

Gabriel Ayres Marçal

**Equação Linearizada de Ginzburg-Landau:
Aplicações no estudo da nucleação
supercondutora**

Vitória - ES, Brasil

2022

Gabriel Ayres Marçal

Equação Linearizada de Ginzburg-Landau: Aplicações no estudo da nucleação supercondutora

Dissertação apresentada ao curso de Pós Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito essencial para obtenção do título de mestre em Física.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Departamento de Física

Orientador: Prof. Dr. Valberto Pedruzzi Nascimento

Coorientador: Prof. Dr. Jorge Luis Gonzalez Alfonso

Vitória - ES, Brasil

2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

A985e Ayres Marçal, Gabriel, 1997-
Equação Linearizada de Ginzburg-Landau : aplicações no estudo da nucleação supercondutora / Gabriel Ayres Marçal. - 2021. 66 f. : il.

Orientador: Valberto Pedruzzi Nascimento.
Coorientador: Jorge Luis Gonzalez Alfonso.
Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Supercondutores. 2. Teoria quântica. I. Pedruzzi Nascimento, Valberto. II. Luis Gonzalez Alfonso, Jorge. III. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. IV. Título.

CDU: 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**"Equação Linearizada de Ginzburg-Landau: Aplicações no
Estudo da Nucleação Supercondutora"**

GABRIEL AYRES MARÇAL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, por videoconferência, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Física.
Aprovada por:

Prof.^a. Dr.^a. Magda Bittencourt Fontes
(CBPF/RJ)

Prof. Dr. Valberto Pedruzzi Nascimento
(Orientador- PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Wanderlã Luis Scopel
(PPGFis/UFES)

Prof. Dr. Jorge Luis Gonzalez Alfonso
(Coorientador- PPGFis/UFES)

Vitória-ES, 29 de dezembro de 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
WANDERLA LUIS SCOPEL - SIAPE 1537668
Departamento de Física - DF/CCE
Em 04/01/2022 às 07:12

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/341206?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
JORGE LUIS GONZALEZ ALFONSO - SIAPE 1721147
Departamento de Física - DF/CCE
Em 04/01/2022 às 14:29

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/341361?tipoArquivo=O>



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA



O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
VALBERTO PEDRUZZI NASCIMENTO - SIAPE 1545401
Departamento de Física - DF/CCE
Em 05/01/2022 às 09:48

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
<https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/341556?tipoArquivo=O>

Agradecimentos

No mestrado em Física pude contar com a ajuda, o apoio, o companheirismo e o carinho de muitas pessoas que, certamente, têm uma grande contribuição nesse trabalho e em toda minha formação. Muito obrigado a todos os meus amigos e família por toda ajuda e parceria, vocês fizeram parte da minha formação e sei que vão continuar presentes em minha vida, com certeza.

Agradeço a todos os professores por terem me proporcionado o conhecimento, não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por tem me feito aprender.

Em especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Valberto Pedruzzi Nascimento e ao meu co-orientador Prof. Dr. Jorge Luis Gonzalez Alfonso pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho, pela orientação, por ter sido parte importante do meu amadurecimento na Física e por toda a confiança, acreditando sempre que eu era capaz. Em geral, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro e à Universidade Federal do Espírito Santo pela estrutura, grupo de profissionais e ambiente acolhedor, como também a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação.

"Se consegui ver mais longe foi por estar sobre os ombros de gigantes".

Isaac Newton

Resumo

Supercondutividade é um ramo da física da matéria condensada que vem sendo bastante estudado devido ao seu potencial para aplicações tecnológicas. Os materiais supercondutores têm boa aplicabilidade por possuírem a propriedade de conduzir corrente elétrica sem perdas de energia (sem resistência elétrica) além de possuírem um diamagnetismo perfeito quando resfriado a baixo da temperatura crítica. Estes materiais estão sendo muito utilizados em diversas tecnologias para veículos de transporte de passageiros, armazenamento de energia elétrica, equipamentos de uso médico-hospitalar, motores para transformação de energia elétrica, equipamentos supercondutores e atualmente na fabricação de chaves supercondutoras (junções Josephson).

Nesta dissertação, abordamos aspectos e propriedades da supercondutividade, tais como, o Efeito Meissner (expulsão do campo magnético), resistividade nula, temperaturas e campos críticos, tipos de supercondutores, entre outros. Discutimos, também, teorias que surgiram ao longo dos anos para explicar fenômenos supercondutores (London, BCS e Ginzburg-Landau). Voltamos nossa atenção para a teoria de Ginzburg-Landau que foi desenvolvida expandindo a energia livre do sistema em potências do parâmetro de ordem, em torno da temperatura crítica (temperatura acima da qual a supercondutividade de um sistema particular é destruída), como o intuito de explicar as propriedades termodinâmicas da transição do estado normal para o estado supercondutor. Nesta teoria, o parâmetro de ordem caracteriza o estado supercondutor e assume valores não nulos abaixo da temperatura crítica.

Especificamente, fizemos um estudo teórico da equação linearizada de Ginzburg-Landau e de sua aplicação ao estudo da nucleação da supercondutividade em sistemas de filmes finos com e sem condições de borda de Ginzburg-Landau ou com estruturas de domínios magnéticos steplike. Para cada caso, um algoritmo do MATLAB resolveu numericamente a respectiva equação linearizada através do método de diferenças finitas, fornecendo a dependência da temperatura crítica com o campo magnético e a localização do parâmetro de ordem de amostras com dimensões da ordem do comprimento de coerência. A analogia entre a equação linearizada de Ginzburg-Landau de uma amostra global na presença de um campo magnético com a equação de Schrodinger para um oscilador harmônico duplo quântico revelou o caráter ondulatório da nucleação supercondutora.

Palavras-chave: supercondutividade, Ginzburg-Landau, parâmetro de ordem, temperatura crítica.

Abstract

Superconductivity is a topic of condensed matter physics that has been extensively studied due to its potential for technological applications. Superconducting materials have good applicability due to their property of conducting electrical current without energy losses (without electrical resistance) besides having a perfect diamagnetism when cooled down the critical temperature. These materials are being widely used in various technologies for public transport vehicles, electrical energy storage, medical and hospital equipment, motors for electrical energy transformation, superconducting equipment and currently in the manufacture of superconducting switches (Josephson junctions).

In this dissertation, we addressed aspects and properties of superconductivity, such as the Meissner Effect (magnetic field expulsion), zero resistivity, critical fields and temperatures, types of superconductors, among others. We also discussed theories that have emerged during the years to explain the superconducting phenomena (London, BCS and Ginzburg-Landau). We turned our attention to the Ginzburg-Landau theory which was developed by expanding the free energy of the system by powers of the order parameter, around the critical temperature (temperature above which the superconductivity of a particular system is vanished), in order to explain the thermodynamic properties of the transition from the normal state to the superconducting state. In this theory, the order parameter characterizes the superconducting state and it assumes non-zero values below the critical temperature.

Specifically, we performed a theoretical study of the Ginzburg-Landau linearized equation and its application to the study of superconductivity nucleation in thin-film systems with or without Ginzburg-Landau edge conditions or with steplike magnetic domain structures. For each case, a MATLAB algorithm using the finite difference method was used to solve numerically the respective linearized equation, providing the dependence of the critical temperature on the magnetic field and the location of the order parameter of samples with dimensions of the order of the coherence length. The analogy between the linearized Ginzburg-Landau equation for a global sample in the presence of a magnetic field with the Schrödinger equation for a quantum double harmonic oscillator revealed the wave character of superconducting nucleation.

Keywords: superconductivity, Ginzburg-Landau, order parameter, critical temperature.

Lista de ilustrações

Figura 1 – <i>Comportamento da resistência elétrica de um metal normal e um metal supercondutor a baixas temperaturas.[4]</i>	18
Figura 2 – <i>Comportamento do calor específico de um metal normal e um metal supercondutor a baixas temperaturas.[6]</i>	19
Figura 3 – <i>(a) Efeito Meissner-Ochsenfeld parcial num supercondutor do tipo 2. (b) Campo interno em função do campo aplicado.[6]</i>	20
Figura 4 – <i>Curva de R vs T obtida por Onnes mostrando a transição da supercondutividade do mercúrio.[9]</i>	21
Figura 5 – <i>Diagrama de fase do sistema metal normal-metal supercondutor.[7]</i>	22
Figura 6 – <i>Penetração do fluxo magnético no interior de um supercondutor.[6]</i>	25
Figura 7 – <i>Interação atrativa entre os elétrons estabilizando os pares de Cooper.[13]</i>	26
Figura 8 – <i>Funções da energia livre de Ginzburg-Landau[10]</i>	30
Figura 9 – <i>Comportamento de $g(x)$ dentro do material supercondutor.[6]</i>	33
Figura 10 – <i>Diagrama de fases de um supercondutor tipo 2.[20]</i>	34
Figura 11 – <i>Figura a) potencial efetivo para nucleação dentro do material para um campo H_{c2}. Figura b) potencial efetivo para nucleação dentro do material para um campo H_{c3}. [1]</i>	37
Figura 12 – <i>Domínio discretizado em intervalos igualmente espaçados. [25]</i>	38
Figura 13 – <i>Algoritmo construído no Matlab para o estudo da nucleação supercondutora. [25]</i>	41
Figura 14 – <i>Organograma do algoritmo construído no Matlab para o estudo da nucleação supercondutora. [25]</i>	42
Figura 15 – <i>Sistema híbrido supercondutor/ferromagneto.</i>	43
Figura 16 – <i>Nucleação supercondutora do parâmetro de ordem sem condições de borda periódicas.</i>	46
Figura 17 – <i>Diagrama de fase para o sistema híbrido estudado experimentalmente.[12]</i>	47
Figura 18 – <i>Análise da variação do passo Δx.</i>	48
Figura 19 – <i>a) Variação da temperatura crítica com relação ao tamanho da amostra. b) Nucleação supercondutora do parâmetro de ordem para $h = 0, 1$.</i>	48
Figura 20 – <i>Estrutura magnética com magnetização steplike para dois domínios magnéticos.</i>	51
Figura 21 – <i>(a)Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike considerando a amostra infinita. (b)Resultado obtido por Aladyshkin no estudo do sistema híbrido S/F com magnetização steplike.</i>	53
Figura 22 – <i>Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike considerando a amostra finita.</i>	54
Figura 23 – <i>Diagrama de fases experimental do sistema híbrido $BaFe_{12}O_{19}$.[31]</i>	54

Figura 24 – Estrutura magnética com magnetização steplike para quatro domínios magnéticos.	55
Figura 25 – Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike para quatro domínios magnéticos.	55
Figura 26 – Sistema físico do oscilador harmônico duplo.	56
Figura 27 – Potencial do oscilador harmônico duplo quântico.[32]	58

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados obtidos pelo algoritmo construído no MATLAB sem condições de bordas periódicas.	45
Tabela 2 – Resultados obtidos pelo algoritmo construído no MATLAB com condições de bordas de Ginzburg - Landau.	50

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	A SUPERCONDUTIVIDADE	18
2.1	Características gerais do fenômeno da supercondutividade	18
2.2	Descoberta do fenômeno da supercondutividade e suas características	20
2.3	Teoria de London	22
2.4	Teoria BCS	25
3	A TEORIA DE GINZBURG-LANDAU	27
3.1	Contexto histórico e transição de fase supercondutora	27
3.2	A energia livre de Ginzburg-Landau	28
3.3	Equações e consequências da teoria de Ginzburg-Landau	30
3.3.1	As equações diferenciais de Ginzburg-Landau	30
3.3.2	Comprimento de coerência de Ginzburg-Landau	32
3.3.3	A equação linearizada de Ginzburg-Landau	33
3.4	Nucleação supercondutora em amostra infinita: H_{c2}	34
3.5	Nucleação supercondutora em superfícies: H_{c3}	35
4	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E FUNCIONAMENTO DO ALGORITMO CONSTRUÍDO NO MATLAB	38
4.1	O Método das Diferenças Finitas	38
4.2	Algoritmo construído no Matlab	40
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	43
5.1	Estudo de filme fino híbrido supercondutor	43
5.1.1	Construção algébrica para solução numérica da Equação de Ginzburg-Landau	43
5.1.2	Estudo unidimensional sem condições de bordas de Ginzburg-Landau	45
5.1.3	Estudo unidimensional com condições de bordas de Ginzburg-Landau	48
5.2	Estrutura magnética com magnetização steplike	50
5.2.1	Solução analítica para estrutura magnética com magnetização steplike com dois domínios	51
5.2.2	Solução analítica para estrutura magnética com magnetização steplike com quatro domínios	55
5.3	Oscilador Harmônico Duplo Clássico e transição para Mecânica Quântica	56
5.3.1	Autovalores e autovetores para o oscilador harmônico duplo	59

5.4	Analogia entre o oscilador harmônico duplo quântico e a equação linearizada de Ginzburg-Landau	61
6	CONCLUSÃO	63
	Referências	64

1 Introdução

A descoberta do fenômeno da supercondutividade ocorreu quando o físico holandês Heike Kamerlingh Onnes verificou, em 8 de abril de 1911, o que ele chamou posteriormente de supercondutividade, um fenômeno até então desconhecido na época. Neste fenômeno foi possível verificar que certos materiais quando resfriados a determinadas temperaturas abaixo de T_c (temperatura crítica) apresentavam a propriedade de conduzir corrente elétrica sem perdas de energia, ou seja, sem dissipação produzida pela resistência elétrica.[9] Em 1933, Walter Meissner e Robert Ochsenfeld descobriram em seus estudos que no estado supercondutor esses materiais exibiam a propriedade de excluir campos magnéticos não muito intensos de seu interior e essa propriedade ficou conhecida como efeito Meissner.[6] Em 1935 Fritz e Heinz London contribuíram com a primeira teoria fenomenológica de característica macroscópica, que deu uma descrição simples e sucinta sobre o funcionamento desses materiais na condição supercondutora, a teoria de London.[7]

Em 1950, surgiu uma importante teoria fenomenológica, elaborada por Vitaly Ginzburg e Lev Landau, ela ficou conhecida como a teoria de Ginzburg-Landau, apresentando resultados de forma mais elegante e aprofundada que a teoria de London. A teoria de Ginzburg-Landau tem como base um funcional de energia livre construído com a expansão da densidade de energia livre em uma série de potências. A partir deste funcional é retirado as duas equações de Ginzburg-Landau, sendo que uma é obtida quando integramos o funcional em todo espaço de maneira a conseguir a energia livre total de um supercondutor e a outra quando minimizamos a energia livre do sistema.[6, 16]

Sendo o funcional de energia livre válido para transições de fase contínuas e sabendo que ψ no estado normal é 0 e ψ no estado supercondutor é diferente de 0, isso garante que $|\psi|^2$ na borda (entre o estado normal e o estado supercondutor) seja muito pequeno, ou seja, $|\psi|^2 \ll 1$ desacoplando a primeira e segunda equação de Ginzburg-Landau e dando origem a equação linearizada de Ginzburg-Landau. Nesta dissertação abordaremos problemas com soluções a partir da equação linearizada de Ginzburg-Landau. Para encontrarmos essas soluções resolvemos esta equação numericamente através de um algoritmo, que realiza o método das diferenças finitas a partir dos parâmetros iniciais necessários para solução dos problemas que serão propostos, construído no MATLAB (MATrix LABoratory - software interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico encontrado em <https://www.mathworks.com/>) [1]

Dentre os problemas nós temos a nucleação para um filme fino híbrido supercondutor, onde não levaremos em conta as condições de borda de Ginzburg-Landau, ou seja, consideramos a amostra estudada infinita. Analisaremos também para este sistema a nucleação levando em conta as condições de borda de Ginzburg-Landau. Estudaremos também a nucleação para o

sistema híbrido supercondutor com magnetização steplike com e sem condições de borda de Ginzburg-Landau, comparando os resultados obtidos com os da referência [29]. Faremos também uma extensão do estudo feito por Aladyshkin, analisando a nucleação para quatro domínios magnéticos. Além disso vamos fazer um estudo do oscilador harmônico duplo quântico, onde nele vamos demonstrar uma analogia com o problema de nucleação supercondutora.

2 A supercondutividade

2.1 Características gerais do fenômeno da supercondutividade

Um dos fenômenos mais incríveis da física dos materiais é a supercondutividade. Esse fenômeno é caracterizado pela resistência, simbolizada na literatura como R , à passagem de uma corrente elétrica contínua sendo abruptamente suprimida quando o material é resfriado abaixo de uma determinada temperatura bem definida, denominada de temperatura crítica, a qual é simbolizada como T_c . Podemos observar o comportamento deste fenômeno na Figura 1, onde está representada como a resistência varia em relação a temperatura para um material normal e um material supercondutor.

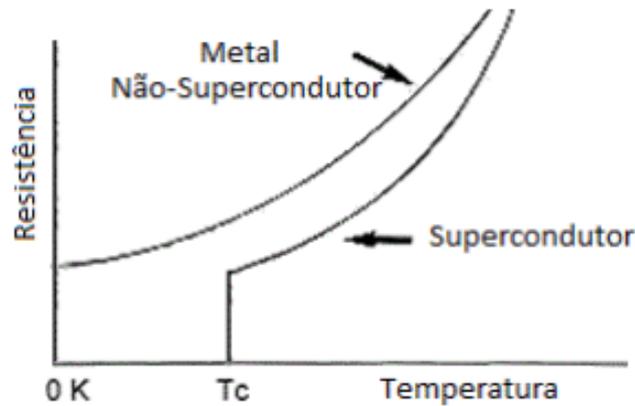


Figura 1 – Comportamento da resistência elétrica de um metal normal e um metal supercondutor a baixas temperaturas.[4]

A resistência elétrica depende do formato da amostra e é proporcional à resistividade elétrica, que é uma propriedade intrínseca do material.[2] Sabemos que a corrente elétrica de condução aparece quando há elétrons livres que se movem quando um campo atua sobre eles. A lei de Ohm é descrita matematicamente como,

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (2.1)$$

onde \vec{E} é o campo elétrico, ρ é a resistividade elétrica e \vec{J} é a densidade de corrente elétrica. A tensão elétrica V é dada por,

$$V = El \implies V = \rho J l \quad (2.2)$$

e como $V = RI$, concluímos que,

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.3)$$

onde l é o comprimento e A é a área da seção reta da amostra. A resistividade expressa a dificuldade oferecida pelo material à passagem de uma determinada corrente elétrica em seu interior. Pensando em sistemas metálicos, os elétrons de condução asseguram o transporte de carga elétrica com muita eficácia. Assim, os metais são considerados bons condutores elétricos e os valores da resistividade elétrica são relativamente baixos nesses sistemas.

