

Paulo Louzada Castro de Oliveira

Supernovae Tipo Ia e Cosmologia

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória - ES

Agosto / 2010

Paulo Louzada Castro de Oliveira

Supernovae Tipo Ia e Cosmologia

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador:

Prof. Dr. Júlio César Fabris

Universidade Federal do Espírito Santo

Vitória - ES

Agosto / 2010

Dedico esta dissertação a minha família.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a minha família, sem a qual este trabalho não poderia ter sido concebido. Com eles aprendi o real valor da educação e do trabalho, e foram o seu apoio, carinho, amor, dedicação e todas as experiências vividas por todos estes anos que me proporcionaram a oportunidade desta realização.

Neste momento passam pela memória também todos os amigos e colegas que de uma forma ou de outra participaram desta caminhada, principalmente desde a graduação em Física. Registro aqui o agradecimento a todos, não só da Física, que estiveram na minha vida nesse momento, seja nas horas de estudos, nas muitas experiências na Universidade e tantos outros momentos entre amigos. Um agradecimento especial fica para a Anna Paula, pelo seu apoio e companheirismo inspiradores, nestes 2 anos de mestrado, especialmente nos momentos mais difíceis. Faltariam palavras para lhe dizer o quanto voce me ajudou.

O último e mais fundamental agradecimento fica para todos os professores do DFIS que participaram da minha formação, em especial os do grupo de gravitação e cosmologia. Sou eternamente agradecido aos professores Antonio Brasil e Júlio Fabris pela primeira oportunidade na pesquisa, ainda na iniciação científica, e posteriormente ao Júlio no mestrado. Mas também gosto de lembrar que todos participaram diretamente em minha formação e por isto sou muito grato. Finalmente agradeço também à CAPES pela sessão da bolsa fundamental para a realização do trabalho. A todos, muito obrigado!

*“Aprenda com o ontem, viva o hoje, tenha esperança no amanhã. O importante é não
parar de questionar”*

Albert Einstein

Resumo

Esta dissertação é dedicada à investigação sobre a natureza da matéria e da energia escura no Universo através da técnica que utiliza observações a explosões de supernovae do tipo Ia como indicadoras de distâncias, usada no fim do séc. XX para detectar a aceleração da expansão do Universo. Desde então alguns projetos voltados à observação de supernovae foram executados e tornaram públicos os seus dados, que são usados neste trabalho para a estimativa de parâmetros e comparação de modelos cosmológicos. O objetivo deste trabalho é de estudar a capacidade do teste cosmológico feito com os dados das distâncias às supernovae tipo Ia e a sua resposta a diferentes modelos cosmológicos e parâmetros livres. Para isto foi feito uma revisão do modelo padrão da Cosmologia e das evidências que apontam para a presença da matéria e da energia escuras, seguida de um estudo sobre o fenômeno das supernovae tipo Ia em seus aspectos observacionais e astrofísicos, que permitem a construção das técnicas de calibração de suas magnitudes e a estimativa de suas distâncias. Antes de seguir para a análise cosmológica introduz-se a ferramenta apropriada que é a estatística bayesiana, estudada aqui apenas em suas ferramentas e aplicações mais elementares. E por último aplicamos estas ferramentas às amostras de dados de supernovae tipo Ia disponíveis na literatura conhecidas como Gold, SNLS, Essence e Constitution, para estudar alguns modelos cosmológicos de interesse, a começar pelo próprio modelo de concordância Λ CDM e a parametrização ω CDM que testa a consistência da suposição $\omega_X = -1$ para a energia escura. Em seguida testamos dois modelos de energia do vácuo dinâmica $\Lambda(t)$ e por último um caso especial de quartessência, o Gás de Chaplygin generalizado. Os resultados mostram que os dados das supernovae usados isoladamente dão resultados bem menos expressivos do que os encontrados na literatura onde são usados em conjunto com outras evidências. Duas das amostras de dados incluindo a mais atual dão origem a resultados que apresentam irregularidades inesperadas, que apontam para a existência de fatores ainda não controlados pelas técnicas de calibração da supernovae. Ambos os resultados indicam que o teste cosmológico baseado nas distância às supernovae Ia ainda passará por um outro salto de qualidade num futuro próximo.

Palavras-Chave: Cosmologia, Supernova, Estatística Bayesiana, Matéria Escura, Energia Escura.

Abstract

This dissertation is dedicated to the investigation on the nature of the dark matter and dark energy in the Universe through the technique that uses the observations of explosions of supernovae type Ia as indicators of distances, used at the end of the last century to detect the accelerated expansion of the Universe. Since then some projects dedicated to observation of supernovae were executed and published their results, which are used here to estimate parameters and compare cosmological models. The objective of this work is to study the power of the test based on the distances to supernovae and its response to different cosmological models and free parameters. To begin with we review the standard model of Cosmology and the evidences that support the existence of dark matter and dark energy, followed by a study on the supernovae itself and its various observational and astrophysical aspects that allow the construction of the magnitude calibration techniques and the estimatives of its distances. Before moving on to the cosmological analyses we introduce the appropriate tool which is the Bayesian statistics, studied here only in its basic tools and applications. At last we apply these tools to the supernovae data sets available in the literature known as the Gold, SNLS, Essence and Constitution, to study some cosmological models, beginning with the concordance Λ CDM model and the ω CDM parametrization that tests the supposition that $\omega_X = -1$ for the dark energy. After that we test two dynamical vacuum energy $\Lambda(t)$ models and a special case of the quartessence Generalized Chaplygin Gas model. The results show that when used alone the supernovae data sets leads to quite less expressive results when compared to the literature where they are used together with other evidences. And also two of the data sets including the most up to date show unexpected irregularities that point to the existence of still uncontrolled effects on the magnitude calibration techniques. Both results show that the cosmological test based on supernovae data will go through another significant improvement on its quality in the near future.

Key-Words: Cosmology, Supernova, Bayesian Statistics, Dark matter, Dark Energy

Sumário

Lista de Figuras	p. ix
1 Introdução	p. 1
2 Relatividade Geral e Cosmologia	p. 6
2.1 A Teoria da Relatividade	p. 7
2.1.1 Relatividade Geral	p. 8
2.2 A Cosmologia Relativística	p. 13
2.2.1 O Universo em Expansão	p. 15
2.2.2 O Modelo Padrão	p. 20
2.3 O Modelo de Concordância	p. 25
2.3.1 A Matéria Escura	p. 25
2.3.2 A Energia Escura	p. 30
3 Supernovae Tipo Ia	p. 36
3.1 Introdução	p. 37
3.1.1 Supernovae na Astronomia	p. 37
3.1.2 Classificação	p. 43
3.2 Aspectos Astrofísicos	p. 46
3.2.1 A Explosão	p. 47
3.2.2 Velas Padronizáveis	p. 49
3.3 Aplicação	p. 53
3.3.1 O Parâmetro de Hubble	p. 53

3.3.2	Dados Utilizados	p. 56
4	Estatística Bayesiana	p. 59
4.1	O Paradigma	p. 60
4.1.1	Interpretações da Probabilidade	p. 61
4.1.2	O Teorema de Bayes	p. 62
4.2	Algumas Aplicações	p. 65
5	Análise de Modelos Cosmológicos	p. 71
5.1	Introdução	p. 72
5.2	Λ CDM	p. 75
5.3	ω CDM	p. 78
5.4	$\Lambda(t)$ CDM	p. 80
5.5	Running Λ	p. 83
5.6	Gás de Chaplygin Generalizado	p. 86
6	Conclusões e Perspectivas	p. 90
	Referências	p. 96

Lista de Figuras

1	Geometria do Universo	p. 16
2	Curva de Rotação de uma Galáxia	p. 26
3	Espectro de Potência Angular da Radiação Cósmica de Fundo	p. 28
4	Medidas de Distância na Cosmologia	p. 34
5	Escada de Distância Cósmica	p. 39
6	Bandas Fotométricas UBVRI	p. 41
7	Espectros dos Diferentes Tipos de Supernovae	p. 44
8	Curvas de Luz dos Diferentes Tipos de Supernovae	p. 45
9	Calibração das Magnitudes de SNIa pelo Fator de Esticamento	p. 52
10	Amostra Constitution: Impacto de H_0 na Distância Luminosa	p. 55
11	Amostra Constitution: Impacto de Ω_m na Distância Luminosa no Λ CDM	p. 56
12	Amostra Gold e Curvas Teóricas do Λ CDM	p. 57
13	Amostra Essence e Curvas Teóricas do Λ CDM	p. 58
14	Regiões de Confiança para Testes Cosmológicos no plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$	p. 74
15	Gold: Λ CDM	p. 76
16	Essence: Λ CDM	p. 77
17	Constitution: Λ CDM	p. 77
18	Degenerescência no plano $\omega - \Omega_m$	p. 78
19	Gold: ω CDM	p. 79
20	Essence: ω CDM	p. 79
21	Constitution: ω CDM	p. 80
22	Gold: $\Lambda(t)$ CDM	p. 82

23	Essence: $\Lambda(t)CDM$	p. 82
24	Constitution: $\Lambda(t)CDM$	p. 83
25	Degenerescência no Modelo Running Λ	p. 84
26	Gold: Running Λ	p. 85
27	Essence: Running Λ	p. 85
28	Constitution: Running Λ	p. 85
29	Degenerescência no Modelo Gás de Chaplygin Generalizado	p. 87
30	Gold: Gás de Chaplygin Generalizado	p. 88
31	Essence: Gás de Chaplygin Generalizado	p. 88
32	Constitution: Gás de Chaplygin Generalizado	p. 89

1 Introdução

A Cosmologia é uma ciência que nasceu como um fruto da revolução científica ocorrida no início do século XX, quando as disciplinas da física foram desafiadas por graves problemas como o da própria estabilidade dos átomos que não podia ser explicada pela física clássica. Em resposta a esses desafios este foi um período de intensa atividade científica que resultou na elaboração de novas teorias que sanaram as catástrofes e incoerências, dando origem a novas áreas da física apropriadas à descrição de outras escalas da natureza além das da física clássica, desde a sub atômica até a extra galáctica.

No entanto a Cosmologia não foi impulsionada apenas pela física mas também pelos grandes avanços na astronomia que permitiram observações detalhadas do Universo. Desde então essas observações passaram a ser grandes laboratórios para o desenvolvimento da física, no que culminou na construção do modelo do Big Bang sobre as origens e características de nosso Universo em expansão. E por ser a ciência que investiga as escalas mais extremas da natureza, do sub atômico Universo primordial até o observado hoje, a Cosmologia continuou a cumprir o seu papel de laboratório para a física, o “acelerador de partículas de pobre” como foi chamada por Y. Zel’dovich.

Assim ao final do século XX por meio da técnica estudada neste trabalho que é a da determinação das distâncias a um tipo de explosões de estrelas chamadas de supernova do tipo Ia, a Cosmologia apresentou à física uma evidência que parece exigir uma reformulação das teorias atuais. Ao observar a variação das distâncias com a evolução do Universo foi confirmado que a expansão do cosmos está acelerando, o que contraria o esperado da característica atrativa da gravidade que atuaria apenas na desaceleração da expansão. Desde então muitas especulações surgiram na tentativa de explicar este fenômeno, a maioria delas associadas ou a correções na teoria da gravidade (a Relatividade Geral) para descrever o Universo, ou a presença de uma substância que exerce uma força anti-gravitacional com uma pressão negativa, chamada em geral de *energia escura*.

A essa evidência somam-se as de outras observações astronômicas como a da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, que em paralelo a uma determinação independente da taxa de expansão atual (o parâmetro de Hubble H_0), permite a investigação da geometria espacial do Universo. E por outro lado desde a década de 30 múltiplas evidências observadas apontam para a presença dominante da *matéria escura* sob a matéria convencional (bariônica) em sistemas gravitacionalmente ligados como galáxias e aglomerados. Essas duas componentes são chamadas de escuras porque não emitem qualquer radiação eletromagnética e assim só podem ser detectadas indiretamente pelos seus efeitos gravitacionais, que em princípio se manifestam desde escalas astrofísicas no caso da matéria

escura e na escala cosmológica no caso da energia escura. E juntas todas essas evidências montam um panorama do Universo onde 95% de todo seu conteúdo é composto de matéria/energia que nunca foi detectada em laboratório na Terra e cuja natureza permanece sob especulação.

O confronto das diversas evidências observacionais com os modelos teóricos levou ao surgimento de um modelo de concordância chamado Λ CDM. Nesse modelo a energia escura é *constante cosmológica* Λ de Einstein, que representa a energia do próprio vácuo e é a explicação mais simples para a causa da aceleração do Universo, além de ser uma energia cuja existência é esperada. O problema dessa alternativa é que o valor da densidade de energia do vácuo calculado pela Teoria Quântica de Campos é um número que na melhor hipótese é cerca de 40 ordens de grandeza maior do que o observado, num resultado que vem sendo chamado de o maior erro da física de todos os tempos, e contrasta com o grande sucesso dessa teoria na descrição das interações elementares, com exceção da gravitação. Por outro lado a outra componente é a chamada *matéria escura fria* (CDM em inglês), que é supostamente uma partícula que interage muito fracamente com a matéria bariônica e tem sua origem nas teorias que estão além do modelo padrão das partículas elementares. O problema nesse caso é que os candidatos a essa partícula são muitos, e ela permanece *ainda* não detectada em laboratório, embora isso possa mudar em breve.

Assim a situação atual é semelhante a de um século atrás quando novas teorias eram necessárias para explicar uma série de resultados de experimentos e observações científicas, com a diferença de que agora a Cosmologia está na linha de frente desta provável nova revolução científica. E dessa vez devido aos grandes avanços (e problemas) da física teórica já existem muitas teorias alternativas sobre a natureza das componentes escuras, que poderiam ser a descrição correta para os fenômenos observados. Assim a tarefa de escolher entre elas qual é a melhor descrição do Universo passa necessariamente por um contínuo avanço nas observações astronômicas, a exemplo do que já vem ocorrendo, o que por sua vez requer uma atenção cada vez maior no processamento e interpretação dos dados astronômicos.

Isso justifica a abordagem seguida neste trabalho que é a de uma investigação sobre o uso dos dados das distâncias às supernovae Ia na Cosmologia em todos os seus aspectos, o que inclui uma revisão sobre a natureza das supernovae Ia e dos vários fatores que as afetam, assim como os detalhes que afetam as observações e finalmente as técnicas estatísticas amplamente usadas na Cosmologia na estimativa de parâmetros no contexto de modelos cosmológicos específicos. Por último então aplica-se esse estudo ao caso de

alguns modelos cosmológicos que têm recebido atenção na literatura recente, com o intuito de observar como os dados das supernovae Ia respondem a diferentes modelos.

Assim não foi um objetivo deste trabalho um estudo mais detalhado sobre algum modelo cosmológico alternativo, até por que isso deve ser feito pelo confronto com as múltiplas evidências astronômicas, a exemplo do que ocorre com o Λ CDM. Soma-se a essa dificuldade a complexidade e a diversidade de motivações relacionadas a cada um dos modelos alternativos, que em geral se relacionam com as várias possibilidades da física teórica que têm sido discutidas nas últimas décadas.

Assim a motivação deste trabalho é a importância central dos dados de supernovae Ia para a Cosmologia. Se num primeiro momento eles foram usados para meramente detectar a aceleração do Universo, agora já estão sendo usados para estudar as suas propriedades. Na última década várias missões científicas foram lançadas afim de aperfeiçoar as medidas e minimizar as incertezas nas observações, bem como estabelecer os limites naturais de aplicabilidade do teste com as supernovae Ia. Esses resultados, que são revisados neste trabalho, ajudaram a estabelecer o modelo de concordância ao mostrar que o comportamento da aceleração da expansão do cosmos é semelhante ao que seria causado por uma constante cosmológica, ainda que haja espaço para modelos alternativos que poderiam explicar os dados.

E dadas as perspectivas para o futuro deste tipo de observação, onde novas missões no fim desta década vão começar a catalogar mais de 1000 supernovae Ia por ano (em contraste a maior amostra utilizada neste trabalho que consiste em ≈ 400 supernovae), o que significará outro salto de qualidade nos resultados finais da análise, sabe-se que supernovae Ia permanecerão como um tema de estudo de importância central para a Cosmologia. E da mesma forma que há pouco mais de uma década esta dissertação não poderia ser feita, dentro de uma década os dados de supernovae disponíveis poderão talvez ser usados para demonstrar a falha do modelo da constante cosmológica e da matéria escura fria, ou o seu sucesso definitivo.

Para iniciar este estudo todo o modelo padrão da Cosmologia é revisado no primeiro capítulo, incluindo suas origens com o advento da teoria da Relatividade Geral e suas aplicações ao estudo do Universo, que é exposta juntamente com uma retrospectiva dos avanços nas observações astronômicas que culminaram na criação do modelo do Big Bang e da Inflação cósmica. Ao final desse capítulo encontra-se também uma exposição sobre como as múltiplas evidências da Astrofísica e da Cosmologia apontam para a existência da matéria e da energia escuras no Universo, e de como algumas destas evidências são

usadas, em particular as relevantes neste trabalho que são as medidas de distâncias.

Em seguida encontra-se uma revisão sobre o tema central deste estudo que são as supernovae do tipo Ia, apresentadas desde os princípios elementares sobre sua natureza, suas características astrofísicas que vem sendo discutidas nos últimos 20 anos e por último a discussão sobre a aplicação de seus dados na Cosmologia acompanhada da exposição das amostras usadas na análise cosmológica realizada no último capítulo.

Antes de seguir para a análise cosmológica introduz-se a ferramenta adequada para lidar com o tipo de informação limitada que pode-se extrair de qualquer observação cosmológica que é a estatística bayesiana. Esta ferramenta é por si só o motivo de uma revolução conceitual nos fundamentos da estatística, que são descritos brevemente no contexto de sua aplicação à Cosmologia onde seu uso já se tornou uma rotina.

E por último revisa-se alguns modelos cosmológicos fisicamente bem motivados que têm sido discutidos na literatura recente, afim de testá-los frente os dados das supernovae e determinar se estes sozinhos realmente apontam Λ CDM como o melhor modelo. O objetivo aqui é apenas testar a capacidade da estimativa de parâmetros e discriminação de modelos dos dados, e não tem a ambição de chegar a conclusões definitivas sobre os modelos abordados, que têm em comum (a exceção do dois primeiros que são o próprio Λ CDM e um modelo de teste) apenas o fato de pertencerem a uma classe de modelos que visam descrever uma possível interação entre a componente exótica de pressão negativa (a energia escura), com a matéria escura não bariônica CDM. O modelo do Gás de Chaplygin Generalizado no entanto vai além disso e propõe uma unificação no setor escuro, que passa a ser uma manifestação de uma mesma física.

2 Relatividade Geral e Cosmologia

Este capítulo é uma retrospectiva do avanço científico atingido no século XX no que diz respeito as origens da Cosmologia e de suas bases teóricas e observacionais. Se anteriormente as origens do Universo só podiam ser descritas por especulações ou mitologias, ao longo do século passado estabeleceram-se os fundamentos da Cosmologia científica. Com ela surgiram os modelos do Big Bang e da Inflação cósmica, e mais recentemente o modelo de “concordância” Λ CDM que se estabeleceu na primeira década do século XXI como a melhor explicação aos fenômenos observados.

2.1 A Teoria da Relatividade

No início do século passado duas contradições flagrantes preocupavam a física. Em primeiro lugar havia a completa falha da física clássica na descrição dos fenômenos na escala atômica, que levou ao nascimento da Mecânica Quântica e todos os seus desdobramentos - incluindo a Astrofísica e parte da Cosmologia. Em segundo lugar havia a contradição entre as leis da mecânica e as do eletromagnetismo, que levou diretamente à teoria da Relatividade Restrita (RR) e a teoria que serve de base para a Cosmologia moderna, a Relatividade Geral (RG).

Por um lado o eletromagnetismo de Maxwell prevê um valor constante para a velocidade da luz no vácuo (c), igual em todos os referenciais inerciais (RIs). De outro, as leis da mecânica clássica são invariantes sob as chamadas transformações de Galileu entre RIs¹), que resultam numa lei de adição de velocidades tal que um feixe de luz visto por dois RIs distintos com movimento relativo entre si, possui velocidades de propagação distintas relativas a cada RI. Havia ainda na formulação do eletromagnetismo clássico (1864) a existência de um postulado éter, que seria o meio sobre o qual a luz se propaga, e preencheria o vácuo. Assim de acordo com a mecânica, RI diferentes detectariam velocidades da luz diferentes devido a suas diferentes velocidades relativas ao éter.

A controvérsia atingiu seu auge quando em 1887 Michelson e Morley executaram seu experimento em busca do éter, onde nenhuma variação da velocidade da luz em direções diferentes foi detectada, *i.e.*, o movimento da Terra relativo ao éter não foi detectado. Nesse período as bases da RR são lançadas: em 1889 FitzGerald tenta explicar o resultado nulo do experimento, postulando que os objetos em movimento relativo ao éter se contraem na direção de seu movimento; durante 1892-95 Lorentz postula de maneira independente o mesmo fenômeno de contração, mas no contexto de sua teoria sobre o éter, que rivalizou

¹As transformações que em conjunto com as rotações e translações no espaço geram o grupo de Galileu, que conecta RIs com movimento relativo uniforme entre si.

com a RR por prever alguns resultados idênticos a essa [1]. Ainda nessa época Poincaré argumenta sobre a impossibilidade da detecção do referencial do éter, e em 1904 formula o princípio da relatividade usado a seguir por Einstein. Nesse mesmo ano Lorentz deduz as chamadas *transformações de Lorentz*, que deixam as equações de Maxwell invariantes sobre trocas de RI, e em resposta Poincaré reconhece então a necessidade de uma nova mecânica que teria a velocidade da luz como limite.

