força quando $\nu > 0$, no entanto, não é uma amplificação significativa que possibilite uma redução na quantidade de matéria escura. Assim, de maneira geral, este resultados mostram que a estrutura cosmológica que propomos aqui se assemelha ao atual modelo padrão da cosmologia.

Ressaltamos porém que desenvolvemos aqui um quadro que pode abrir várias outras possibilidades. Em particular, muitos dos trabalhos inspirados em efeitos de grupo de

renormalização não possuem uma ação clássica completa; e aqui mostramos que esse quadro é plenamente consistente, e pode também ser avaliado via ferramentas de ponta para análise de dados cosmológicos. Há ainda desenvolvimentos que podem levar a um impacto cosmológico mais forte neste mesmo quadro, os quais estamos considerando.

Apêndices

APÊNDICE A – Princípio Variacional Para Modelo com G e Λ Dependentes de Escala

Mostramos aqui o princípio variacional da ação

$$S[g, \mu, \lambda, \Upsilon] = S_m[g, \Upsilon] + \frac{1}{16\pi} \int \left[\frac{R - 2\Lambda(\mu)}{G(\mu)} + \sum_p \lambda_p [\mu_p - f_p(g, \Upsilon)] \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{A.1})$$

Para determinar as equação de campo correspondentes desta ação, usamos derivadas funcionais. Em particular, para algum campo φ e função $f = f(\varphi, \partial\varphi)$ temos

$$\frac{\delta\varphi'}{\delta\varphi} \equiv \frac{\delta\varphi(x')}{\delta\varphi(x)} = \delta^{(4)}(x - x'), \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\delta f'}{\delta\varphi} = \frac{\partial f'}{\partial\varphi}(x) \delta^{(4)}(x - x') + \frac{\partial f'}{\partial(\partial_\alpha\varphi)}(x) \partial'_\alpha \delta^{(4)}(x - x'). \quad (\text{A.3})$$

Assim, a derivada funcional de (A.1) com relação a métrica dá

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x' \left[\left(\frac{\delta R'}{\delta g^{\mu\nu}} \right) G^{-1}(x') \sqrt{-g'} + \left(\frac{\delta \sqrt{-g'}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) (R' - 2\Lambda') G^{-1}(x') + \right. \\ \left. + \left(\frac{\delta \sqrt{-g'}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \sum_p \lambda_p (\mu'_p - f'_p) - \sqrt{-g'} \sum_p \lambda'_p \left(\frac{\delta f'_p}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \right] + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Para o primeiro termo temos

$$\frac{\delta R(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = (R_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \square - \nabla_\alpha \nabla_\beta) \frac{\delta g^{\alpha\beta}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)}. \quad (\text{A.5})$$

Para o segundo e terceiro termos em (A.1) temos

$$\frac{\delta \sqrt{-g}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sqrt{-g} \frac{\delta g^{\alpha\beta}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)}. \quad (\text{A.6})$$

Levando (A.6) e (A.5) em (A.4), integrando por partes os termos com derivadas e descartando as integrais de superfície, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g'} d^4x' \left\{ \left[(G_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \Lambda) G^{-1} + g_{\alpha\beta} \square G^{-1} - \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{-1} \right] (x') \frac{\delta g^{\alpha\beta}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \sum_p \lambda'_p (\mu'_p - f'_p) \frac{\delta g^{\alpha\beta}(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} - \sum_p \lambda'_p \frac{\delta f_p(x')}{\delta g^{\mu\nu}(x)} \right\} + \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A derivada funcional de (A.1) com relação a μ_p dá

$$\frac{\delta S}{\delta \mu_p} = -\frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g'} d^4x' \sum_q \left[2 \frac{\partial}{\partial \mu_q} \left(\frac{\Lambda}{G} \right) - R \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu_q} - \lambda_q \right] (x') \frac{\delta \mu_q(x')}{\delta \mu_p(x)}. \quad (\text{A.8})$$

A derivada funcional de (A.1) com relação aos multiplicadores de Lagrange λ_p dá

$$\frac{\delta S}{\delta \lambda_p} = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g'} d^4 x' \sum_q (\mu'_q - f'_q) \frac{\delta \lambda_q(x')}{\delta \lambda_p(x)}. \quad (\text{A.9})$$

A derivada funcional de (A.1) com relação aos campos de matéria Υ dá

$$\frac{\delta S}{\delta \Upsilon} = -\frac{1}{16\pi} \sum_p \int \sqrt{-g'} d^4 x' \lambda'_p \frac{\delta f_p(x')}{\delta \Upsilon(x)} + \frac{\delta S_M}{\delta \Upsilon}. \quad (\text{A.10})$$