Certos materiais apresentam um comportamento que difere significativamente do comportamento usualmente observado em metais. Quando resfriados à uma determinada temperatura (denominada de temperatura crítica), sua resistividade decresce da maneira usual, mas cai abruptamente a zero.[7] Quando esse tipo de comportamento ocorre em um material, dizemos que ele passou do estado normal para o estado supercondutor.

Esse estado supercondutor é fortemente afetado pela aplicação de um campo magnético, pois ele tende a reduzir a temperatura crítica. Se a magnitude do campo magnético exceder um dado valor característico chamado de campo magnético crítico (B_c), o estado supercondutor é suprimido e o material passa a apresentar um comportamento resistivo normal.

Quando um material atinge uma temperatura abaixo de T_c observamos a manifestação mais conhecida do estado supercondutor, mas muitas outras propriedades físicas revelam a presença de supercondutividade, dentre elas está o calor específico. Na Figura 2 visualizamos a contribuição dos elétrons de condução ao calor específico de um metal supercondutor, comparada com o calor específico eletrônico do mesmo metal no estado normal.[6]

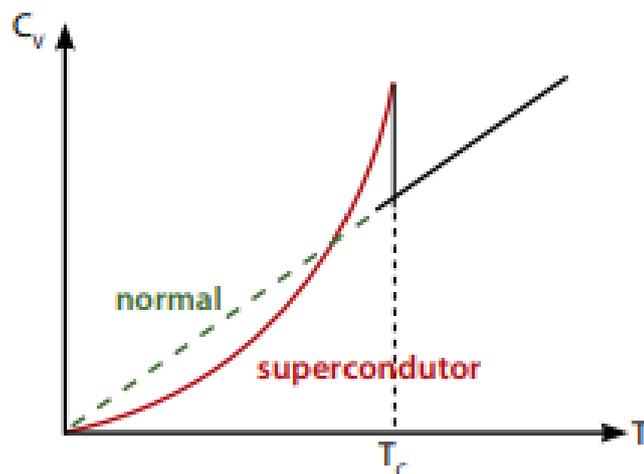


Figura 2 – Comportamento do calor específico de um metal normal e um metal supercondutor a baixas temperaturas.[6]

O comportamento observado nas vizinhanças de T_c é conhecido como anomalia do tipo lambda e ela é originada pela ocorrência de um fenômeno de transição de fase envolvendo o sistema eletrônico do material supercondutor.[13]

Outra propriedade muito importante do estado supercondutor é o efeito Meissner-Ochsenfeld ou simplesmente efeito Meissner. Quando um material é submetido a um campo magnético, este

penetra no mesmo, ainda que o valor em seu interior seja, de um modo geral, diferente do valor do campo aplicado. Porém, em supercondutores, o valor do campo magnético no interior do material é zero, ou seja, os supercondutores repelem o campo magnético mesmo que se trate de um campo estático, sendo este fenômeno conhecido como efeito Meissner.

O comportamento magnético dos supercondutores permite a classificação desses sistemas em tipo 1 e 2. No primeiro tipo, o efeito Meissner é completo, ou seja, o fluxo magnético é totalmente expulso do interior da amostra. No segundo tipo nós temos os estados mistos, ou seja, para campos menores que B_{c1} tem-se o efeito Meissner, para campos entre B_{c1} e B_{c2} o estado de vórtices, onde em localizações pontuais do material temos a penetração de linhas de campo magnético sem quebrar a supercondutividade, e para campos maiores que B_{c2} a supercondutividade é quebrada.

Na Figura 3 (a) visualizamos o comportamento do campo no estado de vórtices em um supercondutor do tipo 2 e na Figura 3 (b) observamos como é a relação entre o campo interno e o campo aplicado para um material supercondutor.

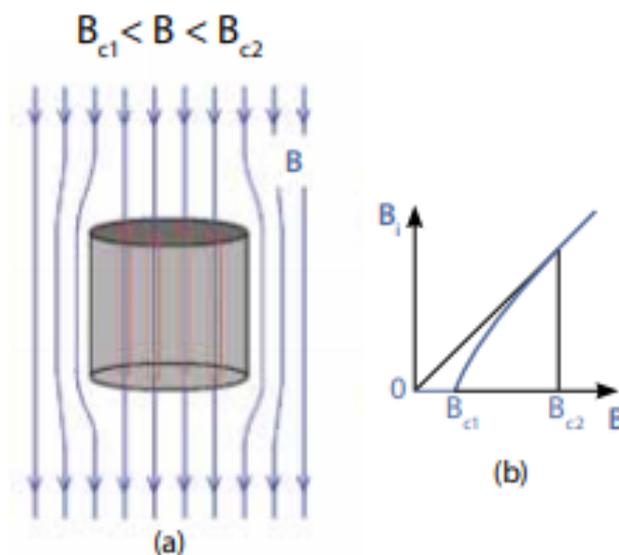


Figura 3 – (a) Efeito Meissner-Ochsenfeld parcial num supercondutor do tipo 2. (b) Campo interno em função do campo aplicado.[6]

2.2 Descoberta do fenômeno da supercondutividade e suas características

Entre os anos de 1900 e 1908 grandes nomes da física estavam numa corrida para atingir a temperatura do zero absoluto. Estudos da época já previam que no zero absoluto, os metais puros se tornariam condutores eletromagnéticos perfeitos. Com o avanço da tecnologia para diminuição da temperatura, os cientistas conseguiam cada vez mais liquefazer diversos tipos de gases, até que o último conhecido, o hidrogênio, foi liquefeito por Sir James Dewar em 1896.

Ainda assim, o físico holandês Kamerlingh Onnes conseguiu tomar a frente dessa corrida com seu trabalho envolvendo o hélio (*He*). Na época havia sido descoberto o elemento químico hélio na Terra, que até então, só se sabia que ele existia por conta das suas linhas espectrais na luz solar. Onnes começou a coletar o gás e, em 1908, conseguiu liquefazer hélio, numa temperatura de $T = 4,22\text{K}$. Assim, o hélio líquido passou a ser usado como reservatório térmico para esfriar materiais a temperaturas muito baixas.[6]

Três anos depois, o fenômeno da supercondutividade foi descoberto em 1911, na universidade de Leiden, por Onnes durante investigações sobre o comportamento da variação da resistividade do metal mercúrio em temperaturas muito baixas.

Foi constatado que a resistência do Mercúrio era praticamente nula abaixo de uma certa temperatura denominada temperatura crítica T_c , como podemos observar na Figura 4, sendo que os compostos com essa propriedade são denominados supercondutores. As contribuições físicas de Onnes lhe renderam o prêmio Nobel de 1913.[6]

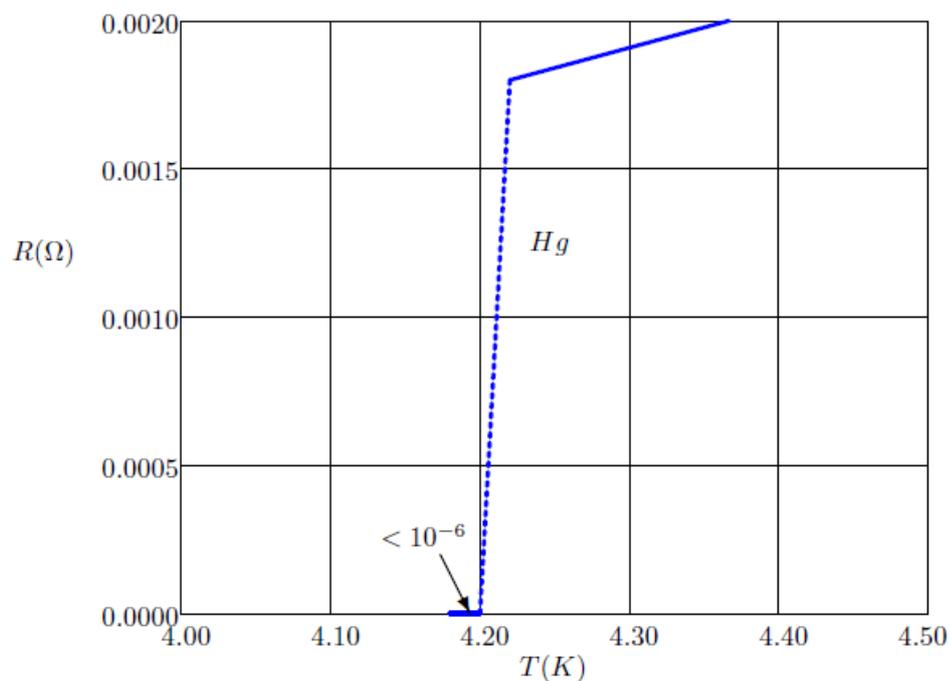


Figura 4 – Curva de R vs T obtida por Onnes mostrando a transição da supercondutividade do mercúrio.[9]

Inicialmente acreditou-se que a supercondutividade seria um fenômeno peculiar ao mercúrio, porém, pouco tempo após a descoberta, o próprio Onnes mostrou que outros metais se tornam supercondutores quando resfriados a temperaturas suficientemente baixas. Alguns exemplos de metais os quais apresentaram o mesmo fenômeno quando resfriados a uma determinada temperatura são (entre parênteses está a temperatura crítica correspondente): cádmio (0,52 K), alumínio (1,18 K), titânio (2,38 K), estanho (3,72 K), chumbo (7,20 K), nióbio (9,25 K) e algumas ligas, como o Nb_3Sn (18,1 K), Rb_2C_{60} (29,0 K).[6]

Em 1933, Walther Meissner e Robert Ochsenfeld realizaram um experimento que media o fluxo magnético ao redor de amostras em diferentes temperaturas. Para materiais supercondutores, eles observaram que, abaixo da temperatura crítica, praticamente todo o fluxo magnético da amostra era expulso, ou seja, constataram que os supercondutores são diamagnetos perfeitos. Esse efeito ficou conhecido como efeito Meissner o qual permitiu estabelecer que a transição do estado normal para o supercondutor é uma transição termodinâmica reversível.

Sabemos que a supercondutividade é destruída quando se aplica um campo magnético maior que campo crítico B_c . Associado a ele, existe o campo auxiliar H_c , onde a relação entre B e H é dada por:

$$H = \frac{B}{\mu_0}. \quad (2.4)$$

O valor do campo crítico depende da temperatura do material, tendendo a zero quando se está próximo da temperatura crítica e é máximo no zero absoluto. A Figura 5 nos mostra o limite entre o estado normal e o estado supercondutor pelo diagrama de fase do sistema metal normal-metal supercondutor, onde está indicada a linha $H_c(T)$ que separa as duas fases.[7]

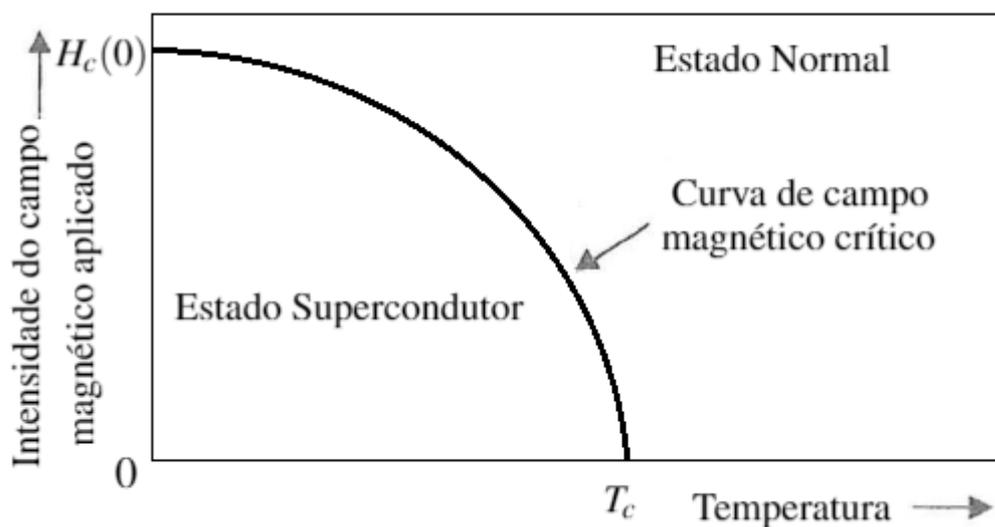


Figura 5 – Diagrama de fase do sistema metal normal-metal supercondutor.[7]

2.3 Teoria de London

Anteriormente vimos uma propriedade fundamental dos materiais supercondutores, e talvez a mais importante, que é a ocorrência do chamado efeito Meissner-Ochsenfeld.[6] Esse fenômeno, assim como outros, necessitavam de modelos físicos cada vez mais precisos que conseguissem explicá-los de maneira matemática. Uma teoria muito bem sucedida foi a teoria de London.[8]

Em 1935, Fritz e Heinz London mostraram que o efeito Meissner foi uma consequência da minimização da energia livre eletromagnética transportada pela corrente supercondutora. Eles elaboraram a teoria fundamentada nas leis do eletromagnetismo de Maxwell.

London propôs um modelo de dois fluidos o qual supõe que uma fração dos elétrons em um material supercondutor comporta-se de forma normal, ao passo que os elétrons restantes exibem um comportamento anômalo e são responsáveis pelas propriedades supercondutoras, eles formam uma densidade n_s e são chamados de elétrons supercondutores. Sendo \vec{v}_s a velocidade dos elétrons supercondutores, a equação de movimento é descrita pela segunda Lei de Newton dada por:

$$\begin{aligned} m^* \frac{d\vec{v}_s}{dt} &= e^* \vec{E} \\ \frac{d\vec{v}_s}{dt} &= \frac{e^* \vec{E}}{m^*} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde m^* , e^* e \vec{v}_s são respectivamente a massa, a carga e a velocidade dos portadores de carga supercondutores. A densidade de corrente associada aos elétrons supercondutores é, então, dada por,

$$\vec{J}_s = n_s e^* \vec{v}_s \quad (2.6)$$

onde n_s é a densidade de portadores de carga no material supercondutor. Derivando a equação (2.6), e utilizando a equação (2.5),

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}_s}{dt} &= e^* n_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} \\ \frac{d\vec{J}_s}{dt} &= \frac{n_s (e^*)^2}{m^*} \vec{E} \end{aligned} \quad (2.7)$$

obtemos a primeira equação de London dada por (2.7). Reescrevendo a equação,

$$\vec{E} = \frac{m^*}{n_s (e^*)^2} \frac{d\vec{J}_s}{dt} \quad (2.8)$$

e utilizando a equação de Faraday,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \left(\frac{m^*}{n_s (e^*)^2} \frac{d\vec{J}_s}{dt} \right) &= -\partial_t \vec{B} \\ \partial_t \left(\vec{\nabla} \times \vec{J}_s + \frac{n_s (e^*)^2}{m^*} \vec{B} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é válida para qualquer \vec{J}_s e \vec{B} constantes no tempo. No entanto, isso não garante a expulsão do fluxo magnético quando o material passa do estado normal ao estado supercondutor, ou seja, isso não garante o efeito Meissner. Desta maneira escrevemos,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{\mu_0 n_s (e^*)^2}{m^*} \vec{B} &= 0 \\ \nabla^2 \vec{B} = \frac{\mu_0 n_s (e^*)^2}{m^*} \vec{B} \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde a equação (2.10) é a segunda equação de London. A primeira equação de London descreve a condutividade perfeita, já que o menor campo elétrico é capaz de acelerar os superelétrons. Notamos também que a segunda equação de London descreve o caráter diamagnético perfeito de um supercondutor, pois uma densidade de supercorrentes induzidas na superfície do material não iria permitir a penetração do campo magnético externo, sendo qualquer fluxo magnético inicialmente no interior da amostra expulso quando a mesma entrar no estado supercondutor.

Imaginando um caso unidimensional de (2.10), considerando uma configuração onde o campo está ao longo do eixo z e a penetração se dá ao longo do eixo x , temos:

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = \frac{B}{\lambda_L^2} \quad (2.11)$$

com $\lambda_L = \left(\frac{m^*}{\mu_0 n_s (e^*)^2} \right)^{1/2}$. A solução geral desta equação é,

$$B_z(x) = c_1 e^{-x/\lambda_L} + c_2 e^{x/\lambda_L} \quad (2.12)$$

aplicado as condições de contorno vamos obter

$$\begin{cases} x \rightarrow \infty \implies c_2 = 0 \\ x \rightarrow 0 \implies c_1 = B_z(0) = B_0 \end{cases}$$

assim,

$$B_z(x) = B_0 e^{-x/\lambda_L}. \quad (2.13)$$

Esse resultado nos mostra a dependência do campo magnético dentro do supercondutor, nos indicando que a segunda equação de London mostra a ocorrência do Efeito Meissner, já que a sua solução indica que o campo tende a zero no interior da amostra.

O campo magnético é atenuado no interior do material supercondutor, e o comprimento característico dessa atenuação é representado pelo parâmetro λ_L , que é conhecido como comprimento de penetração de London.[6] Este efeito pode ser visto na Figura 6, onde é mostrado o quanto o campo magnético penetra o material sem quebrar a supercondutividade.

Da mesma maneira podemos escrever, substituindo o campo magnético local (2.13) na equação da lei de Ampère-Maxwell, a seguinte expressão para a densidade de corrente induzida:

$$J_y = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L} B_0 e^{-x/\lambda_L}. \quad (2.14)$$

Essa equação nos permite visualizar como o campo magnético externo é impedido de entrar no interior do supercondutor através da corrente de blindagem.[16] Desta maneira, em resumo, a teoria de London explica o diamagnetismo perfeito e a perda de resistividade abaixo de T_c , que são os dois fenômenos fundamentais da supercondutividade. Assim, ela é utilizada nos casos que se tem o campo magnético muito menor que o campo crítico B_{c2} da amostra e não para descrever casos mais gerais de fenômenos da supercondutividade.

