

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO

QUANTIFICAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES
EM MALHAS DE CONTROLE OSCILANTES
PELO MÉTODO DA FUNÇÃO DESCRITIVA

VITÓRIA-ES
2012

ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO

**QUANTIFICAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES
EM MALHAS DE CONTROLE OSCILANTES
PELO MÉTODO DA FUNÇÃO DESCRITIVA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Celso Jose Munaro.

Co-orientador: Prof. Dr. Moacir Rosado Filho.

VITÓRIA-ES
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

A663q Araujo, Alancardek Pereira, 1965-
Quantificação de não linearidades em malhas de controle
oscilantes pelo método da função descritiva / Alancardek Pereira
Araujo. – 2012.
105 f. : il.

Orientador: Celso José Munaro.
Coorientador: Moacir Rosado Filho.
Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade
Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Atrito. 2. Válvulas de controle pneumático. I. Munaro, Celso
José. II. Rosado Filho, Moacir. III. Universidade Federal do
Espírito Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621.3

ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO

QUANTIFICAÇÃO DE NÃO LINEARIDADES EM MALHAS
DE CONTROLE PELO MÉTODO DA FUNÇÃO
DESCRITIVA

Tese submetida ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Centro Tecnológico da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 31 de julho de 2012.

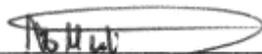
COMISSÃO EXAMINADORA



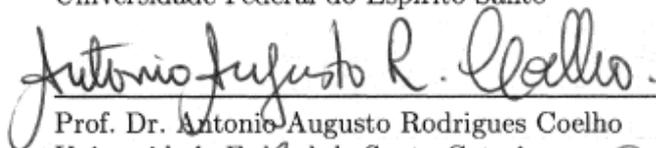
Prof. Dr. Celso Jose Munaro
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador



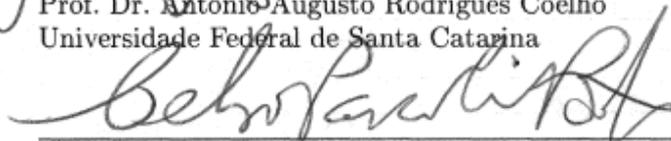
Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Co-orientador



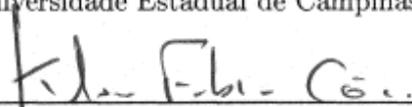
Prof. Dr. Alessandro Mattedi
Universidade Federal do Espírito Santo



Prof. Dr. Antonio Augusto Rodrigues Coelho
Universidade Federal de Santa Catarina



Prof. Dr. Celso Pascoli Bottura
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Klaus Fabian Coco
Universidade Federal do Espírito Santo

Aos meus pais

Merodak Araujo & Roselita Pereira Araujo

Agradecimentos

Sou profundamente grato ao prof. Celso José Munaro pela proposta de problema de tese, por ter me iniciado na pesquisa científica, pela orientação precisa, persistente e eficaz que me conduziu a conclusão desta tese e de outros trabalhos.

Agradeço ao meu co-orientador o prof. Moacir Rosado Filho que exerceu um papel primordial me apresentando ao PPGEE-UFES, me introduzindo à Teoria de Controle através do curso de Sistemas Lineares, por ter estabelecido uma ponte entre a matemática e a engenharia que foi essencial nos meus períodos iniciais, pela amizade já de muitos anos e pelas nossas infinitas conversas sobre tudo.

Agradeço ao PPGEE-UFES por toda a infra-estrutura que tive no LCI (Laboratório de Controle e Instrumentação) para executar todas as minhas tarefas acadêmicas.

Agradeço também aos professores do PPGEE-UFES com quem tive contato em disciplinas e em outras atividades acadêmicas, especialmente José Leandro, Jussara e Alessandro. Agradecimento também ao prof. Ricardo Carelli pelo excelente e motivante curso de Sistemas Não-Lineares de onde aprendi técnicas fundamentais usadas neste trabalho.

Agradeço ao DMAT-UFES por ter me concedido um afastamento de dois anos para me dedicar integralmente ao doutorado e a todos os meus colegas do DMAT.

Agradeço a meus pais por tudo.

Agradeço a Daniela Demuner, minha namorada, pelo incentivo, pela paciência e carinho.

Resumo

Esse trabalho apresenta um novo método de quantificação da banda morta e do atrito em válvulas de controle usando o método da função descritiva. Este método foi originalmente proposto para prever a existência de ciclos limites em malhas de controle e também estimar a amplitude e a frequência destes. Neste trabalho o método da função descritiva é aplicado para a quantificação da banda morta e do atrito estático em válvulas de controle.

O ponto de partida para a aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho, é uma malha de controle com o sinal de controle oscilando devido a presença da banda morta ou do atrito. O algoritmo de quantificação requer as medidas de amplitude e frequência do sinal de controle e a função de transferência da parte linear da malha, ou seja, o produto das funções de transferência do controlador e do processo.

A metodologia é estendida para o caso de processos com incertezas, com o uso de ferramentas da teoria de controle robusto, tais como, plantas intervalares e o teorema de Kharitonov.

Para o caso de processos de primeira ordem com ou sem atraso, a parte linear pode ser aproximada por uma função de transferência com parâmetros que podem ser facilmente identificados, e neste caso, o algoritmo de quantificação adquire uma forma simplificada com fórmulas simples e explícitas dos parâmetros a serem estimados. Isto resulta em um procedimento não invasivo, computacionalmente leve e rápido, diferente de outras metodologias de quantificação, por exemplo baseadas em busca em grade e otimização, que são mais complexas e consomem mais recursos computacionais.

Por fim, a aplicabilidade e a eficácia do algoritmo de estimação são comprovadas em simulações, numa planta piloto com processo com incertezas e em três casos de malhas reais industriais usando apenas os sinais de rotina disponíveis (ausência de modelos).

Palavras-chave: Estimação da banda morta; Estimação de atrito; Função descritiva; Válvula de controle.

Abstract

This work presents a new method to quantify the deadband and friction in control valves using the describing function method. This method was originally proposed for predicting the existence of limit cycles in control loops, and also to estimate the amplitude and frequency thereof. In this work the method of describing function is applied to quantify the dead band and the stiction in control valves.

The starting point for the application of the methodology developed in this work, is a control loop with the control signal oscillating due to the presence of the dead band, or stiction. The algorithm uses the measures of the amplitude and the frequency of the control signal and the transfer function of the linear part of the loop, i.e the product of transfer functions of the controller and the process.

The method is extended to the case of processes with uncertainty, using tools of the robust control theory, such as interval plants and the Kharitonov's theorem.

In the case of first-order processes with or without time delay, the linear part can be approximated by a transfer function with parameters that can be easily identified, and in this case, the quantification algorithm takes a simplified form with simple and explicit formulas for the parameters to be estimated. This results in a non-invasive procedure, computationally light and fast, unlike other methods of quantification, such as grid-based search and optimization, which are more complex and consume more computational resources.

Finally, the applicability and effectiveness of the estimation algorithm is demonstrated through simulations, a pilot plant with process with uncertainties and three real cases from industry using only the routine signals from the control loops.

Sumário

Lista de Abreviaturas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Figuras	xv
1 Introdução	16
1.1 Justificativa para a detecção e quantificação do atrito e da banda morta	16
1.2 Modelagem do atrito em válvulas de controle	16
1.2.1 O modelo clássico de atrito.	17
1.2.2 O modelo de Karnopp.	19
1.2.3 O modelo de Dahl	20
1.2.4 O modelo de Lugre	20
1.2.5 O modelo a dois parâmetros baseado em dados	21
1.2.6 O modelo de Kano	23
1.2.7 O modelo de He	24
1.2.8 Resumo sobre os modelos de atrito	26
1.3 Revisão da literatura sobre métodos para detecção de atrito	26
1.3.1 Método da correlação cruzada	27
1.3.2 Método da distribuição de probabilidade do sinal de erro	27
1.3.3 Análise da não-linearidade e não-Gaussianidade do sinal de erro	27

1.3.4	Método do paralelograma que se ajusta aos dados $OP \times PV$. . .	28
1.3.5	Análise qualitativa do formato da assinatura da válvula	28
1.3.6	Cálculo da área sob o gráfico do sinal de erro	28
1.3.7	Comparação de sinais baseado em formatos padronizados	29
1.4	Revisão da literatura sobre métodos para quantificação do atrito em válvulas de controle	29
1.4.1	Quantificação a partir dos dados OP e PV	29
1.4.2	Quantificação usando o modelo de Hammerstein	30
1.5	Contribuições deste trabalho	32
1.5.1	Organização da tese	32
1.5.2	Artigos publicados	33
2	Previsão de ciclos limite via método da função descritiva	34
2.1	Revisão da literatura sobre o método da FD	34
2.2	Função descritiva - Definição	36
2.3	A função descritiva do atrito	38
2.4	A função descritiva da banda morta	41
2.5	Exemplo de predição de ciclo limite	43
2.6	Análise de erro de predição de ciclo limite	45
3	Quantificação de não-linearidades via método da função descritiva	47
3.1	Introdução	47
3.2	Quantificação do atrito	47
3.2.1	Existência de solução	48
3.2.2	Unicidade de solução	51
3.3	Quantificação da banda morta	55
3.4	Métodos numéricos para solução	57
3.4.1	O caso do atrito	57
3.4.2	O caso da banda morta	58

3.5	Aplicação do método para plantas com incertezas no modelo	58
3.5.1	Teoria de Kharitonov	58
3.5.2	Intervalos de estimação dos parâmetros	59
3.6	Aplicação do método para plantas com modelo desconhecido	61
3.7	Medição da amplitude e do período	65
3.7.1	Medição do período do sinal de controle	65
3.7.2	Medição da amplitude	66
3.8	Sensibilidade a erros nas medidas	66
3.9	Conclusões	69
4	Aplicações e análise do método	71
4.1	Introdução	71
4.2	Simulações	71
4.2.1	Sistema integrador com controlador PI e presença de banda morta	71
4.2.2	Sistema integrador com controlador PI e presença de atrito . . .	73
4.2.3	Sistema de primeira ordem e tempo morto com controlador PI e presença de atrito	77
4.3	Processos com incertezas	79
4.3.1	Quantificação do atrito em sistema com processo de primeira ordem e incerteza no tempo morto	79
4.3.2	Planta piloto	81
4.4	Aplicação a dados reais de processos da indústria	83
4.4.1	Malha de vazão 1	84
4.4.2	Malha de vazão 2	87
4.4.3	Malha de vazão 3	90
4.4.4	Resumo das estimações do atrito nos casos da indústria e conclusões	92
5	Conclusões e trabalhos futuros	94
5.1	Conclusões	94
5.2	Trabalhos futuros	95

Referências Bibliográficas	96
A Simplificação da FD do modelo a dois parâmetros de atrito	100
B O teorema da aplicação inversa no \mathbb{R}^n	103

Lista de Abreviaturas

ARX	Auto-regressivo com entradas exógenas (<i>autoregressive with exogenous inputs</i>)
ARMAX	Auto-regressivo com média móvel e entradas exógenas (<i>autoregressive moving average with exogenous inputs</i>)
FD	Função descritiva
MBG	Método da busca em grade
MV	Variável manipulada (<i>Manipulated variable</i>)
OP	Saída do controlador (<i>Controller output signal</i>)
PI	Controlador Proporcional + Integral
PV	Variável do processo (<i>Process variable</i>)
SP	Referência (<i>Set point</i>)

Lista de Símbolos

A_0	Amplitude de oscilação do sinal do controlador
$C(s)$	Função de transferência do controlador
F_C	Atrito de Coulomb
F_S	Atrito estático
F_V	Atrito viscoso
$G(s)$	Parte linear da malha de controle ($= C(s)P(s)$)
J	Salto de escorregamento do modelo a dois parâmetros de atrito
K	Ganho de um processo de primeira ordem
K_p	Ganho proporcional do controlador PI
$P(s)$	Função de transferência do processo
S	Banda morta + banda de travamento do modelo a dois parâmetros de atrito
T_i	Tempo integral do controlador PI
ω	Frequência angular
ω_0	Frequência de oscilação do sinal do controlador
sgn	Função sinal
τ	Constante de tempo de um processo de primeira ordem
o	Operação de composição de funções

Lista de Tabelas

2.1	Predições da amplitude do sinal de controle	45
2.2	Predições da amplitude e frequência do sinal de controle	46
3.1	Estimação do ganho em função da relação S/J	65
4.1	Estimações da banda morta	72
4.2	Resultado das estimações dos parâmetros do atrito	74
4.3	Estimações dos parâmetros do atrito	78
4.4	Quantificação do atrito pelos métodos da FD e MBG	92

Lista de Figuras

1.1	A relação atrito-velocidade. A força de atrito é menor para velocidades decrescentes do que para velocidades crescentes	17
1.2	Exemplos de modelos estáticos de atrito. A força de atrito é dada por uma função estática da velocidade podendo não estar definida para a velocidade zero. Figura 1.2a) exhibe o atrito de Coulomb, 1.2b) atrito de Coulomb mais atrito viscoso, 1.2c) atrito estático + Coulomb + viscoso e 1.2d) mostra como a força de atrito pode decrescer continuamente a partir do nível máximo de atrito estático.	18
1.3	Modelo de Dahl linear no domínio do deslocamento	20
1.4	Assinatura de uma válvula ideal com atrito.	22
1.5	Algoritmo do modelo a dois parâmetros baseado em dados	23
1.6	Algoritmo do modelo de Kano	24
1.7	Relação entrada-saída	25
1.8	Algoritmo do modelo de He	25
1.9	Quantificação do atrito pela elipse que melhor se ajusta aos dados $OP - PV$	30
1.10	Esquema geral da quantificação do atrito usando um modelo de Hammerstein	31
2.1	Sistema de controle não-linear	36
2.2	Curvas negativo inverso da FD do atrito	40
2.3	Oscilação devido ao atrito	41
2.4	Relação entrada-saída para a banda morta	42
2.5	Curva negativo inverso da FD da banda morta.	42
2.6	Processo de 1ª ordem estável com controlador PI, ausência de ciclos limites. .	43
2.7	Sinais de controle para cada parâmetro d usado	44

2.8	Sinais de controle para cada parâmetro S usado	46
3.1	Malha de controle não linear	48
3.2	Região triangular \mathcal{T} no plano $S/A \times J/A$	49
3.3	Região de atrito \mathcal{S}	50
3.4	Suavização dos vértices da fronteira de \mathcal{T}	53
3.5	Abordagem I para estimação de d	56
3.6	Conjunto resposta frequencial no interior da região de atrito	61
3.7	Processo de primeira ordem e atrito	63
3.8	Sinais $u(t)$, $y(t)$ e $v(t)$	64
3.9	Módulo e fase da FD do atrito	64
3.10	A aplicação F	67
3.11	Fluxograma do algoritmo de quantificação do atrito pelo método da FD	70
4.1	Gráfico de Nyquist de G e a curva negativo inverso da FD da banda morta	73
4.2	Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $d = 5\%$, 50% e 90%	73
4.3	Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $S = 10$; $J = 0.5$, $J = 5$	75
4.4	Gráfico de Nyquist de $G(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito	75
4.5	Gráficos de ΔS e ΔJ	76
4.6	Gráfico de Nyquist de $G(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito	77
4.7	Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $S = 10$; $J = 0.5$, $J = 9$	78
4.8	Conjunto resposta frequencial correspondente a 50% de incerteza no tempo morto	80
4.9	Planta piloto	81
4.10	Sinais da planta piloto	82
4.11	Conjunto resposta frequencial de $\mathbf{G}(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito	83
4.12	Sinais da malha de vazão 1	84
4.13	Validação do controlador identificado	85
4.14	Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade	86

4.15	Sinais da malha de vazão 2	87
4.16	Validação do controlador identificado	88
4.17	Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade	89
4.18	Sinais da malha de vazão 3	90
4.19	Validação do controlador identificado	91
4.20	Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade	92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Justificativa para a detecção e quantificação do atrito e da banda morta

A presença de não linearidades é uma das principais causas do baixo desempenho de malhas de controle contendo válvulas. Este baixo desempenho se traduz em oscilações, as quais, aumentam a variabilidade na variável do processo causando a queda na qualidade da produção e ainda se propagam para outras malhas de controle interligadas. As não linearidades mais comuns em válvulas de controle são o atrito e a banda morta. Portanto, é de extrema importância a detecção prematura destas não linearidades, cuja solução definitiva é a manutenção. Quando isto não é possível, pois paradas para manutenção são pouco frequentes, a quantificação do atrito permite sua compensação de forma a manter um melhor desempenho da malha de controle até que a manutenção seja feita.

1.2 Modelagem do atrito em válvulas de controle

O atrito é um conceito físico de difícil modelagem, existindo diversos modelos matemáticos (Olsson et al. [1998]) com vários níveis de complexidade. O atrito em válvulas de controle tem sido modelado usando duas abordagens: Modelos físicos e modelos baseados em dados. O uso de um modelo físico de atrito em válvulas de controle, envolve o conhecimento de vários parâmetros tais como forças de atrito na válvula, massa da haste, constante da mola, etc. Valores explícitos destes parâmetros dependem das dimensões e do fabricante da válvula. Por outro lado, um modelo de atrito baseado em dados é simples de usar e requer o conhecimento de poucos parâmetros, usualmente um ou dois parâmetros, mais simples de se obter. Estudaremos neste capítulo os principais modelos que têm sido utilizados na literatura para estimação e compensação de atrito. Métodos para detecção e quantificação são também abordados.

1.2.1 O modelo clássico de atrito.

Os modelos clássicos de atrito consistem de diferentes componentes, cada uma das quais levam em conta certos aspectos da força de atrito. A idéia principal é que a força de atrito se opõe ao movimento, e que a sua magnitude é independente da velocidade e da área de contato. Portanto a força de atrito pode ser descrita como:

$$F = F_C \operatorname{sgn}(v) \quad (1.1)$$

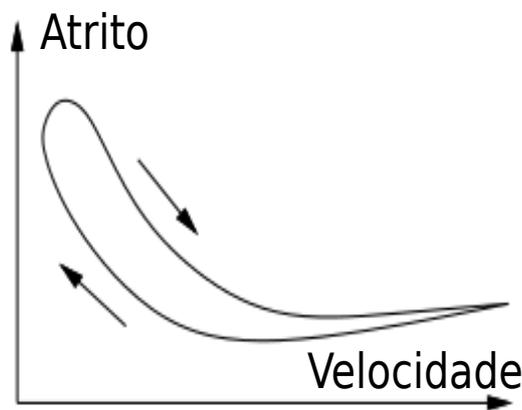


Figura 1.1: A relação atrito-velocidade. A força de atrito é menor para velocidades decrescentes do que para velocidades crescentes

Na equação (1.1) a força de atrito F_C é proporcional a força normal F_N , ou seja, $F_C = \mu F_N$. Esta descrição da força de atrito é denominada força de atrito de Coulomb, ver Figura 1.2a).

Nota-se que a expressão da força de atrito F em (1.1) é um relé ideal. A força de atrito de Coulomb não está definida para velocidade zero. Esta pode ser zero ou assumir qualquer valor no intervalo $[-F_C, F_C]$, dependendo de como a função sinal é definida. O modelo de força de atrito de Coulomb, devido a sua simplicidade, tem sido usado com frequência para propósitos de compensação de atrito (Friedland e Park [1991] Baril [1993]).

No século 19, com o uso da teoria da hidrodinâmica, foram obtidas expressões para a força de atrito causada pela viscosidade de lubrificantes (Reynolds [1886]). O termo atrito viscoso é usado para esta componente da força de atrito que normalmente é descrita como

$$F = F_v v \quad (1.2)$$

O atrito viscoso é frequentemente combinado com o atrito de Coulomb como mostrado na Figura 1.2b). Um melhor ajuste a dados experimentais pode ser obtido usando uma dependência não linear da velocidade:

$$F = F_v |v|^{\delta_v} \operatorname{sgn}(v) \quad (1.3)$$

δ_v depende da geometria da aplicação, ver (SKF [1970] e Andersson [1993]).

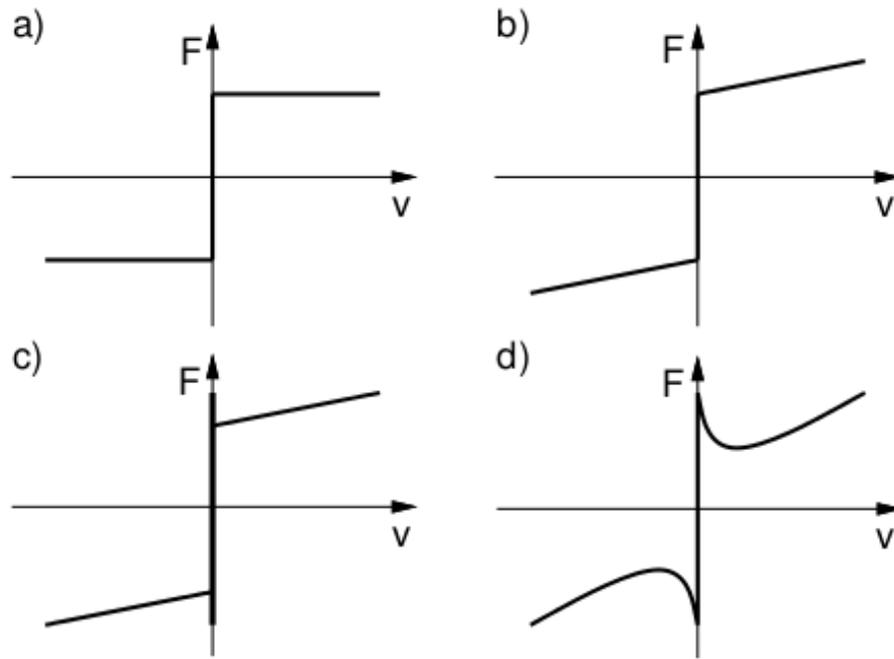


Figura 1.2: Exemplos de modelos estáticos de atrito. A força de atrito é dada por uma função estática da velocidade podendo não estar definida para a velocidade zero. Figura 1.2a) exhibe o atrito de Coulomb, 1.2b) atrito de Coulomb mais atrito viscoso, 1.2c) atrito estático + Coulomb + viscoso e 1.2d) mostra como a força de atrito pode decrescer continuamente a partir do nível máximo de atrito estático.

O atrito estático descreve a força de atrito no repouso. Em (Morin [1833]) introduziu-se a idéia de uma força de atrito no repouso com magnitude maior que a força de atrito de Coulomb. A força de atrito estático se opõe às forças externas abaixo de um certo valor e assim impede que o objeto se mova. Portanto, é claro que a força de atrito no repouso não pode ser descrita por uma função apenas da velocidade. Ao invés disto, ela é modelada usando a força externa F_e da seguinte forma

$$F = \begin{cases} F_e, & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e), & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| \geq F_S \end{cases} \quad (1.4)$$

A força de atrito para velocidade zero é uma função apenas da força externa. A maneira tradicional de representar a força de atrito em um diagrama de blocos com a velocidade como entrada e a força como saída, não é portanto completamente correto. Se assim fosse, a força de atrito deveria ser expressa como uma função a multi valores (formalmente não função) que poderia assumir qualquer valor no intervalo $[-F_S, F_S]$. Se a força de atrito fosse definida desta maneira, isto levaria a não unicidade das soluções das equações do movimento (Bliman e Sorine [1995]).

As componentes clássicas da força de atrito podem ser combinadas em diferentes formas, ver Figura 1.2c), e qualquer tal combinação é denominada um modelo clássico. Estes modelos clássicos possuem componentes que ou são lineares na velocidade ou são constantes. Stribeck observou em (Stribeck [1902]) que a força de atrito não decresce descontinuamente como na Figura 1.2c), mas continuamente como função da velocidade como mostrado na Figura 1.2d). A dependência representada na Figura 1.2d) chama-se força de atrito de Stribeck. Uma descrição mais geral do modelo clássico da força de atrito é portanto

$$F = \begin{cases} F(v) & \text{se } v \neq 0 \\ F_e & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| \geq F_S \end{cases} \quad (1.5)$$

$F(v)$ é uma função arbitrária cujo gráfico pode ser como na Figura 1.2d). Em (Armstrong-Hélouvy [1991]) foram propostas várias parametrizações para $F(v)$. Uma forma comum de não linearidade é

$$F(v) = F_C + (F_S - F_C)e^{-|v/v_S|^{\delta_S}} + F_v v \quad (1.6)$$

v_S é chamada a velocidade de Stribeck. Tais modelos são usados a um longo tempo. A função F é facilmente obtida medindo-se a força de atrito para movimentos com velocidade constante. A curva é frequentemente assimétrica.

1.2.2 O modelo de Karnopp.

A principal desvantagem do uso do modelo clássico dado na equação (1.5) para propósitos de simulação ou controle é o problema de se detectar a velocidade zero. Uma solução para este problema foi apresentada por Karnopp em (Karnopp [1985]). Para superar os problemas com a detecção da velocidade zero, ele definiu um intervalo em torno da velocidade zero da forma $|v| < DV$ de modo que as duas últimas linhas da equação (1.5) funcionam para os valores de v neste intervalo $[-DV, DV]$. Portanto o modelo de Karnopp é dado por

$$F = \begin{cases} F_C + (F_S - F_C)e^{-|v/v_S|^{\delta_S}} + F_v v & \text{se } v \neq 0 \\ F_e & \text{se } |v| < DV \text{ e } |F_e| < F_S \\ F_S \operatorname{sgn}(F_e) & \text{se } |v| < DV \text{ e } |F_e| \geq F_S \end{cases} \quad (1.7)$$

1.2.3 O modelo de Dahl

Um modelo físico de atrito bastante popular é o modelo de Dahl (Dahl [1968]) devido a sua simplicidade, e a sua habilidade de capturar muito do comportamento do atrito observado na prática. O modelo de Dahl é definido pela seguinte equação diferencial ordinária de primeira ordem na variável deslocamento x

$$\frac{dF_{hys}}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F_{hys}}{F_{max}} \text{sign}(\dot{x}) \right)^\alpha \quad (1.8)$$

Nesta equação F_{hys} é a saída do modelo de Dahl, o deslocamento x é a entrada, F_{max} é o valor máximo da força de atrito, σ é a inclinação de F_{hys} com relação à posição no cruzamento por zero (Figura 1.3). Quando $\alpha = 1$ o modelo de Dahl é dito linear.

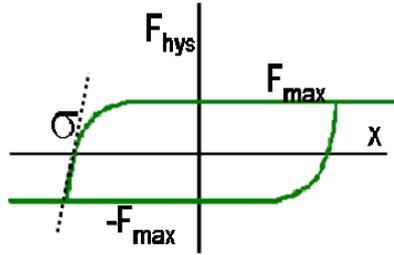


Figura 1.3: Modelo de Dahl linear no domínio do deslocamento

Integrando a equação diferencial do modelo de Dahl (1.8) com relação a x e substituindo $x(t)$, tem-se

$$F_{hys}(t) = \text{sgn}(\dot{x}(t))(-F_0 + (F_{max} + F_0)(1 - e^{-\frac{\sigma}{F_{max}}|x(t)-x_0|})) \quad (1.9)$$

x_0 é a posição inicial e F_0 é a força de histerese correspondente à posição inicial.

1.2.4 O modelo de Lugre

O modelo de Lugre é um modelo físico que descreve os efeitos do atrito de forma mais precisa, principalmente nas baixas velocidades e nas reversões de velocidade. Este modelo foi proposto em (de Wit et al. [1995]). O nome Lugre é proveniente da junção dos nomes dos institutos de pesquisa LUnd Institute of Technology na Suécia e Laboratory of Automatic Control of GRE noble na França, locais onde foram realizadas as pesquisas que resultaram na criação deste modelo. O modelo de Lugre é definido pelas equações (1.10), (1.11) e (1.12) (Olsson [1996])

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{|v|}{g(v)}z \quad (1.10)$$

$$g(v) = \frac{1}{\sigma_0} \left[F_c + (F_s - F_c)e^{-(v/v_s)^2} \right] \quad (1.11)$$

$$F_{friction} = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + F_v v \quad (1.12)$$

Aqui z é a deflexão média das cerdas (a nível microscópico as superfícies são muito irregulares, o contato entre as superfícies ásperas é modelado usando cerdas elásticas), v é a velocidade relativa entre as superfícies, $g(v)$ é uma função positiva que especifica o quanto a deflexão média das cerdas depende da velocidade relativa entre as superfícies, σ_0 é o coeficiente de rigidez e σ_1 é o coeficiente de amortecimento.

1.2.5 O modelo a dois parâmetros baseado em dados

Neste trabalho estamos interessados no problema específico do atrito em válvulas de controle pneumáticas. Os modelos de atrito vistos até agora, por serem genéricos, se aplicam à válvulas de controle. Tais modelos são ditos modelos físicos porque baseiam-se na física dos agentes causadores das diversas formas de atrito. O uso de um modelo físico de atrito em válvulas de controle requer o conhecimento de vários parâmetros, tais como, coeficientes que parametrizam os diversos tipos de força de atrito, a massa das partes móveis, a constante da mola, etc. Estes parâmetros dependem das dimensões da válvula e são difíceis de serem obtidos na prática. Um outro tipo de modelo baseado apenas no comportamento entrada-saída de válvulas reais com atrito é denominado um modelo baseado em dados. Tais modelos são descritos por algoritmos que calculam a saída da válvula em função da entrada e dependem no máximo de dois parâmetros. A vantagem de um modelo de atrito baseado em dados reside no reduzido número de parâmetros e são computacionalmente leves para serem usados em simulações quando comparados com os modelos físicos.