Portanto, obtemos as equações de campo para o modelo com G e Λ dependentes de escala

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta} + f_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{1}{16\pi} \sum_p \int \lambda'_p \frac{\delta f'_p}{\delta \Upsilon} \sqrt{-g'} d^4 x' = \frac{\delta S_m}{\delta \Upsilon}, \quad (\text{A.12})$$

$$\mu_p - f_p = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$2 \frac{\partial}{\partial \mu_p} \frac{\Lambda}{G} - R \frac{\partial}{\partial \mu_p} G^{-1} = \lambda_p, \quad (\text{A.14})$$

com

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} + G \square G^{-1} g_{\alpha\beta} - G \nabla_\alpha \nabla_\beta G^{-1}, \quad (\text{A.15})$$

$$f_{\alpha\beta} \equiv -\frac{G}{\sqrt{-g}} \sum_p \int \lambda'_p \frac{\delta f'_p}{\delta g^{\alpha\beta}} \sqrt{-g'} d^4 x'. \quad (\text{A.16})$$

As equações (A.11)-(A.14) constituem todas as equações relevantes para a dinâmica, e todas, incluindo a fixação das escalas (A.13) são deduzidas a partir da ação (A.1).

Referências

- 1 N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.*, vol. 641, p. A6, 2020. Citado 16 vezes nas páginas 11, 17, 19, 21, 22, 23, 30, 32, 33, 64, 68, 70, 71, 104, 106 e 108.
- 2 N. R. Bertini, W. S. Hipólito-Ricaldi, F. de Melo-Santos, and D. C. Rodrigues, “Cosmological framework for renormalization group extended gravity at the action level,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, no. 5, p. 479, 2020. Citado 14 vezes nas páginas 11, 18, 19, 20, 83, 84, 85, 96, 103, 105, 107, 108, 109 e 121.
- 3 F. de Melo-Santos, R. von Marttens, W. S. Hipólito-Ricaldi, and D. C. Rodrigues, “Cosmological constraints of scale-dependent gravitational model”, Trabalho em Andamento, 2021. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 107, 109 e 121.
- 4 D. Blas, J. Lesgourgues, and T. Tram, “The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes,” *JCAP*, vol. 07, p. 034, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 11, 19, 85, 109, 116 e 122.
- 5 A. K. Çamlıbel, I. Semiz, and M. A. Feyizoğlu, “Pantheon update on a model-independent analysis of cosmological supernova data,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 37, no. 23, p. 235001, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 66.
- 6 F. Qin, C. Howlett, and L. Staveley-Smith, “The redshift-space momentum power spectrum – II. Measuring the growth rate from the combined 2MTF and 6dFGSv surveys,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 487, no. 4, pp. 5235–5247, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 66.
- 7 S. Alam *et al.*, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 470, no. 3, pp. 2617–2652, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 66.
- 8 N. Kaiser, “Clustering in real space and in redshift space,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 227, pp. 1–27, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 67.
- 9 A. J. S. Hamilton, “Linear redshift distortions: A Review,” in *Ringberg Workshop on Large Scale Structure*, 8 1997. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 67.
- 10 F. Skara and L. Perivolaropoulos, “Tension of the E_G statistic and redshift space distortion data with the Planck - Λ CDM model and implications for weakening gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, no. 6, p. 063521, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 17, 19, 67, 68 e 106.
- 11 F. Zwicky, “Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln,” *Helv. Phys. Acta*, vol. 6, pp. 110–127, 1933. 1 Citado na página 17.
- 12 Y. Sofue and V. Rubin, “Rotation curves of spiral galaxies,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 39, pp. 137–174, 2001. 1 Citado na página 17.
- 13 A. Hernandez-Arboleda and D. C. Rodrigues, “Rotação de galáxias e matéria escura,” *Cadernos de Astronomia*, vol. 2, no. 1, 2021. 1 Citado na página 17.