Em 1905 Einstein constrói a RR usando apenas dois postulados: o princípio da relatividade (sobre a invariância das leis da física para todos os RIs), e o princípio da constância da velocidade da luz em todos os referenciais, descartando o éter que passa a ser um artifício desnecessário. Com esses princípios Einstein deduziu as transformações de Lorentz entre RIs e mostrou suas consequências: a equivalência entre massa e energia, a dilatação do tempo e a contração dos objetos em movimento. O tempo absoluto é destituído de sentido e passa a ser uma coordenada ligada a cada RI. Assim dois RIs distintos, com coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) e (ct', x', y', z') são equivalentes sob transformações de Lorentz $x^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta}$ (onde $\Lambda^{\alpha'}_{\beta}$ são os elementos de uma matriz do grupo de Lorentz ²), que deixam invariante o intervalo infinitesimal entre dois pontos (*eventos*) $ds^2 = ds'^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$, onde $\eta_{\alpha\beta} = \text{Diagonal}(-1, 1, 1, 1)$ é a matriz chamada métrica de Minkowsky ³.

Como consequência dessa teoria toda a física clássica é reformulada tendo em vista o novo grupo de simetria (o grupo de Lorentz) sob o qual as leis da física são invariantes, com as leis clássicas sendo o caso limite das leis relativísticas, quando as velocidades envolvidas são desprezíveis em relação à da luz. Por fim as próprias concepções de espaço e tempo são reformuladas e unificadas na estrutura geométrica que é o *espaço de Minkowsky* (1907), o espaço-tempo plano da RR. Porém algumas questões continuavam sem resposta, o que levou Einstein nos 10 anos seguintes a construir a sua teoria relativística da gravitação, a Relatividade Geral (RG). Faz-se aqui apenas uma breve introdução baseada na literatura [1, 2, 3], com o intuito de apresentar as equações que são a base da Cosmologia.

2.1.1 Relatividade Geral

A teoria da RR promoveu uma revolução na física, porém estava incompleta. Em especial, tinha em comum com a física Newtoniana a definição dos RIs (equivalente a 1ª lei de Newton), e um princípio de relatividade que conecta esses referenciais, por

²O grupo $SO(3,1)$ das matrizes pseudo-ortogonais ($\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$) com $\det \Lambda = 1$, gerado pelas transformações de Lorentz e as rotações e translações no espaço.

³Aqui usa-se a convenção de soma de Einstein onde índices repetidos são somados, com $ct = x^0$, e $x, y, z = x^{1,2,3}$.

meio das transformações de Galileu e de Lorentz. Não há nada que identifique um RI isoladamente, e assim Newton deu ao espaço absoluto esse papel. Porém essa idéia nunca foi unanimidade e assim inicia-se um debate histórico (com Leibniz), que culmina na obra de Mach de 1893 que continha aquilo que Einstein chamou de *Princípio de Mach*. Consiste na abolição do espaço absoluto, onde agora a inércia (massa) dos corpos passa a ser um produto da interação com todas as massas do Universo. Com isso o RI absoluto é substituído pelo referencial das estrelas fixas, que representam o Universo distante e portanto determinam os RI locais na Terra. Apesar desse princípio ter guiado Einstein, que pretendia eliminar os conceitos de espaço e tempo absolutos, ele só o fez parcialmente - pois a forma final da RG prevê que em uma região suficientemente distante de qualquer matéria, o espaço-tempo é descrito pela métrica de Minkowsky. Nesse caso é a ausência (ou distância) da matéria que determina os RIs locais, contrariamente à idéia de Mach.

Além do problema do RI absoluto e da extensão do princípio da relatividade aos movimentos acelerados, outro problema da RR era a sua extensão à gravitação. Pensando nesses problemas Einstein percebeu uma profunda conexão entre inércia, aceleração e gravitação. Hoje chama-se essa conexão de *Princípio da Equivalência Fraco*, que consiste na igualdade numérica (confirmada por diversos experimentos com precisão de mais de 10^{-9}) entre a massa gravitacional (definida pela lei de força $m_G = F_G/g$, onde g é a aceleração gravitacional) e a massa inercial definida pela 2ª lei de Newton ($m_I = F/a$), o que faz com que sob a força da gravidade apenas todos os corpos caem com a mesma aceleração ($a = g$), como observado por Galileu. Einstein toma esta coincidência como ponto de partida para a RG em 1907, no *Princípio da Equivalência de Einstein*. Citando [2], “em cada ponto do espaço-tempo, é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial tal que, em regiões suficientemente pequenas em torno desse ponto, as leis da física têm a mesma forma das da RR, na ausência do campo gravitacional”.

Ao reconhecer a equivalência dos RIs locais em queda livre, Einstein estende o princípio da relatividade no *Princípio da Covariância*, onde *as leis da física são as mesmas na presença de um campo gravitacional, e são invariantes sob transformações gerais de coordenadas*, ou seja devem ter a forma de tensores, que são objetos matemáticos definidos pelo seu comportamento sob transformações gerais de coordenadas. Juntos esses dois princípios estendem o princípio da relatividade ao afirmarem que as leis da física são “localmente” invariantes. E assim em cada ponto do espaço-tempo é possível escolher um referencial em queda livre, onde a 2ª lei de Newton toma a forma

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (2.1)$$

e τ é o tempo próprio definido por $c^2 d\tau^2 = ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$. Em um outro sistema de coordenadas x^α , em repouso no campo gravitacional, essa equação é

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \right) = 0$$

que após manipulação torna-se

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.2)$$

que é chamada equação da geodésica. Sua solução representa a generalização do conceito de linha reta da geometria euclidiana (curva de menor comprimento entre dois pontos) para uma geometria curva ou não-euclidiana. Nesse sistema de coordenadas o tempo próprio é dado por $c^2 d\tau^2 = ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ o que define o *tensor métrico*

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (2.3)$$

A métrica $g_{\mu\nu}$ e símbolo $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são elementos centrais da geometria Riemanniana (GR), que é a estrutura matemática que sustenta a RG. A métrica $g_{\mu\nu}$ dá uma maneira de medir distâncias entre pontos no espaço-tempo e assim associa uma norma a cada tensor. Por exemplo para um vetor tem-se $|\vec{V}|^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ que ilustra o papel de $g_{\mu\nu}$ que opera sobre todos os outros tensores como em $V_\mu = g_{\mu\alpha} V^\alpha$ ou $V^\mu = g^{\mu\alpha} V_\alpha$ que formam o invariante $|\vec{V}|^2 = V^\mu V_\mu = V_\mu V^\mu$, e também contraindo índices como em $R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\alpha\mu\nu}$ que é gerada do produto $g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta\mu\nu}$, que por sua vez depende da propriedade $g^{\alpha\gamma} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta$ ⁴.

O símbolo $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ (conhecido por muitos nomes como *conexão afim* ou *símbolo de Christoffel*) é construído a partir das transformações de coordenadas e é usado na construção da *derivada covariante*, que é um generalização da conceito de derivada para a sua atuação sobre os tensores, de maneira que a derivada covariante de um tensor também seja um tensor. Por exemplo escrevendo um vetor como $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$, onde \vec{e}_μ são os vetores da base associada a um sistema de coordenadas e V^μ são os componentes nessa base, a derivada covariante com respeito a coordenada x^ν é

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \vec{e}_\mu + V^\mu \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.4)$$

onde destaca-se a presença do termo $\partial \vec{e}_\mu / \partial x^\nu$ que pode ser escrito como

$$\vec{e}_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.5)$$

⁴ δ^α_β é o *tensor de Kronecker* e sua forma matricial é a identidade. Assim, $g^{\alpha\beta}$ possui uma inversa que é $g_{\alpha\beta}$.

o que permite escrever, após uma troca de índices mudos (somados)

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\nu} = \left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + V^\lambda \Gamma^\mu_{\lambda\nu} \right) \vec{e}_\mu \quad (2.6)$$

e assim as componentes da derivada covariante do vetor com respeito a base \vec{e}_μ , são:

$$V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \quad (2.7)$$

onde (;) denota a derivada covariante e a (,) é a derivada ordinária.

Com a derivada covariante define-se o conceito de *transporte paralelo* no espaço-tempo, que consiste na comparação de um tensor em pontos sucessivos e infinitamente próximos, tal que esse se mantenha constante. Essa é uma idéia central da GR, que dá origem ao conceito generalizado de geodésica (e deduz a equação 2.2) como *a curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente*. No entanto a maneira como é feito o transporte paralelo depende da conexão (que estabelece a derivada covariante), e na RG usa-se a chamada conexão métrica, que parte da idéia de que o tensor métrico é paralelamente transportado por todo o espaço-tempo, o que requer:

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (2.8)$$

e isso por sua vez conserva a norma (e a noção de ortogonalidade) entre os tensores. E também manipulando essa fórmula tem-se a relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}) \quad (2.9)$$

O princípio da covariância diz que as leis da física devem ter a forma tensorial, e que todos os efeitos da gravitação estão representados pela métrica $g_{\mu\nu}$ e pela conexão $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ como percebidos no referencial em queda livre. Para estabelecer uma equação para o campo gravitacional (uma equação para $g_{\mu\nu}$) é necessária a representação tensorial da curvatura do espaço-tempo (pois $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são próprios do referencial em queda livre). Isso é feito dentro de um contexto mais rigoroso considerando a variação de um tensor sob um transporte paralelo ao longo de um circuito infinitesimal ao redor de um ponto, ou de maneira equivalente considerando o comutador de duas derivadas covariantes ao longo de duas direções distintas. Com isso mostra-se que o *tensor de Riemann* é o único tensor construído a partir da métrica e de suas derivadas, definido por ⁵:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\beta} \Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\beta} \quad (2.10)$$

⁵Não há uma convenção estabelecida acerca dos sinais dessa fórmula. Aqui, segue-se [3].

A partir desse define-se o *tensor de Ricci*, que é a sua única contração não-nula:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = g^{\alpha\beta} g_{\alpha\gamma} R^{\gamma}_{\mu\beta\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} \quad (2.11)$$

e por último o *escalar de Ricci* ou *escalar de curvatura*:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

É possível estabelecer uma equação para o campo gravitacional partindo de princípios intuitivos sabendo que o campo gravitacional, ou a geometria não-euclidiana do espaço-tempo, é induzida pela presença de uma distribuição de matéria/energia. Essa por sua vez possui uma conhecida representação tensorial, o tensor de momentum-energia $T_{\mu\nu}$. Ele descreve a distribuição da matéria e energia no espaço-tempo como um fluido (ou contínuo), e assinala a cada ponto densidades de energia e de momentum. Suas componentes possuem interpretação direta, no contexto da mecânica de fluidos e da RR:

- T_{00} = densidade de matéria-energia.
- T_{0i} = fluxo de energia na i -ésima direção.
- T_{i0} = densidade da i -ésima componente do momentum.
- T_{ij} = tensor das tensões da mecânica clássica, representa o fluxo da i -ésima componente do momentum ao longo da superfície $x^j = \text{constante}$.

Com isso pode-se descrever toda uma variedade de fluidos, onde em geral o tensor $T_{\mu\nu}$ é simétrico em seus índices, pois a igualdade $T_{0i} = T_{i0}$ é uma consequência da equivalência entre massa e energia, e a igualdade $T_{ij} = T_{ji}$ provém do fato de que a soma das forças e dos torques internos a um elemento de fluido em equilíbrio deve ser zero. Também é possível mostrar que no caso geral as leis da conservação do momentum e da energia da RR são compactadas na expressão $T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$, cuja generalização imediata é:

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad (2.13)$$

O protótipo de fluido é o chamado *fluido ideal*, caracterizado pelas condições de que no seu referencial de repouso (que se move junto com os elementos do fluido), não haja nem troca de calor entre seus elementos ($T_{0i} = 0$) e nem viscosidade ou pressões anisotrópicas ($T_{ij} = 0, \forall i \neq j$). A sua representação num referencial arbitrário é:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U_{\mu} U_{\nu} + \frac{p}{c^2} g_{\mu\nu} \quad (2.14)$$

onde ρ é a densidade de energia, p é a pressão e $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ é quadri-velocidade, definidas em cada ponto do fluido. No referencial de repouso do fluido, $U^\alpha = (-c, 0, 0, 0)$, e a matriz de $T_{\mu\nu}$ é a Diagonal($\rho c^2, p, p, p$). Esse fluido possui um papel fundamental na Cosmologia.

Por fim espera-se que $T_{\mu\nu}$ seja a fonte da geometria do espaço-tempo, por analogia à gravitação Newtoniana. Em outras palavras espera-se que a equação do campo gravitacional tenha a forma $G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}$, onde $G_{\mu\nu}$ é uma função da métrica e de suas derivadas. Dessa forma $G_{\mu\nu}$ tem as mesmas propriedades de $T_{\mu\nu}$: é simétrico em seus dois índices e possui divergência covariante nula $G^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$. Usando as simetrias de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ (que é anti-simétrico nos índices $\alpha\beta$ e $\mu\nu$ e simétrico sob a troca desses pares) e das chamadas *identidades de Bianchi* $R_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$ e $R_{\alpha\beta[\mu\nu;\gamma]} = 0$ ⁶, mostra-se que existe apenas um único tensor que obedece essas propriedades, o chamado *tensor de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.15)$$

E assim as equações de campo da RG, obtidas independentemente por Einstein e Hilbert em 1915, são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

onde k é uma constante a ser determinada pelo limite Newtoniano dessas equações, que é a equação de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, onde ϕ é o potencial gravitacional Newtoniano. Impondo as identificações necessárias a $g_{\mu\nu}$ e as várias condições do limite newtoniano (onde a métrica é $\approx \eta_{\mu\nu}$, etc) conclui-se que $k = \frac{8\pi G}{c^4}$ e assim pode-se escrever a forma das equações de Einstein da RG em de 1917:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

Einstein introduziu o termo Λ , a *constante cosmológica*, pois além de não alterar a estrutura das equações por ser uma constante, justificava seu modelo cosmológico, que mostrou-se incorreto. Mas nem por isso o termo desapareceu na história, tendo sido ressuscitado recentemente por um motivo que é a motivação deste trabalho.

2.2 A Cosmologia Relativística

A Cosmologia é uma ciência do século XX. No entanto, devido ao papel central da astronomia no desenvolvimento da ciência moderna, muitas especulações foram feitas a medida que o poder de observação dos telescópios lentamente aumentava. Tendo formu-

⁶Os colchetes simbolizam a parte anti-simétrica do tensor nos índices envolvidos.

lado a teoria clássica da gravitação, Newton especulou corretamente que a gravidade seria a interação dominante na estrutura do cosmos. No entanto tal estrutura ainda não havia sido observada em detalhes além da Via-Láctea, e assim baseado no conceito de espaço absoluto e nas posições fixas das estrelas, o modelo cosmológico de Newton (1691) se referia a um Universo estático, infinito e homoganeamente povoado de estrelas - contrariamente a todas as observações, como por exemplo a concentração dessas em nossa galáxia.

Mesmo incorreto o modelo de Newton serve de marco pois nele vê-se pela primeira vez a idéia do *Princípio Cosmológico*, de um Universo homogêneo e isotrópico nas escalas cosmológicas de distâncias, igualmente povoado em todas as direções. Esse princípio é a hipótese de trabalho e ponto da partida da Cosmologia, juntamente com o *Princípio Copernicano*, que afirma que todas as direções do Universo são equivalentes (assim, a Terra é equivalente a qualquer outro ponto de observação no Universo). São esses princípios que somados a regularidade e a constância observadas nas leis da física por todo o Universo, permitem a construção de modelos cosmológicos que são atualizados de acordo com as evidências observadas. Assim até hoje questiona-se até que ponto o princípio cosmológico é verdadeiro [4, 5, 6]. No entanto sabe-se que esse é no mínimo uma boa aproximação para descrever o cosmos nas escalas em questão (a partir de ≈ 100 Mpc⁷), onde espera-se que ele seja obedecido num sentido estatístico, onde a média das flutuações de densidade seja a mesma em todas as direções⁸[7, 8].

Newton ainda impulsionou a astronomia com a invenção do telescópio refletor. Com ele em 1750 Tomas Wright especulou sobre a estrutura de disco da Via-Láctea e sua aparência no céu, e também propôs que as nebulosas difusas observadas poderiam ser discos de estrelas distantes, semelhantes a nossa - idéia defendida em 1755 pelo filósofo Immanuel Kant, criador do termo “universos-ilha” (galáxias). Ao fim do século XVIII William Herchell, o descobridor de Urano, publicou extensos catálogos astronômicos e se tornou o principal defensor dessa teoria, além de comprovar a estrutura da Via-Láctea. No entanto essa teoria não foi bem aceita nessa época devido a falta de evidências: não havia como provar que esses objetos estavam a distâncias extra-galáticas. Assim o debate sobre nebulosas difusas e as dimensões do Universo persistiu durante todo século XIX, enquanto lentamente as evidências se acumularam.

Foi nesse contexto que em menos de duas décadas nasceu a Cosmologia. Em 1915 Einstein lança a sua base teórica (a RG), e em 1917 descreve seu modelo cosmológico.

⁷Parsec (pc) é a distância em que a *paralaxe* astronômica (variação da posição angular em um ano) de um astro é de um *segundo* de arco, que é $1 \text{ pc} \approx 3,26 \text{ anos luz} \approx 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$.

⁸Os maiores superaglomerados de galáxias observados *até agora* possuem entre 100-200 Mpc de comprimento e *espera-se* que além disso as flutuações de densidade sejam aleatórias.

Baseado no princípio de Mach ele esperava que a distribuição de matéria em todo o Universo determinasse todos os RIs locais, e isso requeria uma geometria fechada (figura 1), e também uma distribuição de matéria homogênea e isotrópica [7]. Para que esse modelo descrevesse um Universo estático, assim como o de Newton, Einstein introduziu a constante cosmológica Λ na equação, que equilibra os efeitos da gravidade. Além desse outros modelos cosmológicos foram contruídos à luz da teoria da RG, mas ao longo do século XX todos foram descartados. Alguns possuem certo valor para o desenvolvimento da Cosmologia, como o modelo de de Sitter (1917) que representa a solução de vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) das equações da RG 2.17, e descreve um espaço-tempo cuja geometria 3-D se expande exponencialmente no tempo.

No mesmo período, em 1912 Slipher já havia observado nebulosas com alto desvio para o vermelho (*redshift* - z)⁹, indicando que esses objetos tinham uma velocidade maior do que à de escape de nossa galáxia. Mas foi somente em 1924 que Hubble deu a prova definitiva de que as nebulosas se tratavam na verdade de galáxias distintas. Observando estrelas variáveis Cefeidas¹⁰ no interior de diversas nebulosas (como a M31, a galáxia de Andrômeda), Hubble calculou suas distâncias e obteve resultados que em geral estavam a centenas de vezes o tamanho de nossa galáxia, confirmando a idéia de que as nebulosas tinham que ser galáxias distantes com suas próprias estrelas variáveis.

2.2.1 O Universo em Expansão

Com os avanços teóricos e observacionais, na década de 20 lançaram-se as bases da Cosmologia. Em 1922 Friedmann e de maneira independente em 1927 Lemaître, descobriram a expressão matemática para o princípio cosmológico, a mesma que em 1935 Robertson e Walker provaram, com considerações puramente geométricas (independente da RG [2]) ser única representação de todo os espaços-tempo que em geral tenham sua parte espacial homogênea e isotrópica. É a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que em coordenadas esféricas (ct, r, θ, ϕ), escreve-se:

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (2.18)$$

onde $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ é o elemento de linha da geometria.

Nessa expressão k é a *curvatura espacial* do Universo, e descreve sua geometria. A ho-

⁹Deslocamento de todo espectro eletromagnético, causado na física clássica pelo efeito Doppler devido a velocidades de recessão (*redshift*) ou de aproximação (*blueshift*) da fonte.

¹⁰Estrelas de brilho variável que possuem uma relação entre seu período de pulsação e sua luminosidade absoluta. Observando seu período pode-se estimar suas distâncias usando a lei 2.48.

homogeneidade e isotropia são definidas pelas superfícies espaciais fixadas a tempo constante, que possuem a mesma curvatura em todos os pontos - assim há apenas 3 possibilidades:

- $k = -1$: Universo hiperbólico. Geodésicas (as linhas na figura 1) inicialmente paralelas divergem.
- $k = 0$: Universo plano. Geodésicas paralelas permanecem paralelas, vale o teorema de Pitágoras.
- $k = 1$: Geometria fechada, esférica. Geodésicas inicialmente paralelas convergem.