Na Figura 1.4 é exibido o comportamento entrada-saída típico de uma válvula com atrito (assinatura). Este gráfico é produzido variando-se o sinal de entrada (pressão) de 0 a 100% de forma cíclica e observando-se a saída (abertura da válvula). Este diagrama consiste de quatro componentes: a banda morta, a banda de travamento, o salto de escorregamento e a fase de movimento. Quando a haste da válvula parte do repouso ou muda de direção no ponto A da Figura 1.4, a válvula trava. Após o sinal de controle vencer a banda morta (AB) e a banda de travamento (BC), a válvula salta para uma nova posição (D) e continua a se mover. Devido a velocidade muito baixa ou zero, a válvula pode travar de novo entre os pontos D e E. Neste caso a magnitude da banda morta é zero e apenas a banda de travamento está presente.

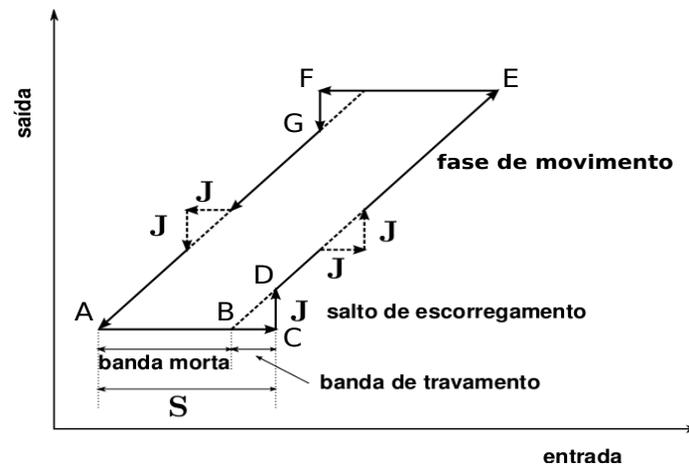


Figura 1.4: Assinatura de uma válvula ideal com atrito.

Em (Choudhury et al. [2004]) os autores apresentaram um modelo a dois parâmetros de atrito em válvulas de controle baseado em dados. O modelo reproduz o mesmo comportamento entrada-saída descrito na Figura 1.4 para sinais de entrada determinísticos tipo triangular ou senoidal por exemplo e é parametrizado apenas pelos parâmetros S (magnitude da banda morta + banda de travamento) e J (magnitude do salto de escorregamento). O modelo é descrito no fluxograma da Figura 1.5

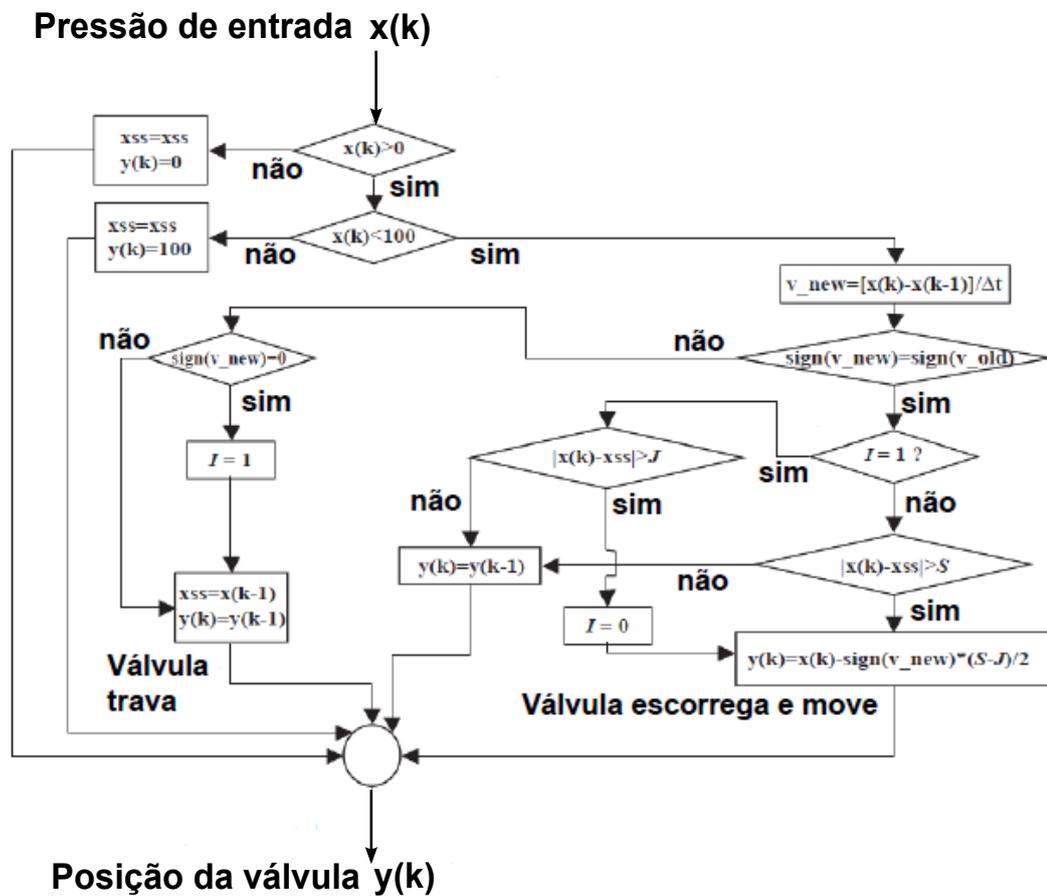


Figura 1.5: Algoritmo do modelo a dois parâmetros baseado em dados

1.2.6 O modelo de Kano

O modelo de atrito a dois parâmetros baseados em dados dos autores em (Choudhury et al. [2004]) funciona bem com sinais determinísticos na entrada, tais como sinais senoidal e triangular. De fato, como apontado pelos autores em (Kano e Ogawa [2009]) o modelo de atrito a dois parâmetros não funciona bem com sinais de entrada estocásticos, eles construíram um modelo de atrito em válvula de controle baseado em dados, parametrizado pelos mesmos parâmetros S e J do modelo anterior e que constitui uma extensão deste modelo capaz de funcionar também com sinais de entrada estocásticos. Na Figura 1.6 é apresentado o algoritmo do modelo de Kano.

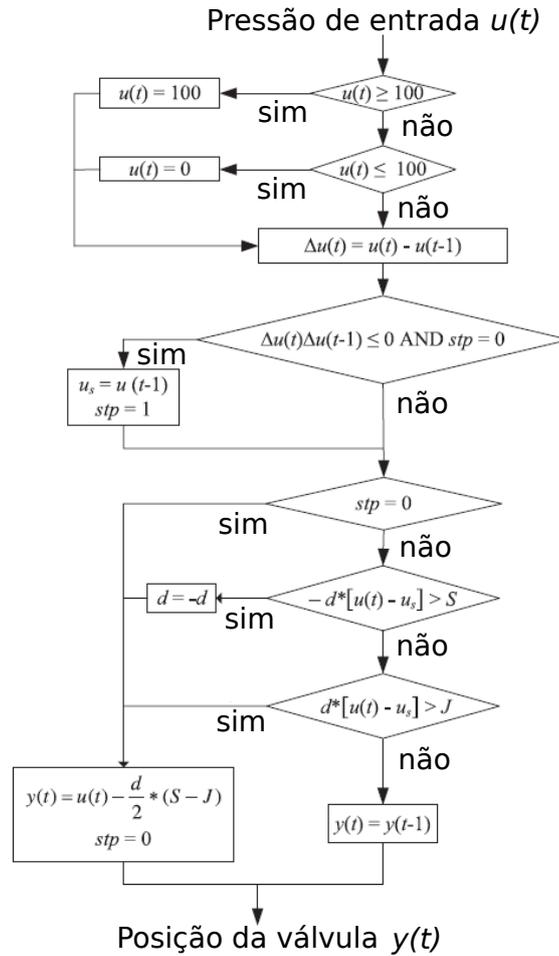


Figura 1.6: Algoritmo do modelo de Kano

1.2.7 O modelo de He

O modelo de He (He et al. [2007]) é um modelo baseado em dados menos complexo que o modelo de Kano. Este modelo requer dois parâmetros: f_S (banda de atrito estático) e f_D (banda de atrito cinético). O parâmetro J é definido por $f_S - f_D$ e o parâmetro S é definido por $f_S + f_D$ como mostrado na Figura 1.7. O algoritmo do modelo de He é exibido na Figura 1.8, $u(t)$ é a entrada e $u_v(t)$ é a saída.

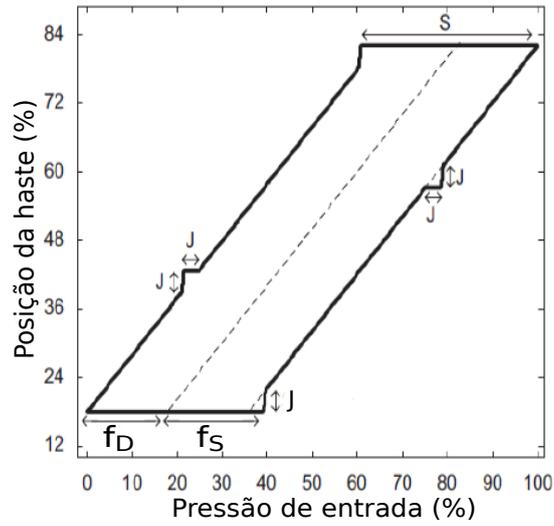


Figura 1.7: Relação entrada-saída

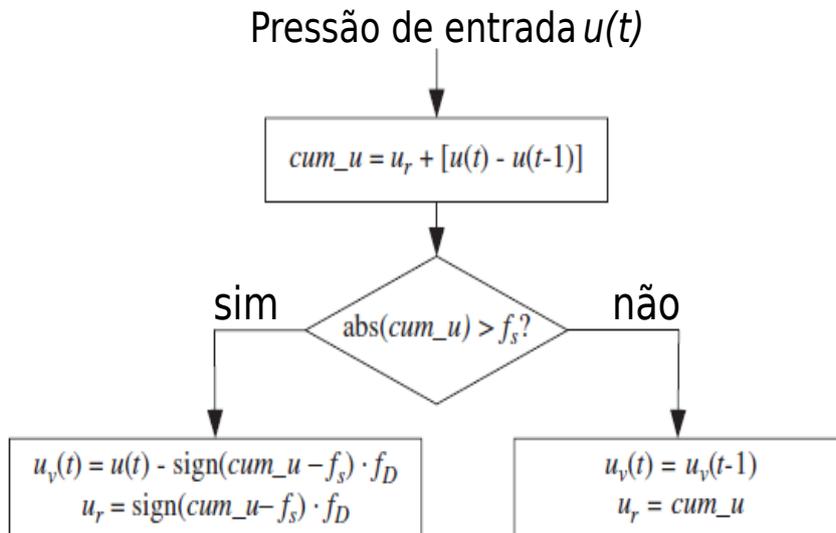


Figura 1.8: Algoritmo do modelo de He

1.2.8 Resumo sobre os modelos de atrito

Em (Garcia [2008]) o autor compara oito modelos de atrito em válvulas de controle com o objetivo de avaliar a eficácia dos modelos na representação do comportamento de válvulas reais afetadas por atrito. São usados quatro modelos físicos e quatro modelos baseados em dados bem conhecidos da literatura. O autor submete os modelos a testes definidos pelos padrões ISA (ISA [2000], ISA [2006]) para válvulas industriais reais. Entre os oito modelos testados pelo autor estão os modelos físicos clássico, de Karnopp e de Lugre e os modelos baseados em dados a dois parâmetros e de Kano. Cada modelo foi submetido a cinco tipos de testes com três níveis de atrito.

Para os propósitos deste trabalho, um importante teste é o teste de assinatura que é feito introduzindo um sinal determinístico tipo rampa ou senoidal no modelo variando de 0 a 100% e observando-se a saída. O gráfico é construído traçando-se os pontos entrada versus saída do modelo. De acordo com (Garcia [2008]), os modelos físicos de Karnopp e Lugre reproduzem o mesmo gráfico da Figura 1.4, e também, o mesmo é verificado para os modelos baseados em dados a dois parâmetros e de Kano, embora seus comportamentos não coincidam em vários outros testes.

O método da função descritiva a ser usado neste trabalho baseia-se na relação entrada-saída mostrada na Figura 1.4. Assim, a análise feita em (Garcia [2008]) permite concluir a que modelos de atrito esta metodologia se aplica.

Em todos os exemplos e análises deste trabalho o modelo a dois parâmetros será o utilizado (Choudhury et al. [2004]).

1.3 Revisão da literatura sobre métodos para detecção de atrito

A detecção de atrito em válvulas de controle é importante pois permite indicar a causa de oscilações e selecionar válvulas que eventualmente podem requerer manutenção. Os métodos para detecção do atrito em malhas contendo válvulas de controle podem ser divididos em duas categorias: métodos invasivos e métodos não invasivos ou automáticos. Os métodos invasivos consistem genericamente na aplicação de sinais específicos na válvula e análise da resposta a estes sinais. Embora simples, esta metodologia costuma ter custo elevado pois envolve a parada de parte da planta, e portanto da produção, para a execução dos testes. Assim, existe uma necessidade óbvia na indústria de processos por métodos automáticos de detecção do atrito baseados apenas nos sinais de rotina da malha de controle. Algumas válvulas de controle possuem posicionador e desta forma disponibilizam a posição MV da haste. Nestes casos, gráficos dos sinais de controle OP versus MV podem facilmente diagnosticar o atrito. O problema é que a grande maioria das válvulas de controle não possuem posicionador e assim o sinal MV raramente está disponível. Neste contexto métodos automáticos de detecção são considerados efetivos na indústria de processos se utilizarem apenas os sinais de rotina

da malha de controle. Os sinais considerados de rotina são a referência r (SP), o sinal de controle u (OP) e o sinal de saída y (PV).

No que se segue, são apresentados resumidamente alguns métodos de detecção do atrito conhecidos na literatura.

1.3.1 Método da correlação cruzada

Introduzido em (Horch [1999]), este método usa OP e PV para prever a presença de atrito em um sistema com processo não-integrador e controlador proporcional integral (PI). Este algoritmo é baseado na função de correlação cruzada de OP com PV . A idéia chave é: "Se a função de correlação cruzada de OP com PV é uma função ímpar, então a provável causa da oscilação é o atrito, e se a função de correlação cruzada de OP com PV é par, então a causa mais provável é uma oscilação externa ou sintonia agressiva do controlador" (Horch [1999]). A razão para esta afirmação é que, para um sistema satisfazendo as hipóteses para o processo e o controlador, e em baixa frequência de oscilação, a diferença de fase entre dois sinais deve ser um múltiplo de $-3\pi/2$, o que torna uma função ímpar. O fato é que em contraste com o atrito, sintonia agressiva do controlador pode levar a oscilações de alta frequência no sistema. Se a função de correlação cruzada de OP com PV estiver suficientemente próxima de uma função ímpar, então a algoritmo confirmará a presença de atrito na válvula.

1.3.2 Método da distribuição de probabilidade do sinal de erro

A ideia chave deste método consiste em detectar mudanças bruscas no sinal de erro ($SP - PV$), usando a distribuição de probabilidade da derivada primeira do sinal de erro para processos auto-regulados e a derivada segunda para processos com integrador (Horch e Isaksson [2001]). O critério para um processo com integrador é: "Considere a derivada segunda do sinal de saída PV (filtrado). Verifique se a função de distribuição de probabilidade é aproximadamente Gaussiana, ou está próxima de uma senóide com a adição de um ruído Gaussiano. Se a função de distribuição de probabilidade se ajusta melhor a primeira situação então é reportado atrito, e se a função de distribuição de probabilidade se ajustar melhor a segunda situação tem-se ausência de atrito" (Horch e Isaksson [2001]). Procedimento similar é válido para processos auto-regulados usando a derivada segunda do sinal de erro.

1.3.3 Análise da não-linearidade e não-Gaussianidade do sinal de erro

Em (Choudhury [2000]) é proposto um algoritmo de detecção automática do atrito que visa a detecção de não-linearidades em geral em sistemas de controle e não apenas atrito. O autor definiu dois índices diferentes para não-linearidade e não-gaussianidade do sinal de controle. Se o resultado de ambos os testes é positivo, então a presença

de não-linearidade no sistema de controle é confirmada. O autor afirma que a origem do problema é o elemento final na malha de controle (a válvula) se: (1) o processo é localmente linear, (2) distúrbios não lineares não entram na malha, e (3) a característica da válvula de controle é razoavelmente linear na região de operação da malha. Esta metodologia utiliza apenas os sinais de rotina da malha (SP , OP e PV).

1.3.4 Método do paralelograma que se ajusta aos dados $OP \times PV$

Os autores em (Kano et al. [2004]) propuseram uma abordagem para detecção do atrito baseada na relação entre os sinais de entrada e saída de uma válvula com atrito. No caso de atrito o diagrama $OP \times MV$ da válvula (assinatura) tem o formato de um paralelograma vide Figura 1.4. Na indisponibilidade do sinal MV , é usado o sinal de saída PV . A principal dificuldade neste método é automatizar um algoritmo para reconhecer um paralelograma a partir de uma elipse que é a forma geral do gráfico $OP \times PV$ no caso de oscilações lineares. Também é proposto um algoritmo para fazer o ajuste dos dados no caso de dados de rotina de malhas de controle industriais.

1.3.5 Análise qualitativa do formato da assinatura da válvula

Este método proposto em (Yamashita [2004]) também usa o gráfico $OP \times PV$ para detectar o atrito. Primeiro, são definidos objetos chamados primitivas que quantificam possíveis alterações no gráfico $OP \times PV$. Com base na sequência de primitivas que se ajustam a assinatura da válvula, um índice pode ser definido para concluir a presença de atrito na válvula.

1.3.6 Cálculo da área sob o gráfico do sinal de erro

Em (Singhal e Salsbury [2005]) foi proposto um método de detecção do atrito em malhas com processos auto-regulados, baseado na área sob o gráfico do sinal de erro. Eles afirmaram: "sintonia agressiva do controlador usualmente resulta em oscilação senoidal do sinal de erro, enquanto que para uma válvula com atrito, o sinal tipicamente tem um decaimento exponencial e uma subida. A razão para este comportamento é que, enquanto a entrada da planta é contínua no caso de controle agressivo (exceto no caso de saturação da saída do controlador), o atrito na válvula resulta em descontiniuidade na saída da planta que se aproxima de uma onda retangular" (Singhal e Salsbury [2005]). O algoritmo de detecção, primeiro reconhece dois cruzamentos por zero consecutivos, e então acha o máximo (ou o mínimo) do sinal entre estes dois pontos. O segmento de reta vertical passando pelo ponto de máximo divide a parte do gráfico entre os dois pontos de cruzamento por zero, em duas regiões com áreas A_1 e A_2 . A igualdade entre A_1 e A_2 implica em oscilação linear, e valores da razão A_1/A_2 distantes de 1, indicam a existência de atrito.

1.3.7 Comparação de sinais baseado em formatos padronizados

Oscilações em malhas de controle induzidas pelo atrito usualmente tem ciclos com formatos bem conhecidos. Este fato motivou os autores de (Scali e Ulivari [2005]) e (Srinivasan et al. [2005a]) a desenvolver algoritmos que são capazes de reconhecer padrões de oscilações de um sistema e comparar com formatos pré-estabelecidos. Para este propósito, sugeriu a comparação do gráfico da PV com uma sequência de pulsos quadrados e triangulares, os quais são comumente vistos em plantas que oscilam devido ao atrito. Os autores também sugeriram levar este procedimento para cada ciclo separadamente. Para fazer o algoritmo mais geral, (Srinivasan et al. [2005a]) escolheu a resposta ao degrau de um processo de primeira ordem com tempo morto como uma padrão pré-definido. Neste caso, mudando os valores do ganho (K) do processo, da constante de tempo (τ) e do tempo morto (θ) é criada uma grande variedade de padrões. Os resultados dos métodos mencionados são qualitativos e é assumido que o atrito é a única não-linearidade.

1.4 Revisão da literatura sobre métodos para quantificação do atrito em válvulas de controle

Algumas válvulas de controle podem funcionar com um nível aceitável de atrito, enquanto outras com um severo nível de atrito requerem manutenção imediata. Portanto, é de extrema importância a quantificação do atrito com a finalidade de indicar as válvulas com níveis críticos de atrito que requerem manutenção. A quantificação do atrito também permite o uso de algoritmos de compensação de garantem uma melhoria no desempenho da malha de controle até que a compensação possa ser feita (de Souza Leite Cuadros et al. [2012]).

1.4.1 Quantificação a partir dos dados OP e PV

Alguns tipos de válvulas de controle modernas possuem posicionadores que medem a posição real da haste MV , mas a grande maioria das válvulas de controle industriais não possuem este dispositivo. Se a posição da haste MV estiver disponível, então um gráfico da entrada da válvula OP versus a saída MV (assinatura da válvula), pode ser usado para quantificar o atrito, e esta é a situação ideal para a quantificação. No caso de indisponibilidade da posição MV , o desafio é quantificar o atrito a partir apenas dos dados OP (sinal de controle ou entrada da válvula) e do sinal de saída do processo PV .

Em (Choudhury et al. [2006]) os autores descreveram uma metodologia para quantificar o atrito a partir da largura máxima da elipse que melhor se ajusta ao gráfico $OP \times PV$ medida na direção de OP (horizontal). Esta quantidade é denominada atrito estático aparente (*apparent stiction*) e pode ser obtido da seguinte expressão

$$\text{atrito aparente} = \frac{2mn}{\sqrt{m^2 \sin^2 \alpha + n^2 \cos^2 \alpha}}$$

m e n são os comprimentos do maior eixo e do menor eixo da elipse respectivamente e α é o ângulo de rotação da elipse. Este método apresenta limitações pois o atrito aparente é afetado pela dinâmica da parte linear (controlador e processo) (Choudhury et al. [2006]), no entanto a quantidade de atrito aparente é uma medida da severidade do atrito. Na Figura 1.9(b) tem-se uma ilustração da quantificação pelo método da elipse que melhor se ajusta aos dados $OP \times PV$.

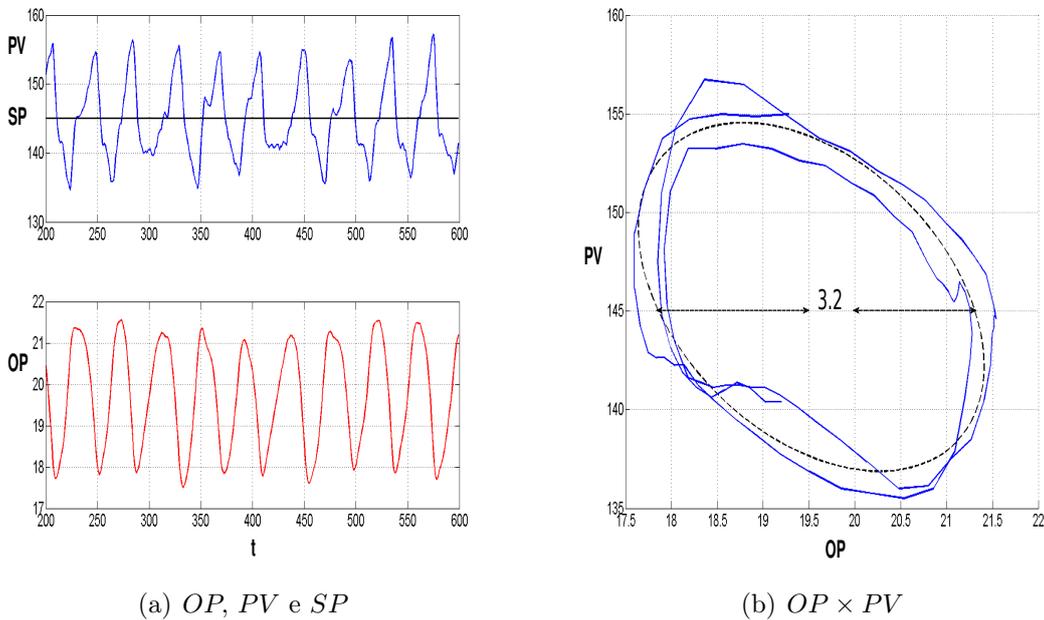


Figura 1.9: Quantificação do atrito pela elipse que melhor se ajusta aos dados $OP - PV$

1.4.2 Quantificação usando o modelo de Hammerstein

Um modelo de Hammerstein consiste de um sistema formado por dois blocos ligados em série, o primeiro na entrada é uma não linearidade estática e o segundo na saída é linear. Aqui o modelo de Hammerstein tem por não linearidade um modelo de atrito e a parte linear consiste da dinâmica linear da válvula e do processo. A quantificação do atrito é realizada através da identificação dos parâmetros do modelo de atrito usado no modelo de Hammerstein.

Na Figura 1.10 é exibido o esquema geral para quantificação do atrito usando um modelo de Hammerstein. Os únicos sinais disponíveis são a referência SP , o sinal de controle OP e a saída do processo PV . O bloco não linear $\mathcal{N}(\lambda_i)$ representa um modelo de atrito parametrizado pelo parâmetro vetorial λ_i e tem como entrada o sinal de controle OP . Para cada parâmetro λ_i é gerada uma saída MV_i , com esta MV_i e

PV é identificado um modelo linear ARX ou ARMAX, com este modelo é gerada uma saída $\hat{P}V_i$. O erro médio quadrático MSE entre PV e $\hat{P}V_i$ é calculado e armazenado. O parâmetro $\hat{\lambda}_i$ correspondente ao menor erro MSE é reportado como o parâmetro estimado do modelo de atrito usado.

Os vários métodos de quantificação baseados em modelos de Hammerstein que aparecem na literatura, diferem pelo modelo de atrito usado e também pela forma como a busca no espaço de parâmetros é feita.

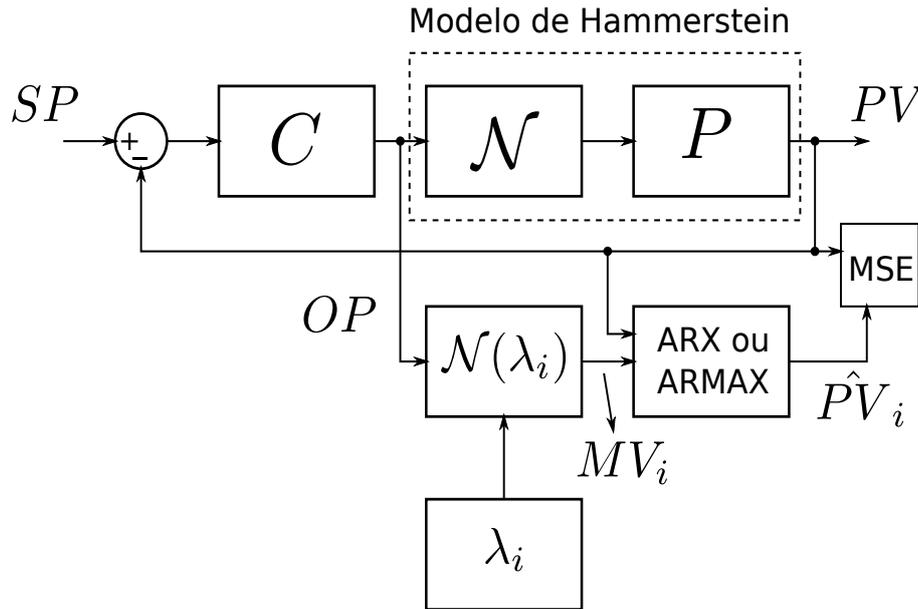


Figura 1.10: Esquema geral da quantificação do atrito usando um modelo de Hammerstein

Em (Srinivasan et al. [2005b]) os autores quantificam o atrito em válvula de controle utilizando um esquema como o da Figura 1.10. Eles utilizaram um modelo a um parâmetro de atrito e um processo de busca em grade unidimensional de parâmetro e otimização por minimização do erro MSE. O problema neste método é o uso do modelo a um parâmetro de atrito que não captura o verdadeiro comportamento do atrito em válvulas de controle (Choudhury et al. [2008a]).

Em (Choudhury et al. [2008a]) os autores utilizam o modelo a dois parâmetros S e J de atrito em válvulas de controle. Os parâmetros são pesquisados numa grade bidimensional $\lambda_i = (S_i, J_i)$, e os parâmetros estimado do modelo de atrito são obtidos pela minimização do erro MSE entre as saídas real PV e as estimadas $\hat{P}V_i$. Este método de quantificação do atrito será denominado neste trabalho de método de busca em grade (MBG).

(Jelali [2007]) substituiu a busca em grade por um algoritmo de otimização usando algoritmos genéticos. Um método que calcula os parâmetros da planta e do atrito em um único passo usando um algoritmo de otimização global é proposto em (Farenzena e Trierweiler [2012]).

1.5 Contribuições deste trabalho

Nesta tese é proposta uma nova metodologia para a quantificação do atrito e da banda morta em válvulas de controle baseada no método da função descritiva (FD) (Slotine e Li [1991]). O método da FD foi originalmente criado para prever a existência de ciclos limite em malhas de controle não-lineares e também estimar a amplitude e a frequência destes. O ponto de partida desta metodologia é uma malha de controle com o sinal de controle u oscilando devido à presença da banda morta ou do atrito, tendo a causa da oscilação sido detectada por um dos métodos descrito na seção 1.3. Usando a amplitude e a frequência de oscilação do sinal de controle u e a função de transferência do controlador e do processo, resolve-se uma equação de balanço harmônico cuja solução são os parâmetros S e J da FD do atrito ou o parâmetro d da banda morta, conforme a não-linearidade que se deseja quantificar. Os resultados são estendidos para o caso de incerteza paramétrica no modelo do processo e para ao caso de modelo de processo desconhecido.

