

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO - UFES

CENTRO TECNOLÓGICO - CT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA - PPGEM

PEDRO AMÉRICO BRANDÃO DE OLIVEIRA FILHO

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE TRANSPORTE EM TORNO DO
MOTOR DE BOMBA CENTRÍFUGA SUBMERSA**

VITÓRIA

2022

PEDRO AMÉRICO BRANDÃO DE OLIVEIRA FILHO

**ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE TRANSPORTE EM TORNO DO
MOTOR DE BOMBA CENTRÍFUGA SUBMERSA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Márcio Ferreira Martins, *Ph.D.*

VITÓRIA

2022

Ficha catalográfica disponibilizada pelo Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/UFES e elaborada pelo autor

O48a Oliveira Filho, Pedro Américo Brandão de, 1995-
Análise numérica do fenômeno de transporte em torno do motor de bomba centrífuga submersa / Pedro Américo Brandão de Oliveira Filho. - 2022.
195 f. : il.

Orientador: Márcio Ferreira Martins.
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) -
Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Bomba Centrífuga Submersa. 2. Escoamento Anular Vertical. 3. Líquido-Gás. 4. Modelo de Dois Fluidos. 5. Eulerian. 6. Multi-Fluid VOF. I. Martins, Márcio Ferreira. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
CENTRO TECNOLÓGICO UNIVERSIDADE
FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

ANÁLISE NUMÉRICA DO FENÔMENO DE TRANSPORTE EM TORNO DO MOTOR DE BOMBA CENTRÍFUGA SUBMERSA

PEDRO AMÉRICO BRANDÃO DE OLIVEIRA FILHO

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. Dr. Márcio Ferreira Martins
Orientador PPGEM/UFES

Prof. Dr. João Rodrigo Andrade
Examinador Externo - FEMEC/UFU

Prof. Dr. Ramon Silva Martins
Examinador Externo – DEM/UFES

Francisco Raphael Ribeiro Bacellar, M.Sc.
Convidado – PETROBRAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Vitória (ES), 11 de agosto de 2022.





Docs Dissertação Pedro Américo Brandão de Oliveira Filho

Data e Hora de Criação: 12/08/2022 às 05:00:52

Documentos que originaram esse envelope:

- Aprovação banca Pedro Américo Brandão de Oliveira Filho.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)
- Ata 307 Pedro Américo Brandão de Oliveira Filho.pdf (Arquivo PDF) - 2 página(s)
- Questionário CAPES - PEDRO AMÉRICO BRANDÃO DE OLIVEIRA FILHO.pdf (Arquivo PDF) - 1 página(s)



Hashs únicas referente à esse envelope de documentos

[SHA256]: 3bf6a64462f0bbf08a9c918f69e56b4bd536bb0e6fc0090ae1cca69ef3820cf

[SHA512]: b634f0dc4025465033243d2046f7e967702caf367e4287a18fac6833c890d039b1cddf008fdca8ec07f942988cd4e82036aa7a7e9b8571ebb5fce1b28bd48cab

Lista de assinaturas solicitadas e associadas à esse envelope



ASSINADO - Marcio Ferreira Martins (marcio.martins@ufes.br)

Data/Hora: 12/08/2022 - 05:09:46, IP: 200.137.65.102, Geolocalização: [-20.308967, -40.294123]

[SHA256]: d3ca197d3beaa795a2e79b1426af64b5fe54d72fab63a4c6328afa4aab423f 86



ASSINADO - Ramon Silva Martins (ramon.martins@ufes.br)

Data/Hora: 12/08/2022 - 06:08:49, IP: 177.104.235.70

[SHA256]: 028da436e9f854362816775ddb000a78c206bf56a5ffa02249e313e69e 0a8654



ASSINADO - FRANCISCO RAPHAEL RIBEIRO BACELLAR (franciscobacellar@hotmail.com)

Data/Hora: 12/08/2022 - 14:06:53, IP: 191.250.233.141, Geolocalização: [-20.296379, -40.300074]

[SHA256]: 9814623cfeef9ace090a0bdabc0fcaae906f17d5b1eecb74f07f35c23d8ac69b



ASSINADO - João Rodrigo Andrade (joao.andrade@ufu.br)

Data/Hora: 12/08/2022 - 17:40:29, IP: 187.79.110.156

[SHA256]: 0a75a99e6ee08ec1df8e54b0229e9aef2b76c7899856b04d8655be5e0ca38ca 0

Histórico de eventos registrados neste envelope

12/08/2022 17:40:31 - Envelope finalizado por joao.andrade@ufu.br, IP 187.79.110.156
12/08/2022 17:40:29 - Assinatura realizada por joao.andrade@ufu.br, IP 187.79.110.156
12/08/2022 17:39:49 - Envelope visualizado por joao.andrade@ufu.br, IP 187.79.110.156
12/08/2022 14:06:53 - Assinatura realizada por franciscobacellar@hotmail.com, IP 191.250.233.141
12/08/2022 06:08:49 - Assinatura realizada por ramon.martins@ufes.br, IP 177.104.235.70
12/08/2022 05:09:46 - Assinatura realizada por marcio.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
12/08/2022 05:09:07 - Envelope registrado na Blockchain por marcio.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
12/08/2022 05:09:05 - Envelope encaminhado para assinaturas por marcio.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102
12/08/2022 05:00:54 - Envelope criado por marcio.martins@ufes.br, IP 200.137.65.102

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que eu conseguisse chegar até aqui. O conhecimento é construído aos poucos e a de eterno.

Muito obrigado meu pai, Pedro Américo Brandão de Oliveira, por todos os conselhos e motivações.

Muito obrigado minha mãe, Telma Cunha de Oliveira, por toda base, estrutura e educação proporcionada.

Muito obrigado minha avó, Irene Cunha de Oliveira, por toda educação, criação e amor sempre presente.

De forma especial agradeço à minha irmã, Agatha Brandão de Oliveira, por todo apoio acadêmico sempre prestado e pelo suporte no desenvolvimento textual da dissertação. De igual maneira agradeço ao meu cunhado Marcos Alexandre Figur Messer. Sem vocês, este trabalho não seria possível na presente qualidade.

Ao meu orientador Márcio Ferreira Martins, por todos os conhecimentos repassados e disponibilidade estrutural do LFTC. Meu muito obrigado pela confiança em mim depositada!

À Daniele Peroni Leite de Paula, e ao meu líder profissional Giordano Dalvi Boina, por terem aberto as portas profissionalmente para mim e por todo apoio para continuidade do mestrado. É uma honra ter a confiança de vocês em meu trabalho. Da mesma forma agradeço ao Vinicius Soares Nascimento, a quem considero como um mentor com seus diversos ensinamentos e variadas conversas ao longo dos últimos anos.

A todos companheiros acadêmicos e profissionais da Universidade Federal do Espírito Santo e Petrobras. Em paralelo, o desenvolvimento deste trabalho não seria possível sem essas duas instituições. Muito obrigado por todo investimento envolvido.

Tenho certeza de que estou rodeado dos melhores. A vocês, minha eterna gratidão!

“O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são.”

Aristóteles

RESUMO

Bombas centrífugas submersas (BCS) são aplicadas principalmente na elevação de petróleo em águas profundas. Devido à sua geometria, o próprio fluido elevado realiza o resfriamento do motor do equipamento. Assim, forma-se um escoamento anular vertical em torno do motor da BCS. Uma vez que em diversos instantes há a presença de gás em conjunto com o petróleo elevado e, que essas bombas estão instaladas no leito marinho, há uma enorme dificuldade em conhecer o fenômeno termofluidico existente. É de amplo conhecimento que a presença de gás causa fenômenos indesejáveis para a bomba, tais como o *surging* e o *gas lock*. Especialmente para o motor, a presença de gás pode causar um sobreaquecimento ao ponto de ocasionar uma potencial falha, gerando enormes prejuízos para a indústria. Dado que o tema se trata de um escoamento multifásico, o presente trabalho expõe a demonstração matemática para o modelo de dois fluidos, assim como análises das equações locais de conservação de energia térmica para cada padrão bifásico de interesse. Outras demonstrações analíticas de parâmetros do fenômeno de transporte existente também são apresentadas. Tais teorias servem como base para o entendimento das análises numéricas realizadas a partir do *software* Ansys Fluent. Duas simulações bifásicas são executadas com distintas vazões mássicas de líquido, e possuem como geometria o protótipo do motor da BCS existente no Núcleo de Estudos em Escoamento e Medição de Óleo e Gás (Nemog) – concebido para obter a maior similaridade dinâmica possível com o protótipo real. São aplicadas para as análises numéricas o modelo multifásico *Eulerian* simultaneamente com o *Multi-Fluid VOF*, além das demais modelagens da dinâmica interfacial. Para o tratamento da turbulência, é imposto o modelo $k - \omega SST$ para cada fase. As simulações mostram a formação do padrão bifásico *slug* e distorções que a presença de gás causa na velocidade da fase líquida. Velocidades de até 1,5 m/s são atingidas na região do anular motor-*shroud*, ocasionando altos números de Reynolds em distintas regiões e expondo que o tratamento do escoamento como turbulento é adequado. Para um escoamento monofásico, o número de Nusselt tende ao valor constante de 2,70 independente da vazão de entrada. Para um escoamento bifásico, tal adimensional é função da relação entre vazões de entrada e atingem valores aproximadamente constantes na região em que ambas as fases se fazem presentes. Dadas as condições de contorno impostas, para a primeira simulação o número de Nusselt tende a 43,1 enquanto para a segunda simulação é atingido o valor de 82,3.

Palavras-chave: BCS, bomba centrífuga submersa, escoamento anular vertical, líquido-gás, modelo de dois fluidos, *Eulerian*, *Multi-Fluid VOF*, transferência de calor.

ABSTRACT

Electrical Submersible Pumps (ESP) are mainly applied in lifting operations in deep water oil exploration. Due to its geometry, the elevated fluid itself cools the pump's motor. Thus, a vertical annular flow is formed around the ESP motor. Since at different moments there is gas together with the elevated oil at various times, it is difficult to understand the thermofluidic phenomenon, as these equipment are installed on the seabed. It is widely known that the presence of gas causes undesirable phenomena for the pump, such as surging and gas lock. Gas can cause failure due to overheating (notably motor failure), causing huge losses to the industry. Given that this topic concerns a multiphase flow, the present work shows the mathematical demonstration for the two-fluid model, as well as analyses of the local conservation of thermal energy equations, for each two-phase pattern of interest. Other parameters of the existing transport phenomenon are introduced and analytically demonstrated. Such theories serve as a basis for understanding the numerical analyses performed using the Ansys Fluent. Two two-phase simulations are executed with different liquid mass flow rates, having as their geometry the ESP motor prototype built at the Center for Studies in Oil and Gas Flow and Measurement (Nemog). This prototype is designed to obtain the highest possible dynamic similarity with the real prototype. For the numerical analysis, the Eulerian multiphase model is applied simultaneously with the Multi-Fluid VOF, in addition to other interfacial dynamics modeling. For the treatment of turbulence, the $k - \omega$ SST model is imposed for each phase. The simulations show the formation of the slug pattern and distortions that the presence of gas causes in the velocity of the liquid. Velocities up to 1.5 m/s are reached in the motor-shroud annular, causing high Reynolds numbers in different regions and showing that the treatment of the flow as turbulent is adequate. For a single-phase flow, the Nusselt number tends to a constant value of 2.70 regardless of the inlet flow rate. For a two-phase flow, this dimensionless is a function of the ratio between inflows and reaches approximately constant values in the region where both phases are present. Given the imposed boundary conditions, for the first simulation the Nusselt number tends to 43.1 while for the second simulation the value of 82.3 is obtained.

Keywords: ESP, electrical submersible pump, vertical annular flow, liquid-gas, two-fluid model, Eulerian, Multi-Fluid VOF, heat transfer.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Esquemático de uma BCS com seus principais elementos.....	27
Figura 2 - Efeito da presença de gás na performance de uma bomba centrífuga.	29
Figura 3 - Esquema do Mobo. As setas indicam o sentido do escoamento multifásico.....	30
Figura 4 - Esquemático da bancada experimental do protótipo em escala reduzida do motor de BCS localizado no Nemog, Ufes.	31
Figura 5 - Protótipo em escala reduzida do motor de BCS localizado no Nemog, Ufes. Por conta do sistema de roldana, é possível realizar o experimento em qualquer angulação de 0 a 90° em relação ao piso.	32
Figura 6 - Padrões do escoamento bifásico vertical em um tubo. “G” representa a fase gasosa e “L” a fase líquida.....	37
Figura 7 - Padrões do escoamento bifásico vertical em um anular.	38
Figura 8 - Principais padrões do escoamento bifásico horizontal em um tubo (à esquerda) e em um anular (à direita). “G” representa a fase gasosa e “L” a fase líquida.....	38
Figura 9 - Balanço da conservação da massa em um volume elementar.	45
Figura 10 - Leis de parede da camada limite turbulenta.....	55
Figura 11 - Representação dos perfis de velocidade e tensão cisalhante em um anular. Os pontos de tensão nula e velocidade máxima não são coincidentes.	58
Figura 12 - Um volume bifásico.....	60
Figura 13 - Esquema dos dois anulares e exposição da transferência de calor em distintos padrões multifásicos para o anular interno.	71
Figura 14 - Primeira geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.....	79
Figura 15 - Corte longitudinal na primeira geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.....	80
Figura 16 - Detalhes da malha gerada para a primeira geometria.	81
Figura 17 - Segunda geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.....	84
Figura 18 - Corte longitudinal na segunda geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.	85
Figura 19 - Detalhes de uma das malhas geradas para a segunda geometria.	85

Figura 20 - Gradiente de temperatura em corte longitudinal para a vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida no regime monofásico e permanente. Em a) a região inicial do domínio e motor; em b) uma posição intermediária do anular motor-shroud; em c) a região final do domínio e anular motor-shroud.	100
Figura 21 - Gradiente de temperatura axial na superfície da parede do sensor e do motor para uma vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida.	101
Figura 22 - Gradiente de velocidade em corte longitudinal para a vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida no regime monofásico e permanente. Em a) a região de entrada do domínio e início do motor; em b) a região final do domínio e anular motor-shroud.	101
Figura 23 - Mapas generalizados dos padrões bifásicos para um escoamento líquido-gás em um anular vertical concêntrico. Os significados de DB, I e AD são, respectivamente: Dispersed Bubble, Intermittent e Annular Dispersed Liquid.	104
Figura 24 - Esquematização dos padrões Dispersed Bubble, Intermittent e Annular Dispersed Liquid segundo Oliveira et al. (2021).	105
Figura 25 - A nítida instabilidade de Rayleigh-Taylor presente no início do desenvolvimento da fase gasosa (0,90 s a 1,45 s) e sua dissipação no decorrer do tempo (1,66 s à frente). O circulado em vermelho no instante de 4,92 s é o início da formação do padrão slug na região anular motor-shroud.	107
Figura 26 - Desenvolvimento da fase secundária (ar) em 25,14 segundos para a primeira simulação. Volume Rendering da fração volumétrica da fase secundária.	108
Figura 27 - Corte longitudinal da geometria em 25,14 segundos e ampliação de regiões para expor o padrão slug.	109
Figura 28 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o padrão slug.	110
Figura 29 - Temperatura da fase secundária em 25,14 segundos. Volume Rendering da temperatura da fase secundária.	111
Figura 30 - Corte longitudinal da geometria em 25,14 segundos e ampliação de regiões para expor o gradiente de temperatura no anular motor-shroud.	112
Figura 31 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o gradiente de temperatura no anular motor-shroud.	113
Figura 32 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o campo de velocidades. As regiões a partir da coloração amarelada já se caracteriza altos números de Reynolds.	116

Figura 33 - Campo vetorial da velocidade da fase primária na região a jusante do sensor. Constata-se a presença de vórtices para distintos tempos. A velocidade máxima atingida em 1,33 s é de 1,96 m/s.	117
Figura 34 - Gradientes da fração volumétrica, velocidade da fase líquida e temperatura da fase gasosa com o passar do tempo na seção transversal a 1050 mm do início do motor para a primeira simulação. A unidade da velocidade é m/s, e da temperatura K.....	121
Figura 35 - Instantes intercalados de picos de temperatura em distintas regiões do motor. ..	125
Figura 36 - A nítida instabilidade de Rayleigh-Taylor presente no início do desenvolvimento da fase gasosa (0,73 s a 1,31 s) e sua dissipação no decorrer do tempo (1,61 s à frente). O circulado em vermelho no instante de 4,91 s é o início da formação do padrão slug na região anular motor-shroud.	129
Figura 37 - Desenvolvimento da fase secundária (ar) em 13,54 segundos para a segunda simulação. Volume Rendering da fração volumétrica da fase secundária.	130
Figura 38 - Corte longitudinal da geometria em 13,54 segundos e ampliação de região s para expor o padrão slug.	131
Figura 39 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o padrão slug.....	132
Figura 40 - Temperatura da fase secundária em 13,54 segundos. Volume Rendering da temperatura da fase secundária.....	133
Figura 41 - Corte longitudinal da geometria em 13,54 segundos e ampliação de região para expor o gradiente de temperatura no anular motor-shroud.....	134
Figura 42 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o gradiente de temperatura no anular motor-shroud.....	135
Figura 43 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o campo de velocidades. As regiões a partir da coloração amarelada já se caracteriza altos números de Reynolds.	138
Figura 44 - Gradientes da fração volumétrica, velocidade da fase líquida e temperatura da fase gasosa com o passar do tempo na seção transversal a 1050 mm do início do motor para a segunda simulação. A unidade da velocidade é m/s, e da temperatura K.	141
Figura 45 - Elemento de volume infinitesimal considerado para o balanço de forças na direção Z. Elaborado pelo autor.	154

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Temperatura axial na parede externa do shroud. A referência é imposta no fundo da geometria.	82
Gráfico 2 - Temperatura axial nas referidas regiões pela legenda. A referência é imposta no fundo da geometria.	82
Gráfico 3 - Temperatura radial dos anulares interno e externo na região de topo do motor e meio do motor.....	83
Gráfico 4 - Análise da otimização do número de núcleos a se utilizar nas simulações computacionais. Os pontos são os testes para os respectivos números de núcleos e a linha pontilhada é a linha de tendência polinomial que mais se aproxima à curva obtida na análise.	86
Gráfico 5 - Perfis de velocidades da fase primária no anular motor-shroud para as malhas geradas em uma seção a 10 mm do início do motor.....	88
Gráfico 6 - Perfis de velocidades da fase secundária no anular motor-shroud para as malhas geradas em uma seção a 50 mm do início do motor.....	89
Gráfico 7 - Perfis de velocidades da fase primária no anular motor-shroud para as malhas geradas em uma seção a 10 mm do início do motor.....	90
Gráfico 8 - Diferença entre temperaturas da superfície motor e média do escoamento para distintos números de Reynolds no anular motor-shroud. A referência é imposta no fundo da geometria.	95
Gráfico 9 - Temperaturas para $Re = 448$ no anular motor-shroud. A referência é imposta no fundo da geometria.	96
Gráfico 10 - Temperaturas para $Re = 627$ no anular motor-shroud. A referência é imposta no fundo da geometria.	97
Gráfico 11 - Temperaturas para $Re = 1303$ no anular motor-shroud. A referência é imposta no fundo da geometria.	97
Gráfico 12 - Número de Nusselt de acordo com o desenvolvimento axial do domínio e para diferentes números de Reynolds para água líquida.	98
Gráfico 13 - Velocidades axiais na região central do anular motor-shroud para as distintas vazões mássicas nos testes monofásicos e permanentes. A referência é imposta no fundo da geometria.	99

Gráfico 14 - Perfis radiais das velocidades plenamente desenvolvidas para as distintas vazões mássicas nos testes monofásicos e permanentes. O intervalo de -25,4 a 25,4 mm compreende a região do motor.....	99
Gráfico 15 - Perfil médio radial de temperatura da fase gasosa em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).....	114
Gráfico 16 - Perfil médio radial de temperatura da mistura em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).....	115
Gráfico 17 - Perfil médio radial da velocidade da fase primária em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0). Nota-se a distorção que a presença de gás ocasiona no perfil.	118
Gráfico 18 - Perfis médios radiais da temperatura do ar na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).....	119
Gráfico 19 - Perfis médios radiais da temperatura da mistura na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos.	119
Gráfico 20 - Perfis médios radiais da velocidade da água na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos.	120
Gráfico 21 - Perfil axial da fração volumétrica da fase gasosa no instante de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	122
Gráfico 22 - Perfil axial de velocidade da fase líquida no instante de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	122
Gráfico 23 - Perfil axial de temperatura da fase líquida em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	123
Gráfico 24 - Perfil axial de temperatura da fase gasosa em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	123

Gráfico 25 - Perfil axial de temperatura da mistura em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	124
Gráfico 26 - Perfil do número de Nusselt em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.....	126
Gráfico 27 - Perfil da temperatura na parede do motor para distintos instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	127
Gráfico 28 - Perfil axial do y^+ para ambas as fases líquida e gasosa na parede interna do anular motor-shroud, no tempo de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria.....	128
Gráfico 29 - Perfil médio radial de temperatura da fase gasosa em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).	136
Gráfico 30 - Perfil médio radial de temperatura da mistura em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).....	137
Gráfico 31 - Perfil médio radial da velocidade da fase primária em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0). Nota-se a distorção que a presença de gás ocasiona no perfil.	139
Gráfico 32 - Perfis médios radiais da temperatura do ar na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).....	139
Gráfico 33 - Perfis médios radiais da velocidade da água na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).	140
Gráfico 34 - Perfis médios radiais da temperatura da mistura na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).	140
Gráfico 35 - Perfil axial da fração volumétrica da fase gasosa no instante de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	142

Gráfico 36 - Perfil axial de velocidade da fase líquida no instante de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	142
Gráfico 37 - Perfil axial de temperatura da fase gasosa em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	143
Gráfico 38 - Perfil axial de temperatura da mistura em diferentes instantes. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud. Nota-se o início da presença da fase gasosa no referido anular em 5,03 s. A referência é imposta no fundo da geometria.....	143
Gráfico 39 - Perfil do número de Nusselt em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.....	144
Gráfico 40 - Perfil da temperatura na parede do motor para distintos instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-shroud.	145
Gráfico 41 - Perfil axial do y^+ para ambas as fases líquida e gasosa na parede interna do anular motor-shroud, no tempo de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria.....	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Classificação do escoamento bifásico.	36
Tabela 2 - Dimensões da primeira geometria elaborada com base no experimento do protótipo em escala reduzida construído no Nemog, Ufes.....	79
Tabela 3 - Características elementares das malhas geradas para o estudo de sensibilidade. Todas as configurações possuem seus volumes totalmente hexaédricos.	84
Tabela 4 - Desvios padrões nas malhas geradas da velocidade média axial no anular motor-shroud e tensão cisalhante na parede do motor. Avaliado para a fase primária (líquida).	88
Tabela 5 - Desvios padrões nas malhas geradas da velocidade média axial no anular motor-shroud e tensão cisalhante na parede do motor. Avaliado para a fase secundária (gasosa).	88
Tabela 6 - Parâmetros de destaque utilizados nos testes monofásicos.	92
Tabela 7 - Parâmetros e modelos de destaque utilizados nas simulações multifásicas.	93
Tabela 8 - Condições de contorno da primeira simulação.....	93
Tabela 9 - Condições de contorno da segunda simulação.	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ANM – Árvore de Natal Molhada

ANS – Árvore de Natal Seca

ANSI – American National Standards Institute

BCS – Bomba Centrífuga Submersa

BCSS – Bomba Centrífuga Submersa Submarina

CAE – Computer Aided Engineering

CAD – Computer Aided Design

CFD – Computational Fluid Dynamics

DNS – Direct Numerical Simulation

GEKO – Generalized $k - \omega$

HI – Hydraulic Institute

HRIC – High Resolution Interface Capturing

Mobo – Módulo de Bombeio

Nemog – Núcleo de Estudos em Escoamento e Medição de Óleo e Gás

BSL – Baseline

RNG – Renormalization-Group

RSM – Reynolds Stress Model

SIMPLE – Semi Implicit Linked Equations

SIMPLEC – Semi Implicit Linked Equations-Consistent

SST – Shear-Stress Transport

STD – Standard

Ufes – Universidade Federal do Espírito Santo

VOF – Volume of Fluid

LISTA DE SÍMBOLOS

y^+	Distância a partir da parede adimensionalizada pela velocidade de atrito
A	Área (m^2)
c	Calor específico ($J.kg^{-1}.K^{-1}$) ou ($kJ.kg^{-1}.K^{-1}$)
U'	Coefficiente global de transferência de calor ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
u	Componente da velocidade na direção x ($m.s^{-1}$)
v	Componente da velocidade na direção y (coordenadas cartesianas) ou apenas componente da velocidade ($m.s^{-1}$)
L	Comprimento (m)
l	Comprimento característico (m)
K	Condutividade térmica ($W.m^{-1}.K^{-1}$)
A'	Constante
B	Constante
C	Constante ou coeficiente
D	Diâmetro (m)
x	Direção cartesiana (m) ou variável
y	Direção cartesiana (m)
z	Direção cartesiana (m)
J	Efluxo
E	Energia ($J.kg^{-1}$)
k	Energia cinética turbulenta ($J.kg^{-1}$)
K_k	Energia cinética turbulenta ponderada pela função indicadora e massa específica da fase
e	Energia interna específica ($J.kg^{-1}$)
Gi	Energia Livre de Gibbs ($J.kg^{-1}$)
s	Entropia específica ($J.K^{-1}.kg^{-1}$)
h	Entalpia ($kJ.kg^{-1}$) ou coeficiente convectivo ($W.m^{-2}.K^{-1}$)
f	Fator de atrito
p'	Flutuação da pressão (Pa) ou (kPa)
v'	Flutuação da velocidade ($m.s^{-1}$)
q''	Fluxo de calor ($W.m^{-2}$)
\vec{F}	Força (N)

H	Fração de filme líquido
w	Frequência (Hz)
F	Função
X	Função indicadora de fase
\dot{q}	Geração de calor ($W.m^{-3}$)
g	Gravidade ($m.s^{-2}$)
Sd	Magnitude da taxa de deformação
i	Nível de análise
Eo	Número de Eotvos
Eo'	Número de Eotvos modificado
Nu	Número de Nusselt
Pe	Número de Peclet
Pr	Número de Prandtl
Re	Número de Reynolds
p	Passo ou <i>time-step</i>
P	Pressão (Pa) ou (kPa)
\bar{p}	Pressão média (Pa) ou (kPa)
r	Raio (m) ou direção radial em coordenadas cilíndricas
R	Raio (m) ou constante para um gás particular ($kJ.kg^{-1}.K^{-1}$)
q	Taxa de calor (W)
t	Tempo (s)
\bar{T}	Tensor
I	Tensor unitário
Y	Termo dissipativo ou de contribuição da flutuação em escoamentos compressíveis
S	Termo fonte
G	Termo de geração
M	Termo de transferência interfacial de movimento
Q	Termo de transferência interfacial de energia
T	Turbulento
a	Variável
\dot{m}	Vazão mássica ($kg.s^{-1}$)
\dot{Q}	Vazão volumétrica ($m^3.s^{-1}$)
V	Velocidade ($m.s^{-1}$)

v^*	Velocidade de fricção ($kg^{1/2}.m^{-1/2}.s^{-1}$)
\bar{v}	Velocidade média ($m.s^{-1}$)
U	Velocidade média ponderada pela função indicadora de fase
\vec{n}	Vetor normal à superfície

Letras Gregas

α^*	Coefficiente
β	Coefficiente de expansão térmica (K^{-1})
σ	Coefficiente de tensão superficial (N/m)
δ	Delta ou espessura (m) ou (mm)
α	Difusividade térmica molecular ($W.m^2.J^{-1}$)
\emptyset	Direção angular da coordenada cilíndrica
θ'	Flutuação da temperatura (K) ou ($^{\circ}C$)
φ	Fração volumétrica
ρ	Massa específica ($kg.m^{-3}$)
ζ	Perdas ($J.kg^{-1}$) ou ($kJ.kg^{-1}$)
ε	Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta ($W.kg^{-1}$)
Δ	Taxa de geração de entropia ou diferença
ω	Taxa específica de dissipação da energia cinética turbulenta (s^{-1})
θ	Temperatura (K) ou ($^{\circ}C$)
$\bar{\theta}$	Temperatura média (K) ou ($^{\circ}C$)
ϱ	Tensão (Pa) ou (kPa)
τ	Tensor ou tensão cisalhante (Pa)
ϕ	Termo fonte
Λ	Termo de transferência interfacial de energia térmica
Γ	Termo de transferência interfacial de massa
ψ	Variável
ν	Viscosidade cinemática (cSt) ou ($m^2.s^{-1}$)
μ	Viscosidade dinâmica (cP) ou ($Pa.s$)
\forall	Volume (m^3)

Subíndices

∞	Ambiente
----------	----------

<i>a</i>	Anular
<i>A</i>	Área
<i>D</i>	Arrasto (<i>drag</i>)
<i>b</i>	Bolha
<i>b'</i>	Bolha deformada
<i>Tb</i>	Bolha de Taylor
<i>GC</i>	Centro gasoso (<i>gas core</i>)
<i>c</i>	Compressível
<i>bd</i>	Corpo (<i>body</i>)
<i>TD</i>	Dispersão turbulenta (<i>turbulent dispersion</i>)
\emptyset	Direção angular da coordenada cilíndrica
<i>z</i>	Direção cartesiana ou direção axial da coordenada cilíndrica
<i>r</i>	Direção radial da coordenada cilíndrica ou significado de relativa
<i>k</i>	Energia cinética turbulenta ou fase <i>k</i>
<i>ext</i>	Externo
<i>f</i>	Face
<i>p</i>	Fase ou análise em pressão constante
<i>q</i>	Fase
<i>Fext</i>	Filme externo
<i>Fint</i>	Filme interno
<i>G</i>	Gás
<i>h</i>	Hidráulico
<i>ini</i>	Inicial
<i>I</i>	Interface
<i>int</i>	Interno
<i>L</i>	Líquido
<i>WL</i>	Lubrificação de parede (<i>wall lubrication</i>)
ρ	Massa específica
<i>MV</i>	Massa virtual (<i>virtual mass</i>)
<i>máx</i>	Máximo
<i>m</i>	Médio
<i>mix</i>	Mistura
<i>M</i>	Motor

i	Nível de análise
j	Nível de análise
W	Parede (<i>wall</i>)
lT	Perdas maiores e perdas menores
e	Ponto cardeal para o sentido leste
n	Ponto cardeal para o sentido norte ou direção normal
w	Ponto cardeal para o sentido oeste
s	Ponto cardeal para o sentido sul
S	<i>Shroud</i>
SC	Sistema de controle
ls	<i>Slug</i> líquido (<i>liquid slug</i>)
sf	Superfície
Lt	Sustentação (<i>lift</i>)
t	Tangencial ou tempo
ε	Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta
ω	Taxa específica de dissipação da energia cinética turbulenta
T	Turbulenta
su	Unidade <i>slug</i> (<i>slug unit</i>)
VC	Volume de controle

Superíndices

Re	Reynolds
X_k	Variável ponderada pela função indicadora da fase k
$X_k \rho_k$	Variável ponderada pela função indicadora e massa específica da fase k
T	Turbulento

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	26
2	ESTADO DA ARTE	35
2.1	Conceitos do escoamento Multifásico	35
2.2	Escoamentos Multifásicos utilizando Fluidodinâmica Computacional	39
2.3	Estudos experimentais e análises analíticas ou numéricas aplicadas à BCS.....	42
3	DESENVOLVIMENTO TEÓRICO	45
3.1	O Método dos Volumes Finitos	45
3.2	Formulação Explícita e Implícita	46
3.3	O acoplamento pressão-velocidade	47
3.4	A modelagem da turbulência.....	48
3.5	Convecção em um anular vertical	56
3.6	Modelagem matemática do escoamento multifásico	60
3.7	Modelagem matemática das forças interfaciais	67
3.8	Modelagem matemática da transferência de calor em um escoamento anular multifásico	70
3.8.1	Transferência de calor no escoamento anular vertical monofásico	72
3.8.2	Transferência de calor no padrão multifásico <i>bubbly</i> e disperso em um escoamento anular	74
3.8.3	Transferência de calor no padrão multifásico anular em um escoamento anular	75
3.8.4	Transferência de calor no padrão multifásico <i>slug</i> em um escoamento anular	77
4	DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO	78

4.1	Abordagem numérica	78
4.1.1	A primeira geometria elaborada e sua malha.....	78
4.1.2	A segunda geometria elaborada e suas malhas	83
4.2	Recurso computacional	86
4.3	Análise da otimização do uso dos processadores.....	86
4.4	Estudo de sensibilidade de malha.....	87
4.5	Estratégias para as simulações	90
4.6	Parâmetros e condições de contorno	91
4.6.1	Testes monofásicos	91
4.6.2	Simulações multifásicas.....	92
5	RESULTADOS E ANÁLISES	95
5.1	Testes monofásicos	95
5.2	Simulações multifásicas e suas validações.....	102
5.2.1	A primeira simulação multifásica	105
5.2.2	A segunda simulação multifásica.....	128
6	CONCLUSÃO	146
	REFERÊNCIAS	149
	APÊNDICE A – TENSÃO CISALHANTE NAS PAREDES DE UM ANULAR VERTICAL	154
	APÊNDICE B – O MODELO DE DOIS FLUIDOS	159
B.1	Demonstração da equação geral de balanço para qualquer propriedade extensiva	159
B.2	Conservação da massa	160

B.3 Conservação da quantidade de movimento linear	161
B.4 Conservação da energia	162
B.5 Transformação na derivada material.....	163
B.6 Equações de energia.....	164
B.7 Segunda Lei da Termodinâmica: A inequação da entropia	167
B.8 Equações médias de balanço: Análise macroscópica	168
B.10 Transporte de massa.....	173
B.11 Transporte de movimento	174
B.12 Transporte de energia.....	176
B.13 Transformação na derivada material em termos médios	182
B.14 Equações médias de energia	183
B.15 Segunda Lei da Termodinâmica: A inequação da entropia em termos médios.....	186
APÊNDICE C – TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM ANULAR VERTICAL....	188
C.1 – Dedução para um escoamento anular vertical monofásico.....	188
C.2 – Dedução para um padrão multifásico <i>bubbly</i> e disperso em um escoamento anular....	192
C.3 – Dedução para um padrão multifásico anular em um escoamento anular.....	193

Capítulo 1

1 INTRODUÇÃO

Bombas são máquinas de fluxo que possuem a capacidade de alterar o estado do fluido por meio do fornecimento de potência. Essa alteração no estado é traduzida como um incremento de pressão e, em casos típicos, simultaneamente como um pequeno aumento em sua temperatura. Em sua grande maioria, as bombas operam apenas com líquido; excepcionalmente, é possível que haja uma operação com mistura de líquido e gás, isto é, um escoamento multifásico. Ou seja, energia é necessariamente adicionada para que o dispositivo realize trabalho sobre o fluido.

O *Hydraulic Institute*, por meio de sua norma *HI 9.1-9.5-2015*, classifica essas máquinas em dois grandes grupos: turbobombas e bombas de deslocamento positivo (também conhecidas como bombas volumétricas). As turbobombas possuem um rotor com palhetas e/ou lâminas em contato direto com o fluido. Esse elemento, quando em funcionamento, provoca efeitos dinâmicos como o surgimento de forças centrífugas e/ou de sustentação, ocasionando uma depressão em sua entrada e conseqüente incremento de velocidade ao escoamento. Após a passagem pelo rotor, o fluido é direcionado para um difusor onde ocorre a conversão da energia cinética em energia potencial. Esses efeitos são facilmente explicados pela equação da quantidade de movimento linear. Já as bombas volumétricas apresentam geometria e princípio de funcionamento distintos. Para essas, uma dada quantidade de fluido é admitida e retida no interior do equipamento. Por conseguinte, o líquido é comprimido até a pressão de descarga e deslocado por completo através da tubulação a jusante (Silva, 2007). Isto significa que há variação de pressão dentro da cavidade da máquina de acordo com a sua variação de volume: na admissão a pressão é baixa enquanto no recalque a pressão é alta. Segundo Fox et al. (2014), nesses tipos de equipamentos, a transferência de energia é feita por variações de volume que ocorrem devido ao movimento da fronteira na qual o fluido está confinado.

As turbobombas são as mais utilizadas nas indústrias em geral, com destaque para a bomba centrífuga de eixo horizontal. Uma bomba centrífuga submersa (BCS) é uma turbobomba e, como o próprio nome diz, trabalham submersas. Podem trabalhar tanto com o eixo totalmente vertical quanto na orientação quase-horizontal, com 5° em relação ao solo (aplicação marinha). Como exposto na figura 1, um cabo de energia elétrica parte da superfície onde a BCS está instalada e tem o seu fim na região superior do motor elétrico. Este é o último elemento do

conjunto, visto que se localiza na parte inferior do equipamento. O motor é acoplado por meio do selo protetor à uma bomba centrífuga de múltiplos estágios, contendo em cada um deles um difusor fixo e um impelidor rotativo. Ademais, há um separador de gás – após o selo e na região inicial da bomba – para que seja feita a separação dos fluidos. No entanto esse elemento requer uma linha dedicada para o escoamento do gás separado até a plataforma de produção. De acordo com Francisco Bacellar¹, é usual a presença de um manuseador de gás nos primeiros estágios da bomba, o qual não realiza a separação dos fluidos, mas condiciona para os demais impelidores e difusores do equipamento.

Figura 1 - Esquemático de uma BCS com seus principais elementos.



Fonte: O'bryan & Tran (2009) e adaptado pelo autor.

A BCS é um método de elevação artificial de petróleo. É utilizada quando os poços não possuem pressão suficiente para que a elevação ocorra naturalmente de modo a atingir as taxas necessárias de produção. A BCS é normalmente empregada onde se requer vazões de média para alta taxa de produção (Barrios & Prado, 2011)². Segundo Tosta da Silva (2010), o Brasil

¹ Francisco Raphael Ribeiro Bacellar é graduado e mestre em Engenharia Elétrica na linha de pesquisa em Sistemas de Controle do Bombeio Centrífugo Submerso em Sistemas Offshore. Atualmente é Engenheiro de Petróleo da Petrobras atuando nas competências técnicas de elevação e escoamento em águas profundas.

² Os autores não informam vazões típicas da operação de uma BCS. No entanto, a primeira utilização mundial de uma BCS em águas profundas (1109 m de lâmina d'água) foi em 1998 no poço RJS-477A de Albacora Leste, na Bacia de Campos. A BCS operou com uma vazão de petróleo de 600 m³/d. Em 2007, esse tipo de bombeamento foi aplicado no Campo de Jubarte elevando a produção em 140%, com uma vazão próxima de 3800 m³/d (Morais,

foi pioneiro na utilização da BCS como bombeamento submarino, instalando-a em um poço com árvore de natal molhada (ANM)³. Devido a expansão da exploração dos poços de águas profundas e ultra profundas da costa brasileira, a tendência é que esse tipo de elevação seja cada vez mais utilizado.

Bombas centrífugas são projetadas para operarem com líquidos monofásicos. Suas curvas características são obtidas por meio de ensaios em bancada para a água. Quando há a presença de gás no escoamento, o desempenho da bomba é afetado negativamente. Ou seja, a curva de altura manométrica é deslocada de tal forma que a energia fornecida pela bomba para o fluido será sempre menor do que em uma operação ideal, diminuindo a eficiência do equipamento: também há o deslocamento de sua respectiva curva. Até mesmo uma fração pequena de gás pode acarretar uma significativa perda de elevação e vazão necessária para a produção. A figura 2 retrata o efeito da presença de gás na curva característica de altura manométrica de uma bomba centrífuga.

A geometria de uma BCS pode ocasionar problemas ainda maiores: a falha completa. Como o próprio fluido retirado do poço é responsável pelo resfriamento do motor, uma alta presença de gás livre provoca uma ineficiente dissipação de calor, dado que o calor específico de um gás é menor que de um líquido. Em outras palavras, esse é o cenário de um possível sobreaquecimento do motor. Esse é o objeto de estudo do presente trabalho; visa-se compreender como a presença de gás afeta a transferência de calor, visto que é possível diferentes padrões de escoamento multifásicos.

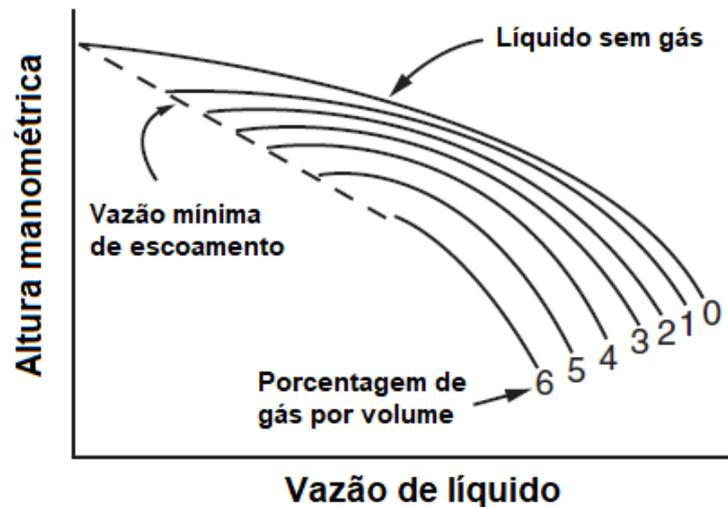
Outros contratemplos podem ocorrer quando há uma alta presença de gás: os fenômenos de *surging* e *gas lock* (Zhou & Sachdeva, 2010). O *surging* ocasiona vibrações excessivas, o que leva o equipamento a ser submetido a tensões não previstas e possíveis fadigas. O *gas lock*, por sua vez, é a existência de uma grande bolsa de gás trapeada que gera consequências como a parada de produção e até mesmo queima do motor por sobreaquecimento. Porém, este cenário é uma condição de baixa demanda de potência do motor. Dessa forma há uma baixa corrente elétrica e consequentemente menor geração de calor. Outras possíveis consequências do *gas*

2013). Segundo Rodrigues et al. (2005), vazões típicas para a utilização do Mobo no Campo de Jubarte são de 3200 m³/d a 4400 m³/d.

³ A primeira instalação no mundo de uma BCS submarina foi em 1994 no poço RJS-221 do Campo de Carapeba, na Bacia de Campos. A aplicação foi em águas rasas (86 m de lâmina d'água). Até então a BCS era utilizada apenas em poços terrestres. (Morais, 2013).

lock são danos na bomba até atingir a ruptura de seu eixo, devido ao sobreaquecimento dos componentes internos do equipamento⁴.

Figura 2 - Efeito da presença de gás na performance de uma bomba centrífuga.



Fonte: ANSI/HI 14.3-2019 e adaptado pelo autor.

A diferenciação entre BCS e bomba centrífuga submersa submarina (BCSS) está correlacionada a forma de completção do poço. Em um ambiente *offshore*, é possível existir a completção seca ou molhada. Para a árvore de natal seca (ANS), que é localizada na plataforma, a bomba é denominada BCS. Para a ANM, localizada no leito marinho, chama-se BCSS⁵. Quando estes equipamentos são instalados diretamente na cabeça do poço, junto com a ANM, onerosas desvantagens são notadas. Caso ocorra alguma falha na máquina, a produção do poço será afetada. Haverá, sobretudo, um enorme custo para reparo ou troca do equipamento⁶. Para evitar tais prejuízos, existem duas alternativas para proporcionar uma manutenção mais eficiente do sistema: (i) a utilização da BCSS em *skid* – instalado sob o leito marinho e fora do poço de produção; (ii) a aplicação via módulo de bombeio (Mobo), que consiste na utilização de um poço alojador para todo o conjunto. O Mobo é instalado a jusante da ANM, que por sua vez é instalada na cabeça do poço produtor. A distância entre os poços supracitados é cerca de 200 m (Rodrigues et al., 2005).

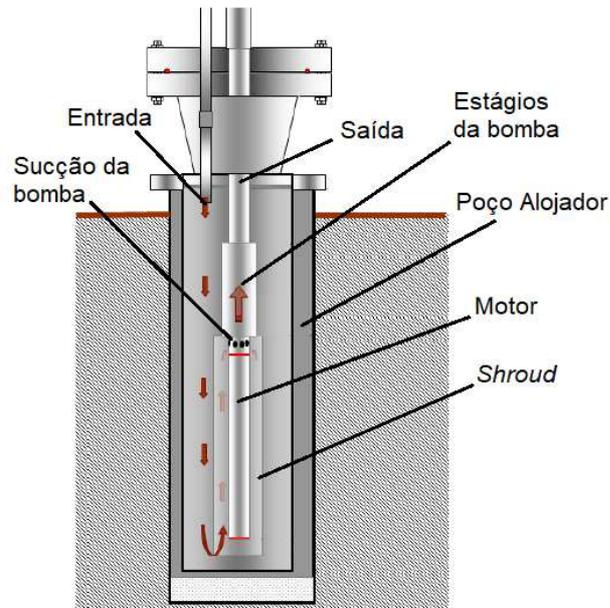
⁴ Crédito de argumento e aspecto técnico proveniente de Francisco Bacellar, após debate frutífero na banca.

⁵ Esclarecimento técnico incorporado após sugestão da banca.

⁶ Valores absolutos são de difíceis acessos por serem informações sigilosas das empresas, de cunho estratégico. Todavia, além das perdas de produção, os custos englobados são: substituição do equipamento e recursos como sonda marítima (que podem demorar dias para disponibilidade). Tais despesas podem alcançar a ordem de US\$ 400.000,00 por dia (Rodrigues et al. 2007 apud Viana & Manzela 2015).

Em uma BCSS, geralmente se utiliza um elemento adicional instalado em volta do motor: o *shroud*. Esse revestimento possui geometria cilíndrica e proporciona o aceleração do escoamento ascendente em torno do motor, uma vez que a área para o fluxo é menor (escoamento subsônico). Dessa forma, obtém-se um melhor resfriamento do motor. A representação do Mobo é exposta abaixo pela figura 3:

Figura 3 - Esquema do Mobo. As setas indicam o sentido do escoamento multifásico.



Fonte: Buson (2013) e adaptado pelo autor.

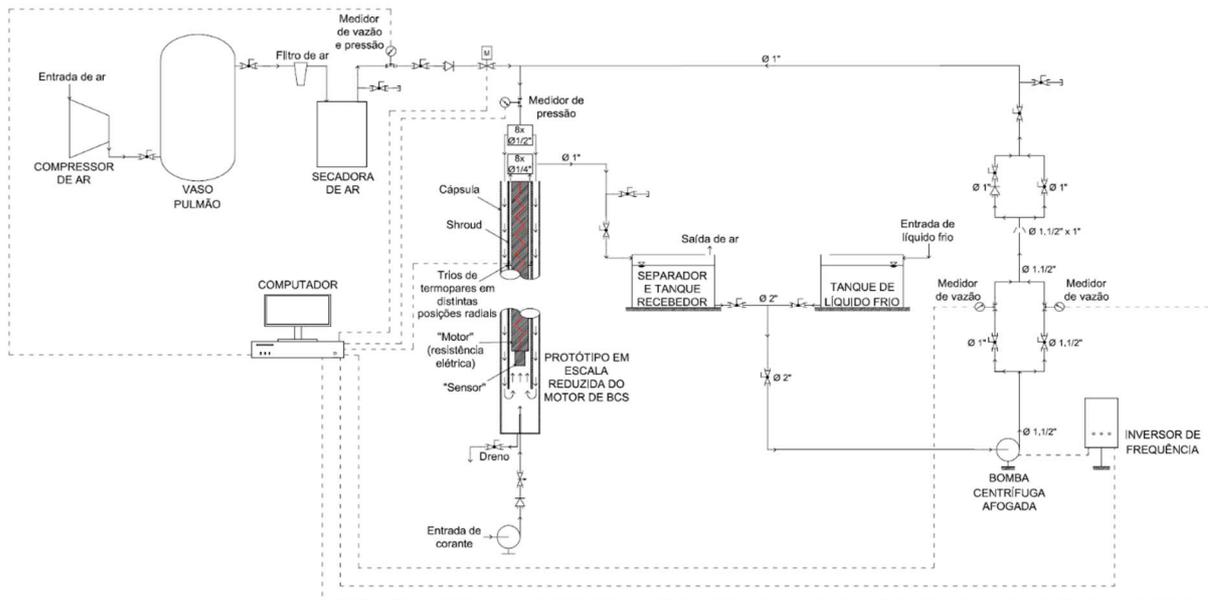
A entrada do escoamento é na região superior do módulo e descendente até região inferior do *shroud*. Por conseguinte, o fluxo se torna ascendente e ganha velocidade ao passar em torno do motor por conta da menor área presente. Após essa passagem o fluxo é sugado pela bomba e elevado até a região de interesse. Em resumo, o escoamento ocorre por meio de dois anulares: cápsula-*shroud* (a cápsula do Mobo está alojada no Poço Alojador) e *shroud*-motor, sendo o primeiro descendente e o segundo ascendente. Ambos contribuem para a dissipação do calor proveniente do motor, porém com magnitudes distintas dessa taxa; o resfriamento é favorecido por conta do incremento da velocidade no anular interno, enquanto a transferência de calor para o anular externo depende do material do *shroud*.

Mendonça & Filho (2018) dimensionaram um protótipo em escala reduzida do motor de BCS com o objetivo de atingir a semelhança dinâmica entre o modelo real e o projetado. Para tanto, por meio da técnica de Pi de Buckingham, foram obtidos os grupos adimensionais envolvidos em um escoamento anular vertical com transferência de calor. O estudo verificou a presença de pelo menos dez grupos adimensionais que influenciam o fluxo em questão. O experimento foi

concebido para propor a maior similaridade hidrodinâmica possível, isto é, respeitando a igualdade ou proximidade dos números adimensionais levantados. Dada a grande quantidade desses parâmetros, não é viável alcançar na bancada de testes a equivalência de todos os grupos averiguados. Contudo, as razões de aspectos em conjunto com os números de Reynolds, Stanton, Prandtl e Richardson (os quais possuem enorme importância nesse problema termofluido) são atingidos como desejados, de forma a proporcionar no experimento uma fiel representação da física presente no protótipo real.

Com base no proposto por Mendonça & Filho (2018), a esquematização de toda bancada experimental construída no Núcleo de Estudos em Escoamento e Medição de Óleo e Gás (Nemog), na Universidade Federal do Espírito Santo é apresentada na figura 4:

Figura 4 - Esquemático da bancada experimental do protótipo em escala reduzida do motor de BCS localizado no Nemog, Ufes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ar comprimido é injetado no sistema a partir de uma válvula de controle de vazão com atuador elétrico. O controle da bomba é realizado pelo inversor de frequência presente, variando a rotação do rotor para uma determinada pressão de recalque. A mistura é então inserida na parte superior do protótipo a partir de oito tubos flexíveis de diâmetro nominal 1/2", tornando-se ascendente ao final do *shroud*. A partir daí, o escoamento bifásico permanece em contato direto com o cilindro cujo interior se faz presente uma resistência elétrica que reproduz a fonte de calor proveniente do motor. O fluido é succionado do experimento por oito tubos flexíveis de diâmetro nominal 1/4", simulando a sucção da bomba. O fluxo é direcionado para um tanque separador, que por sua vez se interliga em um outro com a presença de líquido frio. De acordo

com a abertura das válvulas esferas a jusante dos tanques, é possível que a aspiração da bomba seja com uma junção de líquido quente com frio ou que seja apenas líquido frio. Caso não haja necessidade de operar em um sistema fechado contínuo, é possível aguardar até que o tanque recebedor entre em equilíbrio térmico com o ambiente. No recalque da bomba há dois ramos, cada um com um medidor de vazão distinto. Tal implementação se faz necessária por conta do intervalo de medição de cada elemento, de modo que o fluxo é encaminhado para um ou outro dependendo da vazão da bomba. Em seguida, o líquido pode ser escoado através de uma válvula de retenção ou por um *by-pass* desta, a fim de evitar uma maior perda de carga e desde que não haja a necessidade da utilização dessa válvula em um dado experimento. Todos os medidores transmitem um sinal da medição para um computador, que controla a bancada de testes. O protótipo em escala reduzida do motor de BCS concebido no Nemog é exibido na figura 5.

Figura 5 - Protótipo em escala reduzida do motor de BCS localizado no Nemog, Ufes. Por conta do sistema de roldana, é possível realizar o experimento em qualquer angulação de 0 a 90° em relação ao piso.



Fonte: Autor.

De acordo com os fundamentos expostos, é possível realizar estudos com base no protótipo de escala reduzida a fim de compreender o processo físico que ocorre no protótipo real. Dado que experimentos podem ser realizados na bancada concebida, uma validação numérica também pode ser obtida a partir desses. Por essa razão, o presente estudo realiza análises numéricas do

experimento em escala reduzida de um motor de BCS, o qual alcança de forma satisfatória a semelhança dinâmica com o equipamento verdadeiro.

No entanto, a concepção do protótipo em escala reduzida proposto por Mendonça & Filho (2018) considerou o fluido líquido sendo etilenoglicol. Uma vez que este fluido é mais viscoso do que a água, e conseqüentemente requer uma operação mais cuidadosa, utilizou-se água líquida para a primeira fase experimental efetuada na bancada presente no Nemog. Dessa maneira, com a finalidade de obter uma adequada validação numérica, as simulações efetuadas no presente trabalho também utilizam a água como o fluido líquido.

O objetivo deste trabalho é obter via análises de *CFD* os principais parâmetros da transferência de calor no escoamento anular bifásico em torno do motor da BCS, em condições típicas de operação. A partir da similaridade dinâmica entre o protótipo real e em escala reduzida, a condição de operação recai em um padrão *slug*. Parâmetros como gradientes de velocidade e temperatura, e adimensionais como número de Reynolds e Nusselt são avaliados tanto em um escoamento monofásico (água) quanto bifásico (fase primária água e fase secundária ar) para as regiões do anular interno do Mobo e na parede do motor. Assim, é estudada a dissipação de calor em um regime *slug* e comparado com a dissipação em um fluxo monofásico. A fim de compreender a hidrodinâmica e transferência de calor presentes nesse escoamento bifásico anular, duas condições distintas de operação na posição vertical são impostas para averiguar o efeito do escoamento multifásico na dissipação de calor do motor. Visa-se conhecer as conseqüências que as bolhas de gás trazem para esse resfriamento com a influência da gravidade no fenômeno de transporte. É demonstrado um método de simulação possível para descrição do escoamento real, uma vez que a validação numérica é constada pelo experimento presente no Nemog a partir do mapa generalizado de padrões bifásicos realizados por Oliveira et al. (2021) – estudo realizado para água e ar. Deste modo, outras simulações poderão ser realizadas no intuito de otimizar a BCS, em virtude de propor um melhor arrefecimento para o motor com a intenção de aumentar a vida útil do equipamento e atingir menores gastos para as indústrias.

O texto é estruturado em capítulos. O primeiro capítulo propõe introduzir o problema, com motivações para o estudo e objetivos. O segundo capítulo aborda o estado da arte, apresentando os conceitos básicos de escoamentos multifásicos e os trabalhos realizados pela comunidade acadêmica. No terceiro capítulo, expõe-se o embasamento teórico sobre a modelagem do fenômeno de transporte existente no problema. O quarto capítulo traz o desenvolvimento computacional e sua abordagem. Em seguida, no capítulo cinco, análises e resultados são

exibidos. Por fim, no capítulo seis a dissertação é concluída. Ainda, são presentes apêndices nos quais deduções analíticas de parâmetros hidrodinâmicos e de transferência de calor são expostas, tais como perfis de temperatura, velocidade e tensão cisalhante nas paredes. Análises das equações locais de conservação de energia térmica também são realizadas para cada padrão bifásico de interesse. Ademais, é demonstrada a modelagem matemática clássica do escoamento multifásico que envolve o modelo de dois fluidos, aplicado para um referencial Euleriano.

Capítulo 2

2 ESTADO DA ARTE

2.1 Conceitos do escoamento Multifásico

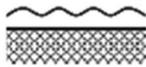
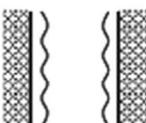
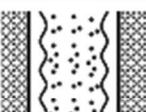
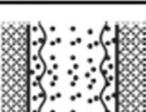
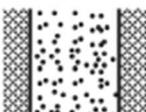
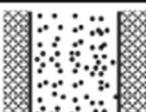
A importância do estudo de escoamentos multifásicos é nítida quando analisamos as questões físicas ao nosso redor. Situações em que há a presença de tais escoamentos não faltam: na indústria é possível encontrá-los facilmente ao analisar sistemas de potência, de transferência de calor e do processo em geral. Evaporadores, condensadores, caldeiras, torres de resfriamento, refrigeradores, tubulações industriais, vasos de pressão, motores de combustão interna e condicionadores de ar são apenas exemplos rotineiros nos quais há a existência de fluxos multifásicos. Em sistemas de lubrificação por vezes também é presente tal característica para otimizar os efeitos desejados. No meio ambiente, esses escoamentos estão presentes nos estudos e combates à poluição do ar e da água, por exemplo. Até mesmo no nosso corpo é predominante a presença desse tipo de fluxo: o sangue é composto pelo plasma – que corresponde à parte líquida – e outras diversas partículas e elementos celulares como as hemácias, leucócitos e plaquetas. Logo, o fluxo do sistema cardiovascular é multifásico, assim como o escoamento do sistema respiratório e gastrointestinal. No entanto, os escoamentos multifásicos presentes na indústria petrolífera possuem características que tornam o estudo ainda mais árduo: a natureza complexa dos fluidos e a geometria em que ocorre o escoamento em conjunto com as variações de estado que podem ocorrer em um poço, ocasionam em fenômenos físicos ímpares. (Caetano, 1984).

Escoamentos bifásicos são caracterizados pela presença de várias interfaces que separam duas fases imiscíveis. Se mais do que duas fases distintas estão presentes, o escoamento é denominado de multifásico (Morel, 2015). Usualmente, um fluxo multifásico é na realidade um fluxo bifásico. Conforme é exposto no Apêndice B, um escoamento com mais de duas fases torna o problema mais trabalhoso, porém, a maioria dos fundamentos da física em questão já são expostos num escoamento bifásico.

Ishii (1975 apud Ishii & Hibiki, 2011) classificou o escoamento bifásico em quatro grupos de misturas: gás-sólido, gás-líquido, líquido-sólido e líquidos imiscíveis. Esse tipo de escoamento também pode ser caracterizado pela geometria de interfaces entre as fases, sendo eles: *bubbly flow* (bolhas), *slug/plug flow* (pistonado), *churn flow* (agitado) e *annular flow* (anular). Ishii (1975 apud Ishii & Hibiki, 2011) ainda traz variações entre os tipos citados acima, como por

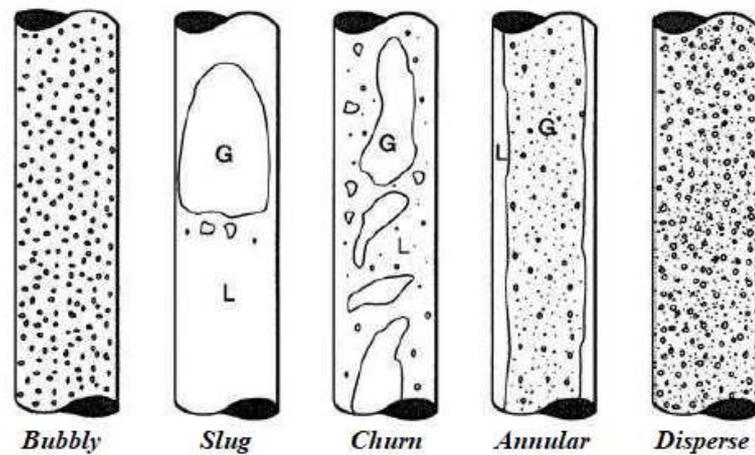
exemplo o *bubbly annular flow* e o *droplet annular flow*. Todas essas classificações de acordo com as geometrias de interfaces são subdivididas dentro da classe do escoamento: separado, misto ou disperso.

Tabela 1 - Classificação do escoamento bifásico.

Classe	Regimes Típicos	Geometria do escoamento	Configuração	Exemplos
Escoamentos Separados	<i>Film flow</i>		Filme líquido no gás ou filme gasoso no líquido	Condensação ou ebulição do filme
	<i>Annular flow</i>		Centro líquido e filme gasoso ou Centro gasoso e filme líquido	Ebulição do filme; Caldeiras
	<i>Jet flow</i>		Jato líquido no gás ou Jato gasoso no líquido	Jato de fluido; Borrifador
Escoamentos Mistos ou Transicionais	<i>Cap, Slug or Churn-turbulent flow</i>		Bolsa de gás no líquido	Ascensão de gases num espaço confinado
	<i>Bubbly annular flow</i>		Bolhas de gás no filme líquido com o centro gasoso	Evaporadores com nucleação
	<i>Droplet annular flow</i>		Centro gasoso com gotículas e filme líquido	Gerador de vapor
	<i>Bubbly droplet annular flow</i>		Centro gasoso com gotículas e filme líquido com bolhas de gás	Canal de reator nuclear em ebulição
Escoamentos Dispersos	<i>Bubbly flow</i>		Bolhas de gás no líquido	Reator químico
	<i>Droplet flow</i>		Gotículas de líquido no gás	Resfriamento por spray
	<i>Particulate flow</i>		Partículas sólidas no líquido ou gás	Transporte de partículas granulares

Fonte: Ishii & Hibiki (2011) e adaptado pelo autor.

Figura 6 - Padrões do escoamento bifásico vertical em um tubo. “G” representa a fase gasosa e “L” a fase líquida



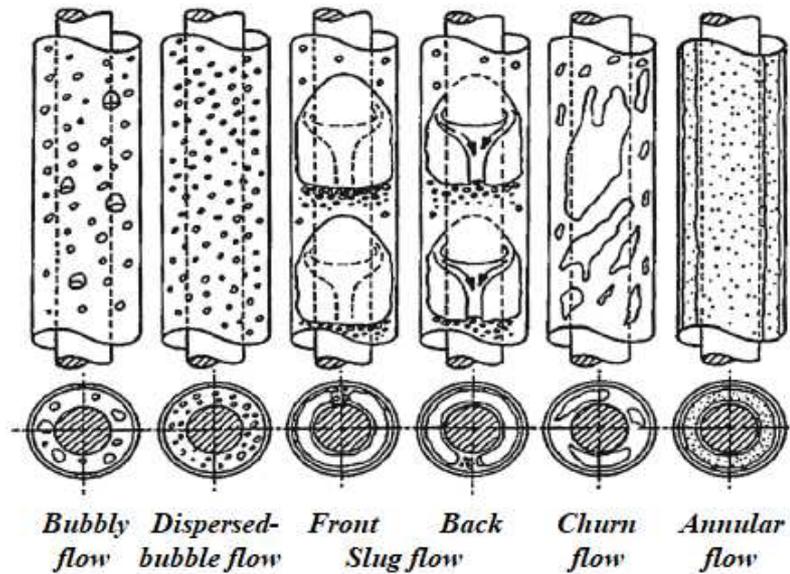
Fonte: Weisman (1983) e adaptado pelo autor.

Os padrões ou regimes citados dependem tanto das naturezas dos fluidos quanto dos parâmetros do fluxo, ou seja: propriedades termo fluídicas, vazões, geometria do escoamento, inclinação e materiais presentes.

À luz dessas variáveis, um estudo notável é o de Caetano (1984)⁷. A partir de sua tese de doutorado, o engenheiro da Petrobras desenvolveu um trabalho considerado fundamental na área do escoamento anular vertical bifásico. Para tanto, Caetano realizou experimentos variando os parâmetros mencionados acima e, a partir desses, desenvolveu modelos matemáticos a fim de representar a física presente. Um de seus resultados foram as diferenças dos padrões de escoamento de um anular quando comparado a um tubo. O formato das grandes bolhas de gás é distorcido tal como as bolhas de Taylor. A presença de dois filmes no escoamento anular (*annular flow*) – um em torno do tubo concêntrico e outro no revestimento – também é evidenciado. No entanto, a nomenclatura de todos os regimes são os mesmos habitualmente utilizados pela literatura para tubos.

⁷ Elísio Caetano Filho é Engenheiro Mecânico e possui *Ph.D.* em Engenharia de Petróleo pela Universidade de Tulsa. Atualmente, é Consultor Sênior da Petrobras e sua tese de doutorado de 1984 é citada de forma vasta em artigos científicos e demais trabalhos acadêmicos na área de escoamento anular vertical bifásico. Caetano possui enorme contribuição na evolução do sistema da BCSS em condições multifásicas.

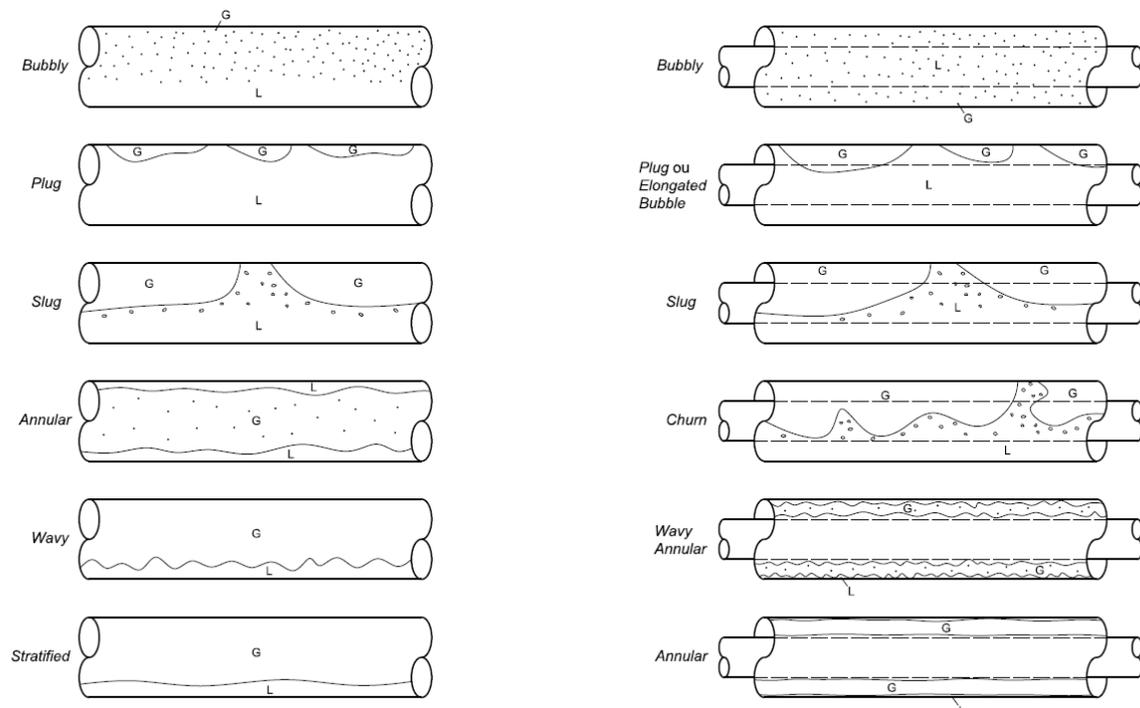
Figura 7 - Padrões do escoamento bifásico vertical em um anular.



Fonte: Caetano (1984) e adaptado pelo autor.