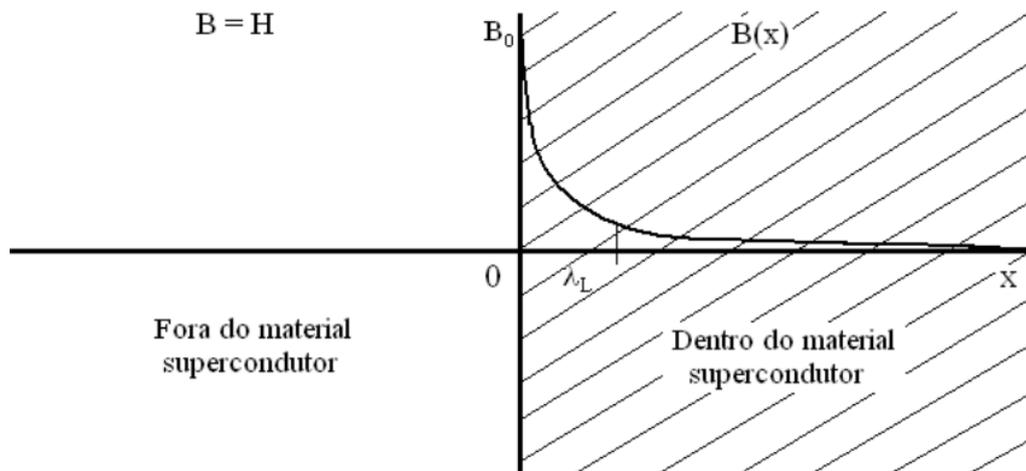


Figura 6 – Penetração do fluxo magnético no interior de um supercondutor.[6]

2.4 Teoria BCS

Nos tópicos abordados até agora vimos uma visão puramente macroscópica da supercondutividade. Assumimos que os elétrons livres no material tinham a propriedade de se mover através do metal sem sofrer efeitos resistivos causados pelas impurezas do material ou pelas vibrações da rede, sendo estes elétrons chamados de superelétrons. Nesta seção iremos aprofundar o tema da supercondutividade abordando uma visão microscópica deste fenômeno.

A teoria BCS foi desenvolvida em 1957 e foi proposta por John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer. Ela veio com o objetivo de aprofundar o tema da supercondutividade a partir de uma visão microscópica do fenômeno. Essa teoria tentou explicar, por princípios físicos, como os superelétrons conseguem se locomover em um metal sem sofrerem efeitos resistivos.

O primeiro passo para o estudo microscópico da supercondutividade foi dado por Fröhlich, em 1950. Ele demonstrou que a interação elétron-fônon poderia ocasionar uma ligação entre dois elétrons. Logo depois da hipótese pioneira de Fröhlich, Bardeen desenvolveu uma teoria semelhante, mostrando que o elétron muda seu comportamento em decorrência da sua interação com os fônons da rede cristalina. [7]

O passo seguinte para elaboração da teoria BCS foi dado por Cooper demonstrando que, sob certas condições, o gás de Fermi torna-se instável possibilitando a formação de pares de elétrons ligados, conhecidos como pares de Cooper. A teoria BCS recebeu um impulso final com o famoso trabalho de seus três autores: Bardeen, Cooper e Schrieffer. Com essa teoria foi possível explicar de forma mais adequada a formação de pares de elétrons.

Os elétrons livres, que formam um gás em torno da rede de íons, são espalhados quando se deparam com vibrações térmicas dos íons da rede cristalina, impurezas e imperfeições. Assim esses elétrons interagem com a rede gerando uma interação elétron-rede, essa interação determina a resistividade dos materiais.[2, 7]

Sabemos que tanto o momento quanto a energia devem ser conservados quando um elétron é espalhado, um modo de vibração da rede deve ser excitado no processo de espalhamento e esse movimento de vibração é quantizado. Então ocorre a emissão (ou absorção) de um fônon. Dizemos que um fônon é uma partícula resultante da quantização de uma onda oriunda das vibrações de uma rede cristalina. A interação elétron-rede é chamada então de interação elétron-fônon.[7]

Assim, a ideia fundamental da teoria BCS consiste na suposição de que os elétrons de condução mais energéticos se associam em pares com velocidades opostas e spins também opostos.[13] A associação dos elétrons em pares, chamados de pares de Cooper, se dá em razão de uma interação atrativa, mediada pelas vibrações da rede cristalina e superando a repulsão natural entre as partículas. Essa formação de pares não ocorre de maneira isolada, ela se dá de maneira coletiva, formando-se um condensado quântico no espaço recíproco.

Dessa maneira, quando o condensado superconductor, o qual tem um comprimento de correlação muito maior que as distâncias interatômicas dos íons da rede cristalina, é posto em movimento pela ação de um campo elétrico, ele avança sem ser detido por eventos que, embora capazes de se opor a propagação de elétrons independentes, não possuem energia suficiente para afetar o condensado globalmente.[13] Observamos na Figura 7 a formação dos pares de cooper na rede cristalina explicado anteriormente. Na Figura 7 (a) temos o elétron percorrendo a rede, na Figura 7 (b) temos os íons da rede cristalina interagindo com o elétron, na Figura 7 (c) temos o acúmulo de íons da rede interagindo com um outro elétron que transita na rede e na Figura 7 (d) temos a formação dos pares pela interação do sistema.

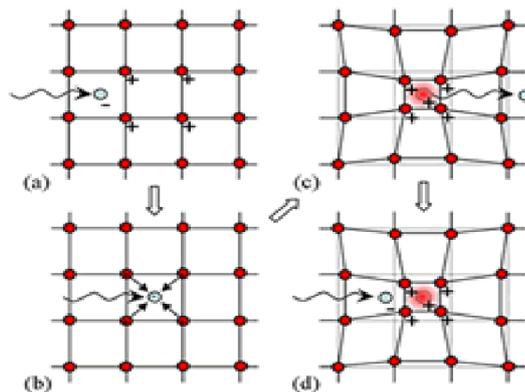


Figura 7 – Interação atrativa entre os elétrons estabilizando os pares de Cooper.[13]

3 A Teoria de Ginzburg-Landau

3.1 Contexto histórico e transição de fase supercondutora

Uma transição de fase ocorre quando há uma singularidade na energia livre ou em uma de suas derivadas, e é caracterizada por uma mudança abrupta nas propriedades de uma substância. [7] Para explicar a transição do estado normal para o estado supercondutor, faz-se uma análise considerando duas fases distintas termodinâmicas, sendo os parâmetros relevantes o campo auxiliar \vec{H} e a magnetização \vec{M} .

Vimos anteriormente que a supercondutividade é destruída pela aplicação de um campo magnético suficientemente elevado. A intensidade deste campo, acima do qual a supercondutividade é destruída, é denominado de campo crítico \vec{B}_c o qual está associado a um campo intensidade auxiliar \vec{H}_c . O valor do campo crítico depende da temperatura do material: tende a zero quando está próximo da temperatura crítica e é máximo no zero absoluto.[7]

Em 1937 Landau desenvolveu uma teoria para transições de fase de segunda ordem. Nessa teoria as transições eram caracterizadas por um parâmetro de ordem que é zero, quando temperatura do sistema está acima da temperatura crítica, e diferente de zero, quando a temperatura do sistema está abaixo da temperatura crítica.

Em 1950 os físicos russos, Vitaly Lazarevich Ginzburg e Lev Davidovich Landau, introduziram uma teoria fenomenológica para a supercondutividade [18], chamada teoria de Ginzburg-Landau, nesta teoria foi postulado que um parâmetro de ordem complexo ψ caracteriza o estado supercondutor e que ψ^2 é a densidade de partículas supercondutoras. Nessa teoria de Ginzburg-Landau perto de um ponto crítico expande-se a energia livre como uma série de Taylor do parâmetro de ordem do sistema em questão, e esta teoria pode ser utilizada para o estudo do caso de um sistema supercondutor conforme desenvolvido por Ginzburg. Para esse sistema, Ginzburg adaptou a teoria de Landau transformando ela no que hoje é conhecido como a teoria de Ginzburg-Landau.

Porém, em 1959, Gor'kov mostrou que esta teoria poderia ser derivada da teoria microscópica BCS, deixando assim de ser consequência de argumentos empíricos para ser uma consequência da teoria microscópica em um limite adequado e deixando claro o verdadeiro significado de ψ^2 . Fisicamente, ψ^2 pode ser interpretado como a função de onda do centro de massa dos pares de Copper.

Neste trabalho, a Teoria de Ginzburg Landau é de extrema importância para o desenvolvimento dos cálculos e obtenção dos resultados. Dessa maneira vamos fazer um estudo dos principais pontos desta teoria neste capítulo.

3.2 A energia livre de Ginzburg-Landau

Em 1950, os físicos soviéticos L.D. Landau e V.L. Ginzburg formularam uma teoria para explicar as propriedades termodinâmicas da transição do estado normal para o estado supercondutor. Essa formulação feita por Ginzburg e Landau representa um avanço em relação as ideias de London, na medida em que usa fundamentos de mecânica quântica para descrever o efeito de um campo magnético, diferente da teoria de London, que é puramente clássica. Esta teoria é de caráter fenomenológico e nela os portadores de carga são tratados como um fluido quântico o qual é descrito por uma função de onda macroscópica, $\psi(r)$, dada por:

$$|\psi|^2 = n_s. \quad (3.1)$$

Vimos anteriormente que quando temos um material no estado normal, a sua temperatura está acima da temperatura crítica T_c , e ψ é zero, ou seja, não se forma uma densidade local de elétrons. Enquanto que no estado supercondutor, a sua temperatura está abaixo de T_c , e ψ é diferente de zero, tendo assim uma formação de densidade local de elétrons no material.[6, 15] Em resumo,

$$\psi = 0 \longmapsto T > T_c \quad (3.2)$$

$$\psi \neq 0 \longmapsto T < T_c. \quad (3.3)$$

Segundo a teoria de Ginzburg-Landau, a energia livre pode se expandir em potências do parâmetro de ordem, perto da transição do estado supercondutor-normal, na temperatura $T_c(H)$, onde o parâmetro de ordem é pequeno. Desta maneira esta teoria só é válida na região perto de T_c , produzindo resultados satisfatórios também para $T \ll T_c$. Seguindo a teoria de transição de fase de segunda ordem de Landau, vamos fazer uma expansão da energia livre em termos de um parâmetro arbitrário Δ . [28, 27] Assim, para T próximo de T_c :

$$F = F_n + Q(T)|\Delta|^2 + \frac{S}{2}|\Delta|^4 + \dots \quad (3.4)$$

onde $Q(T)$ e S são coeficientes de expansão fenomenológicos característicos do material. F_n é a energia do estado normal, e os dois termos seguintes correspondem à expansão da diferença de energia entre os estados supercondutor e normal em potências de $|\Delta|$. Com a variação de Δ na estrutura cristalina temos,

$$F = F_n + Q(T)|\Delta|^2 + \frac{S}{2}|\Delta|^4 + C \left[\left| \frac{\partial \Delta}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right|^2 \right]. \quad (3.5)$$

Levando em conta a presença de campos magnéticos, o termo de variações de $|\Delta|$ deve ser reescrito de maneira a satisfazer a invariância de calibre da energia livre e incluir um último termo correspondente à energia do campo magnético no vácuo,

$$F = F_n + Q(T)|\Delta|^2 + \frac{S}{2}|\Delta|^4 + C \left| \left(-i\Delta - \frac{2e\vec{A}}{\hbar c} \right) \right|^2 + \frac{b^2}{8\pi} \quad (3.6)$$

onde b é a densidade local de fluxo magnético. Fazendo uma analogia formal entre termos de ordem $|\Delta|$ e a densidade de energia de uma partícula de carga $e^* = 2e$ e massa m^* descrita por uma função de onda $\psi(\vec{r})$. Desta maneira,

$$\psi(\vec{r}) = \frac{(2m^*C)^{1/2}}{\hbar} \Delta(\vec{r}) \quad (3.7)$$

$$\alpha(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{Q(T)}{C} \quad (3.8)$$

$$\beta = \left(\frac{\hbar^2}{2m^*} \right)^2 \frac{S}{C^2}. \quad (3.9)$$

Assim, escrevemos a expansão da densidade de energia livre em uma série de potências da forma,

$$F = F_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*}{c}\vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{h'^2}{8\pi} \quad (3.10)$$

onde h' é o campo total na amostra supercondutora, \vec{A} é o potencial vetor do campo, F_n é a energia livre no estado normal, ψ é a função de onda, m^* e e^* são a massa e a carga dos pares de Cooper. As variáveis $\alpha(T)$ e β são parâmetros fenomenológicos. Para $\beta < 0$ não se pode determinar claramente os mínimos da energia, portanto β deve ser positivo, podendo o $\alpha(T)$ ser positivo ou negativo. Quanto maior ψ , maior será a densidade de elétrons supercondutores e consequentemente maior será o efeito do fenômeno da supercondutividade. Notamos também que esta função depende da posição, já que na superfície do material a supercondutividade deve se anular e ser máxima em seu interior. Visualizando fisicamente cada termo do funcional de energia livre, notamos que o primeiro termo corresponde à energia do estado normal, os dois próximos termos correspondem à energia de condensação do estado supercondutor, o quarto termo está relacionado à energia cinética dos pares de Cooper e por fim o último termo corresponde ao aumento na energia necessário para manter o fluxo fora do supercondutor.

Para entender um pouco mais a energia livre de Ginzburg-Landau, estudaremos o caso em que não existe campo magnético aplicado. Na ausência de campos e gradientes ficamos com[14]:

$$F - F_n = \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4, \quad (3.11)$$

sabendo que $|\psi|^2 = \psi^* \psi$,

$$F - F_n = \alpha(T)(\psi^* \psi) + \frac{\beta}{2}(\psi^* \psi)^2. \quad (3.12)$$

Para minimizarmos a energia, devemos assumir que β é sempre positivo para que a energia possua um mínimo. Já o parâmetro $\alpha(T)$ não tem nenhuma restrição, ou seja, pode ser tanto negativo como positivo, como já havíamos dito antes. O mínimo dessa equação ocorre quando $\partial F / \partial \psi^* = 0$ e $\partial^2 F / \partial \psi^{*2} > 0$, dessa maneira:

$$\partial F / \partial \psi^* = \alpha(T)\psi + \beta\psi^* \psi^2 = 0 \quad (3.13)$$

logo,

$$|\psi|^2 = \frac{-\alpha(T)}{\beta} \quad (3.14)$$

da mesma maneira podemos observar,

$$\partial^2 F / \partial \psi^{*2} = \beta \psi^2 > 0 \quad (3.15)$$

pois $\beta > 0$, caso contrário a energia livre mais baixa ocorreria para valores arbitrariamente grandes de $|\psi|^2$ onde não há expansão. Logo, no caso em que $\alpha(T) > 0$, o mínimo ocorre em $\psi = 0$, o que significa que não existem pares de Cooper e, portanto, o sistema está no estado normal. No caso em que $\alpha(T) < 0$, a energia possui mínimo quando $|\psi|^2 = -\alpha(T)/\beta$ e o sistema está no estado supercondutor.[1]

Temos também que, $F - F_n = \alpha|\psi|^2 + (\beta/2)|\psi|^4$, se $|\psi|^2 = -\alpha(T)/\beta$, vamos obter $F - F_n = -\alpha^2(T)/2\beta$. O termo $\alpha(T)$ é dependente da temperatura, o que nos permite escrevê-lo como uma expansão em série de Taylor $\alpha(T)$ sobre T_c do tipo:

$$\alpha(T) = \alpha'(1 - t) \quad (3.16)$$

onde $\alpha' > 0$ e $t = T/T_c$. [1] O comportamento do funcional de energia livre em função do parâmetro de ordem ψ para $\alpha(T) < 0$ e $\alpha(T) > 0$ está descrito na Figura 8, onde o gráfico a esquerda representa a situação para $T > T_c$ ($\alpha(T) > 0$) e o da direita representa a situação para $T < T_c$ ($\alpha(T) < 0$).

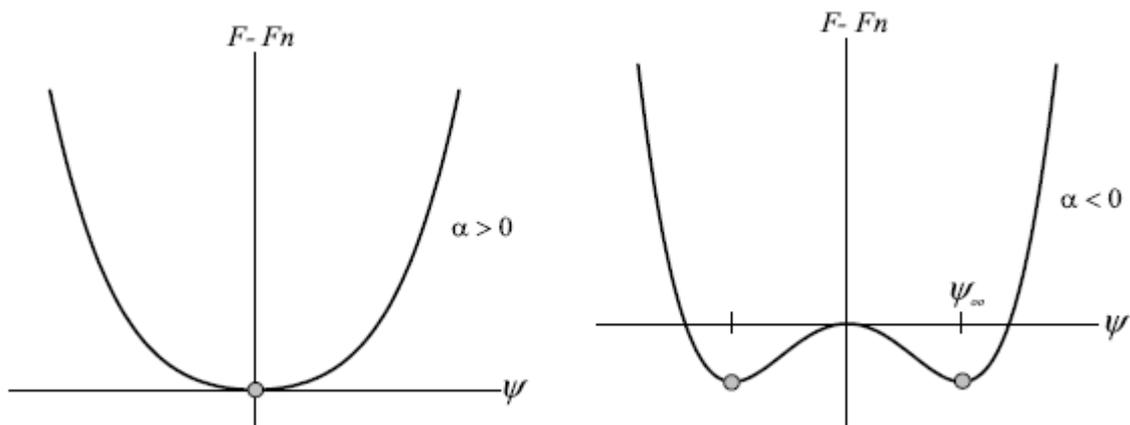


Figura 8 – Funções da energia livre de Ginzburg-Landau[10]

3.3 Equações e consequências da teoria de Ginzburg-Landau

3.3.1 As equações diferenciais de Ginzburg-Landau

O problema central da abordagem de Ginzburg-Landau é encontrar funções ψ e \vec{A} as quais fazem com que a energia livre total da amostra seja mínima. Assim, Ginzburg e Landau encontraram equações diferenciais através da minimização da energia livre com respeito à ψ e \vec{A} . [1, 6, 10]

Chegamos a primeira equação de Ginzburg-Landau integrando em todo espaço a equação (3.10) dada por,

$$F = F_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{h^2}{8\pi}$$

de maneira a obter a energia livre total de um supercondutor. Dessa forma,

$$F = \int dV \left(\alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi \right|^2 + \frac{h^2}{8\pi} \right) \quad (3.17)$$

variando essa expressão em relação a ψ^* , escrevendo $\vec{\phi} = (-i\hbar\vec{\nabla} - e^*\vec{A}/c)$, usando a relação $\vec{\nabla} \cdot (\delta\psi^* \vec{\phi}) = \vec{\phi} \cdot \vec{\nabla} \delta\psi^* + \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}$ e utilizando o Teorema de Gauss, temos:

$$\int \left(\alpha(T)|\psi| \delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2 \delta\psi^* - \frac{i\hbar}{2m^*} \delta\psi^* \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi} - \frac{e^*}{2m^*c} \vec{\phi} \cdot \vec{A} \delta\psi^* \right) dV + \frac{i\hbar}{2m^*} \oint_S \vec{n} \cdot \delta\psi^* \vec{\phi} dS = 0 \quad (3.18)$$

onde V é o volume da amostra e S é a superfície da amostra. Substituindo a função $\vec{\phi}$ na equação acima, chegamos a solução desta equação pelas expressões abaixo:

$$\int \left(\alpha(T)|\psi| \delta\psi^* + \beta\psi|\psi|^2 \delta\psi^* + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right)^2 \psi \delta\psi^* \right) dV = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{i\hbar}{2m^*} \oint_S \vec{n} \cdot \delta\psi^* \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi dS = 0. \quad (3.20)$$