- 14 A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, vol. 116, pp. 1009–1038, 1998. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 65.
- 15 S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 18, 29 e 65.
- 16 S. Weinberg, “The Cosmological Constant Problem,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, 1989. 1 Citado na página 18.
- 17 S. M. Carroll, W. H. Press, and E. L. Turner, “The Cosmological constant,” *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, vol. 30, pp. 499–542, 1992. 1 Citado na página 18.
- 18 E. Di Valentino *et al.*, “Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension,” 8 2020. Citado 5 vezes nas páginas 18, 65, 105, 107 e 122.
- 19 E. Di Valentino *et al.*, “Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 ,” 9 2020. Citado 5 vezes nas páginas 18, 65, 105, 107 e 122.
- 20 D. Camarena and V. Marra, “Impact of the cosmic variance on H_0 on cosmological analyses,” *Phys. Rev. D*, vol. 98, no. 2, p. 023537, 2018. 1 Citado na página 18.
- 21 R. von Marttens, L. Casarini, D. F. Mota, and W. Zimdahl, “Cosmological constraints on parametrized interacting dark energy,” *Phys. Dark Univ.*, vol. 23, p. 100248, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 55.
- 22 S. Capozziello and M. De Laurentis, “Extended Theories of Gravity,” *Phys. Rept.*, vol. 509, pp. 167–321, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 18, 73, 75, 76, 79 e 80.
- 23 V. Faraoni, *Cosmology in scalar tensor gravity*, vol. 139. 2004. Citado 5 vezes nas páginas 18, 73, 76, 79 e 80.
- 24 T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis, “Modified Gravity and Cosmology,” *Phys. Rept.*, vol. 513, pp. 1–189, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 18, 73, 75, 76, 79 e 80.
- 25 L. Amendola and S. Tsujikawa, *Dark Energy: Theory and Observations*, year = 2015. Cambridge University Press, 1. Citado 17 vezes nas páginas 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 55, 56, 73, 75, 76, 77, 78, 79, 80 e 81.
- 26 F. C. M. N. J.T. Goldman, J. Perez-Mercader, “The dark matter problem and quantum gravity,” *Physics Letters B*, vol. 281, pp. 219–224, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 27 A. Bonanno and M. Reuter, “Cosmology with selfadjusting vacuum energy density from a renormalization group fixed point,” *Phys. Lett. B*, vol. 527, pp. 9–17, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 18, 83 e 121.
- 28 M. Reuter and H. Weyer, “Renormalization group improved gravitational actions: A brans-dicke approach,” *Physical Review D*, vol. 69, May 2004. Citado 7 vezes nas páginas 18, 83, 84, 85, 86, 90 e 121.
- 29 H. A. Borges, S. Carneiro, J. C. Fabris, and C. Pigozzo, “Evolution of density perturbations in decaying vacuum cosmology,” *Physical Review D*, vol. 77, Feb 2008. Citado 3 vezes nas páginas 18, 83 e 84.

- 30 M. REUTER and H. WEYER, “On the possibility of quantum gravity effects at astrophysical scales,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 15, p. 2011–2028, Dec 2006. Citado 3 vezes nas páginas 18, 83 e 85.
- 31 I. L. Shapiro, J. Solà, and H. Štefančić, “ λ at low energies from physics atm: possible cosmological and astrophysical implications,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2005, pp. 012–012, Jan 2005. Citado 9 vezes nas páginas 18, 83, 84, 85, 86, 88, 90, 97 e 121.
- 32 I. L. Shapiro, “Effective action of vacuum: the semiclassical approach,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 25, p. 103001, Apr 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 33 I. L. Shapiro and J. Solà, “On the possible running of the cosmological “constant”,” *Physics Letters B*, vol. 682, p. 105–113, Nov 2009. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 34 S. Nagy, J. Krizsan, and K. Sailer, “Infrared fixed point in quantum einstein gravity,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2012, Jul 2012. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 35 C. Wetterich, “Graviton fluctuations erase the cosmological constant,” *Physics Letters B*, vol. 773, p. 6–19, Oct 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 36 A. Eichhorn, “An asymptotically safe guide to quantum gravity and matter,” 2019. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 37 J. Solà, “Cosmological constant and vacuum energy: old and new ideas,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 453, p. 012015, Aug 2013. Citado 6 vezes nas páginas 18, 83, 84, 94, 121 e 122.
- 38 D. C. Rodrigues, P. S. Letelier, and I. L. Shapiro, “Galaxy rotation curves from general relativity with renormalization group corrections,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2010, p. 020–020, Apr 2010. Citado 8 vezes nas páginas 18, 83, 84, 85, 88, 90, 101 e 121.
- 39 D. C. Rodrigues, B. Chauvineau, and O. F. Piattella, “Scalar-Tensor gravity with system-dependent potential and its relation with Renormalization Group extended General Relativity,” *JCAP*, vol. 09, p. 009, 2015. Citado 12 vezes nas páginas 18, 19, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 121 e 122.
- 40 J. Solà, A. Gómez-Valent, and J. d. C. Pérez, “First evidence of running cosmic vacuum: Challenging the concordance model,” *The Astrophysical Journal*, vol. 836, p. 43, Feb 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 41 A. Gómez-Valent and J. Solà Peracaula, “Density perturbations for running vacuum: a successful approach to structure formation and to the σ_8 -tension,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 478, no. 1, pp. 126–145, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 42 F. Canales, B. Koch, C. Laporte, and A. Rincon, “Cosmological constant problem: deflation during inflation,” *JCAP*, vol. 01, p. 021, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 83.
- 43 P. D. Alvarez, B. Koch, C. Laporte, and A. Rincon, “Can scale-dependent cosmology alleviate the H_0 tension?,” 9 2020. 1 Citado na página 18.