As figuras 6 e 7 retratam os padrões de escoamento vertical de líquido-gás para um tubo e um anular, respectivamente. Ao se tratar de escoamentos horizontais, os padrões sofrem alterações conforme é exposto abaixo pela figura 8:

Figura 8 - Principais padrões do escoamento bifásico horizontal em um tubo (à esquerda) e em um anular (à direita). “G” representa a fase gasosa e “L” a fase líquida.



Fonte: Elaborado pelo autor. Definições retiradas de Lima (2016) e Lao & Eyo (2018).

2.2 Escoamentos Multifásicos utilizando Fluidodinâmica Computacional

A literatura expõe dois tipos de formulação macroscópica: o modelo de dois fluidos (*two-fluid model*) e o modelo de mistura (*mixture*). No primeiro, as equações de massa, momento e energia são tratadas separadamente para cada fase, de modo que há para cada equacionamento um termo de acoplamento entre as fases por meio das equações de *jump conditions*. Já no modelo de mistura, o fluido é tratado como um todo. Assim, há apenas três equações de conservações para uma única mistura, com a inclusão de uma equação a mais de difusão que leva em consideração as trocas de concentrações (Ishii & Hibiki, 2011).

A dinâmica dos fluidos pode ser analisada por dois referenciais distintos: Euleriano – cujas propriedades extensivas ou intensivas são observadas num ponto fixo no espaço, ou Lagrangeano – onde a avaliação das propriedades é realizada acompanhando o movimento da partícula pela sua linha de corrente. Via de regra, uma análise Lagrangeana se torna inviável devido às inúmeras partículas presentes e deformações que podem vir a ocorrer em um escoamento. Porém, existem certas aplicações nos escoamentos multifásicos nas quais é vantajoso trabalhar com uma análise conjunta Euler-Lagrange: fluxos que apresentam uma fase contínua (referencial Euleriano) e outra dispersa na primeira (referencial Lagrangeano), no intuito de acompanhar as partículas da fase secundária assim como analisar a transferência de calor e massa entre ambas. Para demais casos, a análise Euler-Euler é normalmente aplicada: todas as fases são estudadas pelo referencial Euleriano. Dessa maneira, desenvolve-se o conceito de fração volumétrica (Lima, 2016). A abordagem Euler-Euler pode ser utilizada tanto em escoamentos para ambas as fases contínuas quanto para uma fase dispersa (partículas sólidas, gotículas ou pequenas bolhas de gás). Ambas as formulações macroscópicas dos modelos de dois fluidos e mistura partem do referencial Euleriano, sendo este o mais importante e usualmente utilizado por conta de sua consistência na análise do volume de controle para o desenvolvimento das equações de conservações (Faghri & Zhang, 2019).

No *software* Ansys Fluent destacam-se três modelos com abordagem Euler-Euler: *Volume of Fluid (VOF)*, *Mixture* e *Eulerian*.

O modelo *VOF* soluciona uma única equação de movimento para os fluidos imiscíveis em conjunto com a fração volumétrica para cada fase. O objetivo principal desse modelo é o claro contorno e posicionamento da interface entre os fluidos, dado o rastreamento da fração volumétrica.

Para o modelo *Mixture*, são resolvidas as equações de conservações para a mistura, frações volumétricas das fases secundárias e expressões algébricas para as velocidades relativas (Ansys, 2021). Assume-se que há o equilíbrio local nas pequenas escalas espaciais do domínio para a utilização dessa abordagem. Todavia, sua maior aplicação é em escoamentos nos quais as fases são homogêneas (modelo homogêneo), com um forte acoplamento destas e com velocidades iguais.

Dentre esses modelos, o *Eulerian* é o mais completo. Este é o modelo de dois fluidos quando o escoamento é bifásico, ou de multifluidos quando são presentes três fases ou mais. As equações de conservações de cada fase são solucionadas por meio da fração volumétrica e termos de transporte interfaciais de cada uma, de forma que os campos de velocidades sejam distintos – alcança-se a dinâmica e desequilíbrio entre as fases (Ishii & Hibiki, 2011). Por conta do maior número de equações presentes, a formulação requer várias outras equações constitutivas para o fechamento do problema, como a inequação da entropia, equações de estado e demais modelagens como as transferências interfaciais e difusividades moleculares e turbulentas. A interação entre as fases deve ser bem descrita, com a correta modelagem das forças interfaciais existentes e transporte da área interfacial. Conseqüentemente, este é o método mais custoso computacionalmente.

Taha & Cui (2005) realizaram uma análise numérica do movimento de uma única bolha de Taylor em tubos verticais. Utilizaram o Ansys Fluent para implementar o modelo multifásico *VOF*, em uma geometria 2D com simetria axial e comprimento de 11 diâmetros. Para o modelo de turbulência, empregaram o RNG $k - \epsilon$. Segundo os autores, o regime *slug* é o mais importante padrão multifásico devido à sua grande presença em aplicações industriais. Tal regime é caracterizado por sua intermitência aleatória e instabilidade intrínseca. A partir do estudo, foram obtidos o formato e a velocidade do *slug* assim como o perfil da tensão de cisalhamento na parede. A dependência do formato da bolha com a viscosidade do líquido e tensão superficial também foi notada – a espessura do filme líquido presente em volta da bolha de Taylor é função dessa última propriedade.

Rzehak & Kriebitzsch (2014) estudaram via CFD o escoamento *bubbly* em um tubo utilizando a ferramenta OpenFOAM, a partir do modelo multifásico de dois fluidos (*two-fluid model*). Os resultados foram comparados com um estudo previamente realizado no Ansys CFX e dados experimentais. Para as interações entre fases, as seguintes forças interfaciais e seus respectivos modelos foram considerados: força de arrasto (*drag force*) sugerido por Ishii & Zuber (1979),

força de sustentação (*lift force*) por Tomiyama et al. (2002), força de parede (*wall lubrication force*) descrito por Hosowaka et al. (2002) e força de dispersão turbulenta (*turbulent dispersion force*) por Burns et al. (2004). O modelo de turbulência empregado foi o SST $k - \omega$ em uma geometria 2D com simetria axial. Segundo os autores, tanto a análise numérica por meio do OpenFOAM quanto pelo Ansys CFX gerou previsões boas dos perfis da fração volumétrica de gás e da velocidade do líquido, com resultados aceitáveis. Entretanto, a fração volumétrica de gás é superestimada na região próxima à parede no estudo com o OpenFOAM, e a viscosidade turbulenta é maior na solução por meio do Ansys CFX. A energia cinética turbulenta de ambas as análises numéricas possui grandes diferenças com os dados experimentais.

Lima (2016) aferiu o modelo *VOF* na caracterização de padrões de escoamento multifásicos (ar-água) em tubulação horizontal e inclinada, utilizando o Ansys Fluent e com validações experimentais – os resultados das simulações foram compatíveis com os regimes presentes nos experimentos. As dimensões da geometria foram 4,5 m de comprimento e 42 mm de diâmetro, havendo entradas separadas de água e ar em um formato em “y”. Para previsão dos efeitos da turbulência, Lima aplicou o modelo $k - \epsilon$ *Realizable* com funções de parede *Scalable*. Foi constatado que as menores escalas da turbulência não se mostraram presentes nas simulações, consequência do modelo adotado e possivelmente da resolução da malha.

Lote et al. (2018) aplicaram o modelo multifásico *Eulerian* em tubulação vertical para prever o padrão *bubbly*, empregando o Ansys Fluent. As análises foram realizadas em regime permanente e as interações entre as fases foram descritas pelas seguintes forças: força de arrasto (*drag force*) por Grace et al. (1976), força de sustentação (*lift force*) por Tomiyama et al. (2002), força de parede (*wall lubrication force*) descrito por Hosowaka et al. (2002) e força de dispersão turbulenta (*turbulent dispersion force*) por Burns et al. (2004). Para o tratamento da turbulência, inicialmente foi realizado um estudo da influência de todos os modelos $k - \epsilon$, $k - \omega$ e *RSM*: O último subestimou a fração de gás tanto no centro quanto próximo à parede, até certo ponto de inversão passando a superestimar tal parâmetro. Todos os demais modelos ($k - \epsilon$ *STD*, $k - \epsilon$ *RNG*, $k - \epsilon$ *Realizable*, $k - \omega$ *STD*, $k - \omega$ *BSL*) também superestimaram a fração de gás próxima à parede, exceto pelo modelo $k - \omega$ *SST* cujo resultado prevê uma queda conforme resultados experimentais obtidos. Dessa forma, o modelo $k - \omega$ *SST* foi o escolhido para prosseguir as simulações. A partir das análises e resultados validados experimentalmente, foi desenvolvida uma correlação para diâmetro da bolha – a qual é utilizada no presente estudo para referência de ordem de grandeza.

Salehi et al. (2019) desenvolveram um estudo experimental e computacional do escoamento ar-água em um anular vertical de comprimento maior que 40 diâmetros hidráulicos. Por meio do Ansys Fluent, foi utilizado o modelo multifásico *VOF* e empregado os modelos $k - \epsilon$ *Realizable* e $k - \omega$ *SST*. A comparação entre os dois é realizada: para o padrão *churn*, foi prevista uma fração volumétrica do gás maior e mais próxima do valor experimental, enquanto para o regime anular, o inverso ocorreu. Uma das constatações do estudo foi a assimetria entre as paredes interna e externa do perfil de parâmetros como a energia cinética turbulenta.

2.3 Estudos experimentais e análises analíticas ou numéricas aplicadas à BCS

Estudos relacionados à BCS possuem duas frentes de pesquisa distintas: (i) o fluxo multifásico presente no impelidor – que analisa a dinâmica e os padrões de escoamento nesse domínio rotativo com o intuito de investigar as consequências que a presença de gás traz no desempenho da bomba; (ii) o fluxo multifásico em torno do motor, no qual também é avaliado os padrões de escoamento existentes, entretanto o objetivo principal é verificar a velocidade ideal do fluido para o seu apropriado resfriamento e avaliar a taxa de dissipação de calor.

Para a primeira linha de pesquisa descrita, tanto estudos experimentais quanto computacionais são desenvolvidos. A motivação para essas investigações é dada pela ocorrência do fenômeno *surging*: quando há a presença de um escoamento multifásico, existe um ponto máximo na curva de altura manométrica que corresponde à uma certa fração de gás. A partir desse ponto, caso a fração de gás aumente, a operação da bomba é instável e há uma drástica redução no *head* fornecido, até atingir o *gas lock*. Estevam (2002) e Barrios & Prado (2011) estudaram tal problema experimentalmente e teoricamente – realizaram uma modelagem matemática da fluidodinâmica existente a fim de prever o comportamento do escoamento no impelidor, com posteriores visualizações experimentais. Zhu et al. (2019) também realizaram uma modelagem mecanicista para certas condições de escoamento. Morrison et al. (2016) investigaram experimentalmente o efeito da presença de gás no difusor de uma BCS a partir da técnica de tomografia por resistência elétrica. Vieira & Prado (2014) mostraram a partir de simulações que o comportamento instável e oscilatório da BCS pode ser proveniente das condições multifásicas existentes. Zhu et al. (2018) desenvolveram uma análise numérica a partir do Ansys Fluent a fim de obter uma modelagem computacional que possa descrever o escoamento multifásico real.

Para a segunda linha de pesquisa anteriormente citada, Rodriguez et al. (2000) obtiveram via Ansys CFX a velocidade do escoamento monofásico para o apropriado resfriamento do motor:

0,85 m/s considerando um óleo de viscosidade 78 cP à 320 K. Tal resultado é acima do sugerido por Brown (1980): 0,3048 m/s.

Tosta da Silva (2010) realizou um abrangente estudo do escoamento bifásico em torno do motor da BCS com validações experimentais considerando um fluxo ar-água. A partir do modelo validado, simulações posteriores foram efetuadas empregando propriedades típicas dos fluidos existentes no Campo de Jubarte, com condições de contorno semelhantes às operacionais no Mobo. O objetivo era analisar a dinâmica do escoamento e verificar a influência da inserção de furos dispersos de forma axial e helicoidal no *shroud*. Para tanto, foi utilizado o Ansys CFX e aplicado o modelo de dois fluidos considerando apenas a força de arrasto na interação interfacial entre as fases. Para a turbulência, foi imposto o modelo $k - \epsilon$. Os testes de malha foram realizados com seis malhas não estruturadas, em um escoamento monofásico e regime transiente, analisadas no tempo físico de 1,5 segundo – o suficiente para alcançar o regime permanente, segundo o autor. Foi constatado que os furos no *shroud* atenuam a descontinuidade de fases na região de sucção da BCS, por conta da ausência da descarga de um bolsão de gás do anular externo para o interno, obtendo um comportamento homogêneo da fração de gás livre. Esse acúmulo de gás ocorre na região superior do anular externo quando é atingido um regime permanente, proveniente da diferença entre as massas específicas dos fluidos envolvidos.

Betônico (2013) desenvolveu um modelo analítico para determinação da temperatura do motor de uma BCS, levando em consideração o comportamento acoplado entre o motor, bomba e sistema de produção. A partir de um balanço de energia, é realizada a modelagem da transferência de calor nos anulares externo e interno do Mobo. Considera-se o fluxo de calor apenas na direção radial para um fluido monofásico – suas propriedades são empregadas como uma mistura homogênea de óleo e água. O estudo abordou tanto a região de pleno desenvolvimento térmico quanto a região de entrada térmica. Também foi avaliada a transferência de calor entre o rotor e o estator do motor, assim como no seu interior. Por fim, o comportamento da temperatura do motor sob diversas condições de vazão e carga foi investigada, e sua distribuição foi apresentada em mapas.

Buson (2013) aplicou o modelo *VOF* utilizando o Ansys Fluent a fim de verificar a influência da fração volumétrica de gás na separação das fases líquida (oleosa) e gasosa no Mobo, considerando um escoamento laminar. Foram realizadas duas simulações distintas: um caso com 10% de fração volumétrica de gás e outro com 40%. As análises atingiram um tempo real de 4,2 segundos, sendo que a zona de interesse era a entrada do módulo (região superior do

anular externo) – observa-se nessa localização o acúmulo de gás para o caso de maior fração volumétrica.

Mendonça & Filho (2018) iniciaram as análises numéricas da convecção forçada presente na região do motor do Mobo, considerando um fluxo bifásico ar-etileno – premissa proveniente do estudo de semelhança dinâmica realizado para a concepção do experimento da BCS. Foi empregado o modelo *VOF* para caracterização do escoamento multifásico e *k – ε Realizable* com funções de parede para modelagem da turbulência. Em um primeiro momento, foi desenvolvido apenas a modelagem do escoamento multifásico, para posterior implementação da equação de energia para o estudo da transferência de calor. Porém, devido ao extremo esforço computacional, essa última análise não foi concluída.

Martins et al. (2020) realizaram via *CFD* um estudo sobre o resfriamento do motor de BCS instalada em *skid*. Para tanto, considerou-se uma geometria anular horizontal para um escoamento monofásico, e aplicou-se o modelo de turbulência *k – ε Standard* com um tratamento de parede. Foi imposta uma temperatura constante na parede do motor como condição de contorno para a transferência de calor, assim como na cápsula. Uma geometria de anular concêntrico e outras duas com diferentes excentricidades para o anular foram avaliadas a fim de compreender a influência desse parâmetro no arrefecimento do motor. Conclui-se que uma configuração excêntrica não é recomendada uma vez que o escoamento não será uniforme em torno do motor da BCS e conseqüentemente a transferência de calor ocorrerá de forma desigual no anular.

Dessa maneira, a literatura carece de uma modelagem adequada para descrever o fenômeno da transferência de calor em torno do motor da BCS. Dado que o escoamento presente é bifásico em uma geometria de dois anulares concêntricos, faz-se necessário entender os efeitos que todos esses parâmetros causam no resfriamento do motor bem como a condição limite do padrão *slug* em que ainda se alcança uma adequada dissipação de calor.

Capítulo 3

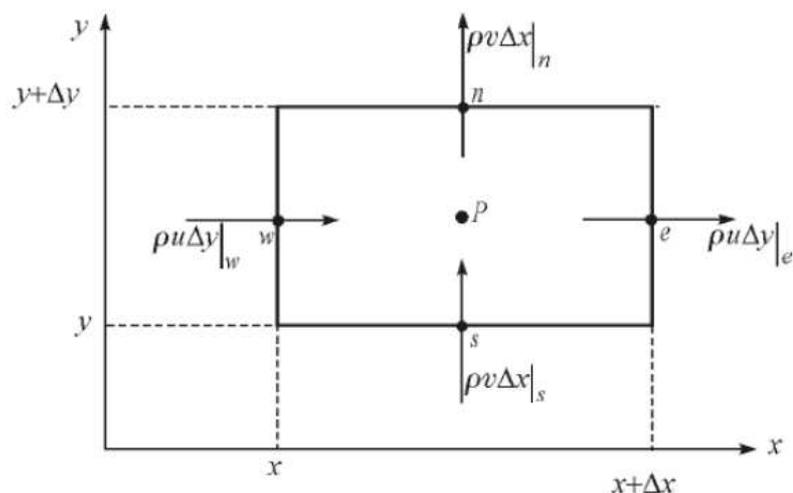
3 DESENVOLVIMENTO TEÓRICO

3.1 O Método dos Volumes Finitos

Um método numérico é a aplicação de algoritmos compostos por um número finito de operações sequenciadas, em expressões matemáticas comumente complexas. Dessa maneira é possível resolver a expressão via operações menos complicadas, a fim de obter uma solução aproximada. Na dinâmica dos fluidos, a modelagem matemática do fenômeno de transporte por vezes são equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares. A solução analítica destas equações é inviável ou até mesmo impossível para escoamentos não triviais. Quando este é o caso, utiliza-se de métodos numéricos para transformar as equações diferenciais definidas no domínio, em um sistema de equações algébricas – para que estas sejam solucionadas.

O Método dos Volumes Finitos consiste na realização de um balanço das equações de conservação que modelam a física em questão a partir de um volume elementar, que é um volume de controle finito. Por conseguinte, obtém-se aproximações numéricas a partir das integrações das equações diferenciais conservativas – dessa maneira, alcança-se uma solução para um número discreto de pontos. Por consequência, é gerado um desvio do resultado numérico para a solução analítica. Tal fato é denominado erro de discretização ou truncamento: ao aumentar o número discreto de pontos do domínio, isto é, diminuir as dimensões do volume de controle finito e aumentar a sua quantidade, é esperado que o erro tenda à zero e a solução numérica se aproxime cada vez mais da solução exata.

Figura 9 - Balanço da conservação da massa em um volume elementar.



Fonte: Maliska, 2017.

A figura 9 expõe um volume de controle finito de nó central P e dimensões Δx e Δy . As letras w , e , s e n representam os pontos cardeais para identificar as faces do volume elementar.

Dessa forma, o balanço de conservação de massa em uma formulação discreta em regime permanente é:

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (1)$$

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (2)$$

Realizando a divisão da equação (2) por $\Delta x \Delta y$, temos:

$$\frac{\rho u|_e - \rho u|_w}{\Delta x} + \frac{\rho v|_n - \rho v|_s}{\Delta y} = 0 \quad (3)$$

Ao aplicar o limite de (3) para Δx e Δy tendendo à zero, é obtida a definição da derivada. Dessa maneira, alcança-se a equação da continuidade em sua forma contínua:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (4)$$

3.2 Formulação Explícita e Implícita

Os métodos explícito e implícito são dois métodos distintos e presentes para a discretização do tempo e da fração volumétrica, a fim de realizar a interpolação entre os pontos nodais para a aproximação numérica. Em suma, a formulação explícita parte do prévio conhecimento da solução no nível de passo anterior para obtenção da solução em um nível acima, dessa forma:

$$a_{i+1} = a_i + p f(a_i) \quad (5)$$

No qual o subíndice expõe o nível avaliado, a é a variável analisada, p é o passo e $f(a_i)$ é a função em questão avaliada no nível i .

Em alternativa, a formulação implícita obtém a solução no nível requerido a partir de uma análise da função no mesmo nível, além da variável no nível anterior:

$$a_{i+1} = a_i + p f(a_{i+1}) \quad (6)$$

A formulação explícita requer apenas resolver um conjunto de equações algébricas, sendo estas não acopladas entre si. Em contrapartida, o método implícito implica em solucionar um sistema linear, que, por vezes, contém termos não lineares. Dessa maneira, a formulação implícita requer um maior esforço computacional em relação ao método explícito.

Segundo o manual do Ansys (2021) a formulação explícita resulta em uma solução numérica mais precisa quando comparado ao implícito. Contudo, o método explícito requer um maior refino no tempo, ou seja, um menor passo de tempo para que seja possível a estabilidade e convergência da solução. Tal característica é proveniente da própria formulação do método. Assim, para malhas com elementos pequenos, também são necessários baixos valores do passo de tempo. Caso essa exigência não seja satisfeita, o método numérico apresentará instabilidades e a solução ficará comprometida. Este fato não ocorre no método implícito, o que possibilita a utilização de passos de tempo maiores em relação à formulação explícita, e ocasiona em uma propagação mais rápida da informação.

Exemplificando as equações (5) e (6), para uma variável a dependente do tempo, i é o nível do tempo, p é o passo de tempo e $f(a)$ é a discretização espacial da variável $a(t)$.

As formulações explícita e implícita para a fração volumétrica são, respectivamente (Ansys, 2021):

$$\frac{\varphi_q^{i+1}\rho_q^{i+1}-\varphi_q^i\rho_q^i}{\Delta t}V + \sum_f \left(\rho_q^i \dot{Q}_f^i \varphi_{q,f}^i \right) = \left[\sum_{p=1}^i (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) + S_{\varphi_q} \right] \forall \quad (7)$$

$$\frac{\varphi_q^{i+1}\rho_q^{i+1}-\varphi_q^i\rho_q^i}{\Delta t}V + \sum_f \left(\rho_q^{i+1} \dot{Q}_f^{i+1} \varphi_{q,f}^{i+1} \right) = \left[\sum_{p=1}^i (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) + S_{\varphi_q} \right] \forall \quad (8)$$

Sendo φ_q a fração volumétrica da fase q , \dot{Q}_f a vazão volumétrica pela face e \forall o volume da célula. O termo $\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}$ é um balanço de massa interfacial e S_{φ_q} um termo fonte de massa da fase q .

3.3 O acoplamento pressão-velocidade

No intuito de resolver as equações de transporte que modelam a fluidodinâmica, dois métodos distintos são presentes: a solução acoplada (ou simultânea) ou a solução segregada. Para o primeiro método, em cada volume de controle, as variáveis são solucionadas de forma simultânea a partir de um único sistema linear. Nesse contexto, as não linearidades são resolvidas iterativamente. No entanto, a solução acoplada gera uma matriz resultante extremamente grande, apresentando um alto índice de esparsidade (Maliska, 2017). Dessa maneira, tal solução por vezes é inviável em problemas complexos, uma vez que necessita de grandes recursos computacionais.

A solução segregada trata cada equação de transporte como um sistema linear distinto. Atualizam-se os coeficientes das matrizes por conta das não linearidades, e gera-se uma equação evolutiva distinta para cada variável. O referido procedimento é efetuado em cada volume de controle. Ao realizar esse tratamento, para escoamentos incompressíveis, é ocasionado o problema do acoplamento pressão-velocidade. Nota-se que, do ponto de vista numérico, escoamentos são ditos incompressíveis quando a massa específica não varia fortemente com a variação de pressão (Maliska, 2017).

Para tanto, os métodos de acoplamento pressão-velocidade possuem como objetivo gerar uma equação evolutiva para a pressão a partir da equação de conservação da massa, uma vez que a equação de estado já não é mais adequada para a solução da pressão. Dessa forma, o problema da mecânica dos fluidos consiste em obter um campo de pressão que, ao ser utilizado na equação da quantidade de movimento, seja determinado um campo de velocidades que satisfaça a continuidade. Assim sendo, é imprescindível a escolha de um acoplamento pressão-velocidade adequado para a correta solução da fluidodinâmica.

No *software* Ansys Fluent, na maior parte dos casos é utilizado o *Pressure-Based Solver* para descrição de escoamentos de baixa velocidade (incompressíveis, número de Mach menor que 0,3). Utilizando-se deste, e para o modelo *Eulerian*, há dois métodos disponíveis para solucionar as equações de transporte: *Phase Coupled SIMPLE* e *Coupled*. O primeiro é uma reformulação para escoamentos multifásicos do método de acoplamento pressão-velocidade *SIMPLE*. O campo de velocidades é resolvido para cada fase de forma segregada. Já para o segundo método citado, os campos de velocidades são solucionados em conjunto com a pressão compartilhada entre as fases (Ansys, 2021).

3.4 A modelagem da turbulência

A turbulência é facilmente notada em nosso cotidiano. Ao observar esse tipo de escoamento, naturalmente percebe-se sua complexidade – que, por consequência, também é presente na modelagem matemática. Para a engenharia, a característica mais importante desse fenômeno é a alta difusividade, seja da massa, quantidade de movimento ou energia. Porém, outras características marcantes são: meio contínuo, natureza aleatória, elevados números de Reynolds, presença de vórtices, escoamentos altamente dissipativos e tridimensionais.

Para os modelos que serão debatidos no presente trabalho, a modelagem matemática do fenômeno da turbulência parte da decomposição de Reynolds para descrever certas propriedades, como a velocidade e pressão:

$$V_i = \bar{v}_i + v'_i \quad (9)$$

$$P = \bar{p} + p' \quad (10)$$

Onde \bar{v}_i é a velocidade média do fluxo e v'_i a flutuação da velocidade. O mesmo é análogo para a pressão. Dessa maneira, ao substituir o valor da variável em um valor médio e uma flutuação em torno da média, em conjunto com a avaliação das médias temporais de todos os termos (é empregado o operador de média e suas demais regras com a adoção de certas premissas), obtém-se equações médias das equações de transporte instantâneas. Apesar da redução no custo de processamento numérico com essa aplicação, o uso de equações médias provoca perdas de informações por conta das técnicas utilizadas na formulação e consequente detrimento na generalidade da solução.

As referidas definições e operações geram como consequência indesejável termos a mais nas equações de conservação, como na equação de Navier-Stokes. Surge, assim, a equação média de Reynolds e o chamado Tensor das Tensões de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{v}_j \bar{v}_i) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j} \right] + \rho g_i \quad (11)$$

$$\tau_{ij}^{Re} = -\overline{\rho v'_i v'_j} \quad (12)$$

De forma análoga, na equação da energia também é gerado um termo de produtos de flutuações. Ao aplicar as simplificações de condutividade térmica constante, escoamento subsônico de gás perfeito com número de Mach inferior a 0,3 ou líquido incompressível, sem fonte de energia e termos viscosos desprezíveis, a equação da energia em termos médios pode ser exposta da forma a seguir (Bejan, 2013):

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_i} - \overline{\rho v'_i \theta'} \right) \quad (13)$$

Onde θ é a temperatura e K a condutividade térmica do fluido. Assim, denomina-se fluxo turbulento de calor:

$$q_i^{''T} = -\overline{\rho v'_i \theta'} \quad (14)$$

No tratamento e demonstração do modelo de dois fluidos é exposta a equação de energia em sua forma geral.

Baseando-se de uma definição análoga à tensão cisalhante para escoamentos laminares e newtonianos, a hipótese de Boussinesq (1877) estabelece que o tensor de Reynolds é proporcional ao tensor taxa de deformação do escoamento médio. Este último, por sua vez, é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade do referido escoamento. O coeficiente de proporcionalidade é a viscosidade turbulenta μ_T . Tal variável não é uma propriedade do fluido, mas dos parâmetros do escoamento como velocidade e geometria. Assim:

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (15)$$

Anos depois, Kolmogorov generalizou a hipótese de Boussinesq para escoamentos incompressíveis:

$$-\overline{\rho v'_i v'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (16)$$

Sendo k a energia cinética turbulenta, definida como:

$$k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i} \quad (17)$$

O último termo da equação (16) refere-se à pressão dinâmica dos turbilhões. A desvantagem da hipótese de Boussinesq é que a viscosidade turbulenta μ_T é assumida como um escalar isotrópico, o que não é verdadeiro para todos os escoamentos turbulentos, uma vez que estes podem apresentar alto grau de anisotropia.

Ao distinguir-se o termo relacionado à pressão termodinâmica na equação da conservação de quantidade de movimento linear, o tensor de tensões viscosas para escoamentos turbulentos pode ser expresso como uma parcela devida à difusividade molecular e outra devida à difusividade turbulenta (White, 2006):

$$\overline{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{\rho v'_i v'_j} \quad (18)$$

$$\overline{\tau}_{ij} = \rho(\nu + \nu_T) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

Da mesma forma e como já dito, para o fluxo de calor também se gera um termo devido às flutuações turbulentas, logo, terá uma parcela por conta da difusividade térmica molecular e outra por conta da difusividade térmica turbulenta:

$$\overline{q_i''} = -K \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} + \rho c_p \overline{v'_i \theta'} \quad (20)$$

$$\overline{q_i''} = -\rho c_p (\alpha + \alpha_T) \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} \quad (21)$$

Sendo α a difusividade térmica molecular e expressa por:

$$\alpha = \frac{K}{\rho c_p} \quad (22)$$

E α_T a difusividade térmica turbulenta:

$$-\overline{v'_i \theta'} = \alpha_T \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_i} \quad (23)$$

Surge-se, assim, a definição do número de Prandtl turbulento, que é função apenas dos parâmetros do escoamento, não sendo uma propriedade do fluido:

$$Pr_T = \frac{\nu_T}{\alpha_T} \quad (24)$$

A partir da aplicação da hipótese de Boussinesq, é necessária a inclusão de equações de fechamento para o problema da turbulência, ou seja, modelos para obtenção da viscosidade turbulenta μ_T . A literatura traz três tipos principais: modelos algébricos (ou de zero equação diferencial), modelos de uma equação diferencial e modelos de duas equações diferenciais. A partir da definição que a viscosidade turbulenta é proporcional à velocidade e comprimento característico da escala de movimento, os referidos modelos diferem nas equações para determinar tais grandezas. Os modelos algébricos utilizam de estimativas algébricas (empíricas) para obtenção do comprimento característico. O modelo de uma equação utiliza de relações algébricas em conjunto com a solução de uma equação diferencial de transporte para uma escala turbulenta. Já o modelo de duas equações soluciona duas equações diferenciais de transporte para cada uma das duas escalas da turbulência. No presente estudo é utilizado um modelo de duas equações devido a sua relação de custo computacional e resultados oferecidos, já amplamente conhecidos pelas práticas da engenharia. A seguir são tratados os modelos $k - \varepsilon$ e $k - \omega$.

O modelo $k - \varepsilon$ foi proposto inicialmente em 1972 por Launder e Spalding. Consiste em solucionar uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta k e outra para a taxa de dissipação ε . Fisicamente ε representa a taxa em que a energia cinética turbulenta é convertida em energia térmica por conta da viscosidade molecular. Essa dissipação de energia

ocorre nas menores escalas da turbulência, em outras palavras, há uma cascata de energia das maiores escalas até as menores, conforme proposto por Kolmogorov.

Ao assumir que a viscosidade turbulenta é proporcional à velocidade e comprimento característicos da escala de movimento, temos:

$$\mu_T = \rho l \sqrt{k} \quad (25)$$

Onde:

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (26)$$

Assim:

$$\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (27)$$

Na equação (27), C_μ é uma constante. Dependendo da variação do modelo em questão, essa constante possui valor distinto ou é calculada para cada volume de controle. No Ansys Fluent há três tipos de modelos $k - \varepsilon$ disponíveis: *Standard*, *Renormalization-group (RNG)* e *Realizable* – todos eles possuem formulações similares, porém diferem no cálculo da viscosidade turbulenta, nos distintos números de Prandtl turbulentos nas equações de transporte de k e ε , e nos termos de geração e destruição na equação de ε (Ansys, 2021). Segundo o manual do Ansys, a desvantagem de alguns desses modelos é insensibilidade a gradientes adversos de pressão e separação da camada limite, prevendo um atraso nessa separação e de modo reduzido a resultados experimentais. O modelo $k - \varepsilon$ *Realizable* é de uso mais recomendado por conta dos cálculos de C_μ para cada célula, modificações na equação de transporte de ε e o cumprimento de certas restrições matemáticas nas tensões de Reynolds, que são de acordo com a física da turbulência (Ansys, 2021). Para o modelo $k - \varepsilon$ *Standard* as equações diferenciais de transporte para a energia cinética turbulenta e taxa de dissipação são:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{t,k}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_c + S_k \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho \varepsilon v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{t,\varepsilon}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} (G_k + C_{3\varepsilon} G_b) - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (29)$$

Na equação (28), $Pr_{t,k}$ é o número de Prandtl turbulento para k ; G_k e G_b são termos de geração da energia cinética turbulenta, Y_c um termo de contribuição da flutuação em escoamentos compressíveis, e S_k um termo fonte. Na equação (26), $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, $C_{3\varepsilon}$, e $Pr_{t,\varepsilon}$ são constantes

empíricas (assim como $Pr_{t,k}$), onde o último representa o número de Prandtl turbulento ε . S_ε é um termo fonte para ε .

O modelo de turbulência $k - \omega$ onde ω é identificado como a raiz quadrada da média quadrática das flutuações de vorticidade foi inicialmente proposto por Wilcox em 1988. No entanto, para o modelo padrão, o Ansys Fluent utiliza uma versão de 1998 do mesmo autor. Dessa forma, é solucionada uma equação de transporte para k e outra para ω , que fisicamente representa a taxa específica de dissipação. Como o próprio nome indica, ε e ω são intrinsicamente interligados pela seguinte correlação:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{c_\mu k} \quad (30)$$

Dessa forma, a partir das equações (25), (26) e (30):

$$l = \frac{k^{1/2}}{\omega} \quad (31)$$

$$\mu_T = \alpha^* \rho \frac{k}{\omega} \quad (32)$$

Onde α^* é um coeficiente que pode ter uma correção para baixos números de Reynolds. Tal coeficiente pode assumir um valor no máximo igual à unidade.

No Ansys Fluent, há quatro tipos de modelos $k - \omega$ presentes: *Standard*, *Baseline (BSL)*, *Shear-stress transport (SST)* e *Generalized (GEKO)*. Os modelos *BSL* e *SST* diferem do *Standard* devido à uma mudança gradual por meio de uma *blending function* para o modelo $k - \varepsilon$ nas regiões mais afastadas da parede – região turbulenta da camada limite, e escoamento livre com maiores números de Reynolds. O modelo *SST* também leva em consideração na formulação da viscosidade turbulenta os efeitos de transporte da tensão cisalhante turbulenta principal (Ansys, 2021). Segundo o manual do Ansys, o *GEKO* consolida os modelos de duas equações em uma única formulação com flexibilidade suficiente para cobrir vastas aplicações. São providos quatro parâmetros que podem ser ajustados para empregos específicos, sem maiores consequências negativas para a calibração do modelo. No entanto, requer uma adequada compreensão desses coeficientes para a correta modelagem.

As equações de transporte para a energia cinética turbulenta e taxa específica de dissipação para o modelo $k - \omega$ *Standard* são:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{Pr_{t,k}} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - Y_k + S_k \quad (33)$$

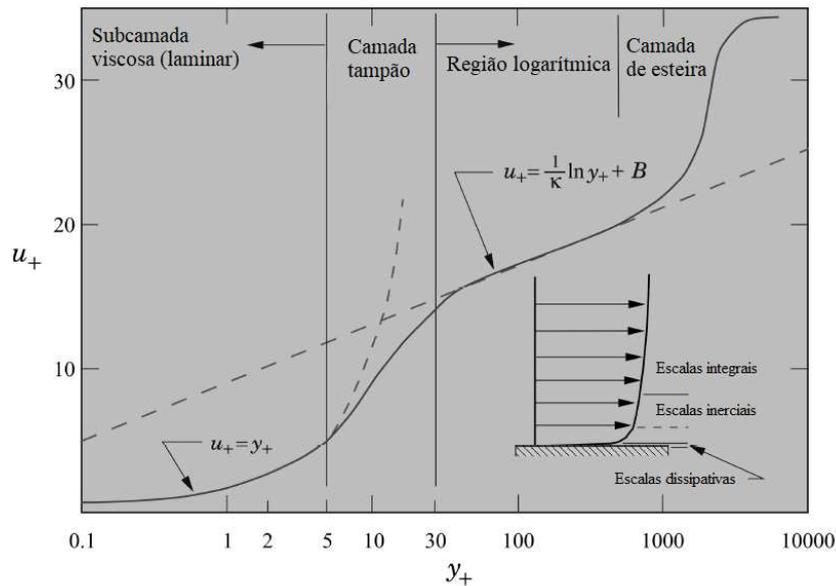
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\omega v_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_\omega}{Pr_{t,\omega}} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + G_\omega + G_{\omega b} - Y_\omega + S_\omega \quad (34)$$

Nota-se que a equação para energia cinética turbulenta (33) é similar à equação (28), distingue-se apenas na presença do termo dissipativo ε . Nas equações (33) e (34), G_k e G_ω representam termos de geração de k e ω , respectivamente; Y_k e Y_ω termos dissipativos devido à turbulência para cada variável indicada no subíndice; e S_k e S_ω termos fontes para as referidas variáveis.

O modelo $k - \omega$ possui uma série de vantagens quando comparado ao modelo $k - \varepsilon$. Especificamente, as equações de transporte de k e ω podem ser diretamente integradas na subcamada laminar. Evita-se, assim, as chamadas funções de parede ou modelos de tratamento para essa região, necessárias para os modelos $k - \varepsilon$. Dessa maneira são alcançadas predições bastante acuradas na região mais próxima à parede. Também, segundo o manual do Ansys, os modelos $k - \omega$ são tipicamente melhores para previsão de gradientes de pressões adversos e separação da camada limite.

Camadas limites turbulentas são caracterizadas perpendicularmente à parede por uma subcamada viscosa (ou subcamada laminar); uma região de transição comumente denominada de camada tampão; a porção da subcamada turbulenta (região logarítmica); e por fim a camada de esteira – ver figura 10. Na subcamada viscosa, as flutuações turbulentas são reduzidas e o escoamento se torna laminar. A partir da subcamada turbulenta e região externa da camada limite, a produção da energia cinética turbulenta cresce rapidamente devido aos grandes gradientes de velocidade. É na região próxima da parede que ocorre de forma acentuada os efeitos das forças viscosas e difusões térmicas do escoamento, onde existem altos gradientes de velocidade e temperatura. Dessa maneira, é essencial a correta solução dessa região para a adequada compreensão dos fenômenos de transporte existentes no escoamento.

Figura 10 - Leis de parede da camada limite turbulenta.



Fonte: MacDonough (2007) e adaptado pelo autor.

Para os modelos $k - \varepsilon$, existem duas aproximações para tratamento da região próxima à parede: as funções de parede e modelos de tratamento. Na primeira aproximação, a subcamada viscosa e camada tampão não são resolvidas pelas equações de transporte do modelo de turbulência – no lugar são solucionadas funções específicas com coeficientes empíricos. No segundo tipo de tratamento, os modelos de turbulência são modificados para a solução dessa região – esses métodos são similares aos modelos $k - \omega$ pelo fato da insensibilidade ao y^+ . Ao utilizar os modelos $k - \varepsilon$, o manual do Ansys sugere a utilização dos modelos de tratamento de parede.

A desvantagem do modelo $k - \omega$ padrão é sua sensibilidade às variações nas condições da corrente livre. Menter (1992) verificou que pequenas variações de ω nas condições de contorno de entrada do problema podem afetar de forma significativa a solução do escoamento livre. Para contornar esse problema, os modelos *BSL* e *SST* foram propostos e consistem em uma combinação dos modelos $k - \omega$ e $k - \varepsilon$, uma vez que este último não apresenta a sensibilidade na corrente livre. Basicamente, na região próxima à parede é solucionado o modelo $k - \omega$ e na região na qual a difusividade turbulenta é predominante, é solucionado o modelo $k - \varepsilon$. Há uma *blending function* F_1 (função de mistura) que desempenha o papel de realizar essa conversão entre os modelos de forma gradual. O modelo *SST* difere do *BSL* por uma correção para solucionar de forma mais precisa o ponto de separação do escoamento em superfícies lisas – é imposto um limitador na formulação da viscosidade turbulenta (Ansys, 2021):

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \left[\frac{1}{\max\left(\frac{1}{\alpha^*}, \frac{SdF_2}{\alpha_1 \omega}\right)} \right] \quad (35)$$

Onde Sd é a magnitude da taxa de deformação, e F_2 é uma outra função de mistura similar à utilizada na mudança gradual entre os modelos $k - \omega$ e $k - \varepsilon$. A grandeza α^* pode ser definida a partir da correção para baixos números de Reynolds:

$$\alpha^* = \alpha^*_{\infty} \left(\frac{\alpha^*_0 + \frac{Re_t}{C_k}}{1 + \frac{Re_t}{C_k}} \right) \quad (36)$$

Sendo $C_k = 6$, $\alpha^*_0 = \frac{\beta_i}{3}$ e $\beta_i = 0,072$. Re_t é definido:

$$Re_t = \frac{\rho k}{\mu \omega} \quad (37)$$

Nota-se que α^* pode atingir no máximo o valor unitário, no caso de altos valores de Reynolds. Neste cenário, $\alpha^* = \alpha^*_{\infty} = 1$.

3.5 Convecção em um anular vertical

A equação de conservação da energia interna para um escoamento monofásico pode ser expressa como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e V) = -\nabla \cdot q'' - P(\nabla \cdot V) + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (38)$$

Sendo e a energia interna específica, V a velocidade, q'' o fluxo de calor, τ o tensor de tensões viscosas e \dot{q} a geração de calor.

À esquerda da igualdade, a primeira parcela da equação representa a derivada local transiente, enquanto o segundo termo é o transporte advectivo da energia. Após a igualdade, o primeiro termo é o fluxo difusivo de calor, a segunda parcela é o fluxo de energia associado ao trabalho de escoamento proveniente do campo de pressão, enquanto o terceiro termo é o fluxo de energia dissipada pelas forças viscosas.

A equação (38) pode ser reescrita em termos da entalpia por meio de sua definição termodinâmica. Assim:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h V) = -\nabla \cdot q'' + \frac{DP}{Dt} + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (39)$$

Onde $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material. Sua definição é exposta no Apêndice B. A partir de relações termodinâmicas a equação da entalpia acima pode ser reescrita em termos da temperatura:

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = -\nabla \cdot q'' + \beta \theta \frac{DP}{Dt} + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (40)$$

O termo β é o coeficiente de expansão térmica, definido como:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_p \quad (41)$$

Segundo Bejan (2013), β pode ser expresso de acordo com os seguintes casos:

$$\beta = \frac{1}{\theta}, \text{ para gases ideais;}$$

$$\beta = 0, \text{ para líquidos incompressíveis.}$$

Ao utilizar da notação de Einstein para coordenadas cartesianas, a equação da energia em termos da temperatura (40) é apresentada como:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + V_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + \beta \theta \left(\frac{\partial P}{\partial t} + V_i \frac{\partial P}{\partial x_i} \right) + \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \dot{q} \quad (42)$$

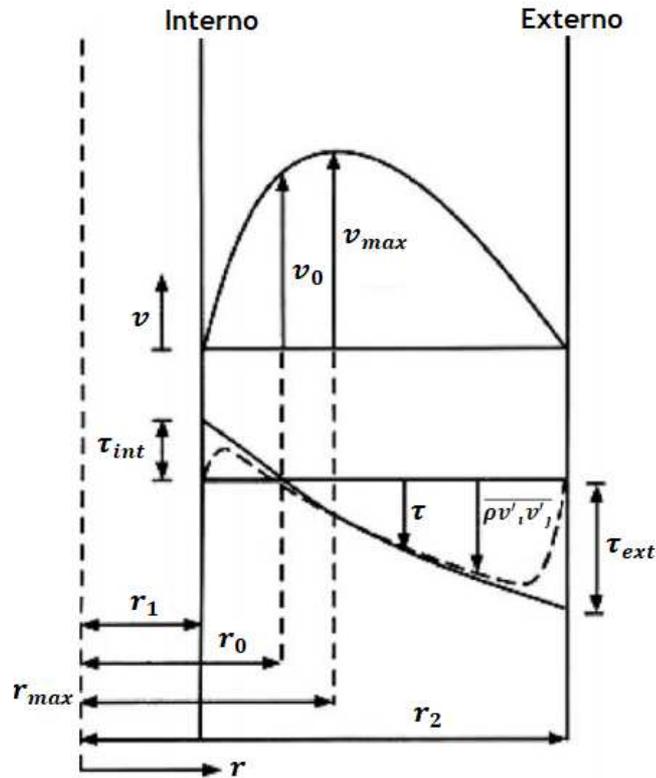
A dependência das propriedades termofísicas com a temperatura provoca o acoplamento das equações de conservação da dinâmica (continuidade e movimento linear) com a equação da conservação da energia. Conseqüentemente, há o comportamento não linear da equação de energia, tornando o estudo numérico custoso. Uma vez que tais propriedades são consideradas constantes, ocorre o desacoplamento da energia-dinâmica e a equação da conservação de energia assume um comportamento linear.

A convecção é um dos três modos existentes de transferência de calor. Por meio dela, a transferência de energia ocorre pelo movimento macroscópico do fluido (advecção) assim como pelo movimento aleatório das moléculas – associação entre difusão. Ao se admitir a viscosidade da matéria, em conjunto com a rugosidade presente em qualquer superfície sólida, há a aderência de uma camada de fluido imediatamente acima da parede. Ou seja, no contato entre ambos, o escoamento possui velocidade zero – forma-se uma película estagnada. A velocidade em uma tubulação, por sua vez, é crescente até atingirmos a região central, onde é alcançado o seu valor máximo.

Logo, é intuitivo pensarmos em uma força presente no fluxo que é oposta ao movimento deste. Como a velocidade do escoamento vai de zero, no contato com a parede, até um valor máximo na região central do tubo, também é natural concluir que esse esforço decresce com o aumento da distância perpendicular à superfície. Tal força é conseqüente da tensão cisalhante, que por sua vez é função dos parâmetros do escoamento como velocidade e viscosidade do fluido, assim como a geometria em que se dá o fluxo. Em uma tubulação a tensão cisalhante possui um valor máximo na parede e nulo onde a velocidade é máxima.

Para um escoamento anular, há um debate na literatura quanto à coincidência entre os pontos de tensão cisalhante zero e velocidade máxima. Kaneda et al. (2003) propuseram a partir de um desenvolvimento teórico que há um certo distanciamento entre tais pontos.

Figura 11 - Representação dos perfis de velocidade e tensão cisalhante em um anular. Os pontos de tensão nula e velocidade máxima não são coincidentes.



Fonte: Kaneda et al. (2003) e adaptado pelo autor.

Posto que as tensões cisalhantes na parede interna e externa do anular possuem diferentes valores, o perfil de velocidade não é simétrico, conforme pode-se observar na figura 11.

No entanto, Boersman & Breugem (2010) realizaram um estudo do escoamento turbulento em um anular via *DNS*. Em seus resultados, foi observado a coincidência entre os pontos de tensão cisalhante zero e velocidade máxima do fluxo. Outros autores também concluem ou consideram que tais pontos ocorrem no mesmo local.

Visto que os maiores gradientes de velocidade e temperatura são presentes na região logo acima da superfície sólida, é nela onde regem os efeitos das forças viscosas e difusões térmicas do escoamento. Portanto, em um escoamento viscoso existe uma camada limite hidrodinâmica e térmica na região próxima à superfície. Ambas possuem semelhanças e diferenças: são dependentes das viscosidades do fluido, e as leis de parede de velocidade e temperatura são universais. Contudo, as condições de contorno são distintas bem como os números de Prandtl

influenciam o desenvolvimento térmico – uma avaliação da tensão cisalhante no escoamento é fundamental para uma correta determinação dos perfis de velocidade e de temperatura presentes.

Em uma análise numérica, é necessária uma investigação do adimensional y^+ para conhecer a distância da parede até o primeiro elemento da malha, a fim da correta solução da camada limite e suas distintas sub-regiões (ver figura 9). Assim:

$$y^+ = \frac{yv_*}{\nu} \quad (43)$$

Onde v_* é a velocidade de fricção, termo recorrente na hidrodinâmica e definido como:

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (44)$$

Sendo τ_p a tensão cisalhante na parede.

Como já dito e exposto na figura 11, as tensões cisalhantes na parede interna e externa do anular possuem valores distintos. Isso se deve pela diferença da curvatura dessas superfícies. Ao partir de uma análise de um escoamento anular vertical, laminar, permanente, plenamente desenvolvido e sendo o fluido newtoniano, é possível obter as seguintes expressões para as tensões cisalhantes na parede interna e externa, respectivamente:

$$\tau_{int} = \left[\frac{(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{8D_{int} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)} - \frac{D_{int}}{4} \right] \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (45)$$

$$\tau_{ext} = \left[\frac{D_{ext}}{4} - \frac{(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{8D_{ext} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)} \right] \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (46)$$

Nesta análise, é considerado que os pontos de tensão cisalhante nulo e velocidade máxima do escoamento são coincidentes. Tal demonstração é exposta no Apêndice A iniciando-se um balanço de forças em um elemento infinitesimal.

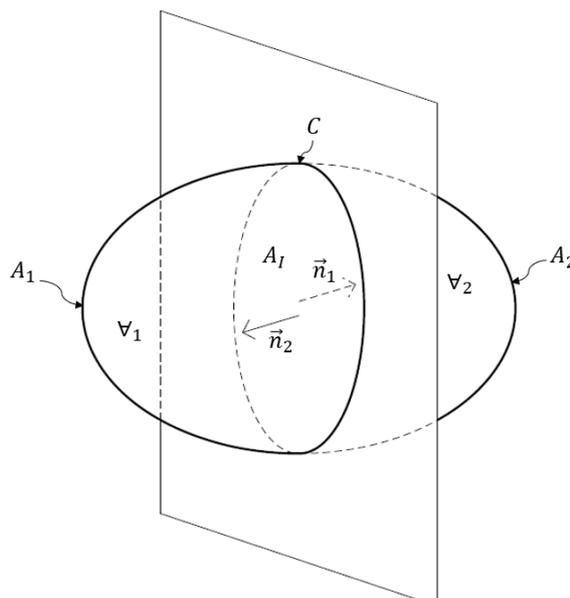
As equações (45) e (46) são utilizadas para obtenção do valor de y da equação (43), definindo $y^+ = 1$. Dessa maneira, obtém-se a distância em relação à parede do primeiro elemento das malhas para a análise numérica e se espera que a região mais próxima à parede (a subcamada laminar) seja solucionada de forma adequada. É de suma importância salientar que o valor obtido para y é uma aproximação, dadas todas referidas hipóteses e premissas simplificadoras para o desenvolvimento das equações (45) e (46).

3.6 Modelagem matemática do escoamento multifásico

A modelagem matemática clássica do modelo de dois fluidos parte de princípios físicos e matemáticos no intuito de obter as equações de balanço de massa, momento, energia e entropia. Para uma observação microscópica, as equações instantâneas locais são suficientes para descrever o comportamento do escoamento. Contudo, para a maioria dos problemas reais, esse tipo de análise que inclui interfaces móveis encontra inúmeras dificuldades matemáticas e numéricas (Ishii & Hibiki, 2011). A solução é tratar com uma análise macroscópica – técnicas de operações médias são utilizadas baseadas nas equações instantâneas locais, que proporcionam as eliminações das descontinuidades interfaciais entre as fases. Dessa forma a formulação aborda as várias escalas do escoamento, tornando-a contínua macroscopicamente. Após essa etapa, são apresentadas equações de fechamento para que seja possível completar a modelagem em questão, isto é, para que o número de incógnitas seja igual ao número de equações.

A essência do modelo é a representação matemática do fenômeno de transporte para cada um dos fluidos e para uma interface comum a estes. Uma vez que pode ocorrer a transferência de massa, quantidade de movimento e energia por meio das interfaces, também é necessário o balanço conservativo dessas propriedades nessa região. Tais balanços interfaciais são usualmente denominados como *jump conditions*, indispensáveis para a análise dos escoamentos multifásicos. Dessa maneira, é essencial a correta modelagem interfacial para que a análise teórica seja coerente com os fenômenos reais.

Figura 12 - Um volume bifásico.



Fonte: Morel (2015) e adaptado pelo autor.

Na figura 12, os subíndices 1 e 2 representam as distintas fases, sendo A_I a área interfacial. C é a curva fechada que delimita a superfície da interface com o volume total. Os vetores \vec{n}_1 e \vec{n}_2 são unitários, normais às respectivas superfícies e no sentido para fora destas.

O Apêndice B expõe a demonstração do modelo clássico de dois fluidos a partir da equação geral de balanço para qualquer propriedade extensiva na forma integral, para um referencial Euleriano ao aplicar os Teoremas de Leibniz e Gauss.

Em uma avaliação microscópica, as equações instantâneas locais para a massa, quantidade de movimento linear e energia são, respectivamente:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k V_k = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial \rho_k V_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k V_k) = -\nabla p_k + \nabla \cdot \tau_k + \rho_k g \quad (48)$$

$$\frac{\partial \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k E_k) = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\bar{T}_k \cdot V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (49)$$

Nas equações acima, o subíndice k representa a fase k e g é a gravidade. O termo \bar{T}_k é um tensor cujo contêm a parcela da pressão termodinâmica e tensões viscosas:

$$-\bar{T}_k = P_k I - \tau_k \quad (50)$$

Sendo I o tensor unitário.

O termo E_k representa as energias interna e cinética específicas:

$$E_k = e_k + \frac{V_k^2}{2} \quad (51)$$

Utilizando da definição de derivada material, é possível distinguir a equação instantânea local da energia (49) em uma parcela de energia cinética e noutra de energia interna. Assim:

$$\rho_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{V_k^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (P_k V_k) + P_k (\nabla \cdot V_k) + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \tau_k : (\nabla V_k) + \rho_k V_k \cdot g \quad (52)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k e_k) + \nabla \cdot (\rho_k e_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k - P_k (\nabla \cdot V_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (53)$$

A expressão (53), denominada de equação da energia interna, ainda pode ser reescrita em termos da entalpia por meio de sua definição termodinâmica:

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k + \frac{D_k P_k}{Dt} + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (54)$$

Onde h_k é a entalpia específica da fase k . A equação acima é a equação da entalpia.

As equações de transferência interfaciais locais para a massa, quantidade de movimento linear e energia – suas respectivas *jump conditions*, são:

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = 0 \quad (55)$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) = 0 \quad (56)$$

$$\sum_{k=1}^2 [\dot{m}_k E_k - (\bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k + q''_k \cdot \vec{n}_k] = 0 \quad (57)$$

Nas equações (55), (56) e (57) são desconsideradas as propriedades materiais da superfície. Caso essas sejam incluídas, são obtidas as equações gerais:

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \quad (58)$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) = \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \quad (59)$$

$$\sum_{k=1}^2 [\dot{m}_k E_k + (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k] = \left[\frac{D_I}{Dt} (\rho_I E_I) + \rho_I E_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q''_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right] \quad (60)$$

Onde o subíndice I indica a interface, ∇_s o gradiente de superfície da interface, σ o coeficiente de tensão superficial, \vec{n} o vetor unitário normal à superfície e $V_{I,t}$ a velocidade tangencial da interface.

Para um sistema ou volume de controle em que as equações da continuidade, movimento e energia o regem, este necessariamente deve obedecer a segunda lei da termodinâmica. Dessa maneira, a inequação da entropia atua como uma restrição para a modelagem, ao desempenhar o papel de uma das equações de fechamento (constitutivas) para o problema. Assim:

$$\frac{\partial \rho_k s_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k s_k V_k) + \nabla \cdot \left(\frac{q''_k}{\theta_k} \right) - \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} = \Delta_k \geq 0 \quad (61)$$

Onde s_k é a entropia por unidade de massa (entropia específica) e Δ_k a taxa de geração de entropia por unidade de volume, todos da fase k .

A inequação (62) diz que a geração de entropia deverá sempre ser positiva (processos internamente irreversíveis) ou nula (processos internamente reversíveis), onde em nenhuma circunstância assumirá um valor negativo. Concluímos que a entropia nunca pode ser destruída e é gerada pelas irreversibilidades do sistema. A condição de transferência interfacial de entropia em sua forma geral é:

$$\frac{D_I \rho_I S_I}{Dt} + \rho_I S_I \nabla_s \cdot V_I - \nabla_s \cdot \left(\frac{q''_I}{\theta_I} \right) - \sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q''_I}{\theta_I} \cdot \vec{n}_k \right) = \Delta_I \geq 0 \quad (62)$$

Se assumirmos que não há geração de entropia na interface ao passo que desconsideramos as propriedades materiais desta, obtemos a equação de *jump conditions* da entropia:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q''_I}{\theta_I} \cdot \vec{n}_k \right) = 0 \quad (63)$$

Ao aplicar as técnicas de médias temporais em conjunto com outros conceitos matemáticos e premissas para utilização das regras de Reynolds – conteúdo exposto no item B.8 do Apêndice B, são alcançadas as formulações macroscópicas. Em outras palavras, o modelo de dois fluidos (*two-fluid model*). As equações médias de transporte em suas formas gerais são:

1. Transporte de massa e sua respectiva equação de transporte interfacial:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k}) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) = \Gamma_k \quad (64)$$

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (65)$$

2. Transporte de movimento e sua respectiva equação de transporte interfacial:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k) = \nabla \cdot \left[\varphi_k \left(\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) \right] + g \varphi_k \rho_k^{X_k} + M_k \quad (66)$$

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle \left(\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (67)$$

3. Transporte de energia e sua respectiva equação de transporte interfacial:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k \right] = -\nabla \cdot \\ & \left[\varphi_k (q''_k^{X_k} - q''_k^T) \right] - \nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \tau_k^{X_k} \cdot U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k \cdot g + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + Q_k \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left\langle \left[\dot{m}_k E_k + (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k \right] \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = & \left\langle \left[\frac{D_I}{Dt} (\rho_I E_I) + \rho_I E_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q''_I - \right. \right. \\ & \left. \left. \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right] \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \end{aligned} \quad (69)$$

4. Equação da energia cinética (energia mecânica):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} U_k \right) = -\nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \nabla \cdot \\ & \left[\varphi_k \left(\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) \cdot U_k \right] - \varphi_k \left(\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) : (\nabla U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} \end{aligned} \quad (70)$$

5. Equação da entalpia (energia térmica):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k)] + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k) U_k] = -\nabla \cdot (\varphi_k q_k^{X_k}) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k \left(q_k^{T} - \bar{T}_k^{Re} \cdot U_k \right) \right] + \frac{D_k}{Dt} (\varphi_k p_k^{X_k}) + \varphi_k \left(\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) : (\nabla U_k) + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + \left(Q_k - \right. \\ \left. M_k \cdot U_k - \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (71)$$

Nas equações acima, U_k representa a velocidade média da fase k ponderada pela função indicadora de fase X_k e massa específica ρ_k – significado dos superíndices X_k e/ou ρ_k . O termo φ_k é a média temporal da função indicadora de fase, sendo seu somatório igual à unidade. O gradiente de X_k é representado por $\frac{\partial X_k}{\partial n}$. O Tensor de Reynolds para cada fase é exposto como \bar{T}_k^{Re} e a energia cinética turbulenta K_k . O fluxo turbulento de calor para cada fase é q_k^{T} .

Os termos de transferência interfaciais de massa, quantidade de movimento linear e energia são, respectivamente: Γ_k , M_k e Q_k . Estes são derivados das equações de transferência interfaciais locais e são os termos que proporcionam o acoplamento entre as fases – sem eles cada fase se tornaria independente da outra. Caso sejam desprezadas as propriedades materiais da interface, as equações (65), (67) e (69) se tornam as *jump conditions* em termos médios da massa, quantidade de movimento linear e energia, respectivamente:

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0 \quad (72)$$

$$\sum_{k=1}^2 M_k = \left\langle (-\nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n}) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (73)$$

$$\sum_{k=1}^2 Q_k = 0 \quad (74)$$

Onde:

$$M_k \equiv \left\langle (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (75)$$

A modelagem do termo M_k é uma das mais importantes do modelo de dois fluidos, uma vez que é ele que contém as forças interfaciais superficiais: arrasto, sustentação, massa virtual, Basset, de parede e dispersão e interação turbulenta.

Pelo modelo de dois fluidos, obtemos um total de seis equações: o transporte de massa, momento e energia, com suas respectivas equações de transferências interfaciais ou *jump conditions*, todas em termos médios, ou seja, em uma análise macroscópica. No entanto, como podemos observar nos equacionamentos, o número de termos desconhecidos é maior do que a quantidade de equações. De modo que é necessária a busca de outras expressões para o

fechamento do problema. Assim sendo, a correta modelagem de um escoamento multifásico está intrinsicamente ligada às apropriadas equações de fechamentos utilizadas, assim como as devidas hipóteses simplificadoras para essas ou para o problema físico em questão como um todo.

É evidente que qualquer modelagem física deverá respeitar a segunda lei da termodinâmica. Para tanto, a inequação da entropia age como uma restrição para o modelo e suas equações de fechamento. Logo, devemos tratá-la em termos médios conforme a relação exposta em (58) e as premissas já definidas:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k}) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} U_k) + \nabla \cdot \left\{ \varphi_k \left[\left(\frac{q_k''}{\theta_k} \right)^{X_k} + \rho_k^{X_k} (S_k' v_k')^{X_k \rho_k} \right] \right\} - \varphi_k \left(\frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)^{X_k} - \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k''}{\theta_k} \cdot n_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \varphi_k \Delta_k^{X_k} \geq 0 \quad (76)$$

Enwald et. al. (1997) define as equações de fechamento como sendo de três tipos: constitutivas, transferenciais e topológicas. A primeira descreve as propriedades físicas utilizando axiomas e dados experimentais. A segunda descreve as interações na interface entre as fases, sendo equações empíricas. Já a última trata sobre a distribuição espacial do escoamento.

Ishii & Hibiki (2011) ainda classificam as leis constitutivas em três segmentos: equações mecânicas constitutivas, equações energéticas constitutivas e equações constitutivas de estado. A primeira trata do tensor de tensão e das forças de corpo. A segunda se aplica ao fluxo e à transferência de calor, enquanto a última se aplica às propriedades termodinâmicas.

Segundo a literatura, as equações de fechamento regem alguns princípios: determinismo, não dependência do observador ou da referência adotada, solução única e estável para as equações diferenciais e que todas as variáveis devem ser função uma das outras a não ser que a independência de alguma possa ser demonstrada. A seguir serão expostos as equações constitutivas locais básicas para uma modelagem fluidodinâmica (Ishii & Hibiki, 2011):

Equação Fundamental de Estado:

$$e_k = e_k(S_k, \rho_k) \quad (77)$$

Sendo a temperatura e pressão termodinâmica definidos por:

$$\theta_k \equiv \frac{\partial e_k}{\partial S_k}, \quad -P_k \equiv \frac{\partial e_k}{\partial \left(\frac{1}{\rho_k} \right)} \quad (78)$$

Então a Equação Fundamental de Estado pode ser escrita na forma diferencial:

$$de_k = \theta_k ds_k - P_k d\left(\frac{1}{\rho_k}\right) \quad (79)$$

Energia Livre de Gibbs:

$$Gi_k \equiv e_k - \theta_k s_k + \frac{P_k}{\rho_k} \quad (80)$$

Caso o fluido de trabalho possa ser modelado como um gás perfeito, as equações fundamentais de estado do gás perfeito são utilizadas:

$$P_k = R_G \theta_k \rho_k \quad (81)$$

$$e_k = e_k(\theta_k) \quad (82)$$

Onde R_G é constante do gás.

É importante ressaltar que esses termos são locais. Para tratar nas equações médias, é necessário avaliá-los macroscopicamente. Em geral, não há uma equação de estado simples em termos médios. A energia interna, entropia e massa específica são todos influenciados pelas transferências interfaciais e efeitos das flutuações das variáveis (Ishii & Hibiki, 2011). Porém, em algumas condições as relações expostas acima podem ser aproximadas e expressas da mesma forma utilizando os termos médios.

De acordo com o exposto, é de suma importância a adequada análise das equações de fechamento a serem utilizadas para cada modelagem. No estado atual da arte, não há um modelo geral aplicável para todos os casos. Deve-se, assim, haver uma avaliação cuidadosa para cada escoamento estudado. A literatura traz inúmeras equações para que os termos de transferência interfacial, transferência de energia, termos de fonte, forças de corpo, tensores viscosos e de Reynolds, fluxos turbulentos de transferência de calor e energia cinética, bem como outros parâmetros possam ser resolvidos. Para determinado problema uma equação pode ser mais adequada do que outra, logo, explicita-se a importância de conhecimentos prévios e dados experimentais. Hipóteses e simplificações para determinados casos também são frequentemente expostas. É dever do engenheiro julgar de forma correta o fechamento utilizado e as condições de contorno impostas.

3.7 Modelagem matemática das forças interfaciais

Segundo Lote et al. (2018), as forças interfaciais desempenham um papel fundamental para predições acuradas da distribuição radial da fração de gás livre. Tais forças são denominadas de arrasto, sustentação, massa virtual, Basset, de parede, e dispersão e interação turbulenta. Apenas a força de arrasto não é capaz de estimar de forma adequada esse perfil. Na fluidodinâmica computacional, a força de Basset é usualmente desconsiderada para estabilização numérica (Ishii & Hibiki, 2011). A computação das forças é intrinsecamente ligada à modelagem utilizada para seus respectivos coeficientes.

A força de arrasto determina a distribuição axial das frações volumétricas. Fisicamente, é a resistência que a fase primária oferece ao escoamento da fase secundária. Matematicamente, pode ser expressa como:

$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2} C_D \rho_l \vec{v}_r |\vec{v}_r| A_g \quad (83)$$

Onde C_D é o coeficiente de arrasto, ρ_l a massa específica da fase primária, A_g a área projetada da unidade típica da fase gasosa e v_r a velocidade relativa entre as fases primária e secundária:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_L - \vec{v}_G \quad (84)$$

Na literatura e no Ansys Fluent, existem vários modelos distintos para o coeficiente de arrasto. No presente trabalho, é utilizado o modelo Ishii-Zuber por conta de sua reconhecida utilização em simulações similares. Segundo o manual do Ansys, o modelo leva em consideração o conjunto de bolhas que se movem juntas a grandes frações volumétricas de gás, o que é presente em um padrão *slug*. Ainda, tal modelo é recomendado para escoamentos líquido-gás onde podem haver variados contornos de bolha, como esférico, elíptico ou *cap*.

A modelagem consiste em distintas expressões para diferentes padrões de regimes: disperso ou denso. Dentre essas duas classificações, é possível haver os regimes distorcidos, esféricos e viscoso. Leva-se em consideração o número de Eotvos, sendo definidos como a razão entre as forças gravitacionais e de tensões superficiais:

$$Eo = \frac{g \Delta \rho d_b^2}{\sigma} \quad (85)$$

Onde $\Delta \rho$ é a diferença entre as massas específicas das fases e d_b o diâmetro de bolha.

A força de sustentação age de tal forma que pequenas bolhas movem na direção da parede enquanto grandes bolhas vão na direção do centro da geometria vertical (Lote et al., 2018),

devido à rotação e ao gradiente de velocidades da fase primária. Dessa forma, há uma variação do sinal do coeficiente de sustentação: positivo na direção do decréscimo da velocidade do líquido e negativo na direção oposta. A expressão geral para a força de sustentação é:

$$\vec{F}_{Lt} = C_{Lt} \rho_L \varphi_G \vec{v}_r \times (\nabla \times \vec{v}_L) \quad (86)$$

Sendo C_{Lt} o coeficiente de sustentação.