Assim, (3.19) e (3.20) devem ser válidas para qualquer valor arbitrário e pequeno de $\delta\psi^*$, onde obtemos a primeira equação de Ginzburg-Landau e a sua condição de contorno:

$$\alpha(T)\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right)^2 \psi = 0 \quad (3.21)$$

$$\hat{n} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e^*\vec{A}}{c} \right) \psi = 0. \quad (3.22)$$

Para chegarmos a segunda equação de Ginzburg-Landau vamos minimizar a energia livre com relação a \vec{A} ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m^*} \int \left(-\frac{e^*}{c} \delta\vec{A} \psi^* \right) \cdot \left(-i\hbar\vec{\nabla} \psi^* - \frac{e^*\vec{A}\psi}{c} \right) dV + \frac{1}{2m^*} \int \left(i\hbar\vec{\nabla} \psi^* - \frac{e^*\vec{A}\psi}{c} \right) \cdot \left(-\frac{e^*}{c} \delta\vec{A} \psi^* \right) dV \\ + \frac{1}{4\pi} \int (\vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{B}_0) \cdot \vec{\nabla} \times \delta\vec{A} dV = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

utilizando a propriedade $\vec{\nabla}[\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b}$, o Teorema de Gauss e algumas manipulações matemáticas,

$$\int \left(\frac{i\hbar e}{m^*c} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) + \frac{4(e^*)^2}{m^*c^2} |\psi|^2 \vec{A} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right) \cdot \delta\vec{A} dV = 0 \quad (3.24)$$

sendo esta equação válida somente para o termo em colchetes nulo, obtemos a segunda equação de Ginzburg-Landau dada por,

$$\vec{J}_s = \frac{\hbar e^*}{m^* i} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) - \frac{4(e^*)^2}{m^* c} \vec{A} |\psi|^2. \quad (3.25)$$

3.3.2 Comprimento de coerência de Ginzburg-Landau

As equações de Ginzburg-Landau são utilizadas em diferentes situações para resolução de problemas envolvendo supercondutores, sendo necessário, na maioria dessas situações, o uso de métodos numéricos. No entanto, existem duas situações em que é possível resolver as equações, o que é de fundamental importância para o melhor entendimento de como se comporta o parâmetro de ordem e o campo magnético \vec{B} , como discutiremos a seguir. Primeiramente vamos considerar a simplificação no caso de $\vec{B} = \vec{0}$ que nos leva a $\vec{A} = \vec{0}$. [1, 15] Desta maneira o funcional de energia fica,

$$\alpha(T) \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} \hbar^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (3.26)$$

dividindo ambos os lados da equação por $-\alpha^2(T)/\beta$, chamando $f = \left(\frac{\beta \psi^2}{|\alpha(T)|} \right)^{1/2}$, temos que,

$$f - f^3 + \frac{\hbar}{2m^* \alpha(T)} \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (3.27)$$

cuja solução é

$$\psi(x) = \psi_0 \tanh \left(\frac{x}{\sqrt{2} \xi(T)} \right), \quad (3.28)$$

onde ψ_0 é o valor do parâmetro de ordem no interior do supercondutor e o parâmetro $\xi(T)$, que possui dimensão de comprimento e é chamado de comprimento de coerência de Ginzburg-Landau, definido como: [7]

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha(T)|} \propto \frac{1}{1-t}. \quad (3.29)$$

Essa quantidade mede a distância da interface que o parâmetro de ordem volta a ter o valor máximo igual ao do interior do supercondutor. Em termos de $\xi(T)$, escrevemos a equação (3.27) da seguinte maneira,

$$\xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0. \quad (3.30)$$

A significância de $\xi(T)$ como comprimento característico de ψ pode ser notada fazendo a equação anterior linearizada, tomando $f(x) = 1 + g(x)$, onde $g(x) \ll 1$. [1] Então nós temos que, para primeira ordem de $g(x)$: [6]

$$\begin{aligned} \xi^2(T) g''(x) + (1 + g(x)) - (1 + 3g(x) + \dots) &= 0 \\ g''(x) &= \left(\frac{2}{\xi^2} \right) g(x) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$g(x) \sim e^{(\pm \sqrt{2} x / \xi(T))}. \quad (3.32)$$

Podemos notar que o parâmetro $\xi(T)$ faz o papel de um comprimento característico que determina o quanto $g(x)$ aproxima-se de zero no interior do material.[6] Observamos este comportamento na Figura 9, onde mostra como $g(x)$ se comporta em relação a x .

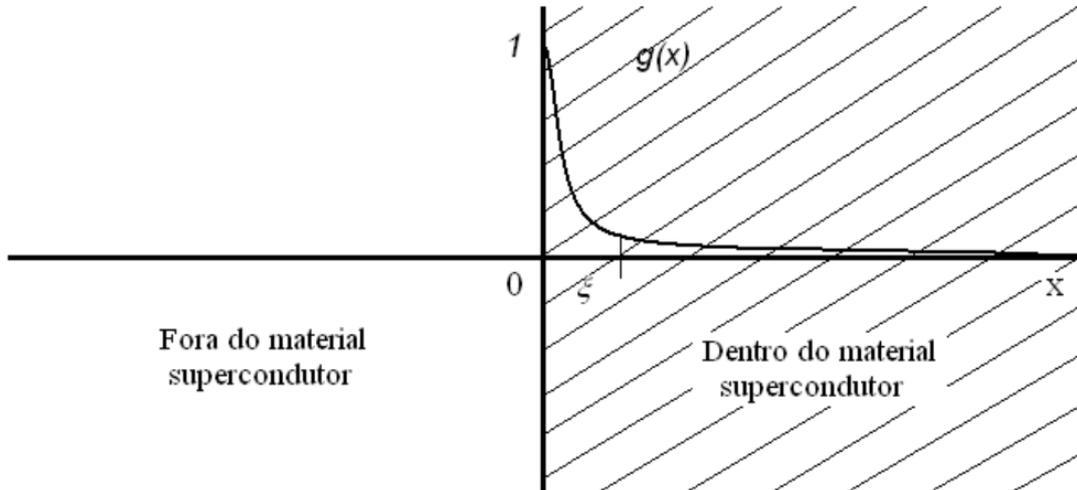


Figura 9 – Comportamento de $g(x)$ dentro do material supercondutor.[6]

3.3.3 A equação linearizada de Ginzburg-Landau

Vamos estudar as soluções da equação de Ginzburg-Landau linearizada, pois a nucleação da supercondutividade será verificada através desta equação. Sendo o funcional de energia livre (3.10) válido para transições de fase contínuas e sabendo que ψ no estado normal é 0 e ψ no estado supercondutor é diferente de 0, isso garante que $|\psi|^2$ na borda (entre o estado normal e o estado supercondutor) seja muito pequeno, ou seja, $|\psi|^2 \ll 1$ desacoplando a primeira e segunda equação de Ginzburg-Landau e dando origem a equação linearizada de Ginzburg-Landau.

$$-\left(\vec{\nabla} - \frac{i2\pi}{\phi_0}\vec{A}\right)^2 = \frac{\psi}{\xi^2(T)}. \quad (3.33)$$

Como a equação obtida é idêntica a equação de Schrodinger para uma partícula livre, isto nos permite que vários métodos e soluções da mecânica quântica sejam aplicadas à supercondutividade. Devemos notar que esta equação linear é válida para campos magnéticos da ordem do segundo campo crítico (B_{c2}) para um supercondutor do tipo 2.

O diagrama de fases de um supercondutor do tipo 2 (Figura 10) destaca a região de validade da equação linearizada de Ginzburg-Landau, descrita pelo pontilhado em vermelho.

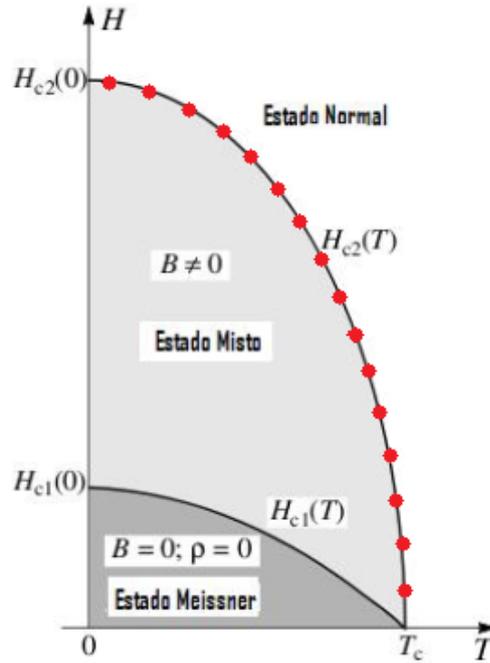


Figura 10 – Diagrama de fases de um supercondutor tipo 2.[20]

3.4 Nucleação supercondutora em amostra infinita: H_{c2}

A equação de Ginzburg–Landau linearizada permite resolver diversos problemas de nucleação do parâmetro de ordem em amostras supercondutoras. Vamos primeiro resolver o problema da nucleação da supercondutividade em uma amostra global na presença de um campo H ao longo do eixo z , ou seja, $\vec{H} = H_0\hat{z}$ e um potencial vetor convenientemente escolhido na aproximação de calibre de London,[11]

$$A_y = Hx. \quad (3.34)$$

Para calcularmos o parâmetro de ordem ψ , vamos expandir o termo esquerdo da equação (3.33):

$$\left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\phi_0} Hx \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\phi_0} \right)^2 x^2 \right] \psi = \frac{\psi}{\xi^2(T)}. \quad (3.35)$$

Como o potencial efetivo depende apenas de x , é razoável procurar uma solução da forma,

$$\psi = f(x)e^{i(k_y y + k_z z)} \quad (3.36)$$

e substituindo (3.36) em (3.35), temos:

$$-f''(x) + \left(\frac{2\pi H}{\phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 f(x) = \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x) \quad (3.37)$$

onde $x_0 = k_y \phi_0 / 2\pi H$. Multiplicando esta equação por $\hbar^2 / 2m^*$,

$$\frac{-\hbar^2}{2m^*} f''(x) + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{2\pi \hbar H}{\phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 f(x) = \frac{-\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x). \quad (3.38)$$

Comparando a equação (3.38) com a equação de Schrodinger para o oscilador harmônico de massa m^* notamos que a frequência fundamental dada pela equação

$$\omega = \frac{1}{m^*} \frac{2\pi\hbar H_0}{\phi_0} \quad (3.39)$$

da mesma maneira, igualando a energia representada pela equação do oscilador harmônico com a energia da equação de Schrodinger (3.38),

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - k_z^2 \right) \\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \left(\frac{1}{m^*} \frac{2\pi\hbar H_0}{\phi_0} \right) &= \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - k_z^2 \right) \\ (2n+1) \left(\frac{2\pi}{\phi_0} \right) H_0 &= \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - k_z^2 \right) \\ H_0 &= \frac{\phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - k_z^2 \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Notamos que o menor autovalor de energia corresponde a $n = 0$ e que, ao longo do eixo z , não temos variações do parâmetro de ordem ($k_z = 0$). Assim, conseqüentemente, o campo crítico da transição supercondutora é dado por,

$$H_{c2}(T) = \frac{\phi_0}{2\pi\xi^2(T)} \quad (3.41)$$

levando em conta a dependência com a temperatura do comprimento de coerência representada na equação (3.29),

$$\begin{aligned} H_{c2}(T) &= \frac{\phi_0}{2\pi\xi_0^2(T)} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \\ H_{c2}(T) &= H_{c20} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

utilizando a temperatura reduzida $t = \frac{T}{T_c}$,

$$H_{c2}(T) = H_{c20} (1 - t). \quad (3.43)$$

3.5 Nucleação supercondutora em superfícies: H_{c3}

Como os supercondutores reais são finitos em tamanho, para realizarmos o estudo deste tipo de estrutura levamos em conta condições de borda, levando em consideração o comportamento

próximo às superfícies. [1] Quando temos um campo H_{c3} paralelo à superfície e maior que o campo normal a superfície H_{c2} , a relação entre H_{c3} e H_{c2} é dada através da equação,

$$H_{c3} = 1,695H_{c2}. \quad (3.44)$$

Para um campo $H_{c2} < H < H_{c3}$, existe um revestimento supercondutor em torno da amostra de espessura aproximada de $\xi(T)$, sendo $\psi \rightarrow 0$ no interior da amostra. Como $\xi(T)$ é muito pequeno com relação às dimensões da amostra e a superfície estudada é grande o suficiente para permitir que a nucleação em torno dela, a formação de um núcleo supercondutor torna-se apropriada quando H for paralelo à superfície.[21]

Vamos analisar o caso em que o campo é aplicado paralelo à superfície da amostra localizada no plano yz . A amostra supercondutora ocupando a metade do espaço ($x > 0$), enquanto que em $x < 0$ existe o vácuo ou um isolante. Na borda deve ser levada em consideração as condições de contorno apropriadas à equação que descreve a nucleação supercondutora, assim, escrevemos:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{2\pi i}{\phi_0} \vec{A} \right) \psi \right]_x = 0 \quad (3.45)$$

uma conveniente escolha do potencial vetor, $A_x = A_z = 0$, e $A_y = Hx$ (calibre de London), encontra-se a solução geral do tipo,

$$\psi = f(x)e^{ik_y y} \quad (3.46)$$

onde,

$$\frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0. \quad (3.47)$$

Utilizando a solução (3.46) juntamente com a condição de contorno (3.47), obtém-se a equação de Schrodinger para um oscilador harmônico de frequência angular $\omega = 2\pi\hbar H/m\phi_0$, com o potencial mínimo encontrado em x_0 . [1, 22] Assim,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{2m} \left(x_0 - \frac{2\pi i}{\phi_0} Hx \right)^2 f = -\alpha f \quad (3.48)$$

o que nos mostra qualitativamente que a função de onda é centralizada na região de dimensão $\xi(T)$ ao redor de $x_0 = k_y \phi_0 / 2\pi H$.

Para achar a solução de (3.48) vamos usar a função f na solução geral (3.46) do tipo,

$$f = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\xi(T)} \right)^2 \right]. \quad (3.49)$$

Notamos que a solução (3.49) satisfaz a equação (3.48) com os autovalores similares aos encontrados para nucleação na amostra infinita do supercondutor $\alpha = -\pi\hbar H/m\phi_0$ para valores extremos

do parâmetro x_0 , $x_0 \gg \xi(T)$ ou $x_0 = 0$. Para valores de x_0 intermediários, os autovalores são menores que α . [11]

Podemos observar isto considerando uma equação de Schrodinger cujo potencial é dado como:

$$V(x) = \frac{1}{m} \left(\frac{2\pi\hbar H}{\phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 \quad (3.50)$$

onde esse potencial é uma função par, ou seja,

$$V(x) = V(-x) \quad (3.51)$$

sendo (3.50) válida para $(x > 0)$ e (3.51) para $(x < 0)$. O potencial (3.50) é simétrico e tem como solução uma função simétrica e que satisfaz a condição de borda conforme mostrado na Figura 11, onde é possível ver o comportamento do potencial efetivo para nucleação em um material para o campo H_{c2} e H_{c3} .

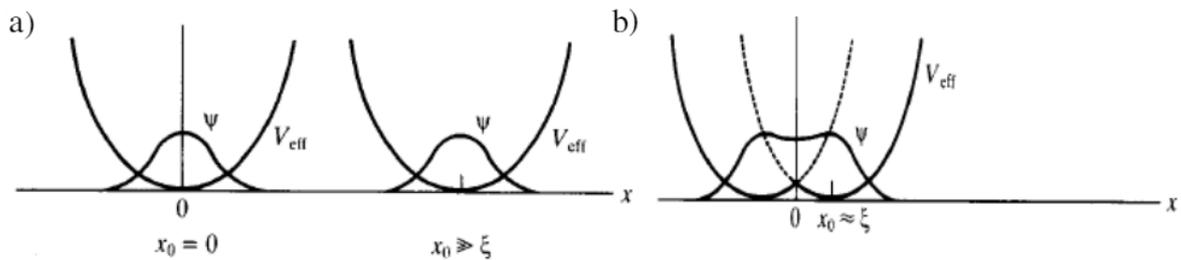


Figura 11 – Figura a) potencial efetivo para nucleação dentro do material para um campo H_{c2} .
 Figura b) potencial efetivo para nucleação dentro do material para um campo H_{c3} .
 [1]

4 Método das Diferenças Finitas e funcionamento do algoritmo construído no Matlab

4.1 O Método das Diferenças Finitas

Os Métodos Numéricos são extremamente importantes para a obtenção de resultados em problemas matemáticos com uma alta complexidade, o qual torna o problema intratável analiticamente. Nesta dissertação faremos uma análise do fenômeno da nucleação da supercondutividade a partir da equação linearizada de Ginzburg-Landau (3.33), o que levará a uma equação diferencial muito difícil de ser resolvida analiticamente, visando assim encontrarmos uma solução por método numérico. Para isso, será escolhido o método das diferenças finitas que possui uma discretização do domínio do problema proposto como a sua principal característica. [24, 23] Sendo assim, o espaço da variável independente é discretizado substituindo as derivadas por diferenças finitas em cada uma das partições e, dessa forma, a equação diferencial que era difícil de ser resolvida analiticamente é substituída por uma série de equações algébricas simples nos diferentes pontos da partição do domínio de estudo.[11]

Para discutirmos este método vamos considerar um domínio discretizado linear dividido em N partições ou malhas igualmente espaçadas, onde $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ são os pontos quantizados, como mostrado na Figura 12.