1.5.1 Organização da tese

- No Capítulo 1 tem-se apresentação do atrito em válvulas de controle, justificativas para detecção e quantificação do atrito e revisão da literatura.
- No Capítulo 2 apresenta-se o método da função descritiva (FD) e revisão da literatura. Apresenta-se também a quantificação de não-linearidades pelo método da FD e as funções descritivas do atrito e da banda morta.
- No Capítulo 3 é feito um estudo rigoroso sobre a existência e unicidade de solução na equação de balanço harmônico, para a estimação dos parâmetros das FDs das não-linearidades consideradas. É proposta também uma generalização da estimação pelo método da FD que se aplica a processos com incertezas paramétricas. Por fim, é apresentada uma metodologia baseada em regras gerais de sintonia de controladores, para obter uma fórmula para estimação dos parâmetros do atrito em função dos parâmetros estimados do controlador e do ganho estimado do processo.
- No Capítulo 4 a metodologia de quantificação baseada no método da FD é aplicada a 3 casos de simulações, a uma planta piloto com a função de transferência do processo com incertezas paramétricas e a 3 casos da indústria onde só estão disponíveis os dados de rotina (OP , PV e SP).
- No Capítulo 5 tem-se as conclusões do trabalho e trabalhos futuros.

1.5.2 Artigos publicados

- (1) Araujo, A. P., Munaro, C. J., Rosado Filho, M. (2010). Quantificação de Não-Linearidades em Malhas de Controle Oscilantes via Método da Função Descritiva. *Proceedings of the 9th IEEE/IAS International Conference on Industry Applications* (INDUSCON 2010). São Paulo - Brazil

Neste trabalho foi descrita uma metodologia baseada no método da FD, para a quantificação de não linearidades em malhas de controle oscilantes, com ênfase no caso particular da não-linearidade ser a banda morta. A solução proposta neste artigo requer as medidas de amplitude e frequência do sinal de controle OP e as funções de transferência do controlador e do processo, mesmo com incertezas paramétricas. A aplicabilidade do método foi demonstrada em simulações nas quais foram considerados sistemas com o processo exatamente conhecido e também com incertezas paramétricas. Em ambos casos, o algoritmo estimou com sucesso a magnitude da banda morta para diversos valores usados nas simulações.

- (2) Araujo, A. P., Munaro, C. J., Rosado Filho, M. (2011). Quantification of Valve Stiction and Dead Band in Control Loops Based on Harmonic Balance Method. *Proceedings of the 9th IEEE International Conference on Control and Automation* (ICCA 2011). Santiago - Chile

Este trabalho estende a metodologia desenvolvida no artigo em (1), para o caso de malhas com válvulas de controle com atrito, representado por um modelo a dois parâmetros S e J (Choudhury et al. [2004]). A estimação dos parâmetros consiste na resolução de uma equação de balanço harmônico envolvendo a FD do modelo a dois parâmetros de atrito. A estimação da banda morta é tratada como caso particular nesta abordagem. Também é provada a consistência da equação do estimador, ou seja, existência e unicidade dos parâmetros estimados. De forma análoga à abordagem em (a) esta metodologia requer as medidas de amplitude e frequência do sinal de controle OP e as funções de transferência do controlador e do processo, mesmo com incertezas paramétricas. A aplicabilidade e eficácia do método foram demonstradas em simulações nas quais foram simuladas malhas de controle com banda morta e com atrito em que o algoritmo quantificou com sucesso a banda morta e também o atrito.

- (3) Araujo, Alancardek P., Munaro, Celso J., Rosado Filho, Moacir. Quantification of Valve Stiction and Dead Band in Control Loops Based on the Harmonic Balance Method. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 51, p. 14121-14134, (2012).

Este trabalho usa a metodologia desenvolvida no trabalho anterior (2) para quantificar o atrito em válvulas de controle. Aqui também é desenvolvida uma metodologia para tratar o caso de ausência do modelo do processo. A aplicabilidade e eficácia do algoritmo de estimação são comprovadas em simulações, numa planta piloto com processo com incertezas e em três casos de malhas reais industriais usando apenas os sinais de rotina disponíveis.

Capítulo 2

Previsão de ciclos limite via método da função descritiva

O método da função descritiva (Slotine e Li [1991]) é uma ferramenta analítica poderosa usada primordialmente para prever a existência de oscilações auto-sustentadas (independente de estímulos externos) em malhas de controle, e também estimar a amplitude e a frequência destas. A função descritiva de uma não-linearidade é um operador que associa à não-linearidade uma função complexa que generaliza a resposta frequencial de funções de transferência.

Após revisar o método da função descritiva, o mesmo é aplicado às funções não lineares de atrito e banda morta utilizadas neste trabalho. Simulações são realizadas para avaliar o erro de predição da amplitude e frequência usando o método da função descritiva para estes modelos.

2.1 Revisão da literatura sobre o método da FD

Historicamente, Krylov e Bogoliubov (Kryloff e Bogoliuboff [1947]) estabeleceram as bases para a noção de função descritiva em sua extensão de um trabalho de Van der Pol na área de mecânica não linear. Eles desenvolveram o chamado método da amplitude e fase lentamente variantes para o estudo de oscilações não lineares. A solução apresentada é obtida em termos de uma representação linear equivalente para a não linearidade. A versão linearizada da não linearidade obtida resulta em uma função descritiva na forma de um elemento dinâmico linear proporcional mais derivativo, cujos coeficientes são funções da amplitude e da frequência da oscilação. Tal procedimento é chamado de linearização harmônica, especialmente na literatura russa. Durante os anos de 1947 a 1950, em pelo menos cinco países diferentes uma nova abordagem surgiu Kochenburg (Kochenburger [1949]) nos Estados Unidos, Tustin (Tustin [1947]) na Inglaterra, Oppelt (Oppelt [1948]) na Alemanha, Goldfarb (Goldfarb [1947]) na Rússia e Dutilh (Dutilh [1950]) na França. Essa nova abordagem foi essencialmente uma linearização harmônica fisicamente motivada, que é equivalente àquela deduzida por

Krylov e Bogoliubov. Essa nova abordagem simplesmente substitui a não linearidade por uma função descritiva na forma de um ganho complexo linear estático, calculado de modo a manter semelhantes as respostas da não linearidade e de sua aproximação quando sujeitas à mesma entrada senoidal. Isso, de fato, é uma tentativa de estender o conceito de função de transferência de sistemas lineares para o caso de sistemas não lineares. Essas duas formas de linearização, embora aparentemente diferentes, são, de fato, equivalentes, sendo que a última, ou seja, a função descritiva como um ganho complexo linear estático, resultou ser a forma de função descritiva mais amplamente conhecida e usada. Tal forma de função descritiva é adotada aqui nesse trabalho. O chamado método da função descritiva é também conhecido como método do balanço harmônico e usa técnicas no domínio da frequência (séries de Fourier) para investigar o comportamento de ciclos-limite em sistemas não lineares.

Em situações práticas, a credibilidade das previsões pelo método da FD era mais baseada na intuição e experiência do usuário do método do que em argumentos rigorosos. Como trata-se de um método aproximativo é importante obter resultados que estabeleçam margens de erro para as previsões. Para não-linearidades de inclinação limitada existem resultados rigorosos (Mees e Bergen [1975]) que estabelecem margens de erros para as previsões. Também em (Vidyasagar [1993]) são dadas condições suficientes para a existência de oscilações, mas apenas para não-linearidades continuamente diferenciáveis e com derivada limitada.

Em (Engelberg [2002]) são exibidos exemplos de sistemas contendo a não-linearidade comparador, onde a condição de boa filtragem passa-baixas da parte linear é satisfeita mas, o método da FD prediz erroneamente a existência de ciclos limites. As causas dos erros de predição neste caso, são atribuídas a tangências e quase tangências entre as curvas negativo inverso da FD e o gráfico de Nyquist da parte linear.

Normalmente atrito de Coulomb + atrito estático é representados por uma não-linearidade ímpar e sem memória e neste caso (Brogan [1991]) a FD é real e depende apenas da amplitude do sinal de entrada. Em (Armstrong-Helouvy e Amin [1994]) mostrou-se que a FD obtida do modelo sem memória do atrito não é uma boa aproximação do atrito e a análise pela FD falha na predição de ciclos limites. Eles provam que para um sistema posicionador com controlador PID e atrito de Coulomb, produz a mesma FD que o sistema com atrito de Coulomb + atrito estático.

Em (Olsson [1995]) o autor considera uma nova abordagem para o atrito. Ele considerou o modelo de atrito sem memória juntamente com o bloco linear contendo a parte da força de atrito dependente da velocidade, e também estabeleceu a FD para este modelo de atrito. A FD neste caso possui duas entradas, a nova sendo a velocidade. O autor também compara a nova abordagem com a abordagem clássica da FD considerando o atrito ímpar e sem memória. O autor exhibe exemplos de sistema com atrito exibindo ciclos limites que são previstos pela nova abordagem e não são previstos pela abordagem clássica.

Em (Choudhury et al. [2005]) é proposto um modelo a dois parâmetros de atrito baseado em dados de válvulas reais e calculam a FD para este modelo baseados na relação entrada-saída. Diferentemente da FD dos modelos de atrito discutidos em

(Mees e Bergen [1975]), (Armstrong-Helouvy e Amin [1994]) e outros trabalhos que usaram o modelo tradicional de Coulomb + atrito estático, a FD obtida para este modelo é complexa (e não real) sendo diferente para sistema apenas com atrito de Coulomb (S) e sistema com atrito de Coulomb + atrito estático (S e J). No estudo sobre modelos de atrito feito em (Garcia [2008]), vários modelos de atrito foram analisados, e verificou-se que os modelos a dois parâmetros de Choudhury, de Kano, de Karnopp e de Luge produziram a mesma relação entrada-saída para uma entrada em rampa aplicada. Como a FD aqui utilizada é baseada nesta curva, é muito provável que os resultados obtidos neste trabalho possam ser igualmente utilizados considerando estes modelos. Na revisão de literatura realizada, o autor não encontrou análises sobre o erro de predição para a FD utilizada. Por este motivo, uma análise baseada em simulação será feita neste trabalho.

2.2 Função descritiva - Definição

Considera-se um sistema de controle como o representado pelo diagrama de blocos da Figura 2.1 no qual $C(s)$ e $P(s)$ denotam as funções de transferência do controlador e do processo e \mathcal{N} uma não-linearidade, ou seja, um operador não-linear que transforma o sinal u no sinal w .

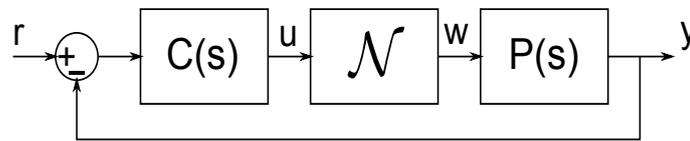


Figura 2.1: Sistema de controle não-linear

Para aplicação do método da FD o sistema deve satisfazer as seguintes condições:

1. Existe uma única não-linearidade.
2. A não-linearidade é invariante no tempo.
3. Se a entrada da não-linearidade é senoidal, então na saída da não-linearidade apenas a componente fundamental de Fourier é considerada.
4. A não-linearidade é ímpar.

Considera-se a não linearidade \mathcal{N} do diagrama de blocos da Figura 2.1, em conformidade com as condições acima. Admite-se que a entrada u seja senoidal $u(t) = A \text{sen}(\omega t)$ com uma amplitude A e uma frequência ω . A saída $w(t)$ é frequentemente periódica, mas não necessariamente senoidal. Pode-se portanto considerar a expansão em série de Fourier de $w(t)$

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \text{sen}(n\omega t)] \quad (2.1)$$

os coeficientes de Fourier a_i 's e b_i 's geralmente são funções de A e ω , e são dadas por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) d(\omega t) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \text{sen}(n\omega t) d(\omega t) \end{aligned}$$

Devido a 4ª condição acima, tem-se que $a_0 = 0$, e devido a 3ª condição, somente a componente fundamental de Fourier da saída é considerada

$$w(t) \approx w_1(t) = a_1 \cos(\omega t) + b_1 \text{sen}(\omega t) = M \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Na forma complexa, $w_1(t) = M e^{j(\omega t + \phi)} = (b_1 + j a_1) e^{j(\omega t + \phi)}$.

Com estes elementos tem-se a seguinte definição:

Definição. A *função descritiva* da não-linearidade \mathcal{N} , é a função das variáveis A e ω , $N(A, \omega)$, definida por

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) \quad (2.2)$$

Observa-se que se o operador \mathcal{N} no sistema representado pela Figura 2.1 é linear, digamos representado por uma função de transferência $G(s)$, então a FD de \mathcal{N} coincide com a resposta frequencial $G(j\omega)$. Portanto, o conceito de função descritiva pode ser visto como uma extensão para não-linearidades do conceito de resposta frequencial.

Seja o sistema da Figura 2.1 e admita-se, para simplificar, que a referência é nula, uma vez que se deseja analisar a oscilação inerente à malha fechada, e que $N(A, \omega)$ é a FD da não-linearidade \mathcal{N} . Denota-se por $G(s)$ a parte linear, a qual é definida por $G(s) = C(s)P(s)$.

De acordo com o método da FD, se o sistema da Figura 2.1 sustenta um ciclo limite com o sinal de controle u possuindo uma amplitude A_0 e uma frequência ω_0 , então o par (A_0, ω_0) é uma solução da Equação de Balanço Harmônico.

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A, \omega)} \quad (2.3)$$

Sob condições bem gerais, a existência de soluções em (A, ω) da equação (2.3) também é uma condição suficiente para a malha de controle da Figura 2.1 admitir ciclos limites. Assim, em geral, verifica-se se a equação de balanço harmônico (2.3) admite soluções em (A, ω) para se prever a existência de ciclos limites e estimar suas amplitudes e frequências.

A partir da equação de balanço harmônico (2.3), obtém-se um método gráfico para se prever ciclos limites no sistema quando a função descritiva da não-linearidade em questão depende apenas da amplitude, o que inclusive é o caso de muitas não-linearidades importantes encontradas na prática. Para este fim, considera-se as duas curvas complexas ($\omega \rightarrow G(j\omega)$) (gráfico de Nyquist de $G(s)$) e a curva negativo inverso da função descritiva parametrizada por A ($A \rightarrow -1/N(A)$). Se estas curvas se interceptarem transversalmente em algum ponto z_0 , então o sistema admite ciclo limite, e os valores dos parâmetros das curvas ω_0 e A_0 para os quais ocorreu a interseção são soluções da equação (2.3) e, portanto, correspondem às frequência e amplitude do ciclo limite encontrado.

O método da função descritiva é um método aproximativo e é baseado na aproximação de oscilações quaisquer por oscilações senoidais, ou seja, o método funciona bem desde que a oscilação no sinal de controle u esteja bastante próxima de uma oscilação senoidal, precisamente, quando a componente fundamental de Fourier de $u(t)$ for dominante sobre as componentes de ordem superior. Uma condição suficiente para que isto ocorra é que a parte linear possua boas propriedades de filtragem passa-baixas, isto é,

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)|, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

2.3 A função descritiva do atrito

Considere o modelo de atrito dado pela equação (1.1) (atrito de Coulomb), então F é uma função que depende apenas da velocidade, portanto sem memória, simétrica nas duas direções. A FD neste caso é uma função real (Brogan [1991]) e dada por (Slotine e Li [1991])

$$N(A) = \frac{4F_C}{\pi A} \quad (2.5)$$

Esta FD foi utilizada em (Armstrong-Helouvy e Amin [1994]) para previsão de ciclos limite em sistemas mecânicos para diferentes controladores, mostrando-se boa qualitativamente mas não quantitativamente. (Brandenburg e Schäfer [1987] e Brandenburg e Schäfer [1991]) realizaram muitos experimentos com um sistema flexível contendo duas massas, e verificaram a similaridade entre simulação e o método da FD para atrito de Coulomb e deslizamento unidirecional. Entretanto, a análise via FD não produziu bons resultados para o caso de atrito de Coulomb + atrito estático. Os autores atribuem a isto a má

aproximação da oscilação pela harmônica fundamental em $v = 0$. A entrada senoidal fica um tempo nulo em zero, assim, qualquer fenômeno ocorrendo precisamente quando a entrada é nula não será representado pela FD.

Neste trabalho, a FD utilizada é aquela desenvolvida para o modelo de atrito cuja curva de assinatura é descrita na Figura 1.4 sendo portanto válida para todos modelos de atrito que a reproduzem (Garcia [2008]).

Com base na relação entrada-saída do modelo a dois parâmetros S e J de atrito exibida na Figura 1.4 em (Choudhury et al. [2008b]) deduziu-se a FD

$$N(A) = X(A) + jY(A)$$

$$X(A) = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \sin 2\phi - 2 \cos \phi - \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 2 \frac{(S - J)}{A} \cos \phi \right) \quad (2.6)$$

$$Y(A) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \phi + 2 \sin \phi - 2 \frac{(S - J)}{A} \sin \phi \right) \quad (2.7)$$

$$\phi = \arcsen \left(\frac{A - S}{A} \right)$$

Com o uso de algumas identidades trigonométricas (ver Apêndice A) obtém-se uma versão simplificada da FD do atrito

$$N(A) = X(A) + jY(A)$$

$$X(A) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsen \left(1 - \frac{S}{A} \right) + \left(1 - \frac{S}{A} + 2 \frac{J}{A} \right) \sqrt{\frac{S}{A} \left(2 - \frac{S}{A} \right)} \right) \quad (2.8)$$

$$Y(A) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{S}{A} \left(2 - \frac{S}{A} \right) + 2 \frac{J}{A} \left(1 - \frac{S}{A} \right) \right) \quad (2.9)$$

Verifica-se nas equações (2.8) e (2.9) que a FD do atrito só depende das razões S/A e J/A . Uma consequência deste fato é que, os traços das curvas negativo inverso da FD do atrito parametrizadas pela amplitude A , dependem apenas da razão S/J : em outras palavras, duas FDs do atrito com a mesma relação S/J possuem curvas negativo inverso coincidentes. Nota-se que $J = 0$, a FD do atrito coincide com a FD da banda morta.

Na Figura 2.2 são exibidas alguma curvas negativo inverso da FD do atrito.

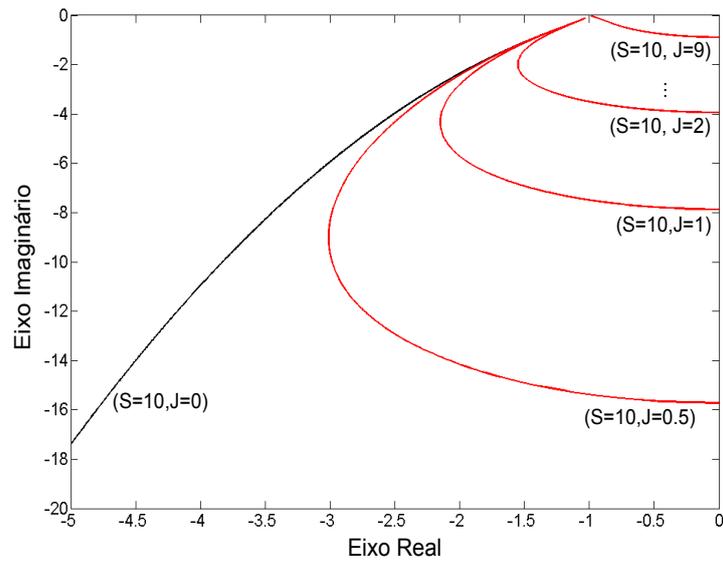


Figura 2.2: *Curvas negativo inverso da FD do atrito*

Na Figura 2.2 são exibidas várias curvas negativo inverso da FD do atrito, incluindo também a da banda morta ($J=0$) e os gráficos de Nyquist das partes lineares de uma malha de controle de um processo de primeira ordem estável com tempo morto controlado por PI ($G_1(j\omega)$), e de um processo com integrador também controlado por PI ($G_2(j\omega)$). Pelo método da FD, malhas com processos de primeira ordem estáveis controladas por PI, que possuem comportamento assintótico da resposta frequencial da parte linear igual a $G_1(j\omega)$, oscilam devido ao atrito mas, não oscilam devido a banda morta, enquanto que processos com integrador cuja parte linear é uma função de transferência tipo 2, oscilam devido a banda morta e também ao atrito.

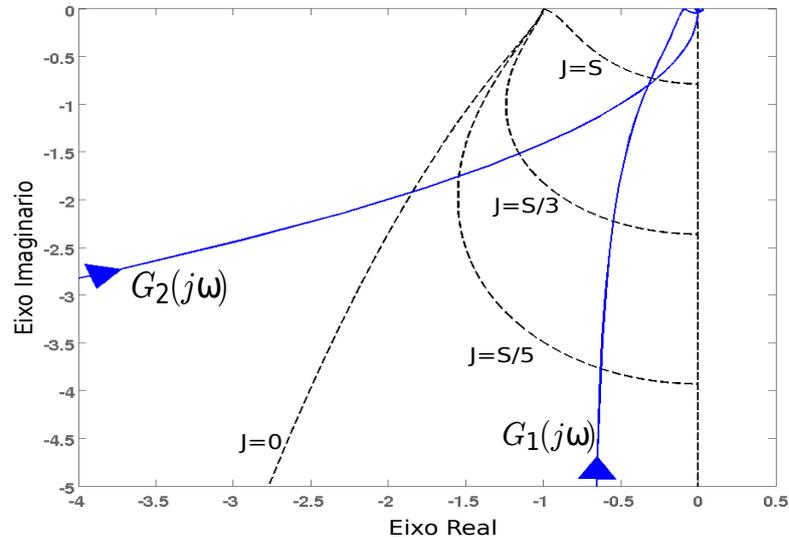


Figura 2.3: Oscilação devido ao atrito

Verifica-se na Figura 2.3 que mantendo-se o parâmetro S constante, as curvas negativo inverso da FD do atrito para valores crescentes do parâmetro J , tendem a se acumular na fronteira superior da região de atrito, ou seja, na curva negativo inverso da FD com $S = J$. Como a resposta frequencial $G(j\omega)$ se aproxima de zero quando $\omega \rightarrow \infty$, segue-se que os valores mais altos de J ocorrem em frequências mais altas. Portanto, valores mais altos do parâmetro J tendem a aumentar a frequência de oscilação. Se for mantido fixo o parâmetro J e considerar uma sequência crescente de S , então as curvas negativo inverso da FD, tendem a se acumular na curva negativo inverso da FD da banda morta a qual está mais distante da origem que as outras curvas e neste caso as oscilações ocorrem em frequências cada vez menores.

2.4 A função descritiva da banda morta

A Figura 2.4 exibe o gráfico entrada-saída da não-linearidade banda morta. Este gráfico é obtido com um sinal de entrada tipo triangular. Esta não-linearidade é descrita por um único parâmetro d o qual, por abuso de notação, denominaremos também por banda morta.

Nota-se na Figura 2.4 que a assinatura da banda morta coincide com a assinatura do atrito na Figura 1.4 quando o salto de escorregamento $J=0$ e $S=d$. Portanto a FD da banda morta pode ser deduzida da expressão da FD do atrito nas equações (2.8) e (2.9) fazendo $J=0$ e $S=d$.

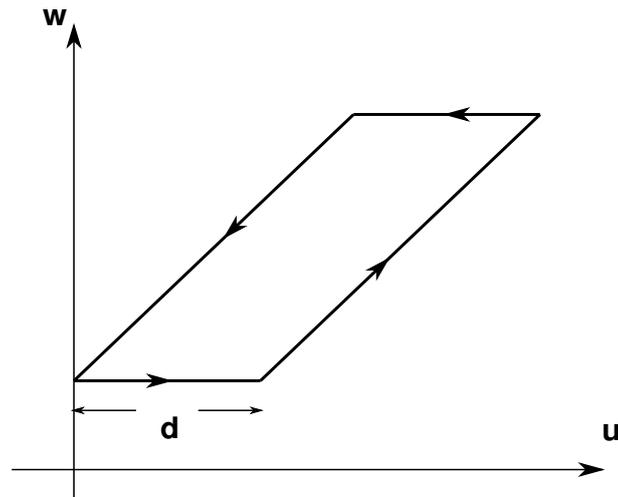


Figura 2.4: Relação entrada-saída para a banda morta

Portanto a FD da banda morta é a função complexa $N(d, A) = X(d, A) + jY(d, A)$, com

$$X(d, A) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsen \left(1 - \frac{d}{A} \right) + \left(1 - \frac{d}{A} \right) \sqrt{\frac{d}{A} \left(2 - \frac{d}{A} \right)} \right), \quad (2.10)$$

$$Y(d, A) = \frac{d}{\pi A} \left(2 - \frac{d}{A} \right). \quad (2.11)$$

Como se verifica nas equações (2.10) e (2.11), a FD da banda morta depende apenas da razão d/A . Uma consequência disto é que o formato da curva negativo inverso da FD da banda morta, parametrizada por A , não depende do parâmetro d . Assim, o traço desta curva é único (ver Figura 2.5).

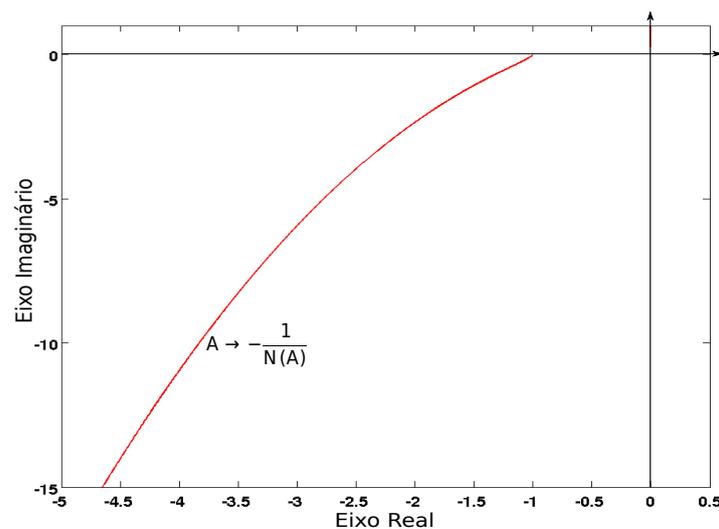


Figura 2.5: Curva negativo inverso da FD da banda morta.

Malhas de controle com processos com integrador controlados por um controlador PI geralmente exibem ciclos limites. De fato, a parte linear neste caso, é uma função de transferência do tipo 2, como a função $G_1(j\omega)$ mostrada na Figura 2.6. Assim, quando ω tende a zero, $G_1(j\omega)$ tende assintoticamente a uma reta paralela ao eixo real, necessariamente interceptando a curva negativo inverso da FD da banda morta.

Já malhas de controle com processo de primeira ordem estável com, ou sem atraso de tempo e controlados por controlador PI, possuem parte linear com função de transferência tipo 1 para as quais, tipicamente, exibem um comportamento assintótico ($\omega \rightarrow 0, \infty$) como a função $G_2(j\omega)$ na Figura 2.6. Portanto não é previsto oscilações devido a banda morta para este tipo de malha.

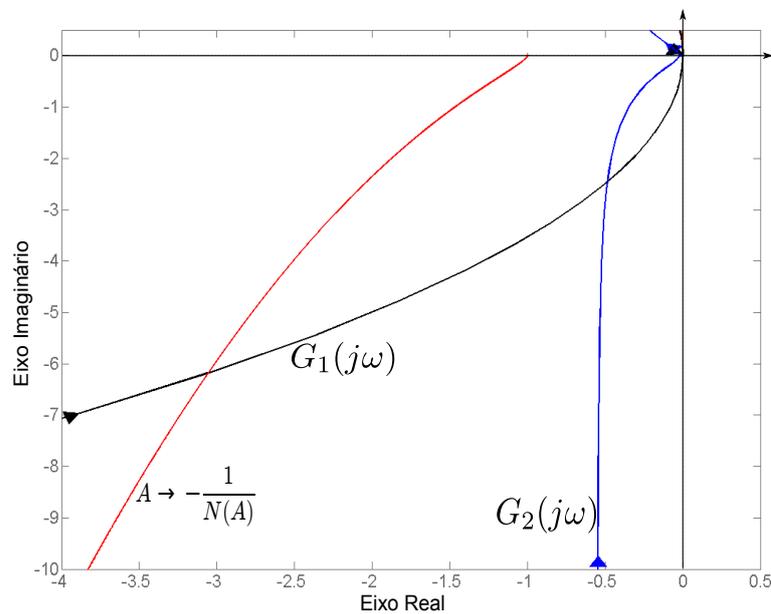


Figura 2.6: Processo de 1ª ordem estável com controlador PI, ausência de ciclos limites.

Como consequência da unicidade do traço da curva negativo inverso da FD da banda morta, se o gráfico de Nyquist de G interceptar esta curva, pode-se variar o parâmetro d que o ponto de interseção permanece inmutável e, assim, também a frequência ω_i correspondente a esta interseção. Em outras palavras, a quantidade d de banda morta não altera a frequência da oscilação, alterando apenas a amplitude desta.

2.5 Exemplo de predição de ciclo limite

Uma análise via simulação é feita neste trabalho para avaliar erros de predição da FD utilizada. Para isto, o modelo baseado em dados a dois parâmetros é utilizado para gerar o sinal oscilatório na malha com a não-linearidade banda morta. A amplitude e

frequência do sinal e aquela prevista são comparadas para diversos valores de banda morta.