Neste estudo é utilizada a modelagem de Tomiyama para o coeficiente de sustentação. Segundo o manual do Ansys, o modelo é aplicável para bolhas grandes e deformáveis, com formatos elípticos e esféricos. Para tanto, baseia-se no número de Eotvos modificado para o cálculo (Ansys, 2021):

$$Eo' = \frac{b \Delta \rho d_{br}^2}{\sigma} \quad (87)$$

Onde d_{br} , é o diâmetro de bolha deformado:

$$d_{br} = d_b (1 + 0,163 Eo'^{0,757})^{1/3} \quad (88)$$

$$C_{Lt} = \begin{cases} \min[0,288 \tanh(0,121 Re_G), f(Eo')], & Eo' \leq 4 \\ f(Eo'), & 4 < Eo' \leq 10 \\ -0,27, & 10 < Eo' \end{cases} \quad (89)$$

Segundo Ishii & Hibiki (2011), a força de massa virtual é a força requerida para acelerar a massa aparente da fase circundante quando há mudança na velocidade relativa. Em outras palavras, quando há aceleração relativa entre as fases, uma força de “massa virtual” é exercida na fase secundária por consequência da inércia da fase primária. O manual do Ansys indica como típico um valor constante de 0,5 para o coeficiente da força C_{MV} , o qual é utilizado neste estudo. No entanto, em um escoamento onde há de forma acentuada a presença de ambas as fases, como em regimes *slug* ou *churn*, quanto maior é a presença da fase secundária no escoamento, mais alto é o valor do coeficiente. A força de massa virtual é significativa quando a massa específica da fase secundária é muito menor que a da fase primária (Ansys, 2021). Ela é definida como:

$$\vec{F}_{MV} = C_{MV} \rho_L \varphi_G \left(\frac{D_L \vec{v}_L}{Dt} - \frac{D_G \vec{v}_G}{Dt} \right) \quad (90)$$

Ishii & Hibiki (2011) trazem relações para C_{MV} para os padrões *bubbly* e *slug*, no caso de não o considerar constante:

$$C_{MV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi_g \frac{1+2\varphi_g}{1-\alpha_g}, & \text{bubbly} \\ 5\varphi_g \left[0,66 + 0,34 \left(\frac{1-d_b/l_b}{1-d_b/3l_b} \right) \right], & \text{slug} \end{cases} \quad (91)$$

Onde l_b é o comprimento da bolha.

A força de parede (ou força de lubrificação da parede) ocorre em razão da diferença de velocidades das partículas perto da parede. Quanto mais próximo à superfície, menor é a velocidade da fase primária – é ocasionada uma “drenagem” assimétrica em torno da fase secundária. Gera-se, assim, uma pressão hidrodinâmica distinta onde a bolha tende a mover-se para longe da parede, de modo que se dificulta o contato dessa fase com a superfície. Tal força é definida como (Lote et al., 2018):

$$\vec{F}_W = C_{WL} \rho_L \varphi_G |\vec{v}_{r\parallel}|^2 \vec{n}_W \quad (92)$$

Sendo $\vec{v}_{r\parallel}$ a componente tangencial à parede da velocidade relativa entre as fases. O vetor unitário normal à superfície é \vec{n}_W .

Neste trabalho, é utilizado o modelo de Frank et. al (2008) em virtude da independência do diâmetro da tubulação (o que não ocorre no modelo de Tomiyama), visto que a geometria estudada possui distintos diâmetros hidráulicos.

O modelo de Frank propõe (Ansys, 2021):

$$C_{WL} = C_W \max \left[0, \frac{1}{C_{WD}} \cdot \frac{1 - \frac{y_W}{C_{WC} d_b}}{y_W \left(\frac{y_W}{C_{WC} d_b} \right)^{m-1}} \right] \quad (93)$$

Onde C_W é dado por:

$$C_W = \begin{cases} 0,47, & Eo < 1 \\ e^{-0,933Eo+0,179}, & 1 < Eo \leq 5 \\ 0,00599Eo - 0,0187, & 10 < Eo \\ 0,179, & 33 \leq Eo \end{cases} \quad (94)$$

As constantes C_{WD} , C_{WC} e m assumem valores típicos, respectivamente: 6,8; 10 e 1,7. A distância à parede mais próxima é dada por y_W .

Ishii & Hibiki (2011) definem a difusão turbulenta como resultado das componentes de flutuações das forças agindo nas bolhas. A força de dispersão turbulenta é o conjunto médio das componentes de flutuações da força de arrasto agindo na fase secundária. Em outras

palavras, as flutuações turbulentas da fase primária influenciam na outra fase. Este efeito é constatado na quantidade de movimento entre os fluidos.

O modelo de Burns et al. (2004) é o utilizado no presente trabalho. A força de dispersão (ou difusão) turbulenta é modelada a partir do método da média de Favre (Ansys, 2021):

$$\overline{F_{TD}} = C_{TD} C_{LG} \frac{\mu_{T,L}}{\sigma_{LG} \rho_L} \left(\frac{\nabla \varphi_G}{\varphi_G} - \frac{\nabla \varphi_L}{\varphi_L} \right) \quad (95)$$

Onde C_{LG} é o coeficiente de troca interfacial. A constante σ_{LG} e o coeficiente C_{TD} assumem os respectivos valores: 0,9 e 1.

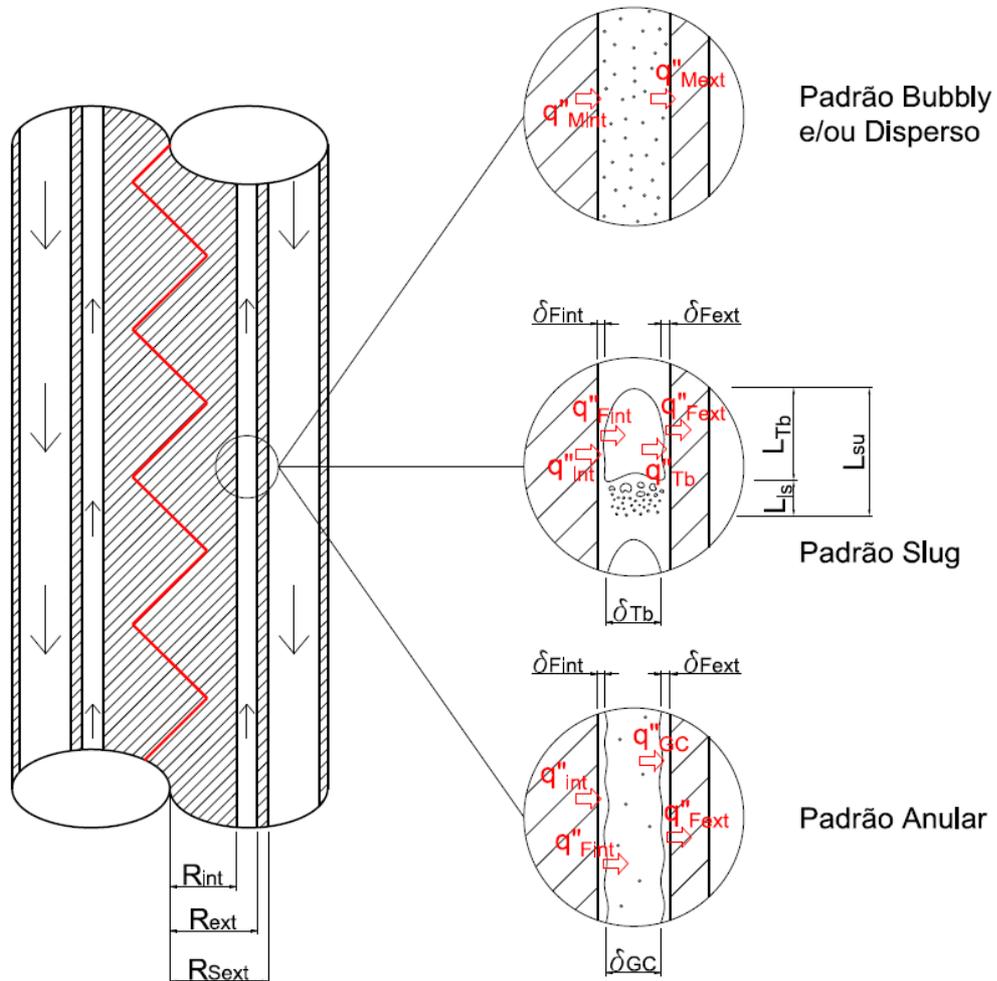
A força de interação turbulenta é um termo fonte na turbulência interfacial e desprezada neste estudo, uma vez que a convergência numérica pode ser afetada de forma significativa.

3.8 Modelagem matemática da transferência de calor em um escoamento anular multifásico

A literatura de maneira corriqueira expõe para escoamento interno a modelagem referente a dutos circulares. Para situações em que há uma seção não circular, é utilizado o conceito de diâmetro hidráulico. Para o escoamento anular, presente em algumas aplicações da engenharia e usualmente existentes na indústria petrolífera, há semelhanças e diferenças significativas no fenômeno de transporte quando comparado ao escoamento tubular. Como exemplo, o número de Nusselt é intrinsecamente dependente da geometria e demais parâmetros do escoamento, tal como a região de entrada ou como a plenamente desenvolvida – a transferência de calor é profundamente relacionada com a hidrodinâmica existente. Yavuz et al. (2011) constataram que dependendo das condições de contorno, o termo da dissipação viscosa possui um efeito significativo na transferência de calor em um escoamento anular concêntrico. Esse termo normalmente é desprezado em análises de escoamentos tubulares, onde há uma importância apenas na região próxima à parede. Quando há a necessidade de avaliar o perfil de temperatura nesse tipo de domínio, ou previsão deste parâmetro, são necessárias buscas mais profundas em artigos acadêmicos. Devido à maior complexidade, por vezes esses trabalhos são apresentados com simplificações ou condições de contornos que não são aplicáveis no problema de interesse. Dessa forma, é indispensável uma minuciosa avaliação das premissas adotadas para definir se

é possível utilizar um modelo já existente ou se é necessário o desenvolvimento de uma nova modelagem.

Figura 13 - Esquema dos dois anulares e exposição da transferência de calor em distintos padrões multifásicos para o anular interno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a análise em questão, o anular interno é aquecido com um fluxo de calor constante a partir da superfície cilíndrica interna. Para o escoamento monofásico, também há uma perda de calor do anular interno para o anular externo – é presente condução pela parede do *shroud*. A transferência de calor no escoamento multifásico no padrão *bubbly* e/ou disperso é similar ao fluxo monofásico. Distingue-se apenas das propriedades que na ocasião serão avaliadas como uma mistura líquido-gás.

No padrão multifásico anular, o fluxo constante de calor a partir da superfície cilíndrica interna continua presente. No entanto, essa energia é transferida inicialmente para o filme líquido que se forma na parede interna. Parte dessa energia é então perdida para a região central de gás, posteriormente, parcela desta também é transferida para o filme de líquido formado na parede

externa do anular. Por fim, ainda há a transferência de calor do anular interno para o externo, por meio da condução de calor no *shroud*. Dessa maneira, para cada região distinta – filmes de líquidos nas paredes e região central de gás – haverá um distinto número de Nusselt.

O padrão multifásico *slug* é modelado tanto como um escoamento disperso quanto um escoamento anular: para a bolha de Taylor, é presente filmes líquidos em seu entorno, ou seja, camadas líquidas nas paredes assim como no padrão anular. A bolha de Taylor é a região central de gás. No entanto, a unidade *slug* é composta pela bolha de Taylor e bolhas menores dispersas. Para esta última, a modelagem consiste em uma avaliação da mistura assim como no padrão *bubbly* e/ou disperso.

A figura 13 expõe a esquematização para as referidas modelagens que são expostas a seguir. A dedução destas se faz presente no Apêndice C.

3.8.1 Transferência de calor no escoamento anular vertical monofásico

Na região de pleno desenvolvimento térmico e hidrodinâmico, utiliza-se do perfil de velocidade deduzido no Apêndice A para um escoamento anular vertical, laminar, permanente, incompressível e newtoniano. O perfil de temperatura média do escoamento nessas premissas é dado por:

$$\theta_m(r, z) = \theta_M(z) + \frac{\pi r^2 A' C}{2 \dot{m} c_p \alpha} \left[\frac{B}{2} \ln \left(\frac{r}{R_{ext}} \right) - B + R_{ext}^2 - \frac{r^2}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K} \left\{ \frac{B^2}{2} [\ln(r)]^2 - B r^2 + \frac{r^4}{4} \right\} + C_3 \ln(r) + C_4 \quad (96)$$

Onde A' , B , C , C_3 e C_4 são constantes e expostas no Apêndice C. $\theta_M(z)$ é a temperatura na parede do motor e expressa como:

$$\theta_M = \theta_{m,ini} + \frac{2\pi}{\dot{m} c_p} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) z + \frac{R_{int} \dot{q}}{2 h_{int}} \quad (97)$$

A temperatura média inicial do escoamento é $\theta_{m,ini}$ e \dot{q} é a geração de calor por volume proveniente do motor (resistência elétrica no experimento concebido). Para o fluxo de calor externo q''_{ext} :

$$q''_{ext} = h_{ext} (\theta_m - \theta_{s,int}) = U'_{ext} (\theta_m - \theta_\infty) \quad (98)$$

Dessa maneira, temos para $\theta_{s,int}(z)$ e U'_{ext} :

$$\theta_{s,int}(z) = \frac{\theta_m (h_{ext} - U_{ext}) + U_{ext} \theta_\infty}{h_{ext}} \quad (99)$$

$$U'_{ext} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ext}} + \frac{R_{ext} \ln(R_{S,ext}/R_{ext})}{K_s} + \frac{R_{ext}}{R_{S,ext} h_{S,ext}}} \quad (100)$$

O raio da parede externa do *shroud*, a condutividade térmica do material do *shroud* e o coeficiente convectivo na superfície externa do *shroud* são, respectivamente: $R_{S,ext}$, K_s e $h_{S,ext}$.

Para um escoamento laminar, o número de Nusselt é uma constante na região plenamente desenvolvida. Zhang et al. (2006) aproximaram tal valor de acordo com uma interpolação entre o número para um escoamento em tubo e um em placas planas paralelas. Yin et al. (2017) expressaram tal relação como:

$$Nu = 3,657 + \frac{7,541 - 3,657}{0,5} \left(0,5 - \frac{\delta}{2\sqrt{R_{ext}^2 - R_{int}^2}} \right) \quad (101)$$

Assim, é possível calcular o valor de h_{int} e h_{ext} , onde para o raio interno $\delta = 0$ e para o raio externo $\delta = R_h$. Para $h_{S,ext}$, considera-se o valor para um escoamento em tubo: $Nu_{S,ext} = 3,657$.

A modelagem para a região de entrada é distinta da para a região plenamente desenvolvida. Dessa forma, a equação de conservação de energia térmica a ser solucionada é:

$$\rho c_p v_z \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} \right] + \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (102)$$

A parcela de condução axial deve ser levada em consideração, uma vez que no problema em questão o número de Peclet é muito menor que a unidade: $Pe \ll 1$.

Dado que $Pr \gg 1$, o comprimento de entrada hidrodinâmica se desenvolverá mais rapidamente do que o comprimento de entrada térmica. Desse modo o perfil de velocidades é plenamente desenvolvido para a análise térmica. Ao admitir velocidade apenas na direção axial, para um fluido incompressível, newtoniano, em regime permanente e laminar, a modelagem térmica na região de entrada é:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} + \frac{A'}{\alpha} \left[r^2 - R_{ext}^2 - B \ln \left(\frac{r}{R_{ext}} \right) \right] \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = - \frac{\mu A'^2}{K} \left(\frac{B}{r} - 2r \right)^2 \quad (103)$$

3.8.2 Transferência de calor no padrão multifásico *bubbly* e disperso em um escoamento anular

Para um padrão multifásico *bubbly* e/ou disperso, a modelagem térmica é análoga ao escoamento monofásico. No entanto, considera-se as propriedades do fluido como uma mistura líquido-gás. As definições para cálculo dessas propriedades são expostas no Apêndice C.

Na região plenamente desenvolvida, a equação local de energia térmica ao considerar uma mistura incompressível e newtoniana:

$$\frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,mix}}{\dot{m}_{mix} c_{p,mix} \alpha_{mix}} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext,mix} R_{ext} \right) - \frac{\mu_{mix}}{K_{mix}} \left(\frac{\partial v_{z,mix}}{\partial r} \right)^2 \quad (104)$$

Para um escoamento turbulento e plenamente desenvolvido, Petukhov (1970) apud Yin et al. (2017) sugeriu a seguinte expressão:

$$Nu_{mix} = \frac{\left(\frac{f_{mix}}{2}\right) Re_{mix} Pr_{mix}}{1,07 + 12,7 \sqrt{\frac{f_{mix}}{2}} (Pr_{mix}^{2/3} - 1)} \left(\frac{\mu_L}{\mu_{mix}}\right) \quad (105)$$

Onde f_{mix} é o fator de atrito da mistura.

Caso o escoamento seja laminar e plenamente desenvolvido, o número de Nusselt é obtido pela equação (101). Nessas condições, o perfil de temperatura será dado de forma análoga à expressão para o escoamento monofásico (96), porém com as devidas alterações das propriedades e parâmetros para a mistura. A temperatura média da mistura no escoamento é $\theta_{m,mix}$.

Para a região de entrada, a equação local de conservação de energia térmica em um regime permanente, ao considerar uma mistura incompressível e newtoniana, é dada por:

$$\rho_{mix} c_{p,mix} v_{z,mix} \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial z} = K_{mix} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial z^2} \right] + \mu_{mix} \left(\frac{\partial v_{z,mix}}{\partial r} \right)^2 \quad (106)$$

Se o escoamento for laminar com $Pr \gg 1$, a equação local de energia térmica é obtida de forma similar ao escoamento monofásico:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial z^2} + \frac{A'_{mix}}{\alpha_{mix}} \left[r^2 - R_{ext}^2 - B \ln \left(\frac{r}{R_{ext}} \right) \right] \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial z} = - \frac{\mu_{mix} A'^2_{mix}}{K_{mix}} \left(\frac{B}{r} - 2r \right)^2 \quad (107)$$

3.8.3 Transferência de calor no padrão multifásico anular em um escoamento anular

Para um padrão anular do escoamento multifásico, são presentes distintas equações locais de conservação de energia térmica para as regiões de filmes das paredes e central gasosa.

No filme líquido incompressível da parede interna, a equação local de energia térmica na região de pleno desenvolvimento é:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,Fint}}{\dot{m}_{Fint} c_{p,L} \alpha_L} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{Fint} R_{Fint} \right) - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (108)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{Fint} = h_{Fint} (\theta_{Fint} - \theta_{GC}) \quad (109)$$

Onde θ_{Fint} é a temperatura do filme interno e θ_{GC} a temperatura da região central de gás.

Caso o escoamento seja turbulento, o número de Nusselt pode ser calculado conforme a expressão de Petukhov (1970) para o líquido. Posteriormente, é obtido o valor de h_{Fint} .

Caso o escoamento seja laminar, Nu_{Fint} pode ser obtido via equação (101) onde $\delta = \delta_{Fint}$. Posteriormente é calculado o valor de h_{Fint} . O raio do filme interno R_{Fint} é a soma do raio interno do anular com a espessura desse filme: δ_{Fint} .

Para a região de entrada, a equação local da energia térmica para o filme da parede interna incompressível em um regime permanente é dada por:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,Fint}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial z} = - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (110)$$

Para a região central de gás, ao se avaliar na região plenamente desenvolvida e desprezar os efeitos relacionados à variação de pressão (dado que o escoamento é subsônico com $Ma < 0,3$), a equação local de energia térmica é:

$$\frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,GC}}{\dot{m}_{GC} c_{p,G} \alpha_G} (q''_{Fint} R_{Fint} - q''_{GC} R_{GC}) - \frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (111)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{GC} = h_{GC} (\theta_{GC} - \theta_{Fext}) \quad (112)$$

Na expressão acima, θ_{Fext} é a temperatura do filme líquido externo.

O número de Nusselt pode ser calculado pela expressão de Dittus e Bolter (1985) apud Yin et al. (2017) para o caso turbulento:

$$Nu_{GC} = 0,023Re_{GC}^{0,8}Pr_{GC}^{0,33} \quad (113)$$

Caso o escoamento seja laminar, Nu_{GC} é calculado pela equação (101) onde $\delta = \delta_{GC}$. Este parâmetro é a espessura da região central de gás. O raio R_{GC} é a soma de R_{Fint} com δ_{GC} .

Para a região de entrada do centro gasoso, a equação local de energia térmica em regime permanente ao desprezar os efeitos relacionados à pressão, é:

$$\frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,GC}}{\alpha_G} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial z} = -\frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (114)$$

Por fim, para a região de filme líquido incompressível na parede externa do anular (parede interna do *shroud*), a equação local de energia térmica, caso seja atingido o pleno desenvolvimento, é exposta como:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,Fext}}{\dot{m}_{Fext} c_{p,L} \alpha_L} (q''_{GC} R_{GC} - q''_{Fext} R_{ext}) - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (115)$$

O fluxo de calor do filme externo pode ser expresso como:

$$q''_{Fext} = U'_{Fext} (\theta_{Fext} - \theta_{\infty}) \quad (116)$$

Na expressão acima, θ_{Fext} é a temperatura do filme líquido na parede externa e U'_{Fext} o coeficiente global externo de transferência de calor:

$$U'_{Fext} = \frac{1}{\frac{1}{h_{Fext}} + \frac{R_{ext} \ln(R_{S,ext}/R_{ext})}{K_s} + \frac{R_{ext}}{R_{S,ext} h_{S,ext}}} \quad (117)$$

O número de Nusselt Nu_{Fext} pode ser calculado de forma análoga ao Nu_{Fint} . No caso de escoamento laminar, substitui-se na equação (101): $\delta = \delta_{Fext}$. Este parâmetro é a espessura do filme líquido da parede externa do anular.

Para o número $Nu_{S,ext}$, em regime turbulento a expressão de Petulkhov (1970) também pode ser utilizada para o caso de líquido. Em regime laminar, $Nu_{S,ext} = 3,657$.

Para a região de entrada, a equação local de energia térmica para o filme da parede externa é:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,Fext}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial z} = -\frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (118)$$

A partir das equações de conservação de energia térmica locais para cada região, a temperatura do padrão anular é calculada conforme:

$$\theta_a = H_{Fint}\theta_{Fint} + (1 - H_{Fint} - H_{Fext})\theta_{GC} + H_{Fext}\theta_{Fext} \quad (119)$$

Dado que H_{Fint} e H_{Fext} são as frações do filme líquido da parede interna e externa no escoamento, respectivamente.

3.8.4 Transferência de calor no padrão multifásico *slug* em um escoamento anular

Para o padrão multifásico *slug*, as temperaturas da bolha de Taylor e os consequentes filmes líquidos nas paredes interna e externa, são calculados de forma análoga ao padrão multifásico anular. A região posterior à bolha de Taylor (*liquid slug*), predominante *bubbly*/dispersa (ver figura 13), é calculada conforme exposto nesse padrão de escoamento. Por fim, a temperatura da unidade *slug* é dada por uma média entre essas duas regiões.

O coeficiente convectivo da bolha de Taylor h_{Tb} é por:

$$h_{Tb} = \frac{Nu_{Tb}K_G}{D_{Tb}} \quad (120)$$

Onde o diâmetro equivalente da bolha de Taylor (Yin et al. 2017) é:

$$D_{Tb} = 2\sqrt{(R_{ext} - \delta_{Fext})^2 - (R_{int} + \delta_{Fint})^2} \quad (121)$$

Assim, a temperatura da unidade *slug* é:

$$\theta_{su} = \frac{[H_{Fext}\theta_{Fext} + (1 - H_{Fext} - H_{Fint})\theta_{Tb} + H_{Fint}\theta_{Fint}]L_{Tb} + \theta_{ls}L_{ls}}{L_{su}} \quad (122)$$

Os comprimentos da bolha de Taylor, *liquid slug*, e da unidade *slug* são, respectivamente: L_{Tb} , L_{ls} e L_{su} . Tais parâmetros também estão indicados na figura 13. As temperaturas da bolha Taylor e do *liquid slug* são, na ordem: θ_{Tb} e θ_{ls} .

É importante ressaltar que as modelagens realizadas para os padrões multifásicos, quando não adotado o perfil de velocidade deduzido no Apêndice A, são puramente locais. Em outras palavras, as equações de conservação em termos médios são mais complexas e existirão termos de transferência interfaciais. Contudo, em certos cenários é possível simplificar as expressões médias para locais. Para a região de entrada, os números de Nusselt não são constantes e suas correlações são normalmente obtidas por análises numéricas.

Capítulo 4

4 DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO

4.1 Abordagem numérica

A Engenharia Assistida por Computador (*CAE*) é uma tecnologia crescente no ramo da engenharia. Por meio dessa ferramenta, cálculos mais precisos podem ser alcançados a fim de redução de recursos monetários e de tempo para desenvolvimento de um produto, e da otimização de materiais necessários em um projeto. O *CFD* (*Computational Fluid Dynamics*) é uma das técnicas que é proporcionado pelo *CAE* – outras análises possíveis são: estruturais (estáticas e dinâmicas), eletromagnéticas, acústicas, sistemas e afins. Diferentes métodos podem ser aplicados no *CAE*, como elementos finitos, volumes finitos e diferenças finitas.

Uma análise via *CFD* consiste em cinco etapas distintas:

1. Elaboração ou tratamento da geometria a partir de um software *CAD* (*Computer Aided Design*);
2. Geração da malha a partir da geometria elaborada, onde o domínio é definido e subdividido em finitos volumes. Espera-se que com a diminuição das dimensões de cada elemento, ou seja, com o aumento da quantidade desses, a solução seja cada vez mais exata. Uma malha pode ser definida como estruturada (a numeração dos volumes possui uma estrutura fixa) ou não estruturada (a numeração dos volumes possui uma estrutura desorganizada – é necessária uma matriz de conectividade);
3. Pré-processamento onde são definidas as equações e modelagens necessárias para a solução do problema, propriedades dos materiais envolvidos e condições de contorno presentes;
4. *Solver*, que compõe parte essencial da solução. Consiste na definição das técnicas e métodos apropriados para a análise numérica, tais como discretização das variáveis envolvidas, linearização onde necessário e solução dos sistemas lineares;
5. Pós-processamento que abrange a coleta dos resultados e as possíveis formas de análises desses, como gráficos, animações, estatísticas e visualizações das variáveis de interesse.

4.1.1 A primeira geometria elaborada e sua malha

A partir do experimento existente no Nemog localizado no campus de Goiabeiras da Ufes, elaborou-se a geometria tridimensional do protótipo em escala reduzida do motor da BCS. Inicialmente optou-se pela simplificação do fundo da geometria, denominado de vão cápsula-

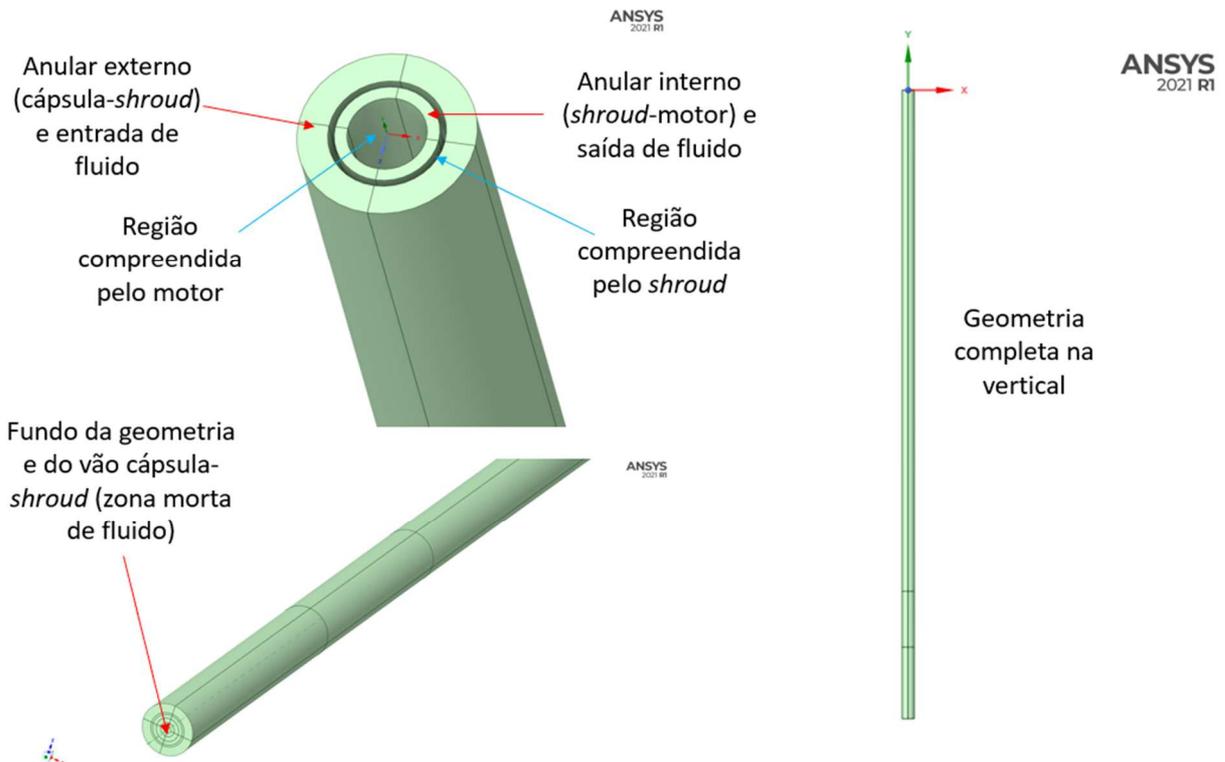
shroud, uma vez que essa região é uma zona morta de fluido. No protótipo concebido esse comprimento é de 680 mm enquanto na primeira modelagem utilizou-se 376 mm. As demais dimensões são dadas conforme a tabela 2 abaixo. Para o experimento, o motor é uma resistência elétrica e o sensor é apenas um cilindro. O poço é um tubo concêntrico externo.

Tabela 2 - Dimensões da primeira geometria elaborada com base no experimento do protótipo em escala reduzida construído no Nemog, Ufes.

Dimensão	Valor	Unidade
Comprimento do anular externo (cápsula- <i>shroud</i>)	5320,0	mm
Comprimento do anular interno (<i>shroud</i> -motor)	4790,0	mm
Comprimento do motor	4790,0	mm
Comprimento do "sensor"	154,0	mm
Comprimento do vão entre o <i>shroud</i> e sensor	376,0	mm
Comprimento do vão entre o poço e <i>shroud</i>	376,0	mm
Comprimento total da primeira geometria elaborada	5696,0	mm
Diâmetro interno do poço	114,0	mm
Diâmetro externo do <i>shroud</i>	75,0	mm
Diâmetro interno do <i>shroud</i>	66,6	mm
Diâmetro do motor	50,8	mm
Diâmetro do "sensor"	30,8	mm

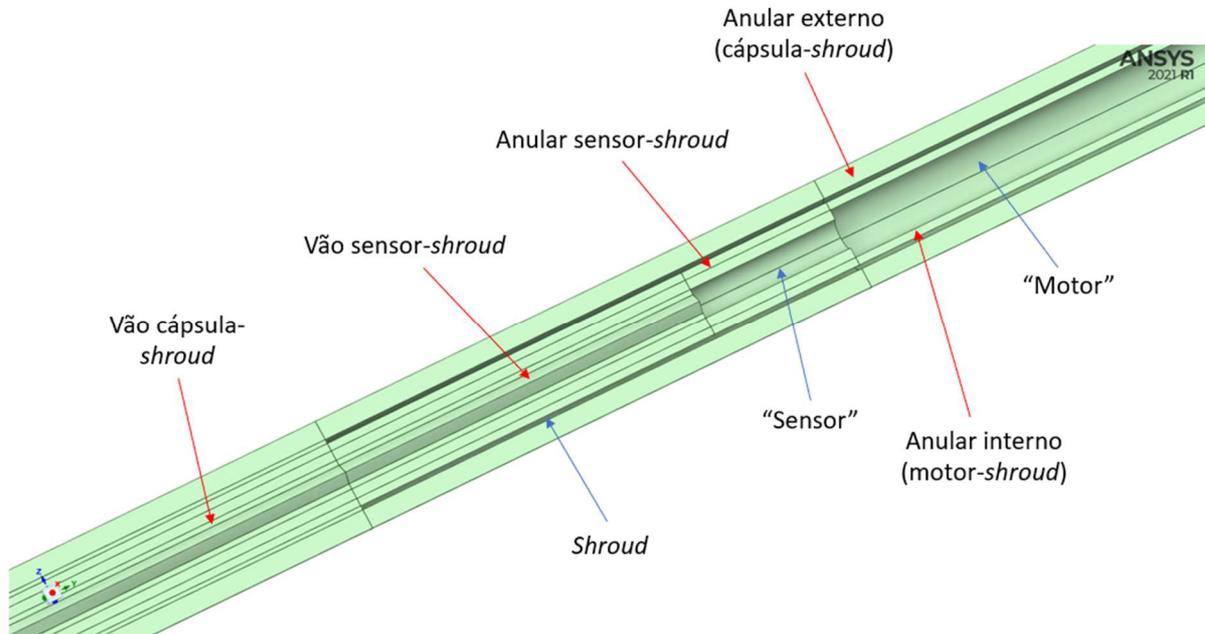
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 14 - Primeira geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

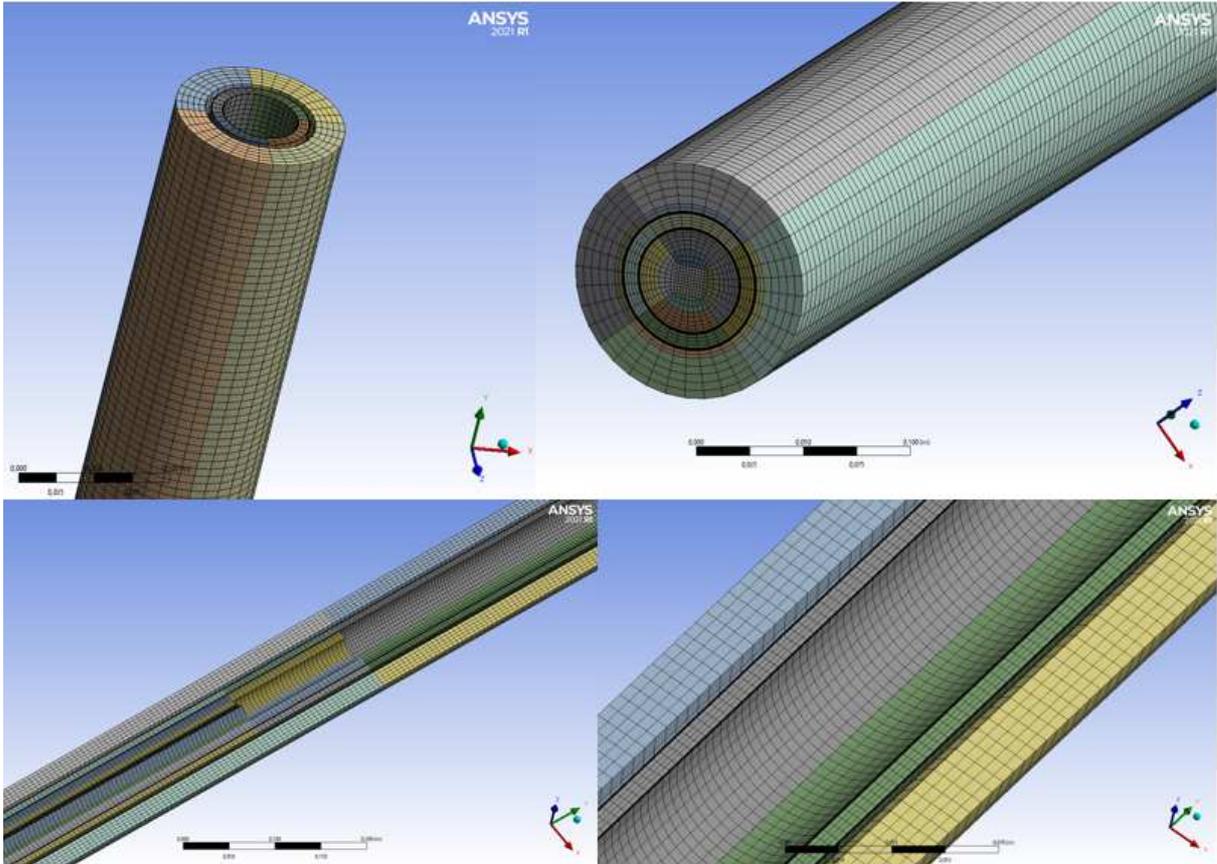
Figura 15 - Corte longitudinal na primeira geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a geometria em questão, exibida pelas figuras 14 e 15, elaborou-se uma malha totalmente hexaédrica para os primeiros testes monofásicos. Gerou-se 1.537.011 elementos. A técnica *inflation*, que consiste em um refino de malha gradual próximo à parede a fim de capturar de forma adequada os efeitos das forças viscosas e difusões térmicas do escoamento, foi estabelecida apenas no anular interno, uma vez que essa é a região de enfoque no estudo. Para tanto, adotou-se 10 camadas com uma taxa de crescimento de 1,2 e uma distância da parede ao primeiro elemento de 0,025 mm. A figura 16 expõe a malha descrita. O valor de $y^+ = 1$ foi considerado de acordo com as expressões obtidas para a tensão cisalhante nas paredes em um escoamento anular. Essa análise é de extrema importância para as posteriores simulações com as equações de turbulência impostas, no intuito de haver a correta predição das camadas limites térmica e turbulenta.

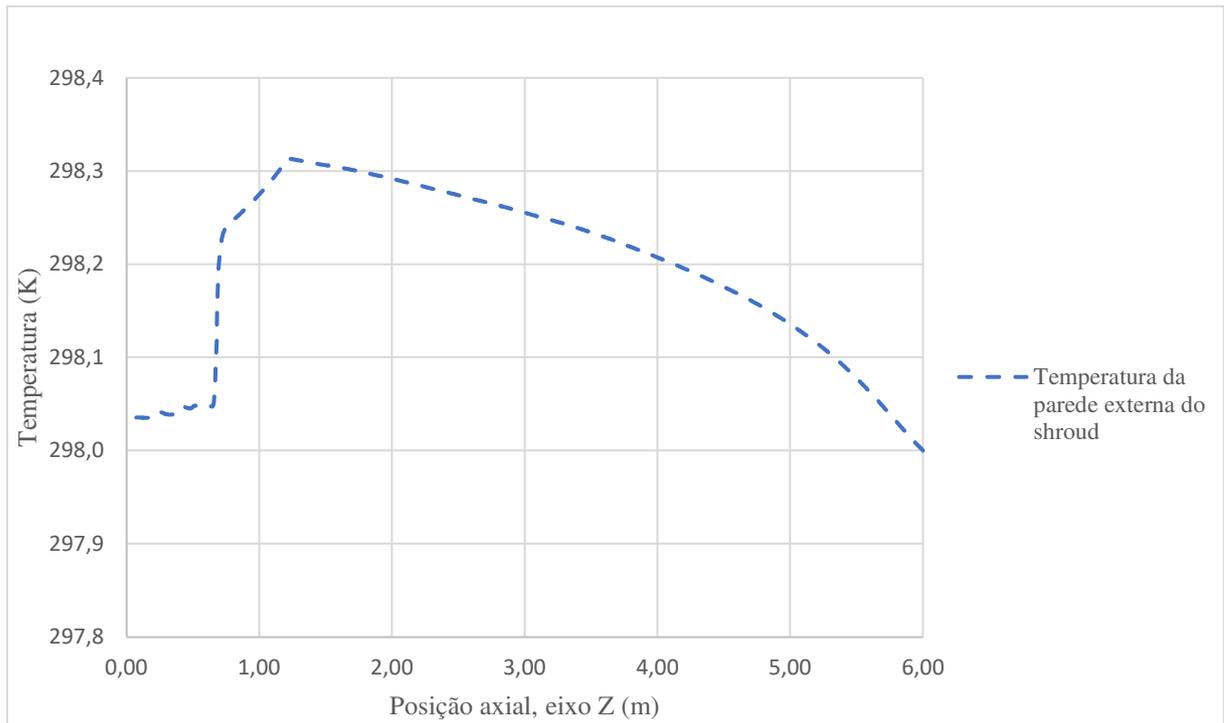
Figura 16 - Detalhes da malha gerada para a primeira geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

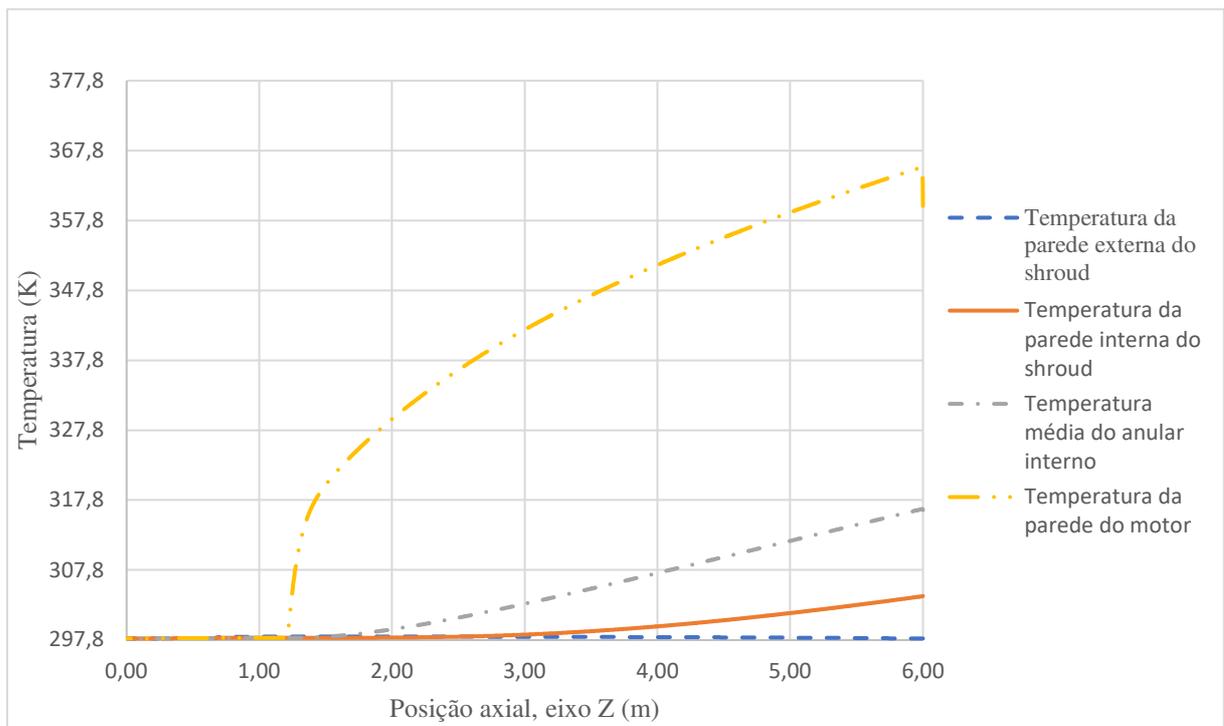
No intuito de avaliar a importância do anular externo para a transferência de calor, realizou-se o primeiro teste monofásico (água líquida), laminar, permanente, com fluxo de calor constante a partir da superfície do motor. O material utilizado para as paredes do *shroud* é o mesmo presente no protótipo de escala reduzida: borosilicato. Os testes foram realizados com uma vazão mássica de entrada de 0,107 kg/s e uma taxa de calor de 10 kW. A pressão na entrada é 229,125 kPa.

Gráfico 1 - Temperatura axial na parede externa do *shroud*. A referência é imposta no fundo da geometria.



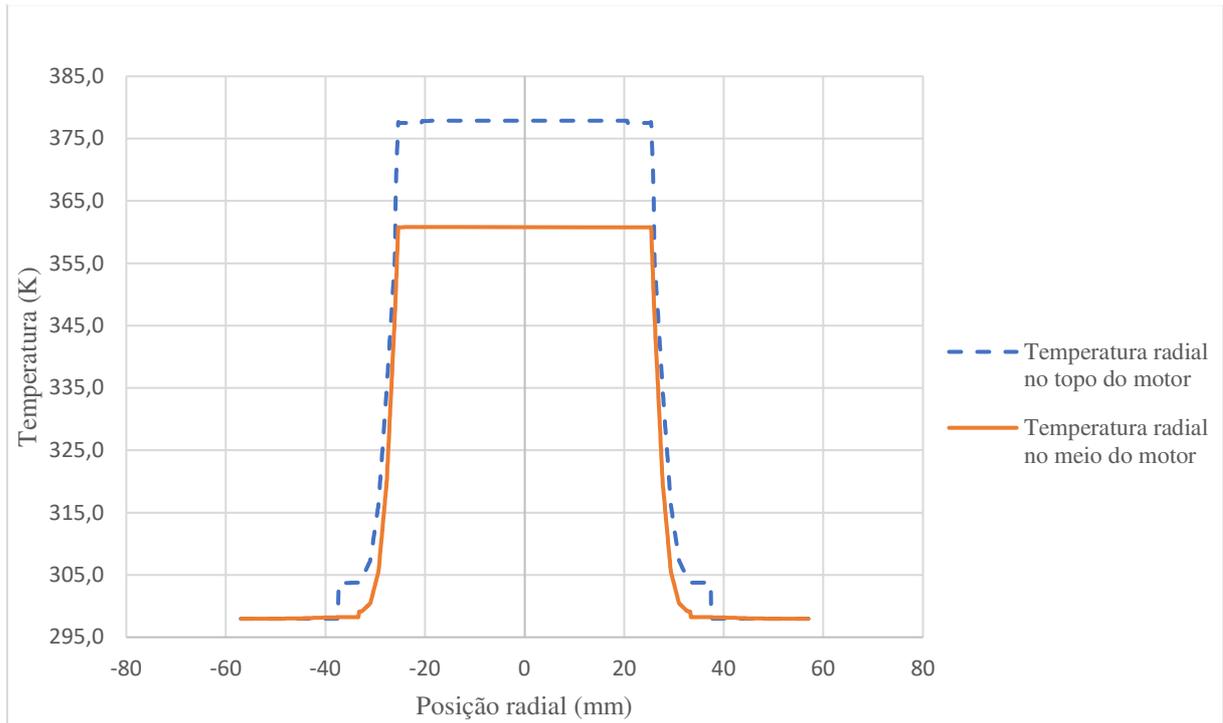
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 2 - Temperatura axial nas referidas regiões pela legenda. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 3 - Temperatura radial dos anulares interno e externo na região de topo do motor e meio do motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em virtude dos gráficos 1 a 3, é possível constatar que no anular externo não há uma significativa variação de temperatura, visto que há um acréscimo de menos de 0,4 K na temperatura axial em toda superfície externa do *shroud* (gráfico 1), sem um expressivo gradiente de temperatura radial no anular externo (gráfico 3). Em contrapartida, para o anular interno, percebe-se um alto gradiente de temperatura radial (gráfico 3), com grandes diferenças no perfil de temperatura axial das distintas regiões: superfície do motor, região intermediária do anular interno e superfície interna do *shroud* (gráfico 2).

Dessa maneira conclui-se que o anular externo não influencia de maneira considerável a dissipação de calor do motor no protótipo de escala reduzida construído no Nemog, Ufes. Dado esse fato, a geometria elaborada pode ser simplificada para que o domínio seja diminuído e recursos computacionais possam ser poupados. Tal estratégia é adotada e o anular externo em conjunto com o vão cápsula-*shroud* (zona morta do escoamento) são omitidas. Para a próxima geometria realizada, a região de entrada se dá pelo vão *shroud*-sensor, de modo que o fluxo se torna puramente ascendente e a pressão hidrostática é adequada para essa nova condição.

4.1.2 A segunda geometria elaborada e suas malhas

Como citado anteriormente, a segunda geometria elaborada difere da primeira pela exclusão do anular externo e do vão cápsula-*shroud*. Foram geradas seis malhas totalmente hexaédricas com

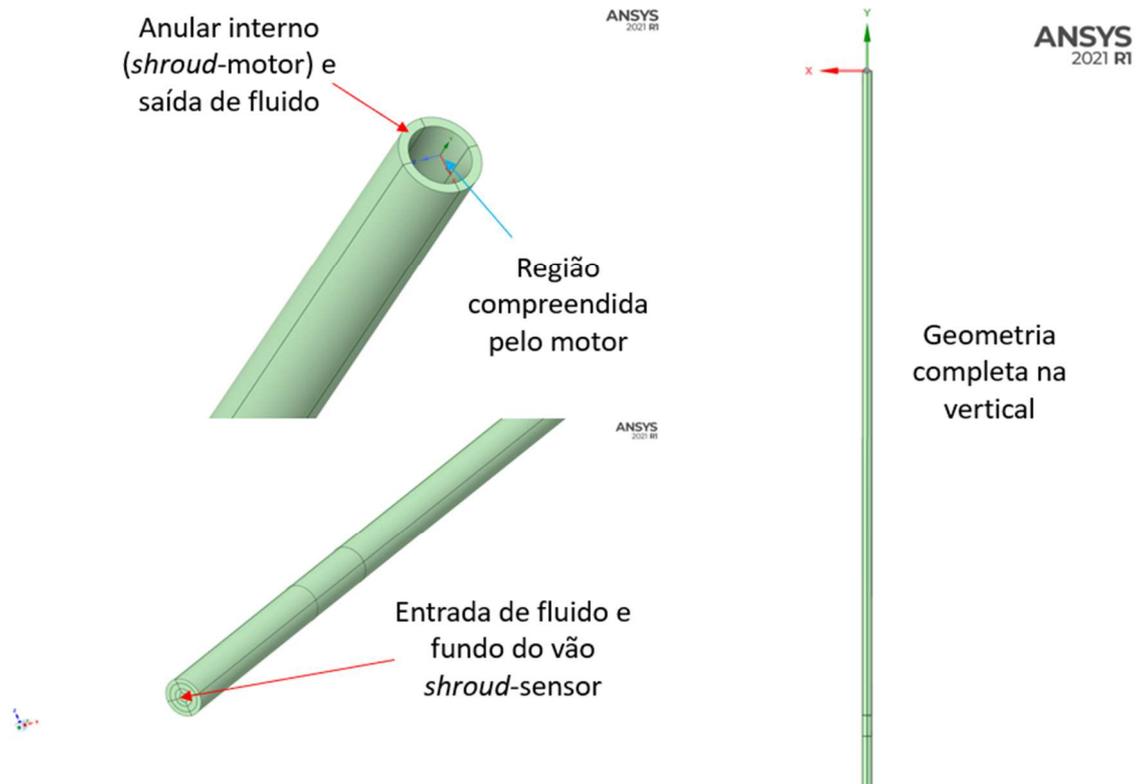
diferentes níveis de refinamento, ou seja, quantidades distintas de elementos assim como variações no *inflation* – especificamente, na distância do primeiro elemento a partir da parede. Abaixo as características elementares de cada malha. As figuras 17, 18 e 19 exibem a segunda geometria e uma de suas seis malhas geradas.

Tabela 3 - Características elementares das malhas geradas para o estudo de sensibilidade. Todas as configurações possuem seus volumes totalmente hexaédricos.

Malha	Número de elementos	Número de nós	<i>Inflation</i>
1ª	588.828	613.920	10 camadas; 0,025 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento
2ª	723.366	752.772	10 camadas; 0,025 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento
3ª	842.656	876.480	10 camadas; 0,025 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento
4ª	1.166.841	1.213.720	10 camadas; 0,025 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento
5ª	1.600.320	1.659.757	10 camadas; 0,02 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento
6ª	2.043.052	2.118.828	10 camadas; 0,02 mm 1º elemento; 1,2 taxa de crescimento

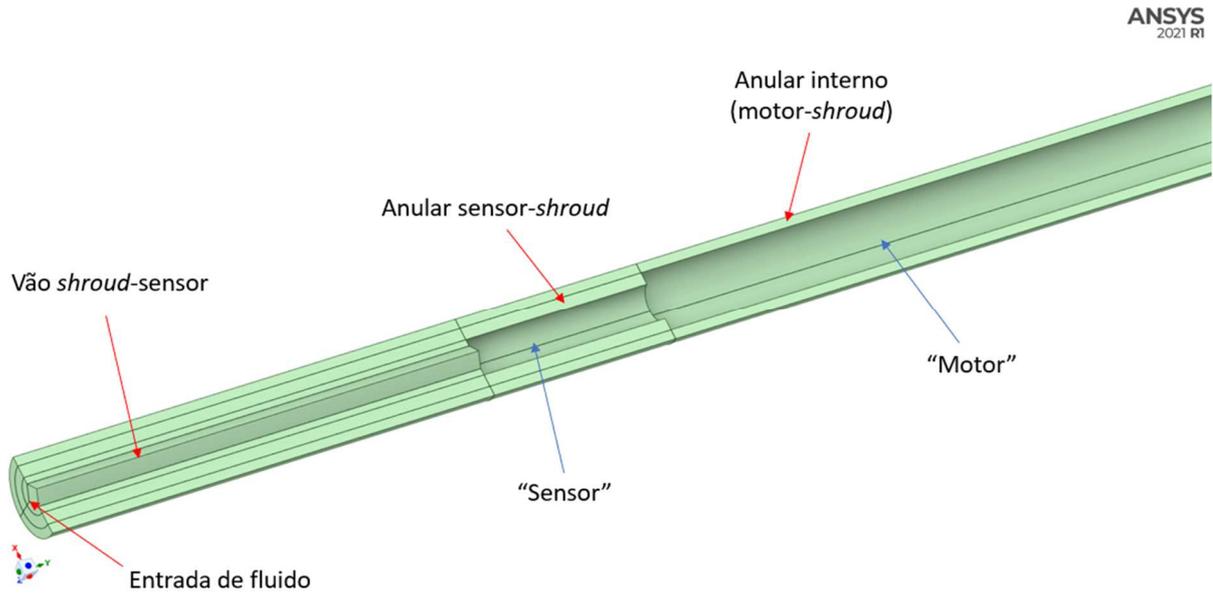
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 - Segunda geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.



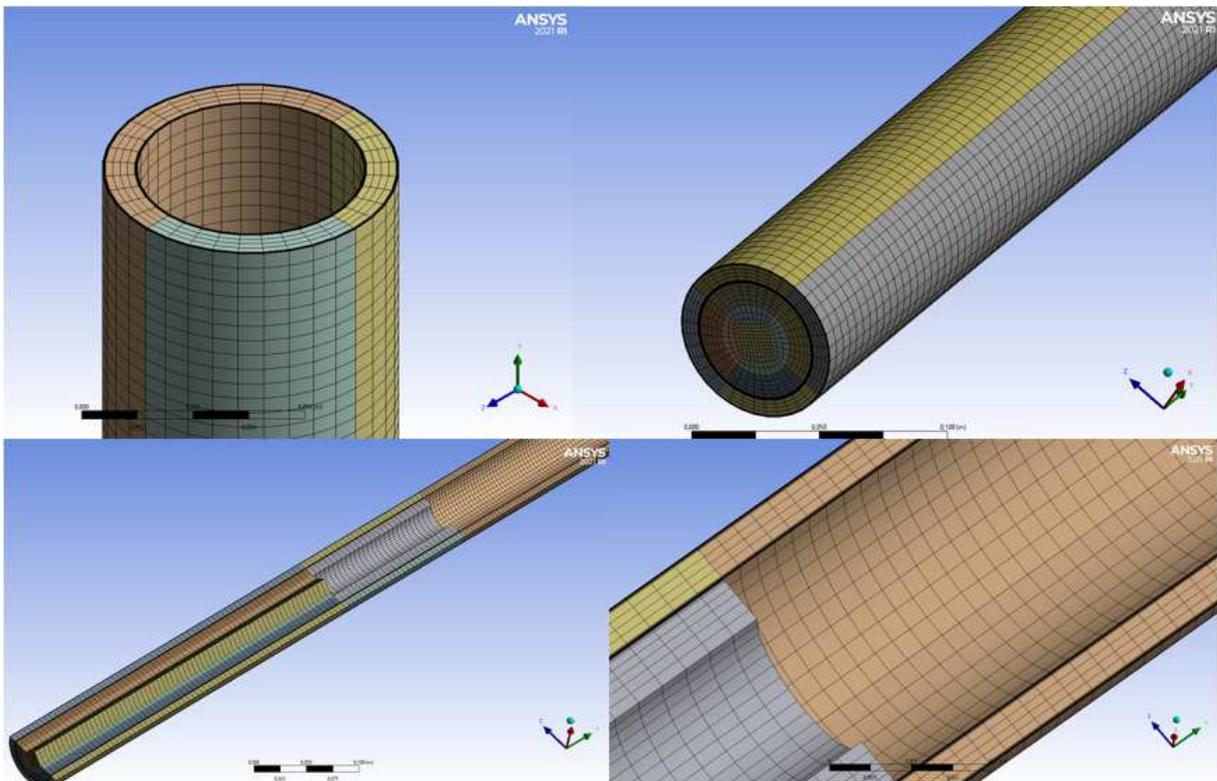
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 - Corte longitudinal na segunda geometria elaborada e algumas das regiões principais. Em vermelho a região que contém fluido e em azul a região que seria compreendida por um sólido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 - Detalhes de uma das malhas geradas para a segunda geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

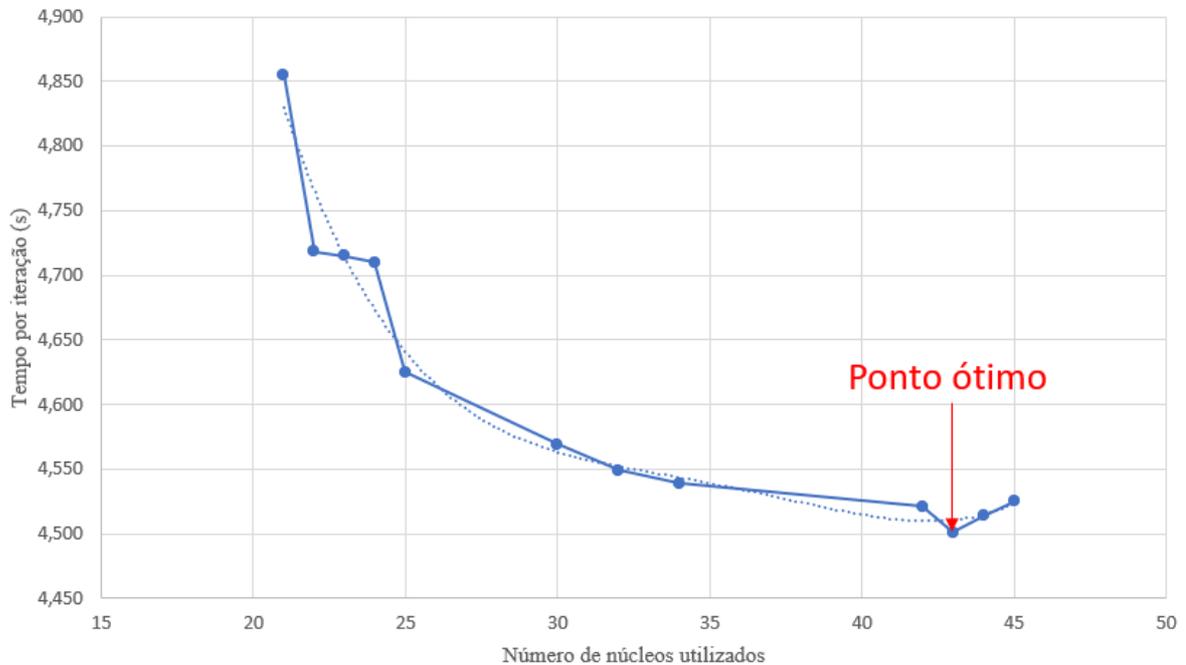
4.2 Recurso computacional

Utiliza-se o *software* Ansys Fluent versão 2021 R1 para executar as simulações a partir de uma *workstation* presente no Laboratório de Fenômenos de Transporte Computacional do Departamento de Engenharia Mecânica da Ufes, campus Goiabeiras. O computador possui uma capacidade de 64 GB de memória RAM e dois processadores Intel Xeon Gold 5220R, totalizando 46 núcleos físicos. Desabilitou-se o *hyper-threading* no intuito do Fluent otimizar o uso dos processadores.

4.3 Análise da otimização do uso dos processadores

Em uma simulação computacional, busca-se a utilização da capacidade máxima de processamento de todos os processadores dispostos. No entanto, não necessariamente o ponto máximo de processamento é a utilização de todos os núcleos. Para cada processador há um ponto ótimo distinto, e é dever do usuário obter esse conhecimento. O gráfico abaixo expõe a escalabilidade da simulação do presente trabalho na máquina descrita na seção anterior.

Gráfico 4 - Análise da otimização do número de núcleos a se utilizar nas simulações computacionais. Os pontos são os testes para os respectivos números de núcleos e a linha pontilhada é a linha de tendência polinomial que mais se aproxima à curva obtida na análise.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise foi realizada com um número fixo de iterações (100) para distintos quantitativos de núcleos empregados. Ao fim de cada uma das 100 iterações para distintos números de núcleos utilizados, verificou-se o tempo médio em cada iteração. A partir do gráfico 4, conclui-se que

o número ótimo de núcleos físicos a se utilizar nas simulações é 43. Tal constatação é aplicada para todo o estudo.

4.4 Estudo de sensibilidade de malha

No âmbito de conhecer o quão necessário é o refino da malha, geraram-se as seis descritas na tabela 3. No entanto, o critério para o teste de malha em um escoamento multifásico não é trivial e pouco exposto nos trabalhos acadêmicos. Em um escoamento onde a presença da fase secundária é de grande relevância para o problema, parâmetros essenciais como a velocidade e tensão cisalhante de ambas as fases são de extrema importância para o estudo como um todo. Em outras palavras, em um escoamento multifásico, não é adequado realizar investigação da independência de malha realizando apenas testes monofásicos, uma vez que parâmetros importantes da segunda fase poderão ser omitidos com essa abordagem.

Nesse contexto, as seis malhas geradas foram testadas com parâmetros e definições similares às simulações que serão efetuadas: regime transiente, escoamento vertical com campo gravitacional, modelo multifásico *Eulerian* com as devidas modelagens das forças interfaciais, implícito, turbulência descrita pelo modelo $k - \omega SST$ para cada fase, discretizações espaciais *First Order Upwind* (utilizando PRESTO! para a pressão), e acoplamento pressão velocidade *Phase Coupled SIMPLE*. A equação de energia foi omitida para os testes de malha visto que apenas parâmetros hidrodinâmicos já se fazem suficientes. Dessa maneira, poupa-se recursos computacionais. O tempo físico de 2,8 segundos foi o determinado para avaliação das malhas – observou-se nesse tempo a presença da fase secundária na região do motor, que é o foco do estudo.

Para tanto, avaliou-se para ambas as fases o desvio padrão da velocidade média axial no anular motor-*shroud*, e a tensão cisalhante na parede do motor. Da mesma maneira, investigou-se os perfis de velocidades radiais para ambas as fases, em determinadas seções do anular motor-*shroud*. As malhas 5 e 6 expostas na tabela 3 não alcançaram resultados práticos em tempos viáveis para análise. Os resultados provenientes das demais malhas são expostos a seguir.

Tabela 4 - Desvios padrões nas malhas geradas da velocidade média axial no anular motor-*shroud* e tensão cisalhante na parede do motor. Avaliado para a fase primária (líquida).

Desvio padrão - fase primária (líquida)						
Propriedade	Malha 01	Malha 02	Malha 03	Malha 04	Malha 05	Malha 06
Velocidade média axial no anular motor- <i>shroud</i>	0,03648	0,01819	0,00294	0,00285	-	-
Tensão cisalhante na parede do motor	0,34376	0,23424	0,02464	0,01839	-	-

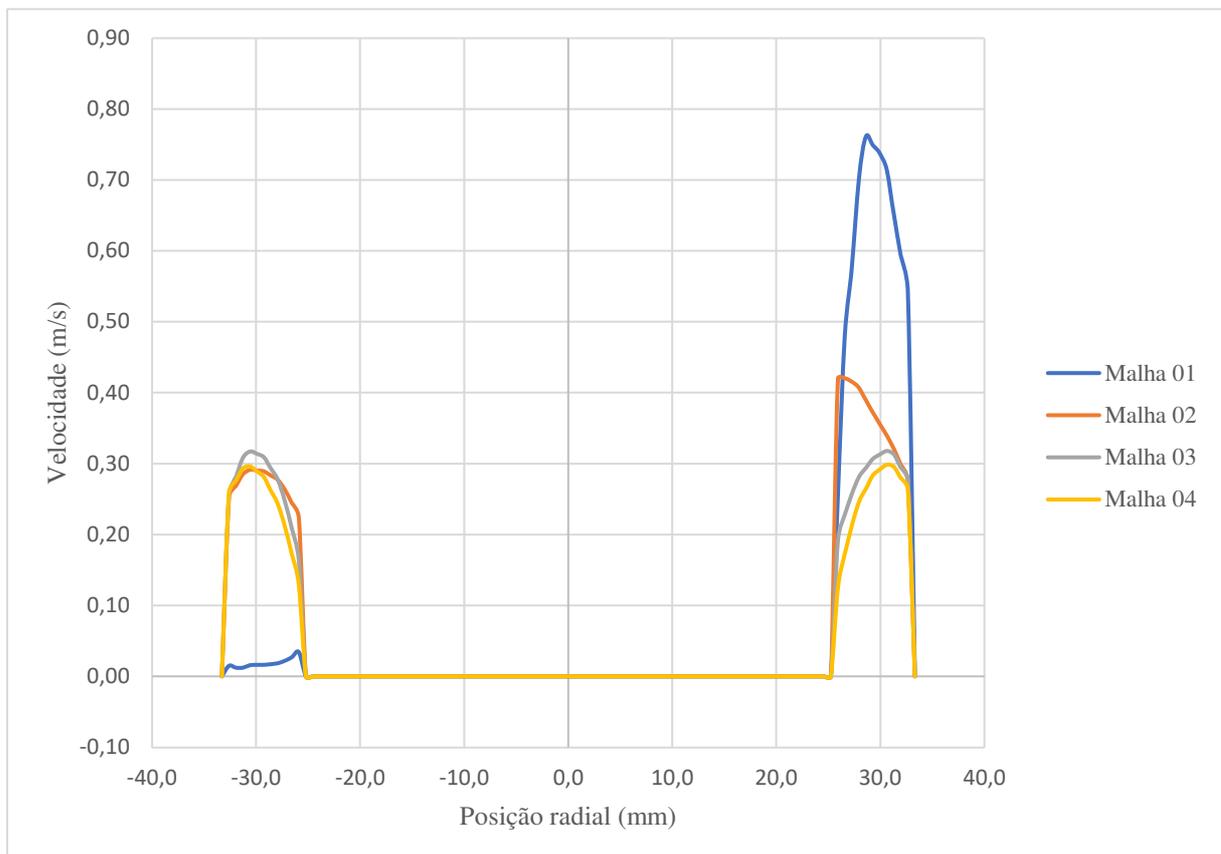
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 - Desvios padrões nas malhas geradas da velocidade média axial no anular motor-*shroud* e tensão cisalhante na parede do motor. Avaliado para a fase secundária (gasosa).