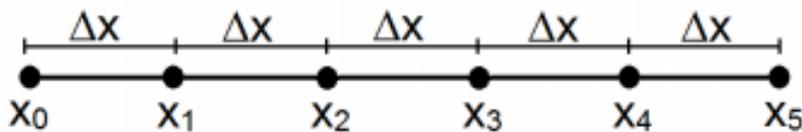


Figura 12 – Domínio discretizado em intervalos igualmente espaçados. [25]

Onde $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ no qual $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Para definirmos as derivadas nos pontos do domínio discretizado utilizaremos as aproximações em diferenças finitas. Estas aproximações em diferenças finitas coincidem com as derivadas no limite de $\Delta x \rightarrow 0$. Assim, definiremos abaixo, a diferença finita adiantada,

$$u_x|_i = u_x(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i)}{\Delta x}$$

$$u_x|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

diferença finita atrasada,

$$u_x|_i = u_x(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_i) - u(x_i - \Delta x)}{\Delta x}$$

$$u_x|_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4.3)$$

$$(4.4)$$

e diferença finita centrada,

$$u_x|_i = u_x(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x}$$

$$u_x|_i \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (4.5)$$

Onde $u_x|_i = u_x(x_i)$ representa a derivada no ponto x_i . Podemos obter expressões similares às anteriores aproximando as segundas derivadas em pontos específicos, e assim sucessivamente para outras derivadas de ordem maior. Para isso, desenvolvemos uma função em série de Taylor na vizinhança de um ponto qualquer:

$$u_{i+1} = u_i + u_x|_i \Delta x + u_{xx} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots + \frac{d^n u}{dx^n}|_i \frac{\Delta x^n}{n!} + \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}}(x^*) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (4.6)$$

Com esta aproximação obtemos duas expressões,

$$u_{i+1} = u_i + \Delta x u_x|_i + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}|_i + \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}|_i + \dots \quad (4.7)$$

$$u_{i-1} = u_i - \Delta x u_x|_i + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}|_i - \frac{\Delta x^3}{6} u_{xxx}|_i + \dots \quad (4.8)$$

a partir dessas duas expressões chegamos respectivamente a (4.1), (4.3) e (4.5), da mesma maneira obtemos outras aproximações de ordem maior, assim, a segunda derivada pode ser aproximada por:

$$u_{xx}|_i \approx \frac{u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (4.9)$$

estas aproximações em diferenças finitas nos permite resolver numericamente equações diferenciais de interesse. Aplicando o método das diferenças finitas conseguiremos um sistema de equações algébricas cuja solução representa a solução da equação diferencial aproximada em cada ponto da partição da malha linear.[11]

Para compreendermos de maneira mais clara esse processo, vamos analisar o exemplo a seguir. Considere a equação com a estrutura da equação de Schroedinger a ser resolvida pelo método das diferenças finitas. Utilizaremos esse exemplo pois posteriormente veremos que a equação linearizada de Ginzburg-Landau possui a mesma estrutura. Assim, temos que a equação do nosso exemplo é dada por,

$$-f''(x) + V(x)f(x) = Ef(x). \quad (4.10)$$

Vamos considerar o intervalo particionado em n partes com o mesmo comprimento Δx . O ponto no extremo esquerdo da partição, x_0 , corresponde ao mínimo do intervalo, enquanto o ponto extremo direito máximo, x_n , representa o extremo direito do intervalo.

Utilizando as aproximações das diferenças finitas aplicando as aproximações para cada ponto quantizado, substituindo a equação (4.9) em (4.10) obtemos, por exemplo, para o ponto n : [11]

$$-\frac{f(x_{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{f(x_{n-1})}{\Delta x^2} + \frac{2f(x_n)}{\Delta x^2} + V(x_n)f(x_n) = Ef(x_n). \quad (4.11)$$

As equações obtidas da mesma maneira da equação anterior, podem ser estendidas a toda a malha, fornecendo uma equação matricial que pode ser resolvida numericamente. Introduzindo as condições de bordas podemos assim solucionar a equação (4.10). Por exemplo, para a equação anterior, utilizando as condições de bordas periódicas e escrevendo de forma matricial obtemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Notamos assim que a resolução desta equação matricial fornece os autovalores e autovetores correspondentes a equação (4.10) tomada como exemplo. Esta mesma estrutura será utilizada para resolução dos problemas desta tese como veremos no capítulo a seguir.

4.2 Algoritmo construído no Matlab

Na seção anterior vimos como é caracterizado o método das diferenças finitas. Nesta seção veremos o funcionamento do algoritmo construído no Matlab, com base no método das diferenças

finitas, para o estudo da nucleação supercondutora. A estrutura deste algoritmo pode ser vista na Figura 13.

```

1  clear all;
2  close all;
3  clc;
4
5  xmin = -30;
6  xmax = 30;
7  stepx = 0.1;
8  x = xmin:stepx:xmax;% x representa x' na tese
9  ncols = length(x);
10 delta = stepx^2;
11
12 h = [0.1:0.1:1.0];
13 x0s = [-30:0.1:30];
14
15 Tc = zeros(length(x0s),1);
16 Autovetores = zeros(length(x),length(x0s));
17
18 for m=1:length(x0s)
19     x0 = x0s(m);
20
21     A = zeros(ncols);
22     for n=2:ncols-1
23         A(n,n-1) = -1/delta;
24         A(n,n) = (2/delta) + (h*x(n)-x0)^2;
25         A(n,n+1) = -1/delta;
26     end
27     A(1,1) = (2/delta) + (h*x(1)-x0)^2;
28     A(1,2) = -1/delta;
29     A(1,ncols) = -1/delta;%condição periodica de borda
30     A(ncols,ncols-1) = -1/delta;
31     A(ncols,ncols) = (2/delta) + (h*x(ncols)-x0)^2;
32     A(ncols,1) = -1/delta;%condição periodica de borda
33
34     [autoV,eigValues] = eig(A);%representa uma matriz onde os elementos diagonais são autovalores
35
36     %calculando os autovalores
37     Aval = [];
38     for nl=1:ncols
39         Aval = vertcat(Aval,eigValues(nl,nl));
40     end
41
42     menorAV = min(Aval);
43     posmenorAV = find(Aval(:,1) == menorAV);
44     %autovetor = V(posmenorAV,:);
45     Tc(m) = 1 - menorAV;
46     disp([x0 Tc(m)]);
47     %Autovetores(:,m) = autoV(:,posmenorAV);
48
49 end
50
51
52 maxTc = max(vpa(Tc(:),10));
53 fprintf('The maximum Tc is %f10 \n',maxTc);
54 indTc = find(Tc(:)==maxTc);
55
56 figure;
57 plot(x(:),Autovetores(:,indTc),'-r');

```

Figura 13 – Algoritmo construído no Matlab para o estudo da nucleação supercondutora. [25]

Os valores dos intervalos x , x_0 e h são fixados de maneira que ele construa a equação (4.11) de maneira matricial. Assim, para cada valor de h , os valores de x e x_0 são variados de maneira a gerar as matrizes resultantes, culminando na obtenção dos autovalores e autovetores. Desta

forma o maior autovalor $(1 - t)$ é dado pelo menor valor de $t = T/T_c$, ou seja, a temperatura crítica equivalente à nucleação da supercondutividade.

Desta maneira os gráficos de nucleação podem ser montados com os parâmetros captados pelo algoritmo, nos fornecendo as informações necessárias para o estudo dos problemas da tese. Podemos visualizar na Figura 14 o fluxograma representando o funcionamento do algoritmo.

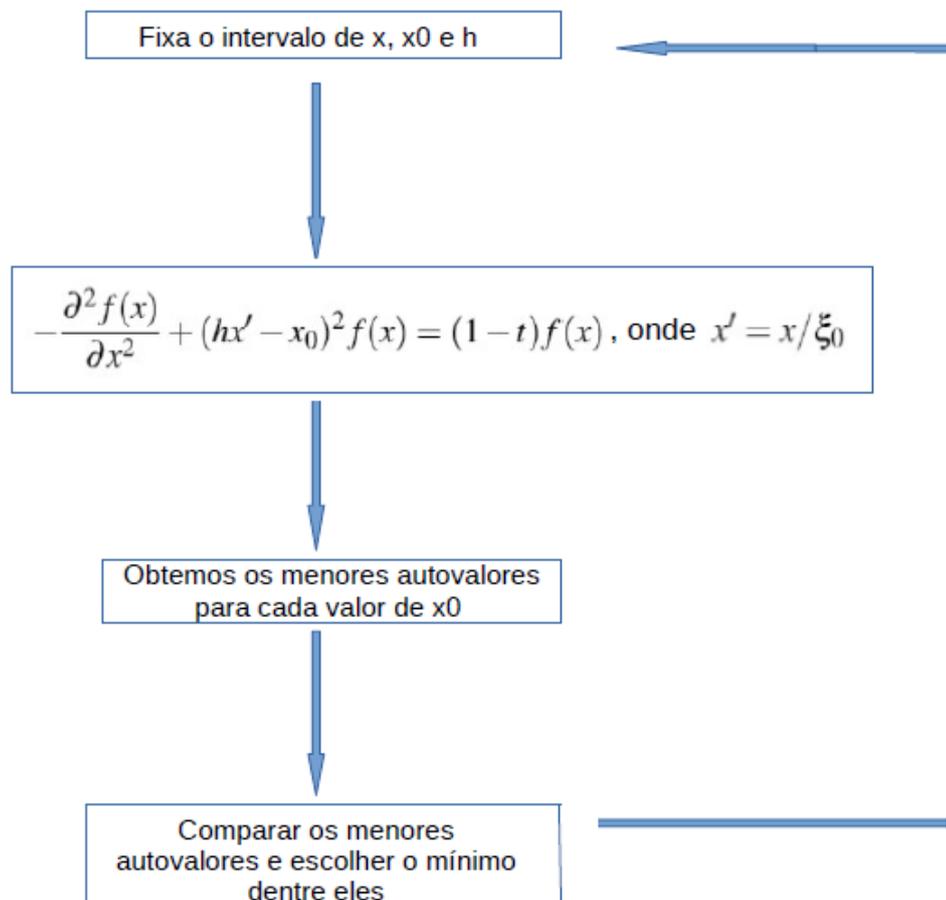


Figura 14 – Organograma do algoritmo construído no Matlab para o estudo da nucleação supercondutora. [25]

5 Resultados e Discussões

5.1 Estudo de filme fino híbrido supercondutor

O sistema aqui abordado é um sistema híbrido supercondutor/ferromagneto (S/F), em que um filme fino supercondutor do tipo 2, está depositado em cima de um filme ferromagnético espesso ($D \gg d$), com magnetização uniaxial uniforme. Vamos desprezar as variações espaciais do parâmetro de ordem supercondutor ao longo do eixo z . Ambos os sistemas estão separados por uma camada desprezível e isolante. Podemos observar a configuração aqui explicada na Figura 15, onde o filme fino supercondutor é a região cinza e o filme ferromagnético espesso é a parte branca.

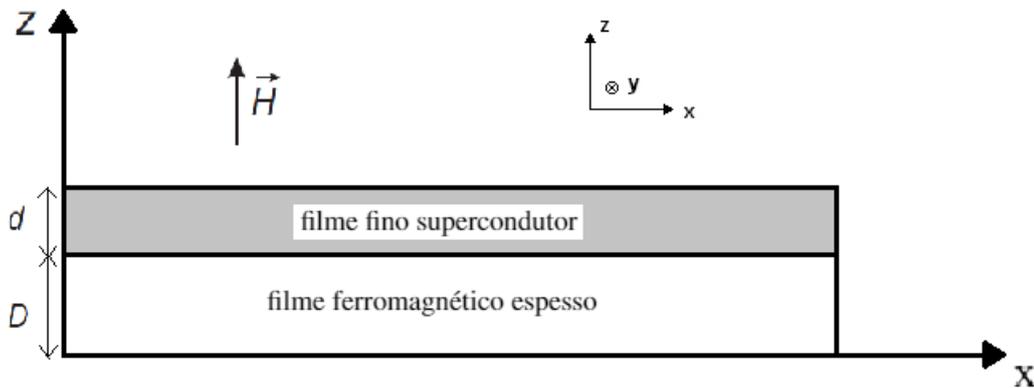


Figura 15 – Sistema híbrido supercondutor/ferromagneto.

Iremos fazer o estudo deste sistema num caso ideal, ou seja, são desprezados os efeitos de distorção do campo magnético nas bordas do sistema, possíveis influências do supercondutor sobre a estrutura magnética. Também abordaremos, de maneira aprofundada, os problemas de nucleação supercondutora com e sem condições de borda estudados pelo Thiago Bispo Martins na referência [11]. Além disso, incluiremos novos resultados relacionados a custos computacionais referentes a valores de parâmetros utilizados no algoritmo do MATLAB, como também faremos variações desses problemas afim de retirarmos resultados mais aprofundados relacionados ao estudo da nucleação supercondutora.

5.1.1 Construção algébrica para solução numérica da Equação de Ginzburg-Landau

Nesta subseção utilizaremos o método das diferenças finitas aplicado a equação linearizada de Ginzburg-Landau para conseguir resultados relevantes quanto ao estudo da estrutura representada

na Figura 15, comparando os resultados numéricos com os padrões esperados para cada situação física que estão na referência [11].

A equação linearizada de Ginzburg-Landau é dada por,

$$\begin{aligned} -\left(\vec{\nabla} - \frac{2\pi i}{\phi_0} Hx\right)^2 \psi(x,y) &= \frac{\psi(x,y)}{\xi^2(T)} \\ \left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\phi_0} Hx \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\phi_0}\right)^2 x^2\right] \psi(x,y) &= \frac{\psi(x,y)}{\xi^2(T)}. \end{aligned}$$

Escolhendo o calibre de London, o potencial magnético pode ser expresso por $\vec{A} = Hx\hat{y}$. Vamos procurar uma solução que seja o produto entre uma função dependente de x e uma onda plana na direção y . Assim, vamos utilizar a solução:

$$\psi(x,y) = f(x)e^{iky}. \quad (5.1)$$

Dessa maneira a equação linearizada de Ginzburg-Landau fica,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{i4\pi A_y}{\phi_0} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{4\pi^2 A_y^2}{\phi_0^2}\right) f(x)e^{iky} &= \frac{f(x)e^{iky}}{\xi^2(T)} \\ -\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left(k - \frac{2\pi A_y}{\phi_0}\right)^2 f(x) &= \frac{f(x)}{\xi^2(T)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

usando a dependência do comprimento de coerência com a temperatura segundo a teoria de Ginzburg-Landau, $\xi(T) = \xi_0/\sqrt{(1-t)}$, onde $t = T/T_c$, obtemos

$$-\xi_0^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \xi_0 \left(k - \frac{2\pi A_y}{\phi_0}\right)^2 f(x) = (1-t)f(x) \quad (5.3)$$

como $A_y = B_0x$, temos que $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0\hat{z}$, assim escrevemos,

$$-\xi_0^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left(\xi_0 k - \frac{2\pi \xi_0^2 B_0 x}{\phi_0 \xi_0}\right)^2 f(x) = (1-t)f(x) \quad (5.4)$$

e definindo $x_0 = k\xi_0$ e lembrando que $B_{c20} = \phi_0/2\pi\xi_0^2$ vamos obter,

$$-\xi_0^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left(x_0 - \frac{B_0 x_0}{B_{c20} \xi_0}\right)^2 f(x) = (1-t)f(x). \quad (5.5)$$

Finalmente, definindo uma nova variável normalizada como $(x', y', z') = \left(\frac{x}{\xi_0}, \frac{y}{\xi_0}, \frac{z}{\xi_0} \right)$ e um campo magnético normalizado como $h = B_0/B_{c20}$, a equação ficará,

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x'^2} + (hx' - x_0)^2 f(x) = (1 - t)f(x) \quad (5.6)$$

obtendo assim uma equação do tipo schrodinger na variável normalizada $x' = x/\xi_0$, com potencial efetivo dado por $V(x') = (hx' - x_0)^2$ e com autovalores $(1 - t)$. Para resolução da equação (5.6), foi construído um algoritmo no MATLAB para encontrar o valor de x_0 que fornece o menor autovalor $(1 - t)$ para um valor de campo h fixo. O algoritmo construído e explicado no capítulo 4 será usado para o estudo de diferentes situações físicas nesta dissertação.

5.1.2 Estudo unidimensional sem condições de bordas de Ginzburg-Landau

Esta situação inicial representa o estudo da nucleação da supercondutividade para um modelo de filme infinito. Sabemos que $B_{c2}(T) = \phi_0/2\pi\xi^2(T) = B_{c2}(0)(1 - T/T_c)$, é esperado que a nucleação supercondutora, para a amostra estudada neste tópico, deva corresponder com o valor do segundo campo crítico. Assim, como a equação acima tem dependência do comprimento de coerência, escrevemos que $B_{c2}/B_{c2}(0) = 1 - (T/T_c)$ e $h = B_{c2}/B_{c2}(0)$ e, conseqüentemente, $h = (1 - t)$. [11]

Utilizando o algoritmo discutido anteriormente construído com base no método das diferenças finitas, conseguimos os valores de x_0 , de t , do campo crítico h e dos autovalores $(1 - t)$, mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Resultados obtidos pelo algoritmo construído no MATLAB sem condições de bordas periódicas.

h	x0	t=T/Tc	1 - t
0,2	-1,60	0,80000	0,20000
0,4	-3,95	0,60000	0,40000
0,6	-6,40	0,40000	0,60000
0,8	-9,05	0,20000	0,80000
1,0	-11,65	0,00001	0,99999

No estudo deste problema sem condições de bordas de Ginzburg-Landau observamos que a nucleação supercondutora na borda não é relevante, sendo a nucleação esperada em H_{c2} e sem localização bem definida. Notamos que os valores obtidos na solução da equação de Ginzburg-Landau são condizentes com a relação $h = (1 - t)$ discutida no início da seção, ou seja, para esta

situação o valor de h deve ser justamente o autovalor procurado. Na Figura 16 observamos o comportamento da nucleação do parâmetro de ordem supercondutor para este caso estudado.