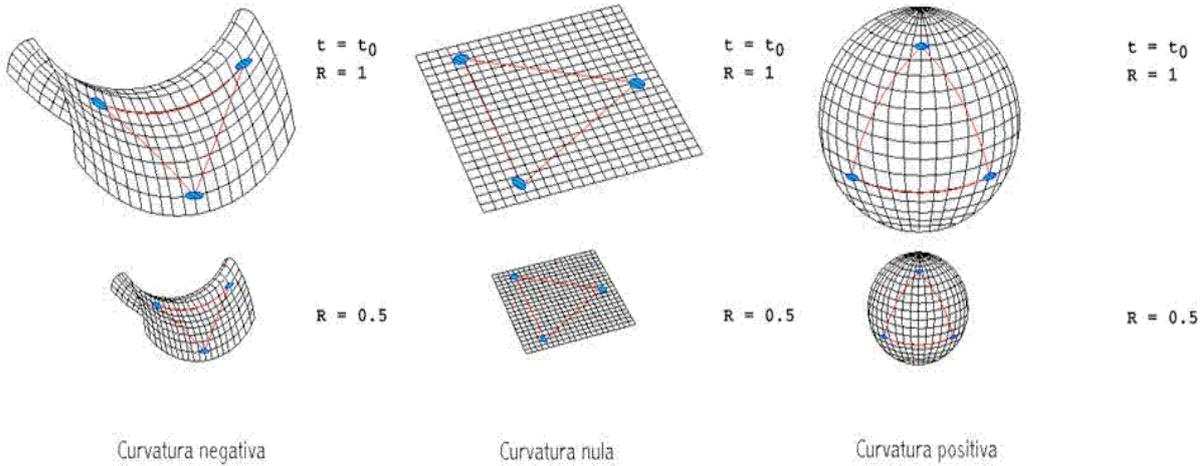


Figura 1: Curvatura espacial do Universo

O parâmetro $a(t)$ (ou $R(t)$ na fig. 1) é o chamado *fator de escala* e é a medida da expansão do espaço - ele afeta todas as medidas de distância nas escalas cosmológicas (onde essas considerações são válidas), que aumentam com $a(t)$ de uma maneira que depende também da curvatura. É definido como sendo $a_0 = a(t_0) = 1$, onde t_0 é a idade do Universo hoje. Por outro lado uma distribuição de matéria-energia que obedeça o princípio cosmológico só pode ser representada por um fluido ideal, e isso pode ser visto nas escalas cosmológicas pois ao interpretar as galáxias (ou seus pequenos grupos) como elementos de um fluido, vê-se que esses interagem entre si aproximadamente da mesma maneira que num fluido ideal. Isso é uma consequência do *Postulado de Weyl* [9], que assegura a possibilidade da escolha de uma classe de observadores, comóveis com a expansão do Universo, que o percebem homogêneo e isotrópico.

Essas idéias, expressas nas equações de campo da RG (2.17), depois de calculados $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, $R_{\mu\beta\nu}^\alpha$, $R_{\mu\nu}$ e R a partir da métrica FLRW com $T_{\mu\nu} = \text{Diagonal}(\rho c^2, p, p, p)$, levam as equações base do modelo padrão. Uma delas é a equação da conservação $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$:

$$\dot{\rho} = -3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \quad (2.19)$$

onde utilizam-se as definições do fator de Hubble $H = \dot{a}/a$, com \dot{a} , $\dot{\rho}$ e \ddot{a} sendo a 1ª e a 2ª derivada temporal de $a(t)$ e $\rho(t)$. As equações de campo da RG por sua vez, têm como

componente temporal

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (2.20)$$

e como componentes espaciais

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{kc^2}{a^2} - \Lambda c^2 = -\frac{8\pi G}{c^2}p \quad (2.21)$$

porém, a forma mais comum de expressá-la é por uma combinação das duas anteriores, que descreve a aceleração do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.22)$$

onde a curvatura k serve como constante de integração dessa ultima equação.

As equações 2.20 e 2.22 são as chamadas *equações de Friedmann*. Com auxílio da equação de estado do fluido, cuja forma mais simples é $p = \omega\rho c^2$, pode-se resolvê-las. É possível também omitir a presença de Λ nas equações acima substituindo $\rho \rightarrow \rho + \rho_\Lambda$ e $p \rightarrow p + p_\Lambda$, onde $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2 = -\Lambda c^4/8\pi G$, incorporando Λ no tensor momentum-energia. Esse fato é na verdade um argumento que leva a interpretação de Λ como a energia do vácuo (secção 2.3.2). A vantagem dessa incorporação é a de poder resolver as equações de Friedmann combinando-as por meio de *uma* equação de estado, dando $a(t) \propto t^{2/3(1+\omega)}$. Logo, para um Universo dominado por matéria não-relativística, ou “fria” ($p \ll \rho c^2 \approx 0$), que possui $\omega_m = 0$, tem-se $a \propto t^{2/3}$. Quando a densidade de energia da radiação eletromagnética que possui $\omega_r = \frac{1}{3}$ é dominante, $a \propto t^{1/2}$ e quando a constante cosmológica ($\omega_\Lambda = -1$) domina, a expressão é indefinida. Porém, sabe-se que nesse limite a solução de $a(t)$ é o modelo de de Sitter que apresenta uma expansão exponencial do espaço[10]. Tem-se também como consequência de 2.19, que $\rho(t) \propto a^{-3(1+\omega)}$, que para a matéria fria é $\rho_m \propto a^{-3}$, para a radiação $\rho_r \propto a^{-4}$ e para a constante cosmológica, $\rho_\Lambda = \text{constante}$. Estas expressões descrevem as eras cosmológicas onde a densidade de energia de um de seus componentes é muito maior do que o das demais. Porém para descrever a evolução do Universo mais precisamente, deve-se descrever sua composição mais precisamente. Isso pode ser feito escrevendo $\rho(t) = \sum_i \rho_i$, em conjunto com as equações de estado $p_i = \omega_i \rho_i c^2$ de cada componente, como é feito a seguir.

Uma das consequências da expansão do Universo é o seu efeito sob a propagação da luz nas distâncias cosmológicas, e de fato essa foi a primeira confirmação observacional recebida pelo modelo padrão. Sabe-se desde a RR que a luz se propaga sob uma geodésica nula, $ds^2 = 0$. Assim, integrando essa equação ao longo de um caminho radial

($d\phi = d\theta = 0$) que tem a Terra como origem, sabe-se que os feixes de luz obedecem

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt}{a} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \quad (2.23)$$

onde t é o tempo cósmico na emissão da onda e t_0 é o tempo na recepção do sinal na Terra. Essa equação é fundamental, pois dá origem à medida de distância fundamental na Cosmologia que é a chamada *distância comóvel*, pois é definida no sistema de coordenadas comóvel com a expansão do Universo:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \begin{cases} \arcsen(r), & k = 1 \\ r, & k = 0 \\ \operatorname{arcsenh}(r), & k = -1 \end{cases} \quad (2.24)$$

Essa é a distância medida pelo redshift observado na luz vinda da fonte num passado distante. Medir distâncias em um Universo em expansão é muito complicado, e assim todas as medidas de distância farão uso da medida fundamental que é a distância comóvel. Para duas frentes de onda consecutivas, a segunda será emitida num tempo $t + \delta t$ e recebida no tempo $t_0 + \delta t_0$. Estando ambas associadas ao mesmo intervalo invariante e considerando que o fator de escala permanece o mesmo durante os processos de emissão ($a(t + \delta t) = a(t)$), e de recepção ($a(t_0 + \delta t_0) = a(t_0)$) dos fótons consecutivos (cujo período típico é 10^{-10} s para microondas), tem-se

$$\chi = \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{cdt}{a} = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{a} \longrightarrow \frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t}{a(t)} \quad (2.25)$$

e ao usar as relações $\delta t = 1/\nu$ e $c = \lambda\nu$ juntamente com a definição do desvio para o vermelho da física clássica, tem-se a definição do *desvio para o vermelho cosmológico*:

$$\frac{\delta t}{\delta t_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \longrightarrow z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \quad (2.26)$$

ou usando $a(t_0) = 1$

$$z = \frac{1 - a}{a} \longrightarrow a = \frac{1}{1 + z} \quad (2.27)$$

e apesar dessa derivação ser uma aproximação, pode-se demonstra-lá rigorosamente considerando a equação da geodésica do fóton na métrica FLRW [2, 3, 11]. Foi esse o redshift que Slipher achou em várias nebulosas, mas foram Hubble e Humason que interpretaram a origem desse fenômeno em 1929, combinando suas próprias medidas de distância com as medidas de Slipher e outros. Com isso descobriram uma relação entre o redshift das galáxias e suas distâncias, que é consistente com uma velocidade de recessão associada a um Universo em expansão. Hoje sabe-se que tal relação é apenas uma aproximação, pois

depende da interpretação de z como consequência do efeito Doppler causado por uma velocidade de recessão, tal como na fórmula da RR:

$$z = \frac{1 + v \cos \theta}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \longrightarrow z \approx \frac{v}{c}, \quad v \ll c \quad (2.28)$$

onde θ é o ângulo entre a velocidade \vec{v} do objeto e a linha de visão do observador. Sabendo que o redshift cosmológico é o efeito de da expansão do Universo que dilata os comprimentos de onda da luz, pode-se mostrar que no limite apropriado ($z \ll 1$) essas duas interpretações coincidem. Para isso toma-se a medida correspondente à distância física, chamada *distância própria*, que aumenta com a expansão do Universo - ela é medida num tempo constante, tomando $dt = 0$ na métrica 2.18 e integrando. Com ela mede-se fisicamente a expansão do Universo:

$$d_p(t) = a(t)\chi \quad \longrightarrow \quad \frac{d_p(t_0)}{a(t_0)} = \frac{d_p(t)}{a(t)} \quad (2.29)$$

onde t é o tempo na emissão e t_0 é o na recepção. Assim, a velocidade de recessão seria então $\dot{d}_p = \dot{a}\chi$ e eliminando χ tem-se a *lei de Hubble* como formulada em 1929:

$$\dot{d}_p = v_r = H_0 d_p(t_0) \quad (2.30)$$

onde H é a chamada *constante de Hubble* $H_0 = H(t_0) = \left. \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right|_{t=t_0}$. Esse parâmetro é de importância fundamental para a Cosmologia pois vários outros parâmetros cosmológicos dependem de seu valor. Mesmo tendo sido calculado pela 1ª vez por Hubble, apenas recentemente as medidas baseadas em várias evidências [12, 13] atingiram precisão abaixo de $\approx 10\%$, girando em torno de $H_0 \approx 70$ km/s/Mpc. Por convenção define-se $H_0 = 100h$ km/s/Mpc e assim $h \approx 0,7$.

Essa lei empírica é aparentemente problemática pois quando $d_p > c/H_0 = d_H$, onde d_H é a chamada distância de Hubble, $v_r > c$ contrariando a RR. E de fato os objetos a uma distância maior que $d_H \approx 3000$ Mpc estão se afastando da Terra mais rápido do que a luz, mas isso não é uma contradição com a RR uma vez que não há um RI que possa ser associado a d_p e v_r [14], pois elas são tomadas em um instante de tempo t_0 , ao passo que as informações que recebemos dos astros distantes são na verdade informações sobre o passado desses objetos. Na prática não há como observar diretamente a d_p , a não ser por seus efeitos em outras medidas de distância. Assim a maneira correta de interpretar o redshift é pela expansão de Taylor da função $z(t) |_{t \approx t_0}$:

$$z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 \approx H_0(t_0 - t) + \frac{1}{2}H_0^2(q_0 + 2)(t_0 - t)^2 + \dots \quad (2.31)$$

onde q_0 é o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = \frac{-1}{H_0^2 a(t_0)} \left. \frac{da^2(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} = \frac{4\pi G(\rho_0 + 3p_0)}{3H_0^2} \quad (2.32)$$

donde vê-se que se o Universo é dominado por um fluido com $\omega < -1/3$, irá sofrer uma expansão acelerada ($q_0 < 0$). Assim no limite $z \ll 1$, quando $t \rightarrow t_0$, assume-se que $z \approx v_r/c$, e recupera-se a lei de Hubble como aproximação em 1ª ordem:

$$z \approx H_0(t_0 - t) \longrightarrow v_r = H_0 d_p(t_0) \quad (2.33)$$

onde $c(t_0 - t) = d_p(t_0)$. Nesse caso a expansão do Universo pode ser ignorada ($a(t) \approx a(t_0)$), e ambos RIs de emissão e recepção concordam em suas medidas.

A expansão do Universo juntamente com a radiação cósmica de fundo (R.C.F.) em micro-ondas e abundância natural dos elementos químicos no Universo, que serão abordadas na próxima seção, são as principais bases observacionais do modelo padrão. Neste trabalho investiga-se a história mais recente do Universo e assim muitos detalhes técnicos das teorias do Big Bang e da Inflação cósmica serão omitidos uma vez que esses dão origem a outras linhas de investigação não abordadas aqui. Assim, faz-se nessa seção apenas uma breve descrição de como o modelo padrão descreve o Universo primordial e as evidências (e problemas) que o suportam.

2.2.2 O Modelo Padrão

Desde o trabalho de Lemaître de 1927, a idéia de um Universo em expansão é estendida a um passado longínquo, onde todo o cosmos estaria comprimido em uma região arbitrariamente pequena. Ele chamou esse estado de “átomo primordial”, e anos depois Hoyle, defensor da teoria do Universo estacionário, criou o termo “Big Bang”, então pejorativo, para descrever o Universo primordial. Essa extrapolação da contração do cosmos, a medida que se olha para o passado, leva a uma série de especulações sobre o instante inicial da expansão (que é uma singularidade formal da métrica FLRW, onde $a(0) \rightarrow 0$, e $\rho \rightarrow \infty$), e também sobre a origem da expansão (ou o que iniciou o Big Bang). No entanto essas especulações descrevem o Universo a medida que esse supostamente se aproxima da singularidade, quando as leis da física conhecida não são mais válidas e espera-se que sejam substituídas por outras, em um problema que está ligado à natureza da gravitação quântica, que até agora não é compreendida. Assim a teoria do Big Bang não explica o porque e nem a natureza da singularidade, mas descreve com sucesso o Universo a partir desses instantes iniciais.

De acordo com esse cenário o Universo primordial emerge da singularidade e entre $0 < t < t_P$ atravessa a chamada era de Planck, que é inteiramente dominada por efeitos da gravitação quântica, sendo assim atualmente imprescrutável. Aqui $t_P = (G\hbar/c^5)^{1/2} \approx 10^{-43}$ s é o chamado *tempo de Planck* que juntamente com as outras medidas derivadas (por exemplo a temperatura de Planck $T \approx 10^{32}$ K), marcam as escalas típicas da gravitação quântica. A partir dessa fase seguem-se outras envolvidas em muitas especulações ou extrapolações dos modelos padrão da Cosmologia e das interações fundamentais. A primeira é a chamada era da grande unificação, entre $10^{-43} < t < 10^{-36}$ s, onde especula-se [10] que apenas a gravidade havia se separado das forças eletrofraca e nuclear forte, que permaneciam unificadas. Após isso por volta de $t = 10^{-36}$ s acredita-se o mecanismo de quebra espontânea de simetria tenha diferenciado as forças nuclear forte e eletrofraca e durante essa transição de fase espera-se que tenha ocorrido também a Inflação cósmica.

As teorias de Inflação surgiram na década de 80 pelas idéias de Guth, Sato e Starobinsky e atualmente existem mais de uma dezena de suas variações [15]. Elas descrevem a época no Universo primordial dominada pela energia de um campo escalar homogêneo de origem desconhecida, chamado *inflaton*, que impulsionou uma expansão exponencial do espaço. Supõe-se que em algum período de tempo entre $10^{-36} < t < 10^{-32}$ o inflaton sofra uma transição onde libera sua energia potencial obedecendo $p \approx -\rho$, e faz com que o fator de escala aumente por um fator mínimo de $e^{70} \approx 10^{30}$. Ao final desse processo espera-se que o inflaton decaia e converta sua energia em outras partículas e radiação, num processo conhecido como *reaquecimento*. Acredita-se também que nessa época (ou perto da época da transição eletrofraca) tenha ocorrido a *bariogênese*, um processo ainda não compreendido (juntamente com sua conexão com a Inflação), no qual se origina a assimetria da matéria sobre a anti-matéria observada por todo o cosmos¹¹.

Apesar de sua natureza altamente especulativa a teoria da Inflação cósmica é considerada parte do modelo do modelo padrão da Cosmologia. A razão para isso é a sua capacidade única de explicar os sérios problemas inerentes ao modelo do Big Bang. O primeiro é o chamado *problema do monopolo* que surge das extensões do modelo padrão da física de partículas como por exemplo as teorias de supersimetria, supercordas e de grande unificação. Todas elas prevêm que se o Universo passou por uma fase suficientemente quente e densa então uma série de partículas exóticas, como por exemplo os monopolos magnéticos, teriam que ser produzidos nessa fase e persistido, contrariando o

¹¹De acordo com o princípio da conservação da carga elétrica, a matéria e a anti-matéria deveriam ter sido criadas em igual quantidade. Assim, por algum mecanismo ainda não totalmente compreendido, algo criou a assimetria observada na natureza.

fato de nenhuma dessas partículas foram observadas até hoje.

Já os chamados *problema do horizonte* e *problema da planeza* são muito mais graves pois aqui o modelo Big Bang parece entrar em contradição. Para mostrar o problema da planeza, deve-se primeiro reescrever a equação de Friedmann 2.20, com as definições da densidade crítica $\rho_c(t) = 3H^2(t)/8\pi G$ e do parâmetro de densidade $\Omega(t) = \rho/\rho_c$

$$\Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{a^2 H^2} = -\Omega_k(t) \quad (2.34)$$

que justifica as definições uma vez que para $k = 0$, $\rho(t) \equiv \rho_c(t)$. Num Universo dominado por matéria ou radiação (na verdade qualquer fluido tal que $\ddot{a} < 0$), $a^2 H^2 = \dot{a}^2$ sempre diminui e assim se $k \neq 0$, $|\Omega - 1|$ sempre aumenta. Portanto nesse caso Ω_k se afasta rapidamente de 0, contrariamente ao valor observado pelo satélite WMAP[16, 17] que é $\Omega_k = -0.080_{-0.093}^{+0.071}$ (utilizando apenas os dados da RCF). Com isso pode-se mostrar que seria necessário que na época da nucleossíntese (a seguir), $|\Omega - 1| \approx 10^{-16}$ para que $\Omega \approx 1$ hoje. Isso representa uma condição inicial absurdamente precisa, e não há nada que a justifique. A única solução seria então assumir que $k = 0$, que por sua vez diz que conteúdo da matéria-energia o Universo obedece $\Omega = 1$ em toda a sua história, com precisão também arbitrariamente grande.

O problema do horizonte por sua vez é a afirmação de que no modelo Big Bang não existe explicação para a homogeneidade e a isotropia, dada a existência de regiões distintas no Universo que nunca estiveram causalmente conectadas. Para ser mais preciso, observa-se o chamado *horizonte de partículas* que representa a distância máxima que a luz pode ter viajado desde o início do Universo em $t = 0$:

$$D_h(t) = a(t)\chi = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} \quad (2.35)$$

e com isso pode-se formular o problema notando que nas eras da matéria e da radiação, $a(t) \propto t^{2/3}$ e $\propto t^{1/2}$ respectivamente, enquanto $D_h(t) \propto t$. Assim as distâncias físicas no Universo crescem menos rapidamente que o horizonte de partículas, e com o tempo as regiões causalmente conectadas ficam cada vez menores em relação ao tamanho do Universo observável. Isso contradiz o princípio cosmológico e a RCF, que apresenta a mesma temperatura em todos os pontos do céu, ainda que esses pontos não estivessem em contato causal na época que a radiação passou a se propagar livremente no espaço.

A teoria de Inflação cósmica resolve todos esses problemas. Por exemplo a expansão exponencial do espaço faz com que qualquer partícula que existia antes da Inflação se torna tão diluída no Universo que sua detecção é quase impossível. O problema da

planeza também é resolvido pois durante a Inflação $\ddot{a} > 0$ e assim $a^2 H^2 = \dot{a}^2$ sempre aumenta e $\Omega - 1$ se torna arbitrariamente próximo de 0 dependendo do tamanho da era da Inflação. Por último o problema do horizonte deixa de existir pois durante a Inflação as distâncias físicas crescem muito mais rapidamente do que o horizonte, e assim uma pequena região causalmente conectada é expandida para um tamanho muito maior do que o do Universo visível. E sendo tão bem sucedida em explicar as lacunas do modelo padrão, a Inflação ainda dá a resposta para outro enigma, uma consequência do problema do horizonte que diz respeito às origens das flutuações de densidade em larga escala no Universo, que são explicadas com naturalidade, originando-se de flutuações quânticas do vácuo que são amplificadas pela Inflação e são a origem das estruturas observadas hoje.

A partir da Inflação no entanto, a expansão continua e temperatura cai a um ponto em que a descrição do Universo passa a ser um cada vez menos especulativa. O reaquecimento inicia a era dominada pela radiação, onde todo o cosmos é descrito por um fluido relativístico ($\omega = 1/3$) em equilíbrio térmico devido as altas temperaturas e pressões que alimentam todo tipo de reações entre partículas. Com a expansão, a temperatura cai, e as reações ficam mais raras, até que passam a ser energeticamente desfavoráveis e cessam, tirando as partículas da reação em questão do equilíbrio com o resto do plasma cósmico, num processo chamado *congelamento*.

Assim acredita-se que até 10^{-12} s após o Big Bang a interação eletrofraca ainda seja dominante e entre $10^{-12} < t < 10^{-6}$ s, as interações eletromagnética e a nuclear fraca se separam e as 4 interações fundamentais tomam a forma atual, porém as energias ainda são altas o suficiente para impedir o confinamento dos quarks para formar os hádrons. Após isso entre $10^{-6} < t < 1$ os primeiros hádrons, incluindo os bárions, se formam e ao final desse período as interações fracas que mantêm os prótons e nêutrons em equilíbrio cessam (o que congela a razão entre o número de prótons e nêutrons), e ocorre o *desacoplamento dos neutrinos*, que passam a propagar-se livremente pelo espaço, formando uma radiação análoga à RCF, mas cuja detecção ainda não é tecnologicamente possível. Logo após isso entre 1 e 10 segundos o Universo é dominado pela energia dos pares de léptons e anti-léptons que ao final desse período se aniquilam, deixando apenas um resíduo de léptons e aumentando a temperatura dos fótons.