Desvio padrão - fase secundária (gasosa)						
Propriedade	Malha 01	Malha 02	Malha 03	Malha 04	Malha 05	Malha 06
Velocidade média axial no anular motor- <i>shroud</i>	0,07675	0,06376	0,02495	0,01369	-	-
Tensão cisalhante na parede do motor	1,1E-04	4,4E-05	3,2E-10	2,6E-11	-	-

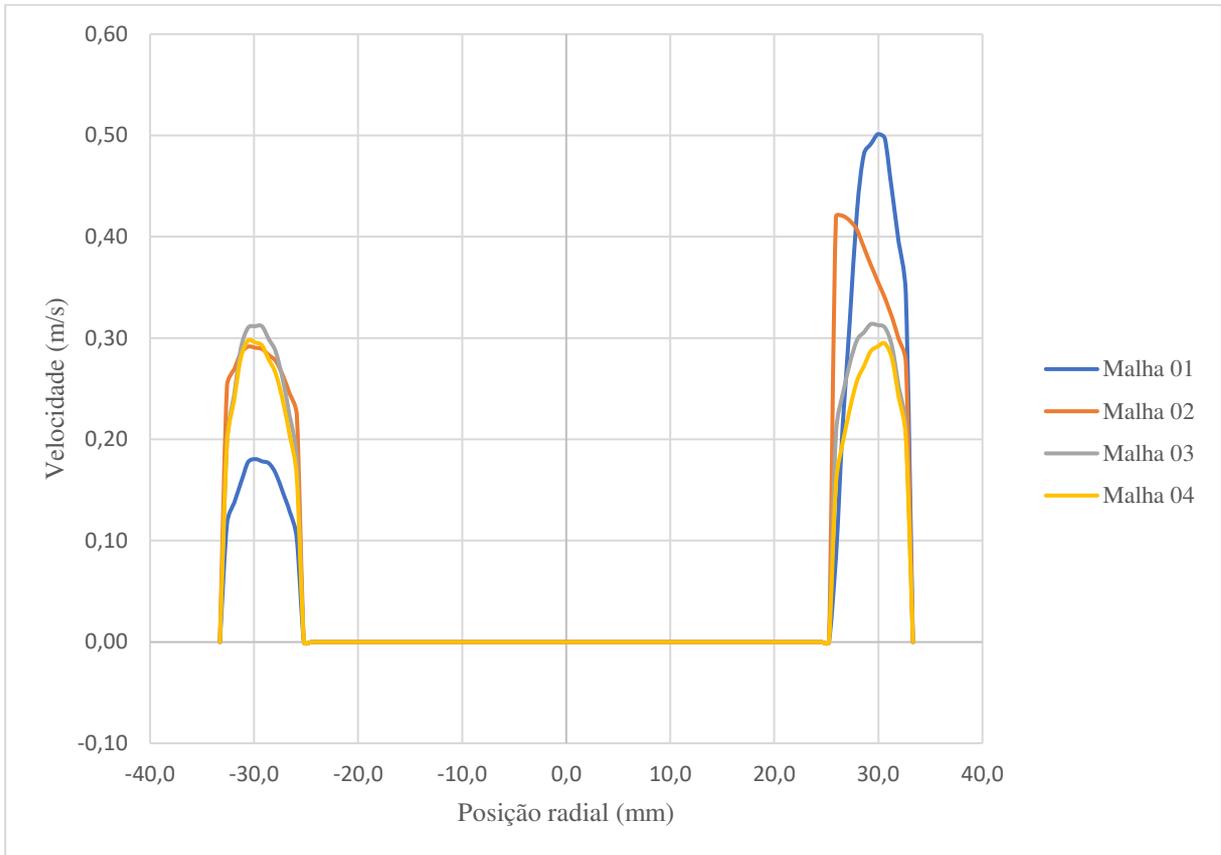
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 5 - Perfis de velocidades da fase primária no anular motor-*shroud* para as malhas geradas em uma seção a 10 mm do início do motor.



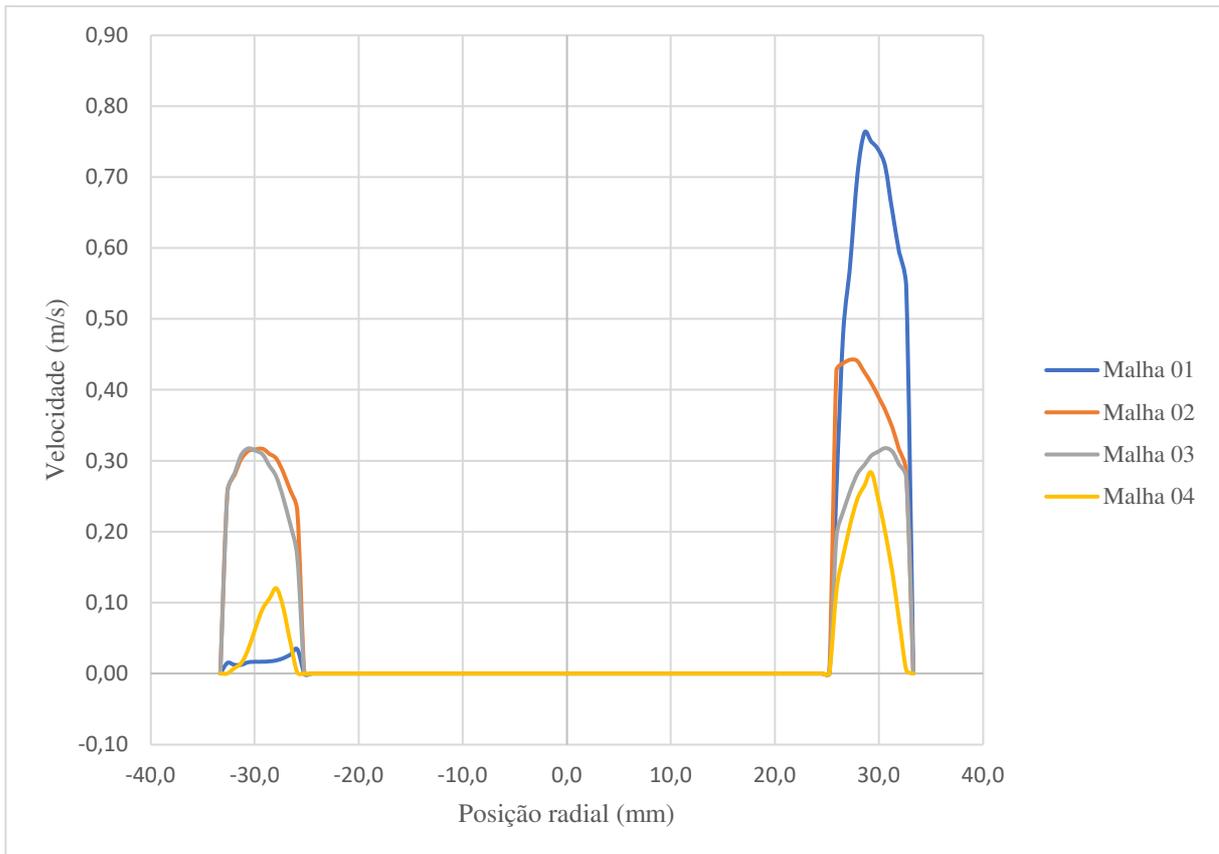
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 6 - Perfis de velocidades da fase secundária no anular motor-*shroud* para as malhas geradas em uma seção a 50 mm do início do motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 7 - Perfis de velocidades da fase primária no anular motor-*shroud* para as malhas geradas em uma seção a 10 mm do início do motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com as tabelas 4 e 5 em conjunto com os gráficos 6 e 7, observa-se a tendência de o desvio padrão das propriedades avaliadas diminuir de acordo com o refinamento da malha e os perfis de velocidade se aproximarem ao da malha 04. A malha 03 já seria suficientemente boa para o prosseguimento do estudo, contudo, verificou-se que para essa malha o campo de pressão foi solucionado erroneamente. Assim sendo, a malha 04 é a que melhor integra resultados precisos com tempos viáveis para análises; sendo essa a selecionada para a continuidade do trabalho.

4.5 Estratégias para as simulações

A complexidade de um escoamento multifásico é observada de forma prática em uma análise numérica pela dificuldade de convergência da solução. A melhor técnica para atenuar esse impasse é resolver o escoamento passo a passo. Em outras palavras, a primeira etapa do problema é solucioná-lo nas condições mais simples a fim de obter valores iniciais para as variáveis, à medida que se realiza um aumento gradativo na complexidade da física envolvida dado os pré-resultados obtidos.

Visto que a simulação trata de um escoamento bifásico, turbulento, transiente e com transferência de calor, todo o caso é configurado conforme o necessário. Contudo, desligam-se as equações da fração volumétrica, modelagem da turbulência e energia para uma primeira convergência de um escoamento laminar, monofásico, isotérmico e permanente. Após o sucesso, a equação de energia é imposta para que a solução compute a transferência de calor em um escoamento já desenvolvido hidrodinamicamente pela fase primária. Dada a convergência dessa segunda etapa, as equações do modelo turbulento são incluídas. Espera-se a correta solução e, por fim, troca-se o regime permanente para transiente. A equação da fração volumétrica é agregada ao problema nesse instante – inicia-se a presença da fase secundária. Dessa maneira, quando todas as equações necessárias da simulação se fazem presentes, as variáveis já possuem valores de um escoamento em condições similares (mais simples) e, assim, a solução é favorecida ao passo que a convergência também é facilitada.

De forma similar, os métodos de discretização espacial também necessitam atenção. Utiliza-se do *First Order Upwind* até um certo instante do escoamento, uma vez que esse esquema facilita a convergência. No entanto, após a estabilidade numérica, muda-se para o método *Second Order Upwind*. Este, por sua vez, segundo o próprio manual do Ansys, reproduz resultados mais precisos.

4.6 Parâmetros e condições de contorno

4.6.1 Testes monofásicos

Em ambas as geometrias elaboradas, testes monofásicos foram desempenhados. Para a primeira, investigou-se a possibilidade da simplificação da geometria conforme descrito no início deste capítulo. Para a segunda geometria, avaliou-se a transferência de calor para diferentes números de Reynolds, no intuito de conhecer o comprimento de entrada térmica no anular motor-*shroud*. Esse parâmetro será maior do que o comprimento de entrada hidrodinâmico, uma vez que o aquecimento começa em uma região posterior à entrada do escoamento e o número de Prandtl do líquido (água) é maior do que a unidade.

O comprimento de entrada térmica é um parâmetro de importante conhecimento porque a modelagem da transferência de calor é distinta na região de entrada ou na região plenamente desenvolvida. Como exposto no capítulo 3, apenas na região plenamente desenvolvida o número de Nusselt será uma constante. Em outras palavras, para um escoamento com fluxo térmico constante na superfície, é apenas no pleno desenvolvimento térmico que a diferença

entre a temperatura do motor e a temperatura média do fluido também será constante – o gradiente da temperatura na direção axial será independente da coordenada axial. Os principais parâmetros para os testes monofásicos são expostos a seguir.

Tabela 6 - Parâmetros de destaque utilizados nos testes monofásicos.

Natureza do escoamento	Monofásico
Fluido	Água líquida
Regimes do escoamento	Permanente e laminar
Acoplamento Pressão-Velocidade	<i>SIMPLEC</i>
Gradientes da discretização espacial	<i>Least Squares Cell Based</i>
Discretização da pressão	<i>Second Order</i>
Discretização do movimento	<i>First Order Upwind</i>
Discretização da energia	<i>First Order Upwind</i>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Desempenharam-se três testes monofásicos. Avaliou-se a transferência de calor para distintos números de Reynolds no anular motor-*shroud* (448; 627; 1303) que correspondem às vazões mássicas 0,0368 kg/s, 0,0515 kg/s e 0,1070 kg/s. O número de Reynolds é calculado pela definição usual de diâmetro hidráulico, que, para uma geometria anular, equivale a subtração do diâmetro externo pelo diâmetro interno. As pressões na entrada do domínio foram adequadas para cada vazão distinta. O fluxo de calor na superfície foi mantido constante com um valor de 13081,3 W/m². Para a saída, adotou-se a condição de *outflow*. Tal condição de contorno é utilizada para modelar a saída do escoamento quando não se tem detalhes da velocidade e pressão nessa região. Segundo o manual do Ansys, quando imposto o *outflow*, todas as difusões do escoamento na saída são zero e é realizada uma correção geral no balanço de massa.

4.6.2 Simulações multifásicas

Por meio dos testes de malha realizados, verificou-se que a discretização espacial da fração volumétrica não reproduz contornos claros ao utilizar o *First Order Upwind*, o que dificulta a observação dos padrões de escoamento bifásico. Posteriormente, averiguou-se o esquema *HRIC* (*High Resolution Interface Capturing*), mas este também não apresentou resultados satisfatórios, isto é, não foi observado uma melhoria para a geometria de interface. Com o propósito de obter um melhor contorno entre as fases ao utilizar o modelo *Eulerian*, habilitou-se o *Multi-Fluid VOF Model* com uma modelagem de interface *Sharp/Dispersed*, para uma correta descrição das forças interfaciais.

Nesse contexto, em uma abordagem implícita para a fração volumétrica, a discretização espacial dessa propriedade pode ser realizada por dois esquemas distintos: *Compressive* e

Modified HRIC. A solução por ambos os métodos foi investigada e constatou-se resultados melhores para o *Compressive*. Abaixo são expostos esses e demais parâmetros e modelos de destaque utilizados para as simulações:

Tabela 7 - Parâmetros e modelos de destaque utilizados nas simulações multifásicas.

Modelo multifásico	<i>Eulerian com Multi-Fluid VOF Model</i>
Fase primária	Água líquida
Fase secundária	Ar
Modelagem da interface	<i>Sharp/Dispersed</i>
Formulação da fração volumétrica	Implícita
Coefficiente de arrasto	Ishii-Zuber
Coefficiente de sustentação	Tomiyama
Coefficiente da força de parede	Frank
Coefficiente de massa virtual	Constante
Força de dispersão turbulenta	Burns et al.
Modelagem da turbulência	$k - \omega$ SST por fase, aquecimento viscoso e limite de produção
Acoplamento Pressão-Velocidade	<i>Phase Coupled SIMPLE</i>
Gradientes da discretização espacial	<i>Least Squares Cell Based</i>
Discretização da pressão	<i>Second Order</i>
Discretização do movimento	<i>Second Order Upwind</i>
Discretização da fração volumétrica	<i>Compressive</i>
Discretização da energia cinética turbulenta	<i>First Order Upwind</i>
Discretização da taxa específica de dissipação	<i>First Order Upwind</i>
Discretização da energia	<i>First Order Upwind</i>
Formulação transiente	<i>Second Order Implicit</i>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o intuito de conhecer o comportamento da transferência de calor de acordo com diferentes condições presentes, realizaram-se duas simulações na posição vertical com diferentes vazões mássicas de água e consequente pressão estática. As propriedades dos fluidos foram mantidas constantes em todo o estudo. Para a saída do escoamento, adotou-se a condição de *outflow*.

Tabela 8 - Condições de contorno da primeira simulação.

Parâmetros	Valor	Unidade
Pressão na entrada do domínio	195,48	kPa
Temperatura de entrada	298	K
Vazão mássica de água	0,0515	kg/s
Vazão mássica de ar	0,0003	kg/s
Fluxo de calor constante na parede do motor	13081,3	W/m ²
Coefficiente convectivo na parede externa do <i>shroud</i>	5	W/m ² K
Temperatura do fluxo livre na parede externa do <i>shroud</i>	298	K
Espessura da parede do <i>shroud</i>	4,2	mm
Material na parede do motor	Cobre	-
Material da parede do <i>shroud</i>	Borosilicato	-
Posição da geometria	Vertical	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 9 - Condições de contorno da segunda simulação.

Parâmetros	Valor	Unidade
Pressão na entrada do domínio	281,68	kPa
Temperatura de entrada	298	K
Vazão mássica de água	0,1070	kg/s
Vazão mássica de ar	0,0003	kg/s
Fluxo de calor constante na parede do motor	13081,3	W/m ²
Coeficiente convectivo na parede externa do <i>shroud</i>	5	W/m ² K
Temperatura do fluxo livre na parede externa do <i>shroud</i>	298	K
Espessura da parede do <i>shroud</i>	4,2	mm
Material na parede do motor	Cobre	-
Material da parede do <i>shroud</i>	Borosilicato	-
Posição da geometria	Vertical	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 5

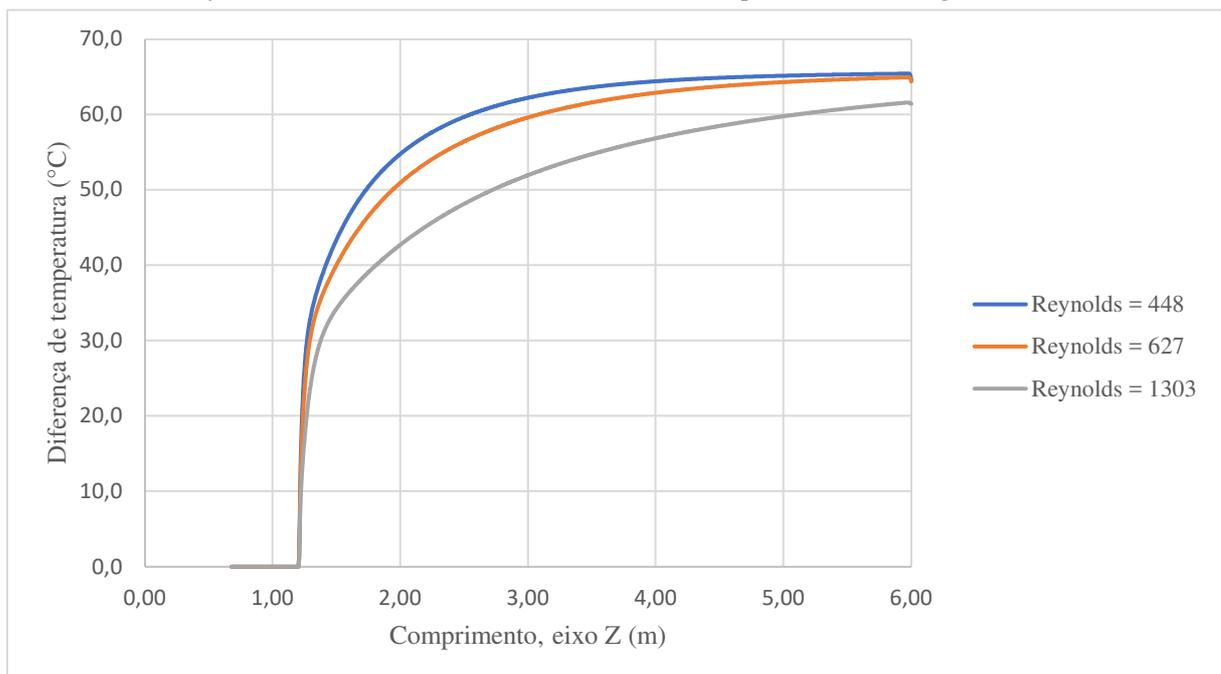
5 RESULTADOS E ANÁLISES

5.1 Testes monofásicos

Para avaliar o comportamento da hidrodinâmica e transferência de calor em um escoamento permanente e monofásico, empregou-se água no estado líquido e propriedades constantes com distintas vazões mássicas em regime permanente: 0,0368 kg/s, 0,0515 kg/s e 0,1070 kg/s. Essas vazões correspondem aos respectivos números de Reynolds no anular motor-*shroud*: 448, 627 e 1303.

Observou-se que apenas para baixos números de Reynolds estará presente uma região de pleno desenvolvimento térmico, sendo exposto no final do anular motor-*shroud*. Dessa maneira, todo ou grande parte do escoamento estará na região de entrada térmica. O mesmo não ocorre para o desenvolvimento hidrodinâmico, no qual o comprimento de entrada é curto e o escoamento se torna plenamente desenvolvido na região inicial do anular motor-*shroud*. Assim, em um escoamento permanente e monofásico no motor da BCS, é possível afirmar que se atingirá o pleno desenvolvimento hidrodinâmico, mas não o térmico. Isto é um fato dado que o número de Prandtl para fluidos viscosos⁸ será ainda maior do que o da água líquida.

Gráfico 8 - Diferença entre temperaturas da superfície motor e média do escoamento para distintos números de Reynolds no anular motor-*shroud*. A referência é imposta no fundo da geometria.

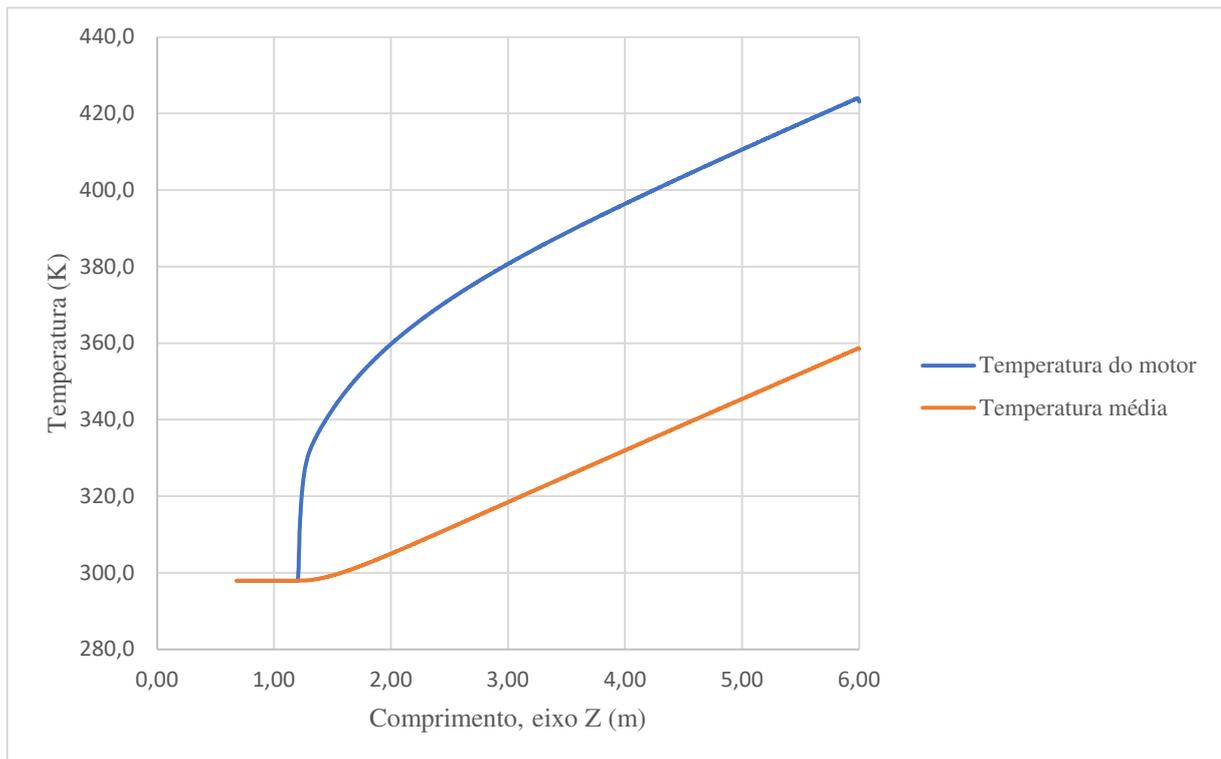


Fonte: Elaborado pelo autor.

⁸ A denominação “fluidos viscosos” se refere aos fluidos com viscosidade maior do que o da água líquida.

Pelo gráfico 8, nota-se que para $Re = 448$, o escoamento se torna termicamente plenamente desenvolvido em um comprimento de 3,8 m do motor (a 1 m de seu final). Para $Re = 627$, o comprimento de entrada térmica é próximo ao final do motor: pode-se considerar em 4,6 m. No entanto, para $Re = 1303$, o comprimento de entrada térmica não é atingido e o escoamento não se torna plenamente desenvolvido termicamente em nenhum instante.

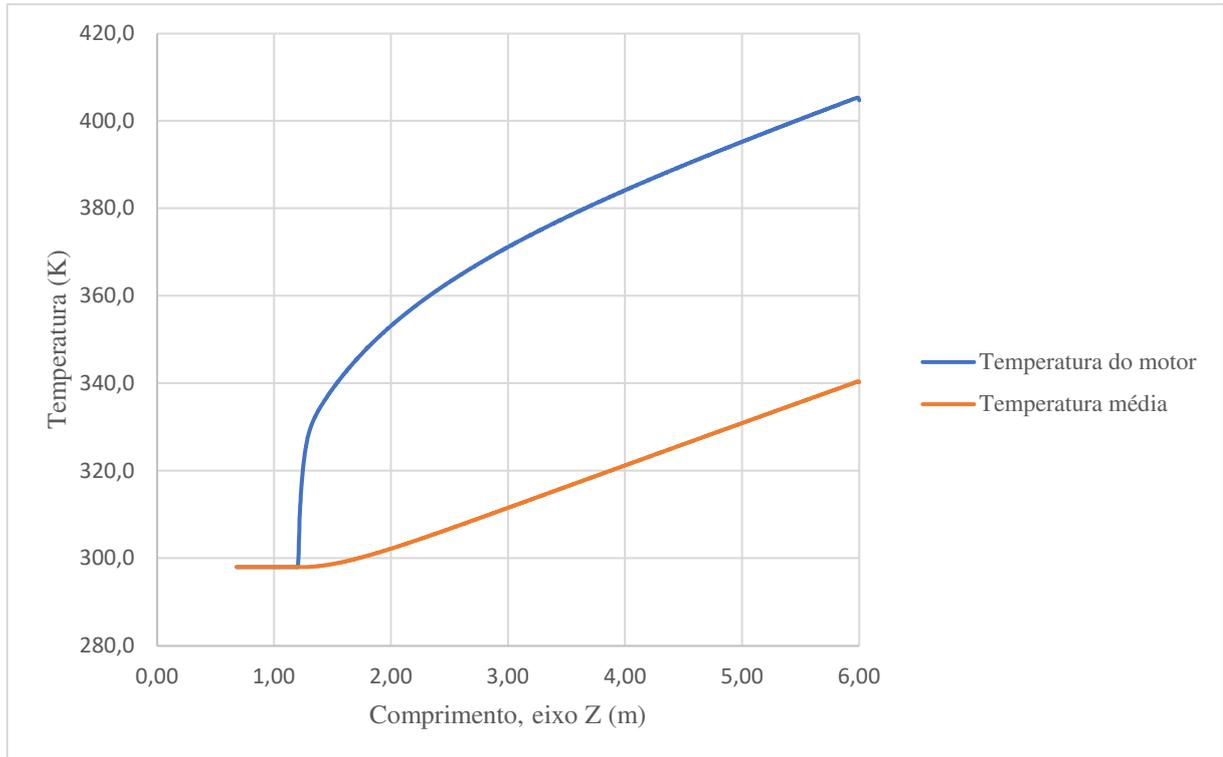
Gráfico 9 - Temperaturas para $Re = 448$ no anular motor-*shroud*. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

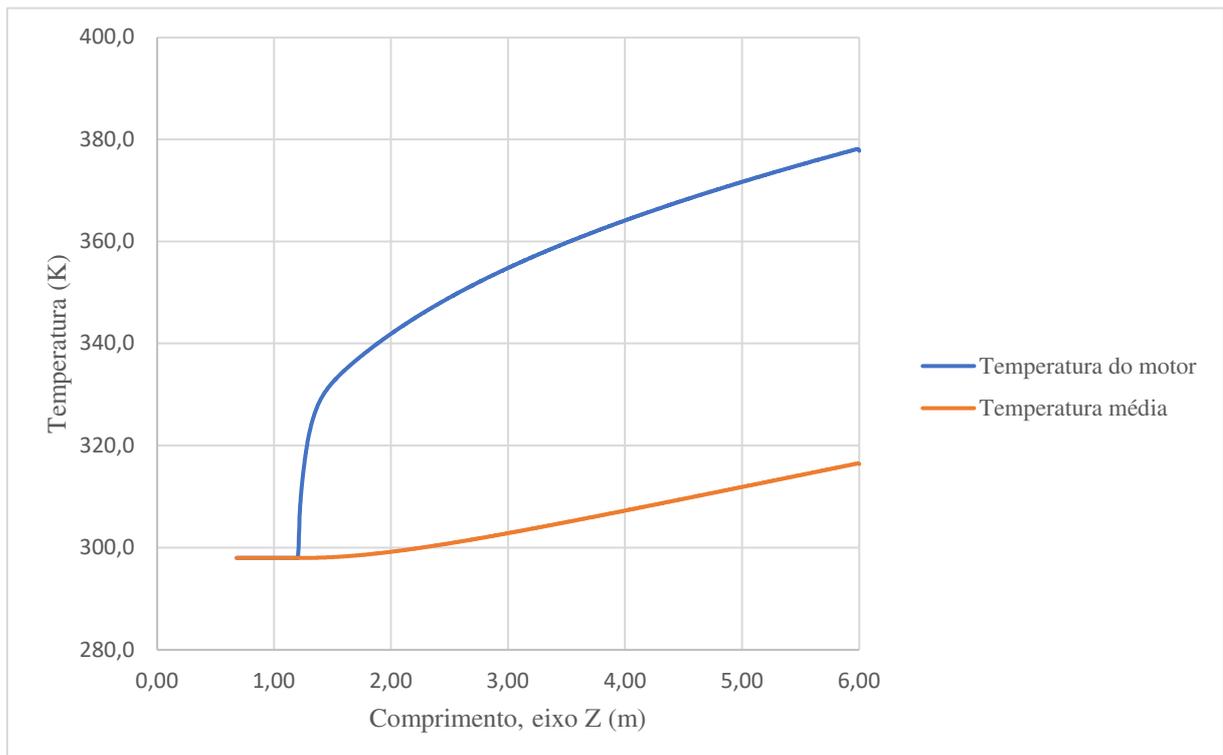
O gráfico 9 expõe as temperaturas atingidas na superfície do motor e a média do escoamento para uma vazão mássica de 0,0368 kg/s. Contudo, para a condição de pressão existente, teríamos uma mudança de fase da água líquida para gasosa na região próxima ao motor quando fosse atingida a temperatura de saturação. Uma vez que se consideraram propriedades constantes e escoamento monofásico, tal mudança de fase foi omitida nesta simulação a fim de obter apenas dados qualitativos. Os gráficos 10 e 11 trazem as curvas de temperatura para as vazões mássicas 0,0515 kg/s e 0,1070 kg/s, mas nesses casos não se dará a mudança de fase de acordo com as condições de pressão existentes.

Gráfico 10 - Temperaturas para $Re = 627$ no anular motor-*shroud*. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 11 - Temperaturas para $Re = 1303$ no anular motor-*shroud*. A referência é imposta no fundo da geometria.

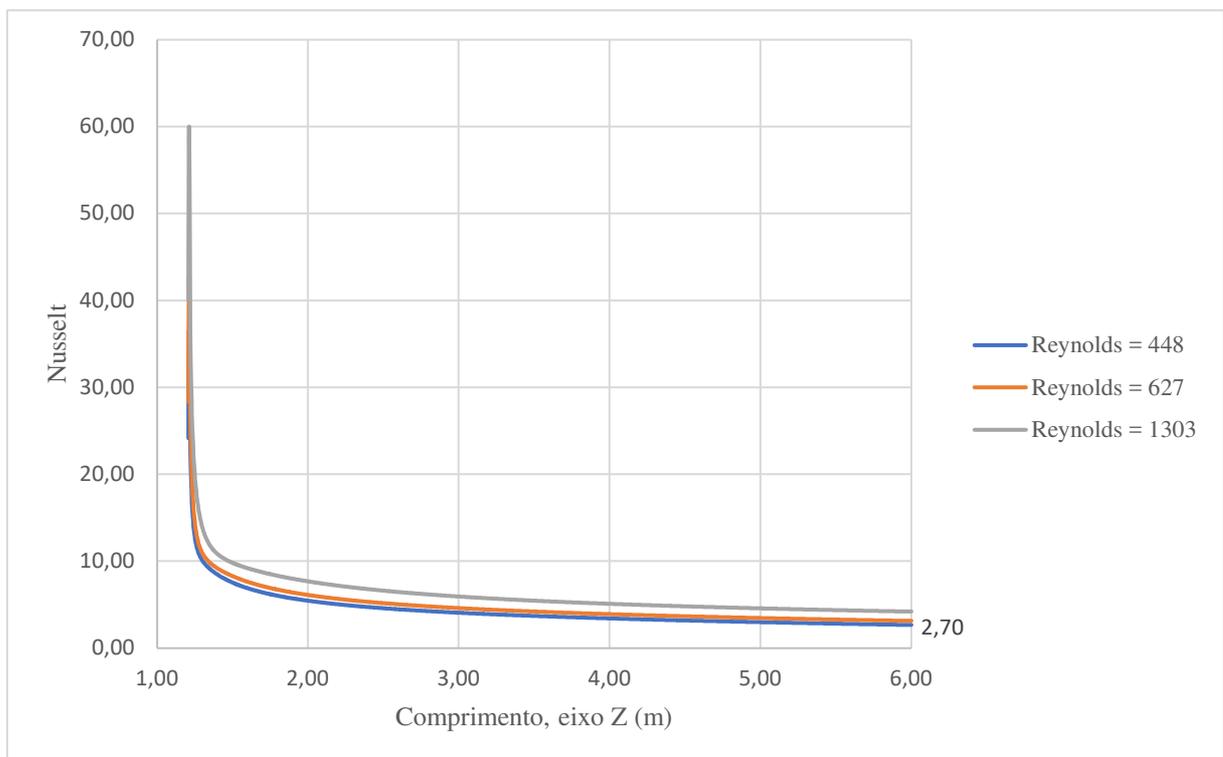


Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se a diferença entre os gráficos 9, 10 e 11. Para o primeiro, as curvas de temperatura tendem a configurar uma reta de forma mais rápida, característica que é diminuída para os gráficos 10 e 11.

Uma vez que a região plenamente desenvolvida é atingida apenas para baixos números de Reynolds (e quanto menor, mais rapidamente é alcançado), avaliou-se a tendência do número de Nusselt.

Gráfico 12 - Número de Nusselt de acordo com o desenvolvimento axial do domínio e para diferentes números de Reynolds para água líquida.

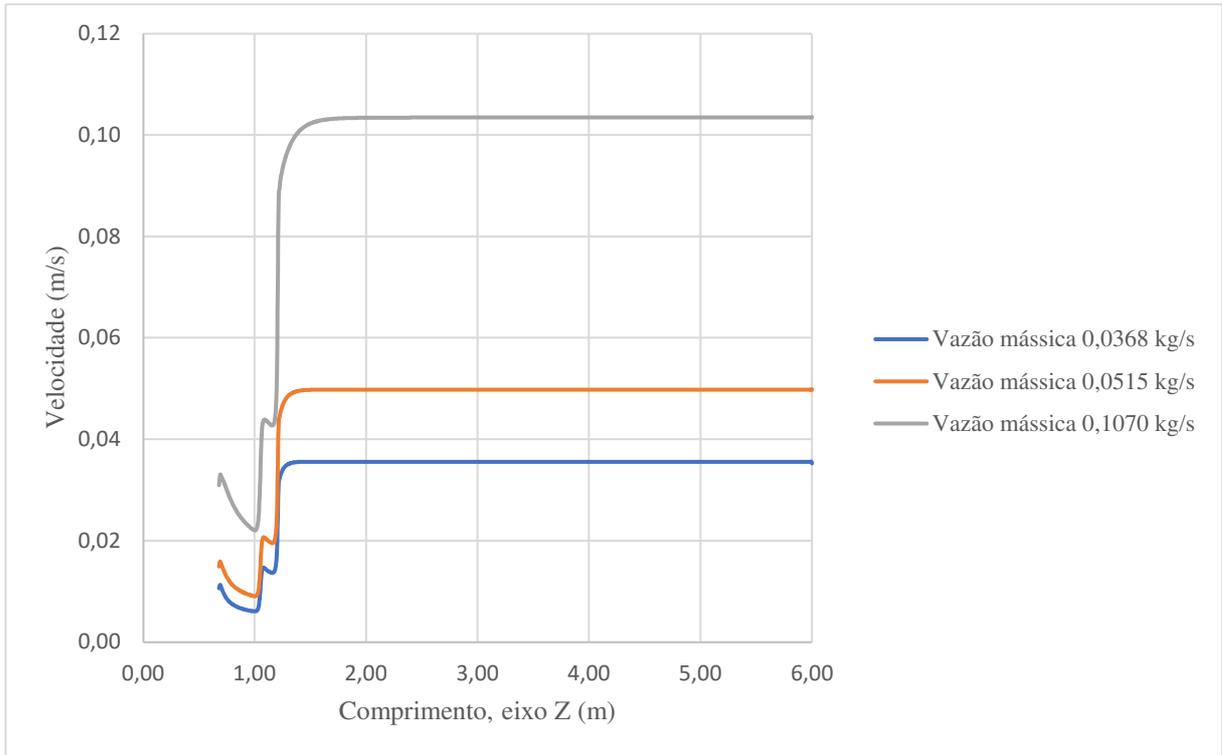


Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, é constatado que o número de Nusselt tende para o valor de 2,70 à proporção que o escoamento se torna plenamente desenvolvido termicamente.

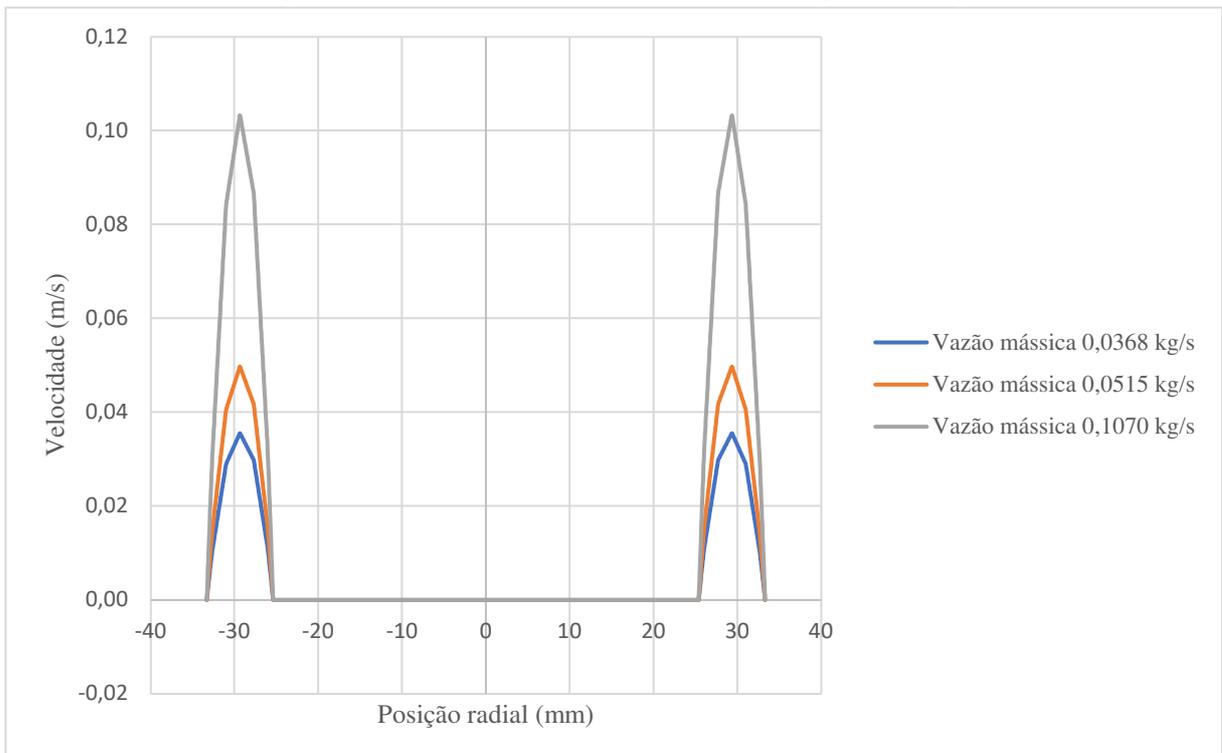
A hidrodinâmica também é avaliada conforme os gráficos 13 e 14, expostos a seguir.

Gráfico 13 - Velocidades axiais na região central do anular motor-*shroud* para as distintas vazões mássicas nos testes monofásicos e permanentes. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 14 - Perfis radiais das velocidades plenamente desenvolvidas para as distintas vazões mássicas nos testes monofásicos e permanentes. O intervalo de -25,4 a 25,4 mm compreende a região do motor.

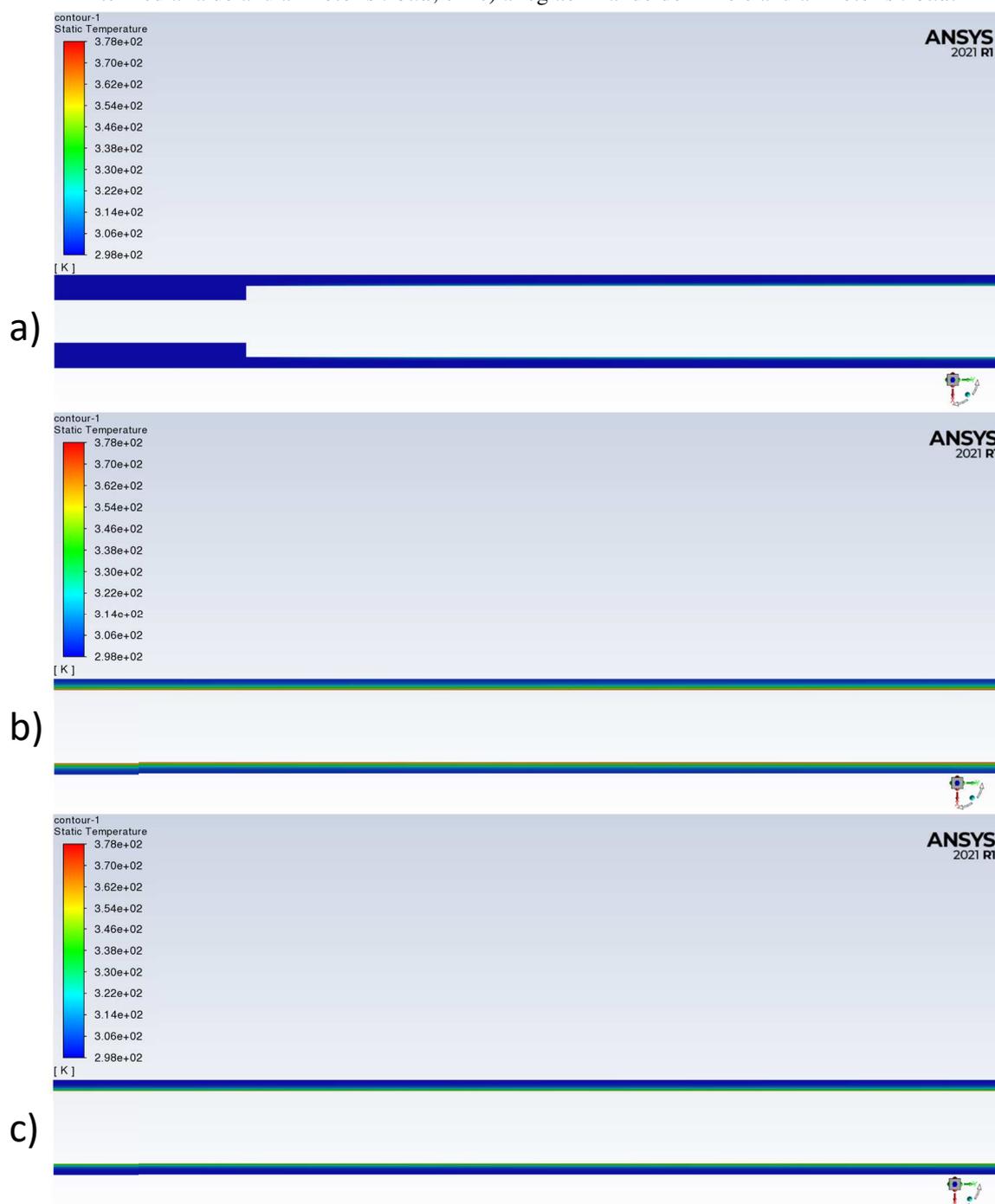


Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir do gráfico 13, observa-se o rápido desenvolvimento hidrodinâmico no anular motor-*shroud*. O gráfico 14 expõe o perfil da velocidade radial plenamente desenvolvido. Nota-se a esperada assimetria do perfil, uma vez que as tensões cisalhantes nas paredes interna e externa do anular possuem valores distintos.

A seguir, pelas figuras 20, 21 e 22, são expostos como exemplo os gradientes de temperatura e velocidade em um corte longitudinal na geometria para o teste de vazão mássica 0,107 kg/s.

Figura 20 - Gradiente de temperatura em corte longitudinal para a vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida no regime monofásico e permanente. Em a) a região inicial do domínio e motor; em b) uma posição intermediária do anular motor-*shroud*; em c) a região final do domínio e anular motor-*shroud*.



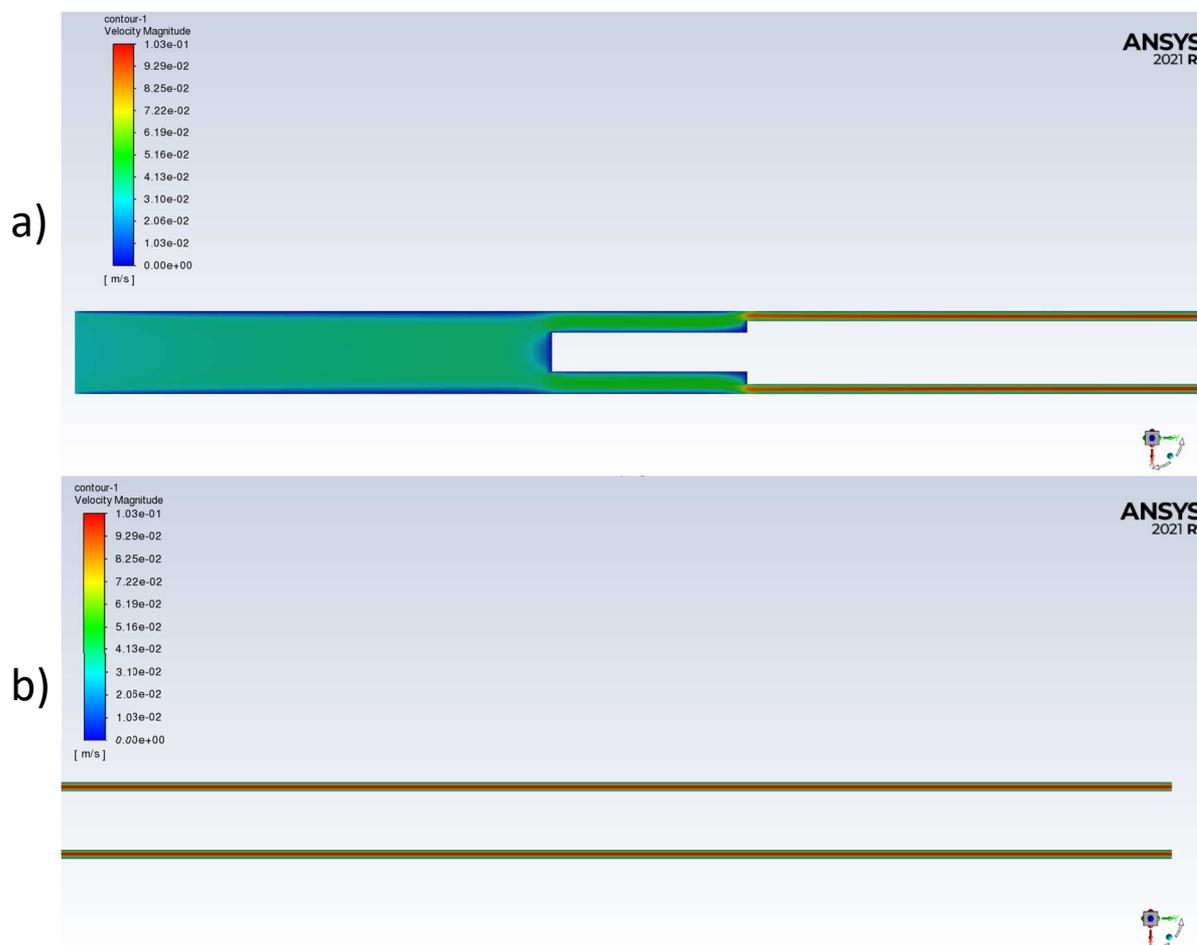
A figura 20 expõe o aumento da temperatura conforme o acréscimo da posição axial. É notado que as maiores temperaturas estão na superfície da parede do motor.

Figura 21 - Gradiente de temperatura axial na superfície da parede do sensor e do motor para uma vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 - Gradiente de velocidade em corte longitudinal para a vazão mássica de 0,107 kg/s de água líquida no regime monofásico e permanente. Em a) a região de entrada do domínio e início do motor; em b) a região final do domínio e anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A figura 22 mostra o incremento da velocidade de acordo com a mudança das seções presentes na geometria. A velocidade máxima do escoamento é atingida na posição central do anular motor-*shroud*, e é constatado o rápido completo desenvolvimento hidrodinâmico nessa região.

5.2 Simulações multifásicas e suas validações

A partir dos modelos, parâmetros e condições de contorno expostas nas tabelas 7, 8 e 9, duas simulações com um regime de escoamento bifásico água e ar foram realizadas. Uma vez que há a imposição de toda a geometria ser inicialmente preenchida pela fase primária (água), nota-se um grande esforço computacional necessário para o desenvolvimento da fase secundária (ar) pelo domínio. Ambas as simulações atuaram continuamente por um período de 8 meses. Para a primeira simulação, foi obtido um tempo físico de 25,14 segundos. Já para a segunda, o tempo físico foi de 13,54 segundos.

Mendonça & Filho (2018) constaram que há uma quebra de bolha na região de transição entre os anulares externo e interno do Mobo. Conseqüentemente, o padrão do escoamento bifásico pode ser alterado na mudança de sentido do escoamento. Dado que os padrões atingidos em ambos os anulares são independentes um do outro, não há perda de caracterização da geometria entre as interfaces das fases ao se omitir o escoamento do anular externo. Portanto, a região a montante do sensor, o vão *shroud*-sensor, desempenha um papel de difundir a dinâmica e energia antes do desenvolvimento do escoamento no anular interno motor-*shroud*. Espera-se dessa forma que não haja uma grande influência no padrão bifásico atingido na região de interesse para análises, devido à condição de entrada homogênea de ambas as fases no início do domínio.

Dessa maneira, para ambas as simulações, propriedades e parâmetros de interesse para o fenômeno de transporte existente são avaliadas em diferentes instantes e seções da geometria. Dado que a primeira simulação possui um tempo físico maior, esta é possível analisar de forma mais adequada. No entanto, para nenhum dos casos foi atingido a presença da fase secundária por todo o domínio devido ao tempo necessário para tal.

A fim de avaliar os perfis radiais de velocidade, temperatura e distribuição da fração volumétrica dos fluidos, dividiu-se a geometria em quatro seções a partir do início do motor: a 300 mm, a 1050 mm, a 1800 mm e a 2550 mm. Para cada uma dessas seções, traçou-se oito linhas radiais espaçadas igualmente a cada 45°. Dessa forma, foi retirada a média dos dados. A mesma estratégia foi utilizada para avaliar a variação dos perfis no tempo. Contudo, para esta

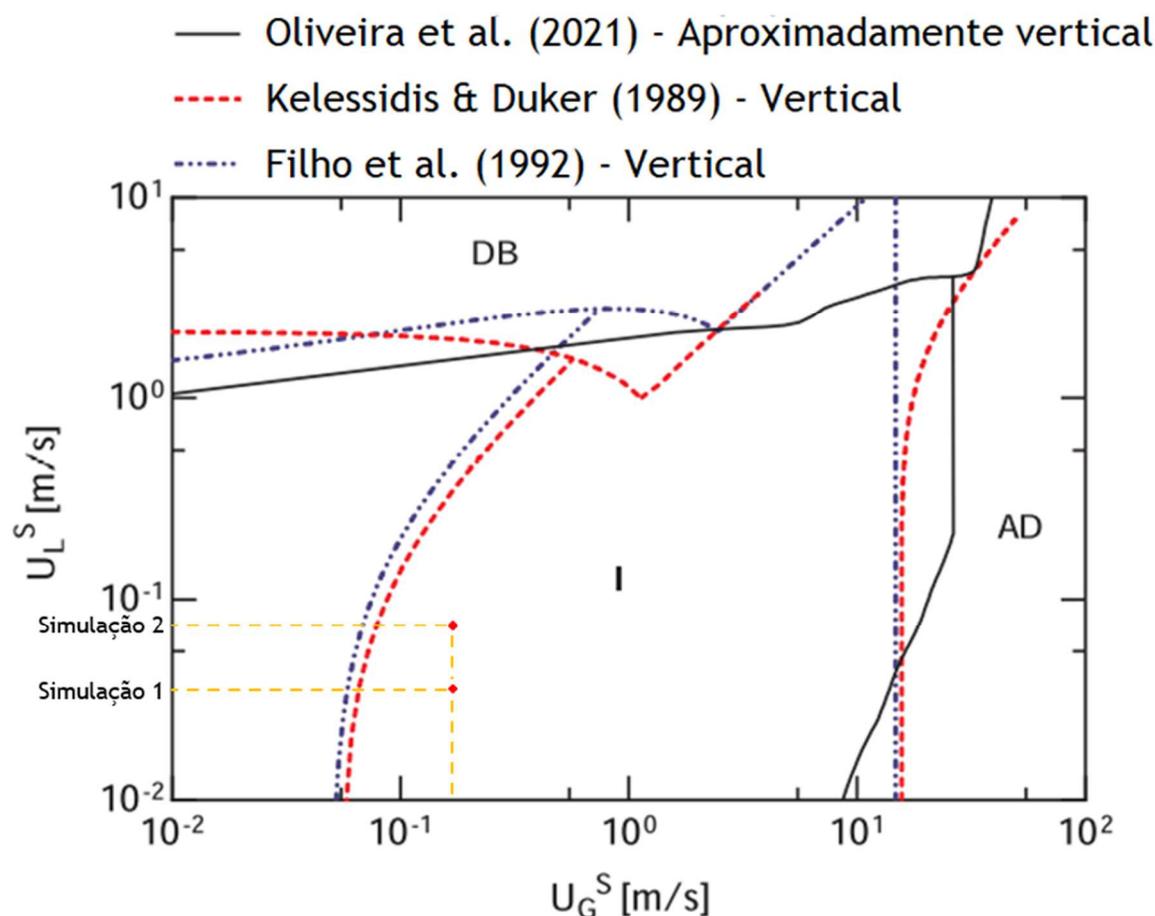
análise, fixou-se a seção a 1050 mm a partir do início do motor para a observação em distintos momentos.

Para os perfis axiais, além da análise da velocidade, temperatura e fração volumétrica dos fluidos, também se verificou o número de Nusselt e a temperatura do motor. Dessa forma é possível avaliar a consequência de um padrão de escoamento bifásico específico nos parâmetros e propriedades supracitados. A estratégia de análise foi similar à adotada para os perfis radiais. Traçou-se oito linhas axiais espaçadas igualmente em 45° na região que compreende o anular motor-*shroud*.

O padrão de escoamento bifásico obtido no anular motor-*shroud*, tanto para a primeira quanto para a segunda simulação, foi o *slug*. Dada a geometria do escoamento, faz-se presente um *slug* distorcido. Em outras palavras, as bolhas de Taylor não são simétricas em torno do motor. Tal característica pode ser visualizada na figura 7.

Kelessidis & Dukler (1989), Filho et al. (1992), e Oliveira et al. (2021) propuseram modelos mecanicistas para previsão do padrão de escoamento líquido-gás em um anular vertical concêntrico. A validação do padrão obtido nas análises numéricas do presente trabalho é realizada pelo confronto das velocidades médias de ambas as fases presentes no anular motor-*shroud* com o mapa generalizado de padrões dos três referidos estudos, figura 23.

Figura 23 - Mapas generalizados dos padrões bifásicos para um escoamento líquido-gás em um anular vertical concêntrico. Os significados de *DB*, *I* e *AD* são, respectivamente: *Dispersed Bubble*, *Intermittent* e *Annular Dispersed Liquid*.

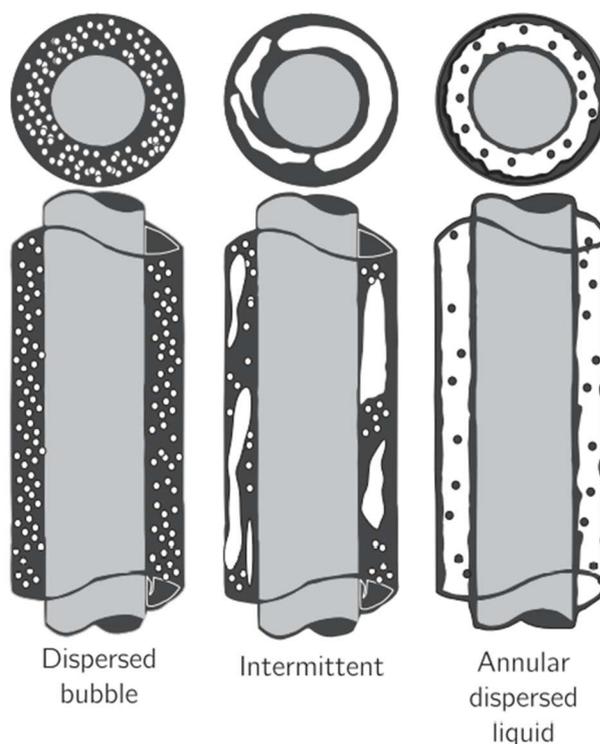


Fonte: Oliveira et al. (2021) e adaptado pelo autor.

Constata-se que para as vazões mássicas de água e ar impostas nas duas simulações computacionais do presente trabalho, os estudos de Kelessidis & Duker (1989), Filho et al. (1992), e Oliveira et al. (2021) preveem um regime intermitente, que caracteriza o padrão *slug*.

Segundo Oliveira et al. (2021), a esquematização dos padrões *Dispersed Bubble*, *Intermittent* e *Annular Dispersed Liquid* é retratada pela figura 24:

Figura 24 - Esquemática dos padrões *Dispersed Bubble*, *Intermittent* e *Annular Dispersed Liquid* segundo Oliveira et al. (2021).



Fonte: Oliveira et al. (2021).

A definição de Oliveira et al. (2021) deixa claro que o padrão *slug* se trata do padrão *Intermittent*. Assim, o padrão obtido pelas análises numéricas está de acordo com os estudos de Kelessidis & Duker (1989), Filho et al. (1992), e Oliveira et al. (2021).

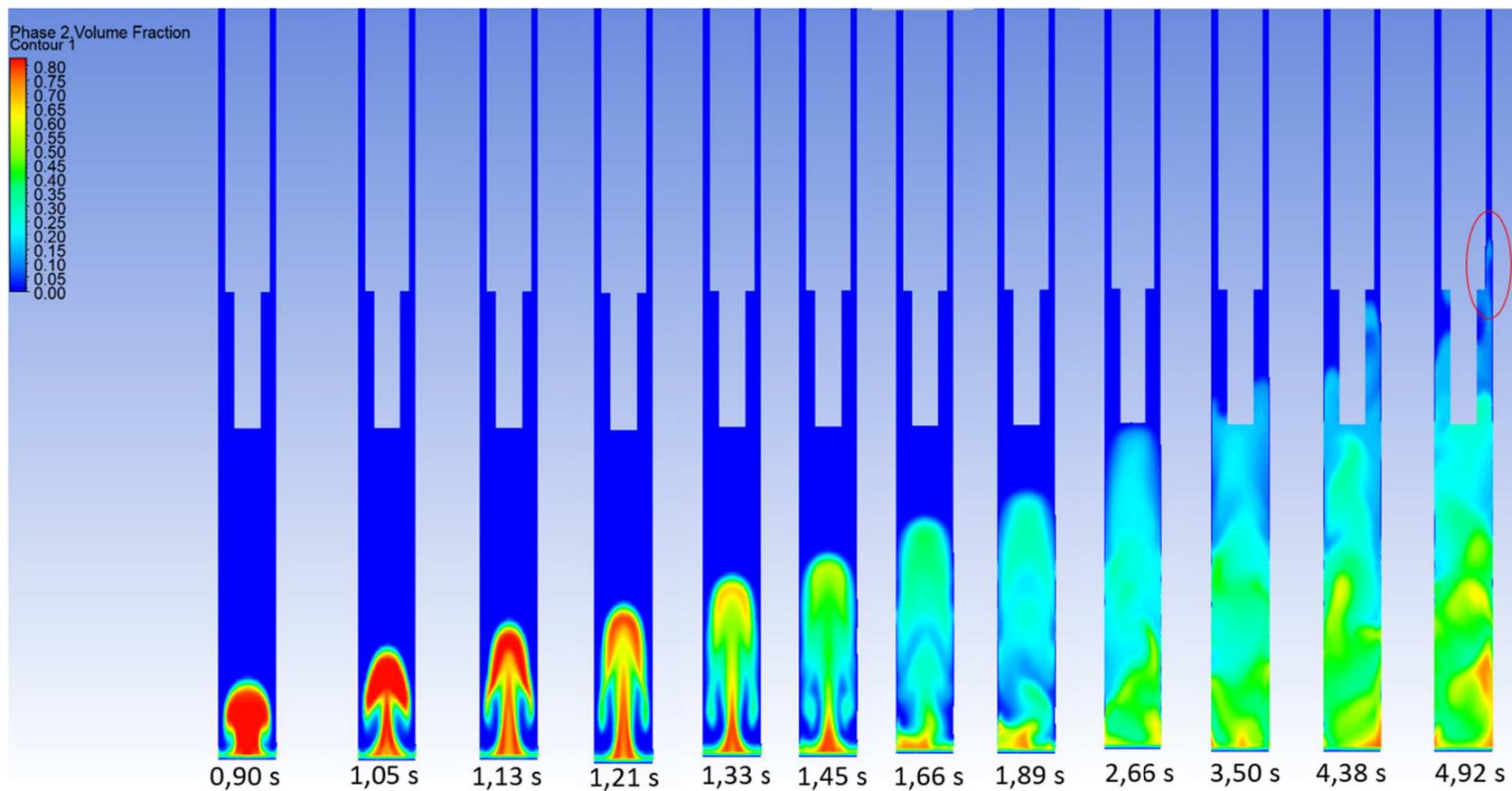
5.2.1 A primeira simulação multifásica

Conforme dito anteriormente, os principais modelos, parâmetros e condições de contorno impostas estão descritos nas tabelas 7, 8 e 9. Para a referida análise, atingiu-se um tempo físico de 25,14 segundos, o que não foi suficiente para que a fase secundária se desenvolvesse em todo domínio. Dessa forma, o ar não alcançou a saída da geometria e percorreu um comprimento de até 3,06 m, o que corresponde 58% do comprimento total de 5,32 m.

O início do desenvolvimento da fase gasosa ocorre com a formação de uma instabilidade de Rayleigh-Taylor. Segundo Sharp (1984), a instabilidade de Rayleigh-Taylor é um fenômeno na interação entre dois fluidos com diferentes massas específicas, em que o fluido mais leve empurra o fluido mais pesado. Assim, ocasiona-se uma interface instável entre eles.

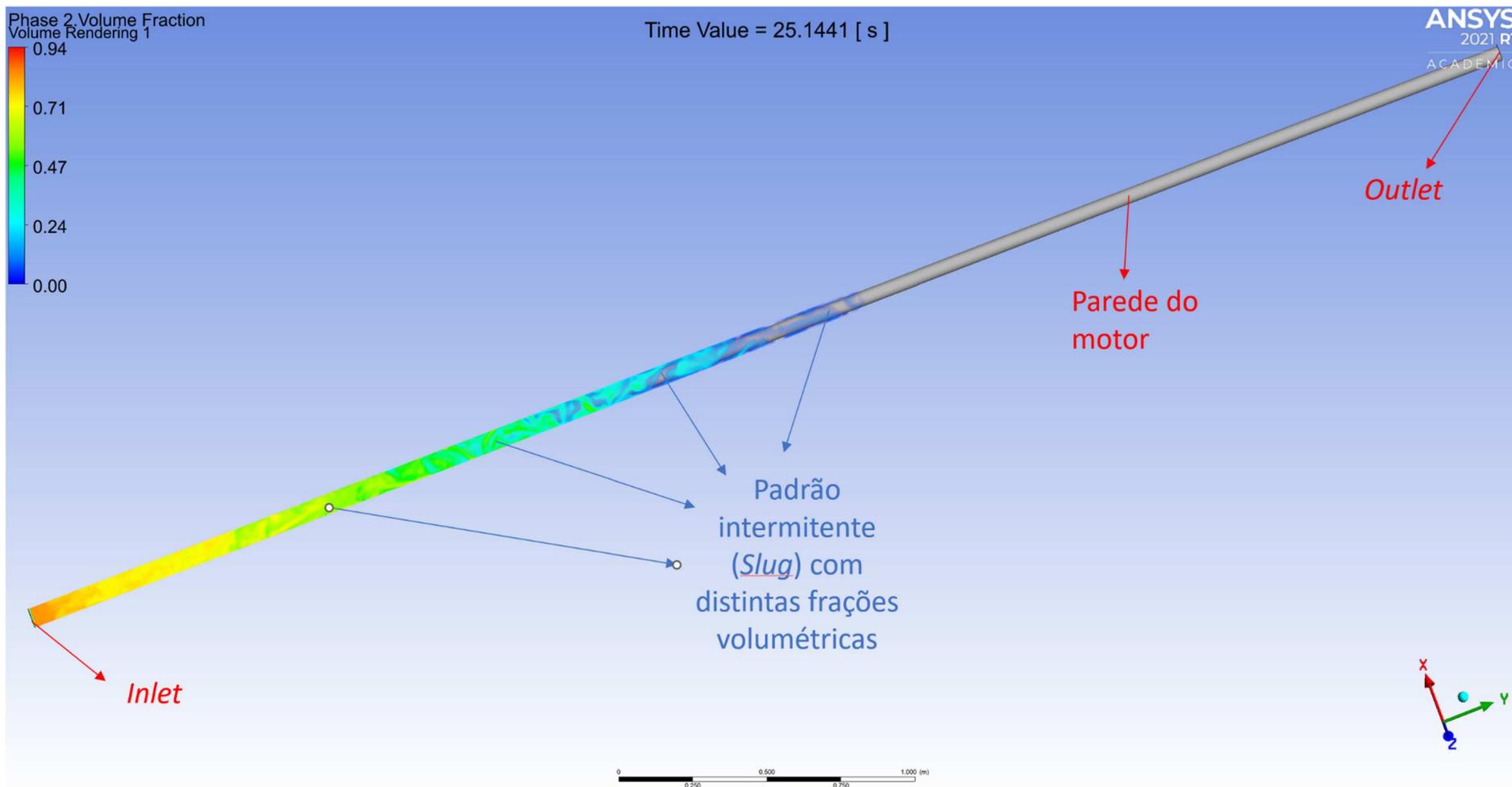
Os resultados visuais obtidos neste trabalho para tal fenômeno se aproximam bastante aos obtidos por Strublj & Tiselj (2008). Nota-se a formação da instabilidade de Rayleigh-Taylor no início do desenvolvimento da fase gasosa, e sua posterior dissipação no decorrer do tempo. É a partir de sua dissipação que a fase secundária começa a se fazer presente no anular motor-*shroud* e o escoamento bifásico estabelece o padrão *slug* nessa região, conforme exposto pela figura 25.