Considera-se uma malha de controle como a representada pelo diagrama da Figura 2.1. A não-linearidade \mathcal{N} é a banda morta com parâmetro d . Os valores dos parâmetros usados na simulação foram: $d = 10, 30, 50, 70$. As funções de transferência do controlador e do processo são dadas por

$$C(s) = \frac{0.5s + 0.1}{s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

Na Figura 2.7 são exibidos os sinais de controle resultantes de cada simulação. Na Tabela 2.1 são apresentados os resultados das previsões de amplitude do sinal de controle u para cada valor de d usado. A é a amplitude medida de u e A_{FD} é a amplitude de u estimada pelo método gráfico da FD, ou seja, são os valores dos parâmetros correspondentes à interseção da curva negativo inverso da FD da banda morta com o gráfico de Nyquist de $G(s) = C(s)P(s)$. A frequência de oscilação medida foi $\omega = 0.27$ rad/s e estimada pelo método da FD foi $\omega_{FD} = 0.29$ rad/s. Devido à unicidade do traço da curva negativo inverso da FD da banda morta estas frequências independem da magnitude d da banda morta usada na simulação.

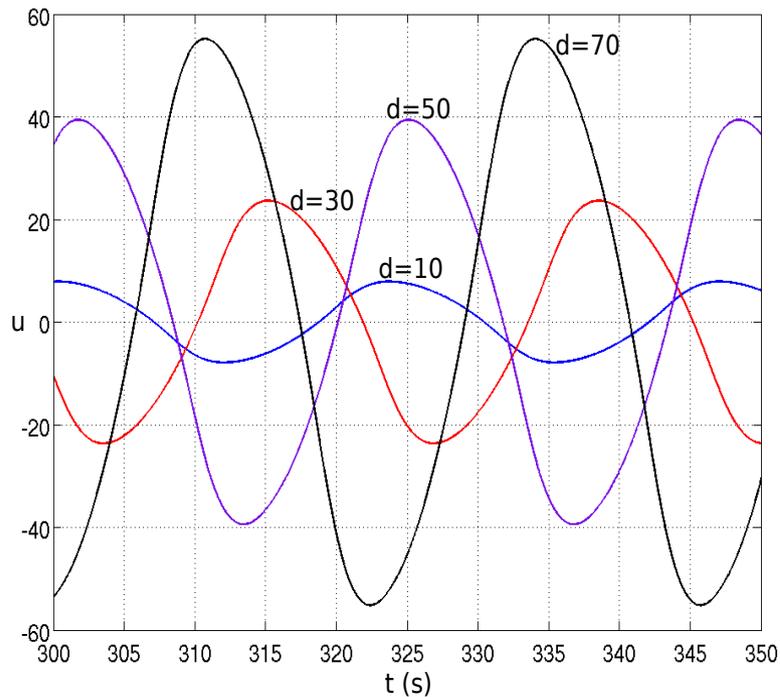


Figura 2.7: Sinais de controle para cada parâmetro d usado

Tabela 2.1: *Predições da amplitude do sinal de controle*

d	A	A_{FD}	Erro (%)
10	8.03	8.42	4.6
30	24.09	25.56	6.1
50	40.16	41.88	4.3
70	56.10	58.63	4.5

Os erros percentuais na estimação da amplitude de u pelo método da FD são inferiores a 7%, e o erro percentual na estimação da frequência são inferiores a 7.5%. As boas propriedades de filtragem passa-baixas da parte linear refletido nas formas de onda próximo de senóides (Figura 2.7) contribuíram para a boa qualidade das predições.

2.6 Análise de erro de predição de ciclo limite

Considera-se uma malha de controle como a representada pelo diagrama da Figura 2.1. A não-linearidade \mathcal{N} é o modelo a dois parâmetros S e J de atrito. Os valores dos parâmetros usados na simulação foram: $J = 2$, $S = 2, 4, 6, 8$. As funções de transferência do controlador e do processo são dadas por

$$C(s) = \frac{s + 2}{s}$$

$$P(s) = \frac{1}{s + 1} e^{-0.2s}$$

Na Figura 2.8 são exibidos os sinais de controle resultantes de cada simulação. E na Tabela 2.2 são apresentados os resultados das predições de amplitude e frequência do sinal de controle u para cada valor de S usado. A e ω são as amplitude e frequência medidas de u e A_{FD} e ω_{FD} são as amplitude e frequência de u estimadas pelo método gráfico da FD, ou seja, são os valores dos parâmetros correspondentes à interseção da curva negativo inverso da FD do modelo a dois parâmetros de atrito com o gráfico de Nyquist de $G(s) = C(s)P(s)$.

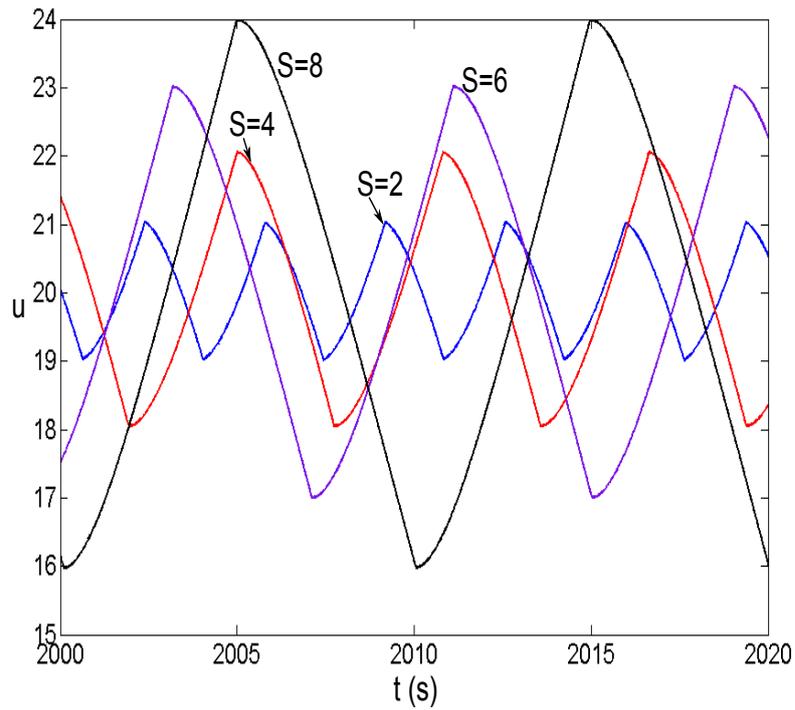


Figura 2.8: Sinais de controle para cada parâmetro S usado

Tabela 2.2: Predições da amplitude e frequência do sinal de controle

S	A	A_{FD}	ω	ω_{FD}
2	1.20	1.17 (2.5%)	1.85	1.70 (6,6%)
4	2.24	2.17 (3.2%)	1.08	1.06 (8,6%)
6	3.26	3.17 (2.7%)	0.89	0.75 (16%)
8	4.03	4.17 (3.5%)	0.73	0.60 (18%)

Como normalmente em aplicações os valores de S são pequenos ($S = 4$ representa uma válvula com muito atrito), a aproximação é boa para as aplicações desejadas.

Capítulo 3

Quantificação de não-linearidades via método da função descritiva

3.1 Introdução

Não-linearidades que produzem ciclos limite em malhas de controle podem ter sua amplitude e frequência previstos pelo método da FD, como visto no Capítulo 2. Para este fim, devem ser conhecidas a parte linear da malha, ou seja, as funções de transferência do controlador e do processo e a FD da não-linearidade considerada na malha.

Neste trabalho propõe-se quantificar as não-linearidades que causam ciclos limites em malhas de controle a partir das medidas de amplitude e frequência do sinal de controle oscilante, da parte linear da malha e da expressão da FD da não-linearidade considerada na malha de controle. Quantificar a não-linearidade, no contexto deste trabalho, significa obter estimativas para os parâmetros da FD da não-linearidade considerada.

Embora a metodologia de quantificação de não-linearidades baseada no método da FD seja válida para qualquer malha de controle com uma não-linearidade que produz ciclos limites e possui uma FD dependente de no máximo dois parâmetros, neste trabalho serão consideradas apenas as não-linearidades banda morta e atrito por serem as mais comuns em malhas de controle industriais nas quais estão presentes válvulas de controle.

3.2 Quantificação do atrito

Seja uma malha de controle não linear como a descrita pelo diagrama de blocos da Figura 3.1. Se a não linearidade \mathcal{N} é o atrito com os parâmetros S e J conhecidos, e se também estão disponíveis as funções de transferência do processo $P(s)$ e do controlador $C(s)$,

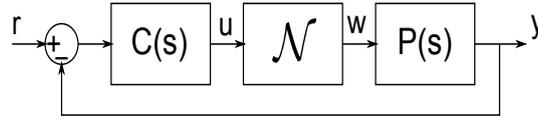


Figura 3.1: Malha de controle não linear

O método da FD pode ser usado para prever a oscilação e estimar sua amplitude e frequência, através da resolução para A e ω da equação de balanço harmônico

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(S, J, A)} \quad (3.1)$$

A ideia da quantificação do atrito pelo método da função descritiva é proveniente da recíproca do argumento anterior, ou seja, se a malha estiver oscilando com a amplitude A_0 e a frequência ω_0 do sinal de controle conhecidas e também estiver disponível a função de transferência $G(s)$ da parte linear da malha, então pode-se resolver a equação de balanço harmônico (3.2) para as variáveis S e J , pois são os únicos parâmetros desconhecidos nesta equação

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(S, J, A_0)}. \quad (3.2)$$

Se a equação (3.2) puder ser resolvida para os parâmetros S e J , então as possíveis soluções (\hat{S}, \hat{J}) serão os parâmetros estimados do atrito.

Neste trabalho, a quantificação do atrito pelo método da FD significa a obtenção de soluções em S e J da equação de balanço harmônico (3.2) com o conhecimento da amplitude A_0 e da frequência ω_0 de oscilação do sinal de controle da malha. A quantificação do atrito pelo método da FD depende portanto da existência e unicidade das soluções em S e J da equação (3.2).

3.2.1 Existência de solução

Dada uma resposta frequencial $G(j\omega_0)$ deseja-se saber se existem parâmetros (\hat{S}, \hat{J}) que satisfazem a equação (3.2) na amplitude A_0 . Equivalentemente, deseja-se saber se existem parâmetros (\hat{S}, \hat{J}) tais que a curva negativo inverso da FD parametrizada pela amplitude A

$$A \rightarrow \frac{-1}{N(\hat{S}, \hat{J}, A)}$$

intercepta o gráfico de Nyquist de $G(s)$ no ponto $G(j\omega_0)$ correspondente ao parâmetro $A = A_0$.

Para responder a esta questão, deve-se determinar a região \mathcal{S} do plano complexo que contém todas as curvas negativo inverso de funções descritivas do atrito, ou seja, para

uma amplitude A fixada, deve-se determinar o domínio da FD N definida em (2.8) e (2.9). De acordo com a função $X(A)$ definida em (2.8) deve-se ter $S/2 < A < +\infty$. No caso de ausência de atrito, a relação entre a pressão de entrada e o deslocamento da haste da válvula é dada por k/A , em que k é a constante da mola e A é a área do diafragma da válvula. Esta razão é denominada fator de calibração, e quando este fator é diferente de k/A , a válvula é dita descalibrada, uma situação bastante incomum, e neste caso pode-se ocorrer $S < J$ (Choudhury et al. [2005]). Assim, considera-se que $J \leq S$ e portanto

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = \frac{-1}{N(S, J, A)}; S/2 < A < +\infty; 0 \leq J \leq S \right\}$$

Se a resposta frequencial $G(j\omega_0)$ pertencer a \mathcal{S} , então alguma curva de função descritiva intercepta $G(j\omega_0)$ e a existência de soluções em S e J para a equação (3.2) fica estabelecida.

Com a sequência de procedimentos abaixo, caracteriza-se geometricamente a região \mathcal{S} :

- De acordo com as equações (2.8) e (2.9) os parâmetros S e J na FD do atrito sempre aparecem na forma S/A e J/A , portanto N depende apenas de duas variáveis, a saber, S/A e J/A , ou seja, $N(S, J, A) = N(S/A, J/A)$.
- Dados S e J com $0 \leq J \leq S$, então para cada A tal que $S/2 \leq A < +\infty$ tem-se que, $0 < J/A \leq S/A$ e $0 < S/A \leq 2$. Se $x = S/A$ e $y = J/A$, o ponto (x, y) varia na região triangular $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y \leq x, 0 < x \leq 2\}$

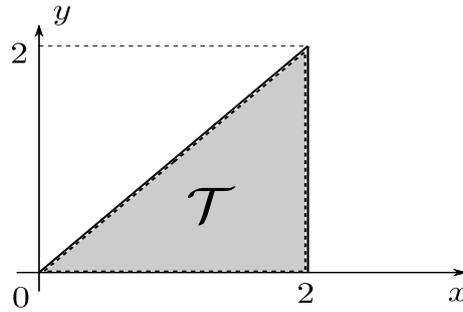


Figura 3.2: Região triangular \mathcal{T} no plano $S/A \times J/A$

- Segue-se do item b) que

$$\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C}; z = \frac{-1}{N(x, y)}; 0 < y \leq x, 0 < x \leq 2 \right\}$$

com

$$N(x, y) = X(x, y) + iY(x, y) \quad (3.3)$$

$$X(x, y) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsen(1-x) + (1-x+2y) \sqrt{x(2-x)} \right) \quad (3.4)$$

$$Y(x, y) = \frac{1}{\pi} (-x(2-x) + 2y(1-x)) \quad (3.5)$$

Portanto, a região \mathcal{S} exibida na Figura 3.3 é a imagem da região triangular \mathcal{T} (Figura 3.2) pela transformação

$$(x, y) \rightarrow -1/N(x, y)$$

com $N(x, y)$ definida em (3.3), (3.4) e (3.5).

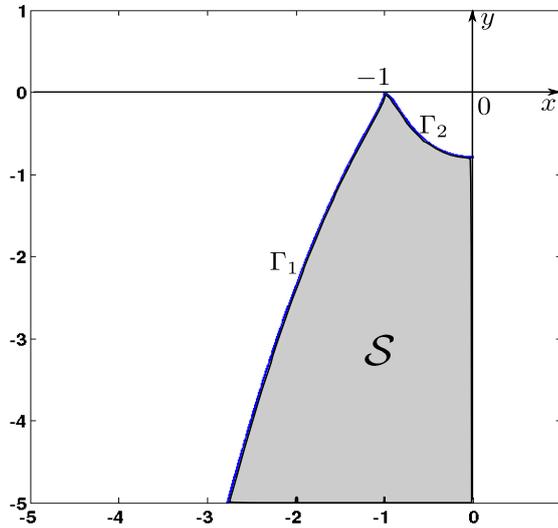


Figura 3.3: Região de atrito \mathcal{S}

- d) Na Figura 3.3, a fronteira de \mathcal{S} é formada pelas curvas Γ_1 , Γ_2 e pelo eixo imaginário a partir da interseção com Γ_2 . Γ_1 é a curva negativo inverso da FD da banda morta obtida como imagem pela transformação $-1/N(x, y)$ do intervalo $[0, 2]$ no eixo-x que forma a base do triângulo \mathcal{T} . Γ_2 é a imagem da hipotenusa de \mathcal{T} , ou seja, é a curva negativo inverso da FD do atrito com $S = J$.
- e) Em resumo, pode-se concluir que a equação (3.2) admite soluções em (S, J) se, e somente se, $G(j\omega_0)$ pertence a \mathcal{S} .
- f) A região \mathcal{S} (Figura 3.3) contém todas as curvas negativo inverso da FD do atrito para todos os valores possíveis dos parâmetros (S, J) , devido a este fato \mathcal{S} será denominada aqui a *região de atrito*.

A fronteira da região de atrito \mathcal{S} pode ser determinada independente de quaisquer parâmetros da malha de controle. Se as funções de transferência do controlador e do

processo estiverem disponíveis, então um simples gráfico de Nyquist da parte linear $G(s)$ e o conhecimento da frequência de oscilação ω_0 , são suficientes para se estabelecer a existência de soluções da equação (3.2).

3.2.2 Unicidade de solução

Considera-se agora que na malha de controle da Figura 3.1 a não linearidade é o atrito e que o sinal de controle u esteja oscilando com uma amplitude medida A_0 e uma frequência medida ω_0 . Se a resposta frequencial da parte linear pertence à região de atrito \mathcal{S} , então os resultados da seção 3.2.1 garantem a existência de parâmetros (\hat{S}, \hat{J}) satisfazendo a equação (3.2). No entanto, é desejável que não hajam ambiguidades nesta estimação, e portanto, é necessário investigar o problema da unicidade de soluções em (S, J) da equação (3.2) para uma dada resposta frequencial $G(j\omega_0) \in \mathcal{S}$.

Fixada a amplitude medida A_0 do sinal de controle, considera-se as variáveis $x = S/A_0$ e $y = J/A_0$. Com esta mudança pode-se considerar a função descritiva do atrito como função apenas de (x, y) definida pelas expressões (3.3) a (3.5). Nestes termos, o problema da unicidade de soluções para a equação (3.2) pode ser posto da seguinte forma: para uma dada resposta frequencial $G(j\omega_0) \in \mathcal{S}$, decidir se existe um único par (\hat{x}, \hat{y}) , com $0 \leq \hat{y} \leq \hat{x}$, $0 \leq \hat{x} \leq 2$, satisfazendo a equação

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{N(x, y)}. \quad (3.6)$$

No caso de uma única solução (\hat{x}, \hat{y}) , os parâmetros estimados (\hat{S}, \hat{J}) do atrito são dados por

$$\hat{S} = A_0 \hat{x} \quad (3.7)$$

$$\hat{J} = A_0 \hat{y} \quad (3.8)$$

Por outro lado, (\hat{x}, \hat{y}) é uma solução da equação (3.6) se, e somente se é solução da equação

$$N(x, y) = \frac{-1}{G(j\omega_0)} \quad (3.9)$$

e o problema da unicidade de solução da equação (3.6) é equivalente a um problema de injetividade da aplicação do plano $N : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em (3.3)-(3.5). O domínio \mathcal{T} de N é a região triangular do plano definida na seção 3.2.1 e mostrada na Figura 3.2. Mais precisamente, para uma dada resposta frequencial $G(j\omega_0) \in \mathcal{S}$ a equação (3.6) (e portanto a equação(3.9)) admite uma única solução (\hat{x}, \hat{y}) se, e somente se, $N(x, y)$ é injetiva.

O problema de se determinar quando uma aplicação do plano é injetiva é bastante delicado e envolve certas hipóteses acerca do comportamento da aplicação no domínio e na fronteira do domínio. Um teorema de Topologia devido a W. S. Massey (Massey [1992]) fornece condições suficientes para um homeomorfismo local ser injetivo.

No que se segue, se $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto, então ∂U denota o conjunto fronteira de U e, se A é um subconjunto do domínio D de uma aplicação $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, então $f|_A$ denota a restrição de f ao subconjunto A . Um homeomorfismo f é uma aplicação contínua, injetiva e sobrejetiva com inversa f^{-1} também contínua e um difeomorfismo é uma aplicação diferenciável e invertível com inversa também diferenciável.

Teorema (Massey [1992]). Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto com fecho \bar{U} compacto e $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua tal que $f|_U$ é um homeomorfismo local. Suponha que ∂U é uma variedade de dimensão $n - 1$, fechada, conexa e orientável tal que $f|_{\partial U}$ é injetiva. Então, f aplica U homeomorficamente sobre $f(U)$. Em particular $f|_U$ é injetiva.

Teorema 3.2.1 *A aplicação $N : \mathcal{T} \rightarrow N(\mathcal{T})$, definida em (3.3)-(3.5), satisfaz as hipóteses do Teorema de Massey e, portanto, é um homeomorfismo, em particular N é injetiva.*

Prova:

Utilizando as mesmas notações do Teorema de Massey, tem-se $f(x, y) = N(x, y)$ definida pelas expressões (3.3)-(3.5), $U = \text{int}(\mathcal{T})$ (o interior do domínio triangular \mathcal{T}) e ∂U o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(2,2)$ da Figura 3.2. Temos que:

- $n = 2$, $U \subset \mathbb{R}^2$ é aberto com $\bar{U} = U \cup \partial U$ compacto. Além disso, $f = N$ é contínua em U , pois suas funções coordenadas $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ definidas em (3.4)-(3.5), são contínuas em U .
- $f = N$ é um homeomorfismo local em U .
De fato, a derivada de $N(x, y)$ e seu determinante são dados pelas equações (3.10) e (3.11), respectivamente,

$$N'(x, y) = \begin{bmatrix} -\frac{2(2x - y + xy - x^2)}{\pi\sqrt{2x - x^2}} & \frac{2\sqrt{-x(x-2)}}{\pi} \\ -\frac{2(y - x + 1)}{\pi} & -\frac{2(x-1)}{\pi} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\det N'(x, y) = \frac{4y}{\pi^2\sqrt{x(2-x)}} \quad (3.11)$$

Como $(x, y) \in U$, tem-se que $x \neq 0$, $x \neq 2$ e $y \neq 0$, assim $\det(N'(x, y)) \neq 0$ em todo ponto $(x, y) \in U$. Pelo Teorema da função inversa (Apêndice B), N é um difeomorfismo local em U e portanto é um homeomorfismo local.

- $f|_{\partial U}$ é injetiva.

Representaremos a fronteira ∂U por três caminhos retilíneos parametrizados:

$$\gamma_1(t) = (t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ (segmento horizontal ligando } (0,0) \text{ a } (2,0)).$$

$$\gamma_2(t) = (2, t), \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ (segmento vertical ligando } (2,0) \text{ a } (2,2)).$$

$$\gamma_3(t) = (t, t), \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ (segmento retilíneo ligando } (0,0) \text{ a } (2,2)).$$

Mostraremos que $f(\gamma_i(t))$, $i = 1, 2, 3$, são injetivas no intervalo $[0, 2]$.

(i) $f(\gamma_1(t)) = N(t, 0) = X(t, 0) + iY(t, 0)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

É suficiente provar que a componente $X(t, 0)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Como } \frac{d}{dt}X(t, 0) = -\frac{2\sqrt{2t-t^2}}{\pi} < 0, \quad \forall t \in (0, 2), \quad X(0, 0) = 1 \text{ e } X(2, 0) = 0,$$

tem-se que $X(t, 0)$ é decrescente e, portanto, injetiva no intervalo $[0, 2]$.

(ii) $f(\gamma_2(t)) = N(2, t) = X(2, t) + iY(2, t)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

É suficiente provar que a componente $Y(2, t)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

$$Y(2, t) = -\frac{2t}{\pi} \text{ é claramente injetiva no intervalo } [0, 2].$$

(iii) $f(\gamma_3(t)) = N(t, t) = X(t, t) + iY(t, t)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

É suficiente provar que a componente $Y(t, t)$ é injetiva no intervalo $[0, 2]$.

$$Y(t, t) = -\frac{t^2}{\pi}, \text{ e portanto } Y(t, t) \text{ é claramente injetiva no intervalo } [0, 2].$$

Segue de (i), (ii) e (iii) que $f|_{\partial U}$ é injetiva.

- ∂U , rigorosamente não é uma variedade diferenciável de dimensão 1, pois não é uma curva fechada suave. No entanto, ∂U pode ser aproximada por curvas fechadas suaves (Figura 3.4) ainda com a propriedade de f restrita a tais curvas ser injetiva.

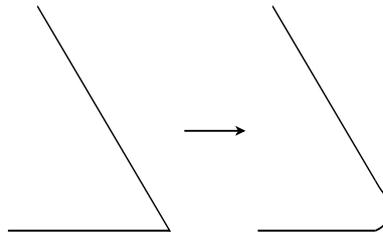


Figura 3.4: Suavização dos vértices da fronteira de \mathcal{T}

Portanto, $N(x, y)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Massey e é, portanto, um homeomorfismo. ■

Duas consequências deste teorema são

Corolário 3.2.1 *Se $G(j\omega_0)$ pertence à região de atrito \mathcal{S} , então a equação (3.6) admite uma única solução (\hat{x}, \hat{y}) e também, $\hat{S} = A_0 \hat{x}$ and $\hat{J} = A_0 \hat{y}$ são os parâmetros estimados do atrito.*

Prova:

Se $G(j\omega_0)$ pertence à região de atrito \mathcal{S} , então $-1/G(j\omega_0)$ pertence à imagem $N(D)$. Pelo Teorema 3.2.1 $N : D \rightarrow N(D)$ é um homeomorfismo, portanto existe um único $(\hat{x}, \hat{y}) \in D$ tal que $N(\hat{x}, \hat{y}) = -1/G(j\omega_0)$. Como $x = S/A$ e $y = J/A$ tem-se que $\hat{S} = A_0 \hat{x}$ e $\hat{J} = A_0 \hat{y}$. ■

Corolário 3.2.2 *Se $G(j\omega_0)$ pertence à curva $\Gamma_1 \subset \partial\mathcal{S}$, então existe um único $\hat{x} \in [0, 2]$ tal que $G(j\omega_0) = -1/N(\hat{x}, 0)$ e $\hat{d} = A_0 \hat{x}$ (banda morta pura).*

Prova:

Consequência imediata da validade do Teorema 3.2.1 sobre a fronteira da região de atrito. ■

Se $G(j\omega_0)$ pertence ao eixo imaginário negativo, então este caso corresponde a $x = 2$ nas equações (3.3)-(3.5). Este fato simplifica significativamente a solução da Equação (3.9). De fato, neste caso os parâmetros estimados são dados por

$$\hat{S} = 2A_0 \quad (3.12)$$

$$\hat{J} = -\frac{\pi A_0}{2 \operatorname{imag}(G(j\omega_0))} \quad (3.13)$$

Em resumo, se $G(j\omega_0)$ pertence à região de atrito \mathcal{S} da Figura 3.3 então existe um único par $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{T}$ satisfazendo a equação (3.6) e, portanto, existe um único par de parâmetros (\hat{S}, \hat{J}) satisfazendo a equação de balanço harmônico (3.2). Além disso, este par é dado pelas equações (3.7) e (3.8), ou no caso específico de $G(j\omega_0)$ pertencer ao eixo imaginário negativo, pelas equações (3.12) e (3.13).

3.3 Quantificação da banda morta

Considera-se agora que na malha de controle da Figura 3.1 a não linearidade \mathcal{N} é a banda morta com parâmetro d , e que esta malha esteja oscilando devido a esta não linearidade, com o sinal de controle u possuindo uma amplitude medida A_0 e uma frequência medida ω_0 . Se $G(s) = C(s)P(s)$ é a parte linear da malha, então pelo método da FD, o gráfico de Nyquist de $G(s)$ intercepta a curva negativo inverso da FD da banda morta num ponto $G(j\omega_i)$ correspondente a uma amplitude A_i , ou seja, tem-se a equação de balanço harmônico (3.14)

$$G(j\omega_i) = \frac{-1}{N(d_i, A_i)} \quad (3.14)$$

para algum d_i desconhecido, com $A_i \approx A_0$ e $\omega_i \approx \omega_0$ devido ao caráter aproximativo do método. Para este cenário existem duas possibilidades:

- A) $G(j\omega_0)$ pertence à curva negativo inverso da FD da banda morta e neste caso $G(j\omega_0) = G(j\omega_i)$.

A FD da banda morta (equações (2.10) e (2.11)) é um caso particular da FD do atrito (equações (2.8) e (2.9)) com $S = d$ e $J = 0$. Se $x = S/A_0$ e $J = 0$, a aplicação $N(x, y)$ definida em (3.3)-(3.5) é tal que $-1/N(x, 0)$ mapeia o intervalo $0 \leq x < 2$ (base do triângulo que forma $\partial\mathcal{T}$) sobre a curva negativo inverso da FD da banda morta. Como consequência da prova do Teorema 3.2.1 (especificamente, a injetividade na fronteira), existe um único $\hat{x} \in [0, 2)$ tal que

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{N(\hat{x}, 0)} \quad (3.15)$$

e portanto, existe um único parâmetro $\hat{d} = A_0\hat{x}$ tal que

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{N(\hat{d}, A_0)}. \quad (3.16)$$

Este \hat{d} é o único parâmetro estimado da banda morta.

- B) $G(j\omega_0)$ não pertence a curva negativo inverso da FD da banda morta.

Este é o caso mais comum dado que, pelo caráter aproximativo do método da FD, não necessariamente ocorre a coincidência entre a frequência medida de oscilação ω_0 e a frequência ω_i correspondente a interseção do gráfico de Nyquist de $G(s)$ com a curva negativo inverso da FD da banda morta. Mas, se a oscilação é bem aproximada por uma oscilação senoidal de modo que a função descritiva é uma boa aproximação quase-linear da não linearidade, então ω_0 está próxima de ω_i . Nesta situação a equação

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{N(d, A_0)} \quad (3.17)$$

não admite solução em d . Apresenta-se neste caso duas abordagens para estimar a banda morta d :

- i) **Abordagem I.** Com a disponibilidade da parte linear $G(s)$, determina-se o ponto z_i de interseção do gráfico de Nyquist de $G(s)$ com a curva negativo inverso da FD da banda morta (Figura 3.5). Para este ponto z_i existe um único $\hat{x} \in [0, 2)$ tal que

$$z_i = \frac{-1}{N(\hat{x}, 0)} \quad (3.18)$$

então $\hat{d} = A_0 \hat{x}$ é o único parâmetro estimado da banda morta.