- 44 T. Brinckmann and J. Lesgourgues, “MontePython 3: boosted MCMC sampler and other features,” *Phys. Dark Univ.*, vol. 24, p. 100260, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 19, 85, 109 e 122.
- 45 A. A. Penzias and R. W. Wilson, “A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s,” *Astrophys. J.*, vol. 142, pp. 419–421, 1965. 1 Citado na página 21.
- 46 A. Bernui and W. S. Hipolito-Ricaldi, “Can a primordial magnetic field originate large-scale anomalies in WMAP data?,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 389, pp. 1453–1460, 2008. 1 Citado na página 21.
- 47 L. R. Abramo, A. Bernui, and T. S. Pereira, “Searching for planar signatures in wmap,” *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 2009, p. 013–013, Dec 2009. 1 Citado na página 21.
- 48 R. S. Gonçalves, G. C. Carvalho, C. A. P. Bengaly, J. C. Carvalho, A. Bernui, J. S. Alcaniz, and R. Maartens, “Cosmic homogeneity: a spectroscopic and model-independent measurement,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 475, no. 1, pp. L20–L24, 2018. 1 Citado na página 21.
- 49 F. Avila, C. P. Novaes, A. Bernui, and E. de Carvalho, “The scale of homogeneity in the local Universe with the ALFALFA catalogue,” *JCAP*, vol. 12, p. 041, 2018. 1 Citado na página 21.
- 50 F. Avila, C. P. Novaes, A. Bernui, E. de Carvalho, and J. P. Nogueira-Cavalcante, “The angular scale of homogeneity in the Local Universe with the SDSS blue galaxies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 488, no. 1, pp. 1481–1487, 2019. 1 Citado na página 21.
- 51 E. Hubble, “A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae,” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 15, pp. 168–173, 1929. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.
- 52 S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Amsterdam: Academic Press, 2003. Citado 27 vezes nas páginas 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 42, 46, 47, 49, 51, 55, 56, 64, 68, 69, 70 e 88.
- 53 V. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*. Oxford: Cambridge University Press, 2005. Citado 28 vezes nas páginas 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 42, 46, 47, 49, 51, 52, 53, 55, 56, 64, 68, 69 e 70.
- 54 S. Weinberg, *Cosmology*. 2008. Citado 22 vezes nas páginas 21, 22, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 46, 47, 49, 51, 55, 56 e 64.
- 55 O. F. Piattella, *Lecture Notes in Cosmology*. Springer, 2018. Citado 37 vezes nas páginas 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 55, 56, 59, 60, 61, 63, 64, 68, 69, 70, 88 e 110.
- 56 A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, J. B. Bowers, L. Macri, J. C. Zinn, and D. Scolnic, “Cosmic Distances Calibrated to 1% Precision with Gaia EDR3 Parallaxes and Hubble Space Telescope Photometry of 75 Milky Way Cepheids Confirm Tension with Λ CDM,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 908, no. 1, p. L6, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 118.

- 57 S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, year =. New York: John Wiley and Sons. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 26 e 30.
- 58 C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- 59 R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- 60 B. F. Schutz, *A FIRST COURSE IN GENERAL RELATIVITY*. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., 1985. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- 61 S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” 12 1997. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 30.
- 62 J. R. Ray, “Lagrangian Density for Perfect Fluids in General Relativity,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 13, pp. 1451–1453, 1972. 1 Citado na página 26.
- 63 B. F. Schutz, “Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle,” *Phys. Rev. D*, vol. 2, pp. 2762–2773, 1970. 1 Citado na página 26.
- 64 D. W. Hogg, “Distance measures in cosmology,” 5 1999. 1 Citado na página 34.
- 65 J. M. Bardeen, “Gauge Invariant Cosmological Perturbations,” *Phys. Rev. D*, vol. 22, pp. 1882–1905, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 36, 46 e 47.
- 66 H. Kodama and M. Sasaki, “Cosmological Perturbation Theory,” *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 78, pp. 1–166, 1984. 1 Citado na página 36.
- 67 V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, “Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions,” *Phys. Rept.*, vol. 215, pp. 203–333, 1992. Citado 12 vezes nas páginas 36, 37, 39, 40, 43, 46, 47, 49, 51, 55, 56 e 64.
- 68 C.-P. Ma and E. Bertschinger, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges,” *Astrophys. J.*, vol. 455, pp. 7–25, 1995. Citado 15 vezes nas páginas 36, 37, 39, 40, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 55, 56, 62, 64 e 110.
- 69 J. M. Stewart, “Perturbations of Friedmann-Robertson-Walker cosmological models,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 7, pp. 1169–1180, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.
- 70 K. A. Malik and D. R. Matravers, “Comments on gauge-invariance in cosmology,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 45, pp. 1989–2001, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 43.
- 71 R. Maartens, “Causal thermodynamics in relativity,” 9 1996. 1 Citado na página 40.
- 72 J. M. Stewart and M. Walker, “Perturbations of spacetimes in general relativity,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, vol. 341, pp. 49–74, 1974. 1 Citado na página 44.
- 73 E. Lifshitz, “Republication of: On the gravitational stability of the expanding universe,” *J. Phys. (USSR)*, vol. 10, no. 2, p. 116, 1946. 1 Citado na página 45.
- 74 E. M. Lifshitz and I. M. Khalatnikov, “Investigations in relativistic cosmology,” *Adv. Phys.*, vol. 12, pp. 185–249, 1963. 1 Citado na página 45.