A partir dos primeiros 3 minutos, a temperatura abaixa o suficiente para permitir que os prótons e nêutrons se combinem e formem os primeiros nuclídeos. Na década de 40, Gamow, Alpher e Hermann descreveram esse processo, a *nucleossíntese primordial*, e de quebra também previram a existência de uma RCF que se propagaria livremente no

espaço a partir do momento que a energia dos fótons fosse suficientemente baixa para permitir a ligação dos elétrons livres aos núclídeos existentes, cessando sua interação com a radiação, na chamada *recombinação*. Quase vinte anos depois em 1964 A. Penzias e R. Wilson acidentalmente detectaram a RCF fazendo testes com uma antena de micro-ondas e confirmaram essa previsão.

A nucleossíntese primordial baseia-se na descrição do comportamento das partículas pela equação de Boltzmann, que descreve uma reação do tipo $1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4$ [18]:

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^0 n_2^0 \langle \sigma v \rangle \left\{ \frac{n_3 n_4}{n_3^0 n_4^0} - \frac{n_1 n_2}{n_1^0 n_2^0} \right\} \quad (2.36)$$

onde n_i é a densidade numérica final da partícula i e n_i^0 é a sua densidade numérica inicial, e $\langle \sigma v \rangle$ é a secção de choque da reação. Essa é a equação que determina a evolução das abundâncias dos reagentes, e sendo o do lado esquerdo da equação da ordem de $\approx n_1/t \approx n_1 H$, com a taxa de reação dada por $n_2 \langle \sigma v \rangle$, a afirmação de que uma reação ocorre em equilíbrio térmico durante a expansão é traduzida no fato de que a taxa de reação é muito maior do que a taxa de expansão, que ocorre no limite em que

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^0 n_4^0} = \frac{n_1 n_2}{n_1^0 n_2^0} \quad (2.37)$$

e com isso pode-se entender algumas características da nucleossíntese. Por exemplo considerando a produção de deutério (D) em equilíbrio, $p + n \leftrightarrow D + \gamma$, com $n_\gamma = n_\gamma^0$, $n_p \approx n_n \approx n_b$ que é a densidade de bárions, pode aproximar a equação acima:

$$\frac{n_D}{n_b} \approx \eta_b \left(\frac{T}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T} \quad (2.38)$$

onde m_p é a massa do próton e $B_D = 2,22$ MeV é a energia de ligação do deutério, e η_b é a razão entre o número de bárions e fótons, que é fixada pelas observações em $\approx 10^{-10}$ [19]. Assim como consequência dos valores extremamente baixos de η_b e B_D , a produção de elementos no Universo não acontece até que a temperatura seja baixa o suficiente para o D comece a se acumular, numa situação que é conhecida como o *gargalo do deutério*. Esse nome se justifica pois como a energia de ligação dos núcleos de ${}^4\text{He}$ é muito maior, assim que o D se acumula, as reações $D + D \rightarrow n + {}^3\text{He}$ e ${}^3\text{He} + D \rightarrow p + {}^4\text{He}$ consomem praticamente todo o deutério. Assim o que determina a abundância final dos elementos é a abundância relativa de nêutrons na época da nucleossíntese ($T_{nuc} \approx 0,07$ MeV), que é calculado em $X_n(T_{nuc}) = n_n/(n_n + n_p) \approx 0,11$. E sabendo que praticamente todos os nêutrons se acumulam no ${}^4\text{He}$, que possui 2 nêutrons, a fração da massa total no ${}^4\text{He}$ de acordo com essa aproximação crua seria $X_{{}^4\text{He}} \approx 0,22$. Já um cálculo mais detalhado

prevê uma abundância relativa de massa de $\approx 75\%$ de H, $\approx 25\%$ de He, $\approx 0,01\%$ de D, e traços da ordem de $10^{-4}\%$ de Li e Be, com todos os outros elementos químicos tendo sido produzidos no interior de estrelas e em explosões de supernovae (Cap. 3), resultado que tem grande concordância com as observações astronômicas em geral.

Esses mesmo princípios aplicados ao estudo da recombinação prevêm a existência de um gargalo similar ao anterior, que faz com que essa só ocorra após a temperatura estar bem abaixo ($T_{rec} \approx 0,1$ eV) da energia de ligação do H ($\epsilon = 13,6$ eV), no redshift $z_{rec} \approx 1100$, o que é confirmado pelas observações da RCF. Como nessa época a radiação estava em equilíbrio com o resto do plasma, seu espectro era o de um corpo negro, cuja forma foi mantida até hoje a não ser pelo redshift cosmológico. Como $\rho \propto a^{-4} \propto T^4$, pela lei de Stefan-Boltzmann, sua temperatura é $T = T_0/a(t)$. A observação do espectro da RCF em sua homogeneidade e alto grau de isotropia (flutuações de apenas 10^{-5} K em torno de $T_0 = 2,73$ K), em meados da década de 90, iniciou uma época de precisão na Cosmologia, confirmando muitas previsões das teorias do Big Bang e da Inflação cósmica. Desde então a determinação dos parâmetros cosmológicos, como Ω_0 e H_0 , levou ao estabelecimento de um enigmático modelo cosmológico de concordância.

2.3 O Modelo de Concordância

Os últimos 20 anos trouxeram um avanço tão grande para a Cosmologia, que atualmente acredita-se que 95% de toda a energia existente no Universo é composta de substâncias que nunca foram detectadas diretamente em laboratório. Dada a grandiosidade desse desafio a única opção é cruzar os dados das várias observações e experimentos disponíveis. Esta seção discutirá como este processo de coleta e interpretação de dados levou à construção do chamado modelo de concordância Λ CDM.

2.3.1 A Matéria Escura

O termo *matéria escura* foi cunhado por Zwicky ainda na década de 30, quando ao estudar o movimento individual das galáxias no aglomerado de Coma percebeu que esse só poderia ser explicado pela presença de quantidade muito maior de matéria do que aquela visível. Décadas depois, essa técnica foi a 1ª a indicar o fato de que essa matéria, que interage apenas gravitacionalmente, constitui na verdade a maior parte da matéria no Universo. Ela é detectada pelos efeitos dinâmicos da sua presença em sistemas gravitacionalmente ligados, como aglomerados de galáxias e o interior de galáxias individuais. Nessas últimas isso é feito no estudo das curvas de rotação, onde mede-se a velocidade

de rotação das estrelas e da matéria luminosa visíveis no ótico, e também a do gás intra-galáctico visível na frequência de micro-ondas de 21 cm¹², que se estende até muito além do disco luminoso [20, 21]. Segundo a lei de Kepler

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} \quad (2.39)$$

o gás e as estrelas da galáxia teriam $v \propto r^{-1/2}$ a partir de uma certa distância do centro galáctico onde $M \approx$ constante (figura 2, a linha disk). Porém em muitos casos o que é observado é aproximadamente um platô, correspondente a $v(r)$ constante, ou seja $M(r) \approx r$, e isso estende o tamanho das galáxias muito além (até quase 10 vezes) da região ocupada pela matéria visível, naquilo que é chamado de *halo de matéria escura*, uma estrutura que numa galáxia típica chega a ter ≈ 30 vezes mais massa do que a matéria bariônica, embora em galáxias elípticas ou anãs, esse número chegue a centenas de vezes.

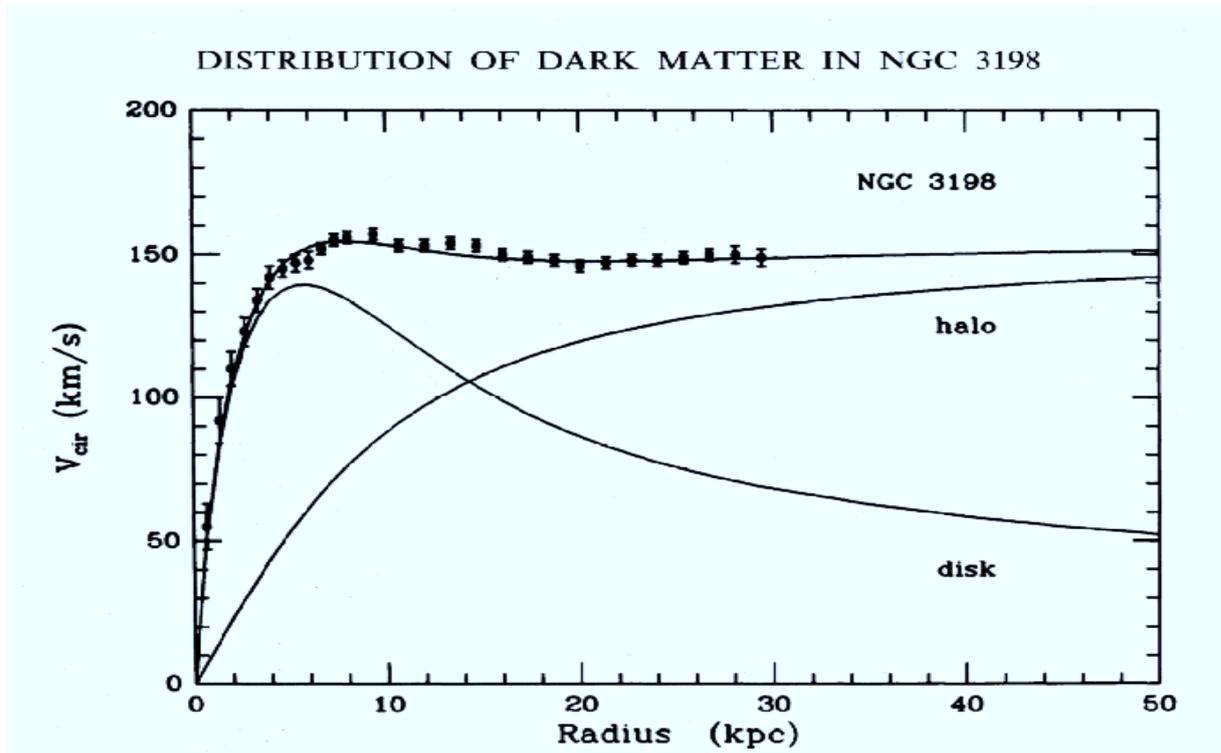


Figura 2: Curva de rotação típica (<http://bustard.phys.nd.edu/Phys171/lectures/dm.html>)

Uma variação dessa técnica é medir a distribuição de velocidades de galáxias individuais dentro de aglomerados, que se relaciona com a sua massa total pelo teorema do virial $\langle K \rangle + \frac{\langle U \rangle}{2} = 0$, onde $\langle K \rangle$ é a energia cinética média das galáxias e $\langle U \rangle$ sua energia potencial gravitacional. Esse tipo de análise revela que assim como no caso das galáxias individuais, mais de 80% de sua massa é constituída de matéria escura. Porém nesse caso detecta-se uma substancial quantidade de matéria invisível no espectro óptico, que é gás

¹²Radiação correspondente à transição de estados de spin do átomo de hidrogênio neutro.

quente visível na faixa de raios X. Outro tipo de detecção indireta da presença da matéria escura faz o uso das técnicas de *lentes gravitacionais*¹³, que juntamente com as técnicas acima têm sido usadas para estudar o comportamento da matéria escura em várias escalas astrofísicas. Em geral esses estudos revelam que a maior parte dessa matéria deve ser não-bariônica[22], pois todos os testes feitos até hoje para detectar as diversas formas de matéria escura bariônica concluem[23] que algo em torno de 50% de toda matéria bariônica deva ser escura, sob a forma de gás frio, estrelas anãs marrons (Júpiteres), buracos negros e outros, o que é claramente insuficiente para explicar os efeitos observados.

Ao reescrever a equação de Friedmann 2.20 de uma forma independente do modelo (assumindo apenas que as componentes não troquem energia entre si)

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ (1 - \Omega_0) \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \sum_i \Omega_i \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+\omega_i)} \right\} \quad (2.40)$$

pode-se chegar a expressão para o modelo Λ CDM, com as definições dos parâmetros de densidade de cada uma das componentes, $\Omega_i = \rho_i(t_0)/\rho_c(t_0)$:

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_r = \frac{8\pi G\rho_r(t_0)}{3H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k = \frac{-kc^2}{a_0^2 H_0^2} = 1 - \Omega_0 \quad (2.41)$$

que tem como consequência, hoje, em $t_0 \rightarrow a(t_0) = 1$:

$$1 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = \Omega_0 + \Omega_k \quad (2.42)$$

onde aqui ignora-se a radiação, uma vez que $\Omega_r = \rho_r/\rho_c \approx 10^{-5}$.

Acredita-se que a matéria escura tenha o mesmo comportamento da bariônica nas escalas cosmológicas, assim $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_e$, onde Ω_b é a componente bariônica e Ω_e é a componente escura não-bariônica. Todos os testes observacionais verificam a abundância de Ω_e sobre Ω_b . Por exemplo, a teoria da nucleossíntese primordial e as observações de abundâncias de elementos químicos só concordam entre si[18, 19] se o razão bárion/fóton estiver dentro do intervalo $\eta = (6, 2 \pm 0, 6) \times 10^{-10}$, e a densidade de bárions estimada a partir disso dá $\Omega_b \approx 0,045 \pm 0,004$. Por outro lado, testes feitos com emissões de raio-X de gás quente em aglomerados e lentes gravitacionais concordam que $0,2 < \Omega_m < 0,4$. Porém, a evidência definitiva da natureza não-bariônica da maior fração da matéria escura está nas anisotropias da RCF e na estrutura em larga escala do Universo, onde observam-se os efeitos das diferentes componentes do Universo. A análise das anisotropias da RCF é o teste mais rigoroso para um modelo cosmológico, visto que essa radiação funciona

¹³Uma consequência da teoria da RG já explorada por Einstein em 1907, que é o encurvamento da trajetória da luz na presença de campos gravitacionais.

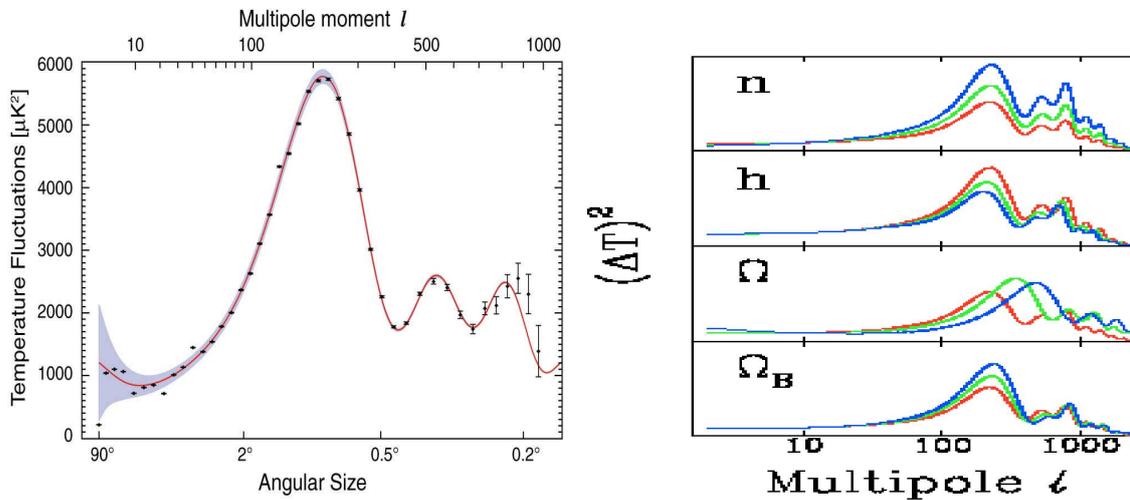
como uma impressão digital do Universo quando esse tinha algo em torno de $3,8 \times 10^5$ anos, onde vê-se o registro da influência dos estágios mais primordiais do Universo nas flutuações de temperatura (no que foi considerado um sucesso das teorias de Inflação) bem como a influência de cada componente de Ω na sua interação com os fótons.

A RCF é altamente isotrópica, com variações de $\delta T/T(\theta, \phi) \approx 10^{-5}$, depois de removida uma contribuição de 10^{-3} interpretada como um efeito Doppler em consequência do movimento do Grupo Local de galáxias em relação ao referencial de repouso da radiação (o referencial comóvel com a expansão do Universo), correspondente ao dipolo da expansão multipolar das anisotropias em função de sua posição no céu:

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.43)$$

onde Y_{lm} são os harmônicos esféricos e os a_{lm} coeficientes da expansão. Se essas flutuações forem aleatórias como previstas pela Inflação, elas terão uma distribuição gaussiana, $\langle |a_{lm}|^2 \rangle = C_l$ (onde $\langle \dots \rangle$ é uma média em todas as direções), obedecendo

$$\left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \quad (2.44)$$



(a) <http://map.gsfc.nasa.gov/>

(b) <http://astro.berkeley.edu/mwhite/rosetta/>

Figura 3: Espectro de potência angular observado e variações com parâmetros do Λ CDM

Cada momento l está relacionado a uma escala angular por $\theta \approx 180^\circ/l$ e assim o gráfico do *espectro de potência angular* $\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$ em função de l contém toda a informação acerca dos vários processos físicos que afetam as flutuações de temperatura nas diferentes escalas angulares. A forma e a posição dos picos do espectro dependem dos vários parâmetros do modelo em questão (figura 3), e a comparação com o espectro observado permite a determinação de vários parâmetros cosmológicos. A análise mais recente com os dados do

satélite WMAP[16, 17] confirma o paradigma do modelo Λ CDM: a de um Universo com densidade muito próxima da crítica ($\Omega_k = -0,080$) com flutuações primordiais praticamente gaussianas, como previsto pela Inflação, e a presença marcante da matéria escura não-bariônica $\Omega_e = 0,222$ contra $\Omega_b = 0,045$ e $\Omega_m = 0,265$.

Por último a presença da matéria escura é necessária ao processo de formação da estrutura em larga escala do Universo tal como observada hoje. Na época da recombinação, os fótons, elétrons e bárions ainda estavam fortemente acoplados e em equilíbrio, apesar de nessa época a densidade de energia da matéria já ser dominante sobre Ω . Por outro lado sabe-se da teoria de perturbações lineares das equações de Einstein, que num Universo plano e dominado por matéria[10] o crescimento das estruturas descrito pelo contraste de densidade $\delta = \delta\rho/\rho$ é tal que $\delta \propto t^{2/3} \propto a$. Como na recombinação $z_{rec} = 1100 \rightarrow a \approx 10^{-3}a_0$, e devido ao equilíbrio $\delta T/T \approx \delta\rho/\rho$, então para que hoje sejam observadas estruturas no regime não-linear de crescimento $\delta \geq 1$ seria necessário que $\delta \approx 10^{-3}$ na recombinação, em contradição ao valor observado $\approx 10^{-5}$ [19]. Assim as diferentes evidências observacionais apontam para a existência de uma matéria escura *não-bariônica, fria e sem colisões* (CDM - a sigla para Cold Dark Matter), para assim logo após o início da era da matéria em $z_m \approx 10^4$ essa se desacople do resto do plasma e comece a se acumular (diluir) sobre as flutuações de densidade primordiais geradas na Inflação, deixando assim sua impressão visível no espectro da RCF (com quem só interage gravitacionalmente, assim como com a matéria bariônica) e permitindo que após o fim da recombinação a matéria bariônica “caia” sobre esses poços de potencial gravitacional já formados, e com o tempo forme as estruturas observadas no Universo hoje.

Essa evidência também foi usada para restringir a quantidade de matéria escura *quente* existente no Universo, que tem o comportamento oposto da CDM: é composta de partículas com massa muito próxima de zero e com velocidades próximas a da luz, como os neutrinos, que teriam assim um efeito dissipativo sobre a formação das estruturas num Universo primordial. Assim hoje sabe-se que esse tipo de matéria escura deve corresponder a uma fração desprezível de Ω , juntamente com a contribuição da RCF, que juntos dão $\Omega_r = \Omega_\nu + \Omega_\gamma \approx 10^{-4}$ (hoje). O restante é distribuído entre a energia escura ($\Omega_X \approx 0,73$), a matéria bariônica $\Omega_b \approx 0,045$ e a CDM ($\Omega_c \approx 0,22$), que deve ser composta de alguma partícula[24] descrita por uma extensão do modelo padrão com massa suficiente para não atingir velocidades próximas a da luz, e que no Universo primordial tenha se desacoplado do plasma cósmico muito antes da recombinação.

Deve-se dizer ainda que no modelo Λ CDM a descrição das componentes escuras é

feita sob o paradigma da RG e do princípio cosmológico. Essa descrição poderia ser feita à luz de uma teoria gravitacional alternativa a RG (como as teorias Mond e Teves), o que não foi feito aqui. Em contrapartida testam-se neste trabalho modelos alternativos no que diz respeito a natureza da CDM e da energia escura.

2.3.2 A Energia Escura

Desde a década de 80 já era claro que a densidade de matéria bariônica no Universo é muito abaixo da densidade crítica sugerida pelos modelos inflacionários. Assim durante esse período foi sugerido que a matéria escura teria a densidade de energia suficiente, mas todas as observações feitas desde então sugerem o contrário. Com o advento de observações precisas ficou claro que para que o Universo obedecesse a condição $\Omega \approx 1$, a maior parte de sua energia deveria vir de outra componente desconhecida. Essa energia não se faz visível, nem mesmo indiretamente interagindo com a matéria, e assim parece estar homogeneamente distribuída por todo o Universo, sendo chamada de *energia escura*.