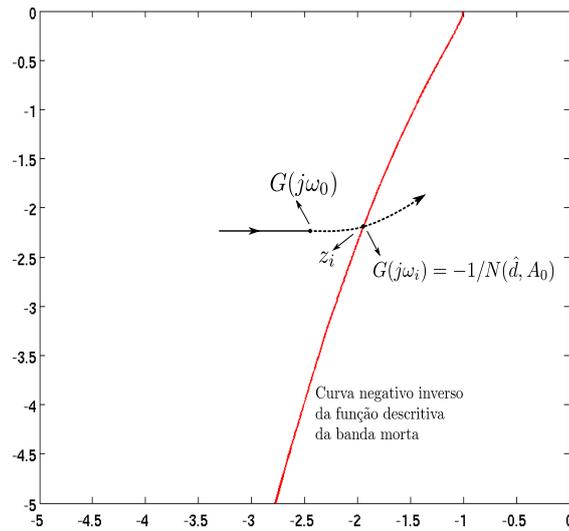


Figura 3.5: Abordagem I para estimação de d

- ii) **Abordagem II.** Estima-se o parâmetro d considerando o ponto da curva negativo inverso da FD da banda morta que está mais próximo da resposta frequencial $G(j\omega_0)$. Ou seja, \hat{x} satisfaz

$$\left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(\hat{x}, 0)} \right|^2 = \min_{x \in [0, 2)} \left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(x, 0)} \right|^2 \quad (3.19)$$

e o parâmetro estimado da banda morta é $\hat{d} = A_0 \hat{x}$.

3.4 Métodos numéricos para solução

3.4.1 O caso do atrito

De acordo com a seção 3.2.2 os parâmetros estimados (\hat{S}, \hat{J}) do atrito são obtidos a partir das equações (3.7) e (3.8). Nota-se que, (\hat{x}, \hat{y}) é uma solução da equação (3.6) se, e somente se,

$$\left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(\hat{x}, \hat{y})} \right|^2 = 0. \quad (3.20)$$

Isto sugere a definição da função real não negativa

$$F(x, y) = \left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(x, y)} \right|^2 \quad (3.21)$$

cujo domínio é o interior da região triangular \mathcal{T} da Figura 3.2. Assim, (\hat{x}, \hat{y}) é uma solução da equação (3.6) se, e somente se, $F(\hat{x}, \hat{y}) = 0$. Como $F(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in \mathcal{T}$, segue-se que (\hat{x}, \hat{y}) é o ponto de mínimo global de F . Portanto, o problema de resolver para (x, y) a equação (3.6) se transforma num problema de otimização global (minimização global) de F no interior da região triangular \mathcal{T} .

Neste trabalho, optou-se por um algoritmo de otimização de ponto interior com restrições, ou seja, deseja-se resolver o problema:

$$\min_{(x,y)} F(x, y) \text{ tal que } AX \leq b, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A matriz A e o vetor b são escolhidos de modo que, $(x, y) \in \mathcal{T}$, o que produz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

O ponto de partida $(x_0, y_0) \in \mathcal{T}$ escolhido para o algoritmo, foi o baricentro da região triangular \mathcal{T} , $(4/3, 2/3)$. Sob testes, o algoritmo convergiu em todas as situações para o ponto (\hat{x}, \hat{y}) de mínimo global da função $F(x, y)$, sem a necessidade de trocar o ponto de partida. Nas simulações foi utilizada a função `fmincon` do software MATLAB[®].

3.4.2 O caso da banda morta

Para simplificar a notação, denota-se por $N(x) = N(x, 0)$ a função descritiva da banda morta como função de $x = d/A$. Na estimação da banda morta d , optou-se pela abordagem II em B) da seção 3.3, ou seja, a solução aproximada da banda morta pelo método da função descritiva é dada por

$$\hat{d} = A_0 \hat{x} \quad (3.24)$$

com \hat{x} satisfazendo

$$\left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(\hat{x})} \right|^2 = \min_{x \in (0,2)} \left| G(j\omega_0) + \frac{1}{N(x)} \right|^2 \quad (3.25)$$

Geometricamente, este parâmetro \hat{d} corresponde ao valor do parâmetro d para o qual o ponto $-1/N(d, A_0)$ sobre a curva negativo inverso da função descritiva da banda morta, está mais próximo da resposta frequencial $G(j\omega_0)$. Da equação (3.25), verifica-se que o problema da estimação é equivalente a um problema de otimização (minimização) em uma variável $x \in (0, 2)$. O algoritmo de estimação foi implementado com o uso da função `fminbind` do software MATLAB[®], baseada no *algoritmo da seção áurea* para o cálculo de minimização de funções contínuas de uma variável $f(x)$ num intervalo aberto tipo $x_1 < x < x_2$.

3.5 Aplicação do método para plantas com incertezas no modelo

Nas últimas seções foram considerados os casos de estimação do atrito e da banda morta assumindo o conhecimento exato da função de transferência do processo. Em situações práticas, a função de transferência do processo não é precisamente conhecida. Nesta seção, as metodologias desenvolvidas para a estimação dos parâmetros do modelo a dois parâmetros de atrito e da banda morta serão generalizadas para o caso de incertezas paramétricas na função de transferência do processo. Para esta finalidade, serão empregadas técnicas clássicas da teoria de controle robusto (Bhattacharyya et al. [1995]).

3.5.1 Teoria de Kharitonov

Funções de transferência com incertezas podem ser representadas por funções de transferência intervalares, as quais são definidas como quocientes de polinômios intervalares $\mathbf{G}(s) = \mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)$. Para cada polinômio intervalar $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{D}(s)$, existem quatro polinômios extremos chamados *polinômios de Kharitonov*, denotados por

$K_N^i(s), i = 1, 2, 3, 4$, para $\mathbf{N}(s)$ e $K_D^k(s), k = 1, 2, 3, 4$, para $\mathbf{D}(s)$. Várias propriedades acerca dos polinômios intervalares, os quais são famílias infinitas de polinômios, podem ser deduzidas das mesmas propriedades satisfeitas pelos quatro polinômios de Kharitonov associados. Se $\mathbf{G}(s) = \mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)$ é uma função de transferência intervalar então $\mathbf{G}(j\omega)$ é um subconjunto compacto do plano complexo chamado *conjunto resposta frequencial* em ω . A fronteira deste conjunto é uma reunião de segmentos, arcos e vértices. O conjunto formado pelos vértices do conjunto resposta frequencial está contido no conjunto formado pelas dezesseis respostas frequenciais de funções de transferência de Kharitonov $G_{ik}(j\omega) = K_N^i(j\omega)/K_D^k(j\omega), i, k = 1, 2, 3, 4$.

Associada à função de transferência intervalar $\mathbf{G}(s) = \mathbf{N}(s)/\mathbf{D}(s)$, a *função de transferência extremal* $G_E(s)$ é definida por

$$G_E(s) = \frac{K_N(s)}{S_D(s)} \cup \frac{S_N(s)}{K_D(s)} \quad (3.26)$$

Em (3.26) $K_N(s)$ representa os quatro polinômios de Kharitonov associados a $\mathbf{N}(s)$, $K_D(s)$ representa os quatro polinômios de Kharitonov associados a $\mathbf{D}(s)$, $S_N(s)$ e $S_D(s)$ são segmentos de funções de transferências definidos pelas seguintes equações

$$S_N(s) = \lambda K_N^i(s) + (1 - \lambda) K_N^k(s), \quad (3.27)$$

$$S_D(s) = \lambda K_D^i(s) + (1 - \lambda) K_D^k(s), \quad (3.28)$$

com $(i, k) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Aqui o conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega)$ desempenha um importante papel pois este substitui a resposta frequencial da parte linear no procedimento de estimação. O seguinte teorema relaciona a fronteira $\partial\mathbf{G}(j\omega)$ do conjunto resposta frequencial com a função de transferência extremal $G_E(s)$ e justifica o uso do conjunto $G_E(j\omega)$ para plotar o conjunto resposta frequencial.

Teorema 3.5.1 *Com as mesmas notações anteriores, tem-se que*

$$\partial\mathbf{G}(j\omega) \subset G_E(j\omega), \quad (3.29)$$

ou seja, a fronteira do conjunto resposta frequencial está contido no conjunto extremal.

3.5.2 Intervalos de estimação dos parâmetros

Considera-se aqui uma malha de controle não linear como a representada pelo diagrama de blocos da Figura 3.1, com a não linearidade \mathcal{N} sendo a banda morta com parâmetro d ou o modelo de atrito a dois parâmetros S e J . Em ambos casos denota-se

por N_λ a função descritiva destas não linearidades com $\lambda = d$ para a banda morta e $\lambda = (S, J)$ no caso do atrito. Assume-se também que a função de transferência do processo possui incertezas paramétricas e é, portanto, representada por uma função de transferência intervalar $\mathbf{P}(s)$. Assim, a parte linear da malha $\mathbf{G}(s) = C(s)\mathbf{P}(s)$ é também uma função de transferência intervalar.

Considerando-se que o sinal de controle u esteja oscilando devido a não linearidade com uma amplitude medida A_0 e uma frequência medida ω_0 , tem-se que a equação de balanço harmônico

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N_\lambda(A_0)} \quad (3.30)$$

é satisfeita para algum valor do parâmetro $\lambda = d$ ou $\lambda = (S, J)$ conforme a não linearidade \mathcal{N} seja a banda morta ou o modelo de atrito a dois parâmetros S e J . $G(s)$ em (3.30) denota algum membro da família intervalar de funções de transferências $\mathbf{G}(s)$. A resposta frequencial $G(j\omega_0)$ na equação (3.30) é um ponto do conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega_0)$ associado à função de transferência intervalar $\mathbf{G}(s)$ na frequência medida ω_0 . O conjunto $\mathbf{G}(j\omega_0)$ não é, em geral, um subconjunto convexo do plano, mas, no caso das incertezas serem pequenas, este conjunto é bem aproximado por um conjunto convexo cujos vértices pertencem ao conjunto das 16 respostas frequenciais das funções de transferência de Kharitonov $G_{ik}(j\omega_0)$ associadas à função de transferência intervalar $\mathbf{G}(s)$. As estimações dos parâmetros das não linearidades neste caso, são intervalos delimitados pelo valor mínimo e pelo valor máximo das estimações baseadas na resolução para λ da equação de balanço harmônico (3.30). O uso das funções de transferência de Kharitonov (vértices) permite passar de uma quantidade infinita de estimações para um número finito de no máximo dezesseis estimações sobre os vértices do conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega_0)$, ou seja, as 16 soluções para λ da equação

$$G_{ik}(j\omega_0) = -\frac{1}{N_\lambda(A_0)}, \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3.31)$$

Se $\hat{\lambda}_{ik}$, $i, k = 1, 2, 3, 4$, denotam as dezesseis soluções em λ da equação (3.31), então considerando os valores extremos $\min\{\hat{\lambda}_{ik}\}$ e $\max\{\hat{\lambda}_{ik}\}$ os intervalos de estimação dos parâmetros são dados por:

$$\begin{aligned} I_d &= [\min\{\hat{\lambda}_{ik}\}, \max\{\hat{\lambda}_{ik}\}], \text{ para } \lambda = d \text{ no caso da banda morta e} \\ I_S &= [\min\{\hat{\lambda}_{1ik}\}, \max\{\hat{\lambda}_{1ik}\}], \\ I_J &= [\min\{\hat{\lambda}_{2ik}\}, \max\{\hat{\lambda}_{2ik}\}], \text{ para } \lambda = (S, J) \text{ no caso do atrito} \end{aligned}$$

com $\lambda_{ik} = (\lambda_{1ik}, \lambda_{2ik})$ no caso do atrito. A Figura 3.6 exhibe um conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega_0)$ associado a uma função de transferência intervalar $\mathbf{G}(s)$, $G_{ik}(j\omega_0)$ denota um de seus vértices. Neste caso específico, este conjunto resposta frequencial está contido na região de atrito \mathcal{S} .

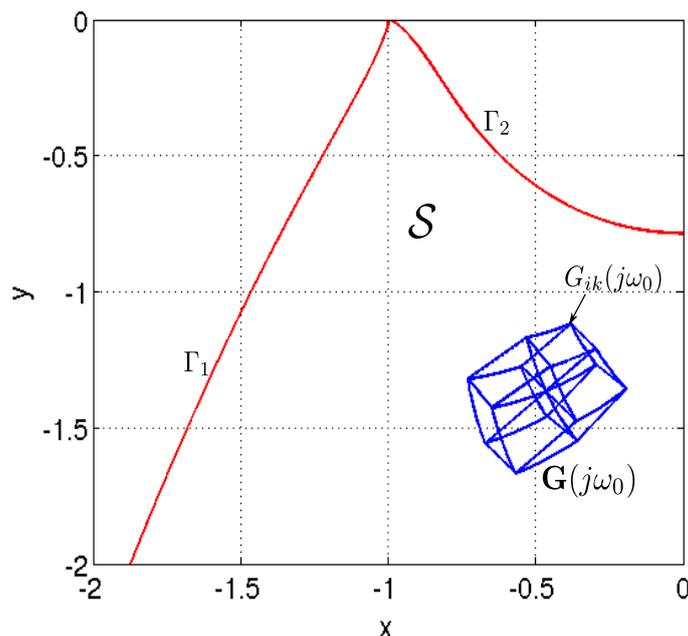


Figura 3.6: Conjunto resposta frequencial no interior da região de atrito

3.6 Aplicação do método para plantas com modelo desconhecido

A estimação do atrito pelo método da FD requer um modelo do processo e o modelo e parâmetros do controlador. Os parâmetros do controlador sempre estão disponíveis em controladores digitais. Quando apenas os dados usuais da malha de controle estão disponíveis, os parâmetros do controlador podem ser obtidos via identificação em malha fechada (Forsell e Ljung [1999]), usando os sinais *SP*, *OP* e *PV*. Um modelo para o processo operando em torno de uma referência pode ser obtido via resposta ao degrau em malha aberta, que é um procedimento usual para a sintonia do controlador. Quando apenas dados de entrada e saída estão disponíveis, então deve ser efetuada uma identificação conjunta do processo linear e da válvula de controle (Srinivasan et al. [2005b]). Se este procedimento for bem sucedido, então os parâmetros do atrito são estimados. No entanto, esta metodologia requer elevado esforço computacional.

O procedimento de modelagem proposto nesta seção é relativamente simples e fortemente baseado em práticas comuns em processos industriais. Controladores PID são usados em mais de 95% das malhas de controle industriais (Aström e Hägglund [2006]). Adicionalmente, cada malha de controle utiliza um controlador que assegura um desejado desempenho. Portanto, a estrutura do controlador é normalmente conhecida, o que torna fácil a identificação dos seus parâmetros. Malhas de vazão, em geral são controladas por um controlador PI e a função de transferência do processo $P(s)$ é dada por

$$P(s) = \frac{K}{\tau s + 1}. \quad (3.32)$$

O atraso é desprezível e, se este existir, é devido ao atrito. A constante de tempo τ é proveniente da válvula de controle. Uma sintonia conveniente para este tipo de malha de controle é dada pelo método IMC (Internal Model Control) (Rivera et al. [1986]), com

$$T_i = \tau \quad (3.33)$$

$$K_p = \frac{T_i}{K \lambda} \quad (3.34)$$

λ é a constante de tempo de malha fechada desejada, e a função de transferência do controlador $C(s)$ é dada por

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (3.35)$$

Quando o atraso de tempo não é desprezível, o processo é normalmente representado por

$$P(s) = \frac{K}{\tau s + 1} e^{-\theta s} \quad (3.36)$$

e o controlador PI com a sintonia IMC é dado por

$$K_p = \frac{2\tau + \theta}{2K\lambda} \quad (3.37)$$

$$T_i = \tau + \frac{\theta}{2} \quad (3.38)$$

Existem muitos métodos de sintonia aplicáveis a (3.36), mas verifica-se que, em geral, as regras de sintonia colocam um zero entre a origem e o pólo da função de transferência, usualmente próximo do pólo. Como consequência desta proximidade, a parte linear $G(s) = C(s)P(s)$ pode ser aproximada por

$$G(s) = C(s)P(s) \approx \frac{K K_p}{T_i s} \quad (3.39)$$

Esta aproximação torna-se ainda melhor se a frequência de oscilação devido ao atrito é menor que $1/T_i$, o que é comum, como mostrarão os exemplos da indústria. Este fato simplifica bastante a estimação dos parâmetros do atrito, pois neste caso S e J podem ser obtidos diretamente das equações (3.40) e (3.41), as quais, derivam diretamente das equações (3.12), (3.13) e (3.39)

$$\hat{S} = 2 A_0 \quad (3.40)$$

$$\hat{J} = \frac{\pi T_i A_0 \omega_0}{2 K K_p} \quad (3.41)$$

A_0 e ω_0 são a amplitude e a frequência respectivamente do sinal de controle.

Para usar as equações (3.40) e (3.41), deve-se obter o ganho K do processo o que é feito na sequência.

Seja o diagrama de blocos exibido na Figura 3.7 com o processo $P(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$ e os parâmetros do atrito $S = J = 0$ (linear)

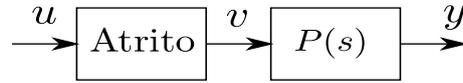


Figura 3.7: Processo de primeira ordem e atrito

O uso do método da resposta frequencial relaciona o módulo e o ângulo de $y(t)$ e $u(t)$ por

$$|Y(j\omega)| = |P(j\omega)||U(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}|U(j\omega)| \quad (3.42)$$

$$\varphi(j\omega) = \arg(Y(j\omega)) - \arg(U(j\omega)) = \arctan(\omega\tau) \quad (3.43)$$

A constante de tempo τ pode ser calculada por

$$\tau = \frac{\tan(\varphi(j\omega))}{\omega} \quad (3.44)$$

e a substituição em (3.42) produz

$$|K| = \frac{|Y(j\omega)|}{|U(j\omega)|} \sqrt{\tan(\varphi(j\omega))^2 + 1} \quad (3.45)$$

As equações (3.44) and (3.45) podem ser usadas para calcular os parâmetros de $P(s)$ se o sinal $y(t)$ for conhecido para um dado sinal $u(t) = A \sin(\omega t)$. Entretanto, esta é a situação ideal de sinais não ruidosos e com a ausência de não-linearidades.

Voltamos a considerar a presença de atrito com $S = 5$ e $J = 1$ aplicando o sinal $u(t) = 6 \sin(2t)$ com $P(s) = \frac{2}{s+1}$ e os correspondentes sinais $v(t)$ e $y(t)$ mostrados na Figura 3.8. A fase de $v(t)$ está atrasada e o módulo de $v(t)$ está decrescido devido a não-linearidade, com o mesmo efeito sobre o sinal $y(t)$.

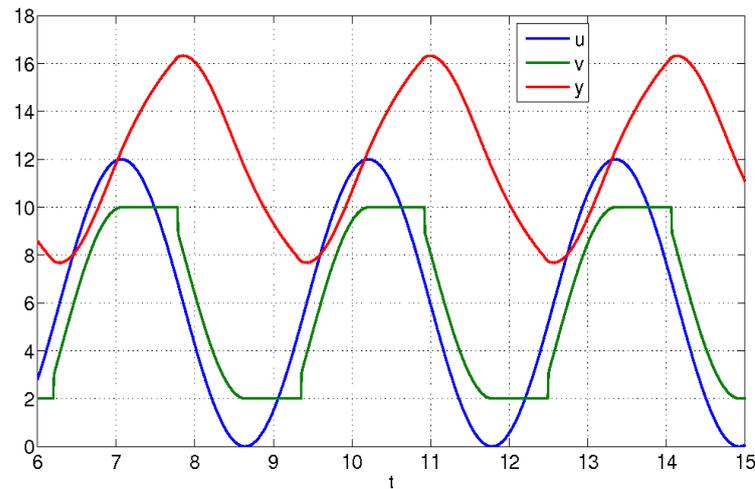


Figura 3.8: Sinais $u(t)$, $y(t)$ e $v(t)$

O efeito da não-linearidade sobre o módulo e o ângulo pode ser previsto pelo método da FD. O módulo e a fase da FD do atrito com $A = 8$, $S = 7$ e $S/J = 1, \dots, 14$ é exibido na Figura 3.9. Verifica-se que S/J diminui (aumenta) o módulo e atrasa (avança) o ângulo da FD do atrito. Para grandes valores da amplitude A , esta relação é preservada, mas o efeito de S/J sobre o módulo é reduzido.

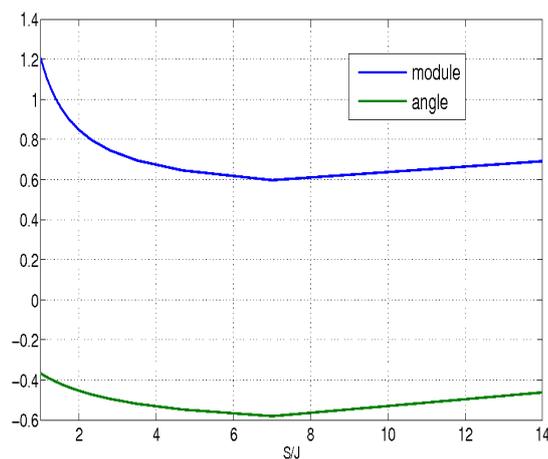


Figura 3.9: Módulo e fase da FD do atrito

Esta observação junto com a equação (3.45) permite concluir que o cálculo de K usando $u(t)$ é próximo do cálculo de K usando $v(t)$, pois quando S/J aumenta, $|Y(j\omega)|/|V(j\omega)|$ decresce enquanto que $\arg(Y(j\omega)) - \arg(V(j\omega))$ aumenta.

Esta análise também foi feita via simulação, usando $P(s) = \frac{1}{s+1}e^{-0.2s}$ e $C(s) = \frac{s+2}{s}$ da seção 4.2.3, com $T_s = 0.1s$. A função de transferência $P(s)$ foi estimada como um modelo ARX usando os sinais u do controlador e y da saída do processo. O ganho desta função de transferência é mostrado na Tabela 3.1 para $S = 7$ e $S/J = 1, \dots, 14$. O ganho K calculado em todas as situações manteve-se próximo do valor real 1.

S/J	K
14.0000	0.9997
7.0000	1.0028
4.6667	0.9981
3.5000	1.0022
2.8000	1.0011
2.3333	1.0030
2.0000	1.0022
1.7500	1.0055
1.5556	1.0038
1.4000	1.0041
1.2727	1.0044
1.1667	1.0087
1.0769	1.0079
1.0000	1.0074

Tabela 3.1: *Estimação do ganho em função da relação S/J*

Portanto, este é o método que será usado neste trabalho para calcular o ganho K a ser usado na equação (3.41).

3.7 Medição da amplitude e do período

3.7.1 Medição do período do sinal de controle

Thornhill et al. [2003] descreve uma metodologia para avaliar o período e a regularidade da oscilação de um sinal. Eles usaram o cruzamento por zero da função de auto-covariância do sinal para estimar o período T da oscilação. Uma oscilação é considerada regular se o desvio padrão do período da oscilação (σ_T) é menor que um terço do valor médio do período de oscilação (\bar{T}), ou seja, considerando-se o fator

$$r = \frac{1}{3} \frac{\bar{T}}{\sigma_T},$$

então um segmento de dados com $r > 1$ indica uma oscilação regular com um período T bem definido. Neste trabalho é utilizada esta abordagem para a medição da frequência de oscilação do sinal de controle requerida pelo método da FD.

3.7.2 Medição da amplitude

Em Choudhury et al. [2006] os autores desenvolveram uma metodologia para estimação do parâmetro S do atrito. Primeiramente, os dados são filtrados com um filtro de Wiener para atenuar as componentes de frequências que não são devidas à não-linearidade, em seguida considera-se um segmento de dados $OP \times PV$ com oscilação regular, como na seção 3.7.1, e com comprimento de cerca de quatro períodos. Para este conjunto de dados considera-se a elipse que melhor se ajusta a estes. O diâmetro horizontal desta elipse é o dobro da amplitude do sinal de controle e é reportado como sendo uma estimativa do parâmetro S . Este procedimento é usado neste trabalho para medição da amplitude do sinal de controle.

3.8 Sensibilidade a erros nas medidas

Como a FD da banda morta (equações (2.10) e (2.11)) coincide com a FD do atrito (equações (2.8) e (2.9)) para $S = d$ e $J = 0$, toda a discussão sobre a propagação de incertezas nas medidas serão feitas para o caso do atrito.

Considera-se uma malha de controle não linear, como a dada pelo diagrama de blocos da Figura 2.1, com a não linearidade sendo o modelo a dois parâmetros S e J de atrito. Admite-se que a malha esteja oscilando devido ao atrito, de modo que o sinal de controle u possua uma amplitude medida A_0 e uma frequência medida ω_0 com as respectivas incertezas ΔA e $\Delta \omega$.

Como visto na seção 3.2.2 a estimação dos parâmetros S e J do atrito é obtida resolvendo-se para (x, y) a equação (3.46).

$$G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(x, y)} \quad (3.46)$$

Assim, se (\hat{x}, \hat{y}) é uma solução de (3.46), então os parâmetros estimados são dados por

$$\hat{S} = A_0 \hat{x} \quad (3.47)$$

$$\hat{J} = A_0 \hat{y} \quad (3.48)$$

Segue-se de (3.47)-(3.48) que as incertezas ΔS e ΔJ nas estimações dos coeficientes do atrito estático devido a uma incerteza ΔA apenas na medida de amplitude são dadas por

$$\Delta S = \Delta A \hat{x} \quad (3.49)$$

$$\Delta J = \Delta A \hat{y} \quad (3.50)$$

Seja $z = u + jv = G(j\omega)$ a resposta frequencial de $G(s)$ em ω . A resolução da equação (3.46) pode ser vista também da seguinte forma: para cada resposta frequencial $G(j\omega) = z = u + jv$, deve-se obter (x, y) satisfazendo a equação (3.46). Com a existência e unicidade de soluções bem estabelecida, fica bem definida uma função F que associa a cada par ordenado (u, v) na região de atrito, uma solução (x, y) da equação (3.46) (Figura 3.10).

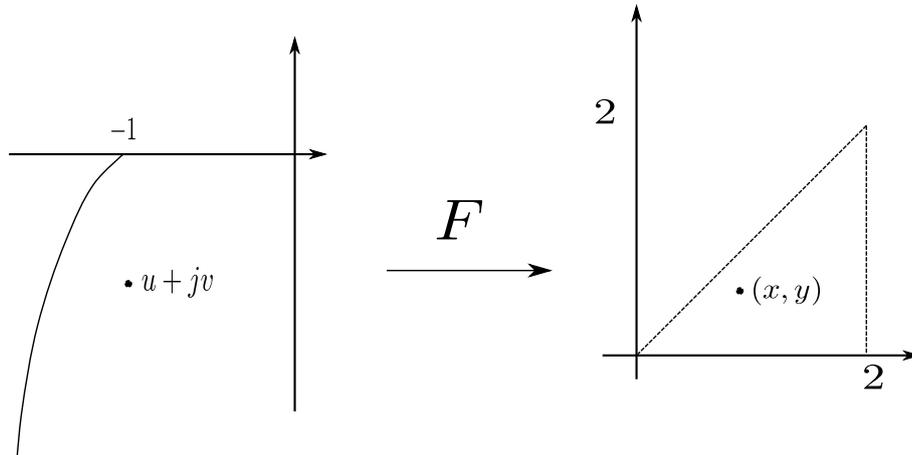


Figura 3.10: A aplicação F

Sejam $z_0 = G(j\omega_0) = u_0 + jv_0$ e (x_0, y_0) a (única) solução da equação (3.46), $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ uma incerteza na frequência medida e $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$ incertezas nas componentes da resposta frequencial induzidas pela incerteza $\Delta\omega$. Então

$$\Delta z = \Delta u + j\Delta v \cong G'(j\omega_0)\Delta\omega \quad (3.51)$$

em valores absolutos tem-se

$$|\Delta z| = |\Delta u + j\Delta v| \cong |G'(j\omega_0)| |\Delta\omega| \quad (3.52)$$

a incerteza $\Delta z = \Delta u + j\Delta v$ na resposta frequencial induz uma incerteza $(\Delta x, \Delta y)$ na solução de (3.48) dada por

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \cong F'(u_0, v_0) \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Aqui $F'(u_0, v_0)$ denota a derivada da aplicação F no ponto (u_0, v_0) .

Como $u + jv = -1/N(x, y)$, segue-se que a aplicação F é a inversa da aplicação $-1/N(x, y)$.

Nota-se que,

$$-\frac{1}{N(x, y)} = (\Phi \circ N)(x, y), \text{ com } \Phi(z) = -\frac{1}{z} \quad (3.54)$$

portanto

$$F = (\Phi \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

Como $\Phi = \Phi^{-1}$, tem-se que

$$F = (\Phi \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ \Phi \quad (3.55)$$

A aplicação da Regra da Cadeia a (3.55) produz

$$F'(u_0, v_0) = (N^{-1})'(\Phi(u_0, v_0)) \cdot \Phi'(u_0, v_0) \quad (3.56)$$

e pelo Teorema da Função Inversa tem-se

$$(N^{-1})'(\Phi(u_0, v_0)) = [N'(x_0, y_0)]^{-1}$$

portanto

$$F'(u_0, v_0) = [N'(x_0, y_0)]^{-1} \cdot \Phi'(u_0, v_0) \quad (3.57)$$

Os cálculos são realizados nos pontos (x_0, y_0) e (u_0, v_0) satisfazendo

$$u_0 + jv_0 = G(j\omega_0) = -\frac{1}{N(x_0, y_0)}$$

De (3.53) tem-se que

$$\Delta x \cong [1 \ 0] F'(u_0, v_0) \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\Delta y \cong [0 \ 1] F'(u_0, v_0) \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

De (3.52), (3.58) e (3.59) tem-se

$$|\Delta x| \cong \|[1 \ 0] \cdot F'(u_0, v_0)\| |G'(j\omega_0)| |\Delta \omega| \quad (3.60)$$

$$|\Delta y| \cong \|[0 \ 1] \cdot F'(u_0, v_0)\| |G'(j\omega_0)| |\Delta \omega| \quad (3.61)$$

Sejam

$$\xi_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot F'(u_0, v_0) \right\|$$

$$\xi_2 = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot F'(u_0, v_0) \right\|$$

$|G'(j\omega_0)|$ mede a influência da incerteza na frequência na resposta frequencial. ξ_1 e ξ_2 medem a influência da incerteza na resposta frequencial Δz na estimação de x e y respectivamente. Tem-se então que as incertezas nas estimações dos parâmetros S e J devido a uma incerteza $\Delta\omega$ na medida da frequência são dadas por

$$\Delta S \approx A_0 \Delta x \quad (3.62)$$

$$\Delta J \approx A_0 \Delta y \quad (3.63)$$

com Δx e Δy dadas em (3.60) e (3.61).