- 75 V. N. Lukash, “Production of phonons in an isotropic universe,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 52, pp. 807–814, 1980. 1 Citado na página 47.
- 76 J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, “Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 28, p. 679, 1983. 1 Citado na página 47.
- 77 G. M. Kremer, “Theory and applications of the relativistic Boltzmann equation,” 2014. 1 Citado na página 56.
- 78 H. E. S. Velten, R. F. vom Marttens, and W. Zimdahl, “Aspects of the cosmological “coincidence problem”,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 74, no. 11, p. 3160, 2014. 1 Citado na página 65.
- 79 D. J. Eisenstein *et al.*, “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies,” *Astrophys. J.*, vol. 633, pp. 560–574, 2005. 1 Citado na página 66.
- 80 L.-M. Wang and P. J. Steinhardt, “Cluster abundance constraints on quintessence models,” *Astrophys. J.*, vol. 508, pp. 483–490, 1998. 1 Citado na página 67.
- 81 S. Nesseris, G. Pantazis, and L. Perivolaropoulos, “Tension and constraints on modified gravity parametrizations of $G_{\text{eff}}(z)$ from growth rate and Planck data,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 2, p. 023542, 2017. 1 Citado na página 67.
- 82 Y.-S. Song and W. J. Percival, “Reconstructing the history of structure formation using Redshift Distortions,” *JCAP*, vol. 10, p. 004, 2009. 1 Citado na página 67.
- 83 W. J. Percival and M. White, “Testing cosmological structure formation using redshift-space distortions,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 393, p. 297, 2009. 1 Citado na página 67.
- 84 S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, “Crossing the Phantom Divide: Theoretical Implications and Observational Status,” *JCAP*, vol. 01, p. 018, 2007. 1 Citado na página 67.
- 85 C. Blake *et al.*, “The WiggleZ Dark Energy Survey: Joint measurements of the expansion and growth history at $z < 1$,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 425, pp. 405–414, 2012. 1 Citado na página 68.
- 86 T. Okamoto and W. Hu, “CMB lensing reconstruction on the full sky,” *Phys. Rev. D*, vol. 67, p. 083002, 2003. 1 Citado na página 68.
- 87 C. M. Hirata and U. Seljak, “Reconstruction of lensing from the cosmic microwave background polarization,” *Phys. Rev. D*, vol. 68, p. 083002, 2003. 1 Citado na página 68.
- 88 A. Lewis, A. Challinor, and D. Hanson, “The shape of the CMB lensing bispectrum,” *JCAP*, vol. 03, p. 018, 2011. 1 Citado na página 68.
- 89 D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, pp. 498–501, 1971. 1 Citado na página 73.
- 90 D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor,” *J. Math. Phys.*, vol. 13, pp. 874–876, 1972. 1 Citado na página 73.