Figura 25 - A nítida instabilidade de Rayleigh-Taylor presente no início do desenvolvimento da fase gasosa (0,90 s a 1,45 s) e sua dissipação no decorrer do tempo (1,66 s à frente). O circulado em vermelho no instante de 4,92 s é o início da formação do padrão *slug* na região anular motor-*shroud*.



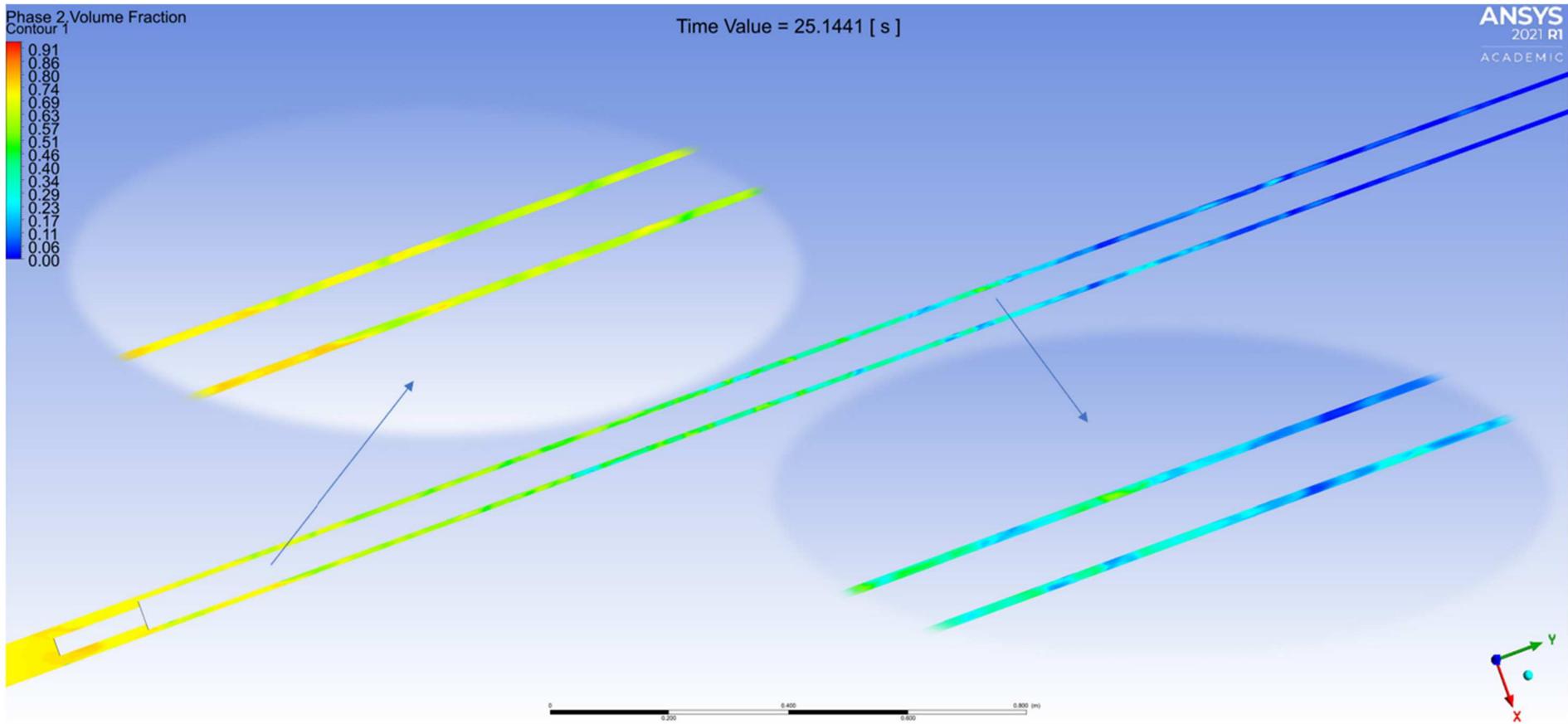
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 - Desenvolvimento da fase secundária (ar) em 25,14 segundos para a primeira simulação. *Volume Rendering* da fração volumétrica da fase secundária.



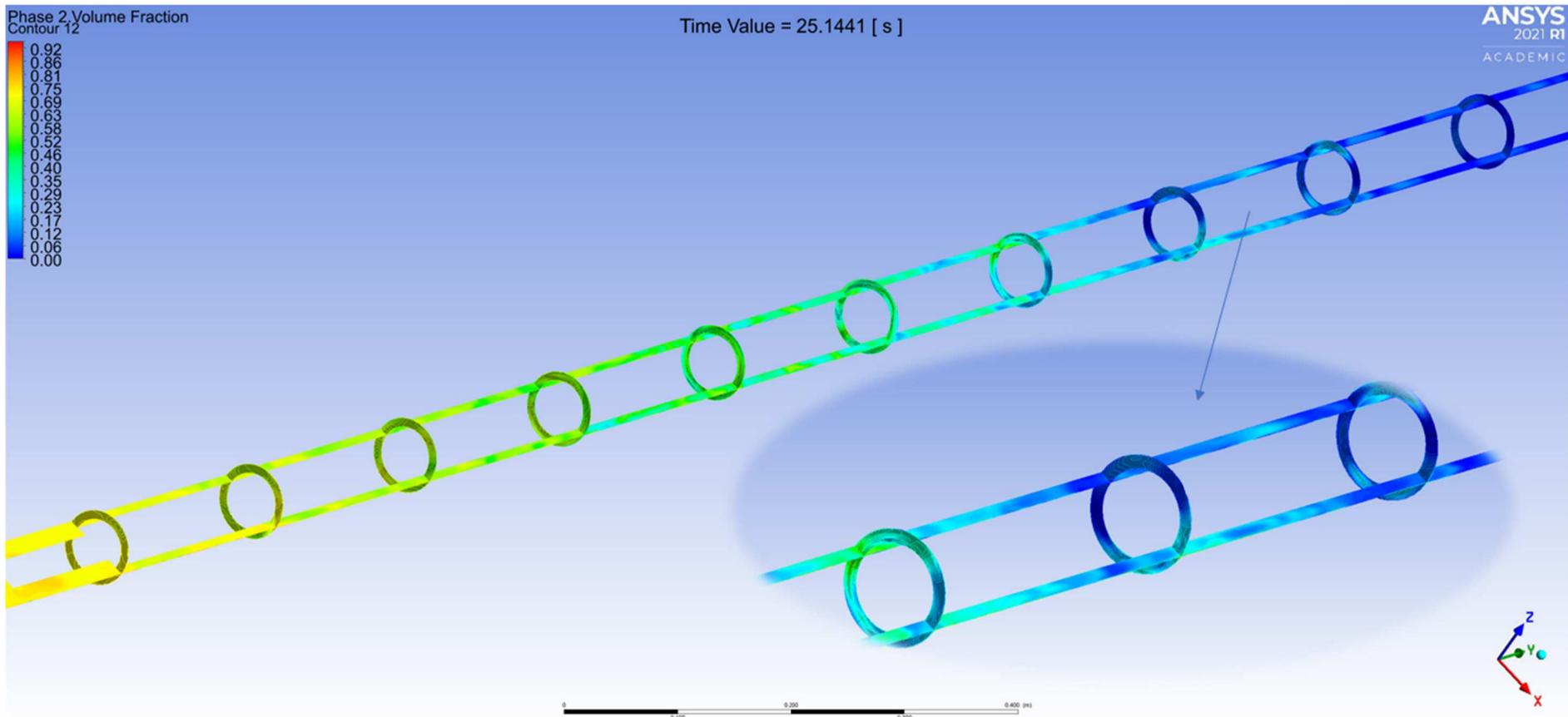
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 - Corte longitudinal da geometria em 25,14 segundos e ampliação de regiões para expor o padrão *slug*.



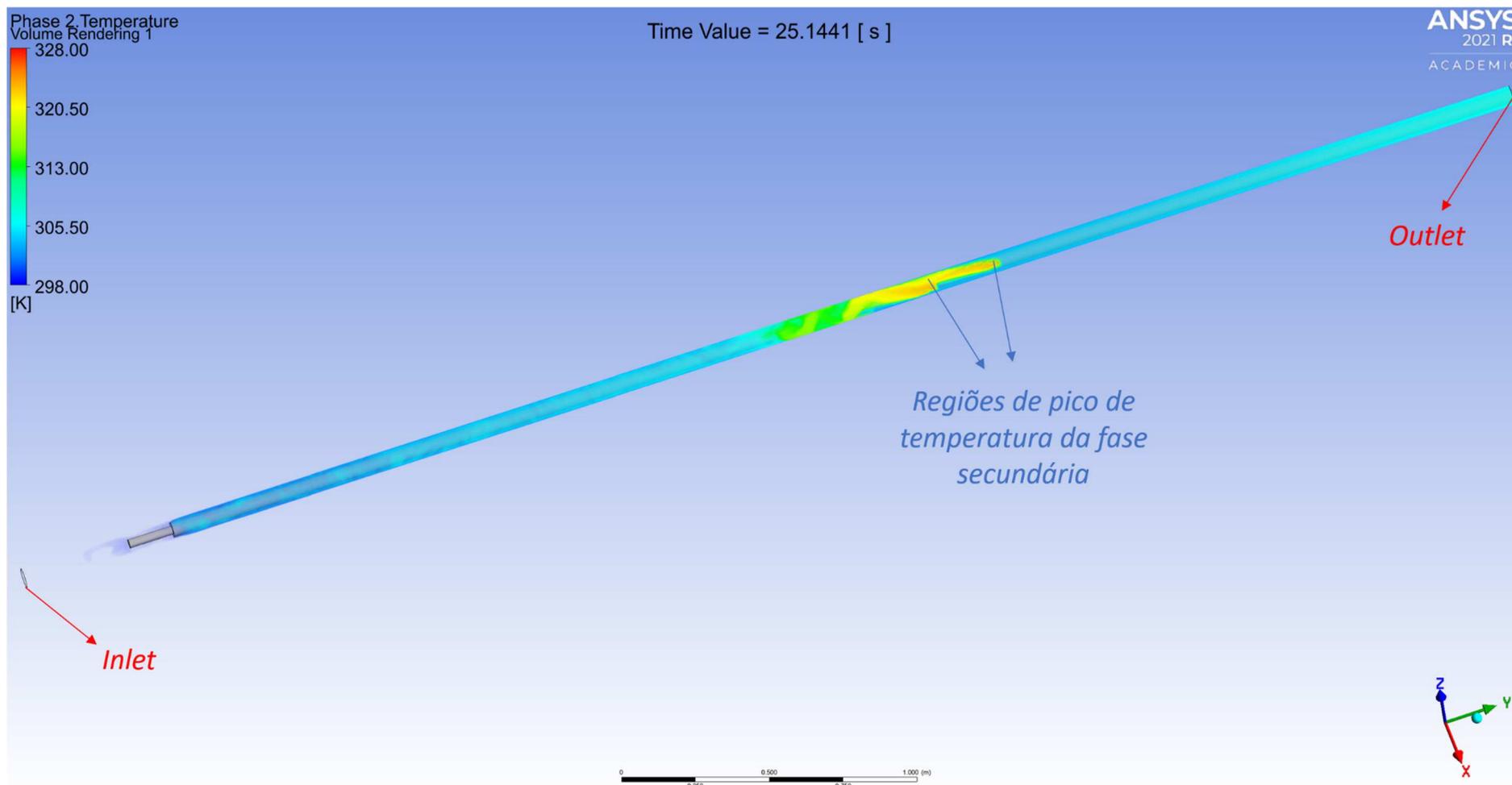
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o padrão *slug*.



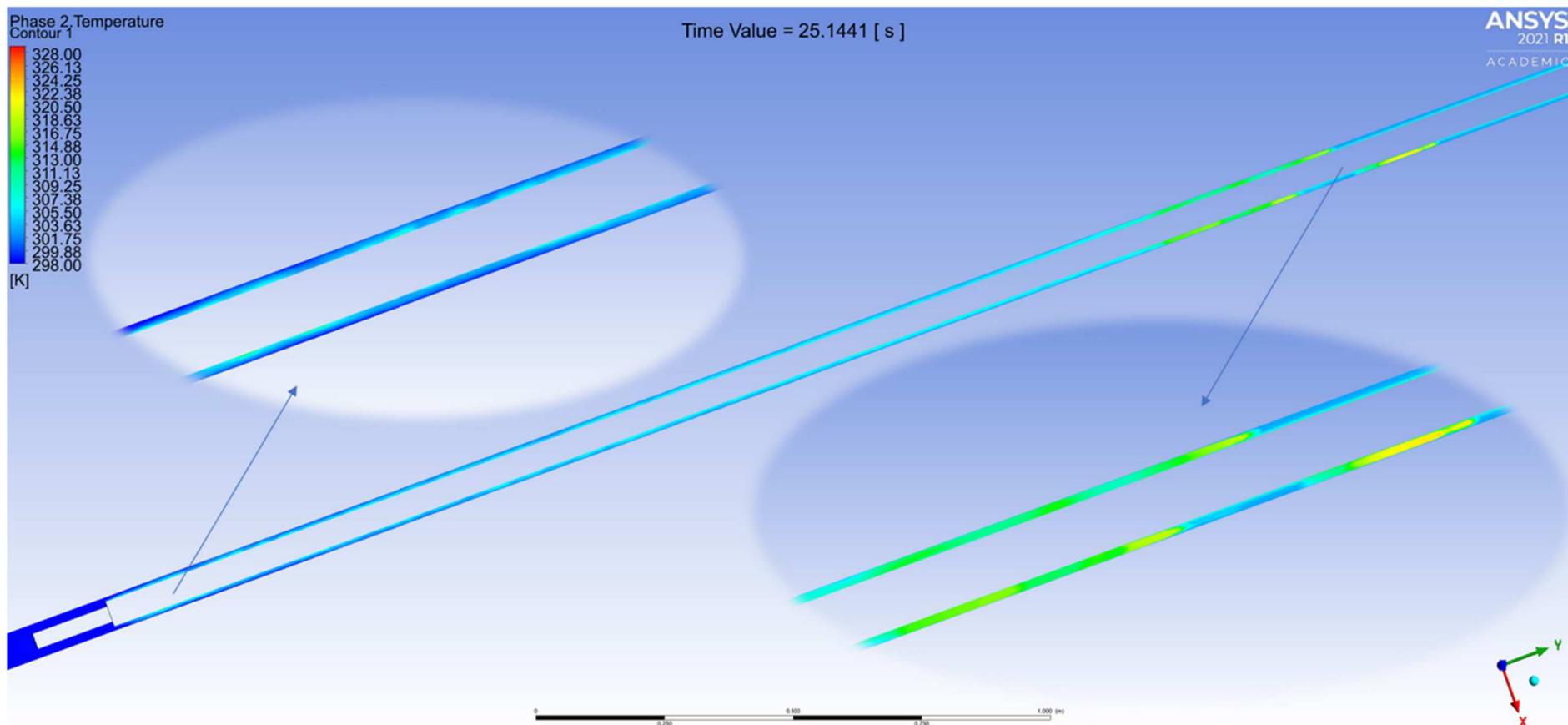
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 - Temperatura da fase secundária em 25,14 segundos. *Volume Rendering* da temperatura da fase secundária.



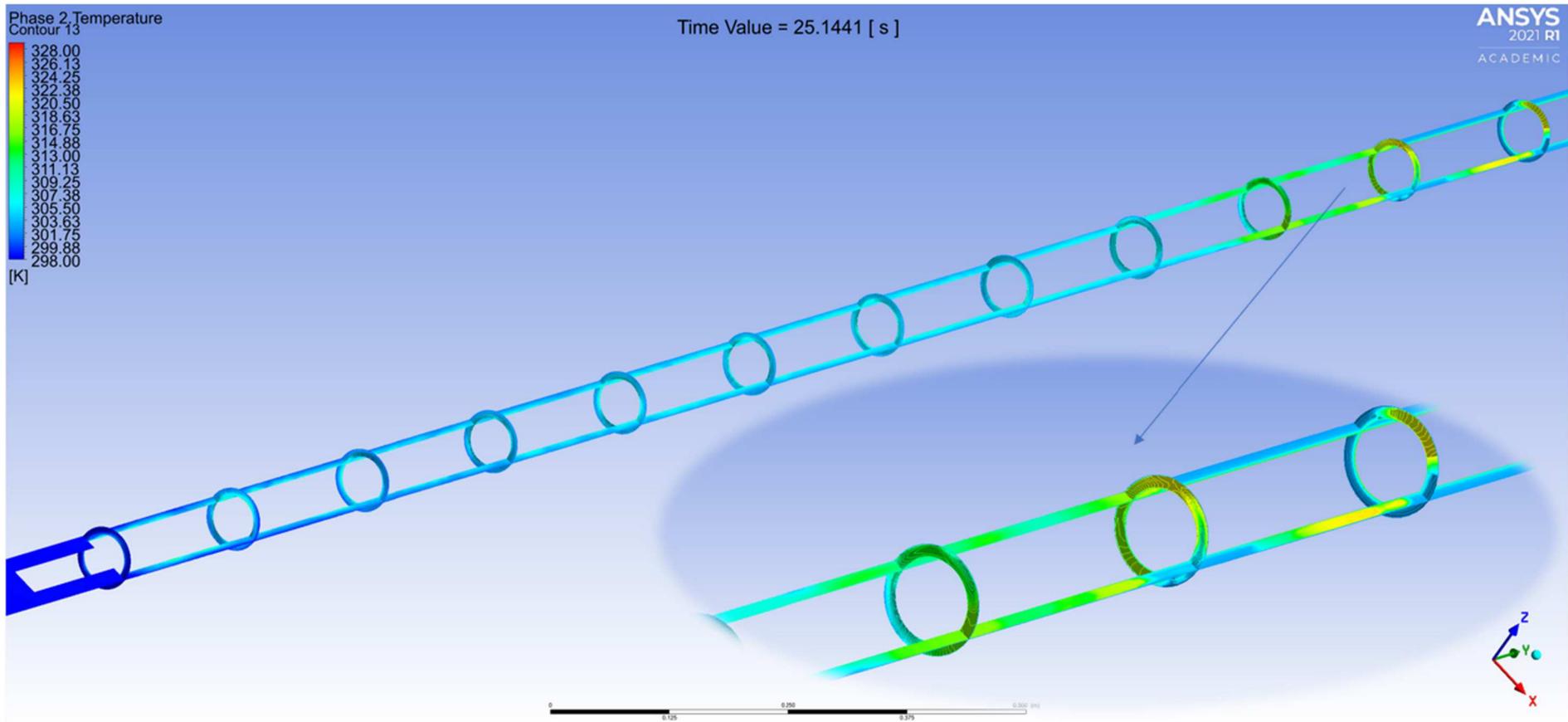
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 - Corte longitudinal da geometria em 25,14 segundos e ampliação de regiões para expor o gradiente de temperatura no anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

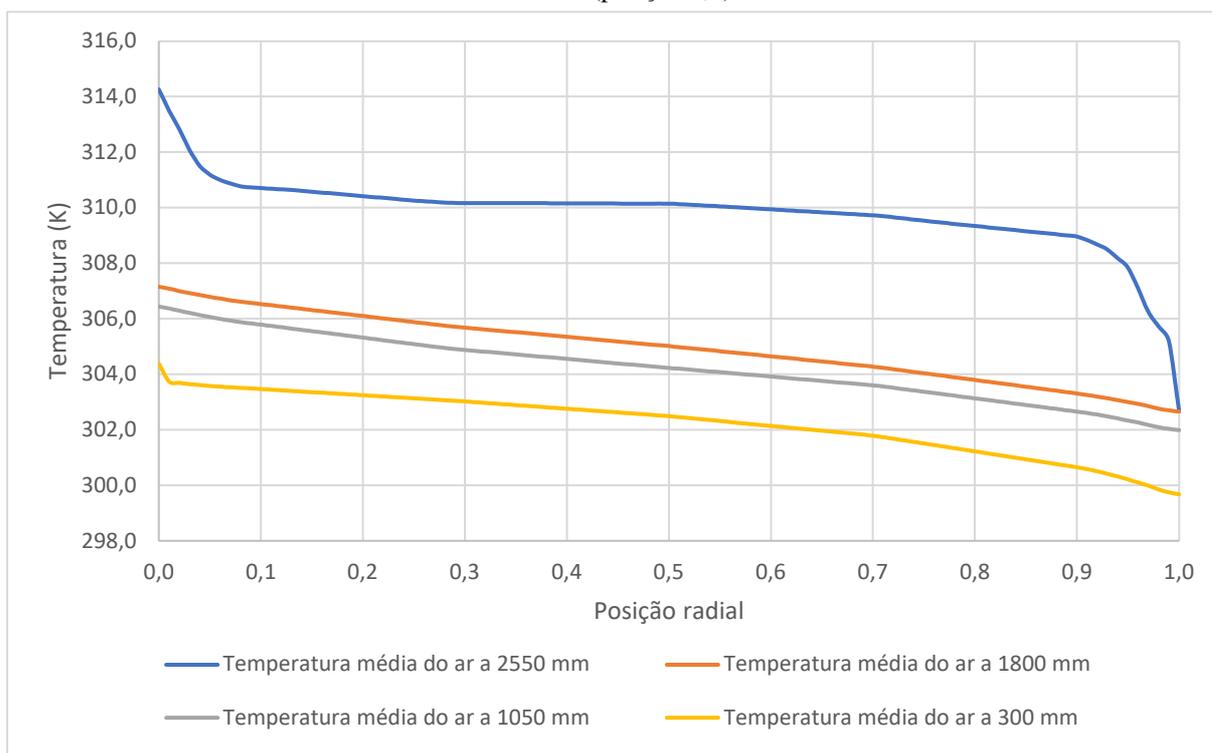
Figura 31 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o gradiente de temperatura no anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 25 a 31 expõem a presença da fase gasosa e sua temperatura ao longo do domínio no tempo de 25,14 segundos. Constata-se a formação do padrão *slug* com variadas frações volumétricas, apesar de seu contorno não ser tão nítido devido ao modelo multifásico utilizado – *Eulerian*. Uma região gasosa com uma temperatura consideravelmente mais elevada do que no restante da geometria também é notada. Uma vez que ocorre esse aumento localizado de temperatura, conforme a fase secundária avança pelo domínio (em outras palavras, com o avanço do tempo), as regiões de menor massa de gás alcançam uma maior temperatura. Dessa maneira, devido à presença de gás, existem regiões ao longo do comprimento do motor com temperaturas superiores do que no seu fim. É importante ressaltar que para um escoamento monofásico, o pico de temperatura ocorreria apenas na região final do motor devido ao fluxo de calor constante transferido a partir de sua superfície.

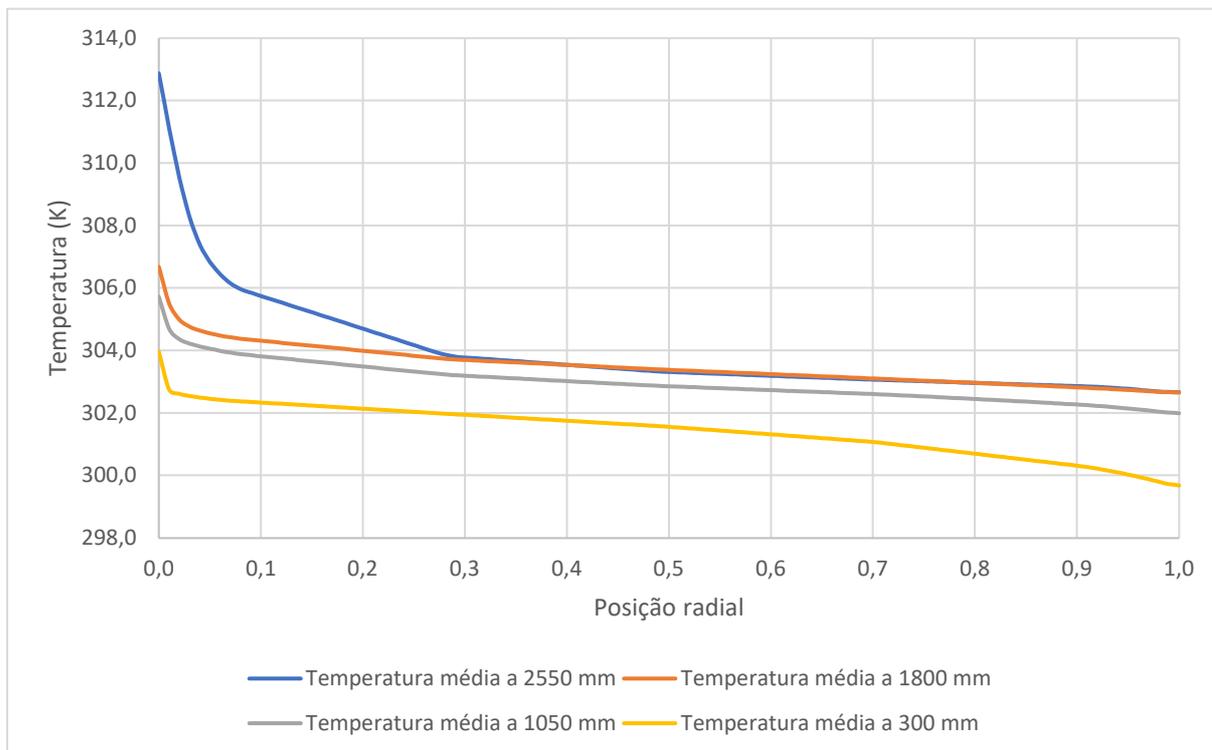
Gráfico 15 - Perfil médio radial de temperatura da fase gasosa em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 15 mostra o perfil radial de temperatura no tempo de 25,14 segundos apenas para a fase gasosa, em distintas seções transversais da geometria. Para obter o perfil de temperatura do escoamento bifásico, ou seja, da mistura, é necessário ponderar a temperatura de ambas as fases com suas respectivas frações volumétricas. Assim sendo, o gráfico 16 é exposto.

Gráfico 16 - Perfil médio radial de temperatura da mistura em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).

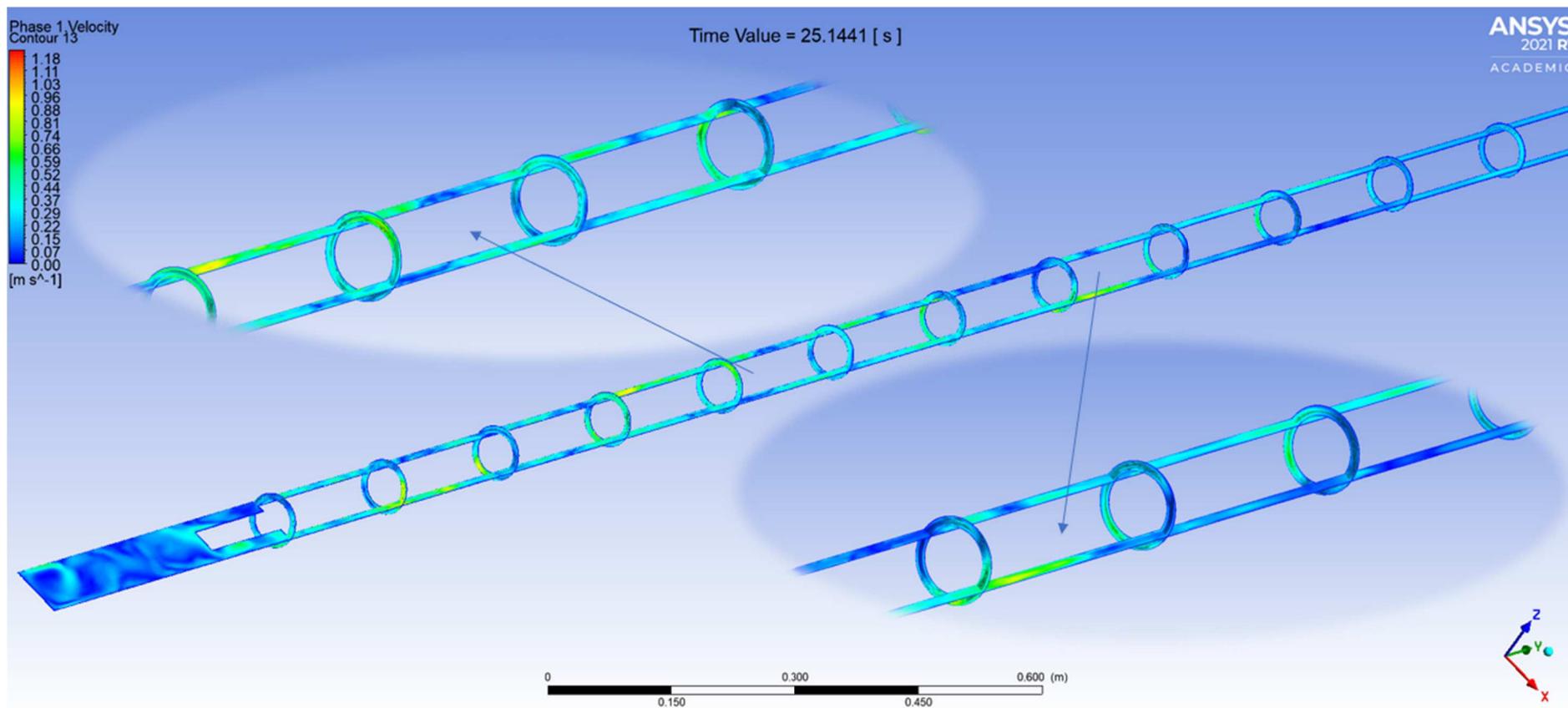


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como esperado, a temperatura dos fluidos aumenta conforme o distanciamento da região inicial do motor.

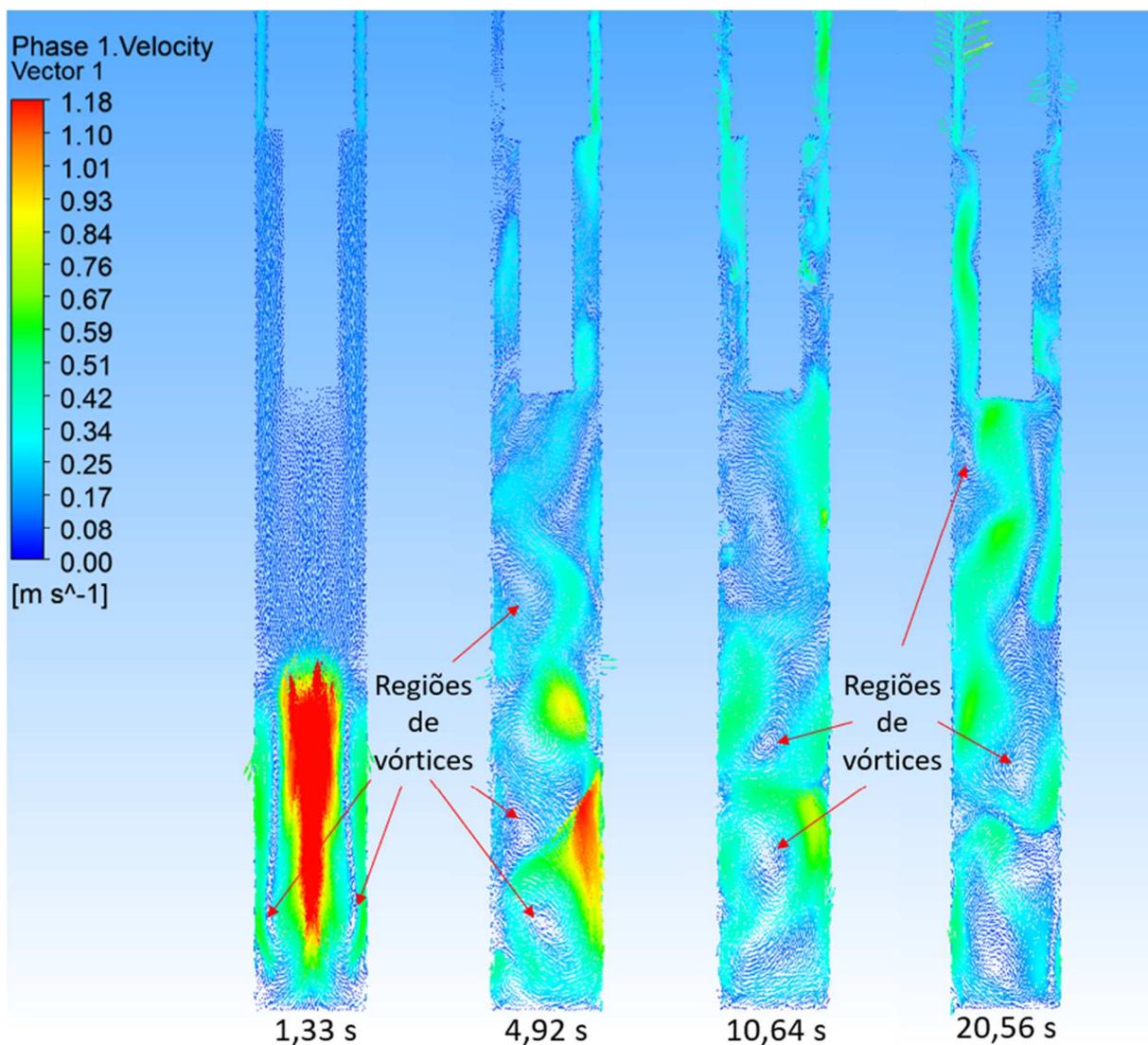
A presença de gás também causa uma distorção no campo de velocidades da fase primária. Na região do anular motor-*shroud*, há instantes que é atingido até 1,5 m/s em regiões específicas. Nessas ocasiões, o número de Reynolds aumenta substancialmente de forma a indicar um escoamento turbulento no local. A figura 32 traz um corte longitudinal em conjunto com cortes transversais para exposição da velocidade da fase primária no tempo físico de 25,14 segundos. Na região a montante do sensor, onde não se caracteriza uma geometria anular, é nítido um escoamento caracterizado pelo escoamento turbulento. Vórtices podem ser observados ao longo do passar do tempo.

Figura 32 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 25,14 segundos para expor o campo de velocidades. As regiões a partir da coloração amarelada já se caracteriza altos números de Reynolds.



Fonte: Elaborado pelo autor.

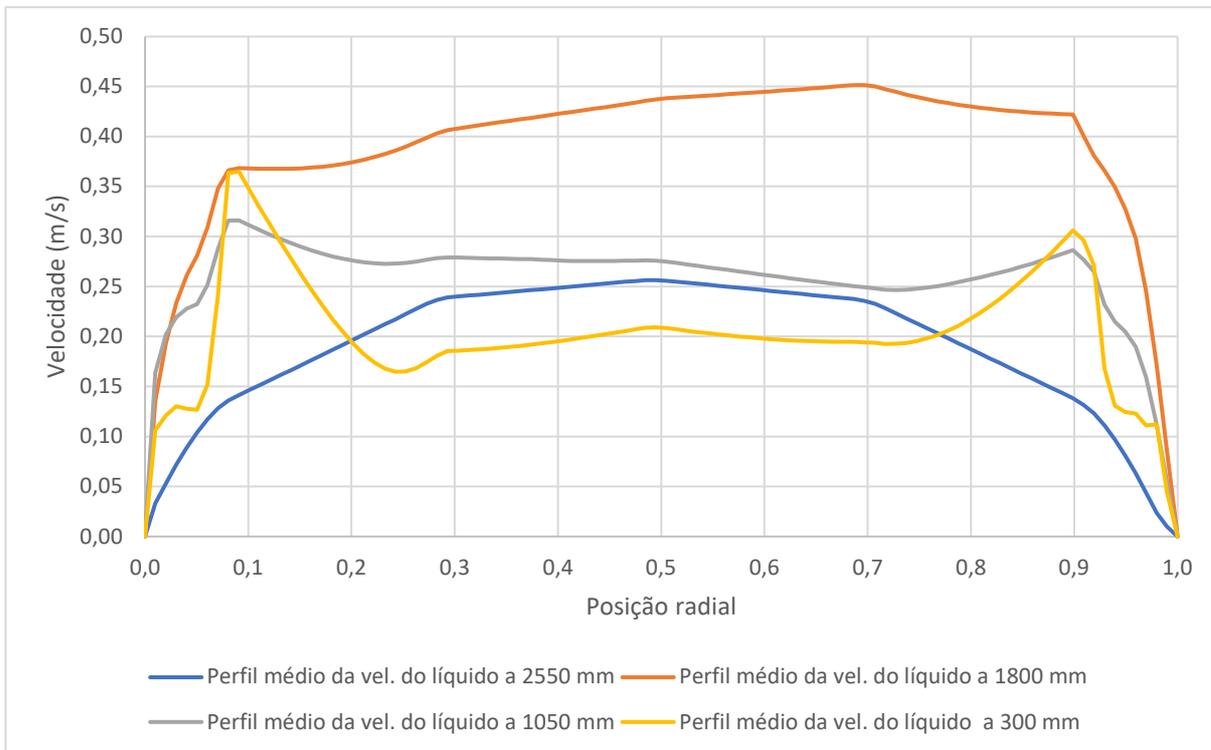
Figura 33 - Campo vetorial da velocidade da fase primária na região a jusante do sensor. Consta-se a presença de vórtices para distintos tempos. A velocidade máxima atingida em 1,33 s é de 1,96 m/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Pela figura 33, para a fase líquida, nota-se que há a formação de vórtices em regiões adjacentes nas quais há um incremento de velocidade.

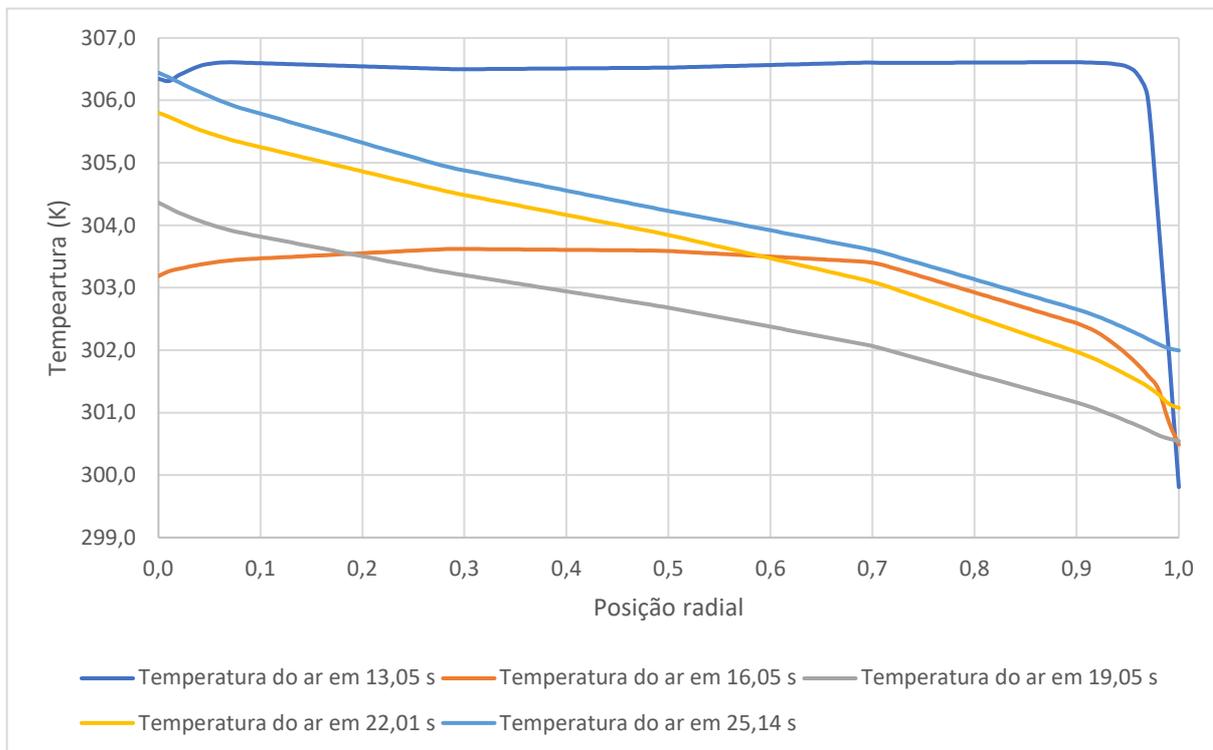
Gráfico 17 - Perfil médio radial da velocidade da fase primária em 25,14 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0). Nota-se a distorção que a presença de gás ocasiona no perfil.



Fonte: Elaborado pelo autor.

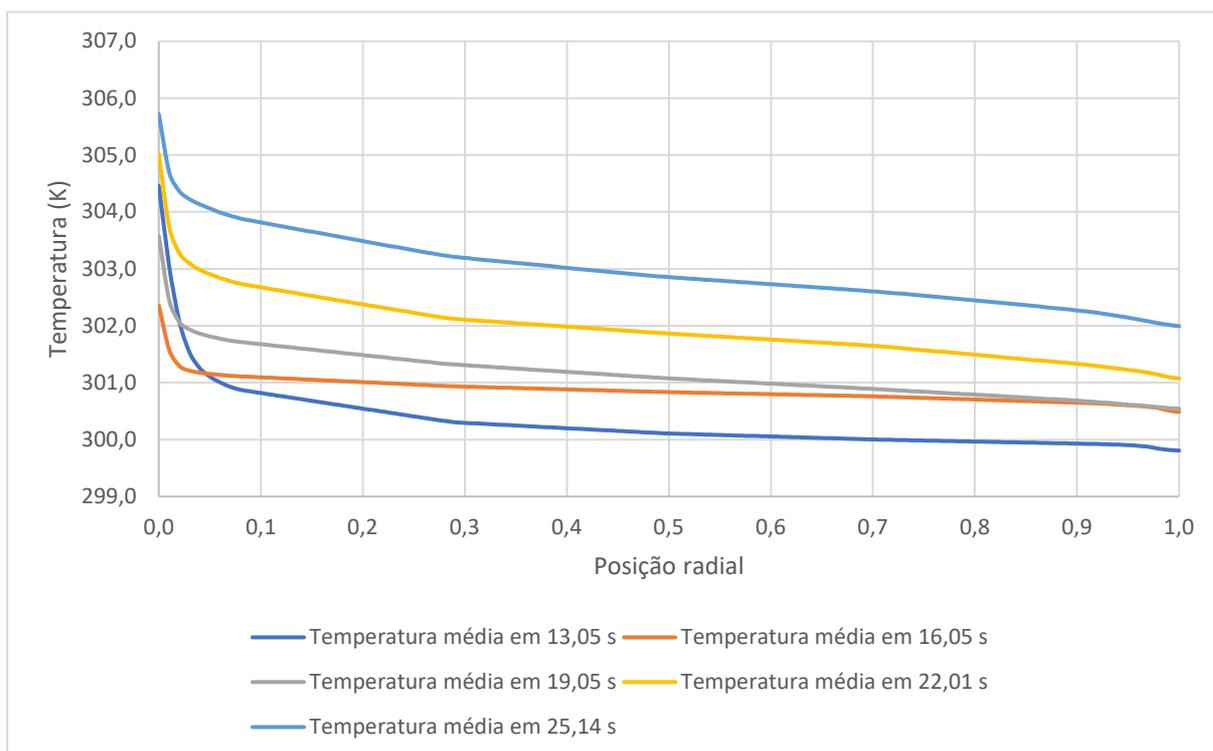
Com o intuito de observar a variação dos perfis radiais de velocidade e temperatura em uma determinada seção transversal com o passar do tempo, gerou-se os gráficos 18, 19 e 20 para a região a 1050 mm do início do motor.

Gráfico 18 - Perfis médios radiais da temperatura do ar na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



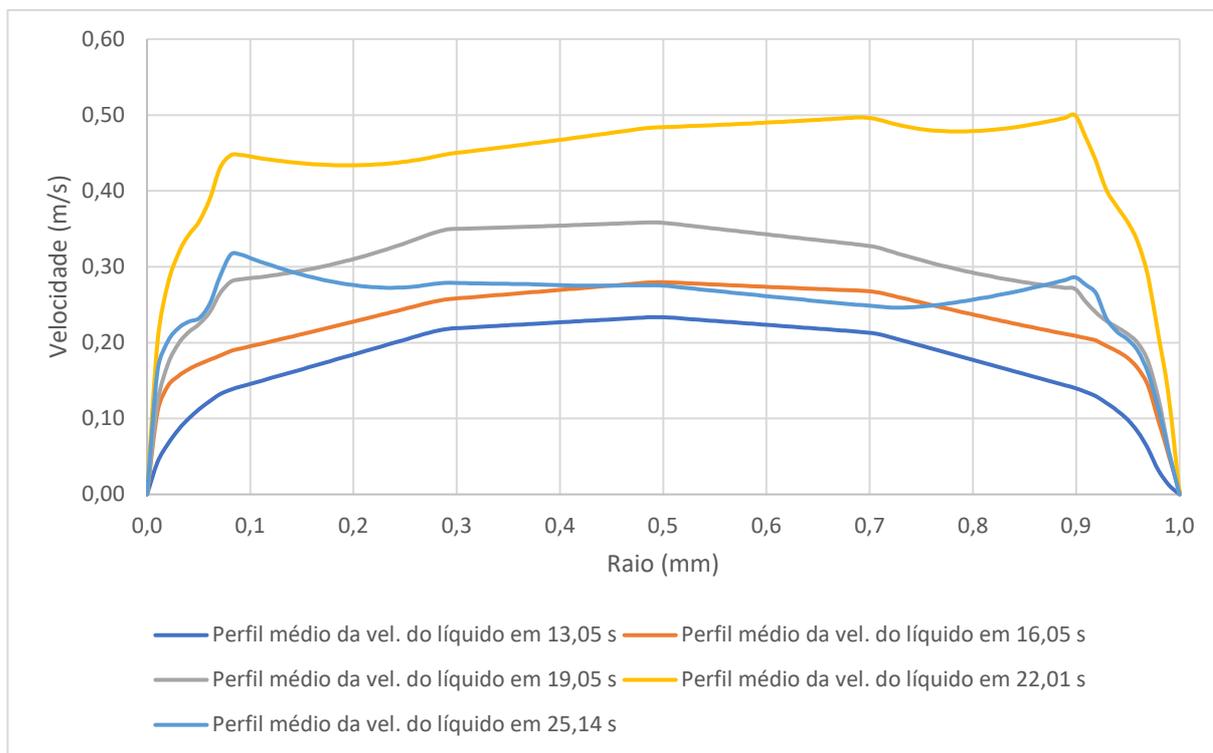
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 19 - Perfis médios radiais da temperatura da mistura na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos.



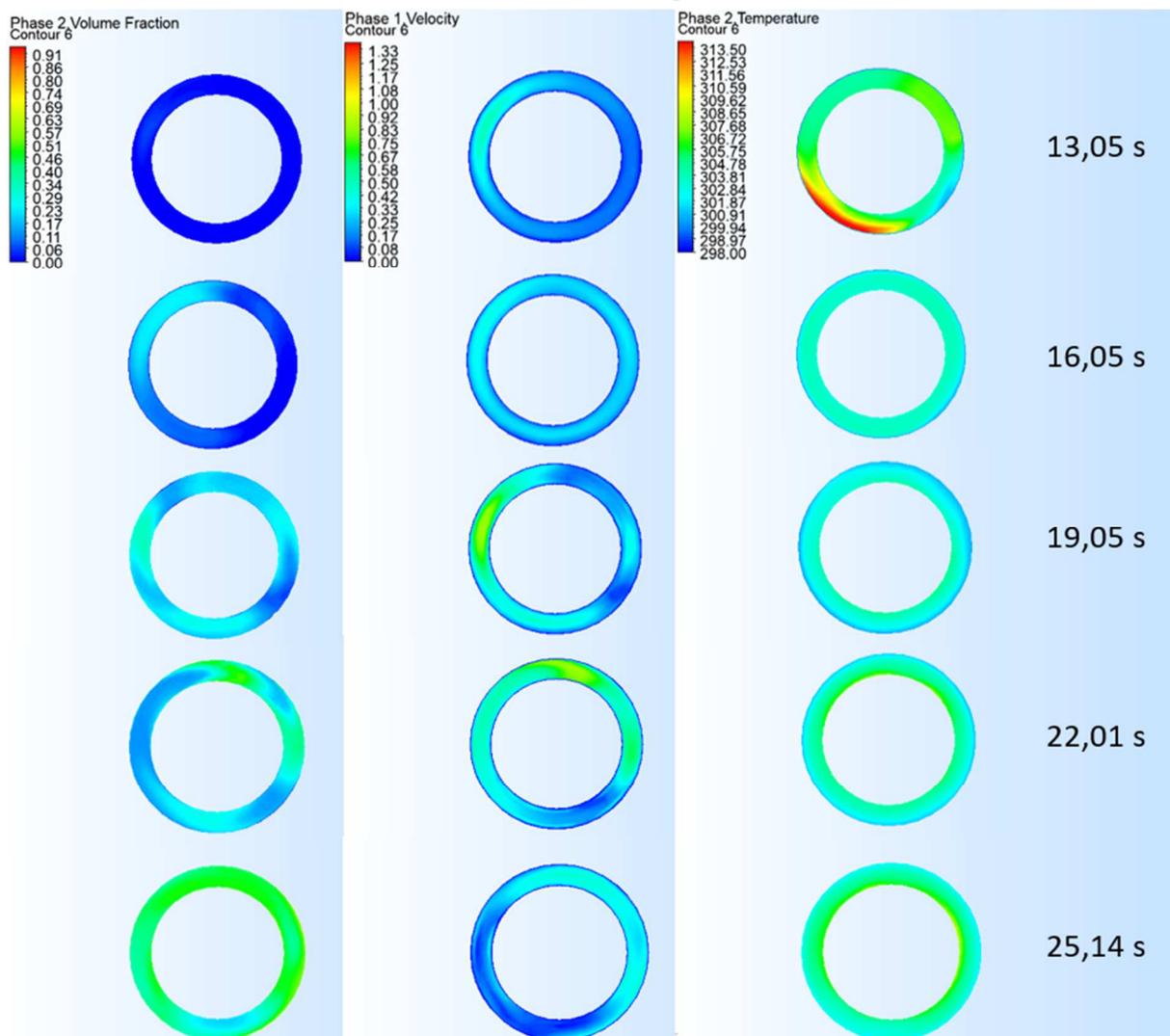
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 20 - Perfis médios radiais da velocidade da água na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 - Gradientes da fração volumétrica, velocidade da fase líquida e temperatura da fase gasosa com o passar do tempo na seção transversal a 1050 mm do início do motor para a primeira simulação. A unidade da velocidade é m/s, e da temperatura K.

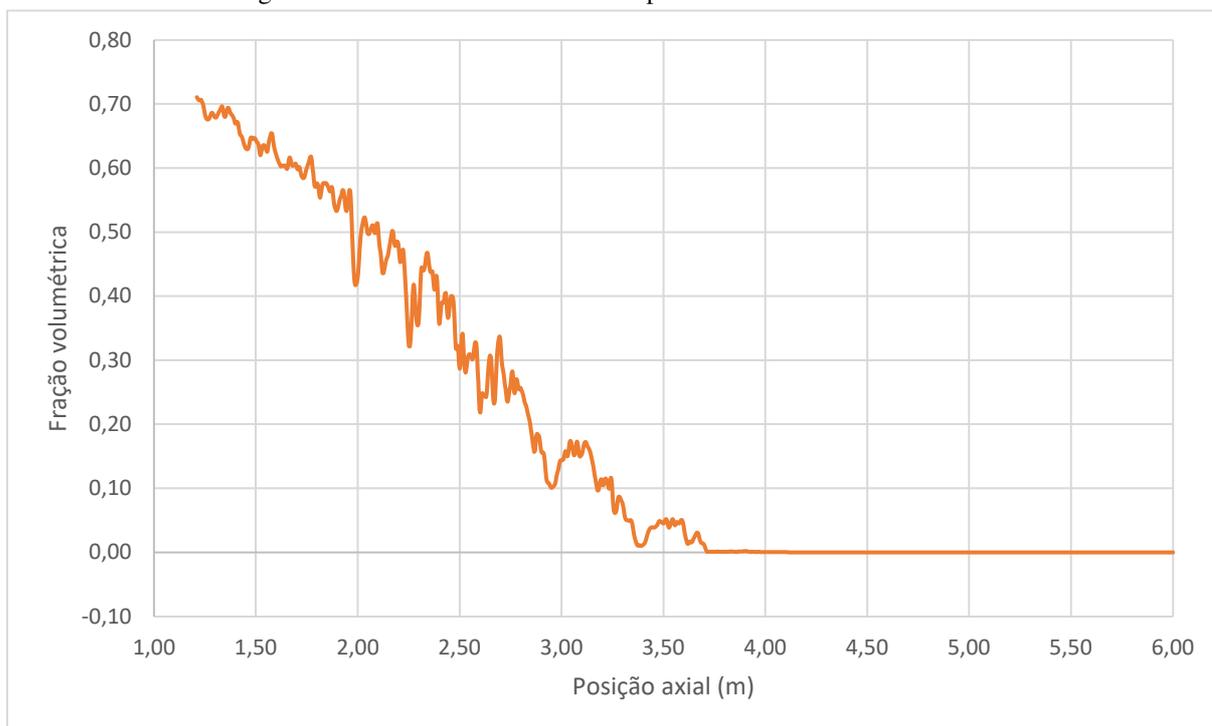


Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da figura 34 é possível notar que as regiões onde há uma maior fração volumétrica da fase secundária, a velocidade da fase primária tende a aumentar. Isso ocorre devido à redução da área de líquido, ocasionando um incremento de sua velocidade. Consequentemente, um melhor resfriamento é atingido e a temperatura tende a cair. No entanto, uma vez que a temperatura do fluido tende a aumentar conforme o percurso longitudinal pelo motor devido ao fluxo de calor constante, instantes posteriores tendem a ter temperaturas maiores – salvo ocasiões em que há uma abrupta variação da fração volumétrica dos fluidos.

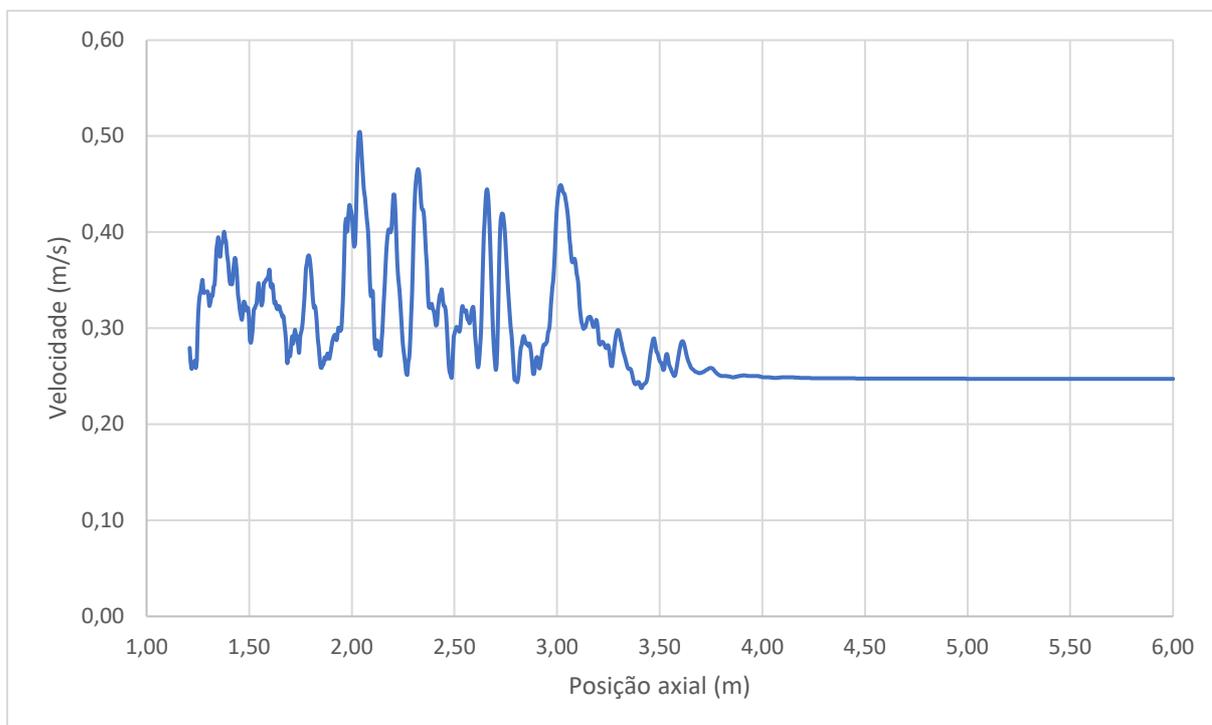
As análises axiais compreendem a observação da fração volumétrica média do gás e velocidade longitudinal do líquido em 25,14 segundos, assim como a avaliação em distintos tempos do número de Nusselt e das temperaturas das duas fases, da mistura e da parede do motor.

Gráfico 21 - Perfil axial da fração volumétrica da fase gasosa no instante de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

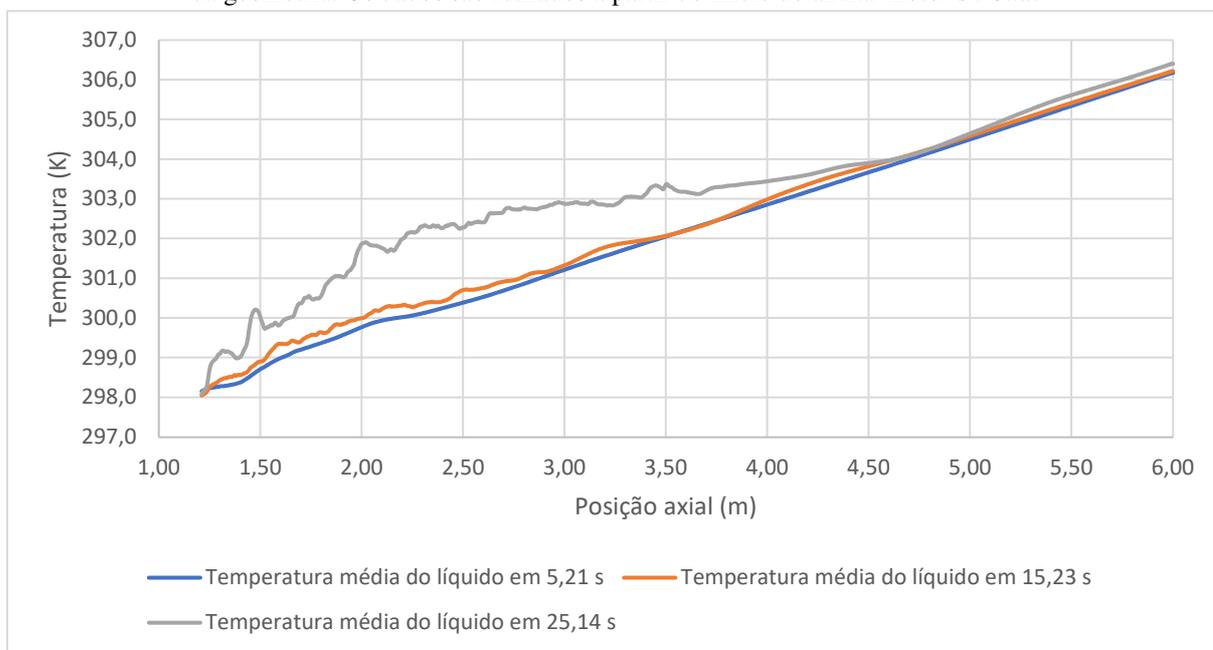
Gráfico 22 - Perfil axial de velocidade da fase líquida no instante de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

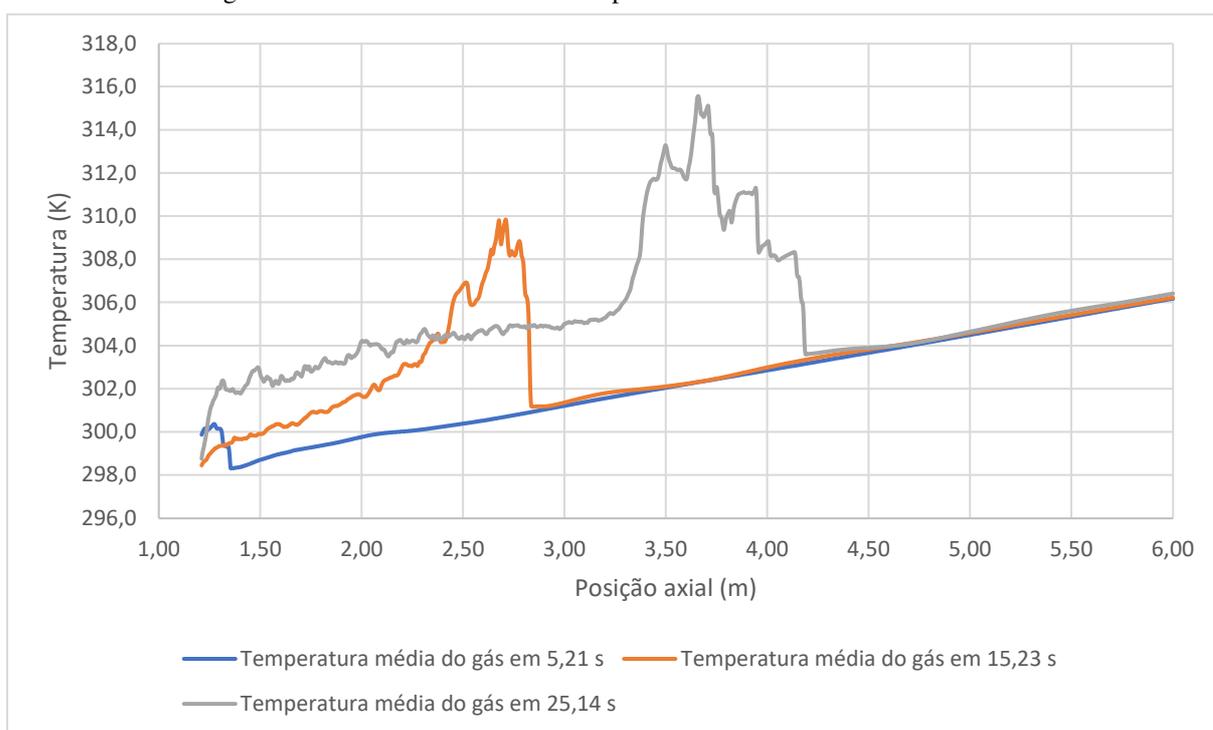
A partir do gráfico acima, é nítida a distorção que a presença de gás causa na velocidade do líquido. Nota-se que a partir da região em que não há a existência do ar (comprimento 3,74 m), a velocidade da fase primária logo se torna plenamente desenvolvida.

Gráfico 23 - Perfil axial de temperatura da fase líquida em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



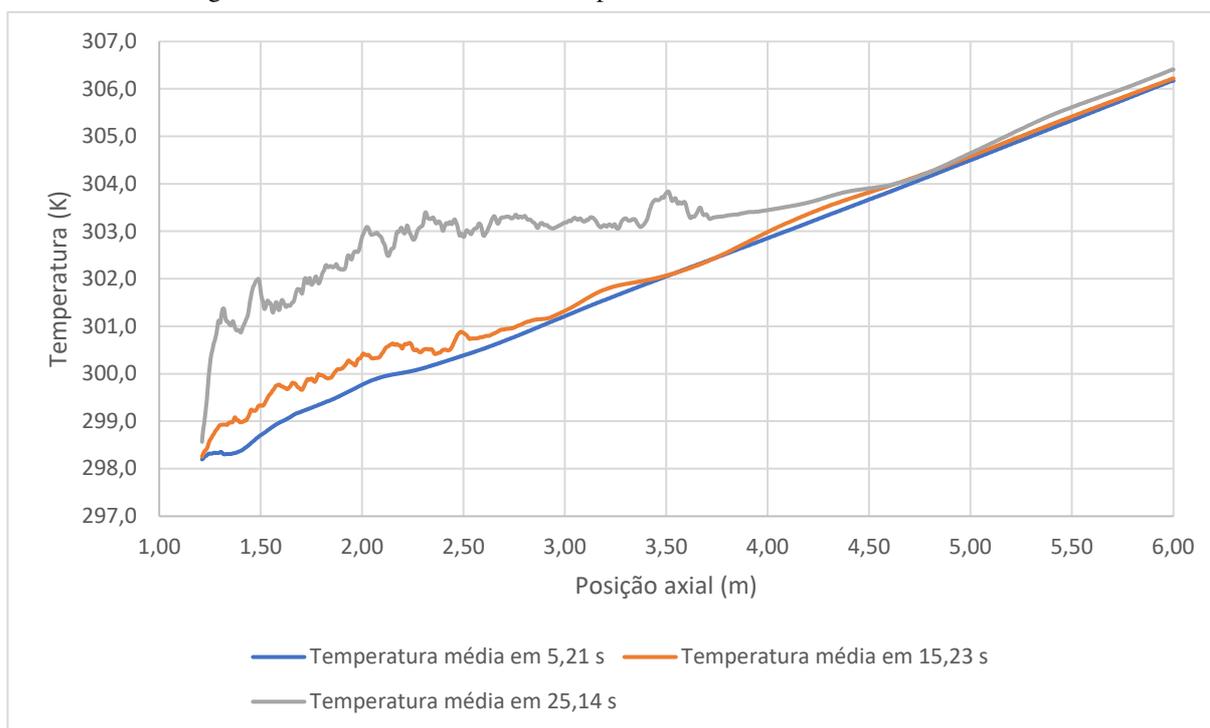
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 24 - Perfil axial de temperatura da fase gasosa em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 25 - Perfil axial de temperatura da mistura em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.