Desde então postula-se sobre a presença de uma constante cosmológica que seria a candidata natural para a energia escura e representaria a solução para as várias inconsistências encontradas[25] entre estimativas de parâmetros cosmológicos extraídos de diversas observações. Entre elas duas evidências são conclusivas a respeito dessa presença: a primeira consiste no cálculo da idade do Universo, no contexto da RG e do princípio cosmológico, tomando a distância comóvel χ como medida de tempo, que nesse caso seria a idade do Universo, quanto toma-se como instante inicial $t = 0$:

$$t_0 = \frac{\chi_0}{c} = \int_0^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{a_0} \frac{da}{a^2 H} \quad (2.45)$$

onde usa-se $\frac{da}{dt} = aH$. Com a ajuda de 2.40 pode-se calcular a idade do Universo para um dado modelo e o problema é que, assumindo um Universo plano e dominado por matéria (o chamado modelo SCDM ou Einstein-De Sitter, onde $\Omega = \Omega_m = 1$, $\Omega_\Lambda = 0$) o cálculo acima resultaria em $t_0 = 2/3H_0$ que dá em torno de 9 bilhões de anos. Isso é uma grave contradição com as observações de estrelas em aglomerados globulares cujas idades estimadas giram em torno de 13 bilhões de anos, pois o Universo não poderia ser mais novo do que seus constituintes. No entanto a presença da energia escura resolve esse problema, tornando a idade do Universo compatível com o valor de $H_0 \approx 0,7$. Por exemplo no modelo Λ CDM com $w_\Lambda = -1$, e $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1 = \Omega_0$, a solução é

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} \left\{ \frac{1}{2\Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left(\frac{1 + \Omega_\Lambda^{1/2}}{1 - \Omega_\Lambda^{1/2}} \right) \right\} \quad (2.46)$$

que concorda com as ultimas estimativas feitas pelo WMAP, onde $\Omega_\Lambda = 0,73$ e $t_0 = 13,75 \pm 0,13$ bilhões de anos, em excelente concordância com outras estimativas.

No entanto a evidência definitiva veio no fim da década de 90 quando dois grupos independentemente [26, 27] utilizaram observações de supernovae tipo Ia como indicadores de distância para detectar a aceleração da expansão do Universo, que pode ser explicada ou pelo efeito anti-gravitacional associado a uma substância com pressão fortemente negativa (a energia escura), ou por uma falha da RG ou do princípio cosmológico nas escalas em questão. Juntamente com os outros testes observacionais esses dados foram usados desde então para estabelecer o modelo Λ CDM, no qual a energia escura é melhor representada pela constante cosmológica de Einstein, de densidade de energia constante, que acelera a expansão do Universo a medida que o preenche com o vácuo.

Ficará evidente ao longo deste trabalho que apesar de Λ ser a melhor alternativa frente aos dados observacionais, esses mesmos ainda suportam outras possibilidades para a energia escura. E essas devem ser exploradas até a exaustão, dado que do ponto de vista teórico o valor atualmente observado de Λ é extremamente abaixo do esperado, o que gera o chamado *problema da constante cosmológica*. Ele surge da interpretação mais contemporânea da constante cosmológica na década de 60, quando Zel'dovich mostrou que a soma das flutuações de energia dos estados fundamentais (ou de ponto zero) de todos os campos quânticos deve ser invariante sob transformações de Lorentz, e assim a sua única forma possível deve ser $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. Por outro lado ao incorporar Λ no lado direito de 2.17 sob a forma $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} \propto \Lambda g_{\mu\nu}$, fica evidente que a energia do vácuo quântico é equivalente a uma constante cosmológica, com densidade de energia $\rho = \rho_\Lambda \propto \Lambda$.

Apesar dessa identificação, a verdadeira natureza de Λ permanece desconhecida e sabe-se de 3 possíveis origens que podem contribuir para o seu valor atual[28]. A primeira é de origem puramente gravitacional, no lado esquerdo da equação de Einstein (como na 2.17), que caracteriza a interação gravitacional por duas constantes: G , e essa contribuição Λ_0 cujo valor é em princípio livre e deveria ser determinado por experimentos. A segunda possibilidade é a origem do mistério, que são as contribuições das flutuações de vácuo dos diversos campos quânticos. Formalmente, a densidade de energia do estado fundamental de um campo de massa m e momentum $\hbar k$ seria infinita:

$$\rho \propto \int_0^\infty \sqrt{m^2 + k^2} k^2 dk \propto k^4 \quad (2.47)$$

a não ser que se escolha como limite superior uma escala de energia a partir da qual a Teoria Quântica de Campos e a expressão acima não são mais válidas. Por exemplo

assumindo sua validade até a escala de Planck, o valor teórico para a densidade de energia seria $\rho_\Lambda \approx 10^{91} \text{ g/cm}^3$, que comparado com a densidade calculada a partir das observações $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$, dá uma dimensão da gravidade do problema na sua diferença de 120 casas decimais. Espera-se que essas contribuições de vácuo têm origem nas transições de fase no Universo primordial, quando a quebra espontânea de simetria leva os campos a seus estados de mais baixa energia e as interações fundamentais tomam a forma atual. Assim no contexto das teorias físicas atualmente conhecidas esse problema pode ser apenas aliviado notando que as transições de fase subsequentes do Universo ocorreram em energias menores. Por exemplo tomando como limite a escala da cromodinâmica quântica, a diferença entre o calculado e o observado ainda seria cerca de 40 ordens de magnitude.

Dada a gravidade do problema uma possibilidade considerada é uma terceira contribuição, dada pela existência de uma energia escura dinâmica que representaria um campo ou interação de origem desconhecida ou a ser testada. Neste sentido as possibilidades teóricas são tantas que não podem ser todas descritas aqui. Por exemplo uma classe bem explorada de modelos que não são abordados nesta dissertação são aqueles chamados de *quintessência* (e seus derivados), nos quais um campo escalar com equação de estado variável se comporta de forma similar a constante cosmológica no Universo recente, podendo assim ser a descrição correta do Universo. Ainda que esse tipo de modelo alivie o problema citado já que Λ passa a ser variável, eles se mostram incapazes de lidar com as outras faces desse mesmo problema, que são chamados as vezes de *problema do ajuste fino* e da *coincidência cósmica*. Esses se originam na dificuldade de se descrever os mecanismos físicos que teriam feito com que todas as contribuições já citadas se somassem de maneira que Λ tivesse exatamente o seu valor atual, o mesmo valor que é suficientemente pequeno para que as densidades de energia Ω_Λ e Ω_m se tornassem da mesma ordem de grandeza apenas no Universo recente, $z < 1$. Recentemente outros tipos de modelos dinâmicos tem sido considerados na literatura, baseados em outros campos escalares ou em contribuições de diversas áreas da física teórica[29] como as teorias de cordas, o princípio holográfico e outros. Neste trabalho uma classe específica de modelos foi selecionada para comparação com o Λ CDM, que descrevem possíveis interações entre o conteúdo escuro do Universo, ainda que de maneiras diferentes (Cap. 5).

Devido a grande variedade de modelos e a natureza ainda desconhecida das componentes escuras do Universo, os testes observacionais têm se tornado cada vez mais importantes a medida que a era da precisão na Cosmologia avança. Atualmente as observações de supernovae tipo Ia são um dos principais testes para a discriminação de modelos e a determinação de parâmetros cosmológicos, juntamente com o teste da RCF e da estrutura

em larga escala no Universo. A razão para isso é que medindo a distância a esses astros ao longo de grande parte da história do Universo (tipicamente aos primeiros 10 bilhões de anos, $z \approx 2$) é possível reconstruir a expansão e assim estudar a natureza das componentes do Universo. Como dito anteriormente a luz recebida desses objetos foi emitida num passado distante e assim não se pode observar diretamente sua distância física mas ao invés disso os seus efeitos indiretos. Nesse caso observa-se a *distância luminosa* d_L que é a distância associada ao fluxo luminoso recebido do objeto

$$d_L = \sqrt{\frac{L_e}{4\pi F}} \quad (2.48)$$

dada pela relação clássica entre a intensidade luminosa intrínseca de uma fonte (L_e) e o fluxo luminoso observado (F) a uma distância (d_L). Para compará-la com a distância comóvel χ , que é a distância cosmológica fundamental, deve-se reescrever a relação anterior definindo o fluxo luminoso com a luminosidade observada hoje (L_0) atravessando uma casca “esférica” de área comóvel $4\pi a_0^2 f_k^2(r')$. O fator $f_k(r') = r$ vem da reparametrização da métrica FLRW 2.18, $dr' = dr/\sqrt{1 - kr^2}$, que define a coordenada radial comóvel r' e absorve o efeito da curvatura nas coordenadas angulares θ, ϕ :

$$ds^2 = -(cdt)^2 + a^2(t) [dr'^2 + f_k^2(r') (d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2)] \quad (2.49)$$

justificando a definição de área dada, e assim

$$F = \frac{L_0}{4\pi a_0^2 r^2} \quad (2.50)$$

e para completar a comparação é necessária então a relação entre as luminosidades intrínseca L_e e observada L_0 . E é aqui que calcula-se o efeito da expansão cósmica, pois sabe-se que $L = \frac{\delta E}{\delta t}$ e assim

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{\delta E_e}{\delta E_0} \rightarrow L_e = L_0(1 + z)^2 \quad (2.51)$$

e com as equações anteriores tem-se $d_L = a_0(1 + z)r$, que juntamente com a 2.24 dá

$$d_L = a_0(1 + z) \times \begin{cases} \text{sen}(\chi), & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \text{senh}(\chi), & k = -1 \end{cases}, \text{ onde } \chi = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (2.52)$$

o que mostra como a construção do diagrama de d_L versus z é equivalente a observação de um registro da história da expansão do Universo e o efeito que cada uma de suas componentes têm sobre $H(z)$, que é especificado pelo modelo cosmológico.

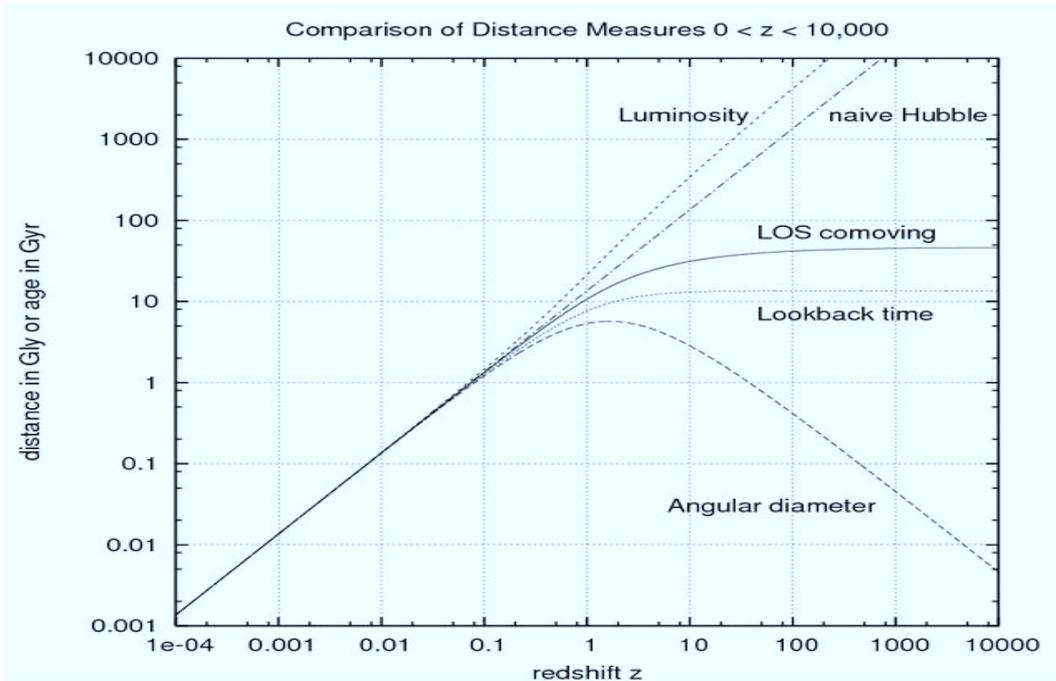


Figura 4: [http : //en.wikipedia.org/wiki/Distance_measures_\(cosmology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Distance_measures_(cosmology))

A distância luminosa é uma entre as várias medidas de distância usadas na Cosmologia, nesse caso para estudar objetos cuja luminosidade absoluta é conhecida, as *velas-padrão* como é o caso das supernovae. Outras medidas de distância além das já expostas também são usadas nos contextos apropriados (figura 4), e todas elas convergem para a distância própria no limite $z \rightarrow 0$. Por exemplo a chamada *distância de diâmetro angular* é a distância calculada a partir do ângulo subtendido por uma fonte luminosa no céu, de forma que se esse ângulo é pequeno têm-se a conhecida relação $d_A = l/\theta$, onde l é tamanho físico do objeto. Sua relação com a distância comóvel χ é obtida notando que no Universo em expansão o comprimento físico da fonte será observado como $l = a(t)r\theta = a_0r\theta/(1+z)$ e assim têm-se

$$d_A = ar = \frac{a_0}{1+z} \times \begin{cases} \text{sen}(\chi), & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \text{senh}(\chi), & k = -1 \end{cases}, \text{ onde } \chi = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (2.53)$$

donde vê-se que $d_L/d_A = (1+z)^2$.

Essa medida de distância é apropriada apenas para a observação de objetos cujo tamanho físico é conhecido, as chamadas *réguas-padrão*. Recentemente outra classe de observações cosmológicas tem sido feitas com base nessa propriedade: as *oscilações acústicas de bárions* (BAO em inglês) que são as ondas sonoras que se propagavam no plasma do Universo anterior a recombinação, originadas no balanço entre a tendência da matéria se

acumular nas flutuações de densidade e a pressão de radiação dos fótons que a arrastava para fora dessas regiões. Pode-se observar essas ondas de compressão no espectro da RCF e associá-las a um diâmetro angular próprio e uma distância comóvel que é o chamado *horizonte sonoro comóvel*, que corresponde a distância máxima que essas ondas poderiam ter se propagado desde o Big Bang. Logo após a recombinação a matéria livre passa a cair nessas flutuações de densidade e com o tempo formam-se as estruturas observadas hoje. Assim ao analisar a posição e o redshift de dezenas de milhares de galáxias, o programa *Sloan Digital Sky Survey* SDSS conseguiu [30, 31] detectar estatisticamente a presença de uma escala de comprimento preferencial na aglomeração de galáxias que corresponde justamente a esse horizonte sonoro. Essa técnica representa uma maneira independente de obter $H(z)$ e tem sido muito discutida na literatura recente devido a seu potencial para o futuro próximo. Assim esses dados são usados na literatura como meio de complementação dos resultados obtidos com as supernovae, da mesma maneira que os outros testes observacionais, como o da determinação de $H(z)$ através do cálculo da variação da idade relativa de galáxias com evolução passiva [32], entre outros.

Para encerrar este capítulo deve-se lembrar porque o modelo Λ CDM é o melhor candidato: ele é ao mesmo tempo o modelo mais simples e o que consegue explicar a grande maioria das observações. Porém isso não alivia os problemas associados a natureza desconhecida da energia e da matéria escura. Recentemente o paradigma da Λ CDM tem sido desafiado por algumas evidências que apontam inconsistências com suas previsões [33] como o baixo número de galáxias anãs e irregulares observadas e os desvios na distribuição de matéria escura no centro das galáxias [21]. Assim os mesmos testes cosmológicos que na última década o estabeleceram como melhor modelo poderão ser usados na próxima década, a medida que a precisão das observações aumente, para apontar falhas no paradigma da constante cosmológica e da matéria escura fria e eventualmente substituí-las ou modificá-las. E as observações de supernovae tipo Ia que são descritas a seguir certamente terão um papel central nesse processo.

3 Supernovae Tipo Ia

Devido a sua natureza extraordinária e incomum (estima-se cerca de uma a cada 50 anos em uma galáxia como a Via-Láctea), as supernovae (SN) impressionaram astrônomos por todo o mundo desde a antiguidade. Mas foi somente no séc. XX que a sua natureza foi compreendida e desde o nascimento da Cosmologia as supernovae tem sido motivo de debate e estudo, impulsionando seus maiores avanços em dois momentos distintos e cruciais: no início do século na construção do modelo padrão, e no seu fim quando foram usadas pra detectar a aceleração da expansão do Universo.

Este capítulo é uma revisão dos aspectos mais relevantes ao uso das observações de supernovae do tipo Ia (SNIa) na Cosmologia, começando por uma breve retrospectiva das observações modernas, do sistema de magnitudes usado na astronomia, da classificação dos tipos de SN e dos modelos físicos que os suportam. Em seguida abordam-se os aspectos astrofísicos que tornam a SNIa a melhor candidata a vela padrão, bem como os diversos efeitos que por outro lado afetam a qualidade das observações e que precisam ser estimados e calibrados para a sua utilização como indicadores de distância. Por último mostra-se como as diferentes amostras de dados coletados, ainda que fizessem uso de métodos de calibrações diferentes, todas detectaram de maneira consistente a aceleração do Universo.

3.1 Introdução

3.1.1 Supernovae na Astronomia

As supernovae têm sido observadas desde a antiguidade (o primeiro registro, por astrônomos chineses, data do ano de 185 d.C.), devido a seu intenso brilho que por vezes permitia a sua observação mesmo durante o dia, como foram os casos das supernovae dos anos de 1006 e 1054 observadas por todo o mundo, cujo brilho era comparável ao de uma Lua cheia. Já na idade moderna, foram usadas pela primeira vez como estímulo ao desenvolvimento da astronomia, quando as observações de 1572 por Brahe e de 1604 por Kepler foram usadas para argumentar contra a visão aristotélica, no qual todo Universo além da Lua era perfeito e imutável. Brahe criou então o termo *stella nova* (estrela nova) para descrever suas observações, e essa é a origem do termo *nova* usado até hoje para designar um outro tipo de explosão estelar, muito menos brilhante e muito mais comum (estima-se entre 30 a 60 vezes por ano numa galáxia como a Via-Láctea).

Séculos mais tarde as SN voltaram ao foco das atenções. Em 1920 ocorreu uma famosa discussão, o chamado Grande Debate ou o debate de Shapley-Curtis, sobre as dimensões do Universo observável, onde Shapley defendia sua posição (ainda aceita na época) de que

a nossa galáxia seria todo o Universo observável, enquanto Curtis expunha os argumentos e observações a favor da teoria dos Universos-ilha ou galáxias. E as observações de SN foram usadas por ambos: o primeiro argumentou que na falta de um mecanismo físico que explicasse a luminosidade absurda desses astros (como a supernova ocorrida em 1885 na galáxia de Andrômeda, que a ofuscou), eles deveriam estar dentro de nossa própria galáxia, sendo similares a outras novae observadas. Curtis por outro lado argumentou que várias outras novae já haviam sido observadas em Andrômeda, assim não haveria motivo para supor que essa fosse apenas uma pequena região distante na Via-Láctea, que produzisse tantas novae quanto todo o resto da galáxia. Além disso notando a enorme luminosidade necessária para explicar a SN de 1885, Curtis sugeriu que uma divisão entre duas classes distintas de fenômenos seria possível [34].

Em poucos anos Hubble provou a natureza extra galáctica das nebulosas e em 1934 Zwicky e Baade mostraram que a sugestão de Curtis era real e que há outro tipo de explosão estelar, a qual Zwicky cunhou de supernova, cuja luminosidade é milhares de vezes maior do que a das novae. Ao longo das décadas seguintes as observações se acumularam e paralelamente a construção dos primeiros modelos físicos para as explosões, também percebeu-se a futura utilidade das SN: em baixo z seu diagrama de Hubble (distância versus z) seria usado para a determinação da constante H_0 através de uma calibração com outra medida de distância ou luminosidade. De fato essa é a técnica (não abordada aqui) aplicada até hoje com observações de SNIa em galáxias que também apresentam estrelas variáveis Cefeidas [13]. Por outro lado a construção do diagrama de Hubble em alto z que é a técnica estudada neste trabalho, permite a determinação das correções ao regime linear do redshift cosmológico 2.31, e dos parâmetros que o afetam como o de desaceleração q_0 . Finalmente, na década de 80 surgiu a classificação moderna das SN, com a separação de seus subtipos e descrição detalhada dos modelos que os suportam.

Assim na década de 1990 beneficiando-se dessa experiência e da tecnologia das câmeras com chips CCD¹, os astrônomos conseguiram finalmente reduzir as incertezas na magnitudes absolutas das SNIa a ponto de começar a usá-las como indicadoras de distância. Devido a sua enorme luminosidade as SNIa estão agora no topo da chamada *escada de distância cósmica* visualizada na figura 5, que reúne os diferentes métodos de observação direta e indireta da Astrofísica para medir distâncias astronômicas. E esta é a importância das SNIa para a Cosmologia, o fato de que com elas pode-se inferir com razoável precisão distâncias que estão na escala cosmológica.

¹ *Charge-Coupled Devices*, ou dispositivos de carga acoplada, que movem e armazenam cargas elétricas com enorme eficiência e precisão, gerando sistemas de detecção muito mais sensíveis.