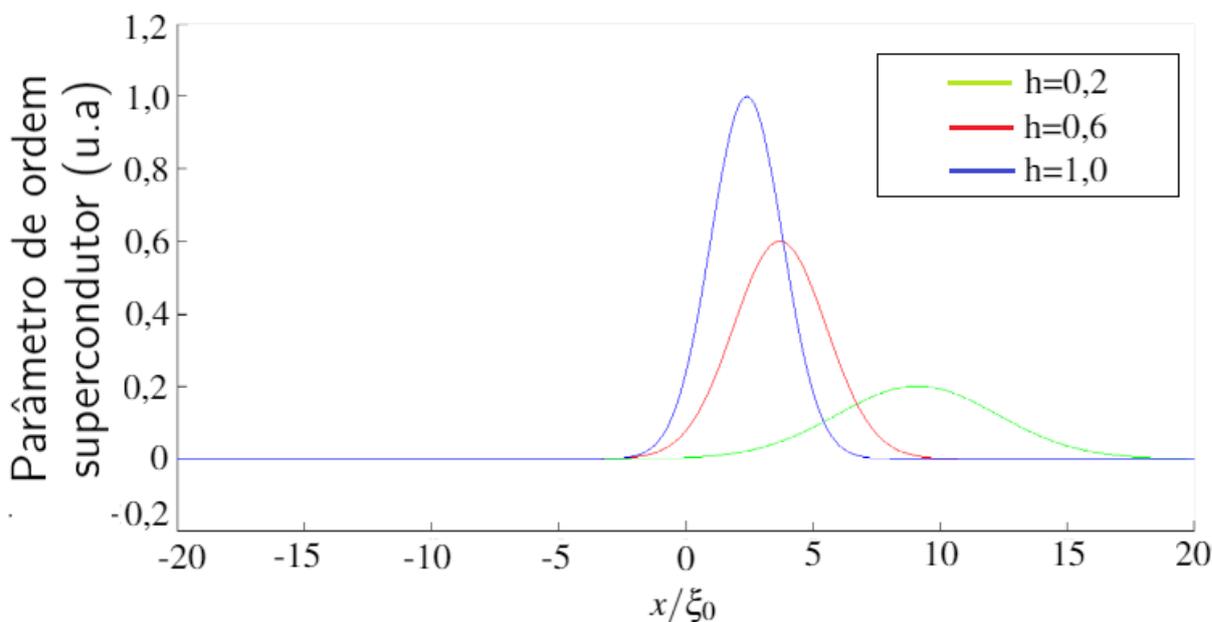


Figura 16 – Nucleação supercondutora do parâmetro de ordem sem condições de borda periódicas.

Estes dados fornecem os aspectos qualitativos do fenômeno da nucleação como posição do parâmetro de ordem e largura do mesmo, notamos também que não conseguimos fazer uma previsão do local específico em que o núcleo supercondutor irá se encontrar por se tratar de uma amostra infinita. Notamos também que quanto maior o valor da temperatura crítica maior será o valor do campo h para esta temperatura e vice versa.

Esta relação pode ser observada de maneira clara na Figura 16 pela configuração de cada curva. Dessa maneira, a medida que o valor de h aumenta chegando até o seu máximo a largura do parâmetro de ordem diminui, assim, por exemplo, a curva de $h = 1,0$ é bem mais localizada do que a curva para $h = 0,2$ devido a grande diferença do valor da temperatura crítica para cada valor de h . [11]

Podemos visualizar experimentalmente este estudo na referência [12], onde nela foi estudada a influência do campo magnético não homogêneo na magneto-resistência de filmes finos de Al , utilizados em diferentes sistemas híbridos supercondutores ferromagnéticos. A Figura 17 mostra o diagrama de fases para um sistema híbrido com magnetização para fora do plano, a curva preta significa ausência de domínios magnéticos e mostra o comportamento original estudado nesta seção para um filme com magnetização homogênea.

Para o estudo de nucleação feito na dissertação é válida a análise dos parâmetros utilizados no algoritmo construído no MATLAB. Vamos analisar se o tamanho do passo Δx influencia de alguma maneira na obtenção dos resultados. Assim, foi iniciado o algoritmo para um valor fixo de $h = 0,1$, sendo $L[-20, 20]$ o tamanho da amostra escolhido, ou seja $-20 < x < 20$, e com Δx

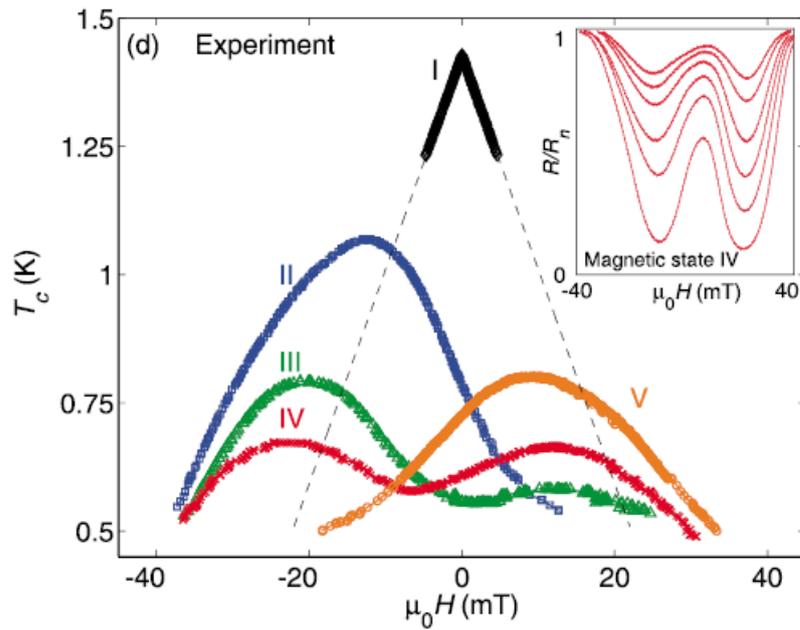


Figura 17 – Diagrama de fase para o sistema híbrido estudado experimentalmente.[12]

variando nos valores 0,4; 0,1; 0,05 e 0,01. Os resultados obtidos estão representados no gráfico da Figura 18.

No gráfico da Figura 18 constatamos que quanto menor o passo Δx , menor é a altura do pico da curva, o que é de se esperar pelo fato de se ler mais pontos com um passo menor. Porém, deve-se notar que o efeito de uma possível alteração na leitura do resultado no gráfico é nulo, já que o efeito físico observado não irá se modificar devido ao tamanho do passo de x escolhido.

Vale salientar que para o método das diferenças finitas utilizado aqui no trabalho, não é interessante escolher Δx muito grande, pois contraria a ideia do método e pode acabar levando até mesmo em um erro do mecanismo criado no código, e consequentemente, poderia acabar distorcendo os resultados. Por outro lado, não é interessante utilizarmos um passo de x muito pequeno, já que se deve levar em conta o custo computacional e de tempo para rodar o código.

Observamos também como a temperatura crítica varia com relação ao tamanho da amostra, para essa análise, modificamos a largura L da mesma. Assim, no algoritmo construído no MATLAB, foram variados os valores de L/ξ_0 . As dependências de T/T_c com L/ξ_0 e x/ξ_0 estão representadas na Figura 19 (a) e (b) respectivamente, para $h = 0,1$ e $x = 0,01$, onde T/T_c se aproxima de 0,9 para $L/\xi_0 > 6$.

Observamos que surgiu um limite para o crescimento do gráfico em $t = T/T_c = 0,9$ no caso aqui abordado onde $h = 0,1$. Se lembrarmos, $h = 1 - t$, dessa maneira dependendo do valor de h saberemos qual será o comportamento do gráfico. Assim, por exemplo, se fosse escolhido um $h = 0,4$ o valor de $t = 0,6$, ou seja, o limite de crescimento do gráfico estaria localizada em $t = 0,6$, pois é o maior valor de t para o campo $h = 0,4$ que a amostra pode assumir.

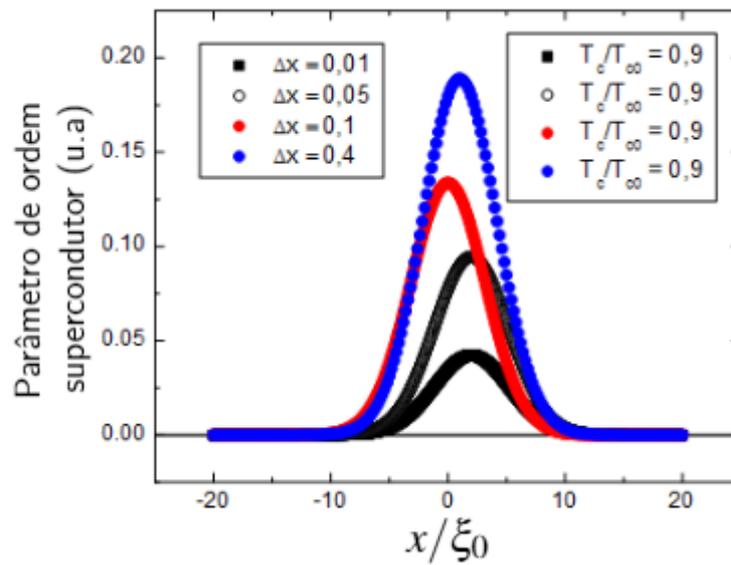


Figura 18 – Análise da variação do passo Δx .

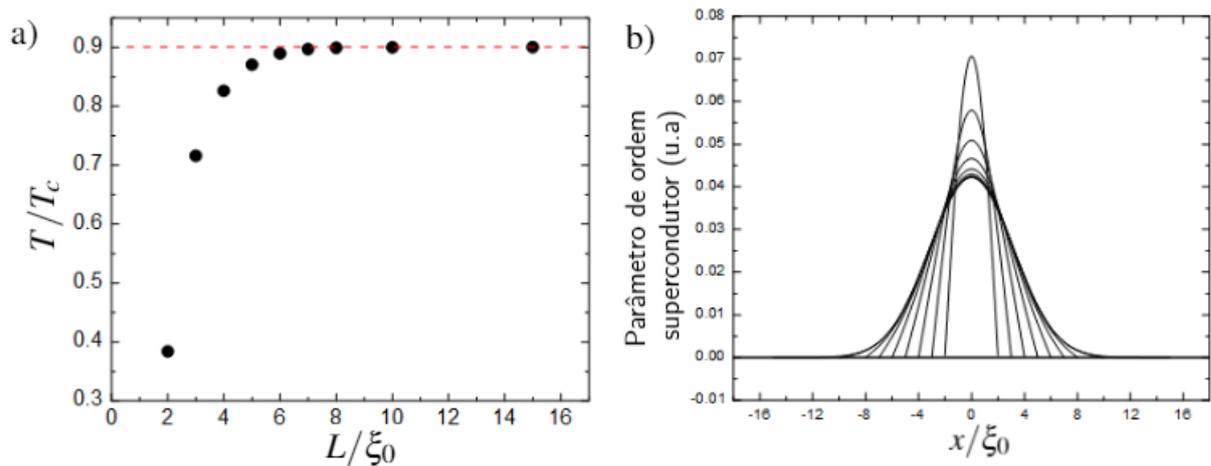


Figura 19 – a) Variação da temperatura crítica com relação ao tamanho da amostra. b) Nucleação supercondutora do parâmetro de ordem para $h = 0, 1$.

5.1.3 Estudo unidimensional com condições de bordas de Ginzburg-Landau

Vamos analisar agora o mesmo problema de nucleação levando em conta as condições de borda de Ginzburg-Landau, ou seja, levando em consideração a inexistência de fluxo de corrente através da superfície estudada. Dessa forma, essas condições de borda introduzem no problema anterior os possíveis efeitos de tamanho finito da amostra estudada. Para esta situação, a nucleação na amostra acontece no terceiro campo crítico H_{c3} , diferentemente do caso anterior que ocorria no segundo campo crítico H_{c2} . Para fazermos a construção deste problema precisamos aplicar as condições de borda de Ginzburg-Landau na equação linearizada de Ginzburg-Landau. Assim, as condições de borda podem ser escritas como:[1, 11]

$$\left(-i\vec{\nabla} - \frac{2\pi\vec{A}}{\phi_0} \right) \hat{n}\psi(x, y, z) = 0. \quad (5.7)$$

Quando analisamos estas condições para um filme retangular com espessura muito menor que a dimensão lateral (infinita) e o comprimento finito de tamanho $2L$ na direção x , temos:

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} - i\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2\pi A_y}{\phi_0} \right) \psi &= 0 \\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{-L} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_L = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Vale salientar também que as condições de contorno anteriores não são interferidas pelas condições referentes ao eixo z , já que estas últimas não inserem nenhuma mudança significativa do ponto de vista físico no problema, pois o campo magnético e o parâmetro de ordem são constantes ao longo do eixo z . Dessa maneira, utilizando as condições de calibre de London, as condições de borda vão ficar,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{-L} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_L = 0. \quad (5.9)$$

As condições de borda descritas na equação (5.9) modificam diretamente o problema na construção da matriz Hamiltoniana por meio do método das diferenças finitas. Sendo assim, utilizando o método das diferenças finitas e com a aplicação da condição de borda descrita em (5.9), obtemos,

$$u_{i+1} = u_i + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}|_i + \dots \quad (5.10)$$

$$u_{i-1} = u_i + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}|_i - \dots \quad (5.11)$$

repetindo os mesmos cálculos introduzindo as condições de borda (5.9), podemos escrever matricialmente, onde $V(x') = (hx' - x_0)^2$:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{2}{\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V & -\frac{1}{\Delta x^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -\frac{2}{\Delta x^2} & \frac{2}{\Delta x^2} + V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

O mesmo algoritmo discutido anteriormente no Capítulo 4 foi executado para encontrar os autovalores menores para os diferentes valores de x_0 . A tabela 2 mostra os resultados obtidos para os os valores de x_0 , das temperatura reduzida t , do campo crítico h e dos autovalores $(1 - t)$.

Tabela 2 – Resultados obtidos pelo algoritmo construído no MATLAB com condições de bordas de Ginzburg - Landau.

h	x_0	$t=T/T_c$	$1 - t$
0,2	3,70	0,8808	0,1192
0,4	7,50	0,7637	0,2363
0,6	11,40	0,6457	0,3543
0,8	15,30	0,5273	0,4727
1,0	19,20	0,4086	0,5914

Vamos fazer uma análise teórica com a mesma abordagem feita na subseção anterior, tentando encontrar a mesma relação de igualdade entre h e o autovalor $(1 - t)$. Porém, de acordo com a Tabela 2, para o caso abordado nesta seção com condições de borda de Ginzburg-Landau, o resultado obtido não condiz com a igualdade $h = 1 - t$. Todavia, notamos uma relação de importante relevância no valor da razão $R = h/1 - t$. Para qualquer valor de h ,

$$R = \frac{h}{1 - t} \approx 1,69. \quad (5.12)$$

Dessa maneira, considerando uma temperatura fixa T , observamos a partir da relação R , que a nucleação ocorre para um campo específico o qual chamamos de h_{nuc} o qual é dado por $h_{nuc} = B_{nuc}/B_{c2}(0)$. Segundo o exposto anteriormente escrevemos que,

$$R = \frac{B_{nuc}/B_{c2}(0)}{1 - t} \approx 1,69. \quad (5.13)$$

De acordo com a expressão acima $B_{nuc} \approx 1,69B_{c2}(T)$, ou seja, concluímos que $B_{nuc} = B_{c3}$, onde B_{c3} corresponde ao terceiro campo crítico. Verificamos assim que o método das diferenças finitas, aplicado a problemas com condições de borda Ginzburg-Landau, é válido para obter o terceiro campo crítico da amostra, onde há nucleação do parâmetro de ordem supercondutor na borda. Este resultado coincide com o da referência.[11]

5.2 Estrutura magnética com magnetização steplike

Mais um estudo importante de ser abordado é o de uma estrutura de um sistema híbrido supercondutor ferromagnético (S/F), constituído de uma camada supercondutora muito fina (o domínio supercondutor, d , é muito menor que λ) depositada em cima de um filme ferromagnético espesso

(o domínio ferromagnético, D , é muito maior que d), com magnetização uniaxial perpendicular ao plano, em que a camada ferromagnética apresenta uma magnetização steplike.

Neste caso, a camada ferromagnética apresentará em sua estrutura dois domínios com duas magnetizações com mesma direção e sentidos opostos, onde esses dois domínios serão divididos por uma barreira de tamanho w em que ($w \ll D$).[29][30]

Devemos notar que nessa estrutura steplike a camada magnética produz uma magnetização uniaxial $M_z(x) = M_0 \text{sgn}(x)$ ao longo do eixo z , lembrando que o tamanho da amostra na dimensão lateral é suposto infinito. Iremos abordar o caso ideal desta situação, ou seja, são desprezados efeitos de distorção do campo magnético nas bordas do sistema, efeitos de proximidade, largura da parede de domínio, bem como possíveis influências do supercondutor sobre a estrutura magnética são desprezadas. Observamos a configuração aqui explicada na Figura 20.

Este problema foi abordado por Aladyshkin na referência [30], onde ele faz este estudo com base em uma abordagem fenomenológica de Ginzburg-Landau, investigando o problema de nucleação de parâmetros de ordem em sistemas híbridos supercondutor ferromagnético com uma estrutura de domínio em um campo magnético externo aplicado. Vamos aqui nesta seção obter os mesmos resultados de Aladyshkin em relação a estrutura híbrida com magnetização steplike, fazendo também variações de aumento de domínios magnéticos e analisando o efeito físico acarretado por esta alteração.

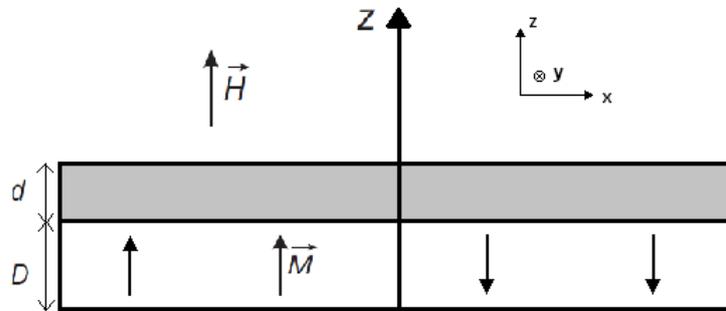


Figura 20 – Estrutura magnética com magnetização steplike para dois domínios magnéticos.