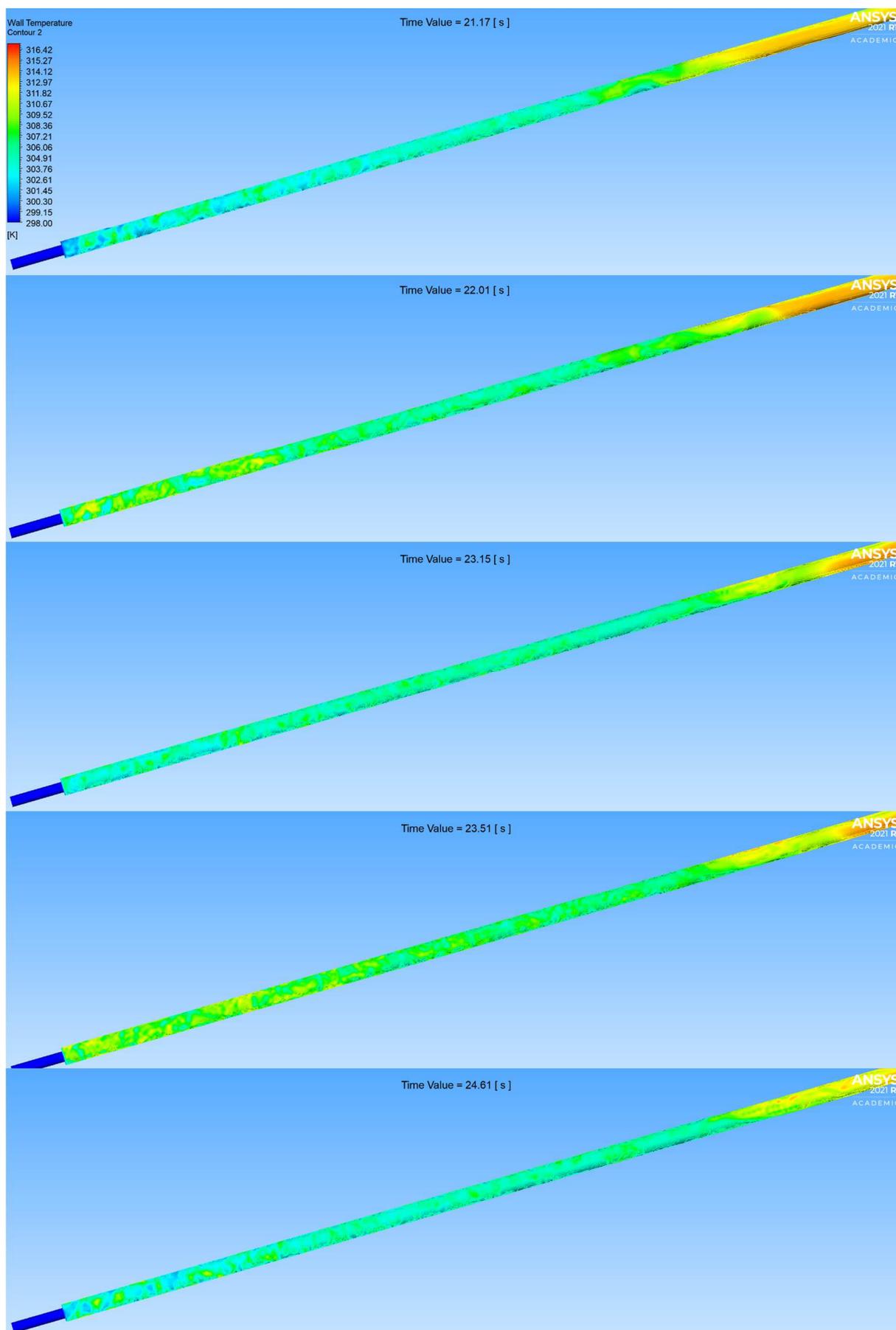


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos 23, 24 e 25 demonstram que uma vez que certa massa de fluido eleva sua temperatura, esta será carregada ao longo do escoamento e sua temperatura é elevada ao longo do percurso. Em paralelo, com o passar do tempo, uma maior quantidade de fluido progressivamente atinge uma maior temperatura. A diferença entre temperaturas das fases é explícita.

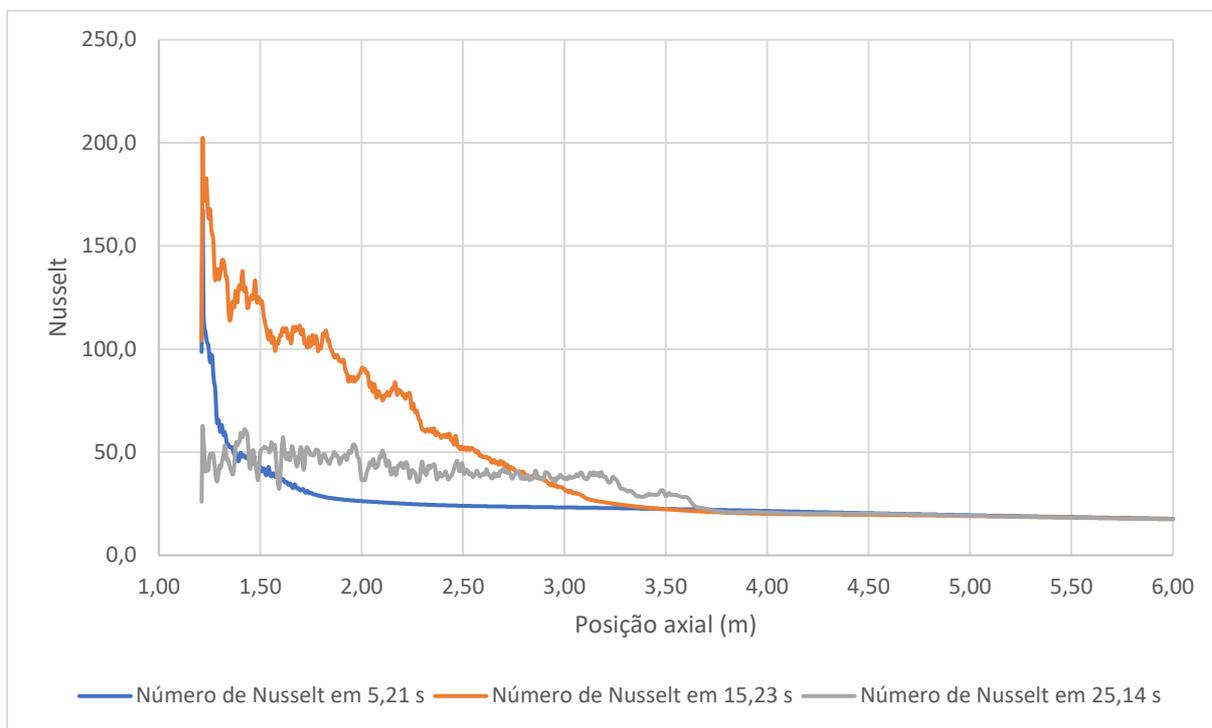
Um fenômeno importante que se deve ponderar ao visualizar todo o fenômeno de transporte com o passar do tempo são picos de temperatura em várias regiões da parede do motor, em dados instantes. Subitamente há aumentos de temperatura em regiões localizadas do motor, com valores e frequências gradualmente maiores com o passar do tempo. A figura 35 expõe tal fato.

Figura 35 - Instantes intercalados de picos de temperatura em distintas regiões do motor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 26 - Perfil do número de Nusselt em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.

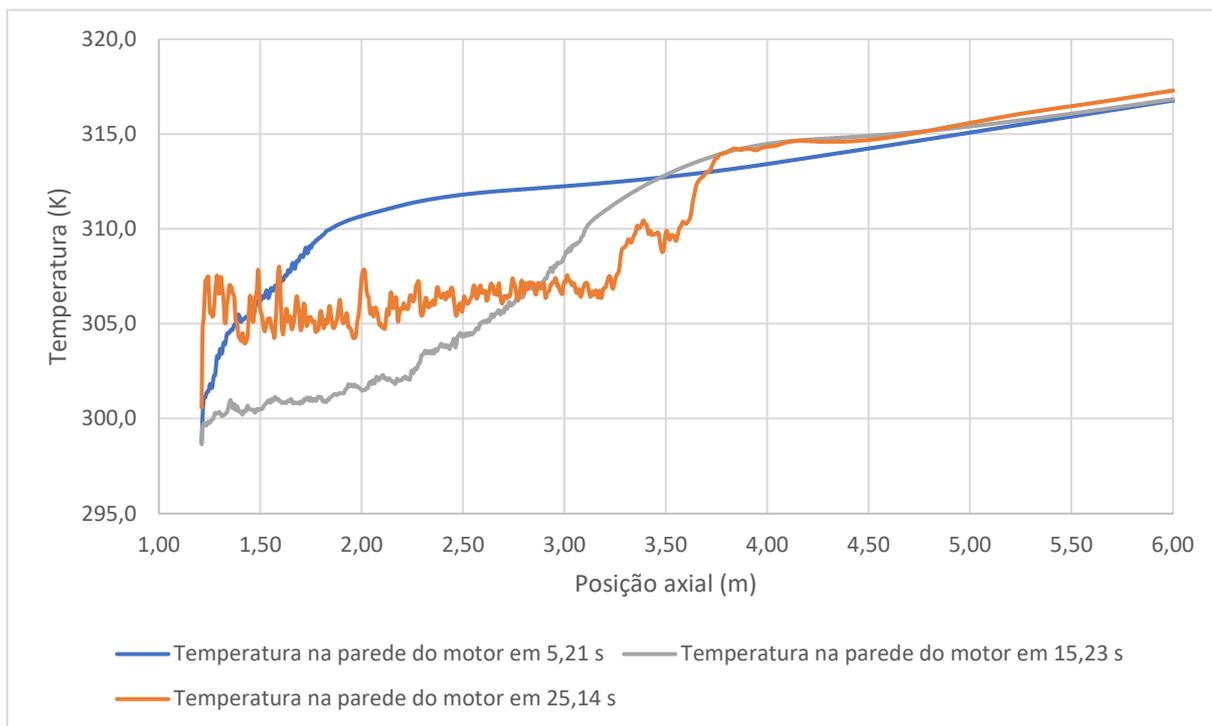


Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 26 expõe um comportamento notável do número de Nusselt. No início do escoamento, onde há pouca presença de gás na região do anular motor-*shroud*, esse adimensional tende a um valor constante ao longo do comprimento do motor e com o menor valor em relação a qualquer instante posterior que há a existência de gás. Posteriormente, com a chegada da fase secundária no anular, o número de Nusselt tende a aumentar substancialmente. Contudo, após o escoamento bifásico atingir uma certa estabilidade, o valor de Nusselt diminui e tende a ter um valor médio com uma certa flutuação. Para esse caso, em 25,14 segundos, Nusselt possui um valor médio de 43,1 na região do anular motor-*shroud* onde é existente o escoamento bifásico.

A temperatura na parede, por sua vez, exhibe um comportamento oposto ao número de Nusselt. Quando este adimensional possui um baixo valor, o coeficiente convectivo também assumirá um valor pequeno e consequentemente a temperatura aumentará para que a condição de fluxo de calor constante seja obedecida. O gráfico 27 apresenta a temperatura na parede ao longo do comprimento do motor, para diferentes instantes.

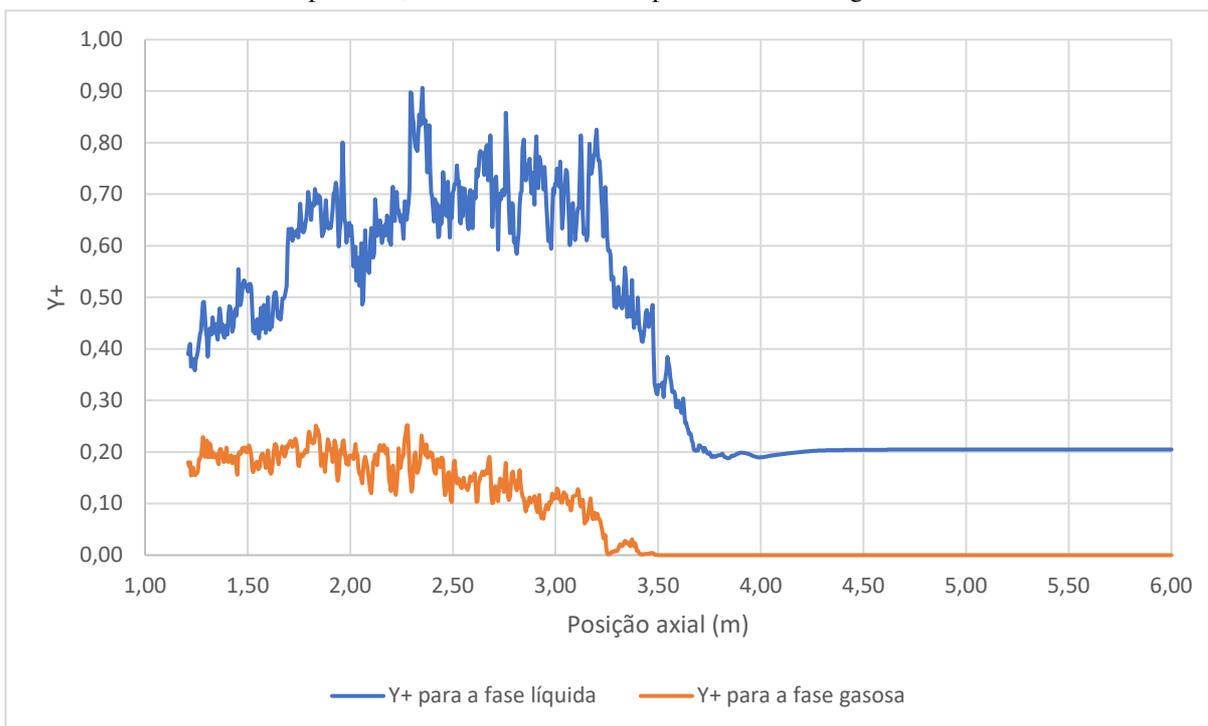
Gráfico 27 - Perfil da temperatura na parede do motor para distintos instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A fim de validar a aproximação utilizada no cálculo da distância do primeiro elemento a partir da superfície com a expressão obtida para a tensão cisalhante na parede e utilizando-se de $y^+ = 1$, é traçado o perfil axial do y^+ na parede interna do anular motor-*shroud* para ambas as fases e no tempo físico de 25,14 segundos, como é exposto no gráfico 28.

Gráfico 28 - Perfil axial do y^+ para ambas as fases líquida e gasosa na parede interna do anular motor-*shroud*, no tempo de 25,14 s. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

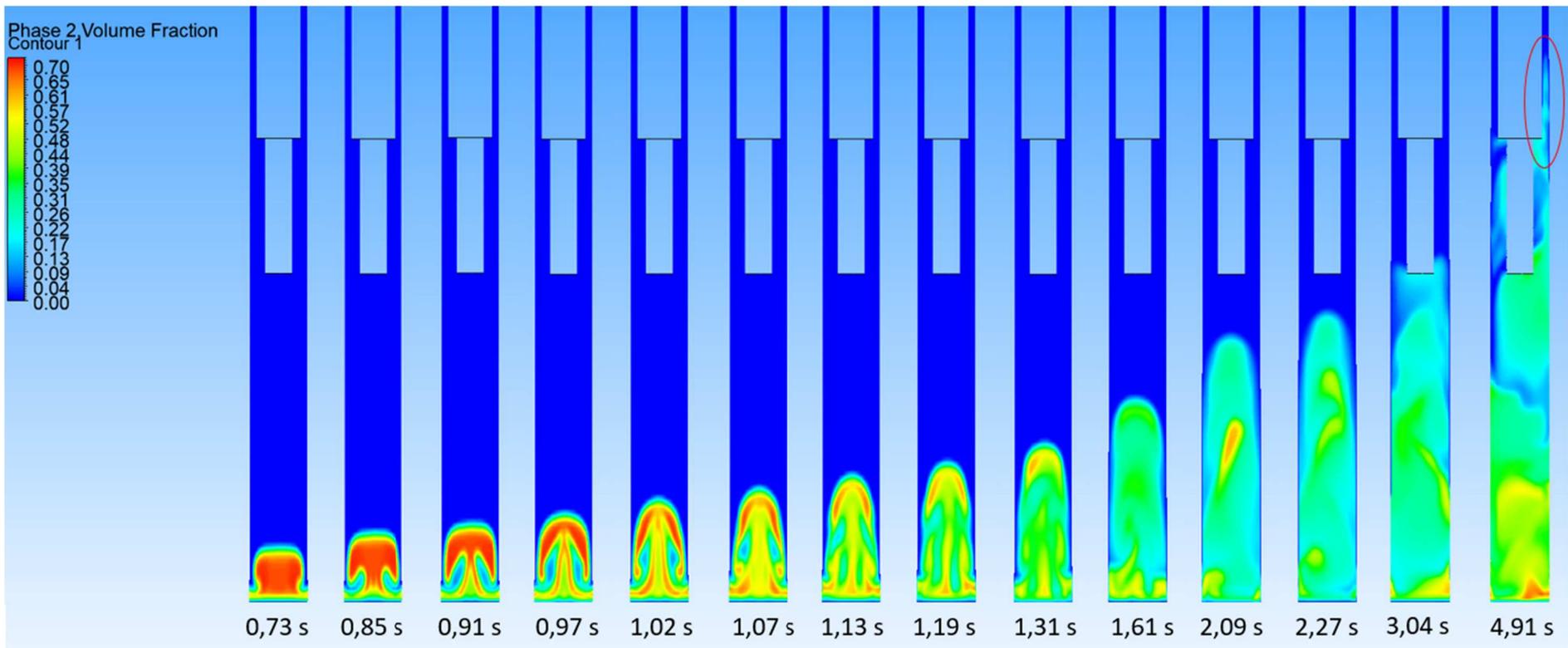
Nota-se o valor de y^+ abaixo da unidade para ambas as fases. Em paralelo, também é possível constatar que o escoamento multifásico torna variável o referido parâmetro. Comportamento oposto ao que é observado na região em que a fase gasosa ainda não se faz presente, na qual se atinge um valor constante.

5.2.2 A segunda simulação multifásica

Para a segunda análise numérica desenvolvida, foi obtido um tempo físico de 13,54 segundos. Assim como a primeira simulação, a fase gasosa não se desenvolveu em todo o domínio, ou seja, não atingiu a saída do escoamento. A presença de ar alcançou um comprimento de 2,17 m, o que corresponde a 41% da extensão total da geometria.

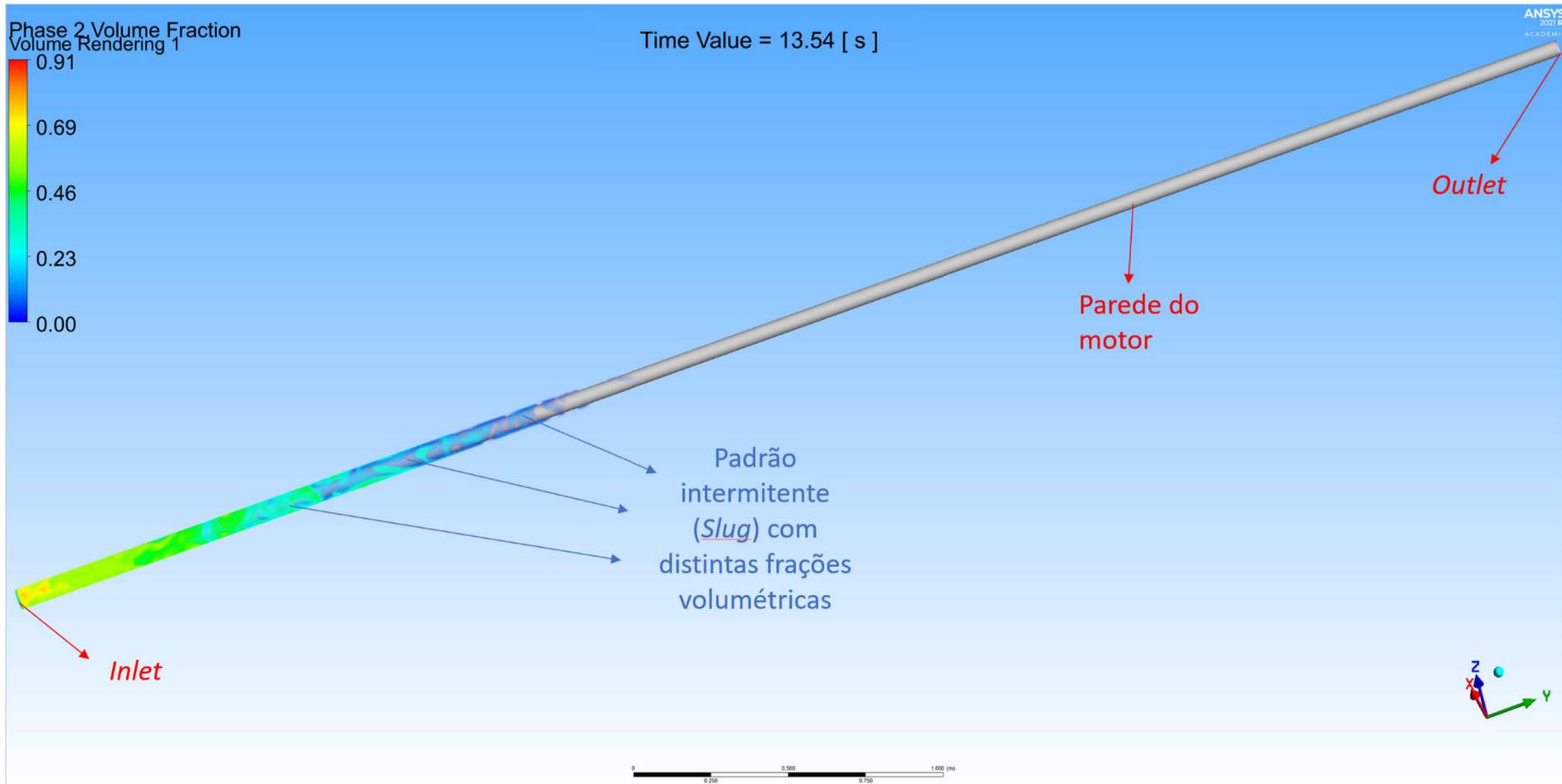
A instabilidade de Rayleigh-Taylor também ocorre durante o início do desenvolvimento da fase gasosa, de forma similar ao observado no primeiro caso estudado. No entanto, a dissipação desse fenômeno ocorre de forma mais veloz quando comparado ao primeiro estudo numérico. A figura 36 retrata tal constatação.

Figura 36 - A nítida instabilidade de Rayleigh-Taylor presente no início do desenvolvimento da fase gasosa (0,73 s a 1,31 s) e sua dissipação no decorrer do tempo (1,61 s à frente). O circulado em vermelho no instante de 4,91 s é o início da formação do padrão *slug* na região anular motor-*shroud*.



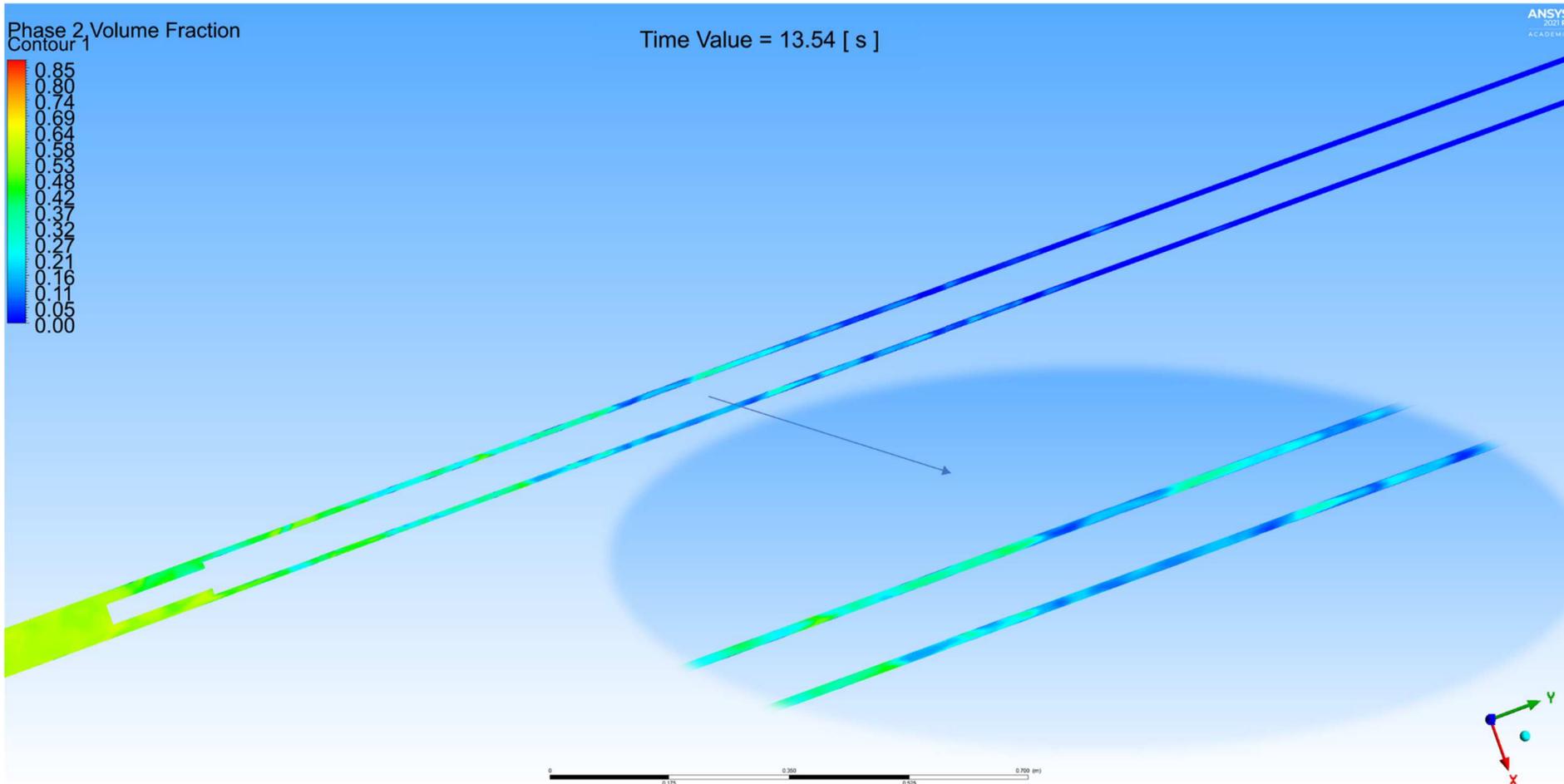
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 - Desenvolvimento da fase secundária (ar) em 13,54 segundos para a segunda simulação. *Volume Rendering* da fração volumétrica da fase secundária.



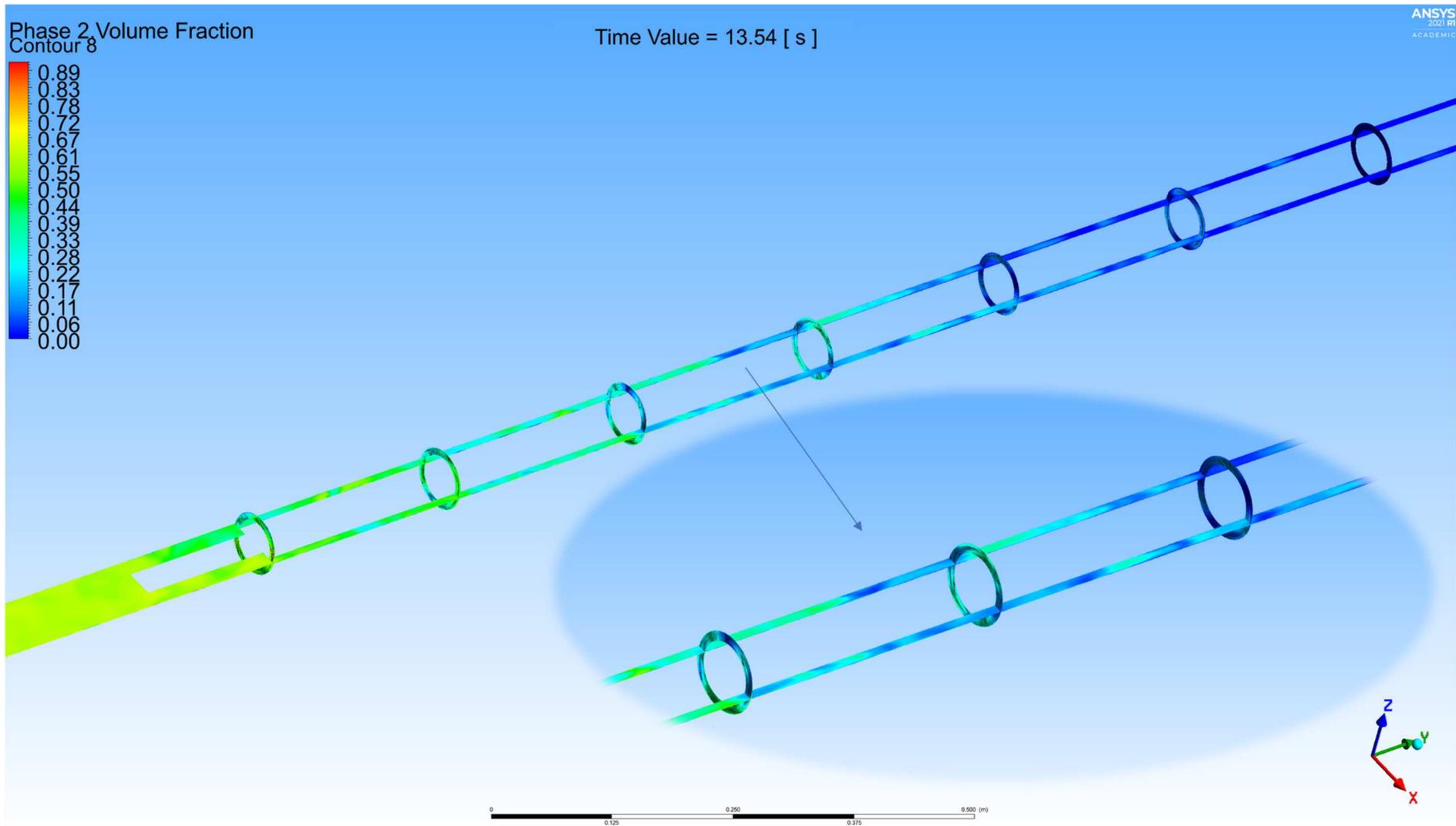
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 - Corte longitudinal da geometria em 13,54 segundos e ampliação de região s para expor o padrão *slug*.



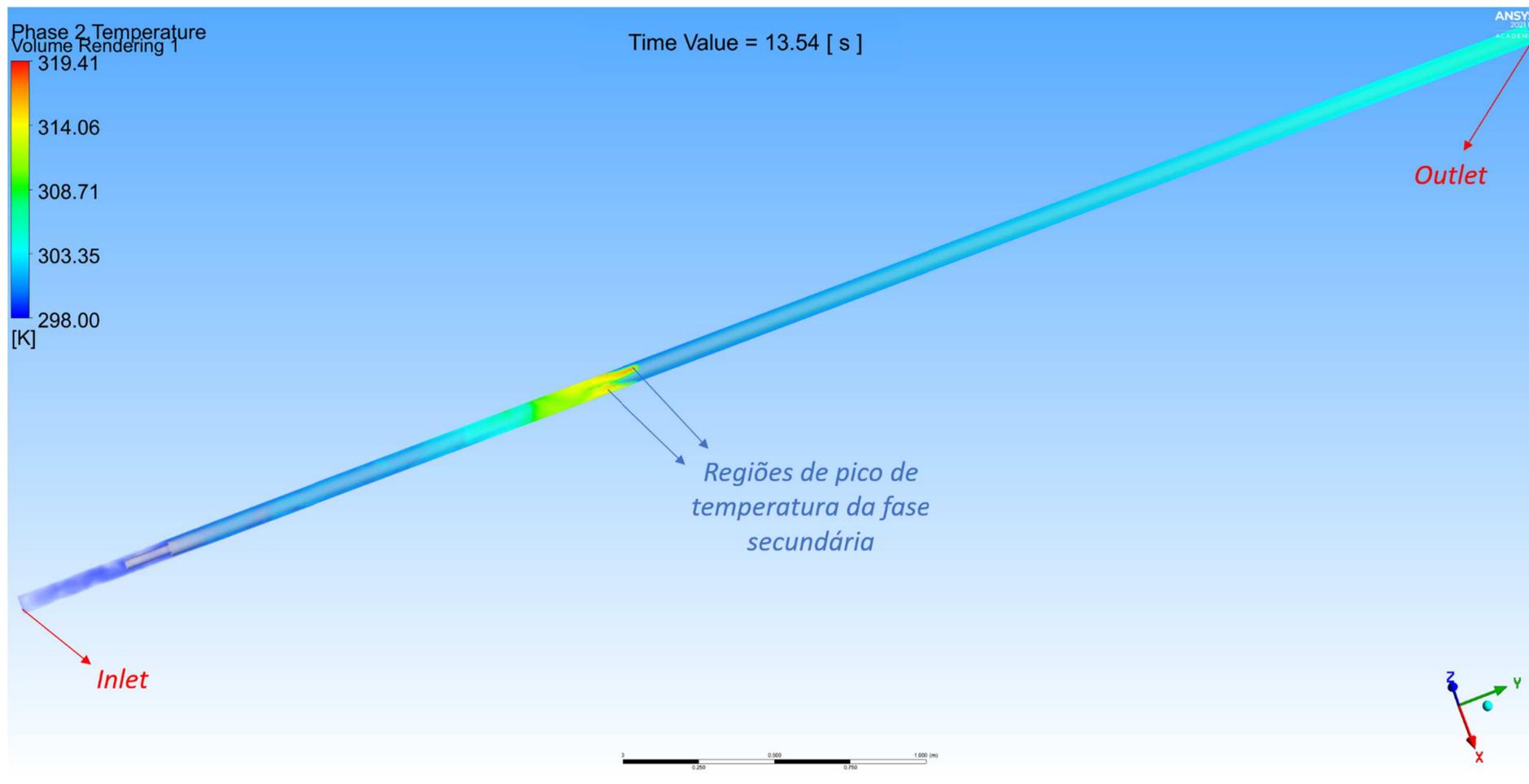
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o padrão *slug*.



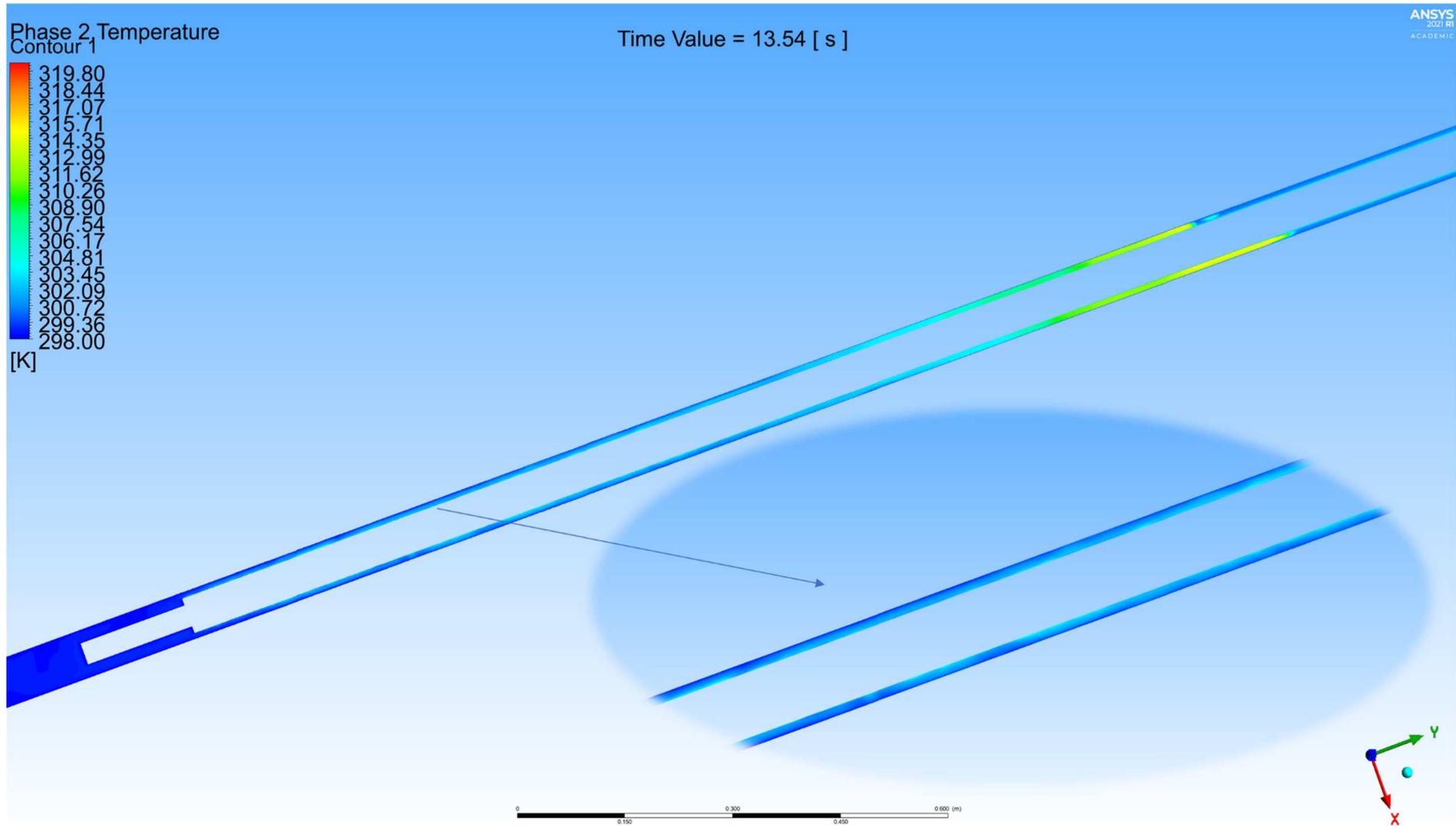
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 - Temperatura da fase secundária em 13,54 segundos. *Volume Rendering* da temperatura da fase secundária.



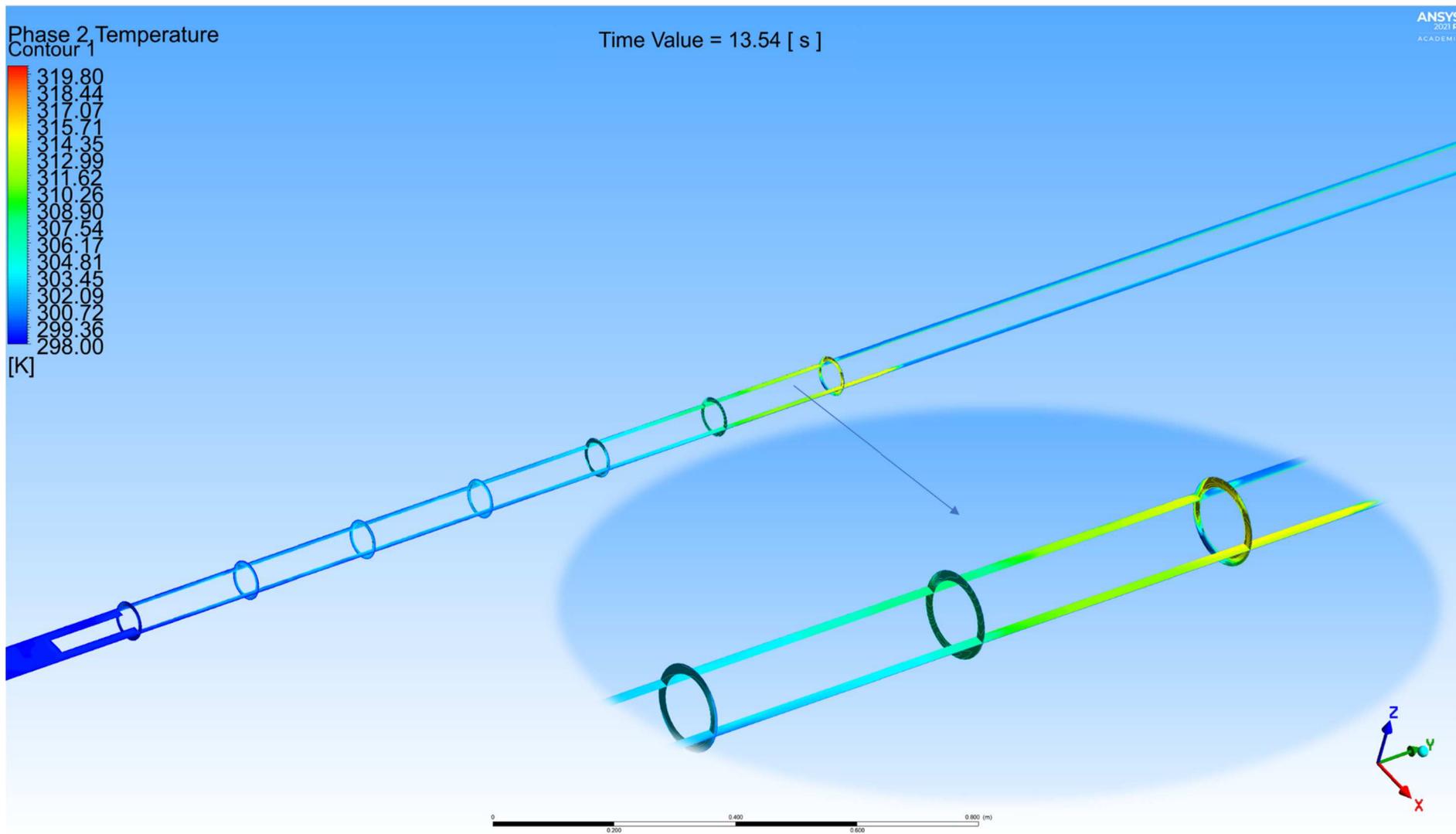
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 - Corte longitudinal da geometria em 13,54 segundos e ampliação de região para expor o gradiente de temperatura no anular *motor-shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

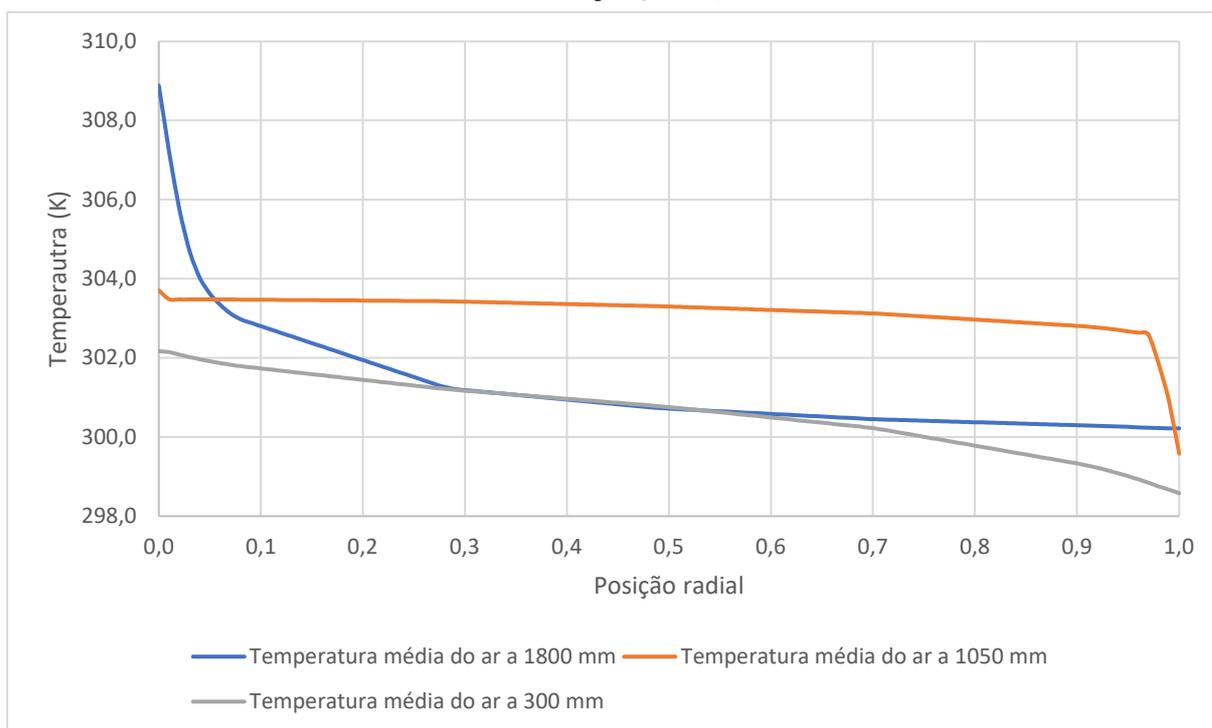
Figura 42 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o gradiente de temperatura no anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As figuras 37 a 42 mostram o desenvolvimento da fase gasosa e de sua temperatura ao longo do domínio no tempo físico de 13,54 s. De forma similar ao observado na primeira análise numérica, a segunda simulação também se traduz em um padrão *slug* com distintas frações volumétricas. Uma região gasosa com uma temperatura superior ao restante do escoamento também se faz presente, com a tendência do crescimento dessa propriedade com o avanço do tempo.

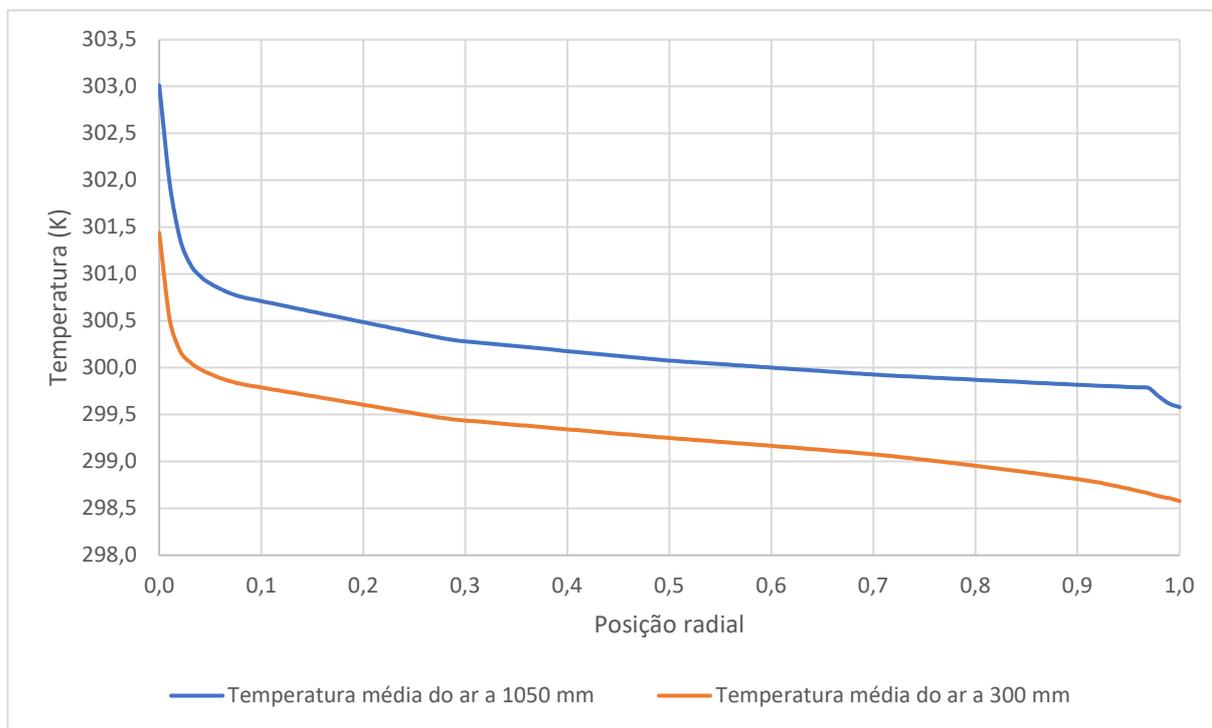
Gráfico 29 - Perfil médio radial de temperatura da fase gasosa em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico 29 expõe o perfil médio radial de temperatura da fase gasosa no tempo físico de 13,54 segundos, para distintas seções transversais da geometria. Nota-se que a avaliação da segunda simulação é em uma menor quantidade de regiões devido ao menor desenvolvimento da fase secundária. Para o perfil médio de temperatura do escoamento bifásico, é apresentado o gráfico 30:

Gráfico 30 - Perfil médio radial de temperatura da mistura em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).

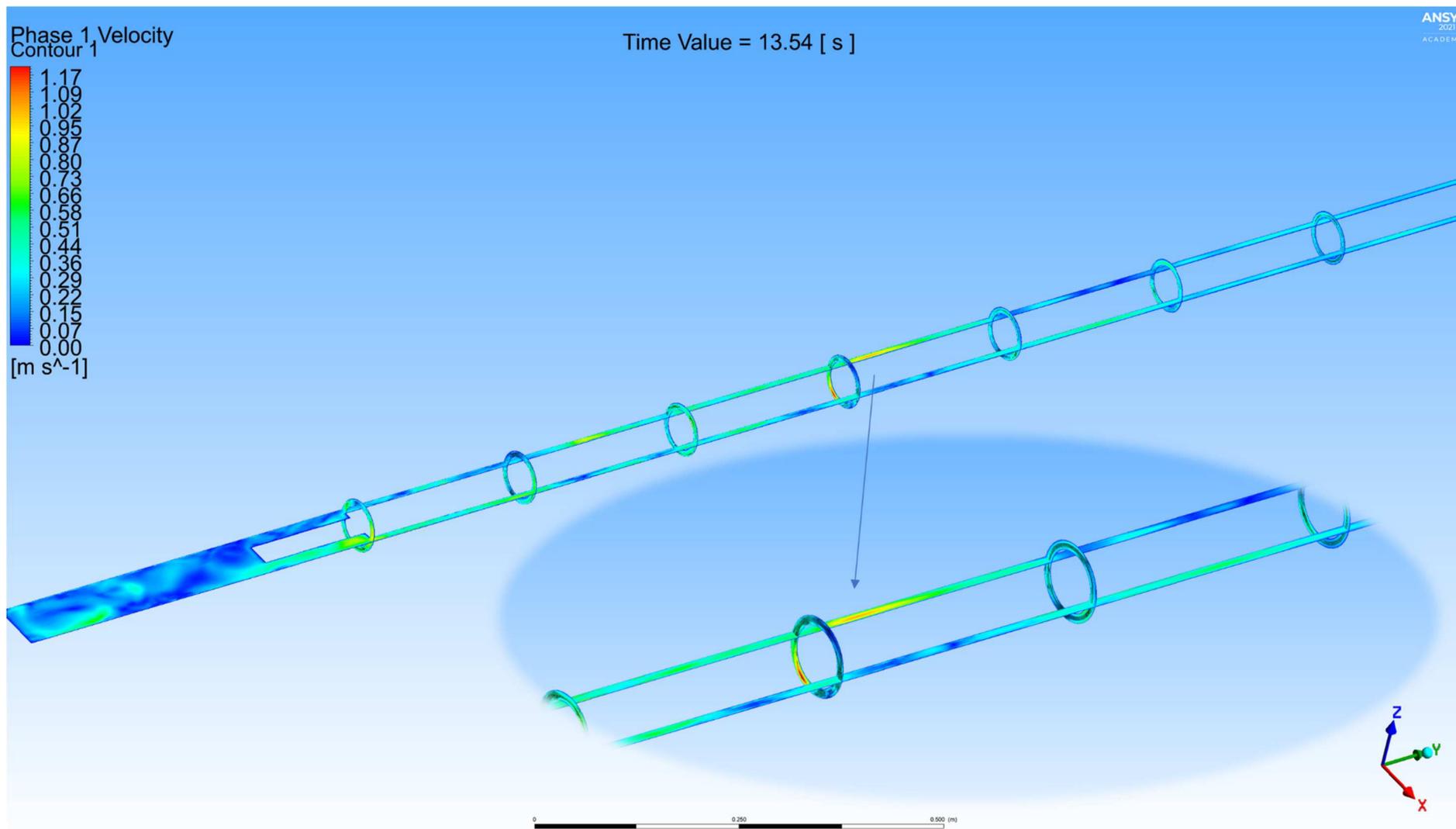


Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se uma maior diferença entre as temperaturas médias da mistura e das temperaturas médias da fase gasosa, quando comparado a segunda com a primeira simulação. Tal fato se deve ao menor desenvolvimento da fase secundária.

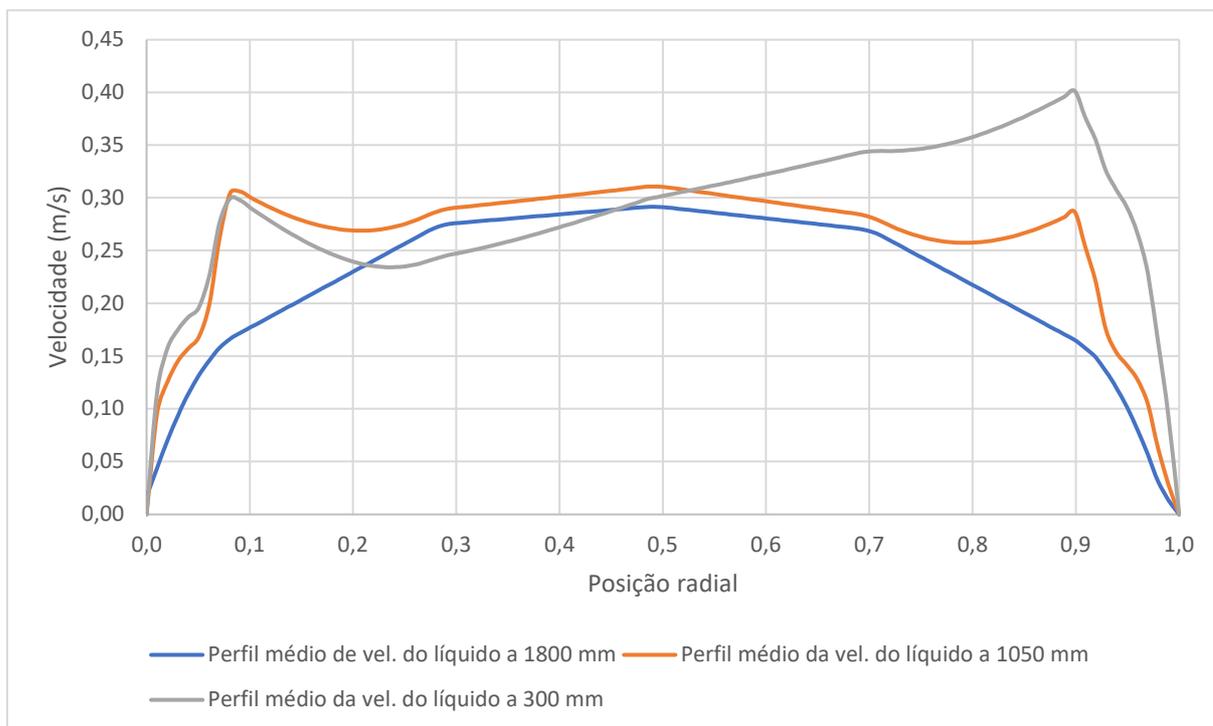
Regiões com uma maior velocidade também são notadas na segunda análise numérica, conforme visto pela figura 43. Ocasiona-se nesses locais um alto número de Reynolds, de forma a indicar um escoamento turbulento. Vórtices também são observados ao longo do tempo na região a jusante do sensor.

Figura 43 - Corte longitudinal e transversais na geometria em 13,54 segundos para expor o campo de velocidades. As regiões a partir da coloração amarelada já se caracteriza altos números de Reynolds.



Fonte: Elaborado pelo autor.

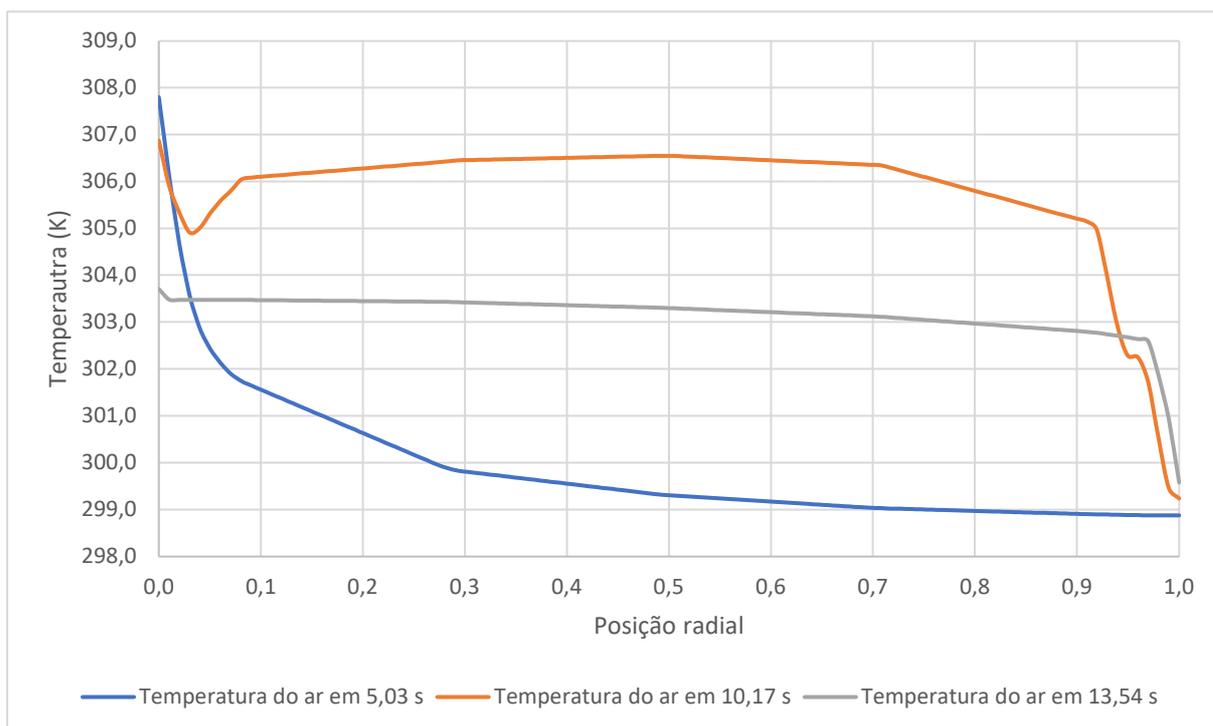
Gráfico 31 - Perfil médio radial da velocidade da fase primária em 13,54 segundos para diferentes posições a partir do início do motor. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0). Nota-se a distorção que a presença de gás ocasiona no perfil.



Fonte: Elaborado pelo autor.

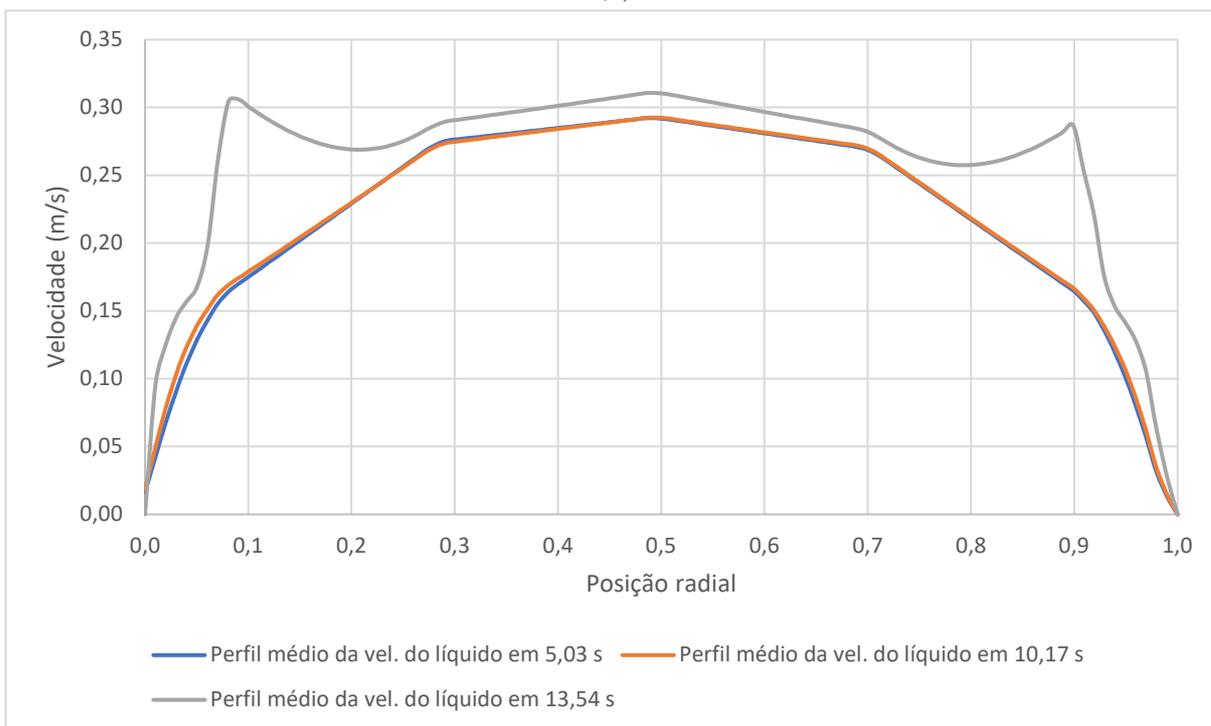
Para a observação da variação dos perfis radiais ao passar do tempo, assim como na primeira análise, fixou-se a seção transversal a 1050 mm do início do motor para avaliação.

Gráfico 32 - Perfis médios radiais da temperatura do ar na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



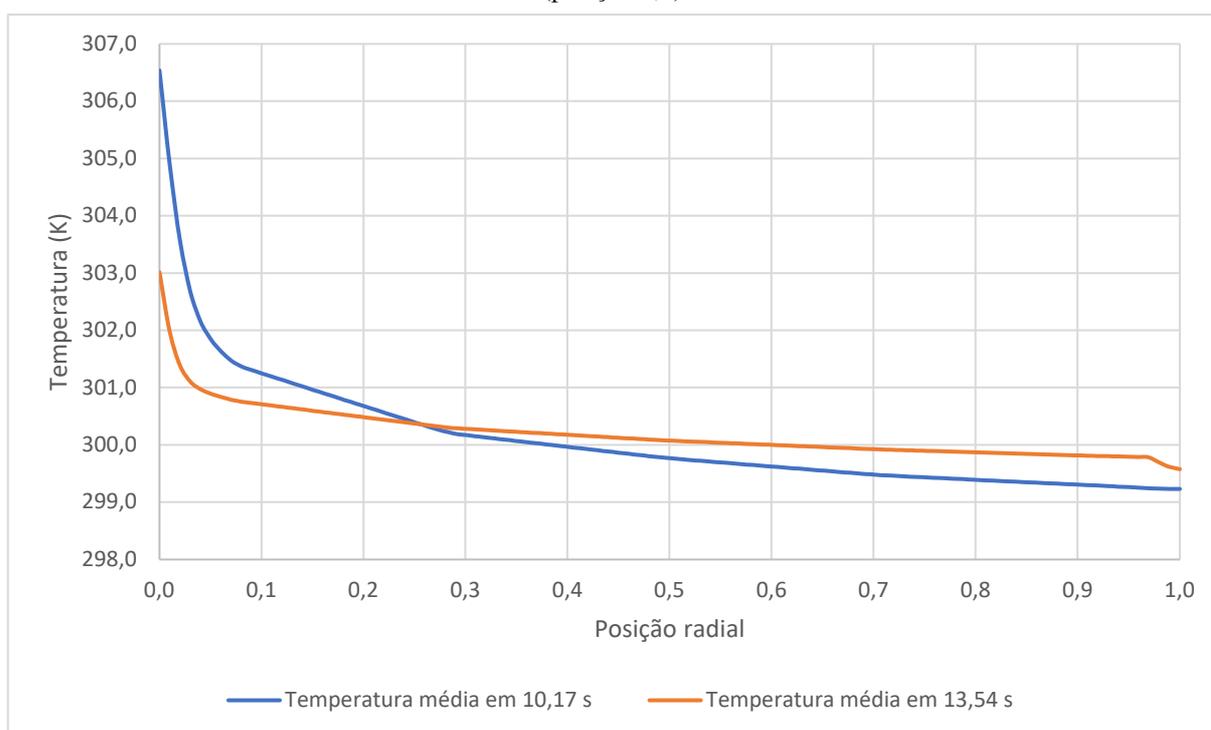
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 33 - Perfis médios radiais da velocidade da água na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



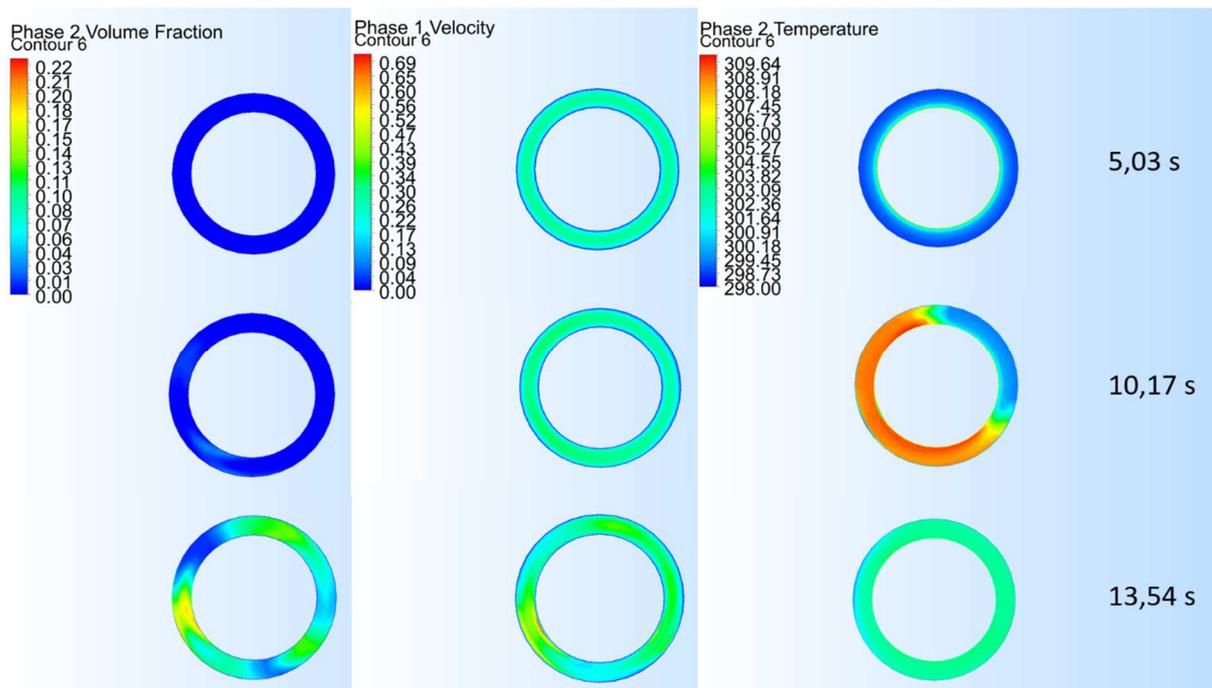
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 34 - Perfis médios radiais da temperatura da mistura na seção a 1050 mm do início do motor em diferentes tempos. A posição radial é representada por uma relação entre os raios interno (posição 0,0) e externo (posição 1,0).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 - Gradientes da fração volumétrica, velocidade da fase líquida e temperatura da fase gasosa com o passar do tempo na seção transversal a 1050 mm do início do motor para a segunda simulação. A unidade da velocidade é m/s, e da temperatura K.