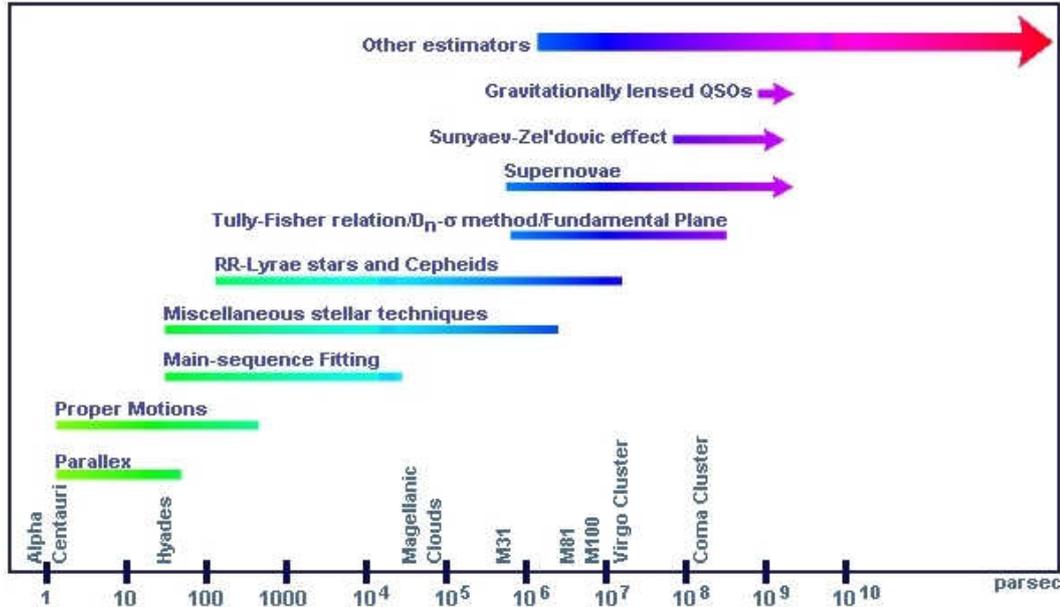


Figura 5: <http://www.astro.columbia.edu/~archung/labs/spring2002/lab06.html>

A escala de luminosidade usada na astronomia não é trivial e também tem suas raízes na história antiga, no *Almagesto* de Ptolomeu, de ≈ 140 d.C. Essa obra foi uma compilação do conhecimento matemático e astronômico da época, e continha entre outras coisas (como a sua teoria geocêntrica dos epiciclos) um catálogo de observações. Nele, sob a influência do trabalho de Hiparco, outro astrônomo grego de séculos antes, Ptolomeu dividiu as estrelas em seis ordens de “grandeza” ou magnitude, sendo as de 1^a magnitude as cerca de 20 estrelas mais brilhantes (visíveis logo após o pôr-do-sol), e as de 6^a magnitude as estrelas menos brilhantes, no limite do visível. E devido ao impacto dessa obra na astronomia esse sistema de magnitudes persistiu até a era moderna.

Porém esse sistema era impreciso pois dependia da avaliação visual de cada observador, e devido a isso em 1856 o astrônomo Pogson definiu uma escala quantitativa de magnitude, adaptada a essa escala tradicional. Utilizando o recém inventado fotômetro ele mediu o fluxo luminoso (F) de algumas estrelas e observou que uma estrela de magnitude 1 tinha uma luminosidade aproximadamente 100 vezes maior do que uma de magnitude 6. Assim propôs uma escala em que essa diferença seria seguida *exatamente*, que não por acaso², é uma escala logarítmica:

$$m_1 - m_2 = K \log \frac{F_1}{F_2} \quad (3.1)$$

e pela observação de Pogson, $1 - 6 = K \log 100$ que dá $K = -2,5$ ao escolher o logaritmo de base 10. Assim pode-se definir a *magnitude aparente* de um astro, ao escolher um

²Nessa mesma época foi descoberta a lei de Fechner-Weber, que afirma que a sensibilidade dos órgãos sensoriais humanos varia com o logaritmo do estímulo físico.

ponto de referência para a escala:

$$m = -2,5 \log F + c \quad (3.2)$$

onde $c = 2,5 \log F_0$ define o zero da escala. Essa escala foi rapidamente aceita por se adaptar à anterior e é a utilizada até hoje. Para tal a estrela Vega foi escolhida como zero (mas atualmente o zero é definido instrumentalmente e a magnitude de Vega é $\approx 0,03$) e assim qualquer astro mais brilhante que ela tem $m < 0$, e por outro lado qualquer astro invisível ao olho nu tem $m > 6$. Alguns exemplos são o Sol ($m = -26,7$), a Lua cheia ($m = -12,6$), Sírius (a estrela mais brilhante $m = -1,5$) e Netuno ($m = 7,8$).

A escala de magnitude aparente m não diz nada sobre a distância de um astro, que pode ser visivelmente mais brilhante, apenas por estar mais perto da Terra do que outros. Esta é a função da *magnitude absoluta* (M), definida como a magnitude aparente do objeto, se esse estivesse a uma distância de 10 parsecs:

$$M = -2,5 \log [F(10 \text{ pc})] + c \quad (3.3)$$

e assim com essa medida de magnitude tem-se uma maneira prática de comparar as luminosidades reais dos astros. Por exemplo o Sol é a estrela mais próxima da Terra e aparenta ser muito mais brilhante ($m = -27,6$), porém sua magnitude absoluta é apenas $M = 4,72$ sendo bem menos luminoso do que Syrius, com $m = -1,5$ e $M = 1,4$. Por sua vez a magnitude absoluta típica de uma SNIa é $M \approx -19,3 \pm 0,3$, rivalizando com o da Via-Láctea, calculada em $M \approx -20,9$.

Na prática a magnitude absoluta depende da magnitude aparente e da distância ao astro em questão, que a determina. Para isso considera-se a diferença 3.1 entre as magnitudes absoluta e a magnitude aparente, onde $L \propto F \propto d_L^{-2}$:

$$M - m = -2,5 \log \left(\frac{F(10 \text{ pc})}{F(d_L)} \right) = -2,5 \log \frac{d_L^2}{10^2} \longrightarrow M = m - 5 (\log d_L - 1) \quad (3.4)$$

com d_L em unidades de pc. Essa relação é a definição da grandeza fundamental que relaciona a distância com a luminosidade de um astro, que é o *módulo de distância*:

$$\mu = m - M = 5 \log \frac{d_L}{\text{Mpc}} + 25 \quad (3.5)$$

onde aqui usa-se a distância em unidades de Mpc, para as observações de supernovae.

Porém as observações astronômicas são feitas em diferentes faixas do espectro eletromagnético, e as magnitudes diferem em cada uma dessas faixas, devido as características

dos astros observados e também pela absorção e espalhamento da radiação pela atmosfera da Terra e a poeira interestelar. Dependendo do tipo de observação e equipamento, diferentes sistemas fotométricos são utilizados (atualmente mais de 200), baseados em diferentes bandas de frequência e conjuntos de estrelas usadas na calibração necessária para a conversão entre magnitude e fluxo em cada filtro, dada pelas relações acima.

O sistema mais tradicional é o conhecido como sistema de Johnson ou UBVRI, onde cada letra designa uma banda de frequência (ultravioleta, azul, visual, vermelho e infravermelho, respectivamente). Assim as magnitudes aparentes e absolutas têm que ser medidas e especificadas em cada um dos filtros do sistema fotométrico utilizado (todas magnitudes dadas acima estão no filtro V).

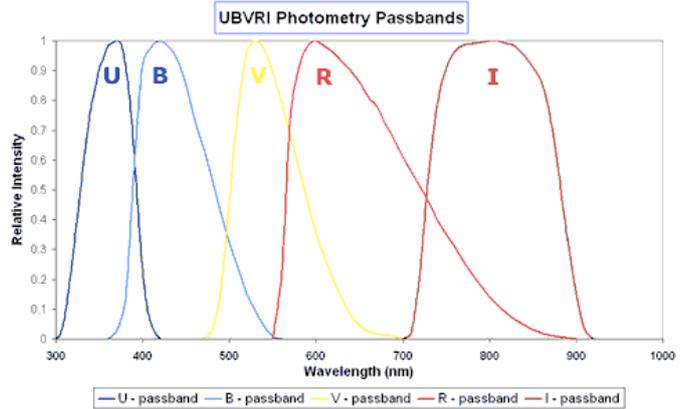


Figura 6: Bandas Fotométricas UBVRI

Na prática não há como observar a magnitude total (pela luminosidade total em todo espectro), ou *magnitude bolométrica* (m_{bol}) de um objeto, e assim pode-se apenas estimá-la levando em conta diversos fatores. Na notação comum onde as magnitudes aparentes são escritas como $m_V = V$, $m_B = B$, etc, a magnitude bolométrica é dada pela expressão $m_{bol} = V - CB$ onde CB é a *correção bolométrica* a ser estimada.

Por outro lado a fotometria em diferentes filtros é um recurso tradicional de investigação astrofísica[35]. Com os *índices de cor* definidos pela diferença entre as magnitudes aparentes como $U - B$, $B - V$ e etc, investiga-se o efeito de *avermelhamento* da luz devido à poeira interestelar, que absorve os comprimentos de onda na região azul. A magnitude absoluta na banda V é dada por

$$M_V = V_0 - 5(\log(d) - 1) \quad (3.6)$$

onde V_0 é a magnitude visual observada (já corrigida pela absorção atmosférica³), e para levar em conta os efeitos da extinção interestelar, escreve-se $V_0 = V - A_V$, onde A_V é a extinção em magnitudes na banda V , e assim

$$M_V = V - A_V - 5(\log(d) - 1) \quad (3.7)$$

e analogamente para outras bandas, com M_B , B , A_B e etc. Com isso, pode-se definir o

³A extinção atmosférica obviamente tem que ser levada em conta em qualquer observação feita a partir da Terra, e assim seus efeitos são muito bem conhecidos e descritos na literatura[35].

chamado *índice de cor intrínseco*, em função das luminosidades absolutas:

$$(B - V)_0 = M_B - M_V = B - V - E(B - V) \quad (3.8)$$

onde $E(B - V) = A_B - A_V$ é o chamado *excesso de cor*. Essa relação é independente da distância, quando considerada para cada astro individualmente, e assim é usada para medições de temperaturas estelares.

Para isolar o efeito da extinção interestelar é preciso observar os índices de cor relativos a várias bandas, de várias estrelas, e compará-los aos pares com estrelas de mesmas propriedades espectrais cuja absorção interestelar seja conhecida (sabendo sua distância e outras propriedades). Assim $M_{\lambda,r} = M_{\lambda,0}$, onde 0 denota a estrela de comparação, r a estrela observada e λ o comprimento de onda observado. Com isso uma reaplicação das equações acima a cada par leva a uma equação que ainda depende das distâncias, que podem ser eliminadas subtraindo as equações para dois comprimentos de onda distintos:

$$\Delta m_\lambda = m_{\lambda,r} - m_{\lambda,0} = 5 \log \frac{d_r}{d_0} + A_\lambda \longrightarrow \Delta m_{\lambda_1} - \Delta m_{\lambda_2} = E(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (3.9)$$

porém na prática a extinção é medida em relação ao excesso de cor em 2 bandas, e no sistema UBVRI são escolhidas as bandas B e V :

$$E_{normal}(\lambda, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{A_\lambda - A_{\lambda_2}}{A_{\lambda_1} - A_{\lambda_2}} \rightarrow \frac{E(\lambda - V)}{E(B - V)} = R_V \left(\frac{A_\lambda}{A_V} - 1 \right) \quad (3.10)$$

onde R_V é a chamada *razão entre as extinções total e seletiva*:

$$R_V = \frac{A_V}{E(B - V)} \quad (3.11)$$

e a importância desse parâmetro é que em [36] os autores mostraram, considerando uma amostra de estrelas da Via-Láctea, que a extinção total pode ser expressa por uma *lei de extinção média* válida em toda a região do espectro entre $120 < \lambda < 3500$ nm:

$$\frac{A_\lambda}{A_V} = a(x) + \frac{b(x)}{R_V} \quad (3.12)$$

onde $x = 1/\lambda$ e as funções $a(x)$ e $b(x)$ são determinadas pela análise estatística dos dados. Essa lei permite a estimativa da extinção em qualquer λ uma vez determinada o valor de R_V , e várias amostras de dados já foram analisados na literatura, tendo em geral concordado entre si com o valor de R_V variando entre 2,0 para um meio interestelar difuso até 5,5 para um meio denso, com um valor típico entre 3 e 4 para a Via-Láctea.

As particularidades das observações astronômicas não foram o foco deste trabalho,

mas nem por isso pode-se ignorar sua influência nos dados das SNIa. E de fato um dos fatores que afetam esses dados é a extinção interestelar na linha de visão da SNIa, que é considerada diretamente nas técnicas de calibração descritas adiante.

3.1.2 Classificação

As supernovae foram inicialmente divididas em dois tipos devido a diferença observada ainda na década de 40 que é a presença de linhas de hidrogênio nos espectros das SN do tipo II e a sua ausência nas do tipo I. Apesar da manutenção dessa classificação hoje sabe-se que as SN ocorrem de duas maneiras: a primeira é o *colapso nuclear*, proposto originalmente por Baade e Zwicky (1934) como mecanismo de transição de estrelas massivas para estrelas de nêutrons. Esse processo, que é rapidamente descrito a seguir, é a origem das SN do tipo Ib, Ic e as do tipo II. O segundo processo é a detonação termonuclear de uma anã branca (a SNIa), cujo melhor modelo é descrito na próxima seção.

As SN são frutos dos estágios finais do ciclo de vida das estrelas, que é determinado pela sua capacidade de resistir ao próprio colapso gravitacional através da liberação de energia pela fusão nuclear dos elementos químicos em seu núcleo. Sua massa é determinante nesse processo, pois quanto maior, mais quente será o núcleo, tornando mais rápidas e eficientes as reações de fusão que mantém o equilíbrio hidrostático da estrela. Com o tempo esse processo acumula camadas sucessivas de elementos mais pesados, com densidade e temperatura cada vez maiores. Na maior parte de seu ciclo (a chamada *sequência principal*) as estrelas queimam o H em He, formando assim um núcleo de He, que quando cresce o suficiente, começa a fundir o He em C e O.

Em estrelas massivas (> 10 massas solares, M_{\odot}), a fusão continua produzindo nuclídeos mais pesados [35] até o seu limite natural de eficiência, que é a produção do ferro. O Fe é o elemento que possui a maior energia de ligação por nucleon, sendo assim o nuclídeo mais estável, e por isso qualquer reação que produza um elemento mais pesado que ele será necessariamente endotérmica e não pode aliviar a pressão gravitacional no núcleo. Assim uma vez iniciada a produção de Fe a estrela massiva o faz até crescer um núcleo que não consegue mais sustentar seu próprio peso pois não libera energia. O resultado é o colapso do núcleo formando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro, e acredita-se que como consequência desse colapso, em um processo variado e ainda não compreendido⁴, uma onda de choque proveniente do núcleo exploda uma parte da estrela e ejete o resto de sua

⁴Acredita-se que além da onda de choque o aquecimento das camadas exteriores pelos neutrinos liberados, mais efeitos magnéticos e da rotação da estrela iniciem juntos a explosão.

matéria. Como as características do colapso dependem da física da explosão, da massa e das particularidades de cada estrela, o resultado é que essas SN possuem uma grande variação na energia total liberada.

A divisão das SN em subtipos é feita a partir das características [37] de seus espectros inicial e tardio e de suas curvas de luz, que são o registro de suas magnitudes em função do tempo. Por exemplo observando o espectro inicial (próximo do brilho máximo da SN, à esquerda da figura 7), vê-se a assinatura única das SNIa que é uma forte linha de Si^+ (Si II). Já no espectro tardio (cerca de 5 meses após o máximo, à direita) da SNIa, seria observada a presença dominante das linhas de Fe.

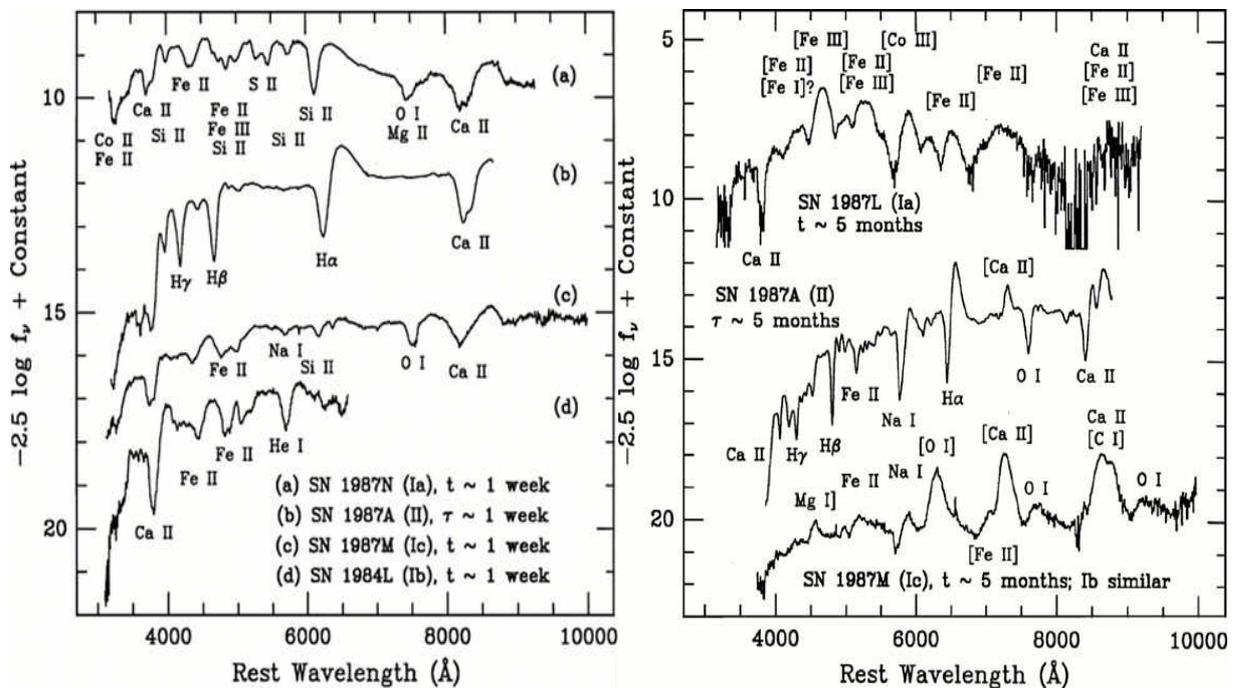


Figura 7: <http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/March03/Filippenko/frames.html>

As SNIb e Ic não apresentam a intensa linha de Si das Ia e são caracterizadas pela presença de He no espectro inicial da Ib e sua ausência nas do tipo Ic. Apresentam uma variação contínua entre seus espectros e os das SNII, tendo sido observados por exemplo espectros de Ic com traços de He, e de Ib com traços de H. E como seus espectros tardios são semelhantes aos espectros das SNII (com exceção do H e do He), isso indica que essas SN são geradas pelo colapso nuclear de estrelas que porventura tenham ejetado, total ou parcialmente, suas camadas de H (tipo Ib), ou de H e He (tipo Ic), tipicamente estrelas Wolf-Rayet⁵. A observação de SN híbridas, que inicialmente se comportam como SNII e tardiamente como SNIb reforça este cenário, do colapso nuclear de estrelas com grande perda de massa, ou por ejeção ou para companheiras em sistemas múltiplos.

⁵São estrelas massivas ($\geq 20 M_{\odot}$) que devido a intensa pressão de radiação, ejetam grande quantidade de massa ao meio interestelar.

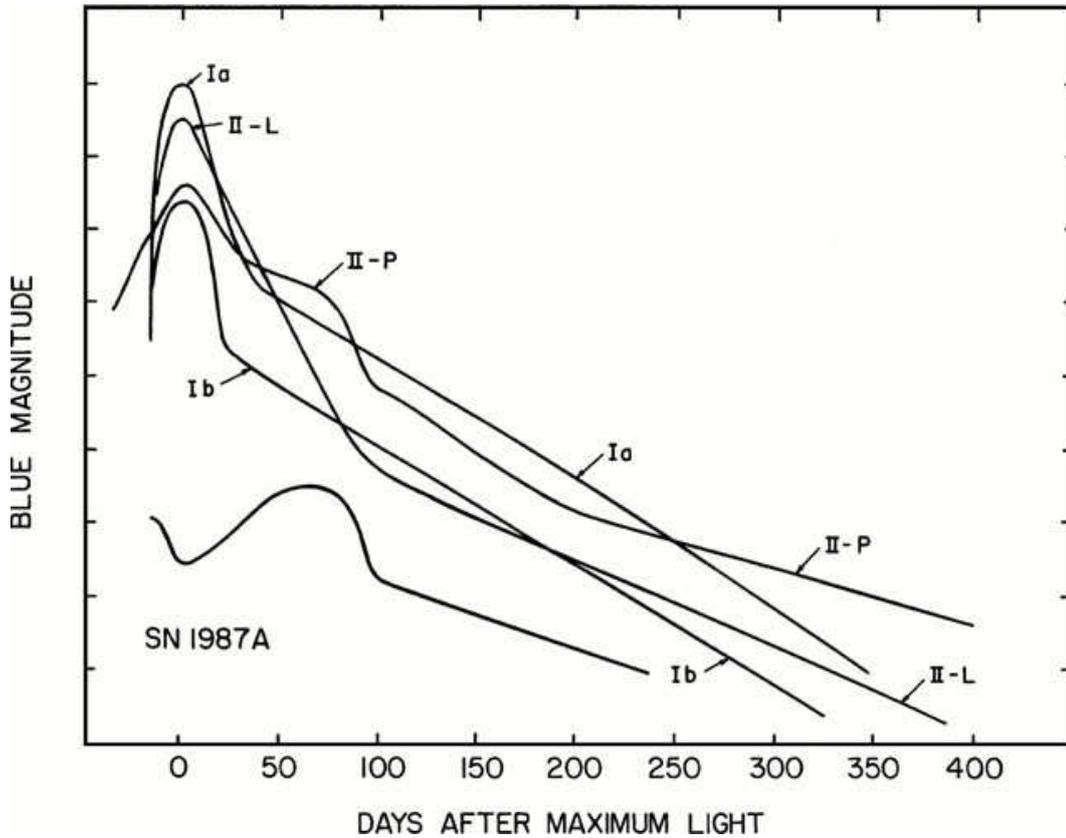


Figura 8: <http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/March03/Filippenko/frames.html>

Já as SNII têm como traço marcante as linhas de H tanto no espectro inicial quanto no tardio. Seus espectros apresentam uma variação muito maior e o que permite a identificação de seus subtipos são suas curvas de luz, onde distingue-se as SNII-L das SNII-P (L de *linear* e P de *platô* - figura 8), onde as II-L variam linearmente, enquanto as II-P atingem um platô, onde permanecem por certo tempo antes de começar a cair linearmente. Também não há uma separação definida entre os dois tipos, com muitos casos intermediários observados. Acredita-se que em uma SNII-P típica a camada externa de H da estrela chega a ter entre 5-10 M_{\odot} e após a explosão absorve a radiação e caracteriza o platô, liberando-a a medida que se expande, ao contrário das SNII-L que têm camadas de H de apenas 1-2 M_{\odot} e liberam a radiação rapidamente. Há ainda as SNII_n (n de *narrow*), identificadas pelo seu espectro cujas linhas de H são longas e pontiagudas, associadas a SN cujo material ejetado interage com um meio interestelar denso.