- 91 L. Amendola *et al.*, “Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite,” *Living Rev. Rel.*, vol. 21, no. 1, p. 2, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.
- 92 Y.-S. Song, L. Hollenstein, G. Caldera-Cabral, and K. Koyama, “Theoretical Priors On Modified Growth Parametrisations,” *JCAP*, vol. 04, p. 018, 2010. 1 Citado na página 74.
- 93 L. Pogosian, A. Silvestri, K. Koyama, and G.-B. Zhao, “How to optimally parametrize deviations from General Relativity in the evolution of cosmological perturbations?,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 104023, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 74 e 75.
- 94 S. F. Daniel, E. V. Linder, T. L. Smith, R. R. Caldwell, A. Cooray, A. Leauthaud, and L. Lombriser, “Testing General Relativity with Current Cosmological Data,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 123508, 2010. 1 Citado na página 75.
- 95 G.-B. Zhao, T. Giannantonio, L. Pogosian, A. Silvestri, D. J. Bacon, K. Koyama, R. C. Nichol, and Y.-S. Song, “Probing modifications of General Relativity using current cosmological observations,” *Phys. Rev. D*, vol. 81, p. 103510, 2010. 1 Citado na página 75.
- 96 S. F. Daniel and E. V. Linder, “Confronting General Relativity with Further Cosmological Data,” *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 103523, 2010. 1 Citado na página 75.
- 97 L. Pizzuti, I. D. Saltas, S. Casas, L. Amendola, and A. Biviano, “Future constraints on the gravitational slip with the mass profiles of galaxy clusters,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 486, no. 1, pp. 596–607, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 75, 103 e 104.
- 98 G. J. Olmo, “Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism,” *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 083505, 2005. 1 Citado na página 75.
- 99 H.-J. Schmidt, “Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology,” *eConf*, vol. C0602061, p. 12, 2006. 1 Citado na página 75.
- 100 T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$ Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 451–497, 2010. 1 Citado na página 75.
- 101 A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$ theories,” *Living Rev. Rel.*, vol. 13, p. 3, 2010. 1 Citado na página 75.
- 102 S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models,” *Phys. Rept.*, vol. 505, pp. 59–144, 2011. 1 Citado na página 75.
- 103 R. Utiyama and B. S. DeWitt, “Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields,” *J. Math. Phys.*, vol. 3, pp. 608–618, 1962. 1 Citado na página 75.
- 104 K. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 16, pp. 953–969, 1977. 1 Citado na página 75.
- 105 A. A. Starobinsky, “A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity,” *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.*, vol. 3, pp. 130–133, 1987. 1 Citado na página 75.

- 106 A. A. Starobinskii, “The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy,” *Soviet Astronomy Letters*, vol. 9, pp. 302–304, June 1983. 1 Citado na página 77.
- 107 V. Faraoni, “Extension of the EGS theorem to metric and Palatini $f(R)$ gravity,” 11 2008. 1 Citado na página 77.
- 108 S. Rippl, H. van Elst, R. K. Tavakol, and D. Taylor, “Kinematics and dynamics of $f(R)$ theories of gravity,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 28, pp. 193–205, 1996. 1 Citado na página 77.
- 109 A. De Felice, T. Kobayashi, and S. Tsujikawa, “Effective gravitational couplings for cosmological perturbations in the most general scalar-tensor theories with second-order field equations,” *Phys. Lett. B*, vol. 706, pp. 123–133, 2011. 1 Citado na página 78.
- 110 S. Tsujikawa, “Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 023514, 2007. 1 Citado na página 78.
- 111 W. Hu and I. Sawicki, “Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests,” *Phys. Rev. D*, vol. 76, p. 064004, 2007. 1 Citado na página 78.
- 112 L. Boubekeur, E. Giusarma, O. Mena, and H. Ramírez, “Current status of modified gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 10, p. 103512, 2014. 1 Citado na página 79.
- 113 P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2013 results. XX. Cosmology from Sunyaev–Zeldovich cluster counts,” *Astron. Astrophys.*, vol. 571, p. A20, 2014. 1 Citado na página 79.
- 114 C. Brans and R. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.*, vol. 124, pp. 925–935, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 81.
- 115 L. Amendola, “Scaling solutions in general nonminimal coupling theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 043501, 1999. 1 Citado na página 79.
- 116 J.-P. Uzan, “Cosmological scaling solutions of nonminimally coupled scalar fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 59, p. 123510, 1999. 1 Citado na página 79.
- 117 T. Chiba, “Quintessence, the gravitational constant, and gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 60, p. 083508, 1999. 1 Citado na página 79.
- 118 N. Bartolo and M. Pietroni, “Scalar tensor gravity and quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 023518, 2000. 1 Citado na página 79.
- 119 F. Perrotta, C. Baccigalupi, and S. Matarrese, “Extended quintessence,” *Phys. Rev. D*, vol. 61, p. 023507, 1999. 1 Citado na página 79.
- 120 B. Boisseau, G. Esposito-Farese, D. Polarski, and A. A. Starobinsky, “Reconstruction of a scalar tensor theory of gravity in an accelerating universe,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, p. 2236, 2000. 1 Citado na página 79.
- 121 G. Esposito-Farese and D. Polarski, “Scalar tensor gravity in an accelerating universe,” *Phys. Rev. D*, vol. 63, p. 063504, 2001. 1 Citado na página 79.