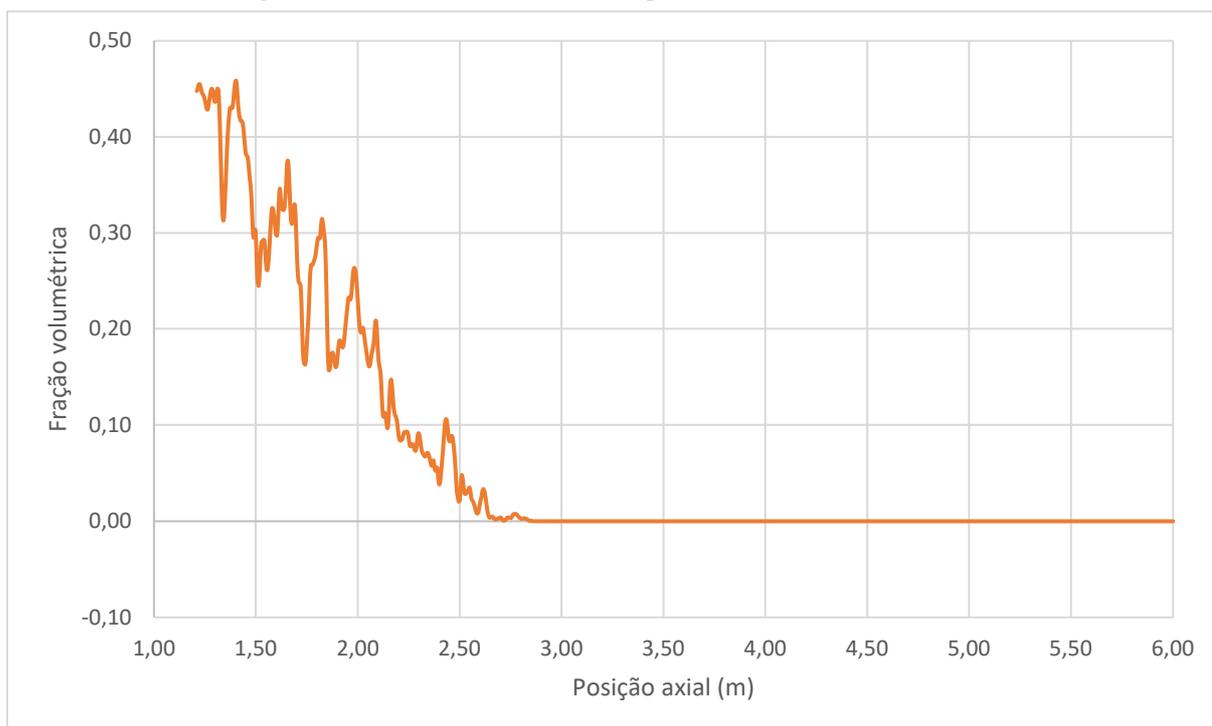


Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da figura 44, observa-se um comportamento similar ao notado na primeira simulação. A presença da fase secundária em uma baixa fração volumétrica no decorrer do escoamento tende a formar uma região com um aumento substancial na temperatura. Em contraste, instantes seguintes com uma maior fração volumétrica da fase gasosa propicia um aumento na velocidade do líquido e, assim, uma menor temperatura da fase secundária é atingida.

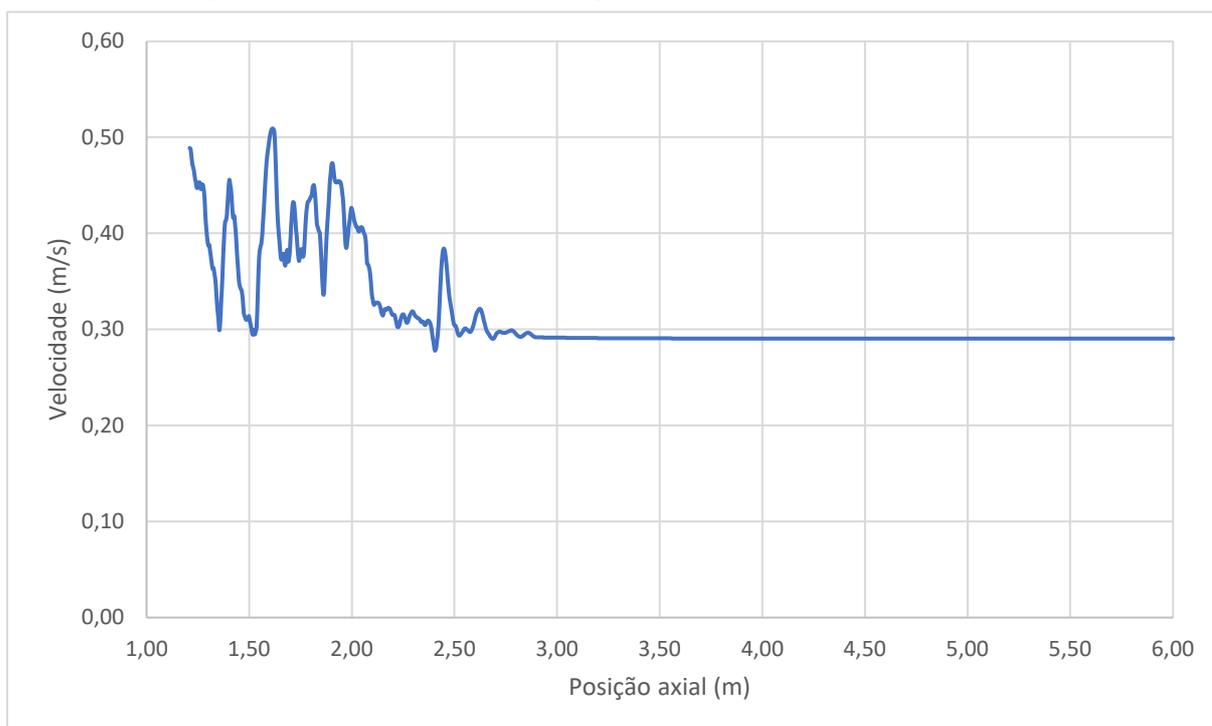
Para as análises axiais, os perfis da fração volumétrica média do gás e da velocidade longitudinal da fase primária no tempo físico de 13,54 segundos são obtidos. Em paralelo, análises em diferentes instantes do número de Nusselt, temperaturas das duas fases, da mistura e da parede do motor também são realizadas e expostos nos gráficos a seguir.

Gráfico 35 - Perfil axial da fração volumétrica da fase gasosa no instante de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



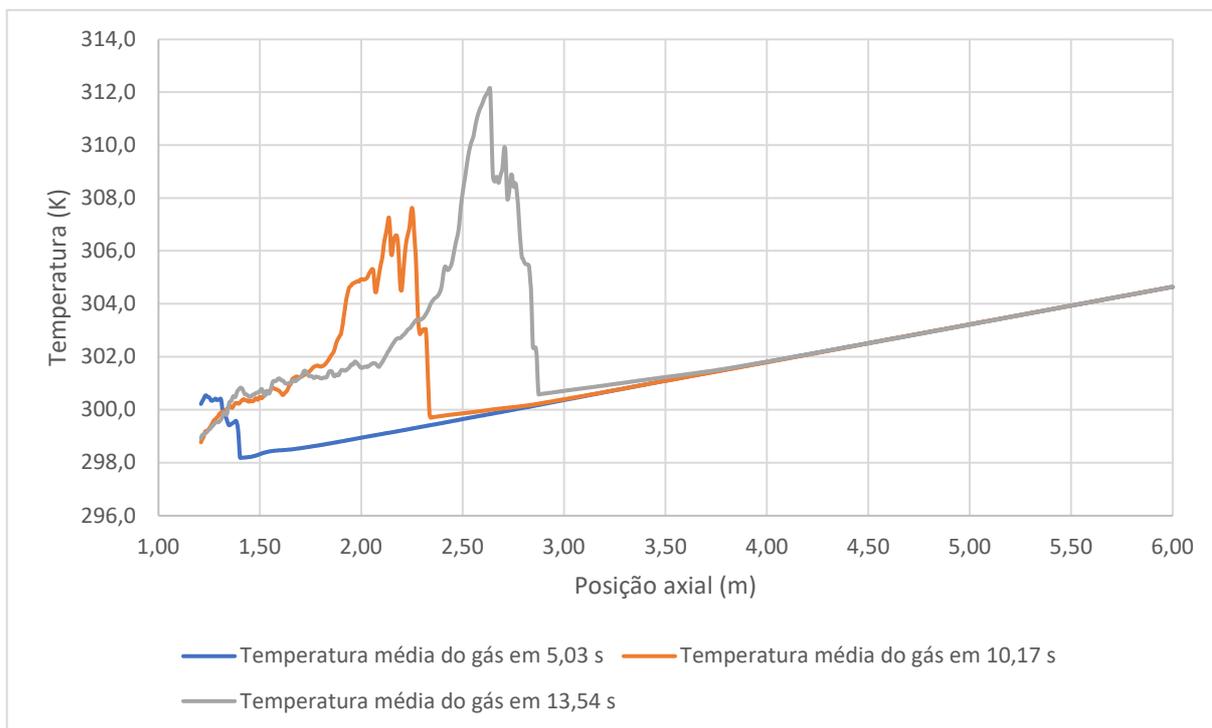
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 36 - Perfil axial de velocidade da fase líquida no instante de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



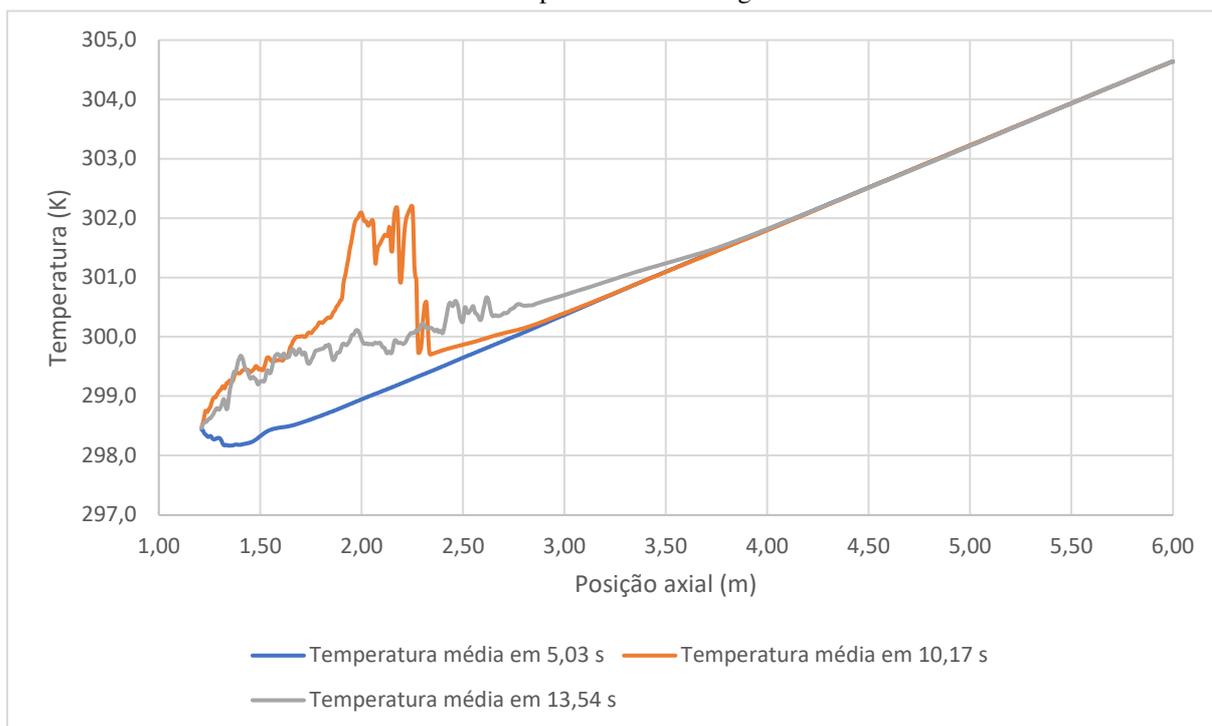
Fonte: Elaborado pelo autor.

Gráfico 37 - Perfil axial de temperatura da fase gasosa em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

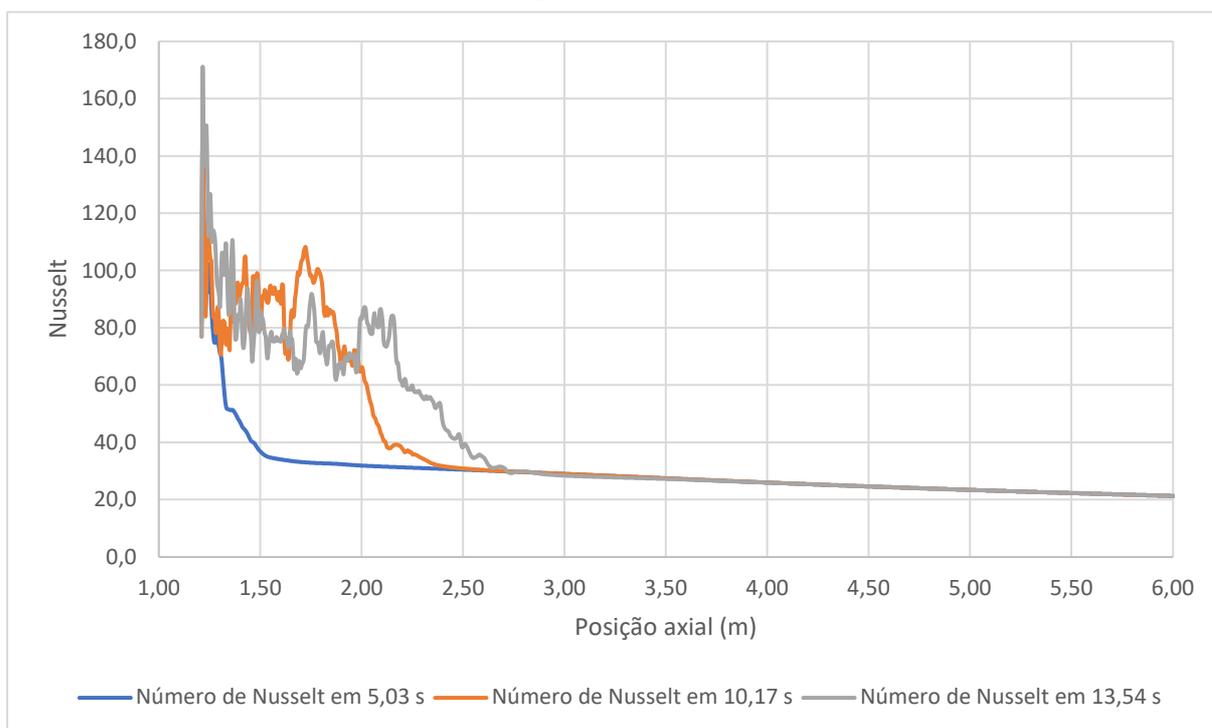
Gráfico 38 - Perfil axial de temperatura da mistura em diferentes instantes. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*. Nota-se o início da presença da fase gasosa no referido anular em 5,03 s. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se a diferença entre as temperaturas da fase gasosa e da mistura pelos gráficos 37 e 38. Uma vez a fração volumétrica do gás não se desenvolveu do tal modo que o observado na primeira simulação, a temperatura da mistura se aproxima bastante à temperatura do líquido, com perfis axiais muito próximos uns aos outros.

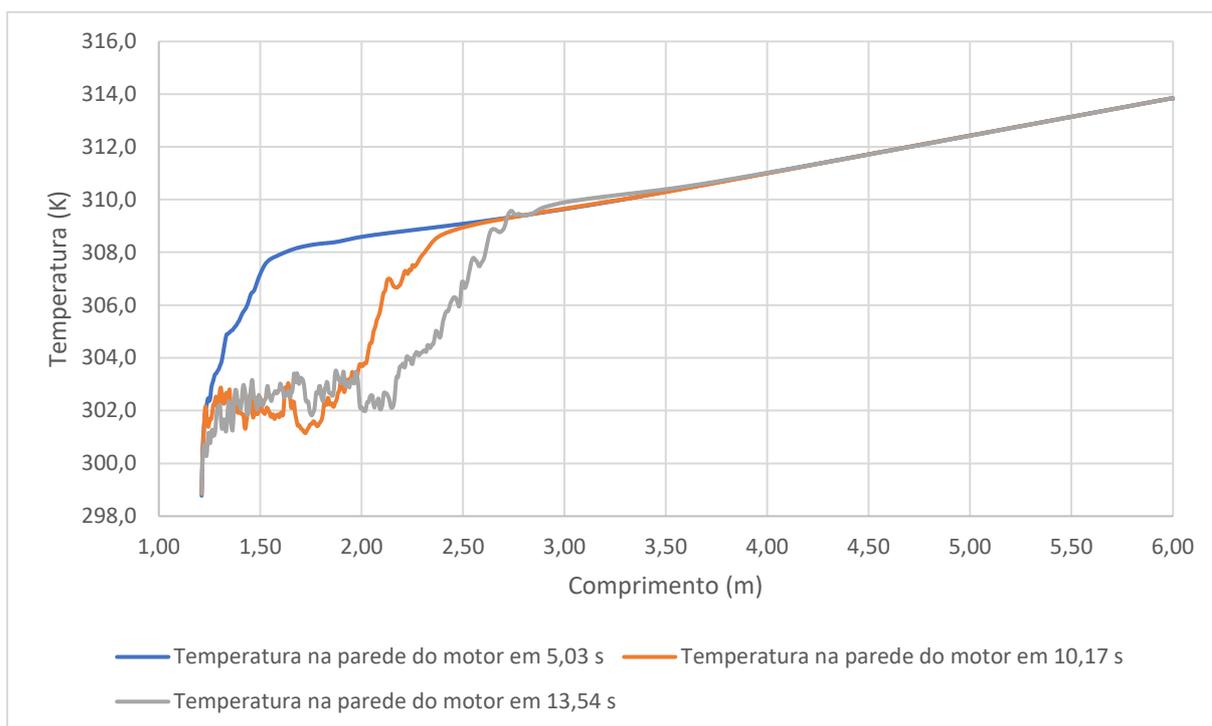
Gráfico 39 - Perfil do número de Nusselt em diferentes instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a segunda simulação, o desempenho do número de Nusselt e consequentemente da temperatura na parede do motor são similares ao observado na primeira simulação. Para a análise presente nesta seção, o número de Nusselt possui uma média de 82,3 na região que se faz presente a fase gasosa, no tempo físico de 13,54 segundos. O gráfico 40 exhibe o perfil de temperatura na parede ao longo do comprimento do motor para os mesmos instantes avaliados no gráfico 39.

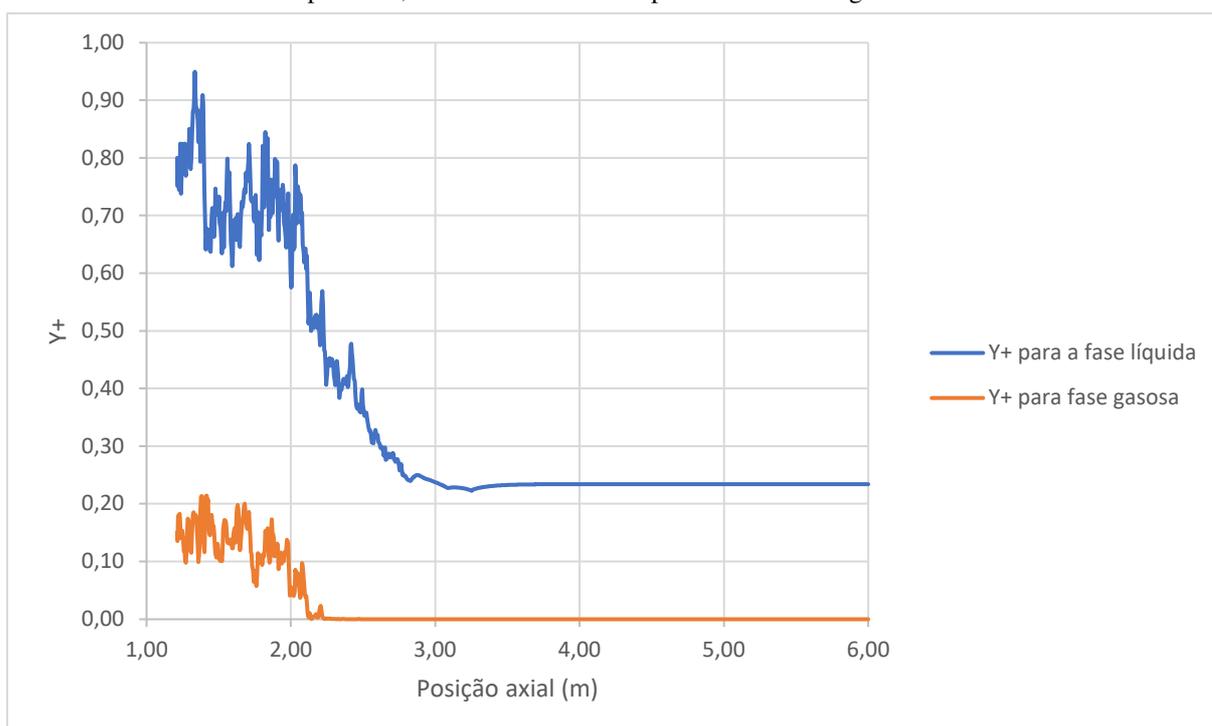
Gráfico 40 - Perfil da temperatura na parede do motor para distintos instantes. A referência é imposta no fundo da geometria. Os dados são retirados a partir do início do anular motor-*shroud*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para conhecimento dos valores de y^+ obtidos na segunda simulação multifásica, e posterior avaliação da aproximação utilizada para o cálculo do primeiro elemento a partir da superfície, é traçado o gráfico 41 para ambas as fases e no tempo físico de 13,54 segundos.

Gráfico 41 - Perfil axial do y^+ para ambas as fases líquida e gasosa na parede interna do anular motor-*shroud*, no tempo de 13,54 s. A referência é imposta no fundo da geometria.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 6

6 CONCLUSÃO

As simulações monofásicas proporcionaram um importante resultado sobre a natureza da hidrodinâmica e da transferência de calor no anular interno do Mobo: o escoamento atinge o pleno desenvolvimento hidrodinâmico, mas não o térmico. A região termicamente plenamente desenvolvida foi observada apenas para baixos números de Reynolds e na parte final do anular motor-*shroud*. Uma vez que para essas análises empregou-se a água no estado líquido como fluido para o estudo, é possível concluir que em uma operação de uma BCS com um fluido viscoso, monofásico, em um regime permanente e com vazões típicas de trabalho, todo o escoamento em torno do motor estará na região de entrada térmica, dado que os números de Prandtl envolvidos serão maiores que o da água. Logo, modelos que desconsideram a região de desenvolvimento térmico para estudo do resfriamento do motor de uma BCS serão erroneamente empregados. No entanto, no caso de o escoamento exceder a entrada térmica, constatou-se que o número de Nusselt tende ao valor constante de 2,70.

A partir da modelagem *Eulerian* para escoamentos multifásicos, em conjunto com os modelos para os coeficientes pertinentes, e com o tratamento *Compressive* para a discretização da fração volumétrica, é possível afirmar que a previsão do padrão do escoamento multifásico pode ser obtida. A captura do fenômeno da instabilidade de Rayleigh-Taylor, figuras 25 e 26, também contribui para essa indicação. Apesar da existência da difusão numérica na interface entre as fases, desvantagem que é amplamente reconhecida para o modelo de dois fluidos, constata-se pelas figuras 26 a 28 e 37 a 39, o padrão *slug* para as vazões de água e ar impostas – resultados que são previstos pelos estudos de Kelessidis & Dukler (1989), Filho et al. (1992), e Oliveira et al. (2021). Observações experimentais no protótipo em escala reduzida da BCS construído no Nemog também colaboram para tal conclusão. Uma vez que tais vazões são obtidas a partir de números de Reynolds operacionais típicos para uma BCS real, conclui-se, que em uma operação normal, o padrão de escoamento a ser esperado no motor de uma BCS é o *slug*. Para esse padrão, é observado que a fase secundária causa distorções na velocidade da fase primária. Neste cenário, o escoamento bifásico nunca atingirá um comportamento de pleno desenvolvimento hidrodinâmico ou térmico.

No entanto, para os modelos e discretizações impostas, o esforço computacional é extremo. Para que toda a fase gasosa se desenvolva no domínio, seria necessária a realização das

simulações em uma ordem de um ano com os recursos computacionais utilizados. Dessa forma, constatou-se que o escoamento em ambas as simulações se encontra em um regime transiente, dado que não houve um balanço de massa do líquido entre a entrada e saída. Uma vez que há uma quantidade de gás entrando, esta fase ocupará o que anteriormente era preenchido pelo líquido. Assim, até que a fase secundária também atinja a saída do escoamento, haverá um desbalanço entre a entrada e saída da fase primária: mais líquido deixará o domínio quando comparado à entrada. Tal fato explica a diferença entre os valores do número de Nusselt para as simulações monofásicas com os instantes das simulações multifásicas em que ainda (ou quase) não há a presença da fase gasosa no anular motor-*shroud*. Logo, até que a fase gasosa se desenvolva completamente na geometria, o líquido terá uma velocidade maior do que o esperado nas regiões onde não há a presença da fase secundária, e promoverá um melhor resfriamento no motor. Em outras palavras, a temperatura de sua superfície estará reduzida.

Dado que a temperatura na parede do motor e do escoamento estão diretamente relacionadas ao número de Nusselt, o acentuado aumento de temperatura na direção axial para as simulações monofásicas também é elucidado pelo raciocínio acima descrito. Porém, é de conhecimento que a premissa de fluxo de calor constante na parede do motor é apenas uma aproximação e não uma realidade no protótipo real da BCS, já que essa condição depende da disposição dos enrolamentos do motor e da presença de gás no escoamento, que é uma variável no tempo.

Ainda assim, é possível notar o incremento de temperatura que a fase gasosa causa no escoamento. Em ambas as simulações, é constatado um crescente aquecimento do gás no decorrer do escoamento, causando temperaturas locais superiores a região final do motor. Em certos instantes, picos de temperatura também são observados na parede do motor, devido ao regime *slug*. Tais picos na superfície do motor e elevadas temperaturas locais no escoamento podem causar uma potencial falha do equipamento, ocasiões que podem ser ainda piores quando a fase gasosa já estiver presente em todo o domínio.

O tratamento do escoamento como turbulento se mostrou adequado visto que a fase gasosa distorce a velocidade da fase líquida e pode causar em sua velocidade um grande aumento local – o que acarreta um alto número de Reynolds na região. Dessa maneira, é essencial que a modelagem da turbulência seja adequada para que os fenômenos relacionados à transferência de calor sejam previstos de forma apropriada. Pelas figuras 34 e 44 é nítida a importância da correta obtenção da fração volumétrica da fase secundária para que seus efeitos na velocidade da fase primária e convecção sejam avaliados de forma devida.

A partir dos gráficos 28 e 41 é constatado que a utilização da expressão desenvolvida para a tensão cisalhante na parede como aproximação para o cálculo do primeiro elemento a partir da superfície é adequada, uma vez que os valores de y^+ ficaram abaixo do valor unitário - no qual foi utilizado para a análise. Dessa maneira, conclui-se que os efeitos das forças viscosas e difusões térmicas do escoamento próximas à parede interna do anular são devidamente capturadas.

A avaliação do número de Nusselt para as simulações multifásicas expôs que esse adimensional tende a assumir um valor aproximadamente constante (uma grandeza média mais uma variação e/ou perturbação). Tal valor depende intrinsecamente da relação da vazão mássica do líquido e do gás. Uma vez que o fenômeno de transporte estudado se apresenta com um fluxo de calor constante proveniente da parede do motor, a temperatura dessa superfície é função do número de Nusselt obtido. Isto é, se esse adimensional se apresenta com um valor constante, a temperatura na superfície do motor também se apresentará. Assim, em um cenário de um escoamento bifásico estável, não haverá um grande gradiente axial de temperatura na parede do motor como é observado e esperado em um escoamento monofásico. A fim de se evitar uma falha por superaquecimento do motor, a atuação consistirá em prevenir ou atenuar os picos de temperaturas que em diversos instantes podem ser causados pelo padrão *slug*. De forma igual deverá ser dada a devida atenção a um possível grande aumento local da temperatura no decorrer do escoamento.

Contudo, ainda é preciso a ampliação do estudo para diferentes vazões mássicas do líquido e gás, no intuito de avaliar outros padrões bifásicos que podem ocorrer em torno do motor da BCS. O estudo ainda carece de validações experimentais para a temperatura prevista, isto significa que medições via os termopares existentes no protótipo da BCS construído no Nemog são necessárias, aplicando as mesmas condições do que as impostas neste trabalho. Após essa etapa, simulações assumindo o líquido como etilenoglicol são essenciais para uma avaliação mais adequada dos fenômenos existentes em torno do motor da BCS, dado que a bancada experimental foi concebida para trabalhar com esse fluido e conseqüentemente uma similaridade dinâmica seja mais bem alcançada.

REFERÊNCIAS

- A. D. B. BURNS, TH. FRANK, I. HAMILL, J.M. SHI. *The Favre Averaged Drag Model for Turbulent Dispersion in Eulerian Multi-Phase Flows. Fifth International Conference on Multiphase Flow, ICMF-2004, Yokohama, Japan: 2004.*
- ARIS, R. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics. New York: Donver Publications, INC, 1989.*
- YIN, B.; LI, X.; SUN, B.; ZHANG, H. *Hydraulic model of steady state multiphase flow in wellbore annuli. Institute of Petroleum Exploration and Development, PetroChina: 2014.*
- BARRIOS, L.; PRADO, M. G. *Experimental Visualization of Two-Phase Flow Inside an Electrical Submersible Pump Stage. Journal of Energy Resources Technology: 2011.*
- BARRIOS, L.; PRADO, M. G. *Modeling Two-Phase Flow Inside an Electrical Submersible Pump Stage. Journal of Energy Resources Technology: 2011.*
- BEJAN, A. *Convection Heat Transfer. Fourth Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, INC: 2013.*
- BENNETT, A. C; HOHMANN R. P. *Methods for Calculating Shear Stress at the Wall for Single-Phase Flow in Tubular, Annular, Plate, and Shellside Heat Exchanger Geometries. Heat Transfer Engineering. Houston, Texas, USA: 2016.*
- BETÔNICO, G. C. *Estudo da Distribuição de Temperatura em Motores de Bombas Centrífugas Submersas. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2013.*
- BUSON, D. F. *Escoamento de óleo-gás em equipamento submarino: Influência da fração volumétrica de gás na separação de fases no Módulo de Bombeio. Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2013.*
- CAETANO, E. F. *Two-phase flow in a vertical annulus. Tulsa, United States: Petroleum Engineering Department, The University of Tulsa, 1984.*
- CAETANO, E. F.; Shoham, O.; Brill, J. P. *Upward Vertical Two-Phase Flow Through an Annulus – Part I: Single-Phase Friction Factor, Taylor Bubble Rise Velocity and Flow Pattern Prediction. Tulsa, United States: The University of Tulsa, 1992.*

CAETANO, E. F.; Shoham, O.; Brill, J. P. *Upward Vertical Two-Phase Flow Through an Annulus – Part II: Modeling Bubble, Slug and Annular Flow*. Tulsa, United States: The University of Tulsa, 1992.

COLEBROOK, C. F. *Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Region between the Smooth and Rought Pipe Laws*. London: Journal of Civil Engineers, 1938, pp. 133-156.

CHURCHILL, S. W. *Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes*. Philadelphia, USA: University of Pennsylvania: 1977.

DREW, D. A. *Mathematical Modeling of Two-Phase Flow*. Madison, Wisconsin: Mathematics Research Center University of Wisconsin, 1982.

ENWALD, H.; PEIRANO E.; ALMSTEDT A. E. *Eulerian Two-Phase Flow Theory Applied to Fluidization*. Göteborg, Sweden: Chalmers University of Technology, Elsevier Science Ltd., 1997.

ESTEVAM, V. **Uma Análise Fenomenológica da Operação de Bomba Centrífuga com Escoamento Bifásico**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2002.

FAGHRI, A; ZHANG, Y. *Fundamentals of Multiphase Heat Transfer and Flow*. Switzerland: Springer, 2019.

FOX, ROBERT W.; MCDONALD, ALAN T.; PRITCHARD, PHILIP J. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

HAALAND, S. E. *Simple and Explicit Formulas for the Friction Factor in Turbulent Flow*. Transactions of ASME: Journal of Fluids Engineering, 1983, pp. 89-90.

HYDRAULIC INSTITUTE. *American National Standard for Pumps – General Guidelines*. ANSI/HI 9.1-9.5-2015. New Jersey: 2015.

LAGE, A. C. V. M.; TIME, R. W. *Mechanistic Model for Upward Two-Phase Flow in Annuli*. Dallas, Texas: Society of Petroleum Engineers, 2010.

LAO, L.; EYO, E. N.; *Gas-liquid flow regimes in horizontal annulus*. Bedfordshire, UK: Geo-Energy Engineering Centre, Energy and Power, Cranfield University, 2018.

LIMA, M. P. **Aferição do modelo VOF na caracterização de padrões de escoamento multifásico em tubulação horizontal e inclinada.** Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2016.

LOTE, D. A.; VINOD, V.; PATWARDHAN, A. W. *Computational Fluid Dynamics Simulations of the Air-Water Two-Phase Vertically Upward Bubbly Flow in Pipes.* Matunga, Mumbai: Department of Chemical Engineering, Institute of Chemical Technology, 2018.

MACDONOUGH, J. M. *Introductory lectures on turbulence: physics, mathematics and modeling.* Departments of Mechanical Engineering and Mathematics, University of Kentucky, 2007.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** Versão digital: LTC, 2017.

MARTINS, J. R.; RIBEIRO, D. C.; PEREIRA, F. A. R.; RIBEIRO, M. P.; ROMERO, O. J. *Heat dissipation of the Electrical Submersible Pump (ESP) installed in a subsea skid.* São Mateus, Brazil: Oil & Gas Science and Technology, 2020.

MORRISON, G. L.; PIROUZPANAH, S.; GUDIGOPURAM, S. R. *Two-phase flow characterization in a split vane impeller Electrical Submersible Pump.* Mechanical Engineering Department, Texas A & M University, TX, USA, 2014.

ISHII, M.; HIBIKI, T. *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow. Second Edition.* New York: Springer, LLC 2011.

MENDONÇA, C. C.; FILHO, P. A. B. O. **Análise Numérica do Escoamento Multifásico com Transferência de Calor no Módulo de Bombeio Submerso.** Vitória: Universidade Federal do Espírito Santo, 2018.

MORAIS, J. M. **Petróleo em águas profundas: uma história tecnológica da Petrobras na exploração e produção offshore.** Brasília: Ipea: Petrobras, 2013.

MOREL, C.; *Mathematical Modeling of Disperse Two-Phase Flows. Volume 114.* Switzerland: Springer, 2015.

O'BRYAN, S. R.; TRAN, T. *Heat Transfer Performance in Electrical Submersible Pumping Systems.* The Woodlands, Texas, USA: Society of Petroleum Engineers – Gulf Coast Section Electric Submersible Pump Workshop, 2009.

OLIVEIRA, M. R.; MARTINS, M. F.; BELICH, H.; AMORIM, L. *A model for predicting two-phase flow patterns transitions in an annulus: Inclinations from horizontal to near-vertical*. Vitória, Brazil: Laboratory for Computational Transport Phenomena, Chemical Engineering Science, 2021.

RZEHAK, R.; KRIEBITZSCH, S. *Multiphase CFD-simulation of bubbly pipe flow: A code comparison*. Rossendorf, Institute of Fluid Dynamics, Dresden, Germany, 2014.

RODRIGUES, R.; SOARES, R.; MATOS, J. S.; PEREIRA, C. A. G.; RIBEIRO, G. S. *A New Approach for Subsea Boosting – Pumping Module on the Seabed*. Houston, Texas, United States: Offshore Technology Conference, 2005.

RODRIGUEZ, J. R.; FINAISH, F.; DUNN-NORMAN, S. *Parametric Study of Motor/Shroud Heat Transfer Performance in an Electrical Submersible Pump (ESP)*. Rolla, Missouri: University of Missouri-Rolla, 2000.

SALEHI, S.; KIRAN, R.; AHMED, R. *Experiments and CFD modelling for two phase flow in a vertical annulus*. Oklahoma, United States: University of Oklahoma, 2019.

SHARP, D. H. *An overview of Rayleigh-Taylor Instability*. New Mexico, United States: Theoretical Division, Los Alamos National Laboratory, 1984.

SILVA, F. N. **Bombas Alternativas Industriais: Teoria e Prática**. Rio de Janeiro: Editora Interciência: Petrobras, 2007.

STUBLJ, L.; TISELJ, I. *Numerical simulation of Rayleigh-Taylor Instability with Two-Fluid Model and interface sharpening*. Florida, United States: Reactor Engineering Division, Jozef Stefan Institute, 2008.

TAHA, T.; CUI, Z. F. *CFD modelling of slug flow in vertical tubes*. Parks Road, Oxford: Department of Engineering Science, Oxford University, 2005.

TH. FRANK, P. J. ZWART, E. KREPPER, H.M. PRASSER, D. LUCAS. *Validation of CFD models for mono and polydisperse air-water two-phase flows in pipes*. *J. Nuclear Engineering & Design*. 238. 647–659: 2008.

TOSTA DA SILVA, L. C. **Simulação numérica de poço alojador de bombeio**. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

VIANA, A. M.; MANZELA, A. A. **Avanços e Desafios em Sistemas de Bombeio Centrífugo Submerso**. Revista de Engenharias da Faculdade Salesiana: 2015.

VIEIRA, R. A. M.; PRADO, M. G. **Modeling Oscillatory Behavior of Electrical Submersible Pump Wells Under Two-Phase Flow Conditions**. *Journal of Energy Resources Technology*: 2014.

WHITE, F. M. **Viscous Fluid Flow**. Third Edition, International Edition. Singapore: McGraw-Hill Education, 2006.

YAVUZ, T.; EROL, Ö.; KAYA, M. **Heat transfer characteristics of laminar annular duct flow with viscous dissipation**. Ankara, Turkey: Department of Mechanical Engineering, Baskent University, 2011.

YIN, B. T.; LI, X. F.; LIU, G. **A mechanistic model of heat transfer for gas-liquid flow in vertical wellbore annuli**. China: China University of Petroleum, 2016.

ZHANG, H. Q.; WANG, Q.; SARICA, C.; BRILL, J. P. **Unified Model of Heat Transfer in Gas/Liquid Pipe Flow**. Houston, USA: Society of Petroleum Engineers, 2006.

ZHOU, D.; SACHDEVA, R. **Simple Model of Electric Submersible Pump in Gassy Well**. Dallas, Texas: *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010.

ZHU, J.; BANJAR H.; XIA, Z.; ZHANG, H. Q. **CFD simulation and experimental study of oil viscosity effect on multi-stage electrical submersible pump (ESP) performance**. Tulsa, United States: McDougall School of Petroleum Engineering, The University of Tulsa, 2016.

ZHU, J.; ZHANG, J.; CAO, G.; ZHAO, Q.; PENG, J.; ZHU, H.; ZHANG, H. Q. **Modelling flow pattern transitions in electrical submersible pump under gassy flow conditions**. Tulsa, United States: McDougall School of Petroleum Engineering, The University of Tulsa, 2019.

ZHU, J.; ZHU, H.; ZHANG, J.; ZHANG, H. Q. **A numerical study of flow patterns inside an electrical submersible pump (ESP) and comparison with visualization experiments**. Tulsa, United States: McDougall School of Petroleum Engineering, The University of Tulsa, 2018.

APÊNDICE A – TENSÃO CISALHANTE NAS PAREDES DE UM ANULAR VERTICAL

Para um fluido newtoniano e em regime de escoamento laminar, é possível representar de forma geral o tensor de tensão como (White, 2006):

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij}\lambda \text{div}\vec{V} \quad (\text{A.1})$$

Sendo δ_{ij} o operador delta de Kronecker e λ o coeficiente de viscosidade aparente (*bulk viscosity*). Para um fluido incompressível, as tensões atuantes em coordenadas cilíndricas são (Fox et al., 2014):

$$\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\tau_{\phi z} = \tau_{z\phi} = \mu \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\tau_{rr} = \rho_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (\text{A.5})$$

$$\tau_{\phi\phi} = \rho_{\phi\phi} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{A.6})$$

$$\tau_{zz} = \rho_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (\text{A.7})$$

A partir de um elemento infinitesimal em coordenadas cilíndricas cujo volume é expresso por $\forall = r dr d\phi dz$, conforme figura 45:

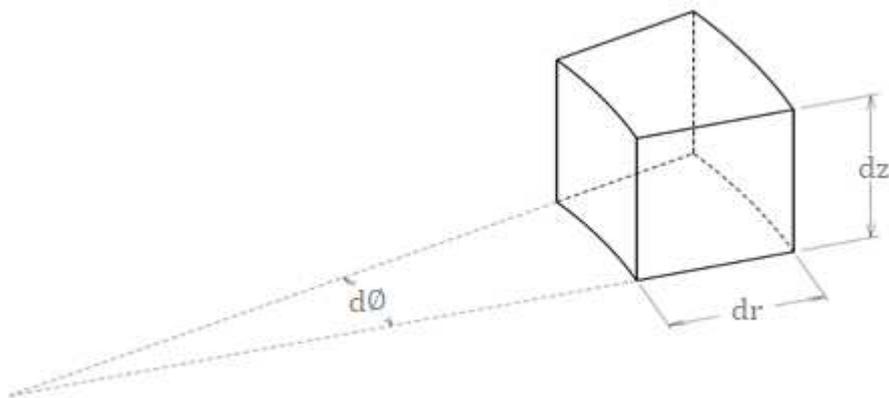


Figura 45 - Elemento de volume infinitesimal considerado para o balanço de forças na direção Z. Elaborado pelo autor.

É realizado o balanço de forças na superfície do elemento considerando o escoamento apenas na direção axial (eixo Z).

$$F_{sf} = \left[\left(\rho_{zz} + \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) r dr d\phi - \left(\rho_{zz} - \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) r dr d\phi \right] + \left[\left(\tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\phi dz - \left(\tau_{rz} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\phi dz \right] + \left[\left(\tau_{\phi z} + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{2} \right) dr dz - \left(\tau_{\phi z} - \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{2} \right) dr dz \right] \quad (\text{A.8})$$

Assim:

$$F_{sf} = \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} r d\phi dr dz + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr d\phi dz + \tau_{rz} dr d\phi dz + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} dr d\phi dz \quad (\text{A.9})$$

Reescrevendo a equação (A.9):

$$F_{sf} = \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} r d\phi dr dz + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} r dr d\phi dz + \frac{1}{r} \tau_{rz} r dr d\phi dz + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} r dr d\phi dz \quad (\text{A.10})$$

$$F_{sf} = \left(\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} \right) r dr d\phi dz \quad (\text{A.11})$$

Adicionando o termo da força de corpo, temos:

$$F_{sf} + F_{bd} = \left[\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \rho g_z \right] r dr d\phi dz \quad (\text{A.12})$$

Pela segunda lei de Newton, a quantidade de movimento linear se conserva. Portanto:

$$\rho r dr d\phi dz \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \left[\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \rho g_z \right] r dr d\phi dz \quad (\text{A.13})$$

Obtém-se, assim, a equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial \phi} + \rho g_z \quad (\text{A.14})$$

Sendo o regime permanente, escoamento apenas na direção z e plenamente desenvolvido, todo o termo à esquerda da igualdade é zerado. Também, $\tau_{\phi z} = 0$.

$$0 = \frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} + \rho g_z \quad (\text{A.15})$$

Multiplicando pelo volume:

$$-\frac{\partial \rho_{zz}}{\partial z} r dr d\phi dz = \frac{\partial (r \tau_{rz})}{\partial r} dr d\phi dz + \rho g_z r dr d\phi dz \quad (\text{A.16})$$

Pode-se, assim, reescrever a equação (A.16) em termos integrais em conjunto com as relações (A.2) a (A.7):

$$\int_{A_n} P dA_n = \int_{SC} \tau_{rz} dA_t + \int_{VC} \rho g_z dV \quad (\text{A.17})$$

Pela definição da integral e considerando os campos de pressões e tensões cisalhantes uniformes em cada superfície analisada:

$$\sum_{A_n} P A_n = \sum_{SC} \tau_{rz} A_t + \int_{VC} \rho g_z dV \quad (\text{A.18})$$

$$(P_1 - P_2) \frac{\pi}{4} (D_{ext}^2 - D_{int}^2) = (\tau_{ext} \pi D_{ext} L) + (\tau_{int} \pi D_{int} L) + \rho g \frac{\pi}{4} (D_{ext}^2 - D_{int}^2) L \quad (\text{A.19})$$

$$\tau_{ext} D_{ext} + \tau_{int} D_{int} = \left(\frac{D_{ext}^2 - D_{int}^2}{4} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (\text{A.20})$$

Caso seja admitido que em um certo diâmetro $D_{m\acute{a}x}$, a derivada parcial da velocidade axial na direção radial é $\frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$, é concluído que $\tau = 0$. Dessa maneira a equação (A.20) é resolvida para τ_{ext} e τ_{int} :

$$\tau_{ext} D_{ext} = \left(\frac{D_{ext}^2 - D_{m\acute{a}x}^2}{4} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \therefore \tau_{ext} = \left(\frac{D_{ext}^2 - D_{m\acute{a}x}^2}{4 D_{ext}} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\tau_{int} D_{int} = \left(\frac{D_{m\acute{a}x}^2 - D_{int}^2}{4} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \therefore \tau_{int} = \left(\frac{D_{m\acute{a}x}^2 - D_{int}^2}{4 D_{int}} \right) \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (\text{A.22})$$

Utilizando-se da equação de Navier-Stokes no eixo Z:

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \quad (\text{A.23})$$

Novamente, todo termo à esquerda da igualdade é zero. Assim como os dois últimos termos à direita. Assim:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{r}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) \quad (\text{A.24})$$

Integrando:

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + c_1 \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + \frac{c_1}{r} \quad (\text{A.26})$$

Onde c_1 é uma constante de integração. Ao realizar mais uma integração:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + c_1 \ln|r| + c_2 \quad (\text{A.27})$$

Para obtenção das constantes de integração c_1 e c_2 , são impostas as condições de contorno $v_z(R_{ext}) = 0$ e $v_z(R_{int}) = 0$. Logo:

$$\begin{cases} 0 = \frac{R_{ext}^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + c_1 \ln(R_{ext}) + c_2 \\ 0 = \frac{R_{int}^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + c_1 \ln(R_{int}) + c_2 \end{cases}$$

$$c_1 = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \quad (\text{A.28})$$

Substituindo c_1 em uma das duas equações formada pelo sistema e solucionando para c_2 :

$$c_2 = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln(R_{ext}) + R_{ext}^2 \right] \quad (\text{A.29})$$

É exposto, assim, o perfil de velocidade de um escoamento anular vertical, laminar, permanente e newtoniano:

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g_z \right) + \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln|r| + \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln(R_{ext}) + R_{ext}^2 \right] \quad (\text{A.30})$$

$$v_z(r) = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r^2 \right] \quad (\text{A.31})$$

Em termos do diâmetro:

$$v_z(D) = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{16\mu} \right) \left[(D_{ext}^2 - D_{int}^2) \frac{\ln\left(\frac{D_{ext}}{D}\right)}{\ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)} + D_{ext}^2 - r^2 \right] \quad (\text{A.32})$$

Dado que $R_{m\acute{a}x}$ (ou $D_{m\acute{a}x}$) ocorre no ponto onde $\tau = 0$:

$$\frac{\partial v_z(r)}{\partial r} = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{r} - 2r \right] \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial v_z(R_{m\acute{a}x})}{\partial r} = \left(\frac{\rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{R_{m\acute{a}x}} - 2R_{m\acute{a}x} \right] = 0 \quad (\text{A.34})$$

$$R_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)}} \quad (\text{A.35})$$

$$D_{m\acute{a}x} = \sqrt{\frac{1(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{2 \ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)}} \quad (\text{A.36})$$

Dessa maneira, substitui-se (A.36) em (A.21) e (A.22) para solucionar τ_{ext} e τ_{int} :

$$\tau_{ext} = \left[\frac{D_{ext}}{4} - \frac{(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{8D_{ext} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)} \right] \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (\text{A.37})$$

$$\tau_{int} = \left[\frac{(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{8D_{int} \ln\left(\frac{D_{ext}}{D_{int}}\right)} - \frac{D_{int}}{4} \right] \left(\frac{\Delta P}{L} - \rho g \right) \quad (\text{A.38})$$

Para um escoamento viscoso em uma linha de corrente em regime permanente:

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \zeta_{IT} \quad (\text{A.39})$$

Onde ζ_{IT} é a soma das perdas maiores com as perdas menores (localizadas). Sendo $V_1 = V_2$:

$$\frac{\Delta P}{\rho} = g z_2 + \zeta_{IT} \quad (\text{A.40})$$

Para um escoamento anular, o fator de atrito f_a pode ser estimado pela seguinte expressão (Bennett & Hohmann, 2016):

$$f_a = \left(1 + 0,0925 \frac{D_{int}}{D_{ext}} \right) f \quad (\text{A.41})$$

Onde f é o fator de atrito, sendo este tratado para o diâmetro hidráulico e obtido via correlações expostas pela literatura, como por exemplo Churchill (1977), Colebrook (1938) ou Haaland (1983). Dado que o problema a ser estudado via CFD é um escoamento multifásico, tratado pelo modelo Euleariano de dois fluidos, é admitido que na superfície sólida o fluido será líquido ou gás, e não uma mistura. Dessa maneira, para cada fase, é possível estimar tanto τ_{ext} quanto τ_{int} e obter a distância da primeira camada da malha em relação às paredes (interna e externa do anular analisado) pelas expressões (40) e (41). Ao adotar o valor de $y^+ = 1$, busca-se assegurar que a malha englobará os efeitos presentes na subcamada viscosa a fim de se obter um correto perfil de temperatura e velocidade na solução numérica. Ainda, caso necessário, pode-se utilizar das expressões da tensão cisalhante na parede para correlacionar a tensão cisalhante interfacial.

APÊNDICE B – O MODELO DE DOIS FLUIDOS

B.1 Demonstração da equação geral de balanço para qualquer propriedade extensiva

Por Ishii & Hibiki (2011) temos que a equação geral de balanço na forma integral é dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_{VC}} \rho_k \psi_k d\forall = - \oint_{A_{SC}} \vec{n}_k \cdot J_k dA + \int_{\forall_{VC}} \rho_k \phi_k d\forall \quad (B.1)$$

Onde \forall_{VC} é o volume do volume de controle, A_{VC} é a área do sistema de controle, ψ_k é uma variável escalar ou vetorial, J_k o efluxo e ϕ_k o termo fonte.

Para um volume fixo com duas fases, sendo A_I a área de interface entre elas, utilizando-se de um referencial Euleriano:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\frac{d}{dt} \int_{\forall_k} \rho_k \psi_k d\forall \right) = \sum_{k=1}^2 \left(- \oint_{A_k} \vec{n}_k \cdot J_k dA + \int_{\forall_k} \rho_k \phi_k d\forall \right) + \int_{A_I} \phi_I dA \quad (B.2)$$

Porém, o Teorema de Leibniz diz que (apud Enwald et. al. 1997):

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_k(t)} F(r, t) d\forall = \int_{\forall_k(t)} \frac{\partial F}{\partial t} d\forall + \int_{A_k(t)} F(V_t \cdot \vec{n}_k) dA \quad (B.3)$$

Ao aplicar o Teorema de Leibniz exposto em (B.3) no primeiro termo da equação (B.2):

$$\frac{d}{dt} \int_{\forall_k} \rho_k \psi_k d\forall = \int_{\forall_k} \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} d\forall + \int_{A_k} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_I \cdot \vec{n}_k dA \quad (B.4)$$

Substitui-se na equação (B.2) o obtido na equação (B.4):

$$\sum_{k=1}^2 \left(\int_{\forall_k} \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} d\forall + \int_{A_k} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_I \cdot \vec{n}_k dA \right) = \sum_{k=1}^2 \left(- \oint_{A_k} \vec{n}_k \cdot J_k dA + \int_{\forall_k} \rho_k \phi_k d\forall \right) + \int_{A_I} \phi_I dA \quad (B.5)$$

Sendo os Teoremas de Gauss como exposto a seguir (apud Enwald et. al. 1997):

$$\text{Para uma função escalar: } \int_{\forall} \nabla F d\forall = \int_A F \vec{n} dA \quad (B.6)$$

$$\text{Para uma função vetorial: } \int_{\forall} \nabla \cdot F d\forall = \int_A F \cdot \vec{n} dA \quad (B.7)$$

$$\text{Para uma função tensorial: } \int_{\forall} \nabla \cdot \bar{F} d\forall = \int_A \bar{F} \cdot \vec{n} dA \quad (B.8)$$

Faz-se necessário substituir as variáveis de interesse no Teorema de Gauss, relação (B.7):

$$\int_{\forall_k} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) d\forall = \int_{A_k} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA \quad (B.9)$$

E ainda:

$$\int_{V_k} \nabla \cdot J_k dV = \int_{A_k} J_k \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} J_k \cdot \vec{n}_k dA \quad (\text{B.10})$$

Assim, ao utilizar as relações expostas em (B.9) e (B.10), a equação (B.5) é reescrita como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[\int_{V_k} \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} dV + \int_{V_k} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) dV - \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_I \cdot \vec{n}_k dA \right] = \\ \sum_{k=1}^2 \left[- \left(\int_{V_k} \nabla \cdot J_k dV - \int_{A_I} J_k \cdot \vec{n}_k dA \right) + \int_{V_k} \rho_k \phi_k dV \right] + \int_{A_I} \phi_I dA \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \left[\int_{V_k} \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} dV + \int_{V_k} \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) dV + \int_{V_k} \nabla \cdot J_k dV - \int_{V_k} \rho_k \phi_k dV \right] = \\ \sum_{k=1}^2 \left(\int_{A_I} \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k dA - \int_{A_I} \rho_k \psi_k V_I \cdot \vec{n}_k dA + \int_{A_I} J_k \cdot \vec{n}_k dA \right) + \int_{A_I} \phi_I dA \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

A equação (B.12) pode ser reorganizada:

$$\sum_{k=1}^2 \int_{V_k} \left[\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot J_k - \rho_k \phi_k \right] dV = \int_{A_I} [\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) + \phi_I] dA \quad (\text{B.13})$$

$$\text{Onde } \dot{m}_k = \rho_k (V_k - V_I) \cdot \vec{n}_k$$

Desse modo, pela equação (B.13), atesta-se que a equação instantânea local geral é dada por:

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot J_k - \rho_k \phi_k = 0 \quad (\text{B.14})$$

E a equação instantânea local geral de condições de transporte (*jump conditions*) é:

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) = -\phi_I \quad (\text{B.15})$$

Dada as obtenções das equações (B.14) e (B.15), é possível aplicar essas especificamente para a propriedade de interesse. A seguir serão demonstradas as equações de conservação para a massa, quantidade movimento linear e energia.

B.2 Conservação da massa

Sendo a propriedade de interesse a massa, têm-se que:

$$\psi_k = 1, J_k = 0 \text{ e } \phi_k = 0. \text{ Logo:}$$

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k V_k = 0 \quad (\text{B.16})$$

De modo que se torna evidente a equação da continuidade.

Segundo Morel (2015), para a conservação da massa:

$$-\phi_I = \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \quad (\text{B.17})$$

Então a condição de transferência de massa interfacial é:

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \quad (\text{B.18})$$

Sendo ∇_s o gradiente de superfície da interface e $\frac{D_I}{Dt}$ a derivada material cuja definição e demonstração serão dados à frente.

Todavia, na maior parte das aplicações é possível considerar nula as propriedades materiais da interface. Assim:

$$\sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = 0 \quad (\text{B.19})$$

A equação (B.19) é a *jump condition* de massa na interface.

B.3 Conservação da quantidade de movimento linear

Sendo a propriedade de interesse a quantidade de movimento linear, têm-se:

$\psi_k = V_k$, $J_k = -\bar{T}_k$, e $\phi_k = g$. Logo:

$$\frac{\partial \rho_k V_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k V_k) - \nabla \cdot \bar{T}_k - \rho_k g = 0 \quad (\text{B.20})$$

Caso seja adotado $-\bar{T}_k = P_k I - \tau_k$, onde P_k é a pressão, I o tensor unitário e τ_k a tensão viscosa, a equação (B.20) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \rho_k V_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k V_k) = -\nabla P_k + \nabla \cdot \tau_k + \rho_k g \quad (\text{B.21})$$

Segundo Morel (2015), para a conservação da quantidade de movimento linear:

$$-\phi_I = \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \quad (\text{B.22})$$

O subíndice I representa a interface.

Então a condição de transferência de momento interfacial é:

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) = \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \quad (\text{B.23})$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k + P_k I \cdot \vec{n}_k - \tau_k \cdot \vec{n}_k) = \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \quad (\text{B.24})$$

Sendo σ o coeficiente de tensão da superfície e \vec{n} o vetor unitário normal à interface.

Assim, $\nabla_s \sigma$ é o vetor de tensão tangencial causada pela variação do coeficiente de tensão ao longo da interface. Segundo Morel (2015) esse fenômeno recebe o nome de efeito Marangoni.

Já o termo $\sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n}$ pode ser interpretado como o vetor de intensidade σ normal à superfície que causa a tendência dessa interface se mover para “dentro” ou para “fora”.

Em conformidade com o já exposto, para a maioria das aplicações, é válida a simplificação de desconsiderar as propriedades materiais da superfície. Assim, também é considerado $\sigma = 0$.

Dessa forma:

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) = 0 \quad (\text{B.25})$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k V_k + P_k I \cdot \vec{n}_k - \tau_k \cdot \vec{n}_k) = 0 \quad (\text{B.26})$$

A equação (B.26) é a *jump condition* de movimento na interface.

B.4 Conservação da energia

Sendo a propriedade de interesse a energia, têm-se:

$$\psi_k = e_k + \frac{V_k^2}{2}, J_k = q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k \text{ e } \phi_k = g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k}.$$

Sendo e_k a energia interna, q''_k a taxa de calor e \dot{q}_k a geração de calor. Então:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] + \nabla \cdot (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) - \rho_k \left(g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\bar{T}_k \cdot V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (\text{B.28})$$

Define-se $e_k + \frac{V_k^2}{2} = E_k$, logo:

$$\frac{\partial \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k E_k) = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\bar{T}_k \cdot V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (\text{B.29})$$

Segundo Morel (2015), para a conservação da energia:

$$-\phi_I = \left\{ \frac{D_I}{Dt} \left[\rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right\} \quad (\text{B.30})$$

Então a condição de transferência de energia interfacial é:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\dot{m}_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) + (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k \right] = \left\{ \frac{D_I}{Dt} \left[\rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q''_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right\} \quad (\text{B.31})$$

Onde $V_{I,t}$ é a velocidade tangencial da interface.

Assim sendo, $\nabla_s \cdot q''_I$ significa a tendência de a superfície expandir ou contrair devido ao fluxo de calor e $\nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t})$ a mesma tendência, porém devido à velocidade de deslizamento da interface em conjunto com sua tensão superficial. Esses termos deixam claro que a energia pode ser armazenada ou liberada a partir da interface (Ishii & Hibiki, 2011).

Ao realizar a mesma simplificação de desconsiderar as propriedades materiais da superfície, é obtido:

$$\sum_{k=1}^2 \left[\dot{m}_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) - (\bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k + q''_k \cdot \vec{n}_k \right] = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$\sum_{k=1}^2 [\dot{m}_k E_k - (\bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k + q''_k \cdot \vec{n}_k] = 0 \quad (\text{B.33})$$

A equação (B.33) é a *jump condition* de energia na interface.

Dessa forma, as equações gerais (B.16) e (B.19), (B.21) e (B.26), (B.28) e (B.33), regem respectivamente: (i) o comportamento em relação à massa; (ii) o movimento linear; (iii) a energia de um fluido multifásico; e suas respectivas condições de interface. Nota-se que caso seja requerido descrever o comportamento de um fluido monofásico, é adotado apenas $\sum_{k=1}^1$.

B.5 Transformação na derivada material

Sendo a equação da continuidade dada por:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \rho_k V_k = 0 \quad (\text{B.34})$$

Ao multiplicar por ψ_k :

$$\psi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \psi_k \nabla \cdot \rho_k V_k = 0 \quad (\text{B.35})$$

A partir das propriedades de derivação, é possível descrever:

- Para o primeiro termo:

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} = \rho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \psi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} \therefore \psi_k \frac{\partial \rho_k}{\partial t} = \frac{\partial (\rho_k \psi_k)}{\partial t} - \rho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \quad (\text{B.36})$$

- Para o segundo termo:

$$\nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) = \psi_k \nabla \cdot \rho_k V_k + \rho_k V_k \cdot \nabla \psi_k \therefore \psi_k \nabla \cdot \rho_k V_k = \nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) - \rho_k V_k \cdot \nabla \psi_k \quad (\text{B.37})$$

Portanto, a equação (B.35) é reescrita como:

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) = \rho_k \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + \rho_k V_k \cdot \nabla \psi_k \quad (\text{B.38})$$

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) = \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \equiv \rho_k \frac{D_k \psi_k}{D t} \quad (\text{B.39})$$

A definição dada em (B.39) é denominada de equação da derivada material.

B.6 Equações de energia

Ainda tratando da equação da energia, é interessante desenvolver outras formas para representação. Em inúmeros problemas de engenharia há a distinção da energia mecânica e energia térmica. Dessa forma, é possível desmembrar a equação de energia total já exposta (B.29) em duas expressões de conservação de energia distintas: cinética e térmica.

Dada a equação de quantidade de movimento linear (B.21):

$$\frac{\partial \rho_k V_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k V_k) = -\nabla P_k + \nabla \cdot \tau_k + \rho_k g$$

Utilizando-se da relação obtida pela derivada material (B.39):

$$\rho_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right) = -\nabla P_k + \nabla \cdot \tau_k + \rho_k g \quad (\text{B.40})$$

É feito o produto escalar da equação acima pela velocidade V_k :

$$\rho_k \left(\frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right) \cdot V_k = (-\nabla P_k + \nabla \cdot \tau_k + \rho_k g) \cdot V_k \quad (\text{B.41})$$

$$\rho_k \left[\frac{\partial V_k}{\partial t} \cdot V_k + (V_k \cdot \nabla V_k) \cdot V_k \right] = (-\nabla P_k) \cdot V_k + (\nabla \cdot \tau_k) \cdot V_k + (\rho_k g) \cdot V_k \quad (\text{B.42})$$

Para o primeiro termo à esquerda da igualdade:

$$\frac{\partial (V_k \cdot V_k)}{\partial t} = V_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial t} = 2V_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial t} \therefore V_k \cdot \frac{\partial V_k}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (V_k \cdot V_k)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_k^2}{2} \right) \quad (\text{B.43})$$

Para o segundo termo à esquerda da igualdade:

$$\begin{aligned}\nabla(V_k \cdot V_k) &= (V_k \cdot \nabla)V_k + (V_k \cdot \nabla)V_k + V_k \times (\nabla \times V_k) + V_k \times (\nabla \times V_k) \\ &= 2[(V_k \cdot \nabla)V_k + V_k \times (\nabla \times V_k)] \therefore \frac{1}{2}\nabla(V_k \cdot V_k) = (V_k \cdot \nabla)V_k + V_k \times (\nabla \times V_k)\end{aligned}\quad (\text{B.44})$$

Então é obtido:

$$\nabla \frac{V_k^2}{2} = (V_k \cdot \nabla)V_k + V_k \times (\nabla \times V_k) \therefore (V_k \cdot \nabla)V_k = \nabla \frac{V_k^2}{2} - V_k \times (\nabla \times V_k) \quad (\text{B.45})$$

Sendo $(V_k \cdot \nabla)V_k = V_k \cdot (\nabla V_k)$.

Tomando $[(V_k \cdot \nabla)V_k] \cdot V_k$:

$$\begin{aligned}[(V_k \cdot \nabla)V_k] \cdot V_k &= \left[\nabla \frac{V_k^2}{2} - V_k \times (\nabla \times V_k) \right] \cdot V_k \\ &= V_k \cdot \nabla \frac{V_k^2}{2} - V_k \cdot V_k \times (\nabla \times V_k) = V_k \cdot \nabla \frac{V_k^2}{2}\end{aligned}\quad (\text{B.46})$$

Pois $V_k \cdot V_k \times (\nabla \times V_k) = 0$.

Para o primeiro termo à direita da igualdade:

$$\nabla \cdot (P_k V_k) = P_k (\nabla \cdot V_k) + V_k \cdot (\nabla P_k) \therefore (\nabla P_k) \cdot V_k = \nabla \cdot (P_k V_k) - P_k (\nabla \cdot V_k) \quad (\text{B.47})$$

Para o segundo termo à direita da igualdade:

$$\nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) = \tau_k : (\nabla V_k) + V_k \cdot (\nabla \cdot \tau_k) \therefore (\nabla \cdot \tau_k) \cdot V_k = \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \tau_k : (\nabla V_k) \quad (\text{B.48})$$

Então a equação (B.42) é reescrita como:

$$\rho_k \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V_k^2}{2} \right) + V_k \cdot \nabla \frac{V_k^2}{2} \right] = -\nabla \cdot (P_k V_k) + P_k (\nabla \cdot V_k) + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \tau_k : (\nabla V_k) + \rho_k V_k \cdot g \quad (\text{B.49})$$

$$\rho_k \frac{D}{Dt} \left(\frac{V_k^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (P_k V_k) + P_k (\nabla \cdot V_k) + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \tau_k : (\nabla V_k) + \rho_k V_k \cdot g \quad (\text{B.50})$$

A equação acima é denominada de equação da energia cinética.

Ao utilizar a relação e definição dada em (B.39) para a derivada material:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_k \frac{V_k^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho_k \frac{V_k^2}{2} V_k \right) = -\nabla \cdot (P_k V_k) + P_k (\nabla \cdot V_k) + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \tau_k : (\nabla V_k) + \rho_k V_k \cdot g \quad (\text{B.51})$$

Como demonstrado, a equação da energia total (B.28) é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\bar{T}_k \cdot V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k$$

Uma vez que $-\bar{T}_k = P_k I - \tau_k$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot [(\tau_k - P_k I) \cdot V_k] + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (\text{B.52})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k - P_k V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (\text{B.53})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k + \nabla \cdot (\tau_k \cdot V_k) - \nabla \cdot (P_k V_k) + \rho_k g_k \cdot V_k + \dot{q}_k \quad (\text{B.54})$$

Subtraindo-se a equação de energia total (B.54) pela equação de energia cinética (B.51), é obtido:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k e_k) + \nabla \cdot (\rho_k e_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k - P_k (\nabla \cdot V_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.55})$$

A equação acima é denominada de equação da energia interna. Os termos $P_k (\nabla \cdot V_k)$ e $\tau_k : (\nabla V_k)$ representam a troca entre energia interna e energia cinética, sendo o primeiro em virtude da compressibilidade e o segundo por conta da viscosidade (Morel, 2015).