Em resumo, as incertezas nas estimações devido às incertezas nas medidas da amplitude e da frequência do sinal de controle u , podem ser estimadas pelas fórmulas (3.49)-(3.50) e (3.62)-(3.63).

3.9 Conclusões

Conhecidos $C(s)$, $P(s)$, A_0 e ω_0 , foram mostradas condições para a existência e unicidade da solução para a obtenção dos parâmetros S e J do atrito e d da banda morta. Um algoritmo numérico usando otimização foi proposto para obter os parâmetros. Os casos de plantas com incertezas paramétricas foram abordados, sendo proposta metodologia específica de solução. Também foi proposta uma metodologia para lidar com casos onde o modelo do processo não é conhecido, permitindo que o método da FD utilize apenas os dados de rotina da malha. Na Figura 3.11 é exibido o fluxograma do algoritmo de quantificação do atrito pelo método da FD. Finalmente, foram discutidos aspectos relacionados à medição de amplitude e frequência do sinal utilizado, bem como o efeito de incertezas no algoritmo proposto.

(Após a detecção de não linearidade e oscilação)

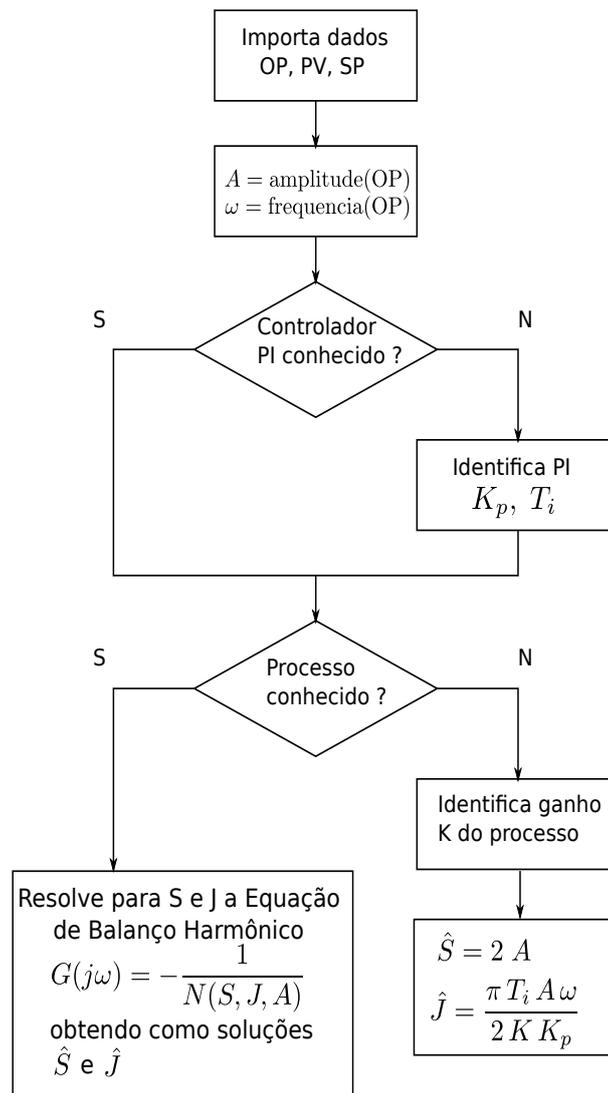


Figura 3.11: Fluxograma do algoritmo de quantificação do atrito pelo método da FD

Capítulo 4

Aplicações e análise do método

4.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é aplicar e avaliar os algoritmos propostos em simulações e processos reais. Nos processos simulados é possível avaliar os erros de estimação bem como possíveis erros introduzidos pelo uso da função descritiva. Uma planta piloto é utilizada com um modelo identificado via método da resposta ao degrau. As incertezas presentes nos parâmetros do modelo são utilizadas para avaliar a metodologia de quantificação aplicada a estas situações. Finalmente, os uso de dados reais da indústria permite considerar as situações nas quais não há informações sobre o modelo e seus parâmetros. Três malhas de controle são consideradas e o método proposto é comparado com um método da literatura.

4.2 Simulações

O exemplos de simulação aqui tratados têm por objetivo ilustrar e avaliar o método proposto. Como os modelos do processo são conhecidos bem como os parâmetros do atrito, é possível verificar se a qualidade das estimativas decorrentes do método da função descritiva. Um caso com a presença de banda morta e dois casos com atrito são tratados a seguir.

4.2.1 Sistema integrador com controlador PI e presença de banda morta

Considera-se aqui uma malha de controle não linear como a representada pelo diagrama de blocos da Figura 3.1. A não linearidade \mathcal{N} é a banda morta de magnitude d , o controlador $C(s)$ e o processo $P(s)$ são dados pelas seguintes funções de transferência

$$C(s) = \frac{0.5s + 0.1}{s} \quad (4.1)$$

$$P(s) = \frac{1}{s(s+1)}. \quad (4.2)$$

A tabela 4.1 mostra os resultados das estimações. \hat{d} é a banda morta estimada, $e_d(\%)$ é o erro percentual de estimação e A_0 é a amplitude do sinal de controle. O formato da curva negativo inverso da FD da banda morta não depende do parâmetro d , pois na expressão da FD da banda morta o parâmetro sempre aparece na forma d/A . A consequência mais importante deste fato é que o parâmetro d influencia na amplitude da oscilação mas, como o formato da curva não se altera, o ponto de interseção com o gráfico de Nyquist da parte linear $G(s) = C(s)P(s)$ não muda e portanto a frequência da oscilação devido a banda morta também não muda. Nestas simulações a frequência medida do sinal de controle foi de $\omega_0 = 0.2701$ rad/s. Como a parte linear $G(s)$ é conhecida, é possível determinar graficamente o ponto de interseção do gráfico de Nyquist de $G(s)$ com a curva negativo inverso da FD da banda morta e a frequência ω_i correspondente a esta interseção (Figura 4.1). Se a FD for uma boa aproximação para a não-linearidade então ω_i deve estar próxima de ω_0 . De fato, nestas simulações, $\omega_i = 0.2854$ rad/s e portanto a variação percentual de ω_0 com relação a ω_i foi de 5.36%. Este pequeno valor confirma que a FD neste caso, é uma boa aproximação para as estimações da banda morta.

Tabela 4.1: *Estimações da banda morta*

$d(\%)$	\hat{d}	$e_d(\%)$	A_0
5	4.91	1.8830	3.95
10	9.81	1.8833	7.90
20	19.62	1.8829	15.80
30	29.44	1.8825	23.70
40	39.25	1.8823	31.60
50	49.06	1.8821	39.50
60	58.87	1.8820	47.40
70	68.68	1.8819	55.31
80	78.49	1.8818	63.21
90	88.31	1.8817	71.11

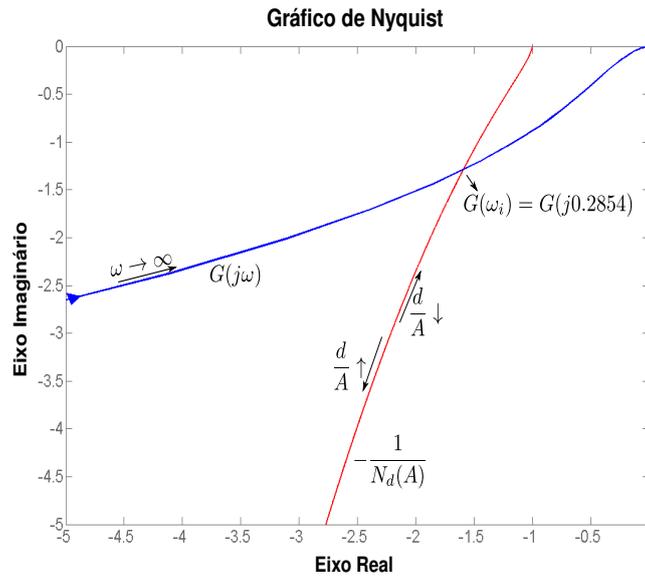


Figura 4.1: Gráfico de Nyquist de G e a curva negativo inverso da FD da banda morta

As Figuras 4.2(a), 4.2(b), 4.2(c) exibem os sinais de controle u e saída do processo y nos casos $d = 5\%$, 50% e 90% respectivamente. Verifica-se que em todos os casos o sinal de controle é aproximadamente senoidal o que justifica as boas estimativas do método da FD, pois neste caso a FD é uma boa aproximação para a não-linearidade banda morta.

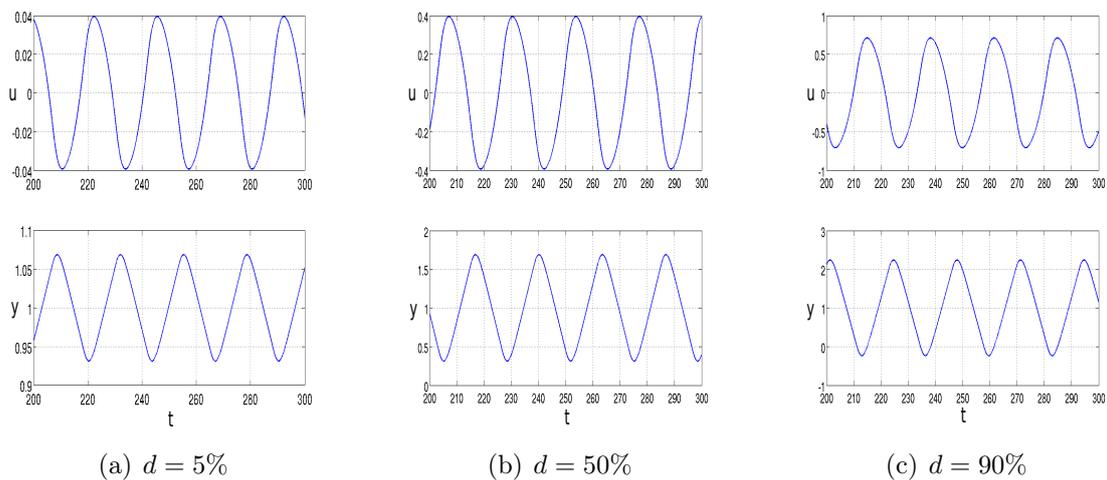


Figura 4.2: Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $d = 5\%$, 50% e 90%

4.2.2 Sistema integrador com controlador PI e presença de atrito

Considera-se aqui uma malha de controle não-linear na qual as funções de transferência do controlador $C(s)$ e do processo integrador $P(s)$ são dadas por

$$C(s) = \frac{0.5s + 0.05}{s} \quad (4.3)$$

$$P(s) = \frac{1}{s(s + 1)} \quad (4.4)$$

para simular uma válvula com atrito é utilizado o modelo a dois parâmetros de atrito (Choudhury et al. [2005]). Este modelo requer apenas o sinal de controle e as especificações do parâmetro S (banda morta + banda de travamento) e do parâmetro J (salto de escorregamento).

A Tabela 4.2 mostra o resultado das estimações dos parâmetros \hat{S} e \hat{J} do atrito. \hat{S} e \hat{J} são os parâmetros estimados, e_S e e_J são os erros percentuais de estimação. A e ω são respectivamente a amplitude e a frequência do sinal de controle. Usando S , J e $G(s) = C(s)P(s)$ foi possível prever a amplitude A_i e a frequência ω_i da oscilação do sinal de controle pelo método da FD. Estes valores foram comparados com a amplitude e a frequência medidas e as variações percentuais $e_A(\%)$ e $e\omega(\%)$ foram calculadas e exibidas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Resultado das estimações dos parâmetros do atrito

S	\hat{S}	$e_S(\%)$	J	\hat{J}	$e_J(\%)$	A	A_i	$e_A(\%)$	ω	ω_i	$e\omega(\%)$
10.0	9.3271	6.7290	0.5	0.0001	99.9743	5.9847	6.3839	6.2532	0.1555	0.1785	12.8917
10.0	8.8338	11.6624	1.0	0.0001	99.9910	5.7671	6.1342	5.9841	0.1643	0.1849	11.1478
10.0	9.4838	5.1622	2.0	1.6698	16.5081	5.5649	5.8111	4.2374	0.2035	0.2112	3.6634
10.0	9.7684	2.3159	3.0	3.0266	0.8858	5.5179	5.6661	2.6159	0.2553	0.2519	1.3498
10.0	9.8797	1.2028	4.0	4.2008	5.0192	5.5200	5.5937	1.3158	0.3084	0.2972	3.7824
10.0	9.9337	0.6632	5.0	5.3017	6.0338	5.5406	5.5824	0.7481	0.3598	0.3448	4.3345
10.0	9.9617	0.3833	6.0	6.3632	6.0539	5.5696	5.5849	0.2732	0.4086	0.3920	4.2484
10.0	9.9763	0.2374	7.0	7.4011	5.7303	5.6029	5.6136	0.1920	0.4547	0.4377	3.8938
10.0	9.9836	0.1645	8.0	8.4239	5.2987	5.6383	5.6474	0.1612	0.4983	0.4815	3.4848
10.0	9.9877	0.1231	9.0	9.4376	4.8619	5.6753	5.6661	0.1617	0.5396	0.5233	3.1058

Nas Figuras 4.3(a) e 4.3(b) são exibidos os sinais de controle u e saída y para $S = 10$, $J = 0.5$ (Figura 4.3(a)) e $S = 10$, $J = 5$ (Figura 4.3(b)). Verifica-se claramente que o sinal u da simulação com $S = 10$, $J = 0.5$ é mais distorcido com relação a uma senóide do que o sinal u da simulação com $S = 10$, $J = 5$ que é mais próximo de uma senóide. No entanto, esta não é a principal razão da qualidade inferior da estimação nos casos $J = 0.5$ e $J = 1.0$.

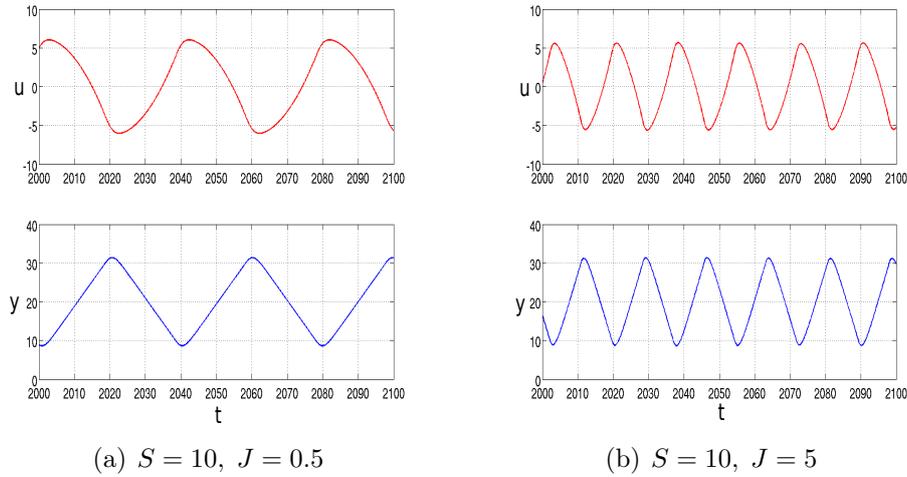


Figura 4.3: Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $S = 10$; $J = 0.5, J = 5$

Como mostrado na Tabela 4.2, o algoritmo estima o parâmetro S com erro percentual e_S inferior a 11.7% em todos os casos. Para $J = 0.5$ e $J = 1.0$ o algoritmo estima o parâmetro J com erro muito alto. Este comportamento é devido à proximidade entre a resposta frequencial $G(j\omega)$ e a curva negativo inverso da FD do atrito com $J = 0$ (ou seja, banda morta pura) (Figura 4.4).

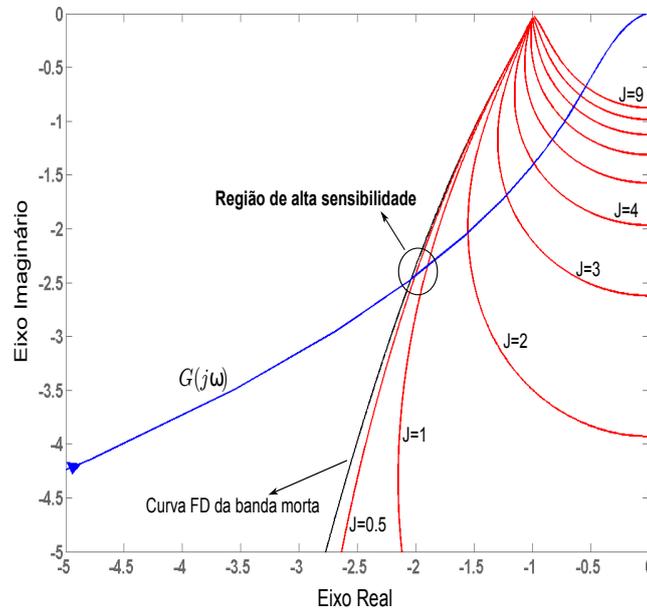


Figura 4.4: Gráfico de Nyquist de $G(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito

A região no plano complexo nas proximidades da curva negativo inverso da FD da banda morta (Figura 4.4) é uma região de alta sensibilidade à estimação dos parâmetros

do atrito pelo método da FD. Como se verifica na Tabela 4.2, a estimação do parâmetro J é muito mais sensível que a do parâmetro S para valores de J próximos de zero, ou seja, em situações onde a resposta frequencial $G(j\omega_0)$ está próxima da curva negativo inverso da FD da banda morta que faz parte da fronteira da região de atrito \mathcal{S} . O algoritmo numérico usado neste trabalho para resolução da equação 3.9 é um algoritmo de ponto interior como dito na seção 3.4.1, portanto o desempenho do algoritmo é afetado para estimações próximas da fronteira e em geral o algoritmo não funciona na fronteira. Para avaliar a capacidade de estimação do algoritmo próximo da fronteira, considerou-se uma sequência $(z_k) \in \mathcal{S}$ de respostas frequenciais no interior da região de atrito, com z_k se aproximando da curva negativo inverso da FD da banda morta, e pontos $(x_k, y_k) \in \mathcal{T}$ na região triangular \mathcal{T} tais que

$$z_k = \frac{-1}{N(x_k, y_k)}, \quad k=1, \dots, n.$$

Para cada z_k o algoritmo de estimação estimou (\hat{x}_k, \hat{y}_k) , e em seguida os erros percentuais de estimação $e_x(\%)$ e $e_y(\%)$ foram calculados. Na Figura 4.5 são exibidos os gráficos de $e_x(\%)$ e $e_y(\%)$ em função de y_k . Nota-se que y_k próximo de zero significa z_k próximo da curva negativo inverso da FD da banda morta e portanto próximo da fronteira da região de atrito \mathcal{S} .

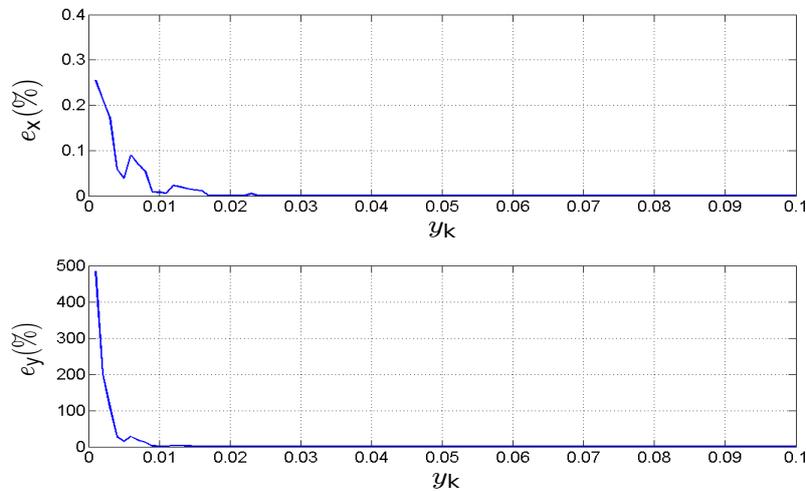


Figura 4.5: Gráficos de ΔS e ΔJ

Como mostrado na Figura 4.5 a sensibilidade do algoritmo próximo da fronteira (y_k próximo de 0), afeta muito mais a estimação de y do que a de x , visto que $e_x(\%) < 0.4$ e $e_y(\%) > 100$ para y_k próximo de zero. Isto justifica o maior erro na estimação do parâmetro J para valores pequenos deste parâmetro como ficou evidente nos resultados das estimações exibidos na Tabela 4.2.

4.2.3 Sistema de primeira ordem e tempo morto com controlador PI e presença de atrito

As funções de transferência do controlador e do processo são dadas por

$$C(s) = \frac{s + 2}{s} \quad (4.5)$$

$$P(s) = \frac{1}{s + 1} e^{-0.2s} \quad (4.6)$$

a válvula com atrito foi representado, como no caso anterior, pelo modelo a dois parâmetros de atrito (Choudhury et al. [2005]). Os parâmetros do atrito usados na simulação foram $S = 10$, $J = 0.5, 1.0, \dots, 9.0$. A Figura 4.6 mostra o gráfico de Nyquist da parte linear $G(s) = C(s)P(s)$ e a curva negativo inverso da FD do atrito para os parâmetros $S = 10$ e J utilizados.

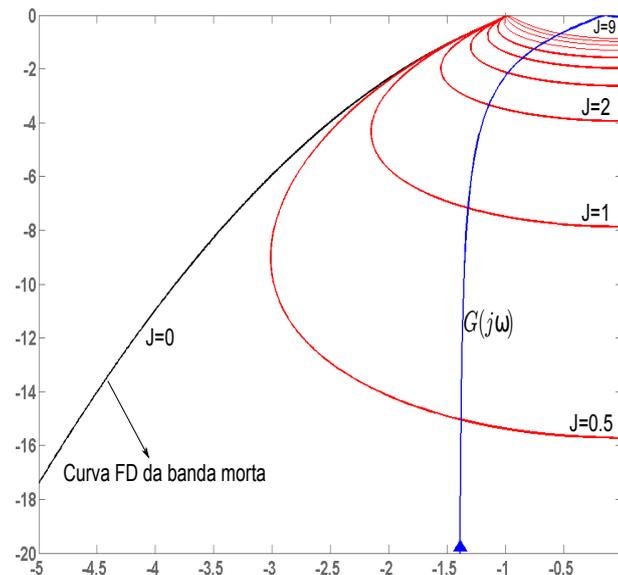


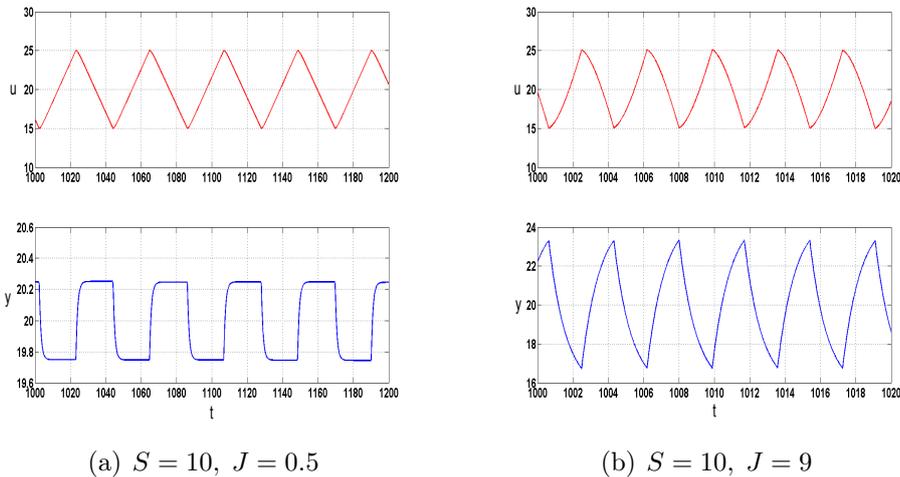
Figura 4.6: Gráfico de Nyquist de $G(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito

Verifica-se na Figura 4.6 que o gráfico de Nyquist de $G(s)$ permanece distante da curva negativo inverso da FD da banda morta. Pela análise de sensibilidade desenvolvida na seção 4.2.2 teremos neste exemplo boas estimações de S e J . Isto é confirmado nos resultados das estimações mostrados na Tabela 4.3, onde os parâmetros são estimados com erros percentuais inferiores a 13.4% em todas as simulações.

Tabela 4.3: *Estimações dos parâmetros do atrito*

S	\hat{S}	$e_S(\%)$	J	\hat{J}	$e_J(\%)$	A	ω
10.0	9.9747	0.2531	0.5	0.5670	13.4025	5.0013	0.1502
10.0	9.9058	0.9416	1.0	1.0598	5.9799	5.0026	0.2865
10.0	9.7123	2.8767	2.0	1.9580	2.0991	5.0052	0.5248
10.0	9.5203	4.7969	3.0	2.8471	5.0964	5.0077	0.7292
10.0	9.3577	6.4228	4.0	3.7722	5.6953	5.0098	0.9123
10.0	9.2241	7.7589	5.0	4.7386	5.2285	5.0120	1.0819
10.0	9.1120	8.8796	6.0	5.7434	4.2764	5.0138	1.2431
10.0	9.0165	9.8349	7.0	6.7837	3.0897	5.0162	1.3990
10.0	8.9310	10.6899	8.0	7.8436	1.9553	5.0178	1.5504
10.0	8.8536	11.4643	9.0	8.9319	0.7564	5.0202	1.7001

Nas Figuras 4.7(a) e 4.7(b) são exibidos os sinais de controle u e saída y para $S = 10$, $J = 0.5$ (Figura 4.7(a)) e $S = 10$, $J = 5$ (Figura 4.7(b)). Verifica-se que no caso $S = 10$, $J = 0.5$ o sinal de controle é bem triangular e no outro caso, um pouco mais suave, mas em ambos casos o sinal de controle não é tão bem aproximado por uma senóide como ocorreu nas outras simulações. Apesar disso, a qualidade das estimações foram muito boas. Isto confirma que no método da FD o sinal de entrada da não-linearidade ser próximo de uma senóide é apenas uma condição suficiente para uma boa estimação.

**Figura 4.7:** *Sinais $u(t)$ e $y(t)$ para $S = 10$; $J = 0.5$, $J = 9$*

4.3 Processos com incertezas

Nesta seção considera-se uma simulação de um sistema com processo incerto de primeira ordem e tempo morto e uma planta piloto com uma malha de vazão com válvula de controle com níveis conhecidos de atrito. Nos dois casos, é aplicada a metodologia de quantificação do atrito no caso de processos com incertezas desenvolvida na seção 4.2.3, com o uso da Teoria de Kharitonov para lidar com funções de transferência intervalares.

4.3.1 Quantificação do atrito em sistema com processo de primeira ordem e incerteza no tempo morto

Considera-se aqui a mesma malha de controle da seção 4.2.3 mas com o processo com incerteza paramétrica no tempo morto. Deseja-se com isto estimar os intervalos de estimações dos parâmetros S e J do modelo de atrito, e assim determinar a influência da incerteza no tempo morto na quantificação do atrito. O sistema foi simulado com os parâmetros do atrito $S = 10$, $J = 4$ como exibidos na 6ª linha da tabela 4.3.

Considerando-se uma aproximação de Padé de ordem (1,1) para a exponencial do tempo morto, tem-se

$$P(s) = \frac{1}{s+1} e^{-\theta s} \approx \frac{1}{(s+1)} \frac{(2-\theta s)}{(2+\theta s)} = \frac{2-\theta s}{\theta s^2 + (2+\theta)s + 2} \quad (4.7)$$

A parte linear $G(s)$ com o controlador $C(s)$ dado na equação (4.5) é aproximada por

$$G(s) \approx C(s)P(s) = \frac{-\theta s^2 + 2(1-\theta)s + 4}{\theta s^3 + (2+\theta)s^2 + 2s} \quad (4.8)$$

Considera-se aqui três níveis de incerteza no tempo morto: $\Delta\theta = 10\%$, 50% e 100% .