- 122 D. F. Torres, “Quintessence, superquintessence and observable quantities in Brans-Dicke and nonminimally coupled theories,” *Phys. Rev. D*, vol. 66, p. 043522, 2002. 1 Citado na página 79.
- 123 S. Tsujikawa, K. Uddin, S. Mizuno, R. Tavakol, and J. Yokoyama, “Constraints on scalar-tensor models of dark energy from observational and local gravity tests,” *Phys. Rev. D*, vol. 77, p. 103009, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 80 e 81.
- 124 V. Acquaviva, C. Baccigalupi, S. M. Leach, A. R. Liddle, and F. Perrotta, “Structure formation constraints on the Jordan-Brans-Dicke theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 104025, 2005. 1 Citado na página 82.
- 125 C. L. Bennett *et al.*, “First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 148, pp. 1–27, 2003. 1 Citado na página 82.
- 126 A. Avilez and C. Skordis, “Cosmological constraints on Brans-Dicke theory,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, no. 1, p. 011101, 2014. 1 Citado na página 82.
- 127 B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft,” *Nature*, vol. 425, pp. 374–376, 2003. 1 Citado na página 82.
- 128 E. V. Gorbar, “Renormalization group and decoupling in curved space,” *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, vol. 127, pp. 162–165, 2004. 1 Citado na página 83.
- 129 E. V. Gorbar and I. L. Shapiro, “Renormalization group and decoupling in curved space. 2. The Standard model and beyond,” *JHEP*, vol. 06, p. 004, 2003. 1 Citado na página 83.
- 130 B. Goncalves, G. de Berredo-Peixoto, and I. L. Shapiro, “One-loop corrections to the photon propagator in the curved-space QED,” *Phys. Rev. D*, vol. 80, p. 104013, 2009. 1 Citado na página 83.
- 131 G. Venanzoni, “Measurement of the running of the fine structure constant below 1 GeV with the KLOE detector,” *EPJ Web Conf.*, vol. 218, p. 02012, 2019. 1 Citado na página 83.
- 132 A. Babic, B. Guberina, R. Horvat, and H. Stefancic, “Renormalization-group running cosmologies. A Scale-setting procedure,” *Phys. Rev. D*, vol. 71, p. 124041, 2005. 1 Citado na página 83.
- 133 B. Koch and I. Ramirez, “Exact renormalization group with optimal scale and its application to cosmology,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 28, p. 055008, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 83 e 84.
- 134 S. Domazet and H. Stefancic, “Renormalization group scale-setting in astrophysical systems,” *Phys. Lett. B*, vol. 703, pp. 1–6, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 84 e 90.
- 135 B. Koch, P. Rioseco, and C. Contreras, “Scale Setting for Self-consistent Backgrounds,” *Phys. Rev. D*, vol. 91, no. 2, p. 025009, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 84 e 86.

- 136 O. Bertolami, J. Mourão, and J. Pérez-Mercader, “Quantum gravity and the large scale structure of the universe,” *Physics Letters B*, vol. 311, no. 1, pp. 27–33, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 84 e 121.
- 137 J. Grande, J. Sola, J. C. Fabris, and I. L. Shapiro, “Cosmic perturbations with running G and Λ ,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 27, p. 105004, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 84, 88, 121 e 122.
- 138 J. Sola, “Dark energy: A Quantum fossil from the inflationary Universe?,” *J. Phys. A*, vol. 41, p. 164066, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 84, 88 e 97.
- 139 I. L. Shapiro and J. Solà, “The scaling evolution of the cosmological constant,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2002, p. 006–006, Feb 2002. 1 Citado na página 84.
- 140 M. Rezaei, M. Malekjani, and J. Sola, “Can dark energy be expressed as a power series of the Hubble parameter?,” *Phys. Rev. D*, vol. 100, no. 2, p. 023539, 2019. 1 Citado na página 84.
- 141 M. Hindmarsh and I. D. Saltas, “ $f(R)$ Gravity from the renormalisation group,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 064029, 2012. 1 Citado na página 84.
- 142 M. B. Einhorn and D. Timothy Jones, “A new renormalization group approach to multiscale problems,” *Nuclear Physics B*, vol. 230, no. 2, pp. 261–272, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 86.
- 143 C. Ford and C. Wiesendanger, “Multiscale renormalization,” *Phys. Lett. B*, vol. 398, pp. 342–346, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 86.
- 144 T. G. Steele, Z.-W. Wang, and D. G. C. McKeon, “Multiscale renormalization group methods for effective potentials with multiple scalar fields,” *Phys. Rev. D*, vol. 90, no. 10, p. 105012, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 85 e 86.
- 145 M. Reuter and H. Weyer, “Quantum gravity at astrophysical distances?,” *JCAP*, vol. 12, p. 001, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 85, 88, 90 e 121.
- 146 M. Reuter and H. Weyer, “Running Newton constant, improved gravitational actions, and galaxy rotation curves,” *Phys. Rev. D*, vol. 70, p. 124028, 2004. 1 Citado na página 85.
- 147 C. Farina, W. J. M. Kort-Kamp, S. Mauro, and I. L. Shapiro, “Dynamics of the Laplace-Runge-Lenz vector in the quantum-corrected Newton gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 83, p. 124037, 2011. 1 Citado na página 90.
- 148 D. C. Rodrigues, “Elliptical galaxies kinematics within general relativity with renormalization group effects,” *JCAP*, vol. 09, p. 031, 2012. 1 Citado na página 90.
- 149 J. D. Toniato, D. C. Rodrigues, A. O. F. de Almeida, and N. Bertini, “Will-Nordtvedt PPN formalism applied to renormalization group extensions of general relativity,” *Phys. Rev. D*, vol. 96, no. 6, p. 064034, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 90, 97 e 101.
- 150 A. Bonanno and F. Saueressig, “Asymptotically safe cosmology – A status report,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 18, pp. 254–264, 2017. 1 Citado na página 94.