Ainda, define-se a entalpia como:

$$h_k \equiv e_k + \frac{P_k}{\rho_k} \therefore e_k = h_k - \frac{P_k}{\rho_k} \quad (\text{B.56})$$

Dessa maneira:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(h_k - \frac{P_k}{\rho_k} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_k \left(h_k - \frac{P_k}{\rho_k} \right) V_k \right] = -\nabla \cdot q''_k - P_k (\nabla \cdot V_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.57})$$

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} - \frac{\partial P_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k V_k) - \nabla \cdot (P_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k - P_k (\nabla \cdot V_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.58})$$

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k + \frac{\partial P_k}{\partial t} + \nabla \cdot (P_k V_k) - P_k (\nabla \cdot V_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.59})$$

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k + \frac{\partial P_k}{\partial t} + V_k \cdot (\nabla P_k) + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.60})$$

$$\frac{\partial \rho_k h_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k h_k V_k) = -\nabla \cdot q''_k + \frac{D_k P_k}{Dt} + \tau_k : (\nabla V_k) + \dot{q}_k \quad (\text{B.61})$$

A equação acima é denominada de equação da entalpia.

B.7 Segunda Lei da Termodinâmica: A inequação da entropia

A partir da equação (B.14) e pelas propriedades:

$\psi_k = s_k$, $J_k = \frac{q''_k}{\theta_k}$ e $\phi_k = \frac{1}{\rho_k} \left(\Delta_k + \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)$, é alcançado:

$$\frac{\partial \rho_k s_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k s_k V_k) + \nabla \cdot \left(\frac{q''_k}{\theta_k} \right) - \Delta_k - \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} = 0 \quad (\text{B.62})$$

$$\frac{\partial \rho_k s_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k s_k V_k) + \nabla \cdot \left(\frac{q''_k}{\theta_k} \right) - \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} = \Delta_k \geq 0 \quad (\text{B.63})$$

Onde s_k é a entropia por unidade de massa (entropia específica), θ_k a temperatura e Δ_k a taxa de geração de entropia por unidade de volume, todos da fase k .

Segundo Morel (2015):

$$-\phi_I = \frac{D_I \rho_I s_I}{Dt} + \rho_I s_I \nabla_s \cdot V_I - \nabla_s \cdot \left(\frac{q''_I}{\theta_I} \right) - \Delta_I \quad (\text{B.64})$$

Então para a condição de transferência interfacial de entropia:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k s_k + \frac{q''_I}{\theta_I} \cdot \vec{n}_k \right) = \frac{D_I \rho_I s_I}{Dt} + \rho_I s_I \nabla_s \cdot V_I - \nabla_s \cdot \left(\frac{q''_I}{\theta_I} \right) - \Delta_I \quad (\text{B.65})$$

$$\frac{D_I \rho_I s_I}{Dt} + \rho_I s_I \nabla_s \cdot V_I - \nabla_s \cdot \left(\frac{q''_I}{\theta_I} \right) - \sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k s_k + \frac{q''_I}{\theta_I} \cdot \vec{n}_k \right) = \Delta_I \geq 0 \quad (\text{B.66})$$

Ao assumir que não há geração de entropia na interface e desconsiderar as propriedades materiais dela, é obtida a equação de *jump conditions* da entropia:

$$\sum_{k=1}^2 \left(\dot{m}_k s_k + \frac{q''_I}{\theta_I} \cdot \vec{n}_k \right) = 0 \quad (\text{B.67})$$

B.8 Equações médias de balanço: Análise macroscópica

Seja $F(x, t) = 0$ uma função ou equação geométrica que define a posição da interface do escoamento a cada tempo t .

Também, seja X_k a função de estado da densidade da fase k – na maior parte das vezes chamada de função indicadora de fase.

X_k possui a seguinte definição:

- $X_k(x, t) = 1$ e $X_s(x, t) = 0$ se o ponto ocupar a fase k ;
- $X_k(x, t) = 0$ e $X_s(x, t) = 1$ se o ponto ocupar a interface.

É possível definir a média da função indicadora de fase como:

$$\varphi_k \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta t} X_k(x, t) dt \quad (\text{B.68})$$

Então:

$$\varphi_k = \frac{\Delta t_k}{\Delta t} \text{ e } \varphi_k = \langle X_k \rangle, \text{ sendo } \sum_{k=1}^2 \varphi_k = 1.$$

O vetor normal unitário e direcionado para fora da interface com $k = 1, 2$ é dado por:

$$\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (\text{B.69})$$

Sendo V_I a velocidade da interface e como F é zero nos pontos de interface, têm-se (Morel, 2015):

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_I \cdot \nabla F = 0 \quad (\text{B.70})$$

A equação acima é chamada de derivada convectiva ou material de F , como já demonstrado.

Dessa forma:

$$\vec{n}_2 |\nabla F| = -\vec{n}_1 |\nabla F| = \nabla F \quad (\text{B.71})$$

E a velocidade normal de deslocamento da interface é:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_I \cdot \vec{n}_2 |\nabla F| = \frac{\partial F}{\partial t} - V_I \cdot \vec{n}_1 |\nabla F| = 0 \quad \therefore V_I \cdot \vec{n}_2 = -V_I \cdot \vec{n}_1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad (\text{B.72})$$

Segundo Morel (2015), as derivadas espaciais e temporais de X_k podem ser calculadas como:

$$\nabla X_1 = -\nabla X_2 = \delta(F) \nabla F \quad (\text{B.73})$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = -\frac{\partial X_2}{\partial t} = \delta(F) \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{B.74})$$

Onde $\delta(a)$ é a função delta de *Dirac*, que possui a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(a - b) \cdot g(a)] da = g(b)$$

Em particular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(a) da = 1$$

O que mostra que $\delta(a)$ pode ser interpretado como uma densidade.

Assim, é definido:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + V_I \cdot \nabla X_k = 0 \quad (\text{B.75})$$

Pelas equações (B.69) e (B.73), fazemos para $k = 1$:

$$\nabla F = -\vec{n}_1 |\nabla F| \quad (\text{B.76})$$

$$\nabla X_1 = \delta(F) \nabla F \quad (\text{B.77})$$

Para $k = 2$:

$$\nabla F = \vec{n}_2 |\nabla F| \quad (\text{B.78})$$

$$\nabla X_2 = -\delta(F) \nabla F \quad (\text{B.79})$$

Então, é possível realizar:

$$\nabla X_k = \delta(F) \nabla F \quad (\text{B.80})$$

$$\nabla X_k \cdot \vec{n}_k = \vec{n}_k \cdot \delta(F) \nabla F \quad (\text{B.81})$$

$$\nabla X_k \cdot \vec{n}_k = \vec{n}_k \cdot [-\vec{n}_k |\nabla F| \delta(F)] \quad (\text{B.82})$$

$$\nabla X_k \cdot \vec{n}_k = -|\nabla F| \delta(F) \quad (\text{B.83})$$

Como também:

$$\vec{n}_k (\nabla X_k \cdot \vec{n}_k) = -\vec{n}_k |\nabla F| \delta(F) \quad (\text{B.84})$$

$$\nabla X_k = -\vec{n}_k |\nabla F| \delta(F) \quad (\text{B.85})$$

$$\nabla X_k = -\vec{n}_k \delta_I \quad (\text{B.86})$$

Neste ponto, é obtido:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} = V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I \quad (\text{B.87})$$

Onde δ_I é uma função que possui ambas as interfaces, chamada de concentração de área interfacial instantânea local.

Para alcançar à formulação do modelo de dois fluidos, deve-se multiplicar a equação instantânea local geral (B.14) pela função de estado da densidade da fase k , como segue:

$$X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + X_k \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) + X_k \nabla \cdot J_k - X_k \rho_k \phi_k = 0 \quad (\text{B.88})$$

No entanto, as seguintes relações podem ser asseguradas baseadas nas propriedades de derivação:

- Para o primeiro termo:

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} = (\rho_k \psi_k) \frac{\partial X_k}{\partial t} + X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} = (\rho_k \psi_k) V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I + X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} \quad (\text{B.89})$$

$$X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} = \frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} - (\rho_k \psi_k) V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I \quad (\text{B.90})$$

- Para o segundo termo:

$$\nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) = (\nabla X_k) \cdot \rho_k \psi_k V_k + X_k (\nabla \cdot \rho_k \psi_k V_k) = (-\vec{n}_k \delta_I) \cdot \rho_k \psi_k V_k + X_k (\nabla \cdot \rho_k \psi_k V_k) \quad (\text{B.91})$$

$$X_k \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) = \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \vec{n}_k \delta_I \cdot \rho_k \psi_k V_k \quad (\text{B.92})$$

- Para o terceiro termo:

$$\nabla \cdot (X_k J_k) = (\nabla X_k) \cdot J_k + X_k (\nabla \cdot J_k) = -\vec{n}_k \delta_I \cdot J_k + X_k \nabla \cdot J_k \quad (\text{B.93})$$

$$X_k \nabla \cdot (J_k) = \nabla \cdot (X_k J_k) + \vec{n}_k \delta_I \cdot J_k \quad (\text{B.94})$$

Substituem-se as equações (B.90), (B.92) e (B.94) na equação principal (B.88):

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} - (\rho_k \psi_k) V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \vec{n}_k \delta_I \cdot \rho_k \psi_k V_k + \nabla \cdot (X_k J_k) + \vec{n}_k \delta_I \cdot J_k - X_k \rho_k \phi_k = 0 \quad (\text{B.95})$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot (X_k J_k) - X_k \rho_k \phi_k = \rho_k \psi_k V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I - \rho_k \psi_k V_k \cdot \vec{n}_k \delta_I - J_k \cdot \vec{n}_k \delta_I \quad (\text{B.96})$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot (X_k J_k) - X_k \rho_k \phi_k = \rho_k (V_I - V_k) \psi_k \cdot \vec{n}_k \delta_I - J_k \cdot \vec{n}_k \delta_I \quad (\text{B.97})$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot (X_k J_k) - X_k \rho_k \phi_k = -(\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \delta_I \quad (\text{B.98})$$

Onde \dot{m}_k já foi anteriormente definido.

Enwald et al. (1997), traz que δ_I pode ser expresso como:

$$\frac{\partial X_k}{\partial n} = -\delta_I \quad (\text{B.99})$$

Sendo $\frac{\partial X_k}{\partial n}$ o gradiente da função indicadora de fase.

Assim:

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \nabla \cdot (X_k J_k) - X_k \rho_k \phi_k = (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \quad (\text{B.100})$$

Para a equação de *jump conditions* (B.15), têm-se:

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \delta_I = -\phi_I \delta_I \quad (\text{B.101})$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k \delta_I + J_k \cdot \vec{n}_k \delta_I) = -\phi_I \delta_I \quad (\text{B.102})$$

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k \delta_I - J_k \cdot \nabla X_k) = -\phi_I \delta_I \quad (\text{B.103})$$

Ou apenas:

$$\sum_{k=1}^2 (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} = -\phi_I \frac{\partial X_k}{\partial n} \quad (\text{B.104})$$

Portanto, a equação instantânea local pode ser expressa em termos médios como:

$$\left\langle \frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) \rangle + \langle \nabla \cdot X_k J_k \rangle - \langle X_k \rho_k \phi_k \rangle = \left\langle (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.105})$$

E a equação de “*jump conditions*”:

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle -\phi_I \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.106})$$

Segundo Ishii (1975), o operador de média pelo tempo pode ser expresso por:

$$\langle F \rangle_t(a, t_o) \equiv \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t_o+t} F(a, t) dt \quad (\text{B.107})$$

Já Tennekes e Lumley (1987) definem o operador como:

$$\langle F \rangle_t(a, t_o) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{t_o}^{t_o+t} F(a, t) dt \quad (\text{B.108})$$

Como consequência, o $\langle F \rangle_t$ obtido não depende do tempo e a medição se torna estável:

$$\frac{\partial \langle F \rangle}{\partial t_o} = 0 \quad (\text{B.109})$$

A definição por Tennekes e Lumley é apropriada para situações típicas de laboratório onde as medições são feitas em regiões fixas em um escoamento estatisticamente estável, mas por muitas vezes não homogêneo (Morel, 2015).

Com o escoamento não-homogêneo, a média pelo tempo depende da posição e consequentemente uma média espacial é inapropriada.

A hipótese de Ergodicidade consiste em assumir que um operador de média pelo conjunto pode ser substituído por um operador de média pelo tempo em escoamentos estatisticamente estáveis.

A definição por Ishii oferece o mesmo resultado da definição de Tennekes e Lumley para tempos t maiores que a maior escala de tempo presente no escoamento.

Dalhaye & Achard (1976, 1977) estudaram em quais condições a definição de Ishii poderia ser aplicada em escoamentos estatisticamente instáveis. Isto ocorre quando em escoamentos transientes o tempo t é grande comparado às flutuações, mas pequeno a ponto de captar o sinal necessário. Tal fato ocorre apenas quando o sinal e o ruído estão claramente separados no domínio da frequência.

Seja um sinal que ocupa uma faixa de frequência $[0, w_1]$ e o ruído uma faixa $[w_2, \infty]$, a condição a ser satisfeita é:

$$\frac{w_2}{w_1} \gg 1$$

Assim, a hipótese de Ergodicidade é válida e pode-se utilizar as seguintes relações, conhecidas como regras de Reynolds:

- I. $\langle F_1 + F_2 \rangle = \langle f \rangle + \langle F_2 \rangle$
- II. $\langle \langle F_1 \rangle F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle$
- III. $\langle C \rangle = C$, sendo C uma constante.

- IV. $\left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial t}$
 V. $\langle \nabla F \rangle = \nabla \langle F \rangle$
 VI. $\langle \nabla \cdot F \rangle = \nabla \cdot \langle F \rangle$
 VII. $\langle \langle F \rangle \rangle = \langle F \rangle$
 VIII. $\langle F' \rangle = 0$, sendo $F = \langle F \rangle + F'$

Por meio dos itens II e VII, obtém-se as seguintes relações:

$$\langle \langle F_1 - F_1' \rangle F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle \quad (\text{B.110})$$

$$\langle F_1 F_2 - F_1' F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle \quad (\text{B.111})$$

$$\langle F_1 F_2 \rangle - \langle F_1' F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle \therefore \langle F_1 F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle + \langle F_1' F_2 \rangle \quad (\text{B.112})$$

$$\langle F_1 F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle + \langle F_1' (\langle F_2 \rangle + F_2') \rangle \quad (\text{B.113})$$

$$\langle F_1 F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle g \rangle + \langle F_1' \langle F_2 \rangle + F_1' F_2' \rangle \quad (\text{B.114})$$

$$\langle F_1 F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle + \langle F_1' \rangle \langle F_2 \rangle + \langle F_1' F_2' \rangle \quad (\text{B.115})$$

Dessa forma:

$$\langle F_1 F_2 \rangle = \langle F_1 \rangle \langle F_2 \rangle + \langle F_1' F_2' \rangle \quad (\text{B.116})$$

A relação exposta na equação (B.116) pode ser utilizada nas demonstrações das equações médias de conservação. Porém, tal estudo será feito analiticamente.

Utilizando das regras de Reynolds, a equação (B.105) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k \psi_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \psi_k V_k \rangle + \nabla \cdot \langle X_k J_k \rangle - \langle X_k \rho_k \phi_k \rangle = \left\langle (\dot{m}_k \psi_k + J_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.117})$$

B.10 Transporte de massa

Equação média instantânea local:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k \rangle = \left\langle \dot{m}_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \Gamma_k \quad (\text{B.118})$$

- Pela definição de média têm-se:

$$\langle \rho_k \rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \rho_k \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k \rho_k \rangle = \langle X_k \rangle \langle \rho_k \rangle^{X_k} = \varphi_k \rho_k^{X_k} \quad (\text{B.119})$$

- Para o segundo termo:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k \rangle &= \nabla \cdot \langle X_k \rho_k (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') \rangle \\
&= \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + X_k \rho_k v_k' \rangle \\
&= \nabla \cdot (\langle X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \rangle + \langle X_k \rho_k v_k' \rangle) \\
&= \nabla \cdot (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle X_k \rho_k \rangle + \langle X_k \rho_k v_k' \rangle)
\end{aligned} \tag{B.120}$$

Novamente pela definição de média:

$$\langle v_k' \rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho_k v_k' \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \langle X_k \rho_k v_k' \rangle = \langle v_k' \rangle^{X_k \rho_k} \langle X_k \rho_k \rangle = 0 \tag{B.121}$$

Pois $\langle v_k' \rangle^{X_k \rho_k} = 0$.

Ao substituir a equação (B.121) na equação (B.120):

$$\nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k \rangle = \nabla \cdot (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle X_k \rho_k \rangle) = \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) \tag{B.122}$$

Logo, a equação média de balanço de massa é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k}) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) = \Gamma_k \tag{B.123}$$

Para a equação de *jump conditions*, temos:

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle \dot{m}_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \tag{B.124}$$

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I}{Dt} + \rho_I \nabla_s \cdot V_I \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \tag{B.125}$$

Dada a consideração de propriedades materiais da interface nulas, ou seja, não é presente acúmulo de material nela, a condição de transferência de massa entre as fases – *jump condition* – é:

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_k = 0 \tag{B.126}$$

B.11 Transporte de movimento

Equação média instantânea local:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k V_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle - \nabla \cdot \langle X_k \bar{T}_k \rangle - \langle X_k \rho_k g \rangle = \left\langle (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \tag{B.127}$$

Definindo $M_k \equiv \left\langle (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle$, têm-se:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k V_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle - \nabla \cdot \langle X_k \bar{T}_k \rangle - \langle X_k \rho_k g \rangle = M_k \quad (\text{B.128})$$

- Para o primeiro termo, conforme exposto anteriormente, $\langle X_k \rho_k V_k \rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k$.
- Para o segundo termo da equação (B.127):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle &= \nabla \cdot \langle X_k \rho_k (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') \rangle \\ &= \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + 2X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} v_k' + X_k \rho_k v_k' v_k' \rangle \\ &= \nabla \cdot (\langle X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + \langle 2X_k \rho_k \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} v_k' + \langle X_k \rho_k v_k' v_k' \rangle) \\ &= \nabla \cdot (\langle X_k \rho_k \rangle \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + 2\langle X_k \rho_k v_k' \rangle \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + \langle X_k \rho_k v_k' v_k' \rangle) \end{aligned} \quad (\text{B.129})$$

Sendo o tensor de tensão da fase k (tensor de Reynolds) definido por (Enwald et al. 1997):

$$\bar{T}_k^{Re} = -\frac{\langle X_k \rho_k v_k' v_k' \rangle}{\langle X_k \rangle} \quad (\text{B.130})$$

Temos:

$$\langle X_k \rho_k v_k' v_k' \rangle = -\varphi_k \bar{T}_k^{Re} \quad (\text{B.131})$$

Substitui-se (B.131) em (B.129):

$$\nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle = \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k + 2U_k \varphi_k \rho_k^{X_k} \langle v_k' \rangle^{X_k \rho_k} - \varphi_k \bar{T}_k^{Re} \right) \quad (\text{B.132})$$

Logo:

$$\nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle = \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re} \right) \quad (\text{B.133})$$

- Para o terceiro termo, pela definição de média:

$$\langle \bar{T}_k \rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \bar{T}_k \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k \bar{T}_k \rangle = \langle X_k \rangle \langle \bar{T}_k \rangle^{X_k} = \varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \quad (\text{B.134})$$

- Para o quarto termo:

$$\langle X_k \rho_k g \rangle = g \langle X_k \rho_k \rangle = g \varphi_k \rho_k^{X_k} \quad (\text{B.135})$$

Ao substituir (B.133), (B.134), (B.135) na equação principal (B.128):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re} \right) - \nabla \cdot \left(\varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \right) - \varphi_k \rho_k^{X_k} g = M_k \quad (\text{B.136})$$

É alcançada a equação média de conservação de movimento linear ao organizar a equação (B.136):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k) = \nabla \cdot \left[\varphi_k \left(\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) \right] + \varphi_k \rho_k^{X_k} g + M_k \quad (\text{B.137})$$

Para a condição de transferência interfacial de momento, têm-se:

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle (\dot{m}_k V_k + p_k I \cdot n_k - \tau_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.138})$$

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{D_I \rho_I V_I}{Dt} + \rho_I V_I \nabla_s \cdot V_I - \rho_I g - \nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n} \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.139})$$

Caso as propriedades materiais da interface sejam nulas:

$$\sum_{k=1}^2 \left\langle (\dot{m}_k V_k - \bar{T}_k \cdot \vec{n}_k) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle (-\nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n}) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.140})$$

Ou seja, há uma fonte de movimento da mistura devido ao efeito da tensão superficial na interface (Ishii 1975, apud Morel 2015). Assim, é definido:

$$M_m \equiv \left\langle (-\nabla_s \sigma + \sigma \vec{n} \nabla_s \cdot \vec{n}) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.141})$$

E, portanto, obtêm-se a *jump condition* correspondente à transferência de movimento:

$$\sum_{k=1}^2 M_k = M_m \quad (\text{B.142})$$

B.12 Transporte de energia

Equação média instantânea local:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k E_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k E_k V_k \rangle + \nabla \cdot \langle X_k (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle - \left\langle X_k \rho_k \left(g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) \right\rangle = \left\langle [\dot{m}_k E_k + (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k] \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.143})$$

Define-se Q_k como:

$$Q_k \equiv \left\langle \dot{m}_k E_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle + \left\langle q''_k \cdot \vec{n}_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle - \left\langle \bar{T}_k \cdot V_k \cdot \vec{n}_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.144})$$

Temos:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k E_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k E_k V_k \rangle + \nabla \cdot \langle X_k (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle - \left\langle X_k \rho_k \left(g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) \right\rangle = Q_k \quad (\text{B.145})$$

Ao expandir o termo E_k :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right\rangle + \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) V_k \right\rangle + \nabla \cdot \langle X_k (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle - \left\langle X_k \rho_k \left(g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) \right\rangle = Q_k \quad (\text{B.146})$$

- Para o primeiro termo da equação acima, têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k e_k + X_k \rho_k \frac{(U_k + v_k')^2}{2} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k e_k + X_k \rho_k \left(\frac{U_k^2}{2} + U_k v_k' + \frac{v_k'^2}{2} \right) \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle X_k \rho_k e_k \rangle + \left\langle X_k \rho_k \frac{U_k^2}{2} \right\rangle + \langle X_k \rho_k U_k v_k' \rangle + \left\langle X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Anula-se o termo onde haverá a média da flutuação:

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle X_k \rho_k e_k \rangle + \langle X_k \rho_k \rangle \frac{U_k^2}{2} + \left\langle X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle \right) \quad (\text{B.147})$$

Utilizando-se de:

$$\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho_k e_k \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \langle X_k \rho_k e_k \rangle = \langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} \langle X_k \rho_k \rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} e_k^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.148})$$

$$\left\langle \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\left\langle X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \left\langle X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle = \langle X_k \rho_k \rangle \left\langle \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle^{X_k \rho_k} = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{v_k'^2}{2} \right)^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.149})$$

É obtido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} e_k^{X_k \rho_k} + \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{U_k^2}{2} \right) + \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{v_k'^2}{2} \right)^{X_k \rho_k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \varphi_k \rho_k^{X_k} \left[e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + \left(\frac{v_k'^2}{2} \right)^{X_k \rho_k} \right] \right\} \quad (\text{B.150}) \end{aligned}$$

A energia cinética turbulenta é definida como:

$$\left(\frac{v_k'^2}{2} \right)^{X_k \rho_k} \equiv K_k \quad (\text{B.151})$$

Dessa forma, o primeiro termo da equação (B.146) é:

$$\frac{\partial \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) \right\rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] \quad (\text{B.152})$$

• Para o segundo termo da equação (B.146):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) V_k \right\rangle &= \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left[\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} + e_k' + \left(\frac{U_k^2}{2} + U_k v_k' + \frac{v_k'^2}{2} \right) \right] (U_k + v_k') \right\rangle \\ &= \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + e_k' U_k + \frac{U_k^2}{2} U_k + U_k v_k' U_k + \frac{v_k'^2}{2} U_k + \langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} v_k' + e_k' v_k' + \frac{U_k^2}{2} v_k' + U_k v_k' v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right\rangle \\ &= \nabla \cdot \left\langle (X_k \rho_k \langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k) + (X_k \rho_k e_k' U_k) + \left(X_k \rho_k \frac{U_k^2}{2} U_k \right) + (X_k \rho_k U_k v_k' U_k) + \left(X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} U_k \right) + (X_k \rho_k \langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} v_k') + (X_k \rho_k e_k' v_k') + \left(X_k \rho_k \frac{U_k^2}{2} v_k' \right) + (X_k \rho_k U_k v_k' v_k') + \left(X_k \rho_k \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Ao analisar os termos onde haverá a média da flutuação, é realizado:

$$\begin{aligned} &= \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + \frac{U_k^2}{2} U_k + \frac{v_k'^2}{2} U_k + e_k' v_k' + \frac{U_k^2}{2} v_k' + U_k v_k' v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right\rangle \\ &= \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left[\left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + \frac{U_k^2}{2} U_k + \frac{v_k'^2}{2} U_k \right) + \left(e_k' v_k' + \frac{U_k^2}{2} v_k' + U_k v_k' v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right] \right\rangle \\ &= \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + \frac{U_k^2}{2} U_k + \frac{v_k'^2}{2} U_k \right) + X_k \rho_k \left(e_k' v_k' + \frac{U_k^2}{2} v_k' + U_k v_k' v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right\rangle \\ &= \nabla \cdot \left[\left\langle X_k \rho_k \left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + \frac{U_k^2}{2} U_k + \frac{v_k'^2}{2} U_k \right) \right\rangle + \left\langle X_k \rho_k \left(e_k' v_k' + \frac{U_k^2}{2} v_k' + U_k v_k' v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) \right\rangle \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \cdot \left[\langle X_k \rho_k \rangle \left(\langle e_k \rangle^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + \left\langle \frac{v_k'^2}{2} \right\rangle^{X_k \rho_k} \right) U_k + \langle X_k \rho_k \rangle \left(\left(e_k' + \frac{U_k^2}{2} + U_k v_k' + \frac{v_k'^2}{2} v_k' \right) v_k' \right)^{X_k \rho_k} \right] \\
&= \nabla \cdot \left[\langle X_k \rho_k \rangle \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + \left(\frac{v_k'^2}{2} \right)^{X_k \rho_k} \right) U_k + \langle X_k \rho_k \rangle \left(\left(e_k' + \frac{v_k^2}{2} \right) v_k' \right)^{X_k \rho_k} \right]
\end{aligned}$$

Dessa maneira:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right) V_k \right\rangle &= \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k + \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)' v_k' \right)^{X_k \rho_k} \right]
\end{aligned} \tag{B.153}$$

- Para o terceiro termo da equação (B.146):

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \langle X_k (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle &= \nabla \cdot \langle (X_k q''_k) - (X_k \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle \\
&= \nabla \cdot \langle (X_k q''_k) - \langle X_k \bar{T}_k \cdot V_k \rangle \rangle \\
&= \nabla \cdot \left[\langle X_k q''_k \rangle - \langle X_k \bar{T}_k \cdot (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') \rangle \right] \\
&= \nabla \cdot \left[\langle X_k q''_k \rangle - \langle (X_k \bar{T}_k \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k}) + (X_k \bar{T}_k \cdot v_k') \rangle \right] \\
&= \nabla \cdot \langle (X_k q''_k) - \langle X_k \bar{T}_k \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \rangle - \langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle \rangle \\
&= \nabla \cdot \langle (X_k q''_k) - \langle X_k \bar{T}_k \rangle \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} - \langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle \rangle
\end{aligned} \tag{B.154}$$

Utilizando-se de:

$$\langle q''_k \rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k q''_k \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k q''_k \rangle = \langle q''_k \rangle^{X_k} \langle X_k \rangle = \varphi_k q''_k^{X_k} \tag{B.155}$$

Então é substituída a equação (B.155) em (B.154):

$$\nabla \cdot \langle X_k (q''_k - \bar{T}_k \cdot V_k) \rangle = \nabla \cdot \left(\varphi_k q''_k^{X_k} - \varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \cdot U_k - \langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle \right) \tag{B.156}$$

- Para o quarto termo da equação (B.146):

$$\begin{aligned}
\left\langle X_k \rho_k \left(b_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) \right\rangle &= \langle (X_k \rho_k g_k \cdot V_k) + (X_k \dot{q}_k) \rangle \\
&= \langle X_k \rho_k g_k \cdot V_k \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle X_k \rho_k g_k \cdot (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle \\
&= \langle (X_k \rho_k g_k \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k}) + (X_k \rho_k g_k \cdot v_k') \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle \\
&= \langle X_k \rho_k g_k \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} \rangle + \langle X_k \rho_k g_k \cdot v_k' \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle \\
&= \langle X_k \rho_k g_k \rangle \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + \langle X_k \rho_k g_k \cdot v_k' \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle \\
&= g_k \langle X_k \rho_k \rangle \cdot \langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + g_k \langle X_k \rho_k \cdot v_k' \rangle + \langle X_k \dot{q}_k \rangle
\end{aligned} \tag{B.157}$$

Sendo:

$$\langle \dot{q}_k \rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \dot{q}_k \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k \dot{q}_k \rangle = \langle \dot{q}_k \rangle^{X_k} \langle X_k \rangle = \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} \tag{B.158}$$

Então:

$$\left\langle X_k \rho_k \left(g_k \cdot V_k + \frac{\dot{q}_k}{\rho_k} \right) \right\rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k \cdot g + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} \tag{B.159}$$

Logo, a equação média de conservação de energia pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k + \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)' v_k' \right\rangle^{X_k \rho_k} \right] \\
&+ \nabla \cdot \left(\varphi_k q_k^{X_k} - \varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \cdot U_k - \langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle \right) - \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k \cdot g - \\
&\varphi_k \dot{q}_k^{X_k} = Q_k
\end{aligned} \tag{B.160}$$

Porém, é possível verificar que:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle^{X_k} &= \frac{\langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle = \langle X_k \rangle \langle \bar{T}_k \cdot v_k' \rangle^{X_k} \\
&= \varphi_k (\bar{T}_k \cdot v_k')^{X_k}
\end{aligned} \tag{B.161}$$

Então ao reescrever a equação (B.146):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k + \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \left(e_k + \frac{v_k^2}{2} \right)' v_k' \right\rangle^{X_k \rho_k} \right] \\
&+ \nabla \cdot \left[\varphi_k q_k^{X_k} - \varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \cdot U_k - \varphi_k (\bar{T}_k \cdot v_k')^{X_k} \right] - \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k \cdot g - \\
&\varphi_k \dot{q}_k^{X_k} = Q_k
\end{aligned} \tag{B.162}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k \right] = -\nabla \cdot \\ & \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right)' v_k' \right)^{X_k \rho_k} \right] - \nabla \cdot \left[\varphi_k q_k''^{X_k} - \varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \cdot U_k - \varphi_k (\bar{T}_k \cdot v_k')^{X_k} \right] + g \cdot \\ & \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + Q_k \end{aligned} \quad (\text{B.163})$$

Morel (2015) definiu $q_k''^T$ como:

$$q_k''^T \equiv \rho_k^{X_k} \left\langle \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right)' v_k' \right\rangle^{X_k \rho_k} - (\bar{T}_k \cdot v_k')^{X_k} \quad (\text{B.164})$$

Portanto, a equação média instantânea local da energia pode ser descrita como:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k \right] = -\nabla \cdot \\ & \left[\varphi_k (q_k''^{X_k} - q_k''^T) \right] + \nabla \cdot (\varphi_k \bar{T}_k^{X_k} \cdot U_k) + g \cdot \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + Q_k \end{aligned} \quad (\text{B.165})$$

Ainda, sendo $\bar{T}_k = -P_k I + \tau_k$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) \right] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(e_k^{X_k \rho_k} + \frac{U_k^2}{2} + K_k \right) U_k \right] = -\nabla \cdot \\ & \left[\varphi_k (q_k''^{X_k} - q_k''^T) \right] - \nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \tau_k^{X_k} \cdot U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} U_k \cdot g + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + Q_k \end{aligned} \quad (\text{B.166})$$

A equação (B.166) é a equação média de conservação de energia.

Já a transferência interfacial de energia é expressa como:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left\langle \left[\dot{m}_k \left(e_k + \frac{V_k^2}{2} \right) + q_k'' \cdot \vec{n}_k + P_k V_k \cdot \vec{n}_k - \tau_k \cdot V_k \cdot \vec{n}_k \right] \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left\{ \frac{D_I}{Dt} \left[\rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. \rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q''_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right\} \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.167})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left\langle \left(\dot{m}_k E_k + (q_k'' - \bar{T}_k \cdot V_k) \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \left\langle \left\{ \frac{D_I}{Dt} \left[\rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot \right. \right. \\ & \left. \left. g + \nabla_s \cdot q''_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right\} \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.168})$$

Assim, a fonte de energia da mistura é definida como (Morel, 2015):

$$Q_m \equiv \left\langle \left\{ \frac{D_I}{Dt} \left[\rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \right] + \rho_I \left(e_I + \frac{V_I^2}{2} \right) \nabla_s \cdot V_I - \rho_I V_I \cdot g + \nabla_s \cdot q''_I - \nabla_s \cdot (\sigma V_{I,t}) \right\} \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.169})$$

Dessa forma, é obtida a equação de *jump conditions* pertinente à transferência de energia:

$$\sum_{k=1}^2 Q_k = Q_m \quad (\text{B.170})$$

B.13 Transformação na derivada material em termos médios

É visto pela equação (B.39) que:

$$\frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) = \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right)$$

Ao multiplicar pelo termo X_k :

$$X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + X_k \nabla \cdot (\rho_k V_k \psi_k) = X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \quad (\text{B.171})$$

Para o primeiro termo à esquerda da equação acima, com base no já exposto na equação (B.90):

$$X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} = \frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} - (\rho_k \psi_k) V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I$$

Para o segundo termo à esquerda, em conformidade com a equação (B.92):

$$X_k \nabla \cdot (\rho_k \psi_k V_k) = \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \vec{n}_k \delta_I \cdot \rho_k \psi_k V_k$$

Então:

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) - (\rho_k \psi_k) V_I \cdot \vec{n}_k \delta_I + \vec{n}_k \delta_I \cdot \rho_k \psi_k V_k = X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \quad (\text{B.172})$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \rho_k (V_k - V_I) \psi_k \cdot \vec{n}_k \delta_I = X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \quad (\text{B.173})$$

$$\frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) + \dot{m}_k \psi_k \delta_I = X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \quad (\text{B.174})$$

Ao utilizar a média:

$$\left\langle \frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (X_k \rho_k \psi_k V_k) \rangle + \langle \dot{m}_k \psi_k \delta_I \rangle = \left\langle X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \right\rangle \quad (\text{B.175})$$

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k \psi_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \psi_k V_k \rangle + \langle \dot{m}_k \psi_k \delta_I \rangle = \left\langle X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \right\rangle \quad (\text{B.176})$$

Para o termo à direita da igualdade, pela definição de média:

$$\left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right\rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \left\langle X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \right\rangle = \langle X_k \rho_k \rangle \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right\rangle^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.177})$$

Então:

$$\left\langle X_k \rho_k \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right) \right\rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right\rangle^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.178})$$

Substituindo (B.178) em (B.176):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle X_k \rho_k \psi_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k \psi_k V_k \rangle + \langle \dot{m}_k \psi_k \delta_I \rangle &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla \psi_k \right\rangle^{X_k \rho_k} \equiv \\ \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{D_k}{Dt} \psi_k \right)^{X_k \rho_k} & \end{aligned} \quad (\text{B.179})$$

B.14 Equações médias de energia

Utilizando-se $\psi_k = V_k$ na equação (B.179):

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k V_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k V_k V_k \rangle + \langle \dot{m}_k V_k \delta_I \rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right\rangle^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.180})$$

Pelas demonstrações já realizadas nas seções anteriores:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \alpha_k \bar{T}_k^{Re}) + \langle \dot{m}_k V_k \delta_I \rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right\rangle^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.181})$$

Para o termo à direita da igualdade:

$$\begin{aligned} \varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right\rangle^{X_k \rho_k} &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left[\frac{\partial U_k}{\partial t} + \langle (U_k + v_k') \cdot \nabla (U_k + v_k') \rangle^{X_k \rho_k} \right] \\ &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left[\frac{\partial U_k}{\partial t} + \langle U_k \cdot \nabla (U_k + v_k') \rangle^{X_k \rho_k} + \langle v_k' \cdot \nabla (U_k + v_k') \rangle^{X_k \rho_k} \right] \\ &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left[\frac{\partial U_k}{\partial t} + \langle U_k \cdot \nabla U_k + U_k \cdot \nabla v_k' + v_k' \cdot \nabla U_k + v_k' \cdot \nabla v_k' \rangle^{X_k \rho_k} \right] \\ &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + \langle U_k \cdot \nabla U_k + v_k' \cdot \nabla v_k' \rangle^{X_k \rho_k} \right) \\ &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k + \langle v_k' \cdot \nabla v_k' \rangle^{X_k \rho_k} \right) \\ &= \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k + \nabla \cdot \langle v_k' v_k' \rangle^{X_k \rho_k} \right) \end{aligned}$$

Então:

$$\varphi_k \rho_k^{X_k} \left\langle \frac{\partial V_k}{\partial t} + V_k \cdot \nabla V_k \right\rangle^{X_k \rho_k} = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k \right) - \nabla \cdot (\varphi_k \bar{T}_k^{Re}) \quad (\text{B.182})$$

Ao substituir (B.182) em (B.181):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re}) + \langle \dot{m}_k V_k \delta_I \rangle = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k \right) - \nabla \cdot (\varphi_k \bar{T}_k^{Re}) \quad (\text{B.183})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re}) = \varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k \right) - \langle \dot{m}_k V_k \delta_I \rangle \quad (\text{B.184})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re}) = \varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{D_k U_k}{Dt} - \left\langle \dot{m}_k \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle U_k \quad (\text{B.185})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k - \varphi_k \bar{T}_k^{Re}) = \varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{D_k U_k}{Dt} - \Gamma_k U_k \quad (\text{B.186})$$

Sendo a equação média da conservação de movimento dada por (B.137):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} U_k U_k) = \nabla \cdot [\varphi_k (\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re})] + g \varphi_k \rho_k^{X_k} + M_k$$

Então substitui-se (B.186) em (B.137):

$$\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{D_k U_k}{Dt} = \nabla \cdot [\varphi_k (\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re})] + g \varphi_k \rho_k^{X_k} + M_k + \Gamma_k U_k \quad (\text{B.187})$$

Ao realizar o produto escalar da equação acima (B.187) pela velocidade média U_k :

$$\left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + U_k \cdot \nabla U_k \right) \right] \cdot U_k = \left\{ \nabla \cdot [\varphi_k (\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re})] + g \varphi_k \rho_k^{X_k} + M_k + \Gamma_k U_k \right\} \cdot U_k \quad (\text{B.188})$$

Por analogia com o demonstrado na seção B.6 pelas equações (B.41) a (B.50):

$$\left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k^2}{\partial t} + U_k \cdot \nabla \frac{U_k^2}{2} \right) \right] = \nabla \cdot [\varphi_k (\bar{T}_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re})] \cdot U_k + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k U_k^2 \quad (\text{B.189})$$

$$\left[\varphi_k \rho_k^{X_k} \left(\frac{\partial U_k^2}{\partial t} + U_k \cdot \nabla \frac{U_k^2}{2} \right) \right] = -\nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \nabla \cdot [\varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) \cdot U_k] - \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k U_k^2 \quad (\text{B.190})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle X_k \rho_k \frac{U_k^2}{2} \right\rangle + \nabla \cdot \left\langle X_k \rho_k \frac{U_k^2}{2} V_k \right\rangle + \left\langle \dot{m}_k \frac{U_k^2}{2} \delta_i \right\rangle = -\nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) \cdot U_k \right] - \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k U_k^2 \end{aligned} \quad (\text{B.191})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} + \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} U_k \right) + \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} = -\nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) \cdot U_k \right] - \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k U_k^2 \end{aligned} \quad (\text{B.192})$$

Reorganizado a equação (B.192), é exposta a equação da energia cinética média (ou equação da energia mecânica média):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\varphi_k \rho_k^{X_k} \frac{U_k^2}{2} U_k \right) = -\nabla \cdot (\varphi_k p_k^{X_k} U_k) + \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) \cdot U_k \right] - \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \rho_k^{X_k} g \cdot U_k + M_k \cdot U_k + \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} \end{aligned} \quad (\text{B.193})$$

Dessa maneira, ao subtrair a equação (B.166) da equação (B.193), é obtido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_k \rho_k^{X_k} (e_k^{X_k \rho_k} + K_k)] + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} (e_k^{X_k \rho_k} + K_k) U_k] = -\nabla \cdot [\varphi_k (q_k^{X_k} - q_k^T)] - \\ \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) - \nabla \cdot (\varphi_k \bar{T}_k^{Re} \cdot U_k) + \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + (Q_k - M_k \cdot \\ U_k - \Gamma_k \frac{U_k^2}{2}) \end{aligned} \quad (\text{B.194})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_k \rho_k^{X_k} (e_k^{X_k \rho_k} + K_k)] + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} (e_k^{X_k \rho_k} + K_k) U_k] = -\nabla \cdot (\varphi_k q_k^{X_k}) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k (q_k^T - \bar{T}_k^{Re} \cdot U_k) \right] - \varphi_k p_k^{X_k} (\nabla \cdot U_k) + \varphi_k (\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re}) : (\nabla U_k) + \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + (Q_k - \\ M_k \cdot U_k - \Gamma_k \frac{U_k^2}{2}) \end{aligned} \quad (\text{B.195})$$

A equação acima é a equação média da energia interna.

Define-se a entalpia como:

$$h^{X_k \rho_k} \equiv e_k^{X_k \rho_k} + \frac{p_k^{X_k}}{\rho_k^{X_k}} \quad (\text{B.196})$$

A equação (B.195) é reescrita:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k)] + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k) U_k] &= -\nabla \cdot (\varphi_k q_k^{X_k}) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k \left(q_k^{T} - \bar{T}_k^{Re} \cdot U_k \right) \right] + \frac{D_k}{Dt} (\varphi_k p_k^{X_k}) + \varphi_k \left(\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) : (\nabla U_k) &+ \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + \left(Q_k - \right. \\ M_k \cdot U_k - \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} \left. \right) & \end{aligned} \quad (\text{B.197})$$

A equação (B.197) é denominada de equação média da entalpia.

Nota-se que o termo relacionado à transferência interfacial na equação da energia térmica possui uma forma especial expressa pela combinação dos termos de transferência de massa, movimento e energia (Ishii & Hibiki, 2011). Assim, definimos:

$$\Lambda_k \equiv Q_k - M_k \cdot U_k - \Gamma_k \frac{U_k^2}{2} \quad (\text{B.198})$$

Então a equação da energia térmica em termos médios é reescrita:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k)] + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} (h^{X_k \rho_k} + K_k) U_k] &= -\nabla \cdot (\varphi_k q_k^{X_k}) + \nabla \cdot \\ \left[\varphi_k \left(q_k^{T} - \bar{T}_k^{Re} \cdot U_k \right) \right] + \frac{D_k}{Dt} (\varphi_k p_k^{X_k}) + \varphi_k \left(\tau_k^{X_k} + \bar{T}_k^{Re} \right) : (\nabla U_k) &+ \varphi_k \dot{q}_k^{X_k} + \Lambda_k \end{aligned} \quad (\text{B.199})$$

B.15 Segunda Lei da Termodinâmica: A inequação da entropia em termos médios

Conforme a relação exposta pela equação (B.117) e termos já definidos na seção B.7, temos:

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k S_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k S_k V_k \rangle + \nabla \cdot \left\langle X_k \frac{q_k}{\theta_k} \right\rangle - \left\langle X_k \rho_k \left(\Delta_k + \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right) \right\rangle = \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k}{\theta_k} \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.200})$$

$$\frac{\partial \langle X_k \rho_k S_k \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot \langle X_k \rho_k S_k V_k \rangle + \nabla \cdot \left\langle X_k \frac{q_k}{\theta_k} \right\rangle - \langle X_k \Delta_k \rangle - \left\langle X_k \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right\rangle = \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k}{\theta_k} \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle \quad (\text{B.201})$$

- Para o primeiro termo da equação (B.201):

$$\langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho_k S_k \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \langle X_k \rho_k S_k \rangle = \langle X_k \rho_k \rangle \langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} = \varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} \quad (\text{B.202})$$

- Para o segundo termo da equação (B.201):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \langle X_k \rho_k S_k V_k \rangle &= \nabla \cdot \langle X_k \rho_k S_k (\langle V_k \rangle^{X_k \rho_k} + v_k') \rangle \\ &= \nabla \cdot (\langle X_k \rho_k S_k U_k \rangle + \langle X_k \rho_k S_k v_k' \rangle) \\ &= \nabla \cdot [\langle X_k \rho_k (\langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} + S_k') \rangle U_k + \langle X_k \rho_k (\langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} + S_k') v_k' \rangle] \\ &= \nabla \cdot [\langle \langle X_k \rho_k \rangle \langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} \rangle + \langle X_k \rho_k S_k' \rangle] U_k + \langle X_k \rho_k \rangle \langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} v_k' + \langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla \cdot (\langle X_k \rho_k \rangle \langle S_k \rangle^{X_k \rho_k} U_k + \langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle) \\
&= \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} U_k + \langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle)
\end{aligned} \tag{B.203}$$

- Para o terceiro termo da equação (B.201):

$$\left\langle \frac{q_k''}{\theta_k} \right\rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \frac{q_k''}{\theta_k} \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \left\langle X_k \frac{q_k''}{\theta_k} \right\rangle = \langle X_k \rangle \left\langle \frac{q_k''}{\theta_k} \right\rangle^{X_k} = \varphi_k \left(\frac{q_k''}{\theta_k} \right)^{X_k} \tag{B.204}$$

- Para o quarto termo da equação (B.201):

$$\langle \Delta_k \rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \Delta_k \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \langle X_k \Delta_k \rangle = \langle X_k \rangle \langle \Delta_k \rangle^{X_k} = \varphi_k \Delta_k^{X_k} \tag{B.205}$$

- Para o quinto termo da equação (B.201):

$$\left\langle \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right\rangle^{X_k} = \frac{\langle X_k \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \rangle}{\langle X_k \rangle} \therefore \left\langle X_k \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right\rangle = \langle X_k \rangle \left\langle \frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right\rangle^{X_k} = \varphi_k \left(\frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)^{X_k} \tag{B.206}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k}) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} U_k + \langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle) + \nabla \cdot \left[\varphi_k \left(\frac{q_k''}{\theta_k} \right)^{X_k} \right] - \varphi_k \Delta_k^{X_k} - \\
&\varphi_k \left(\frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)^{X_k} = \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k''}{\theta_k} \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.207}$$

Sendo

$$\langle S_k' v_k' \rangle^{X_k \rho_k} = \frac{\langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle}{\langle X_k \rho_k \rangle} \therefore \langle X_k \rho_k S_k' v_k' \rangle = \langle X_k \rho_k \rangle \langle S_k' v_k' \rangle^{X_k \rho_k} = \varphi_k \rho_k^{X_k} (S_k' v_k')^{X_k \rho_k} \tag{B.208}$$

Então:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k}) + \nabla \cdot [\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} U_k + \varphi_k \rho_k^{X_k} (S_k' v_k')^{X_k \rho_k}] + \nabla \cdot \left[\varphi_k \left(\frac{q_k''}{\theta_k} \right)^{X_k} \right] - \\
&\varphi_k \Delta_k^{X_k} - \varphi_k \left(\frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)^{X_k} = \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k''}{\theta_k} \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.209}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k}) + \nabla \cdot (\varphi_k \rho_k^{X_k} S_k^{X_k \rho_k} U_k) + \nabla \cdot \left\{ \varphi_k \left[\left(\frac{q_k''}{\theta_k} \right)^{X_k} + \rho_k^{X_k} (S_k' v_k')^{X_k \rho_k} \right] \right\} - \\
&\varphi_k \left(\frac{\dot{q}_k}{\theta_k} \right)^{X_k} - \left\langle \left(\dot{m}_k S_k + \frac{q_k''}{\theta_k} \cdot \vec{n}_k \right) \frac{\partial X_k}{\partial n} \right\rangle = \varphi_k \Delta_k^{X_k} \geq 0
\end{aligned} \tag{B.210}$$

Define-se, assim, a inequação da entropia em termos médios.

APÊNDICE C – TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM ANULAR VERTICAL

C.1 – Dedução para um escoamento anular vertical monofásico

Em um volume de controle que engloba o escoamento monofásico anular, parte-se da conservação da energia térmica:

$$\rho c_p \frac{D\theta}{Dt} = -\nabla \cdot q'' + \beta \theta \frac{DP}{Dt} + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (\text{C.1})$$

$$\rho c_p \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + V \cdot (\nabla \theta) \right] = -\nabla \cdot q'' + \beta \theta \left[\frac{\partial P}{\partial t} + V \cdot (\nabla P) \right] + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (\text{C.2})$$

Em regime permanente:

$$\rho c_p [V \cdot (\nabla \theta)] = -\nabla \cdot q'' + \beta \theta [V \cdot (\nabla P)] + \tau : (\nabla V) + \dot{q} \quad (\text{C.3})$$

O termo $\tau : (\nabla V)$ em coordenadas cilíndricas para um fluido incompressível e newtoniano é dado por:

$$\tau : (\nabla V) = \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \right] \quad (\text{C.4})$$

Dado que $Pr \gg 1$, o comprimento de entrada hidrodinâmica é menor que o comprimento de entrada térmica. Desse modo, o perfil de velocidades é plenamente desenvolvido antes do pleno desenvolvimento térmico. Com o fluxo apenas na direção axial:

$$\rho c_p v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] + \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 + \dot{q} \quad (\text{C.5})$$

Uma vez que o fluido é incompressível, $\beta = 0$.

Em um escoamento vertical anular em regime permanente, laminar, plenamente desenvolvido, incompressível e newtoniano, a expressão para o perfil de velocidade exposta no Apêndice A, equação (A.31) é utilizada:

$$v_z(r) = \left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r^2 \right] \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{dv_z}{dr} = \left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{r} - 2r \right] \quad (\text{C.7})$$

Por um balanço de energia no volume de controle anular:

$$\pi R_{int}^2 L \dot{q} = 2\pi R_{int} L q''_{int} \therefore q''_{int} = \frac{R_{int} \dot{q}}{2} \quad (C.8)$$

Dado que o fluido é considerado incompressível e desprezados os efeitos relativos à variação de pressão, para a região de completo desenvolvimento térmico têm-se pela 1ª Lei da Termodinâmica:

$$q_{int} - q_{ext} = \dot{m} c_p d\theta_m \quad (C.9)$$

Onde θ_m é a temperatura média no escoamento. Dessa forma:

$$2\pi R_{int} q''_{int} dz - 2\pi R_{ext} q''_{ext} dz = \dot{m} c_p d\theta_m \quad (C.10)$$

$$2\pi \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) dz = \dot{m} c_p d\theta_m \quad (C.11)$$

$$\theta_m = \theta_{m,ini} + \frac{2\pi}{\dot{m} c_p} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) z \quad (C.12)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{int} = h_{int} (\theta_M - \theta_m) = \frac{R_{int} \dot{q}}{2} \therefore \theta_M = \theta_m + \frac{R_{int} \dot{q}}{2h_{int}} \quad (C.13)$$

Assim:

$$\theta_M = \theta_{m,ini} + \frac{2\pi}{\dot{m} c_p} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) z + \frac{R_{int} \dot{q}}{2h_{int}} \quad (C.14)$$

Onde θ_M é a temperatura na parede do motor. Na região plenamente desenvolvida:

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial z} = \frac{d\theta_m}{dz} = \frac{2\pi}{\dot{m} c_p} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) \quad (C.15)$$

Nesse contexto, a condução de calor longitudinal é nula, uma vez que:

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} = \frac{d^2 \theta_m}{dz^2} = 0 \quad (C.16)$$

Ao substituir as expressões (C.6), (C.7), (C.15) e (C.16) na equação da energia térmica (C.5):

$$\left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu\alpha} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r^2 \right] \frac{2\pi}{\dot{m} c_p} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_m}{\partial r} + \frac{\mu}{K} \left[\left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left(\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{r} - 2r \right) \right]^2 \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = \left(\frac{\pi}{2 \dot{m} c_p \mu \alpha} \right) \left(\rho g_z - \frac{dP}{dz} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r^2 \right] \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \right) - \frac{\mu}{K} \left[\left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left(\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{r} - 2r \right) \right]^2 \quad (C.18)$$

Define-se:

$$A' = \frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \quad (C.19)$$

$$B = \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \quad (C.20)$$

$$C = \frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext} R_{ext} \quad (C.21)$$

As definições dadas pelas equações (C.19), (C.20) e (C.21) são substituídas em (C.18). Esta é reescrita:

$$\frac{\partial^2 \theta_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = \frac{2\pi A' C}{\dot{m} c_p \alpha} \left[B \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r \right] - \frac{\mu}{K} \left[A' \left(\frac{B}{r} - 2r \right) \right]^2 \quad (C.22)$$

Onde pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{ext} = h_{ext} (\theta_m - \theta_{S,int}) \quad (C.23)$$

Sendo $\theta_{S,int}$ a temperatura da parede interna do *shroud*. Logo:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) = \frac{2\pi A' C}{\dot{m} c_p \alpha} \left[B \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r \right] - \frac{\mu}{K} \left[A' \left(\frac{B}{r} - 2r \right) \right]^2 \quad (C.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) = \frac{2\pi A' C}{\dot{m} c_p \alpha} \left[B r \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + r R_{ext}^2 - r^2 \right] - \frac{\mu}{K} \left[A' (B r^{-1/2} - 2r^{3/2}) \right]^2 \quad (C.25)$$

$$r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} = \frac{2\pi A' C}{\dot{m} c_p \alpha} \left[\frac{B r^2}{2} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) - \frac{B r^2}{4} + \frac{r^2 R_{ext}^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K} [B^2 \ln(r) - 2B r^2 + r^4] + C_3 \quad (C.26)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial r} = \frac{2\pi A' C}{\dot{m} c_p \alpha} \left[\frac{B r}{2} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) - \frac{B r}{4} + \frac{r R_{ext}^2}{2} - \frac{r^3}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K} \left\{ \frac{B^2}{r} [\ln(r)]^2 - 2B r + r^3 \right\} + \frac{C_3}{r} \quad (C.27)$$

Dessa maneira, o perfil de temperatura para as premissas expostas é na forma de:

$$\theta_m(r, z) = \theta_M(z) + \frac{\pi r^2 A' C}{2 \dot{m} c_p \alpha} \left[\frac{B}{2} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) - B + R_{ext}^2 - \frac{r^2}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K} \left\{ \frac{B^2}{2} [\ln(r)]^2 - B r^2 + \frac{r^4}{4} \right\} + C_3 \ln(r) + C_4 \quad (C.28)$$

Ao aplicar a condição de contorno em $r = R_{int}$, $\theta_m(R_{int}, z) = \theta_M(z)$:

$$C_4 = \frac{-\pi A' C}{2\dot{m}c_p\alpha} \left[\frac{B}{2} \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right) R_{int}^2 - BR_{int}^2 + R_{ext}^2 R_{int}^2 - \frac{R_{int}^4}{4} \right] + \frac{\mu A'^2}{K} \left\{ \frac{B^2}{2} [\ln(R_{int})]^2 - BR_{int}^2 + \frac{R_{int}^4}{4} \right\} - C_1 \ln(R_{int}) \quad (C.29)$$

Em $r = R_{ext}$, $\theta_m(R_{ext}, z) = \theta_{S,int}(z)$:

$$C_3 [\ln(R_{ext}) - \ln(R_{int})] + \frac{\pi A' C}{2\dot{m}c_p\alpha} \left[-BR_{ext}^2 + \frac{3}{4} R_{ext}^4 - \frac{B}{2} \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right) R_{int}^2 + BR_{int}^2 - R_{ext}^2 R_{int}^2 + \frac{R_{int}^4}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K} \left\{ \frac{B^2}{2} [\ln(R_{ext})]^2 - BR_{ext}^2 + \frac{R_{ext}^4}{4} - \frac{B^2}{2} \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right) + BR_{int}^2 - \frac{R_{int}^4}{4} \right\} + \theta_M(z) - \theta_{S,int}(z) = 0 \quad (C.30)$$

$$C_3 = \frac{\pi A' C}{2\dot{m}c_p\alpha \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right)} \left[B(R_{int}^2 - R_{ext}^2) - \frac{B}{2} \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right) R_{int}^2 - R_{ext}^2 R_{int}^2 + \frac{3R_{ext}^4 + R_{int}^4}{4} \right] - \frac{\mu A'^2}{K \ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right)} \left\{ \frac{B^2}{2} \{ [\ln(R_{ext})]^2 - [\ln(R_{int})]^2 \} \right\} + B(R_{int}^2 - R_{ext}^2) + \frac{(R_{ext}^4 - R_{int}^4)}{4} + \frac{\theta_M(z) - \theta_{S,int}(z)}{\ln\left(\frac{R_{int}}{R_{ext}}\right)} \quad (C.31)$$

Para $\theta_{S,int}(z)$, têm-se:

$$q''_{ext} = h_{ext} [\theta_m(z) - \theta_{S,int}(z)] = U'_{ext} [\theta_m(z) - \theta_\infty] \quad (C.32)$$

$$\theta_{S,int}(z) = \frac{\theta_m(h_{ext} - U'_{ext}) + U'_{ext}\theta_\infty}{h_{ext}} \quad (C.33)$$

Onde:

$$U'_{ext} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ext}} + \frac{R_{ext} \ln(R_{S,ext}/R_{ext})}{K_s} + \frac{R_{ext}}{R_{S,ext} h_{S,ext}}} \quad (C.34)$$

No entanto, para a região de entrada é fato que $\frac{\partial \theta_m}{\partial z} \neq \frac{d\theta_m}{dz}$. De modo que a equação de conservação de energia a ser solucionada para essa região é:

$$\rho c_p v_z \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} \right] + \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 \quad (C.35)$$

Dado que o número de Peclet é muito menor que a unidade, $Pe \ll 1$, a parcela de condução axial deve ser levada em consideração. Também, para $Pr \gg 1$:

$$\rho c_p \left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left[\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) + R_{ext}^2 - r^2 \right] \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = K \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} \right] + \mu \left[\left(\frac{\rho g_z - \frac{dP}{dz}}{4\mu} \right) \left(\frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)}{\ln\left(\frac{R_{ext}}{R_{int}}\right)} \frac{1}{r} - 2r \right) \right]^2 \quad (C.36)$$

Ao simplificar a equação (C.36) pelas definições (C.19) e (C.20):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_m}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2} + \frac{A'}{\alpha} \left[r^2 - R_{ext}^2 - B \ln\left(\frac{r}{R_{ext}}\right) \right] \frac{\partial \theta_m}{\partial z} = -\frac{\mu A'^2}{K} \left(\frac{B}{r} - 2r \right)^2 \quad (C.37)$$

C.2 – Dedução para um padrão multifásico *bubbly* e disperso em um escoamento anular

A modelagem térmica é análoga ao escoamento monofásico. Para esse padrão multifásico, considera-se as propriedades do fluido como uma mistura líquido-gás incompressível e newtoniana (ver figura 12). Portanto:

$$h_{BD} = \frac{Nu_{mix} K_{mix}}{D_h} \quad (C.38)$$

$$K_{mix} = (1 - H_L) K_G + H_L K_L \quad (C.39)$$

A fração de líquido é dado por H_L . Demais parâmetros e propriedades são definidos como:

$$\mu_{mix} = (1 - H_L) \mu_G + H_L \mu_L \quad (C.40)$$

$$Re_{mix} = \frac{\rho_{mix} v_{mix} D_h}{\mu_{mix}} \quad (C.41)$$

$$Pr = \frac{c_{p,mix} \mu_{mix}}{K_{mix}} \quad (C.42)$$

$$\rho_{mix} = (1 - H_L) \rho_G + H_L \rho_L \quad (C.43)$$

$$C_{p,mix} = (1 - H_L) C_{p,G} + H_L C_{p,L} \quad (C.44)$$

A equação local de energia térmica em regime permanente é:

$$\rho_{mix} C_{p,mix} v_{z,mix} \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial z} = K_{mix} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial z^2} \right] + \mu_{mix} \left(\frac{\partial v_{z,mix}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.45)$$

Onde:

$$\frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial z} = \frac{d\theta_{m,mix}}{dz} = \frac{2\pi}{\dot{m}_{mix} C_{p,mix}} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext,mix} R_{ext} \right) \quad (C.46)$$

Substitui-se a equação (C.45) na equação (C.46):

$$\frac{v_{z,mix}}{\alpha_{mix}} \left[\frac{2\pi}{\dot{m}_{mix} c_{p,mix}} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext,mix} R_{ext} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial z^2} + \frac{\mu_{mix}}{K_{mix}} \left(\frac{\partial v_{z,mix}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.47)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,mix}}{\dot{m}_{mix} c_{p,mix} \alpha_{mix}} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{ext,mix} R_{ext} \right) - \frac{\mu_{mix}}{K_{mix}} \left(\frac{\partial v_{z,mix}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.48)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{ext,mix} = h_{ext,mix} (\theta_{m,mix} - \theta_{S,int,mix}) \quad (C.49)$$

Para $\theta_{S,int,mix}$:

$$\theta_{S,int,mix}(z) = \frac{\theta_{m,mix}(h_{ext,mix} - U'_{ext,mix}) + U'_{ext,mix} \theta_{\infty}}{h_{ext,mix}} \quad (C.50)$$

$$U'_{ext,mix} = \frac{1}{\frac{1}{h_{ext,mix}} + \frac{R_{ext} \ln(R_{S,ext}/R_{ext})}{K_s} + \frac{R_{ext}}{R_{S,ext} h_{S,ext,mix}}} \quad (C.51)$$

Para a região de entrada e em regime permanente, a equação local de conservação de energia térmica se resume apenas à expressão (C.45). Se o escoamento for laminar com $Pr \gg 1$, é obtido de forma similar ao escoamento monofásico:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{m,mix}}{\partial z^2} + \frac{A'_{mix}}{\alpha_{mix}} \left[r^2 - R_{ext}^2 - B \ln \left(\frac{r}{R_{ext}} \right) \right] \frac{\partial \theta_{m,mix}}{\partial z} = - \frac{\mu_{mix} A'^2_{mix}}{K_{mix}} \left(\frac{B}{r} - 2r \right)^2 \quad (C.52)$$

C.3 – Dedução para um padrão multifásico anular em um escoamento anular

Em um escoamento multifásico com padrão anular, distintas equações locais de conservação de energia térmica existirão, uma para cada região: filmes líquidos nas paredes e central gasosa (ver figura 12). À vista disso, cada região terá um distinto número de Nusselt.

No filme líquido incompressível da parede interna, em um regime permanente:

$$\frac{v_{z,Fint}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial z^2} + \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.53)$$

Caso seja atingido o pleno desenvolvimento térmico:

$$\frac{v_{z,Fint}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} \right) + \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.54)$$

$$\frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial z} = \frac{d\theta_{Fint}}{dz} = \frac{2\pi}{\dot{m}_{Fint} c_{p,L}} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{Fint} R_{Fint} \right) \quad (C.55)$$

Onde:

$$R_{Fint} = R_{int} + \delta_{Fint}. \quad (C.56)$$

Assim:

$$\frac{2\pi v_{z,Fint}}{\dot{m}_{Fint} c_{p,L} \alpha_L} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{Fint} R_{Fint} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} \right) + \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.57)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,Fint}}{\dot{m}_{Fint} c_{p,L} \alpha_L} \left(\frac{R_{int}^2}{2} \dot{q} - q''_{Fint} R_{Fint} \right) - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.58)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{Fint} = h_{Fint} (\theta_{Fint} - \theta_{GC}) \quad (C.59)$$

Para a região de entrada, a equação local da energia térmica para o filme líquido incompressível da parede interna, e em regime permanente:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{Fint}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,Fint}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fint}}{\partial z} = - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fint}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.60)$$

Para a região central de gás, no regime permanente e desprezando os efeitos relacionados à variação de pressão visto que o escoamento é subsônico com $Ma < 0,3$:

$$\frac{v_{z,GC}}{\alpha_G} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial z^2} + \frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.61)$$

Ao avaliar para a região de pleno desenvolvimento térmico:

$$\frac{v_{z,GC}}{\alpha_G} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} \right) + \frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.62)$$

$$\frac{\partial \theta_{GC}}{\partial z} = \frac{d\theta_{GC}}{dz} = \frac{2\pi}{\dot{m}_{GC} c_{p,G} \alpha_G} (q''_{Fint} R_{Fint} - q''_{GC} R_{GC}) \quad (C.63)$$

Onde:

$$R_{GC} = R_{int} + \delta_{GC} \quad (C.64)$$

Substitui-se a equação (C.63) em (C.64):

$$\frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,GC}}{\dot{m}_{GC} c_{p,G} \alpha_G} (q''_{Fint} R_{Fint} - q''_{GC} R_{GC}) - \frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.65)$$

Pela Lei de Resfriamento de Newton:

$$q''_{GC} = h_{GC} (\theta_{GC} - \theta_{Fext}) \quad (C.66)$$

Para a região de entrada, a equação local de energia térmica em regime permanente é:

$$\frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{GC}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,GC}}{\alpha_G} \frac{\partial \theta_{GC}}{\partial z} = -\frac{\mu_G}{K_G} \left(\frac{\partial v_{z,GC}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.67)$$

De forma a analisar a região de filme líquido incompressível na parede externa do anular (parede interna do *shroud*), a equação de conservação de energia térmica em regime permanente é dada por:

$$\frac{v_{z,Fext}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial z^2} + \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.68)$$

Caso seja atingido o pleno desenvolvimento térmico:

$$\frac{v_{z,Fext}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} \right) + \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.69)$$

$$\frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial z} = \frac{d\theta_{Fext}}{dz} = \frac{2\pi}{\dot{m}_{Fext} c_{p,L}} (q''_{GC} R_{GC} - q''_{Fext} R_{ext}) \quad (C.70)$$

Assim, substitui-se (C.69) em (C.70):

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} = \frac{2\pi v_{z,Fext}}{\dot{m}_{Fext} c_{p,L} \alpha_L} (q''_{GC} R_{GC} - q''_{Fext} R_{ext}) - \frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.71)$$

Onde:

$$q''_{Fext} = U'_{Fext} (\theta_{Fext} - \theta_{\infty}) \quad (C.72)$$

$$U'_{Fext} = \frac{1}{\frac{1}{h_{Fext}} + \frac{R_{ext} \ln(R_{S,ext}/R_{ext})}{K_s} + \frac{R_{ext}}{R_{S,ext} h_{S,ext}}} \quad (C.73)$$

Para a região de entrada, têm-se a equação local de energia térmica em regime permanente para o filme líquido incompressível da parede externa:

$$\frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta_{Fext}}{\partial z^2} - \frac{v_{z,Fext}}{\alpha_L} \frac{\partial \theta_{Fext}}{\partial z} = -\frac{\mu_L}{K_L} \left(\frac{\partial v_{z,Fext}}{\partial r} \right)^2 \quad (C.74)$$

A partir das equações de conservação de energia térmica locais para cada região, a temperatura do escoamento é calculada conforme:

$$\theta_{anul} = H_{Fint} \theta_{Fint} + (1 - H_{Fint} - H_{Fext}) \theta_{GC} + H_{Fext} \theta_{Fext} \quad (C.75)$$

Onde H_{Fint} e H_{Fext} são as frações do filme líquido da parede interna e externa no escoamento, respectivamente.