As magnitudes das SNII apresentam grande variação, sendo as II_n as mais fortes ($M_B \approx -19$), seguidas das II-L ($M_B \approx -18,0$) e das II-P ($M_B \approx -16,5$), contra $M_B \approx -18$ das SN Ib e Ic, sendo que todas possuem variações típicas entre 1-2 magnitudes [38]. Há ainda um último dado que confirma esses modelos que é o fato de que enquanto as SNIa têm sido observadas em todos os tipos de galáxias, as SN de colapso nuclear até hoje só foram observadas em galáxias espirais e em regiões onde há gás disponível para a

formação de estrelas massivas, cujo tempo de vida é menor do que 100 milhões de anos.

O estudo dos aspectos astrofísicos das SN em geral responde a uma série de questões importantes não abordadas aqui, como o seu papel na síntese dos elementos mais pesados que o Fe no Universo, sua influência na formação das gerações de estrelas, na composição do meio interestelar e outras. A Cosmologia vem se beneficiando continuamente desses estudos, e esse ainda será o caso para os próximos anos: as observações de SNII-P já começaram a ser utilizadas como velas padronizáveis, com as quais pode-se medir distâncias com precisão da ordem de 10%, quase a mesma precisão obtida com as SNIa. Além disso a conexão entre as SNIb/c com as hipernovae (SN de estrelas super massivas) e as explosões de raios gama, o próximo teste cosmológico a ter suas incertezas calibradas, também começa a ser explorada. Porém o caso das SNIa continuará sendo o mais promissor, devido a sua homogeneidade natural.

3.2 Aspectos Astrofísicos

As SNIa têm origem em sistemas de estrelas múltiplas chamadas de *variáveis cataclísmicas* onde pelo menos uma delas é uma anã branca que pela proximidade ganha massa de sua parceira e/ou do meio interestelar pela ação de sua gravidade. As anãs brancas são o estágio final da evolução de estrelas de massa menor do que $10 M_{\odot}$, que após passarem pela sequência principal e pela fase gigante vermelha onde queimam He em C e O, não possuem densidade e temperatura suficientes em seu núcleo para prosseguir com a fusão nuclear. Assim queimam o He restante nas camadas exteriores ao núcleo até que essas reações se tornam instáveis e ejetam as camadas da estrela deixando apenas o núcleo de C e O, com traços de He e outros elementos, dependendo da massa inicial.

Essas estrelas possuem densidade tão alta (tipicamente de $0,6 M_{\odot}$ comprimidas num raio comparável ao da Terra, ou $\approx 10^6 \text{ g/cm}^3$), que o seu colapso gravitacional só pode ser impedido pela *pressão de degenerescência* dos elétrons, consequência da estatística de Fermi-Dirac e do princípio da exclusão de Pauli que mantém os elétrons comprimidos nos estados de mais alta energia cinética possíveis, sendo assim estrelas de alta temperatura inicial ($T \approx 10^5 \text{ K}$), mas como não produzem mais energia pela fusão nuclear com o tempo irradiam seu calor sendo observadas tipicamente entre $(8 < T < 40) \times 10^3 \text{ K}$.

Porém existe um limite em que a matéria degenerada pode existir, que é a chamada *massa de Chandrasekar*. Nesse limite a velocidade do elétrons se torna próxima a da luz, e acima dele a pressão de degenerescência não suporta mais a gravidade. Por exemplo as SN

de colapso nuclear ocorrem quando o núcleo de Fe da estrela alcança esse limite de massa e se contrai até densidades da ordem de grandeza dos núcleos atômicos, onde ocorre a fotodesintegração dos núclídeos de Fe seguida da captura de elétrons pelos prótons, liberando quantidades enormes de neutrinos juntamente com a onda de choque e então a explosão. A massa de Chandrasekar é calculada em $\approx 1,40 M_{\odot}$ com variações típicas de $O(1\%)$ que dependem da composição química, da rotação da estrela e outros fatores.

Em uma variável cataclísmica no entanto ocorre o contrário do colapso nuclear pois ao invés da subita interrupção da fusão nuclear o que acontece é a sua ativação em uma anã branca. Teoricamente isso pode acontecer de duas maneiras dependendo da taxa de acreção de massa na anã branca: se essa for baixa, tipicamente entre 10^{-10} e $10^{-8} M_{\odot}/\text{ano}$, o H se acumula muito lentamente, formando uma camada que ao atingir a temperatura adequada entra em ignição causando a queima instantânea e descontrolada (*runaway*) do H na superfície da estrela, que são as explosões de novae, que constituem em si um fenômeno diverso e são uma área de pesquisa a parte, tendo tipicamente $M_V \approx -9$.

3.2.1 A Explosão

Acredita-se que se a acreção de massa à anã branca é suficiente, $\geq 10^{-7} M_{\odot}/\text{ano}$, a fusão do H em He pode ocorrer em equilíbrio na superfície da estrela [39], tornando-a uma fonte de raios X macios e causando o aumento gradual de sua massa. Esse é o melhor modelo teórico para a explosão das SNIa, onde a anã branca se aproxima do limite de Chandrasekar. A acreção de massa aumenta a densidade e a temperatura da estrela, mas como na matéria degenerada a pressão é dominada pelo princípio da exclusão de Pauli, sendo praticamente independente da temperatura, esse processo não promove a expansão que numa estrela comum alivia a pressão no núcleo, e com isso a densidade e temperatura aumentam livremente. E uma vez atingida a densidade necessária inicia-se a queima descontrolada do C e do O, que libera uma energia maior que a energia de ligação da estrela, destruindo-a completamente em segundos.

A relativa homogeneidade das curvas de luz e dos espectros das SNIa são os pontos de partida para os modelos de explosão, que devem prever suas características observacionais [40], sendo a principal delas é a fusão de quantidades suficientes de ^{56}Ni , produto final da queima do C e do O. Esse elemento é instável e decai em ^{56}Co com uma meia vida de 6,1 dias, que por sua vez decai em ^{56}Fe com meia vida de 77 dias, ambos por decaimento β^+ seguida de emissão de raios gama. As observações mostram que esses decaimentos fornecem energia às curvas de luz de todas as SN, e como o seu fluxo energético cai

exponencialmente, as magnitudes das SN caem linearmente (figura 8).

Em uma SNIa típica são produzidos entre 0,4 e 1,0 M_{\odot} de ^{56}Ni enquanto uma SN de colapso nuclear ejeta tipicamente no máximo 0,1 M_{\odot} de ^{56}Ni . Neste ponto é conveniente frisar a última diferença entre os dois tipos de SN: as estrelas massivas têm suas camadas exteriores menos densas e opacas e assim a luminosidade observada vem diretamente da explosão que expande e aquece o material ejetado. Nas SNIa por outro lado o material da estrela é tão denso e opaco que a energia da explosão é totalmente dissipada na expansão de suas camadas. Assim o que é observado nas SNIa não é a explosão em si mas sim o decaimento de suas cinzas radiativas e sua interação com o material ejetado, o que faz com que a quantidade total de Ni produzido determine a forma da curva de luz.

Os modelos de explosão também devem reproduzir a composição química do material ejetado, que contém elementos de massa intermediária (Si, Ca, etc - figura 7, produtos da queima incompleta do C+O em Ni) observados com velocidades de expansão tipicamente da ordem de 10^4 km/s. Assim o modelo deve ser tal que permita a produção de uma explosão que seja ao mesmo tempo homogênea em seus produtos finais mas que também permita variações intrínsecas que possam ser relacionadas aos diversos fatores que podem influenciar nas condições da explosão como a composição química inicial, a taxa de acreção de massa e o momento angular da estrela.

Dessa forma dos cenários possíveis apenas um resistiu ao confronto dos resultados das simulações computacionais com as observações [40]. O primeiro tipo de modelo descartado é o chamado *sub-Chandrasekar*, onde especulava-se que uma detonação inicial na camada superficial de He poderia fornecer a energia necessária para a queima explosiva do C+O no núcleo de uma anã branca de massa típica, entre 0,6 e 1,2 M_{\odot} . O segundo tipo é o chamado *degenerado duplo*, que corresponde à fusão de duas anãs brancas em sistemas binários, um cenário também problemático pois em princípio a massa total do sistema é variável e impede uma explosão homogênea, e além disso os modelos teóricos prevêm que tendência do sistema seria o colapso para uma estrela de nêutrons. Esse modelo ainda não foi descartado e poderia explicar a existência de SNIa super luminosas, com produção de $\approx 1 M_{\odot}$ de ^{56}Ni contra 0,6 M_{\odot} de uma SNIa típica.

Assim o modelo que prevê com sucesso todas as características observadas nas SNIa é o chamado *degenerado simples*, descrito acima, onde a homogeneidade das explosões é uma simples consequência da massa ser praticamente a mesma em todos os casos, e as variações intrínsecas seriam causadas pelas diferenças nos sistemas progenitores que por sua vez afetariam os detalhes do mecanismo de explosão. Esses detalhes dependem

da hidrodinâmica da explosão, cuja modelagem é extremamente complexa e tem como ponto chave o processo de propagação inicial da chama termonuclear que pode ocorrer de duas maneiras: ou através de uma detonação supersônica, onde uma onda de choque provocada pela ignição inicial comprime e queima as camadas sucessivas rapidamente, ou uma deflagração subsônica provocada pelo aquecimento convectivo devido a ignição.

Na última década o interesse pelas SNIa aliado ao avanços na computação permitiram uma maior discriminação nos modelos para a explosão, sendo o melhor modelo o da *detonação adiada* [41] onde a explosão é iniciada por uma deflagração que aquece e expande o combustível diminuindo a densidade das camadas externas, seguida de uma transição para uma detonação que produz o Ni no interior da estrela e os elementos de massa intermediária nas camadas externas. Porém esse modelo explica apenas as características das SNIa “normais” que exibem praticamente a mesma composição química, velocidades de ejeção e magnitudes em $M_B \approx -19,3$, com variações típicas de 0,3.

Recentemente esse modelo foi questionado devido à baixa quantidade de fontes de raios X macios que corresponderiam a esses sistemas de estrelas [42]. E também a existência das SNIa “anormais”, que representam entre 15-40% do total, observadas num limite inferior de $M_B \approx -16,5$ e superior de $M_B \approx -20$ (possivelmente mais), com grandes diferenças na composição química e nas velocidades de ejeção, são os grandes desafios para essa área de pesquisa. No entanto a existência de uma correlação empírica garante um consenso sobre a calibração das magnitudes absolutas das SNIa, pelo menos no nível de precisão atual. Mas a medida que uma maior precisão for necessária, essa interface entre a Cosmologia e a Astrofísica será cada vez mais determinante.

3.2.2 Velas Padronizáveis

Desde a década de 60 já se sabia sobre a homogeneidade das SNIa, mas faltava saber o quanto. A equação 3.5 mostra que medir a distância luminosa é equivalente a medir a magnitude absoluta, uma vez observado o fluxo luminoso do astro. Assim no início da década de 90 com o uso de técnicas da escada de distância cósmica (figura 5) para medir a distância a galáxias onde haviam sido observadas SNIa, comprovou-se tanto a homogeneidade das SNIa típicas, entre 0,3 e 0,6 magnitudes, quanto a existência do tipo exótico com grandes variações. O desafio era então diminuir a incerteza nas magnitudes absolutas para só então iniciar as buscas a distâncias na escala cosmológica ($z > 0,1$).

Felizmente havia uma indicação de como isso poderia ser feito pois na década de 70 foi sugerida a existência de uma relação entre as magnitudes máximas das SNIa e sua

taxa inicial de declínio. Assim em 1993 foi demonstrada a chamada *relação de Phillips* [43] sob a forma $M_{max}(\lambda) \propto \Delta m_{15}(B)$, onde $\Delta m_{15}(B)$ é a variação em magnitudes na banda B após 15 dias do brilho máximo. Com essa relação foi possível diminuir a dispersão das magnitudes máximas das SNIa típicas para $\approx 0,2 - 0,3$ e abrir o caminho para uma maneira sistemática de corrigi-las. E essa relação empírica pode ser entendida no contexto do modelo da explosão de uma anã branca pois a quantidade total de ^{56}Ni produzido é proporcional tanto à luminosidade máxima quanto à opacidade das cinzas da explosão, que depende da temperatura. Assim quanto mais Ni produzido, maior será a luminosidade da SNIa, que também brilhará por mais tempo enquanto as cinzas ejetadas absorvem e reemitem a radiação proveniente dos decaimentos do Ni e do Co.

Ao final da década de 90 os projetos *Supernova Cosmology Project* (SCP) e o *High-Z Supernovae Search Team* (HZT) já haviam observado dezenas de SNIa e desenvolvido suas próprias técnicas de calibração das magnitudes inspirados na relação de Phillips. Esses procedimentos de calibração usam amostras de SNIa modelo, em baixo z ($< 0,01$) cujas distâncias, espectros, curvas de luz e de cor (a evolução temporal das cores $B - V$, $V - R$, etc) são precisamente observadas de modo a terem suas magnitudes absolutas individualmente calculadas como em [40]

$$\langle M_V \rangle \approx -19,30 \pm 0,33 + 5 \log \frac{H_0}{60} \quad (3.13)$$

que é usada na técnica para a determinação de H_0 através de variáveis Cefeidas [13].

Ao invés de tomar as SNIa como velas padrão de mesma luminosidade, assume-se que essas podem ser estimadas empiricamente. Partindo de um modelo empírico que relaciona a magnitude máxima com a evolução das curvas de luz e de cor através de seus parâmetros (que são parâmetros físicos observáveis mais os puramente empíricos), compara-se estatisticamente as magnitudes previstas com as observadas nas SNIa padrão (cujos parâmetros físicos são conhecidos), fixando os parâmetros empíricos do modelo e construindo uma família contínua de curvas. Cada nova SNIa descoberta passa então pelo processo inverso de comparação de suas curvas de luz e de cor com as dessa família de curvas, de onde retiram-se seus parâmetros físicos e suas magnitudes absolutas.

A construção e calibração desses modelos empíricos é um procedimento complexo tanto nos aspectos astrofísicos, devido aos vários fatores teóricos e instrumentais que devem ser levados em conta, quanto no estatístico e computacional devido a grande quantidade de dados que tem que ser processados. Assim a medida que mais e mais dados são disponibilizados publicamente para a utilização na Cosmologia, uma vez entendidos

os aspectos qualitativos da calibração, o foco deste trabalho foi na utilização dos dados já calibrados para a discriminação de modelos e determinação de parâmetros cosmológicos.

Dois modelos de calibração foram amplamente utilizados em grandes projetos observacionais: a equipe do HZT desenvolveu o *Multicolor Light Curve Shapes* (MLCS [44]), que parte das equações 3.5 e 3.8 com a adição de termos que modelam a variação da magnitude e das cores com o tempo. O parâmetro fundamental é a diferença na magnitude máxima $\Delta = M_V - M_{V,0}$ onde $M_{V,0}$ é a magnitude de uma SNIa modelo, e a esse relacionam-se os parâmetros empíricos de correção (inicialmente em 1ª ordem) nas formas das curvas de luz e de cor, $C_V(t)$ e $C_{cor}(t)$:

$$\mu = m_V - M_V - C_V \Delta \quad (3.14)$$

$$B - V = (B - V)_0 + E_{B-V} + C_{B-V} \Delta \quad (3.15)$$

com equações análogas para outras cores como $V - R$, $R - I$, etc. Essas correções representam as correlações entre a evolução da magnitude e das cores com a magnitude máxima expressa na relação de Phillips. Usando as SNIa cujos parâmetros são conhecidos, obtém-se $C_V(t)$ e $C_{cor}(t)$ através de uma média, e de posse dessas funções pode-se comparar as curvas de luz e de cor de cada nova SNIa descoberta com essa família de curvas, inferindo seus parâmetros μ , A_λ (através de E_{cor}) e Δ .

Por utilizar as curvas de cor em várias bandas esse método permite a estimativa da extinção interestelar na linha de visão da SNIa e sua contribuição nas cores, pelas equações 3.8 e 3.11. Isolando esse efeito, demonstra-se uma segunda correlação empírica, também supostamente ligada ao modelo de explosão, que é a correlação entre magnitude e cor: as SNIa mais luminosas são mais azuis (tem maiores M_U , M_B) enquanto as mais fracas são mais vermelhas (maiores M_R , M_I). Essa é vantagem dessa calibração, que estima tanto as cores intrínsecas das SNIa quanto a extinção interestelar, com a desvantagem de que o seu conjunto de SNIa modelo precisam ser muito bem observadas.

Já o projeto SCP criou a técnica do *fator de esticamento* que parametriza diretamente a dilatação do tempo na curva de luz das SNIa devido às diferenças em suas magnitudes máximas, onde uma curva de luz é maior ou menor do que outra por um fator multiplicativo de $s(1+z)$ onde s é o esticamento relacionado à magnitude máxima de uma SNIa modelo. Além de corrigir as magnitudes essa relação também foi usada para mais uma vez demonstrar a natureza cosmológica do redshift [45], pois dadas duas SNIa idênticas, suas curvas de luz são esticadas por um fator de $1+z$, e similarmente dadas duas SNIa em mesmo z , suas curvas de luz diferem por um fator de s relacionado à diferença em suas

magnitudes máximas. Essa parametrização deu origem ao modelo SALT [46] (*Spectral Adaptive Lightcurve Template*) que não separa os efeitos da extinção interestelar das cores intrínsecas das SNIa, e também não avalia a contribuição das relações empíricas em cada

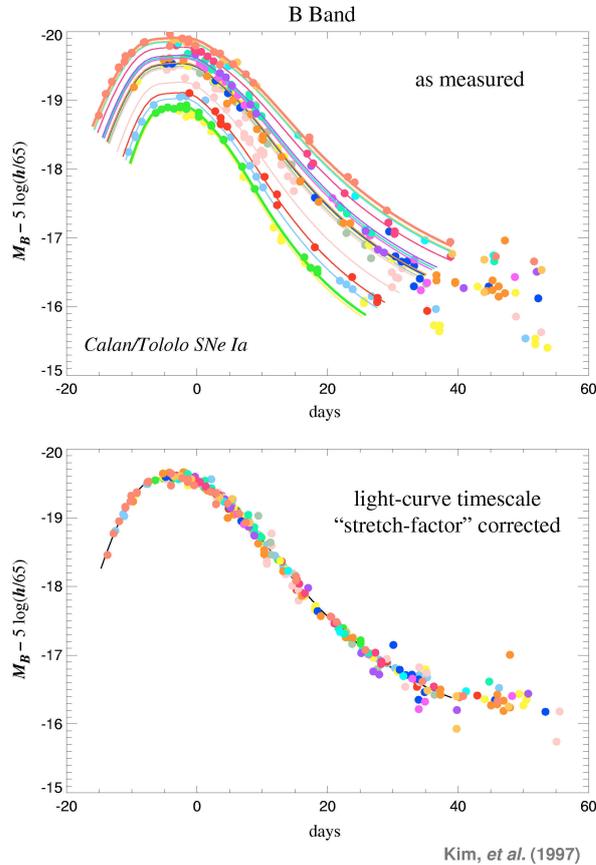


Figura 9: <http://supernova.lbl.gov/public/>

Além das correlações empíricas existem uma série de outros fatores que tornam ainda mais trabalhosa a calibração das magnitudes, a começar pela chamada *correção K*, que é o efeito do redshift da luz nas bandas fotométricas, que faz com que o fluxo observado em uma banda seja em parte luz proveniente de outra banda, deslocada. O cálculo desse efeito, que se torna maior com o redshift, não é trivial e faz parte dos modelos de calibração. Juntamente com as estratégias de observação e acompanhamento pelos telescópios, e a subtração das imagens de fundo e da galáxia hospedeira (cujo espectro em geral determina o redshift da SNIa), e a calibração fotométrica, esses são os principais fatores instrumentais que foram sensivelmente aprimorados nos últimos 20 anos.

Por outro lado alguns efeitos de origem Astrofísica ainda não são totalmente compreendidos e serão os alvos dos estudos que visem aumentar ainda mais a precisão do calibração das SNIa. O principal deles seria o da provável evolução das SNIa pois os modelos de calibração comparam as SNIa próximas com as distantes como se suas explosões fossem idênticas. E já foi provado por exemplo que SNIa em galáxias jovens são mais brilhantes ($\approx 0,3$ magnitudes) do que as em galáxias elípticas onde há maior conteúdo

SNIa individualmente. Seu estimador de distância é

$$\mu = m_B - M_B + \alpha(s - 1) - \beta c \quad (3.16)$$

onde α e β são os parâmetros empíricos que medem a influência das correlações entre magnitude máxima, declínio (s) e cor (c), esses últimos determinados para cada SNIa. Assim os parâmetros α e β são determinados globalmente para cada conjunto de SNIa analisadas e influenciam a distância μ junto com os parâmetros cosmológicos. Porém são tratados como parâmetros secundários fixados ao assumir um modelo de referência (o Λ CDM) que produz estatisticamente os valores mais prováveis, como no Cap. 4.

metálico [47]. No entanto a correlação da magnitude com as curvas de luz corrige esse efeito, mas isso pode não ser o caso para outras diferenças nas SNIa. Da mesma forma sabe-se que a extinção interestelar também varia com z devido a diferença na sua composição química, e de fato já foi observado (com o MLCS) que as curvas de cor das SNIa em alto z são melhores descritas por uma lei de extinção com R_V menor do que o da Via-Láctea [48]. Além desses efeitos controversos e ainda não estimados somam-se outros já conhecidos como o das lentes gravitacionais na luz das SNIa e o da incerteza em z , que têm suas contribuições estimadas nas barras de erros das medidas de distância das SNIa.