1. Caso 1. $\Delta\theta = 10\%$

A parte linear é representada pela função de transferência intervalar

$$\mathbf{G}(s) = \frac{[-0.22, -0.18]s^2 + [1.56, 1.64]s + 4}{[0.18, 0.22]s^3 + [2.18, 2.22]s^2 + 2s} \quad (4.9)$$

O algoritmo de quantificação resultou nos seguintes intervalos de parâmetros:

$$I_S = [9.30, 9.41], \quad I_J = [3.70, 3.84]$$

2. Caso 2. $\Delta\theta = 50\%$

A parte linear é representada pela função de transferência intervalar

$$\mathbf{G}(s) = \frac{[-0.3, -0.1]s^2 + [1.4, 1.8]s + 4}{[0.1, 0.3]s^3 + [2.1, 2.3]s^2 + 2s} \quad (4.10)$$

O algoritmo de quantificação resultou nos seguintes intervalos de parâmetros:

$$I_S = [9.06, 9.59], \quad I_J = [3.41, 4.11]$$

Na Figura 4.8 é exibido o conjunto resposta frequencial da parte linear correspondente a 50% de incerteza no tempo morto. As curvas em vermelho são curvas negativo inverso da FD do atrito correspondentes aos valores extremos dos parâmetros S e J. As curvas em azul são os gráficos de Nyquist extremais correspondentes a tempo morto de 0.1 s e 0.3 s. Multiplicando estes valores pela frequência de oscilação (0.9123 rad/s), obtêm-se atrasos de 0.0912 rad (5.23 graus) e 0.2737 rad (15.68 graus) respectivamente. Assim, a variação do atraso depende diretamente da frequência de oscilação, esta quanto mais alta maior será a variação no atraso, e também da incerteza. Segue-se que baixas frequências de oscilação, comuns em caso de atrito, tendem a produzir pequenos erros devido a incerteza do tempo morto.

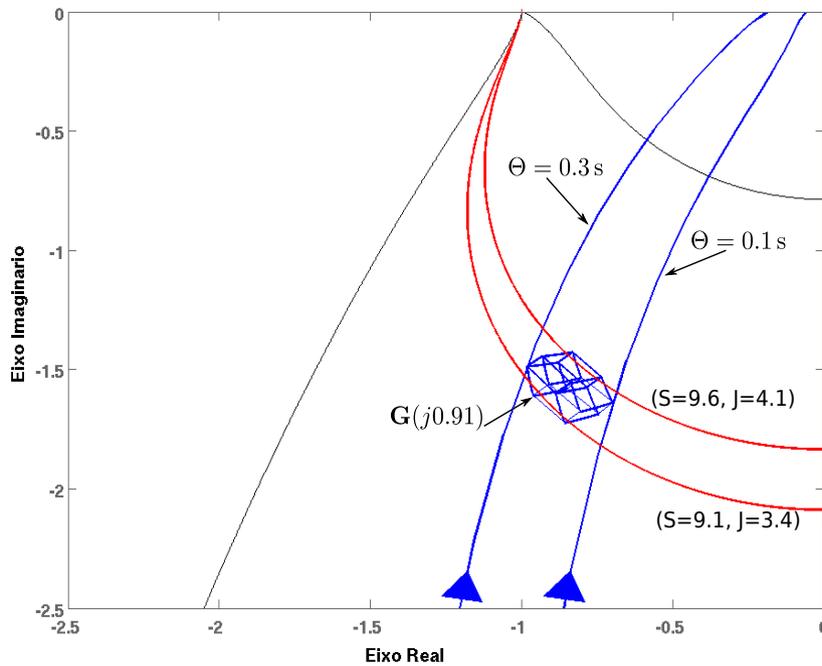


Figura 4.8: Conjunto resposta frequencial correspondente a 50% de incerteza no tempo morto

4.3.2 Planta piloto

Considera-se uma planta piloto de uma malha de vazão contendo uma válvula com atrito. A função de transferência do processo possui incertezas paramétricas provenientes do processo de identificação, desta forma, o modelo do processo é representado por uma função de transferência intervalar e a metodologia desenvolvida na seção 3.5 é aplicada neste caso para obter os intervalos de estimações I_S e I_J dos parâmetros S e J do atrito. Como o atrito foi quantificado através da aplicação de sinais em malha aberta, a comparação dos valores estimados com os medidos é possível.

Na Figura 4.7(a) é mostrado o diagrama da malha de controle de vazão, em 4.7(b) é mostrada a válvula de controle e em 4.7(c) é detalhada a haste da válvula com a porca da gaxeta na parte inferior da haste. O atrito foi introduzido no sistema apertando a porca da gaxeta. O transmissor de vazão e o transdutor I/P trabalham na faixa de 4 – 20 mA. O controlador industrial CompactRIO da National Instruments foi usado para controlar e monitorar todos os sinais na planta piloto.

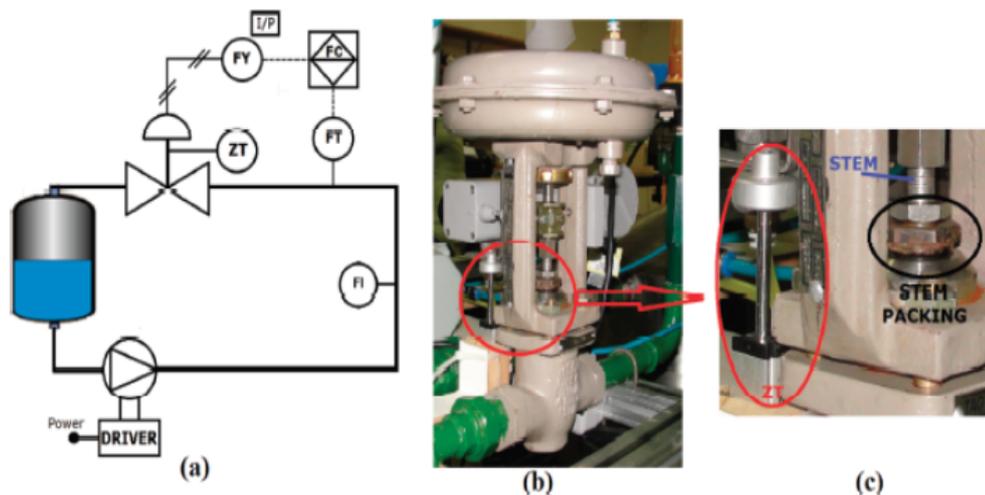


Figura 4.9: *Planta piloto*

A função de transferência do controlador é dada por

$$C(s) = \frac{0.6484s + 1.733}{s} \quad (4.11)$$

Os parâmetros da função de transferência do processo foram identificados através de testes de resposta ao degrau aplicados a planta. O procedimento de identificação foi reproduzido algumas vezes e introduziu uma incerteza de 10% nos parâmetros do processo, de modo que o modelo do mesmo é representado pela função de transferência intervalar

$$\mathbf{P}(s) = \frac{[1.3878, 1.6962]}{[0.3369, 0.4117]s + 1} \quad (4.12)$$

Estimação dos intervalos dos parâmetros de atrito

A função de transferência da parte linear $G(s) = C(s)P(s)$ é representada pela função de transferência intervalar dada pelo produto das funções (4.11) e (4.12)

$$\mathbf{G}(s) = \frac{[0.8998, 1.0998]s + [2.4051, 2.9395]}{[0.3369, 0.4117]s^2 + s} \quad (4.13)$$

Os sinais OP , PV e SP foram obtidos com a malha em operação e são exibidos na Figura 4.10(a)

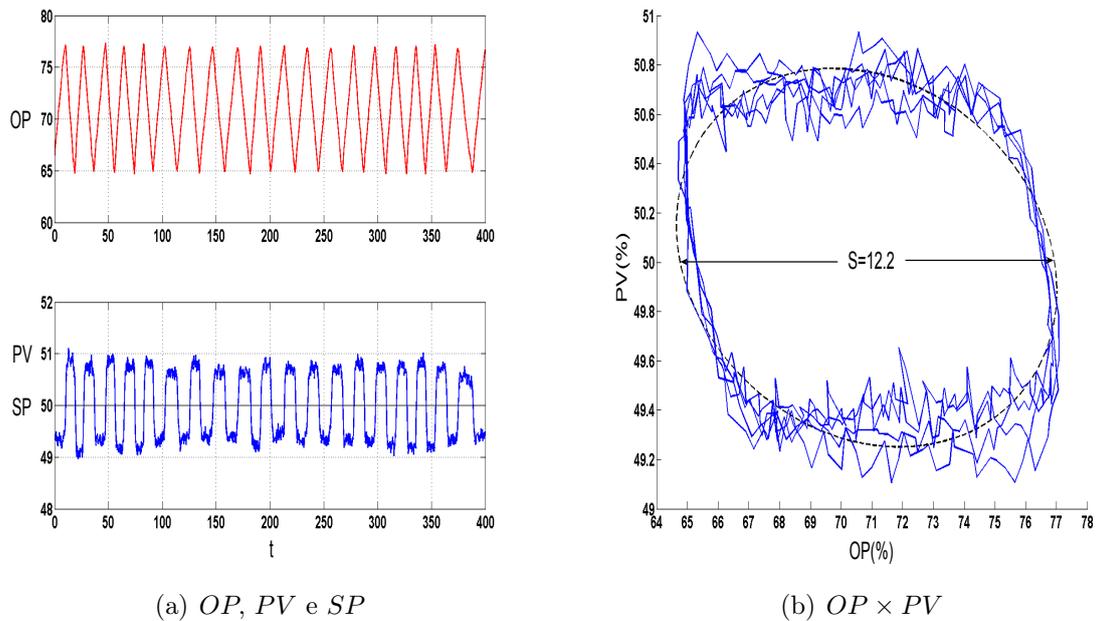


Figura 4.10: Sinais da planta piloto

Os dados foram amostrados com um período $T_s = 0.2$ s. A amplitude e a frequência medidas de OP valem respectivamente $A_0 = 5.95$ e $\omega_0 = 0.28$ rad/s. Usando a metodologia descrita na seção 3.5 obtêm-se os intervalos de estimação

$$I_S = [\min S_i, \max S_i] = [12.502, 12.506]$$

$$I_J = [\min J_i, \max J_i] = [1.01, 1.23]$$

O conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega_0)$ associado à função de transferência intervalar $\mathbf{G}(s)$ é exibido na Figura 4.11. Γ_1 denota a curva negativo inverso da FD da banda morta, e Γ_2 denota a curva negativo inverso da FD do atrito com $S = J$. Duas curvas negativo inverso da FD do atrito correspondentes aos valores máximo e mínimo do parâmetro J são também exibidas.

Os vértices do conjunto resposta frequencial $\mathbf{G}(j\omega_0)$ foram calculados usando a RPC Toolbox (Bhattacharyya et al. [1995]) do MATLAB[®]

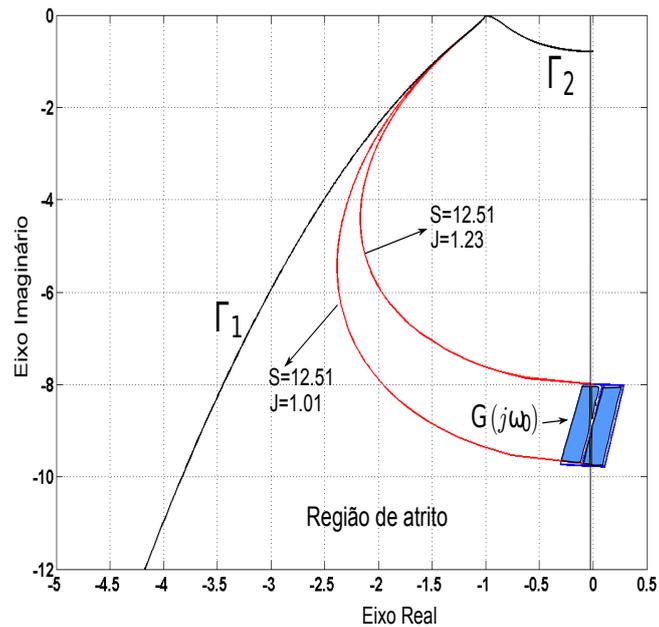


Figura 4.11: Conjunto resposta frequencial de $\mathbf{G}(s)$ e curvas negativo inverso da FD do atrito

O valor do parâmetro S foi estimado usando o método da elipse, produzindo $S = 12.2\%$ conforme mostra a Figura 4.10(b). O valor de J foi estimado usando testes em malha aberta; a pressão na válvula foi aumentada suavemente até ocorrer o salto de escorregamento, usando um sensor de posição instalado na haste da válvula, o salto foi medido e reportado como sendo o parâmetro J , produzindo $J = 1.2\%$. Estes dados confirmam as boas estimativas dos parâmetros do atrito obtidas pelo método da FD neste caso do processo com incertezas.

4.4 Aplicação a dados reais de processos da indústria

Nesta seção é ilustrada a aplicação do algoritmo de estimação do atrito baseado no método da FD em três malhas de controle industriais. Diferentemente dos outros casos, o modelo do processo e do controlador não são conhecidos, sendo para eles aplicada

a metodologia desenvolvida na seção 3.6. Também não são conhecidos os parâmetros S e J do atrito: sabe-se apenas que são malhas cuja oscilação é devido ao atrito, pois algoritmos para efetuar a detecção foram aplicados a eles em (Ordys et al. [2007]). Estes dados foram gentilmente cedidos pelo autor do Capítulo 7 desta referência. Como o método de busca em grade, descrito na seção 1.4.2, permite realizar a estimação destes parâmetros, ele foi aqui utilizado para fins de comparação.

4.4.1 Malha de vazão 1

A Figura 4.12(a) exibe os sinais OP , PV e SP da malha, a amplitude e a frequência medidas de OP foram respectivamente $A = 2.5$ e $\omega = 0.0175$ rad/s. Os dados foram amostrados com um período $T_s = 1$ s.

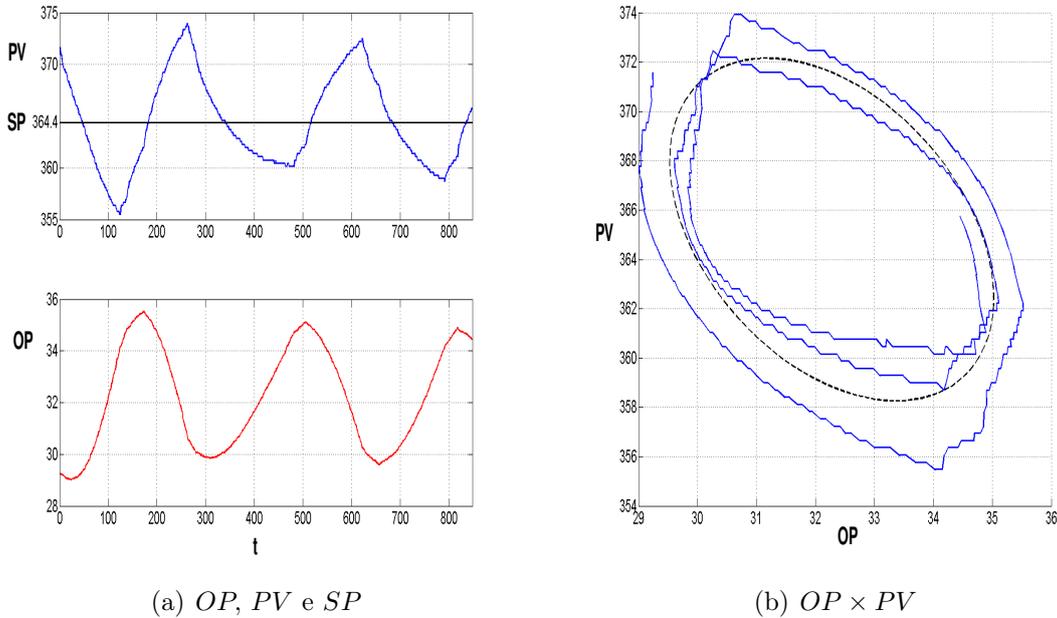


Figura 4.12: Sinais da malha de vazão 1

A função de transferência do controlador PI foi identificada em malha fechada conforme descrito na seção 3.6. Neste procedimento os primeiros dois terços dos dados foram usados para identificação e o terço restante para validação. Foi usado para identificação um modelo ARX cuja estrutura é

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}\nu(k) \quad (4.14)$$

com $A(q) = 1 - q^{-1}$ e $B(q) = 0.1465 - 0.1384q^{-1}$. Este modelo permite extrair diretamente os parâmetros do controlador PI.

Da equação (4.14), usando o tempo de amostragem de 1s, pode-se obter a FT do controlador PI no tempo contínuo

$$C(s) = 0.1465 \left(1 + \frac{1}{18.13s} \right) \quad (4.15)$$

Na Figura 4.13 são exibidas a saída medida e a estimada do controlador, o índice de ajuste das curvas (fit) foi de 74.6% o que confirma uma boa identificação do mesmo.

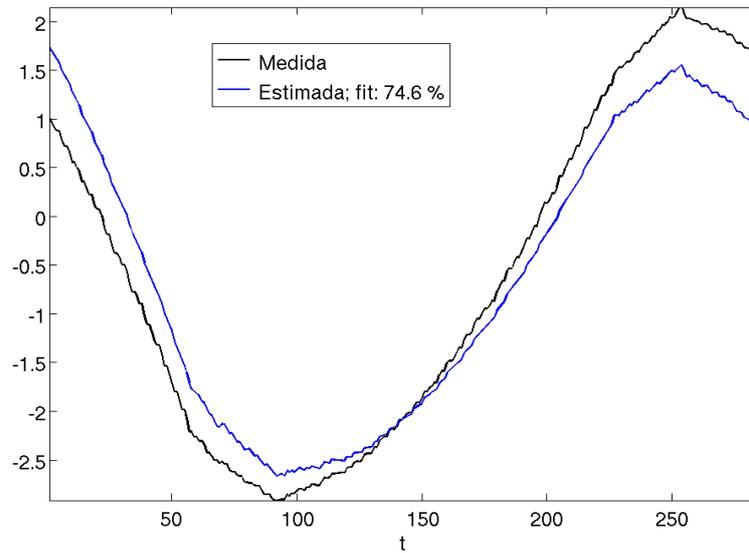


Figura 4.13: Validação do controlador identificado

O ganho estimado do processo conforme a seção 3.6 foi $K = 2.3$. Usando K e os parâmetros do controlador $K_p = 0.1465$ e $T_i = 18.13$ na equação (3.39) obtem-se

$$G(s) = \frac{0.019}{s} \quad (4.16)$$

Com estes dados o algoritmo de quantificação do atrito baseado na FD produziu as estimações $S_{FD} = 5.4$ e $J_{FD} = 4.6$.

Tendo estimado os parâmetros do atrito pelo método proposto, faremos agora sua comparação com o método de busca em grade (MBG) descrito na seção 1.4.2. O espaço de busca é $\{(S, J); 0 \leq J \leq S, 0 \leq S \leq 5.2\}$ e passo 0.1 para ambas variáveis, com isto o MBG produziu $S_{MBG} = 4.6$ e $J_{MBG} = 3.6$.

Um modelo ARMAX, como sugerido em (Choudhury et al. [2008a]) foi utilizado para identificar o modelo do processo, sendo dado por

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}\nu(k)$$

O menor erro quadrático foi obtido com o modelo dado por

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + 0.1484q^{-1} - 0.2377q^{-2} - 0.5736q^{-3} - 0.7202q^{-4} + 0.4074q^{-5} \\ B(q) &= 0.07136q^{-1} + 0.063q^{-2} + 0.009796q^{-3} - 0.004205q^{-4} - 0.0169q^{-5} \\ C(q) &= 1 - 0.01214q^{-1} - 0.3558q^{-2} - 0.5165q^{-3} - 0.5942q^{-4} + 0.5655q^{-5} \end{aligned}$$

No espaço de busca, considerou-se todos os pares ordenados (S, J) , com S variando de 0 a 5.2 com passo 0.1 e, para cada S_k , variou-se o J de 0 até S_k . Um índice I foi usado para contar todos os pares ordenados desta forma e, este mesmo índice enumerou os parâmetros da grade. Na Figura 4.14 são exibidos os gráficos do erro médio quadrático e_I e dos parâmetros S_I, J_I em função do índice I . O índice correspondente ao erro mínimo foi $I = 1118$.

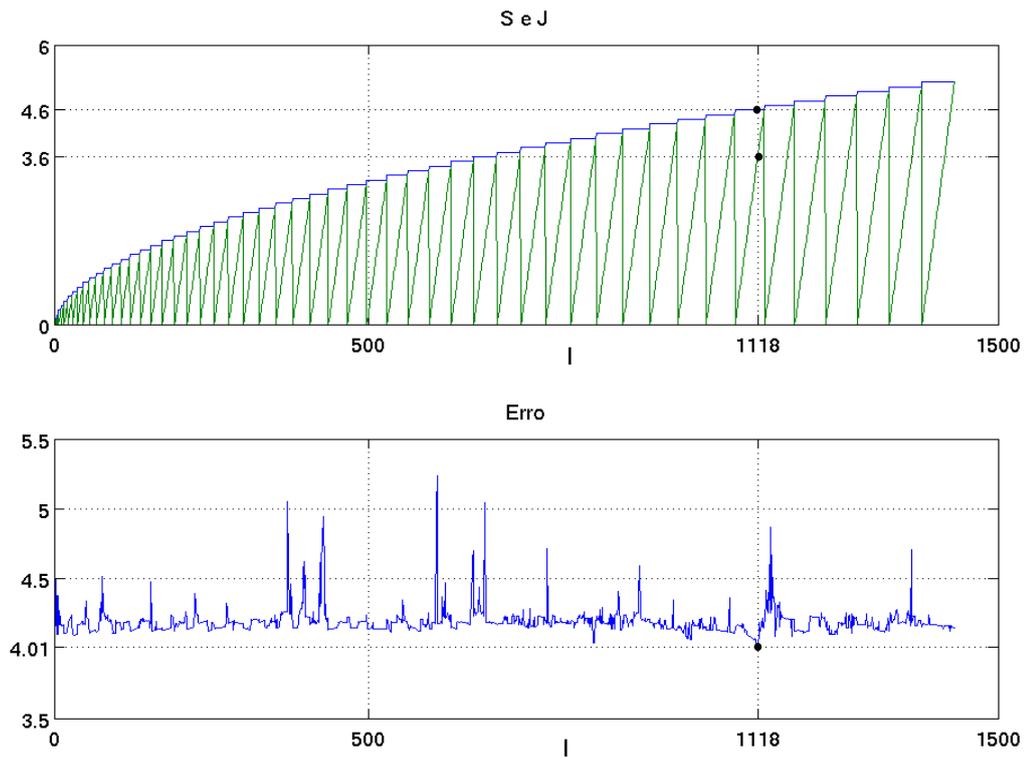


Figura 4.14: Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade

Observações sobre o MBG

- O MBG utiliza o modelo a dois parâmetros de atrito (Choudhury et al. [2005]), que nem sempre reproduz o comportamento dinâmico de uma válvula com atrito

(Garcia [2008]). A solução apresentada neste trabalho foi filtrar o sinal OP de entrada na não-linearidade com um filtro passa baixas com uma frequência de corte da ordem de 8 a 20 vezes a frequência de oscilação medida proveniente do atrito. O algoritmo MBG exibe sensibilidade com relação à frequência de corte do filtro, assim vários testes devem ser feitos para a escolha da frequência de corte do filtro.

- Valores de S na grade superiores ao dobro da amplitude do sinal de entrada OP não produzem oscilação na saída da não-linearidade causando um erro médio quadrático elevado.
- Modelos ARMAX de ordens mais altas foram utilizados pois tais modelos são mais adequados a plantas com distúrbios externos não medidos e erros de modelagem (Srinivasan et al. [2005b]). Verificou-se também que as estimações do atrito são sensíveis a ordem do modelo ARMAX usado.
- O tempo consumido pelo algoritmo MBG para estimar os parâmetros neste caso foi de 397 s. A máquina utilizada foi um PC com processador Intel Core 2 Duo 2.66 GHz e 2 GB RAM.

4.4.2 Malha de vazão 2

As figuras 4.15(a) e 4.15(b) exibem os sinais OP , PV e SP da malha e o gráfico $OP \times PV$. As medidas de amplitude e frequência de OP , foram respectivamente $A = 1.6$ e $\omega = 0.15$ rad/s. Os dados foram amostrados com um período $T_s = 1$ s.

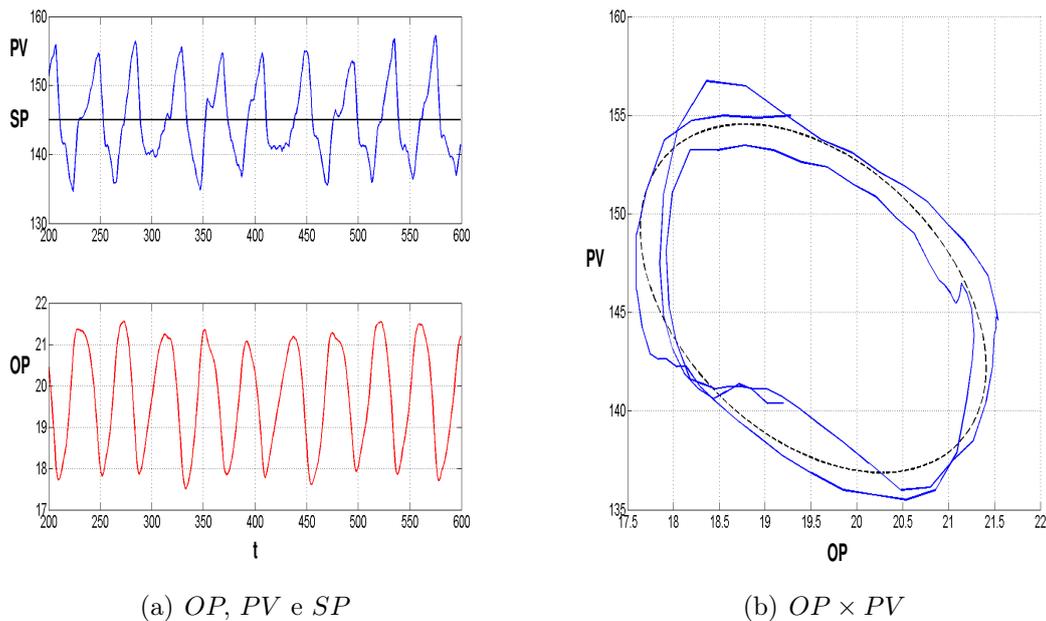


Figura 4.15: Sinais da malha de vazão 2

Como no caso anterior, aqui foi usado para identificação do controlador um modelo ARX cuja estrutura é

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}\nu(k) \quad (4.17)$$

os polinômios identificados foram: $A(q) = 1 - q^{-1}$ e $B(q) = 0.05147 - 0.01504q^{-1}$

A função de transferência estimada é

$$C(s) = 0.0515 \left(1 + \frac{1}{1.41s} \right) \quad (4.18)$$

Na Figura 4.16 são exibidas a saída medida e a estimada do controlador, o índice de ajuste das curvas (fit) foi de 98.9% o que confirma uma boa identificação do mesmo.

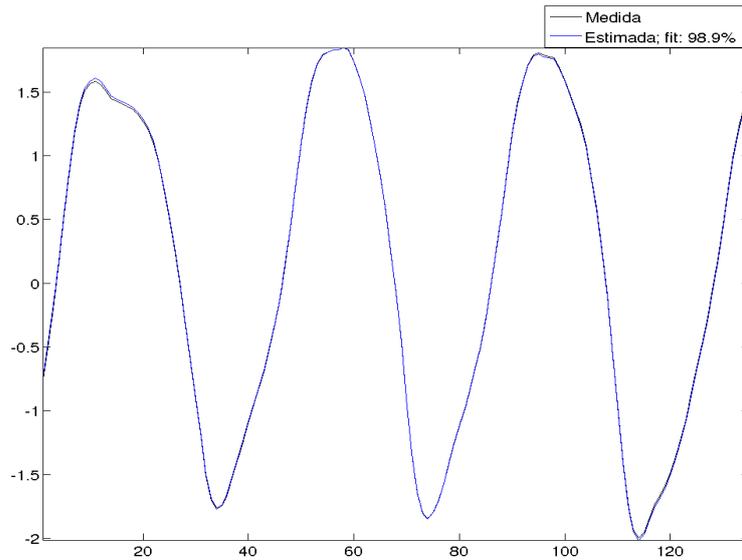


Figura 4.16: Validação do controlador identificado

O ganho estimado do processo foi $K = 7.10$. Substituindo este ganho e os parâmetros do controlador na fórmula (3.39) produziu-se a seguinte parte linear

$$G(s) = \frac{0.26}{s} \quad (4.19)$$

O algoritmo de quantificação do atrito baseado na FD produziu as estimações $S_{FD} = 3.6$ e $J_{FD} = 1.6$.

O MBG com o espaço de busca $\{(S, J); 0 \leq J \leq S, 0 \leq S \leq 3.2\}$ e passo 0.1 para ambas variáveis, produziu as estimações $S_{MBG} = 2.1$ e $J_{MBG} = 0.6$.

O modelo ARMAX do processo estimado que resultou em menor erro médio quadrático entre a PV medida e a estimada foi

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}\nu(k)$$

com,

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - 1.789q^{-1} + 1.378q^{-2} - 0.4342q^{-3} \\ B(q) &= 0.8755q^{-1} + 0.06274q^{-2} + 0.04772q^{-3} \\ C(q) &= 1 - 1.039q^{-1} + 0.5883q^{-2} + 0.05795q^{-3} \end{aligned}$$

Na Figura 4.17 são exibidos os gráficos do erro médio quadrático e_I e dos parâmetros S_I, J_I em função do índice I . O índice correspondente ao erro mínimo foi $I = 238$.