5.2.1 Solução analítica para estrutura magnética com magnetização steplike com dois domínios

Considerando um campo magnético externo aplicado ao longo do eixo z , o potencial vetor magnético no calibre de London é $\vec{A} = (Bx + B_0|x|)\hat{y}$, a equação linearizada de Ginzburg-Landau é dada por,

$$\left(-i\vec{\nabla} - \frac{2\pi\vec{A}}{\phi_0} \right)^2 \psi = \frac{\psi}{\xi^2(T)}.$$

Utilizando o calibre de London $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ com o potencial vetor dependente de x na direção y , vamos discretizar a Hamiltoniana que será encontrada na nucleação steplike para uma função de onda genérica composta pelo produto de uma função dependente de x com uma função dependente de y , ou seja, $\psi = f(x)e^{ik_y y}$, de maneira que possamos resolver numericamente. Dito isto:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{4\pi i B_0 x}{\phi_0} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi B_0 x}{\phi_0} \right)^2 \right] f(x)e^{ik_y y} = \frac{f(x)e^{ik_y y}}{\xi^2(T)}$$

$$-\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + f(x)k_y^2 - \frac{4\pi B_0 x}{\phi_0} k_y f(x) + \left(\frac{2\pi B_0 x}{\phi_0} \right)^2 f(x) = \frac{f(x)}{\xi^2(T)}$$

e sabendo que $\xi^2(T) = \xi_0^2/(1-t)$, obtemos

$$-\xi_0^2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left[\xi_0^2 k_y^2 - \xi_0^2 \frac{4\pi B_0 x}{\phi_0} k_y + \xi_0^2 \left(\frac{2\pi B_0 x}{\phi_0} \right)^2 \right] f(x) = (1-t)f(x).$$

Definindo $x_0 = k_y \phi_0 / 2\pi B_0 = \xi_0 k_y$, $x' = x/\xi_0$ e $\vec{A}' = \xi_0 2\pi \vec{A} / \phi_0$,

$$-\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'^2} + (x_0 - A'_y)^2 f(x') = (1-t)f(x'). \quad (5.14)$$

A partir desta equação podemos estudar qual o comportamento da temperatura crítica T_c em função do campo magnético h para cada tipo de magnetização que aqui será estudada. A primeira a ser estudada será $\vec{M} = M_0 \text{sgn}(x)\hat{z}$, onde teremos um potencial vetor do tipo $\vec{A} = (Bx + B_0|x|)\hat{y}$:

$$-\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'^2} + \left(\frac{2\pi \xi_0^2 B x'}{\phi_0} + \frac{2\pi \xi_0^2 B_0 |x'|}{\phi_0} - x_0 \right)^2 f(x') = (1-t)f(x') \quad (5.15)$$

fazendo, $B_{c2}(0) = \phi_0 / 2\pi \xi_0^2$, $h = B/B_0$ e $h_0 = B_0/B_{c2}(0)$:

$$-\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'^2} + \left[\frac{B_0}{B_{c2}(0)} \left(\frac{B x'}{B_0} + |x'| \right) - x_0 \right]^2 f(x') = (1-t)f(x')$$

$$-\frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'^2} + [h_0(hx' + |x'|) - x_0]^2 f(x') = (1-t)f(x') \quad (5.16)$$

utilizando o método das diferenças finitas escrevemos

$$\frac{-f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}) + f(x_n)}{\Delta x^2} + V(x_n)f(x_n) = (1-t)f(x_n) \quad (5.17)$$

onde $V = [h_0(hx_n + |x_n|) - x_0]^2$. Notamos que a mudança de magnetização irá interferir somente no valor do potencial na equação (5.17), mantendo o padrão de uma equação do tipo schrodinger que será resolvida a partir do método das diferenças finitas.

Para a resolução da equação (5.17) foi utilizado o mesmo algoritmo dos problemas anteriores explicado no capítulo 4, dessa maneira foi possível encontrar o maior valor de t para o determinado valor de h correspondente. Também conseguimos numericamente os valores de h , T_c e x_0 para a magnetização \vec{M} . Com esses valores construímos o gráfico representado na Figura 21 (a), onde mostra o comportamento de t em relação a h . Nele percebe-se um aumento da temperatura crítica com um aumento do campo aplicado, regime conhecido como domain wall superconductivity, em conformidade com o resultado de Aladyshkin na referência [29], o qual está representado na Figura 21 (b).

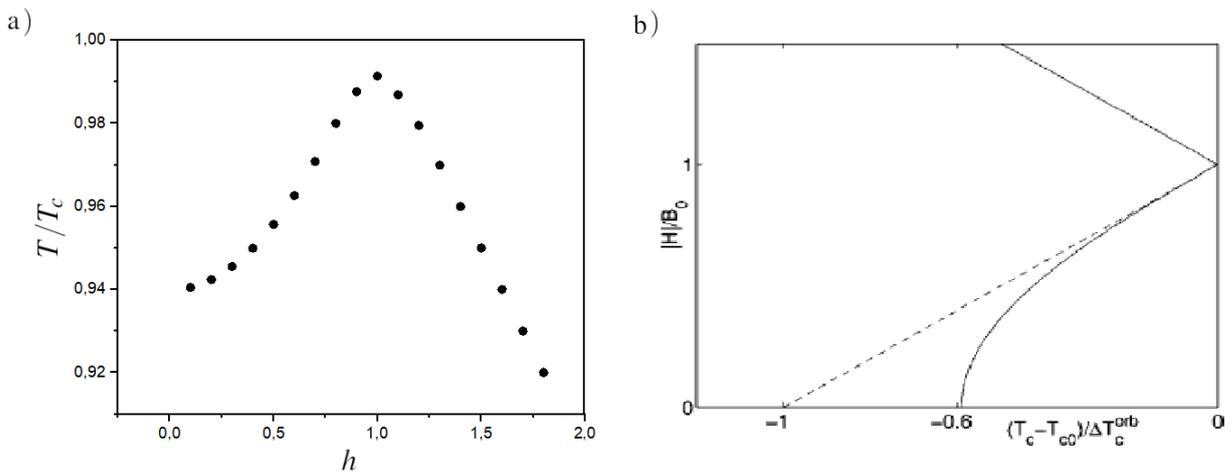


Figura 21 – (a) Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike considerando a amostra infinita. (b) Resultado obtido por Aladyshkin no estudo do sistema híbrido S/F com magnetização steplike.

Notamos também que a maior temperatura crítica está em torno de $h = 1,0$, que cai posteriormente de maneira quase linear. Isso ocorre pelo fato da nucleação ocorrer no domínio onde o campo aplicado é contrário a magnetização do filme magnético e, por este motivo, t máximo se dá em $h = 1,0$. Quando levamos em conta os efeitos do tamanho da amostra, ou seja, utilizamos as condições de borda de Ginzburg-Landau na resolução do problema obtemos o gráfico exposto na Figura 22. Quando consideramos a condição de borda de Ginzburg-Landau vamos ter uma competição, por um lado da nucleação acontecer dentro do domínio onde a magnetização é contrária ao campo, e por outro lado pelo efeito de superfície, dando uma mudança de comportamento da curva com uma linearidade em toda sua extensão não se notando mais o efeito do regime conhecido como *domain wall superconductivity*. Notamos também que para um valor de campo fixo, a temperatura crítica da amostra com tamanho finito é sempre maior do que a amostra considerada infinita, estando de acordo com as referências [11, 29].

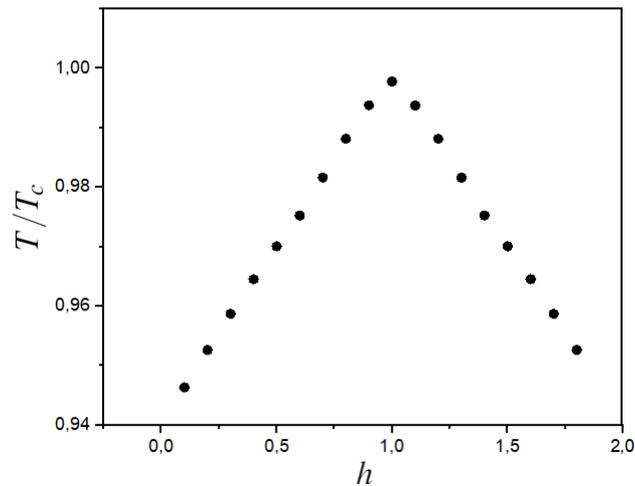


Figura 22 – Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike considerando a amostra finita.

Podemos visualizar experimentalmente este estudo na referência [31], onde nela foi feita a observação experimental do *domain wall superconductivity* em sistemas híbridos supercondutores ferromagnéticos usando um filme de nióbio em um único cristal de $BaFe_{12}O_{19}$. A Figura 23 mostra o diagrama de fases para uma bicamada $BaFe_{12}O_{19}$. As temperaturas críticas foram obtidas a partir de três diferentes critérios nas curvas $R(T)$. Observa-se um aumento de T_c com o campo externo até um valor de aproximadamente $5,25kOe$. A partir desse valor de campo, a temperatura começa a diminuir, sendo que para campos acima de aproximadamente $6kOe$ esta diminuição segue o comportamento linear. Este valor de $5,25kOe$ é aproximadamente igual ao campo B_0 da estrutura magnética. Este comportamento é qualitativamente semelhante aos resultados mostrados nas Figuras 21(a) e 22.

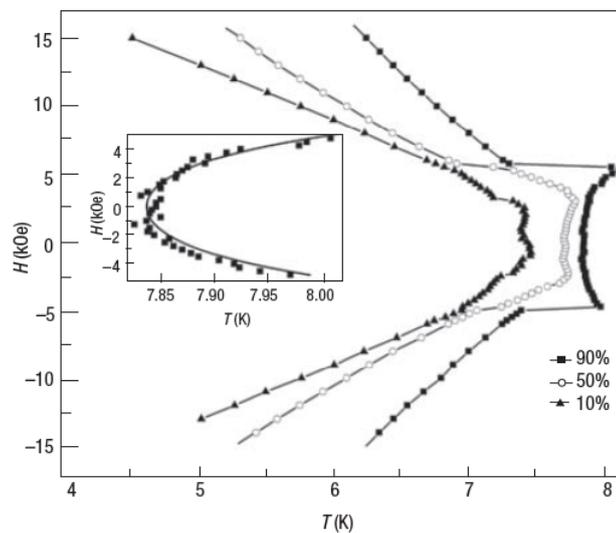


Figura 23 – Diagrama de fases experimental do sistema híbrido $BaFe_{12}O_{19}$. [31]

5.2.2 Solução analítica para estrutura magnética com magnetização steplike com quatro domínios

Nesta subseção vamos estudar a estrutura steplike com 4 domínios magnéticos (estrutura representada na Figura 24), com o objetivo de verificar a influência do número de domínios sobre os resultados obtidos, onde é considerado um potencial vetor magnético no calibre de London do tipo $\vec{A} = (Bx + B_0x)\hat{y}$ para uma magnetização positiva e $\vec{A} = (Bx - B_0x)\hat{y}$ para uma magnetização negativa. Na Figura 25, notamos um comportamento quase linear de toda a curva com o aumento

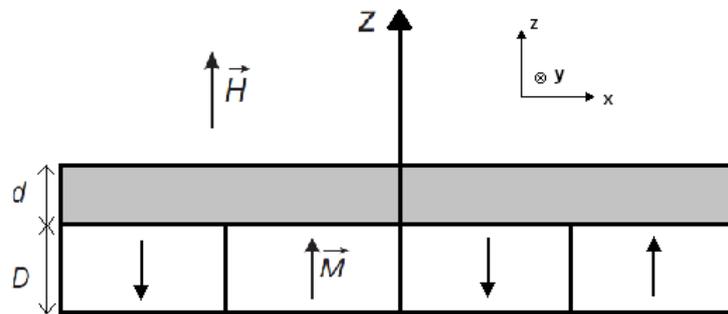


Figura 24 – Estrutura magnética com magnetização steplike para quatro domínios magnéticos.

do campo aplicado com o máximo se mantendo em $h = 1,0$. Constatamos também que um aumento do número de domínios magnéticos modifica o comportamento da temperatura crítica em função do campo magnético (relativamente ao caso de dois domínios) devido a descontinuidades que aparecem no potencial da equação linearizada de Ginzburg-Landau oriundas das reversões da magnetização ao mudar de um domínio para o outro, região aonde ocorre a nucleação do parâmetro de ordem.

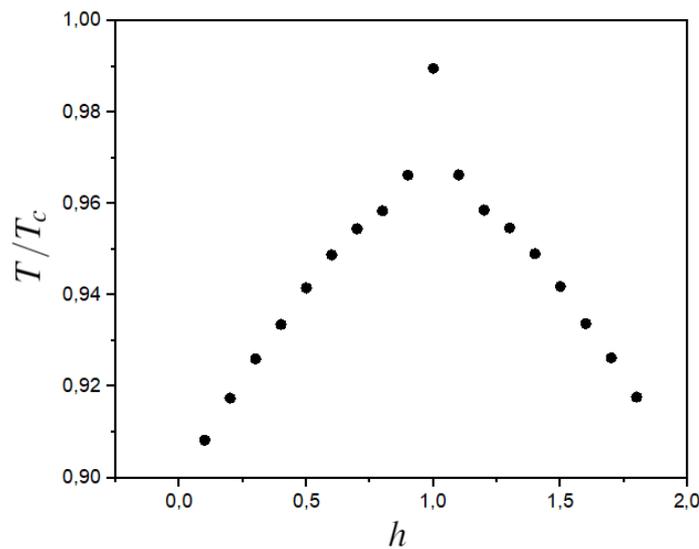


Figura 25 – Variação de t em função de h para um sistema híbrido S/F com magnetização steplike para quatro domínios magnéticos.

5.3 Oscilador Harmônico Duplo Clássico e transição para Mecânica Quântica

O oscilador harmônico simples clássico é um sistema físico onde uma massa m está sujeita a uma força restauradora que atua proporcionalmente a sua posição. O oscilador harmônico duplo é um sistema físico composto de duas massas sendo m_1 , localizada em x_1 , e m_2 , localizada em x_2 , as quais estão interligadas por uma mola de comprimento x_0 (comprimento em equilíbrio) e constante elástica k , como podemos observar na Figura 26.

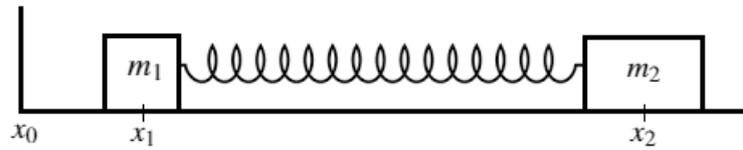


Figura 26 – Sistema físico do oscilador harmônico duplo.

Definindo x' como a coordenada relativa do sistema, correspondente ao deslocamento da mola,

$$x' = (x_1 - x_2) - x_0 = x - x_0. \quad (5.18)$$

Para uma extensão da mola,

$$F_1 = -kx' \quad (5.19)$$

$$F_2 = kx' \quad (5.20)$$

onde F_1 é a força restauradora referente a massa m_1 e F_2 é a força restauradora referente a massa m_2 , notamos também que $F_1 = -F_2$. Temos que,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx' \quad (5.21)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = kx' \quad (5.22)$$

realizando o algebrismo necessário nas equações acima,

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \left(\frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) &= -kx' (m_1 + m_2) \\ m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2} (x - x_0) &= -kx' (m_1 + m_2) \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -kx' \end{aligned} \quad (5.23)$$

definindo a massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / m_1 + m_2$, escrevemos

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -kx' \\ \frac{d^2 x'}{dt^2} &= -\frac{k}{\mu} x' \\ \frac{d^2 x'}{dt^2} + \omega^2 x' &= 0\end{aligned}\quad (5.24)$$

onde $\omega = \sqrt{k/\mu}$. O potencial e a energia cinética desse sistema são dados respectivamente por,

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{d(x - x_0)}{dt} \right)^2 \\ T &= \frac{p^2}{2\mu}\end{aligned}\quad (5.26)$$

assim a energia total do sistema E será,

$$\begin{aligned}E &= T + V \\ E &= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2\end{aligned}\quad (5.27)$$

como $k = \mu\omega^2$,

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x - x_0)^2. \quad (5.28)$$

O procedimento de transição da situação clássica para a quântica se dá pela energia total do sistema clássico, $E = T + V$, no hamiltoniano do sistema quântico, $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$. Nesse caso,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 \hat{x}^2 \quad (5.29)$$

como,

$$\hat{x}|x\rangle = x'|x\rangle \quad (5.30)$$

$$\hat{p}|x\rangle = i\hbar \frac{d}{dx}|x\rangle \quad (5.31)$$

escrevemos,

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 x'^2 \\ \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 (x - x_0)^2\end{aligned}\quad (5.32)$$

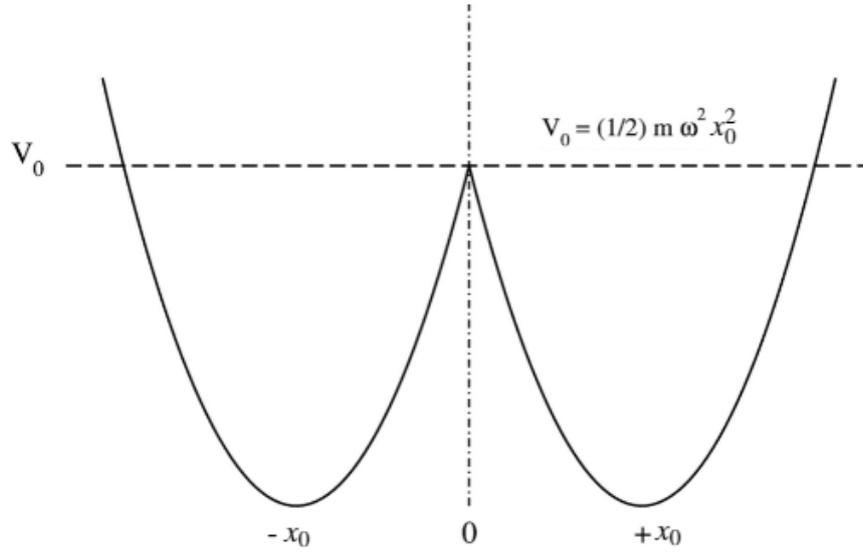


Figura 27 – Potencial do oscilador harmônico duplo quântico.[32]

e como $\hat{H}\psi = E\psi$,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x-x_0)^2\psi = E\psi. \quad (5.33)$$

Na Figura 27 temos o gráfico do potencial relativo a equação (5.33). A equação (5.33) é a equação de Schrodinger para uma partícula de massa μ ligada ao potencial do oscilador harmônico. Utilizando os operadores escada, conhecidos como operador levantamento \hat{a}_+ e operador abaixamento \hat{a}_- , definidos como

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

podemos escrever $\hat{a}_-\hat{a}_+$

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}(i\hat{p} + m\omega\hat{x})(-i\hat{p} + m\omega\hat{x})$$

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{1}{2\hbar m\omega}[\hat{p}^2 + (m\omega\hat{x})^2 - im\omega(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})]$$