- 151 E. Fradkin and A. Tseytlin, “Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity,” *Nuclear Physics B*, vol. 201, no. 3, pp. 469–491, 1982. 1 Citado na página 97.
- 152 B. L. Nelson and P. Panangaden, “Scaling behavior of interacting quantum fields in curved spacetime,” *Phys. Rev. D*, vol. 25, pp. 1019–1027, Feb 1982. 1 Citado na página 97.
- 153 F. Bauer, “The Running of the cosmological and the Newton constant controlled by the cosmological event horizon,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 22, pp. 3533–3548, 2005. 1 Citado na página 97.
- 154 D. C. Rodrigues, S. a. Mauro, and A. O. F. de Almeida, “Solar System constraints on Renormalization Group extended General Relativity: The PPN and Laplace-Runge-Lenz analyses with the external potential effect,” *Phys. Rev. D*, vol. 94, no. 8, p. 084036, 2016. 1 Citado na página 97.
- 155 L. Pizzuti *et al.*, “CLASH-VLT: Testing the Nature of Gravity with Galaxy Cluster Mass Profiles,” *JCAP*, vol. 04, p. 023, 2016. 1 Citado na página 103.
- 156 T. M. C. Abbott *et al.*, “Dark Energy Survey Year 1 Results: Constraints on Extended Cosmological Models from Galaxy Clustering and Weak Lensing,” *Phys. Rev. D*, vol. 99, no. 12, p. 123505, 2019. 1 Citado na página 104.
- 157 J. Solà Peracaula, A. Gomez-Valent, J. de Cruz Pérez, and C. Moreno-Pulido, “Brans–Dicke Gravity with a Cosmological Constant Smooths Out Λ CDM Tensions,” *Astrophys. J. Lett.*, vol. 886, no. 1, p. L6, 2019. 1 Citado na página 107.
- 158 J. Solà Peracaula, “Brans–Dicke gravity: From Higgs physics to (dynamical) dark energy,” *Int. J. Mod. Phys. D*, vol. 27, no. 14, p. 1847029, 2018. 1 Citado na página 107.
- 159 J. de Cruz Pérez and J. Solà Peracaula, “Brans–Dicke cosmology mimicking running vacuum,” *Mod. Phys. Lett. A*, vol. 33, no. 38, p. 1850228, 2018. 1 Citado na página 107.
- 160 A. Gelman and D. B. Rubin, “Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences,” *Statist. Sci.*, vol. 7, pp. 457–472, 1992. 1 Citado na página 116.
- 161 C. Heymans *et al.*, “KiDS-1000 Cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints,” *Astron. Astrophys.*, vol. 646, p. A140, 2021. 1 Citado na página 117.
- 162 E. Bentivegna, A. Bonanno, and M. Reuter, “Confronting the IR fixed point cosmology with high redshift supernova data,” *JCAP*, vol. 01, p. 001, 2004. 1 Citado na página 121.
- 163 A. Bonanno, G. Esposito, and C. Rubano, “Arnowitt-Deser-Misner gravity with variable G and Λ and fixed point cosmologies from the renormalization group,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, pp. 5005–5016, 2004. 1 Citado na página 121.
- 164 A. Hernández-Arboleda, A. Rincón, B. Koch, E. Contreras, and P. Bargueño, “Preliminary test of cosmological models in the scale-dependent scenario,” 2 2018. 1 Citado na página 121.

165 J. A. Agudelo Ruiz, T. de Paula Netto, J. C. Fabris, and I. L. Shapiro, “Primordial universe with the running cosmological constant,” *Eur. Phys. J. C*, vol. 80, no. 9, p. 851, 2020. 1 Citado na página [121](#).