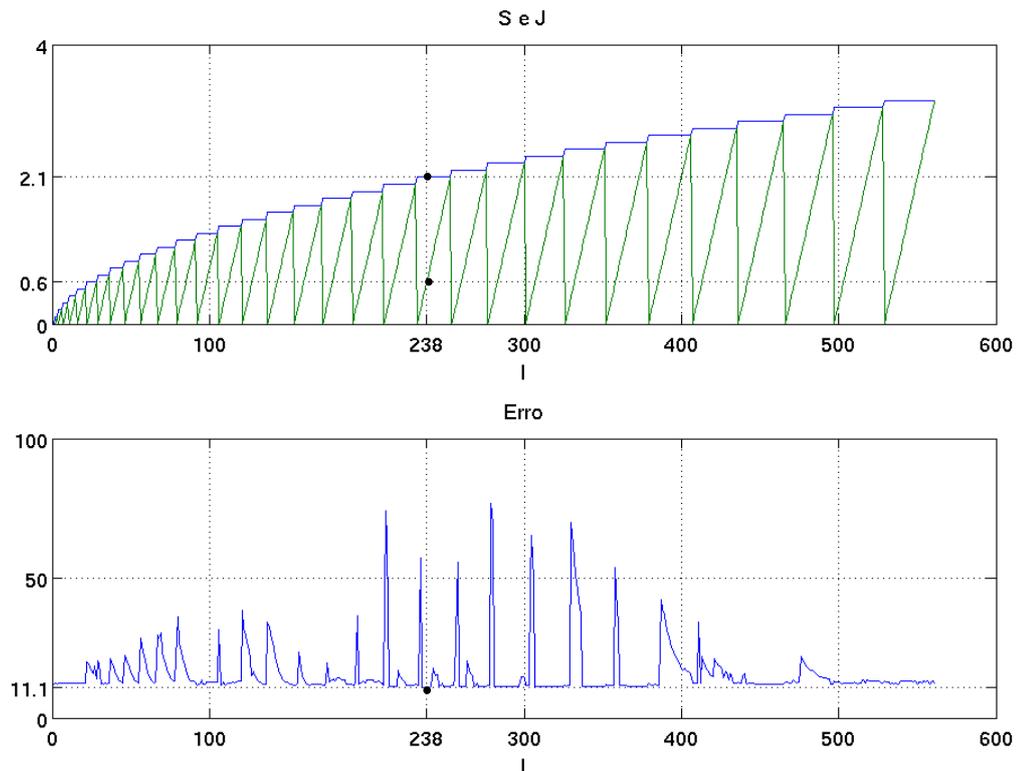


Figura 4.17: Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade

4.4.3 Malha de vazão 3

Esta é uma malha de vazão com referência variável como mostrado na Figura 4.18(a), fazendo com que o sinal de controle OP não possua uma oscilação regular. Um algoritmo de detecção de oscilação detecta a frequência correspondente a não linearidade e um filtro passa-altas é usado para obter um sinal com oscilação mais regular. Após isto a amplitude e a frequência de OP são medidas: $A = 1.6$ e $\omega = 0.006$ rad/s. Os dados foram amostrados com um período $T_s = 10$ s.

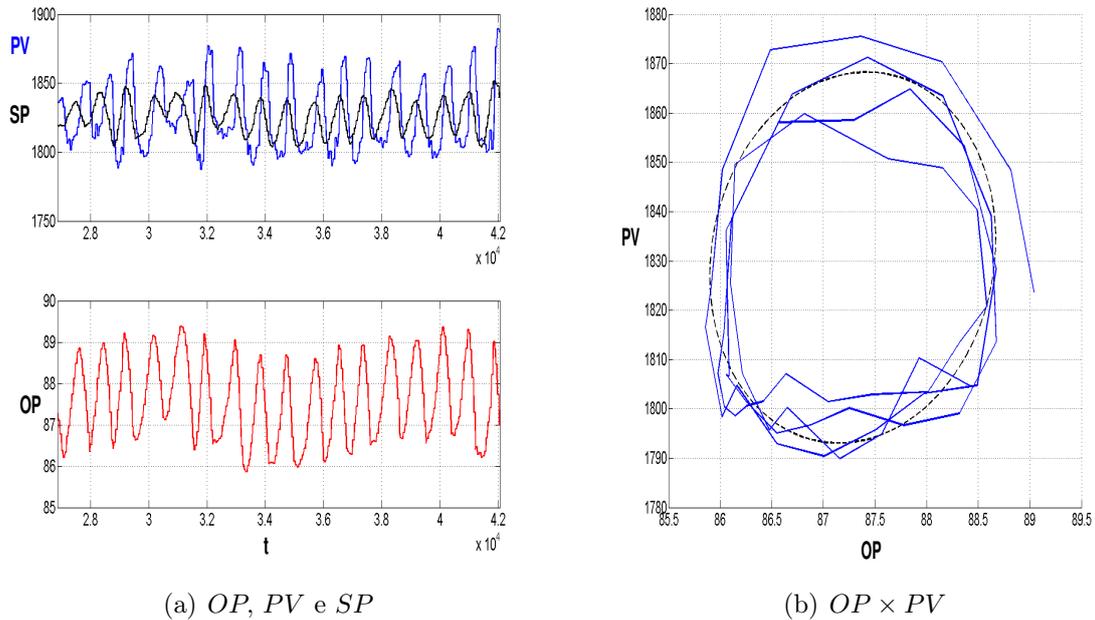
(a) OP , PV e SP (b) $OP \times PV$

Figura 4.18: Sinais da malha de vazão 3

Identificação do controlador usando modelo ARX

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}\nu(k) \quad (4.20)$$

os polinômios identificados foram: $A(q) = 1 - q^{-1}$ e $B(q) = 0.01169 - 0.00905q^{-1}$

A função de transferência do controlador PI estimada foi

$$C(s) = 0.0117 \left(1 + \frac{1}{44.1s} \right) \quad (4.21)$$

Na Figura 4.19 são exibidas a saída medida e a estimada do controlador, o índice de ajuste das curvas (fit) foi de 79.1% o que confirma uma boa identificação do mesmo.

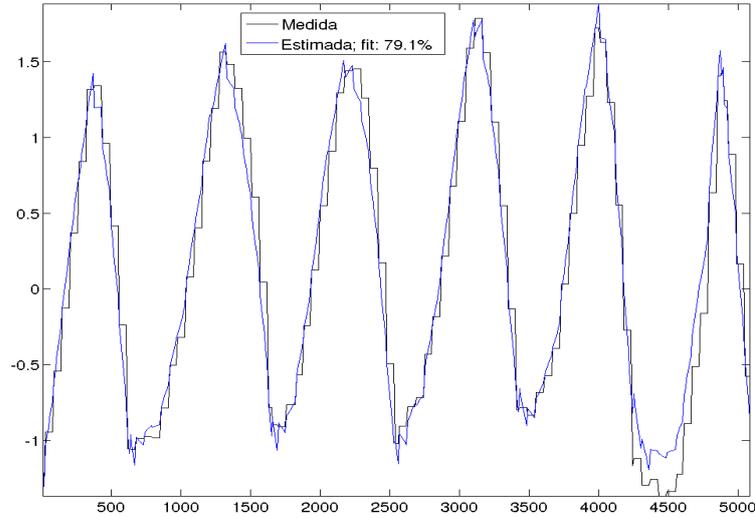


Figura 4.19: Validação do controlador identificado

o ganho estimado do processo foi $K = 22.8$. Com estes dados na equação (3.39), tem-se que a parte linear é dada por

$$G(s) = \frac{0.006}{s} \quad (4.22)$$

O algoritmo de quantificação do atrito baseado na FD resultou em $S_{FD} = 2.5$ e $J_{FD} = 2.3$.

O MBG com o espaço de busca $\{(S, J); 0 \leq J \leq S, 0 \leq S \leq 4\}$ e passo 0.1 para ambas variáveis, produziu as estimações $S_{MBG} = 1.9$ e $J_{MBG} = 1.2$.

O modelo ARMAX do processo estimado que resultou em menor erro médio quadrático entre a PV medida e a estimada foi

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}\nu(k)$$

com,

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 - 1.87q^{-1} + 0.8156q^{-2} + 0.9039q^{-3} - 1.398q^{-4} + 0.5798q^{-5} \\ B(q) &= 1.641q^{-1} - 1.071q^{-2} + 0.3863q^{-3} + 0.002454q^{-4} - 0.06426q^{-5} \\ C(q) &= 1 - 2.096q^{-1} + 1.073q^{-2} + 0.9105q^{-3} - 1.447q^{-4} + 0.5666q^{-5} \end{aligned}$$

Na Figura 4.20 são exibidos os gráficos do erro médio quadrático e_i e dos parâmetros S_i, J_i em função do índice i . O índice correspondente ao erro mínimo foi $i = 203$.

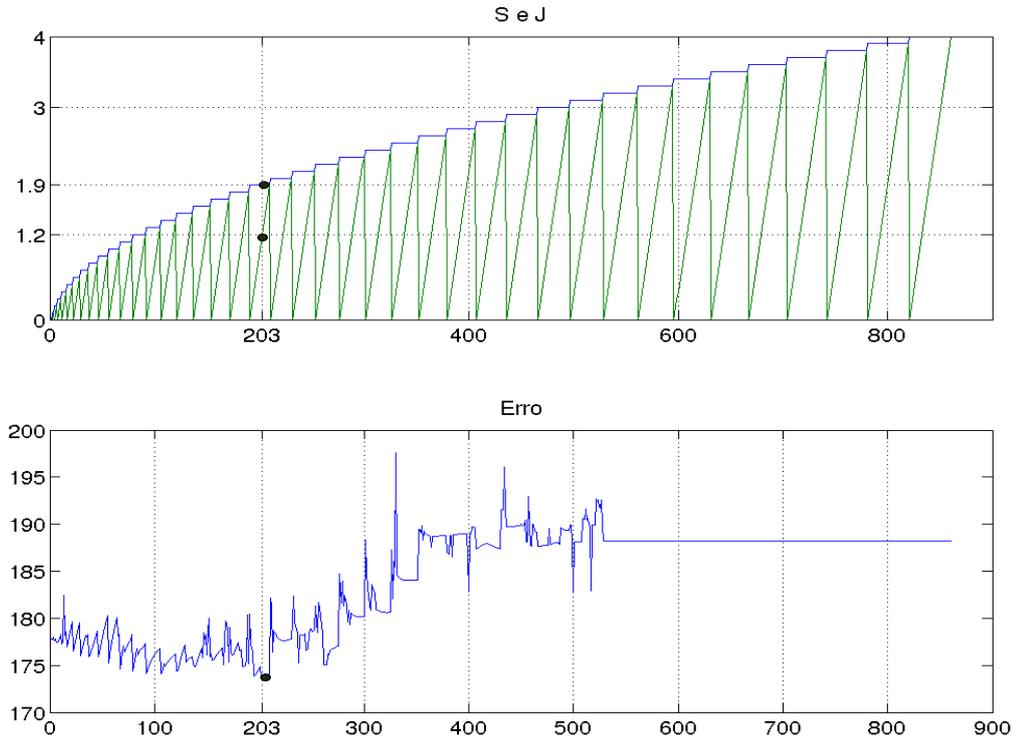


Figura 4.20: Erro médio quadrático e os parâmetros S e J da grade

4.4.4 Resumo das estimações do atrito nos casos da indústria e conclusões

A Tabela 4.4 resume os resultados das estimações pelo método da FD e pelo MBG.

Tabela 4.4: Quantificação do atrito pelos métodos da FD e MBG

Malha	S_{FD}	J_{FD}	S_{MBG}	J_{MBG}
1	5.4	4.6	4.6	3.6
2	3.6	1.6	2.1	0.6
3	2.5	2.3	1.9	1.2

O parâmetro S estimado pelo método proposto foi maior em todos os casos, o que é esperado uma vez que para estas situações ele é aproximado pelo diâmetro máximo horizontal da elipse que melhor se ajusta aos dados do gráfico $OP \times PV$, que tende a sobre-estimá-lo.

O valor estimado para J também foi maior em todos os casos. Da equação (3.41) observa-se que o parâmetro mais difícil de obter é o ganho K do processo, o qual

requer análises adicionais. De qualquer forma, nestes dados provenientes da indústria os parâmetros de atrito não são conhecidos, e o que se observa é que os dois métodos apresentam estimações coerentes.

As estimações do atrito fornecidas pelo MBG exibem alta sensibilidade a fatores tais como o modelo ARMAX usado e também a ordem do filtro usado para filtrar os dados *OP* e/ou *PV*. O MBG devido ao fato de realizar várias identificações, tantas quanto forem a quantidades de pontos do espaço de pesquisa, consome muito tempo computacional. Por outro lado, o método da FD é de fácil implementação e estima os parâmetros do atrito num tempo desprezível se comparado ao tempo gasto pelo MBG.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

5.1 Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma nova metodologia para a estimação de não-linearidades em malhas de controle baseado no método da função descritiva (FD). O método da FD foi originalmente proposto para prever a existência de ciclos limite, e estimar a amplitude e a frequência destes. Neste trabalho o método da FD é utilizado para quantificar a banda morta e o atrito estático em válvulas de controle. Embora o método tenha sido aplicado a malhas com válvulas de controle, sua generalização é possível para malhas de controle nas quais o atrito seja produzido por outros equipamentos mecânicos. Também são possíveis generalizações para quantificação de outros tipos de não-linearidades que causam oscilações em malhas de controle, bastando que as não-linearidades admitam uma FD em termos de funções elementares dependendo de um ou dois parâmetros.

A metodologia de quantificação da banda morta e do atrito desenvolvida neste trabalho, originalmente requer as medidas de amplitude e frequência do sinal de controle, bem como a função de transferência da parte linear da malha. A metodologia foi estendida para o caso de conhecimento com incertezas da parte linear, muito útil em situações em que é possível identificar o processo por técnicas usuais de identificação de sistemas nas quais os parâmetros estimados são apresentados com incertezas.

No caso particular, e abundante na indústria, de processos de primeira ordem com ou sem atraso, a parte linear pode ser aproximada por uma função de transferência com parâmetros que podem ser facilmente identificados, e neste caso, o algoritmo de quantificação adquire uma forma simplificada com fórmulas simples e explícitas dos parâmetros a serem estimados. Isto resulta em um procedimento não invasivo, computacionalmente leve e rápido em contraste com outras metodologias de quantificação, por exemplo baseadas em busca em grade e otimização, que são mais complexas e consomem mais recursos computacionais.

Também foi feito um estudo, baseado em simulações, acerca da sensibilidade do método a incertezas nas medidas.

A aplicabilidade e a eficácia do algoritmo de estimação foram comprovadas em várias simulações, numa planta piloto com processo com incertezas e em três casos de malhas reais industriais usando apenas os sinais de rotina disponíveis.

5.2 Trabalhos futuros

- Margens de erros de predição da amplitude e da frequência no caso de FDs de modelos de atrito.

Resultados rigorosos sobre margens de erros de predição da amplitude e da frequência de ciclos limites para não linearidades que modelam o atrito não são conhecidos até o presente momento pelo autor. Estes resultados já são conhecidos a algum tempo apenas para não linearidades de inclinação limitada. Uma proposta seria a obtenção de margens de erros de predição da função descritiva obtida para o modelo de atrito a dois parâmetros utilizada neste trabalho.

- Análise desta metodologia para outros modelos de atrito
Verificar a que modelos de atrito, além do modelo a dois parâmetros utilizados, esta FD produz boas estimativas
- Obtenção de outras metodologias para o caso de modelo desconhecido do processo.

Referências Bibliográficas

- Andersson, S. (1993). *Seminar at the Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden.* 18
- Armstrong-Helouvry, B. e Amin, B. (1994). Pid control in the presence of static friction: Exact and describing function analysis. *Proceedings of the American Control Conference*, páginas 597–601. 35, 36, 38
- Armstrong-Hélouvry, B. (1991). *Control of Machines with Friction.* Kluwer Academic Publishers, Boston, Ma. 19
- Aström, K. J. e Hägglund, T. (2006). *Advanced PID control.* ISA -The Instrumentation, Systems, and Automation Society, Research Triangle Park, NC 27709. 61
- Baril, C. B. (1993). *Control of Mechanical Systems Affected by Friction and Other Nondifferentiable Nonlinearities, PhD thesis.* Tese de Doutorado, Technion, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel. 17
- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H., e Keel, L. H. (1995). *Robust Control. The parametric approach.* Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, NJ 07458. 58, 83
- Bliman, P. A. e Sorine, M. (1995). Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control. *Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy*, página 3788?3794. 19
- Brandenburg, G. e Schäfer, U. (1987). Influence and partial compensation of simultaneously acting backlash and coulomb friction in a position- and speed-controlled elastic two-mass system. *Proc. 2nd European Conf. on Power Electronics and Applications, EPE, Grenoble*, páginas 1041–1047. 38
- Brandenburg, G. e Schäfer, U. (1991). Influence and compensation of coulomb friction in industrial pointing and tracking systems. *Proc. of the Indus. App. Soc. Annual Meeting, IEEE, Dearborn, MI*, páginas 1407–1413. 38
- Brogan, W. L. (1991). *Modern Control Theory (3rd Edition).* Prentice Hall, Inc. 35, 38
- Choudhury, M. A. A. S. (2000). *Detection and Diagnosis of Control Loop Nonlinearities, Valve Stiction and Data Compression.* Tese de Doutorado, University of Alberta, Edmonton, Canada. 27

- Choudhury, M. A. A. S., Jain, M., e Shah, S. L. (2008a). Stiction - definition, modelling, detection and quantification. *Journal of Process Control*, 18:232–243. [31](#), [85](#)
- Choudhury, M. A. A. S., Shah, S. L., e Thornhill, N. F. (2004). A data-driven model for valve stiction. *The Proceedings of ADCHEM 2003*, January:11–14. [22](#), [23](#), [26](#), [33](#)
- Choudhury, M. A. A. S., Shah, S. L., e Thornhill, N. F. (2008b). *Diagnosis of process nonlinearities and valve stiction*. Springer. [39](#), [100](#)
- Choudhury, M. A. A. S., Shah, S. L., Thornhill, N. F., e Shook, D. S. (2006). Automatic detection and quantification of stiction in control valves. *Control Engineering Practice*, 14:1395–1412. [29](#), [30](#), [66](#)
- Choudhury, M. A. A. S., Thornhill, N. F., e Shah, S. L. (2005). Modelling valve stiction. *Control Engineering Practice*, 13:641–658. [35](#), [49](#), [74](#), [77](#), [86](#)
- Dahl, P. R. (1968). A solid friction model. *Technical report, Space and Missile Systems Organization Air Force Systems Command*. [20](#)
- de Souza Leite Cuadros, M. A., Munaro, C. J., e Munareto, S. (2012). A novel model-free approach for stiction compensation in control valves. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 51:8465–8476. [29](#)
- de Wit, C. C., Olsson, H., Aström, K. J., e Lischinsky, P. (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(03):419–425. [20](#)
- Dutilh, J. (1950). Théorie des servomécanismes à relais. *Onde Élec.*, 30:438–445. [34](#)
- Engelberg, S. (2002). Limitations of the describing function for limit cycle prediction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1887–1890. [35](#)
- Farenzena, M. e Trierweiler, J. O. (2012). Valve stiction estimation using global optimisation. *Control Engineering Practice*, 20:379–385. [31](#)
- Forssell, U. e Ljung, L. (1999). Closed-loop identification revisited. *Automatica*, 35:1215–1241. [61](#)
- Friedland, B. e Park, Y.-J. (1991). On adaptive friction compensation. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, página 2899?2902. [17](#)
- Garcia, C. (2008). Comparison of friction models applied to a control valve. *Control Engineering Practice*, 16:1231–1243. [26](#), [36](#), [39](#), [87](#)
- Goldfarb, L. C. (1947). On some nonlinear phenomena in regulatory system. *Automatika i Telemekhanika*, 8(5):349–383. [34](#)
- He, Q. P., Wang, J., Pottmann, M., e Qin, S. J. (2007). A curve fitting method for detecting valve stiction in oscillating control loops. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 46(13):4549–4560. [24](#)

- Horch, A. (1999). A simple method for detection of stiction in control valves. *Control Engineering Practice*, 7:1221–1231. 27
- Horch, A. e Isaksson, T. I. (2001). Detection of stiction in integrating processes. *In European Control Conference. Porto. Portugal.* 27
- ISA (2000). *Test procedures for control valve response measurement from step inputs.* Standard ANSI/ISA-75.25.01-2000. 26
- ISA (2006). *Control valve diagnostic data acquisition and reporting.* Standard ANSI/ISA-75.26.01-2006. 26
- Jelali, M. (2007). Estimation of valve stiction in control loops using separable least-squares and global search algorithms. *Journal of Process Control*, 18(7-8):632–642. 31
- Kano, M., Maruta, H., Kugemoto, H., e Shimizu, K. (2004). Practical model and detection algorithm for valve stiction. *In IFAC Symp. on Dyn. And Control of Proc. Syst. (DYCOPS)*, 2004. 28
- Kano, M. e Ogawa, M. (2009). The state of art in advanced process control in japan. *IFAC Symposium ADCHEM 2009*, July 2009. 23
- Karnopp, D. (1985). Computer simulation of slip-stick friction in mechanical dynamic systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1(107):100–103. 19
- Kochenburger, R. J. (1949). *Analysis and Synthesis of Contactor Servomechanisms.* Tese de Doutorado, Massachusetts Institute of Technology Department of Electrical Engineering. 34
- Kryloff, N. e Bogoliuboff, N. (1947). *Introduction to non-linear mechanics.* Princeton University Press. 34
- Massey, W. S. (1992). Sufficient conditions for a local homeomorphism to be injective. *Topology and its Applications*, 47:133–148. 51, 52
- Mees, A. I. e Bergen, A. R. (1975). Describing functions revisited. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-20(4):473–478. 35, 36
- Morin, A. J. (1833). New friction experiments carried out at metz in 1831–1833. *Proceedings of the French Royal Academy of Sciences*, 4:1–128. 18
- Olsson, H. (1996). *Control Systems with friction.* Tese de Doutorado, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology. 20
- Olsson, H. (Set. 1995). Describing function analysis of a system with friction. *Proceedings of the 4th IEEE Conference on Control Applications*, páginas 310–315. 35
- Olsson, H., Aström, K. J., de Wit, C. C., Gäfvert, M., e Lischinsky, P. (1998). Friction models and friction compensation. *European Journal of Control*, Dec. 1998(4):176–195. 16

- Oppelt, W. (1948). Locus curve method for regulators with friction. *Z. Deut. Ingr., Berlin*, páginas 179–183. [34](#)
- Ordys, A. W., Uduehi, D., e Johnson, M. A. (2007). *Process Controller Performance Assessment: from theory to implementation*. Springer. [84](#)
- Reynolds, O. (1886). On the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Phil. Trans. Royal Soc.*, 177:157–234. [17](#)
- Rivera, D. E., Morari, M., e Skogestad, S. (1986). Internal model control. 4. pid controller design. *Industrial and Engineering Chemistry Process Design and Development*, 25:252–265. [62](#)
- Scali, C. e Ulivari, F. (2005). A comparison of techniques for automatic detection of stiction: Simulation and application to industrial data. *Journal of Process Control*, 15:505–514. [29](#)
- Singhal, A. e Salsbury, T. I. (2005). A simple method for detecting valve stiction in oscillating control loops. *Journal of Process Control*, 15:371–382. [28](#)
- SKF (1970). *SKF General Catalogue*. SKF. [18](#)
- Slotine, J.-J. E. e Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, New Jersey. [32](#), [34](#), [38](#)
- Srinivasan, R., Rengaswamy, R., Narasimhan, S., e Miller, R. (2005a). Control loop performance assessment. 1. qualitative approach for stiction diagnosis. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 44(17):6708–6718. [29](#)
- Srinivasan, R., Rengaswamy, R., Narasimhan, S., e Miller, R. (2005b). Control loop performance assessment. 2. hammerstein model approach diagnosis. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 44(17):6719–6728. [31](#), [61](#), [87](#)
- Stribeck, R. (1902). Die wesentlichen eigenschaften der gleit - und rollenlager - the key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrift des Vereines Seutscher Ingenieure*, 46(38,39):1342–1432. [19](#)
- Thornhill, N. F., Huang, B., e Zhang, H. (2003). Detection of multiple oscillations in control loops. *Journal of Process Control*, 13:91–100. [65](#)
- Tustin, A. (1947). The effects of backlash and of speed-dependent friction on the stability of closed-cycle control systems. *Journal of the Institution of Electrical Engineers Part 1 General*, 94 Part IIA:143–151. [34](#)
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall. [35](#)
- Yamashita, Y. (2004). *Qualitative analysis for detection of stiction in control valves. Technical Report 3214, Part II*. Springer Lecture Notes in Computer Science. [28](#)

Apêndice A

Simplificação da FD do modelo a dois parâmetros de atrito

Partindo do gráfico entrada versus saída (assinatura) da não linearidade modelo a dois parâmetros de atrito Figura 1.4, os autores em [Choudhury et al. \[2008b\]](#) deduziram a expressão da FD desta não-linearidade

$$N(S, J, A) = X(S, J, A) + iY(S, J, A),$$

com

$$X(S, J, A) = -\frac{1}{\pi A} \left[k \frac{A}{2} \sin(2\phi) - 2kA \cos(\phi) - kA \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 2k(S - J) \cos(\phi) \right] \quad (\text{A.1})$$

$$Y(S, J, A) = \frac{1}{\pi A} \left[-3k \frac{A}{2} + k \frac{A}{2} \cos(2\phi) + 2kA \sin(\phi) - 2k(S - J) \sin(\phi) \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\phi = \arcsin \left(\frac{A - S}{A} \right) \quad (\text{A.3})$$

Na expressão acima da FD do atrito não é óbvio que fazendo $J = 0$ se obtém a FD da banda morta (2.10)-(2.11). Com algumas manipulações algébricas decorrentes da aplicação de algumas identidades trigonométricas, chega-se numa expressão mais simples para a FD do atrito com a vantagem de ser de verificação imediata o caso da banda morta ($J = 0$). Com esta finalidade, considere as variáveis α , β e λ , definidas por

$$\alpha = k \frac{A}{2} \sin(2\phi) - 2kA \cos(\phi) - kA \left(\frac{\pi}{2} + \phi \right) + 2k(S - J) \cos(\phi) \quad (\text{A.4})$$

$$\beta = -3k \frac{A}{2} + k \frac{A}{2} \cos(2\phi) + 2kA \sin(\phi) - 2k(S - J) \sin(\phi) \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda = \frac{A - S}{A} \quad (\text{A.6})$$

Com isto e a aplicação de algumas identidades trigonométricas, tem-se as seguintes equações:

$$\phi = \arcsin \lambda \quad (\text{A.7})$$

$$\sin \phi = \lambda \quad (\text{A.8})$$

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \lambda^2} \quad (\text{A.9})$$

$$\sin 2\phi = 2\lambda\sqrt{1 - \lambda^2} \quad (\text{A.10})$$

$$\cos 2\phi = 1 - 2\lambda^2 \quad (\text{A.11})$$

substituindo estas identidades em α e β , tem-se

$$\alpha = k\sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda A - 2A + 2(S - J)) - kA \left(\arcsin \lambda + \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\beta = -kA - kA\lambda^2 + 2kX_m\lambda - 2k(S - J)\lambda \quad (\text{A.13})$$

Então,

$$N(S, J, A) = X(S, J, A) + iY(S, J, A) = -\frac{1}{\pi A}\alpha + i\frac{1}{\pi A}\beta \quad (\text{A.14})$$

$$-\frac{1}{\pi A}\alpha = \frac{k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{S}{A} \right) + \sqrt{1 - \left(1 - \frac{S}{A} \right)^2} \left(1 + \frac{S}{A} - \frac{2}{A}(S - J) \right) \right) \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{\pi A}\beta = \frac{k}{\pi} \left(\left(1 - \frac{S}{A} \right) \left(2 - \frac{2}{A}(S - J) - \left(1 - \frac{S}{A} \right) \right) - 1 \right) \quad (\text{A.16})$$

A constante k é a inclinação da saída relativamente à entrada na parte linear da assinatura (Figura 1.4), para o caso de atrito em válvulas de controle com características lineares assume-se $k = 1$ e este será o caso considerado em todo este trabalho. De (A.14), (A.15) e (A.16), segue-se que a versão simplificada da FD do atrito com $k = 1$ é dada por

$$N(S, J, A) = X(S, J, A) + iY(S, J, A) \quad (\text{A.17})$$

$$X(S, J, A) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{S}{A} \right) + \left(1 - \frac{S}{A} + 2\frac{J}{A} \right) \sqrt{\frac{S}{A} \left(2 - \frac{S}{A} \right)} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$Y(S, J, A) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{S}{A} \left(2 - \frac{S}{A} \right) + 2\frac{J}{A} \left(1 - \frac{S}{A} \right) \right) \quad (\text{A.19})$$

Verifica-se facilmente que a FD do atrito ((A.17)-(A.19)) coincide com a da banda morta dada pelas equações (2.10)-(2.11) quando $J = 0$ e $S = d$.

Apêndice B

O teorema da aplicação inversa no \mathbb{R}^n

Se U e V são subconjuntos do espaço \mathbb{R}^n , um *homeomorfismo* $f : U \rightarrow V$ é uma aplicação contínua e invertível cuja inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ é também contínua. $f : U \rightarrow V$ é um *homeomorfismo local* se todo ponto $x \in U$ possui uma vizinhança V_x tal que $f|_{V_x}$ é um homeomorfismo. Um *difeomorfismo* $f : U \rightarrow V$ é uma aplicação diferenciável e invertível cuja inversa $f^{-1} : V \rightarrow U$ é também diferenciável. Se $k \in \mathbb{N}$, uma aplicação diferenciável $f : U \rightarrow V$ é de *classe C^k* se f é k -vezes derivável em U e a derivada k -ésima f^k é contínua.

Teorema B.0.1 (*Aplicação Inversa*). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível ($\det f'(a) \neq 0$) então existe uma vizinhança V_a de a em U tal que a restrição $f|_{V_a}$ é um difeomorfismo.*