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{i}{2\hbar}[\hat{x}, \hat{p}]$$

$$\hat{a}_-\hat{a}_+ = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2} \quad (5.34)$$

e analogamente a expressão de $\hat{a}_+\hat{a}_-$ é dada por,

$$\hat{a}_+\hat{a}_- = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} \quad (5.35)$$

desta maneira,

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}_+\hat{a}_- + \frac{1}{2} \right). \quad (5.36)$$

Como $\hat{H}\psi = E\psi$,

$$\hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) \psi = E\psi \quad (5.37)$$

assim, no estado fundamental, onde $\psi_0(x) = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}$,

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_0 &= E\psi_0 \\ \hbar\omega \left(a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \psi_0 &= E\psi_0 \\ E_0 &= \frac{\hbar\omega}{2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

desta forma, generalizando a equação da energia, obtemos

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\hbar\omega}{2} + n\hbar\omega \\ E_n &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.3.1 Autovalores e autovetores para o oscilador harmônico duplo

Vimos que a equação de Schrodinger que descreve um oscilador duplo é dada pela equação (5.33) descrita abaixo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2(x-x_0)^2\psi = E\psi$$

uma forma rigorosa de se achar a solução para ela, com $x > 0$, é dada pela troca de variável [32][33]

$$z = \left(\frac{2\mu\omega}{\hbar} \right)^{1/2} (x-x_0) \quad (5.40)$$

onde escrevemos a energia como

$$E = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \quad (5.41)$$

assim a equação (5.33), para $x > 0$, é dada por

$$-\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) \psi = 0. \quad (5.42)$$

Para $x < 0$, a troca de variável fica na forma

$$z' = \left(\frac{2\mu\omega}{\hbar} \right)^{1/2} (x+x_0) \quad (5.43)$$

e a equação (5.33) pode ser escrita como

$$-\frac{d^2\psi}{dz'^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z'^2}{4} \right) \psi = 0 \quad (5.44)$$

onde notamos que ela possui o mesmo formato que a equação (5.42). Observamos também que para $x_0 = 0$ nós temos $z = z'$, e as equações (5.42) e (5.44) se tornam idênticas, resumindo o problema para um oscilador hamônico linear simples. A condição de contorno, $\psi \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$, nos mostra que devemos procurar soluções para (5.42) e (5.44) de maneira que desapareçam quando $z \rightarrow +\infty$ e $z' \rightarrow -\infty$. [33]

A solução particular de (5.42), que desaparece para valores positivos muito grandes de z , é chamada de função parabólica cilíndrica. Essa solução é denotado por $D_\nu(z)$ e é definida por

$$D_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{-(z^2/4)} \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma[(1-\nu)/2]} {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) + \frac{z}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma(-1/2)}{\Gamma(-\nu/2)} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right] \quad (5.45)$$

onde ${}_1F_1$ é a função hipergeométrica confluyente e a expansão da sua série de potências é dada por

$${}_1F_1(a; c; z) = 1 + \frac{a}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (5.46)$$

se z for grande e positivo, ou seja, $z \gg 1$ e $z \gg |\nu|$,

$$D_\nu(z) \sim e^{(-z^2/4)} z^\nu \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2z^2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.4.z^4} \pm \dots \right] \quad (5.47)$$

e se z é grande e negativo, ou seja, $z \ll -1$ e $z \ll -|\nu|$,

$$D_\nu(z) \sim e^{(-z^2/4)} z^\nu \left[1 - \frac{\nu(\nu-1)}{2z^2} \pm \dots \right] - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-\nu)} e^{\nu\pi i} e^{z^2/4} z^{-\nu-1} \left[1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2z^2} + \dots \right] \quad (5.48)$$

sendo as equações (5.47) e (5.48) as expansões assintóticas de $D_\nu(z)$.

Se $D_\nu(z)$ é uma solução de (5.42), $D_\nu(-z)$ também é uma solução da mesma equação, e essas duas soluções são linearmente independentes, a menos que ν seja um número inteiro não negativo. O autovetor do oscilador duplo deve ser proporcional a $D_\nu(z)$ para valores positivos de x , e proporcional a $D_\nu(-z')$ para valores negativos de x . Devemos unir essas duas soluções para $x = 0$, sendo este ponto onde os dois potenciais parabólicos se encontram com uma inclinação descontínua.[33]

Os autovetores podem ser assumidos como tendo paridade definida, par ou ímpar. Dizemos que quando $\psi(x)$ é uma função par e é contínua em $x = 0$, então $\psi'(x=0) = 0$. Quando $\psi(x)$ é uma função ímpar e é contínua em $x = 0$, então $\psi(x=0) = 0$. A condição de união suave requer que em $x = 0$ as funções pares tenham inclinação zero e as funções ímpares desapareçam. Combinando ψ e ψ' em $x = 0$, temos

$$D'_\nu\left(-\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}}a\right) = 0 \quad (5.49)$$

para ψ par, e

$$D_v \left(-\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a \right) = 0 \quad (5.50)$$

para ψ ímpar. Essas são equações transcendentais para v . Em geral, é difícil calcular as raízes v de (5.49) e (5.50). Os autovetores não normalizados são dados por

$$\psi(x) = \begin{cases} D_v \left(\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} \right) (x-a) & x \geq 0 \\ \pm D_v \left(-\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} \right) (x+a) & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

podemos notar que fórmulas explícitas aproximadas para os autovalores são obtidas se $E \gg V_0$ e

$$\sqrt{\frac{2\mu\omega}{\hbar}} a \gg 1 \quad (5.52)$$

ou

$$V_0 = \frac{1}{2} \mu a^2 \omega^2 \gg \frac{1}{4} \hbar \omega. \quad (5.53)$$

Essas condições representam o caso de dois poços osciladores quase completamente separados. Para simplificar, devemos apenas trabalhar uma aproximação para as duas raízes que estão próximas de $v = 0$, ou seja, os dois valores próprios de energia mais baixos. Como $a \rightarrow \infty$, eles se tornam degenerados e iguais a $\frac{1}{2} \hbar \omega$. [33]

5.4 Analogia entre o oscilador harmônico duplo quântico e a equação linearizada de Ginzburg-Landau

A equação linearizada de Ginzburg-Landau permite resolver diversos problemas de nucleação do parâmetro de ordem em amostras supercondutoras. Vamos fazer uma análise da equação linearizada de Ginzburg-Landau em relação ao problema do oscilador duplo. A equação linearizada é dada por:

$$\begin{aligned} - \left(\vec{\nabla} - \frac{2\pi i}{\phi_0} Hx \right)^2 \psi &= \frac{\psi}{\xi^2(T)} \\ \left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\phi_0} Hx \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi H}{\phi_0} \right)^2 x^2 \right] \psi &= \frac{\psi}{\xi^2(T)}. \end{aligned}$$

Analisando o problema da nucleação da supercondutividade em uma amostra global na presença de um campo B ao longo do eixo z , ou seja, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ e um potencial vetor convenientemente escolhido na aproximação de calibre de London, dado por $A_y = B_0 |x|$, é razoável procurarmos uma solução da forma,

$$\psi = f(x)e^{i(k_y y + k_z z)} \quad (5.54)$$

assim, escrevemos,

$$\begin{aligned} -f''(x) + \left[k_y^2 + \left(\frac{2\pi B_0 |x|}{\phi_0} \right)^2 - \frac{4\pi B_0 |x|}{\phi_0} \right] f(x) &= \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x) \\ -f''(x) + \left(\frac{2\pi B_0}{\phi_0} \right)^2 (|x| - x_0)^2 f(x) &= \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x) \end{aligned} \quad (5.55)$$

onde $x_0 = k_y \phi_0 / 2\pi H$. Multiplicando esta equação por $\hbar^2 / 2\mu$, temos,

$$\begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{2\mu} f''(x) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{2\pi \hbar B_0}{\mu \phi_0} \right)^2 (|x| - x_0)^2 f(x) &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x) \\ \frac{-\hbar^2}{2\mu} f''(x) + \frac{\mu \omega^2}{2} (|x| - x_0)^2 f(x) &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} - K_z^2 \right) f(x) \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde $\omega = (2\pi \hbar B_0 / \mu \phi_0)$, supondo que não exista variações do parâmetro de ordem ao longo do eixo z dizemos que $k_z = 0$. Assim,

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} f''(x) + \frac{\mu \omega^2}{2} (|x| - x_0)^2 f(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} \right) f(x) \quad (5.57)$$

sendo $E = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{1}{\xi^2(T)} \right)$, escrevemos,

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} f''(x) + \frac{\mu \omega^2}{2} (|x| - x_0)^2 f(x) = E f(x). \quad (5.58)$$

obtendo assim a equação de schrodinger para um oscilador harmônico duplo quântico. Sendo assim, resolver o problema de um oscilador harmônico duplo quântico é análogo a resolver o problema de nucleação supercondutora.

6 Conclusão

Nesta dissertação, fizemos um estudo teórico da equação linearizada de Ginzburg-Landau e da sua aplicação no estudo da nucleação para amostras supercondutoras mediante a resolução numérica, via algoritmo do MATLAB, desta equação a partir do método das diferenças finitas. O algoritmo foi eficaz para obter a dependência da temperatura com o campo magnético e o comportamento do parâmetro de ordem supercondutor em função da largura do passo x em sistemas de filmes finos com e sem condições de borda de Ginzburg-Landau e com estruturas steplike com 2 ou 4 domínios.

Em um sistema de amostra infinita com magnetização uniaxial uniforme, a dependência da temperatura com o campo aplicado é linear e a nucleação ocorre no interior do sistema supercondutor. O tamanho do passo x escolhido é um parâmetro importante que influencia o custo computacional. Observa-se que quanto menor o passo, menor será a altura do pico na curva do parâmetro de ordem. Entretanto, o tamanho do passo de x escolhido não altera o efeito físico observado. Quando levamos em conta as condições de borda de Ginzburg-Landau, a nucleação acontece nas bordas do sistema no terceiro campo crítico.

Para o sistema steplike com dois domínios, o comportamento da temperatura em função do campo aplicado encontrado é não linear em um regime *domain wall superconductivity*, onde a temperatura crítica acontece para $h = 1,0$, estando de acordo com a literatura. Quando levamos em conta as condições de borda de Ginzburg-Landau (amostra steplike finita), observamos um comportamento linear de toda a curva com o aumento do campo aplicado e notamos que para um valor de campo fixo, a temperatura crítica encontrada é sempre maior do que aquela da amostra infinita. Constata-se também que um aumento no número de domínios steplike (de 2 para 4) age diretamente no potencial e na equação de Ginzburg-Landau tornando a dependência da temperatura quase linear com h . Simultaneamente, encontramos uma semelhança entre a equação linearizada de Ginzburg-Landau para o problema da nucleação da supercondutividade em uma amostra global (na presença de um campo B ao longo do eixo z) com a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico quântico duplo, o que revela a natureza ondulatória da nucleação da supercondutividade.

Referências

- [1] TINKHAM; **Introduction to superconductivity**; 2nd ed. Mineola, N.Y.: Dover Publ., 2004. Citado 7 vezes nas páginas 11, 16, 30, 32, 36, 37 e 48.
- [2] ASHCROFT, NEIL W AND MERMIN, N DAVID AND RODRIGUEZ, SERGIO; **Solid state physics**; AmJPh, vol46, 1,116–117, (1978). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 25.
- [3] DA COSTA, CRISTIANO MONTEIRO AND SANTOS, WILMA MACHADO SOARES AND LUIZ, ADIR MOYSÉS; **Supercondutores: aplicações das junções Josephson na eletrônica**;(2004). Nenhuma citação no texto.
- [4] PEREIRA, L. C.; FERREIRA, J. V. B.; **Determinação da temperatura Kondo a partir de curvas de susceptibilidade magnética em regime não líquido de Fermi**; Centro de Ciência Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 18.
- [5] LUIZ, AM SANTOS AND WMS, A; **Supercondutividade e suas aplicações: um tema para aulas de Física moderna no ensino médio**;SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA, Vol 16, (2005). Nenhuma citação no texto.
- [6] S.H. PEREIRA, MARCELO G. FELIX; **100 years of superconductivity and the Ginzburg-Landau theory**; Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1313 (2013). Citado 12 vezes nas páginas 11, 16, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 30, 32 e 33.
- [7] OSTERMANN, FERNANDA AND FERREIRA, LETICIA MENDONÇA AND CAVALCANTI, CLAUDIO JOSE DE HOLANDA; **Topics in Contemporary Physics at high school level: a text for teachers about superconductivity**; Revista brasileira de ensino de física. Vol. 20, n. 3 (set. 1998), p. 270-2884, (1998). Citado 8 vezes nas páginas 11, 16, 19, 22, 25, 26, 27 e 32.
- [8] F. LONDON AND H. LONDON; **The electromagnetic equations of the supraconductor**; Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences, Vol.149, n866, pgs. 71–88, 1935. Citado na página 22.
- [9] PASCOLATI, MAURO CESAR VIDEIRA; **Dinâmica de vórtices em filmes finos supercondutores de superfície variável**; Universidade Estadual Paulista (UNESP), (2010). Citado 3 vezes nas páginas 11, 16 e 21.
- [10] MILLÁN M. A. Z;**Fases de vórtices e antivórtices em filmes supercondutores com nanoestruturas magnéticas**; Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), (2008). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 30.

- [11] MARTINS, T. B.; **Estudo da nucleação supercondutora em estruturas híbridas supercondutor/ferromagnético**; Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), (2015). Citado 12 vezes nas páginas [34](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [43](#), [44](#), [45](#), [46](#), [48](#), [50](#) e [53](#).
- [12] GILLIJNS, WERNER AND ALADYSHKIN, A YU AND SILHANEK, AV AND MOSHCHALCOV, VV; **Magnetic confinement of the superconducting condensate in superconductor-ferromagnet hybrid composites.**; Physical Review B, v. 76, n. 6, p. 060503, 2007. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [46](#) e [47](#).
- [13] PUREUR, PAULO; **Supercondutividade: cem anos de desafios**; Revista USP, 92, pag 142-156, (2012). Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [19](#) e [26](#).
- [14] UJEVIC TONINO, SEBASTIAN AND OTHERS; **Flutuações termodinâmicas em supercondutores: confronto entre o modelo X-Y 3D e a descrição baseada nos níveis de Landau**; (2000). Citado na página [29](#).
- [15] SILVA, WESLEY SOARES AND OTHERS; **Solução da equação de London no espaço hiperbólico**; Universidade Federal de Alagoas, (2016). Citado 2 vezes nas páginas [28](#) e [32](#).
- [16] SEVERINO, ANDRÉ LUIZ; **Estudo de materiais supercondutores em forma de SQUID com uma restrição usando métodos de paralelização computacional**; Universidade Estadual Paulista (UNESP), (2015). Citado 2 vezes nas páginas [16](#) e [24](#).
- [17] CYROT, MICHEL AND PAVUNA, DAVOR; **Introduction to superconductivity and high-Tc materials**; Cyrot, Michel e Pavuna, Davor. World Scientific Publishing Company, 1992. Nenhuma citação no texto.
- [18] GOR'KOV, L. P.; **Microscopic Derivation of the Ginzburg-Landau Equations In The Theory of Superconductivity**; Zh. Eksperim. i Teor. Fiz. 36. 1918 (1959) Soy. Phys. JETP 9, 1364 (1959). Citado na página [27](#).
- [19] GINZBURG, VL; **Ferromagnetic superconductors**; Soviet Physics JETP-USSR, vol 4, 2, 153–160, (1957), AMER INST PHYSICS CIRCULATION FULFILLMENT DIV, 500 SUNNYSIDE BLVD, WOODBURY. Nenhuma citação no texto.
- [20] MORI, THIAGO JOSÉ DE ALMEIDA; **Filmes finos supercondutores de alta temperatura crítica**; Universidade Federal de Santa Maria, 2008. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [34](#).
- [21] JAMES, D SAINT AND DE GENNES, PG; **Onset of superconductivity in decreasing fields**; Physics Letters, vol7, 5, 306–308, (1963). Citado na página [36](#).

- [22] SUZUKI, MASATSUGU AND SUZUKI, Itsuko S; **Lecture Note on Solid State Physics Ginzburg-Landau Theory for Superconductivity**; Department of Physics, State University of New York at Binghamton, Binghamton, New York, 13902–6000, 2007. Citado na página [36](#).
- [23] CHELIKOWSKY, JAMES R AND TROULLIER, N AND SAAD, YOUSEF; **Finite-difference-pseudopotential method: Electronic structure calculations without a basis**; Physical review letters, vol 72, 8, page1240, 1994, APS. Citado na página [38](#).
- [24] KING, JONATHAN AND DHAKAL, PAWAN; **Finite Difference Schemes and the Schrodinger Equation**; 2014. Citado na página [38](#).
- [25] FONTANA; **Introdução ao Método de Diferenças Finitas com Aplicações em Engenharia Química**; Universidade Federal do Paraná, UFPR, Departamento de Engenharia Química, 2019. Citado 4 vezes nas páginas [11](#), [38](#), [41](#) e [42](#).
- [26] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ; **Statistical Physics, Part 1**; Pergamon Press. Citado na página [28](#).
- [27] P. G. DE GENNES; **Superconductivity of Metals and Alloys**; 1966. Citado na página [28](#).
- [28] L.D. LANDAU AND E.M. LIFSHITZ; **Statistical Physics, Part 1**; Pergamon Press. Citado na página [28](#).
- [29] ALADYSHKIN, A. YU ET AL; **Domain-wall superconductivity in hybrid superconductor-ferromagnet structures**; Physical Review B, v. 68, n. 18, p. 184508, 2003. Citado 3 vezes nas páginas [17](#), [51](#) e [53](#).
- [30] ALADYSHKIN, A. YU ET AL; **Nucleation of superconductivity and vortex matter in superconductor-ferromagnet hybrids**; Superconductor Science and Technology, v. 22, n. 5, p. 053001, 2009. Citado na página [51](#).
- [31] YANG, ZHAORONG AND LANGE, MARTIN AND VOLODIN, ALEXANDER AND SZYMCZAK, RITTA AND MOSHCHALOV, VICTOR V **Domain-wall superconductivity in superconductor-ferromagnet hybrids**; Nature materials, v. 3, n. 11, p. 793-798, 2004. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [54](#).
- [32] ALVES, HERCULES AND JURKEVICZ, GUILHERME **Diffuse Double-harmonic oscillator**; 2019. Citado 3 vezes nas páginas [12](#), [58](#) e [59](#).
- [33] E. MERZBACHER, J. Wiley **Quantum mechanics**; 1998. Citado 3 vezes nas páginas [59](#), [60](#) e [61](#).