3.3 Aplicação

Finalmente nesta seção mostra-se a aplicação dos dados das SNIa para a Cosmologia. As técnicas de calibração já descritas reduziram as incertezas nas magnitudes absolutas para $\approx 0,1-0,2$ magnitudes, o que corresponde a incertezas típicas de 5-10% na distância luminosa, e com isso foi possível mostrar na última década a existência da aceleração da expansão do Universo. No entanto antes de mostrar esse efeito explicitamente, deve-se esclarecer o papel dos vários parâmetros secundários que entram na calibração das grandezas na equação fundamental para a Cosmologia que é a 3.5.

No que diz respeito à Cosmologia apenas os parâmetros cosmológicos (H_0, Ω_i, ω_i) que afetam a distância luminosa são interessantes, e assim na prática os dados utilizados são calibrados fixando os vários parâmetros do modelo empírico nos seus valores mais prováveis (Cap. 4). Feito isso o que resta à Cosmologia são os dados dos módulos de distância em função do redshift das SNIa, e de posse de um modelo cosmológico que especifica a equação de Friedmann $H(z)$, a construção de uma função teórica para a distância luminosa 2.52 permite a comparação dos dados observacionais com a teoria, que é a linha de investigação do capítulo 5.

3.3.1 O Parâmetro de Hubble

O parâmetro de Hubble é um caso especial nesta análise e merece uma discussão a parte a ser explorada aqui. Na literatura esse parâmetro é interpretado como um *ruído estatístico* (definido no Cap. 4) na análise cosmológica feita a partir do dados de SNIa, e é tratado da mesma forma que os outros parâmetros dos modelos empíricos de calibração. Assim diz-se que a análise dos dados de SNIa diz respeito apenas a uma *distância luminosa relativa* (D_L), que é adimensional, escrita como $D_L = \frac{H_0}{c} d_L$. Esse

tratamento se justifica primeiramente devido a existência da técnica específica que utiliza as SNIa em conjunto com variáveis Cefeidas, numa releitura da equação 3.5 que deixa apenas H_0 como parâmetro livre a ser determinado pelos dados. E também pelo fato de que pelo menos em princípio a calibração das magnitudes absolutas das SNIa também depende de um fator de $\log H_0$ como em 3.13, que cancelaria o fator correspondente em $\log d_L$ do outro lado da equação, tornando-a independente de H_0 .

Porém na prática ao comparar a magnitudes absolutas das SNIa observadas com a de uma SNIa padrão, este fator de $\log H_0$ é absorvido uma vez que a calibração diz respeito apenas a *variações* nas magnitudes. Assim o parâmetro H_0 tem seu valor fixado durante a calibração, fixando assim um valor de M e fazendo com que as curvas teóricas da equação 2.52 continuem dependendo de H_0 através do fator multiplicativo em d_L , mantendo sua forma original. Com isso sabe-se que a presença de H_0 *serve apenas para determinar a posição das curvas, assim como os outros parâmetros de calibração que ajustam as magnitudes das SNIa*, e uma mudança no valor de H_0 deslocaria tanto os pontos experimentais quanto as curvas teóricas na figura 10. Porém ao lidar com os dados já calibrados apenas a curva teórica é afetada, e esse é o fato que leva a interpretação aonde pelo menos em princípio a determinação dos parâmetros cosmológicos é independente do valor de H_0 , onde o módulo de distância é escrito como

$$\mu = m - \mathcal{M} = 5 \log D_L \quad (3.17)$$

onde \mathcal{M} absorve todas as constantes de calibração incluindo os valores de H_0 usado na calibração de M e o que vem da curva teórica de d_L [49]:

$$\mathcal{M} = M + 5 \log \frac{cH_0^{-1}}{\text{Mpc}} + 25 = M - 5 \log h + 42,39 \quad (3.18)$$

Isso é visível na figura 10, que mostra os dados das SNIa do conjunto *Constitution* (descrito a seguir), que foram calibrados pelo modelo SALT com o parâmetro de Hubble fixado em $H_0 = 65 \text{ Km}\cdot\text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Sobrepostas aos dados estão funções teóricas construídas por interpolação numérica, através de uma lista de pontos $d_L(H_0, \Omega_i, \omega_i; z)$ no programa *Mathematica*® (como todos os outros resultados deste trabalho) para o módulo de distância num Universo plano ($\Omega_k = 0$), descrito pelo modelo Λ CDM com parâmetros fixados em $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$. As curvas são construídas com diferentes valores de H_0 que afeta a d_L apenas por um fator multiplicativo e assim não altera a forma da curva. E não por acaso a curva que melhor se ajusta aos dados é aquela com o valor usado para a calibração dos dados, $h = 0,65$, embora os valores dos parâmetros que melhor se ajustam

aos dados tem que ser estimados estatisticamente como será no Cap. 5.

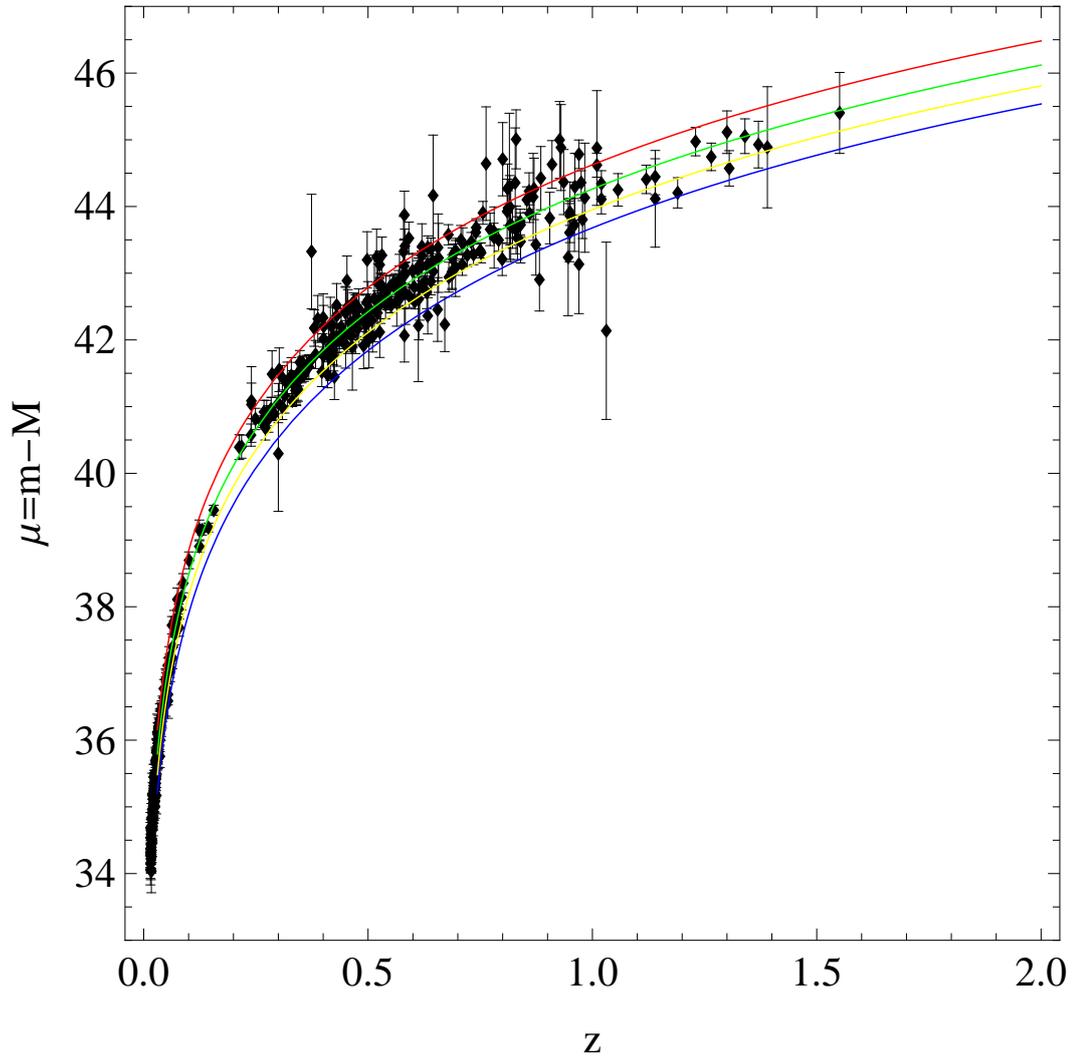


Figura 10: Λ CDM: $h = 0,55$, $h = 0,65$, $h = 0,75$, $h = 0,85$

O gráfico anterior contrasta com o da figura 11, que consiste nos mesmos dados sobrepostos a curvas do mesmo modelo, mas dessa vez com o parâmetro h fixo em 0,65, com o único parâmetro livre, $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$, variando. Nesse caso a curva verde é a do melhor ajuste ($\Omega_\Lambda = 0,7$), a curva amarela representa um domínio ainda maior de Λ ($\Omega_\Lambda = 0,9$) e as outras aos casos extremos do modelo Λ CDM: a curva azul é o chamado modelo de Einstein-de Sitter com $\Omega_m = 1$, e a curva vermelha ao Universo de de Sitter com $\Omega_\Lambda = 1$. Em todo caso o efeito da variação não se manifesta em baixo z ($< 0,1$), onde a lei de Hubble, que corresponde ao 1º termo da expansão abaixo [12], ainda é uma boa aproximação para

$$d_L(z) = \frac{c}{H_0} \left\{ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right\} \quad (3.19)$$

mas se torna evidente em alto z quando as correções ao regime linear se tornam importan-

tes. Essas correções foram o alvo de diversas investigações que visavam a determinação do primeiro termo, o de desaceleração q_0 . Porém recentemente com os dados de SNIa em alto z a determinação dessas correções passou a ter um papel secundário por serem uma consequência dos parâmetros do modelo cosmológico que determina a forma da evolução da expansão e das distâncias. Por exemplo no modelo Λ CDM a quantidade total de matéria tende a desacelerar a expansão do Universo, em contraste com a constante cosmológica que tende a acelerá-la. Assim quanto mais matéria ($> \Omega_m$), mais lenta será a expansão e as SNIa estarão menos distantes, como é visível na figura 11.

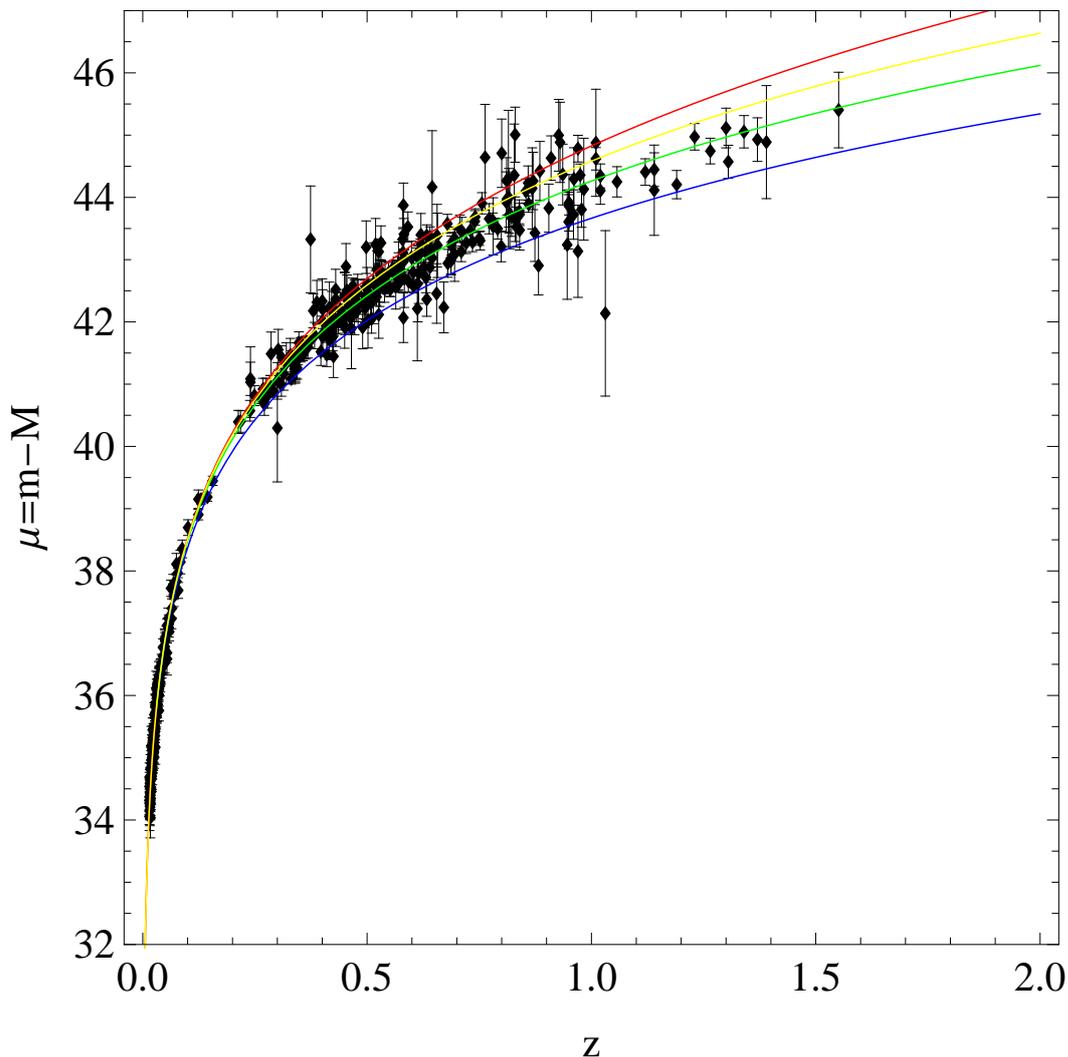


Figura 11: Λ CDM ($k = 0$): $\Omega_m = 0$, $\Omega_m = 0,1$, $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_m = 1$

3.3.2 Dados Utilizados

Desde que as descobertas nos anos 90 confirmaram a utilidade das SNIa essas passaram a ter uma grande importância para a Cosmologia. Desde então vários projetos foram executados com o objetivo de observar e calibrar as magnitudes de SNIa para o posterior

uso em investigações cosmológicas. Como resultado disso na última década houve uma sensível melhora na qualidade e na quantidade de dados de SNIa em relação aos do fim da década de 90 quando a aceleração foi detectada. Esta seção descreve os dados utilizados na análise do Cap. 5 e sua comparação com algumas curvas teóricas de teste, que são as mesmas da figura 11 (com o parâmetro H_0 fixado no valor usado na calibração), que mostram a necessidade da presença da aceleração para explicar os dados.

O primeiro conjunto de dados utilizado neste trabalho é a amostra *Gold* que é na verdade uma compilação de vários conjuntos de dados [50] (incluindo os do SCP e HZT) que a essa altura já estavam disponíveis publicamente, somados a algumas SNIa observadas pelo Telescópio Espacial Hubble (HST) em alto z (> 1). Esses dados foram organizados e reprocessados por uma versão atualizada do modelo MLCS que foi chamado MLCS2k2 [51], que usa na calibração $h = 0,65$. Essas SNIa foram divididas em dois grupos onde *Gold* representa as SNIa com alta qualidade em seus dados enquanto as *Silver*, não utilizadas aqui, são as de qualidade duvidosa por fatores diversos. Utilizando os dados das 157 SNIa *Gold*, esse trabalho [50] deu alguns passos

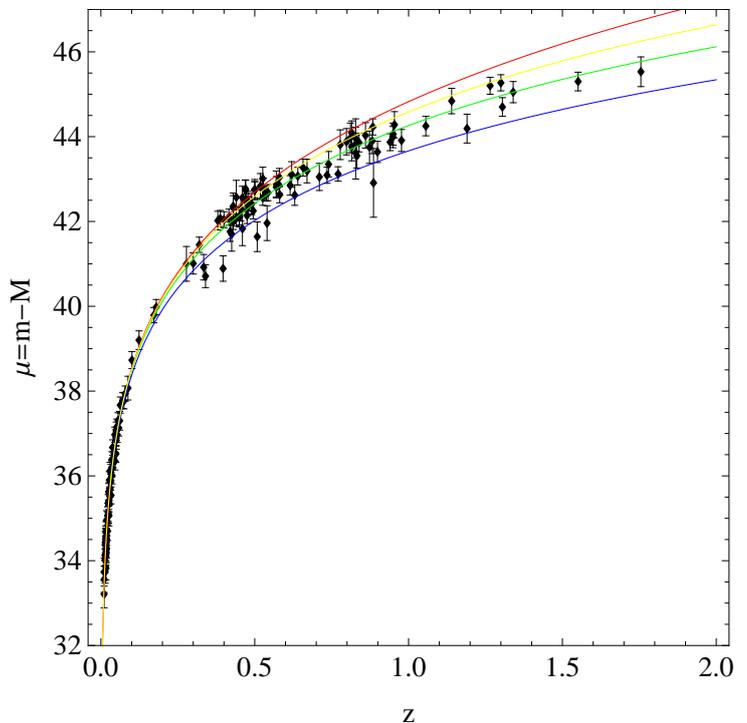


Figura 12: GOLD

fundamentais para a Cosmologia demonstrando que a poeira intergalática não pode ser a responsável pela diminuição do brilho das SNIa e que por outro lado o modelo Λ CDM é a explicação mais simples e poderosa para os dados, que apontam para o fato de que o Universo recentemente ($z \approx 0,46$) passou por uma transição entre uma expansão desacelerada e acelerada, reafirmando o problema da coincidência cósmica.

Seguindo o sucesso dessas observações logo outras colaborações foram organizadas utilizando-se de grandes equipes e telescópios. Mas como a procura, observação e calibração das SNIa é uma tarefa árdua, mesmo trabalhando em equipe durante boa parte da última década estes projetos coletaram ≈ 100 SNIa cada um, e assim na prática as análises cosmológicas são feitas reunindo os dados coletados nesses vários projetos após submetê-los à mesma calibração e aos mesmos critérios de seleção. Esses últimos podem

exigir várias características de cada SNIa (a exemplo da diferença entre as amostras Gold e Silver), tal como um tempo mínimo de observação, um certo máximo de extinção na galáxia hospedeira ou simplesmente que a luminosidade da SNIa não seja muito diferente das demais (de maneira que possa ser submetida à calibração), entre outros.

Dois projetos dedicados à observação de SNIa estão representados aqui pelos seus primeiros resultados publicados: o *Supernova Legacy Survey* (SNLS) [52] com 73 SNIa, e o *Equation of State: SupErNovae trace Cosmic Expansion* (ESSENCE) [53] com 60 SNIa.

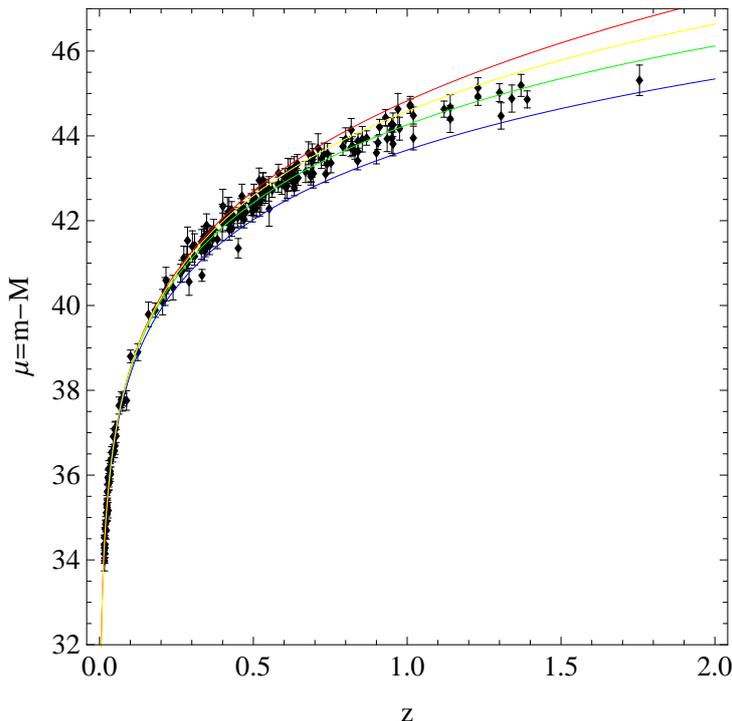


Figura 13: ESSENCE

Porém o conjunto de dados analisados aqui sob o nome Essence é construído com a soma destas 60 SNIa com apenas 57 do SNLS, mais 30 descobertas pelo HST [54] e outras 45 disponíveis na literatura, como exposto em [49, 55], calibradas pelo MLCS2k2 com $h = 0,65$ totalizando 192 SNIa selecionadas. As SNIa dessa amostra são os dados de maior uniformidade, como visto na figura 13 e nos resultados do capítulo 5, devido ao fato de virem de colaborações projetadas especificamente para a observação de SNIa com estratégias e equipamentos apropriados.

A amostra mais atual utilizada é a *Constitution* [48] (figuras 10 e 11), que é uma seleção de SNIa das amostras acima [56], somados a uma amostra de ≈ 100 SNIa em baixo z observadas pelo CfA (*Center for Astrophysics Supernovae Group*). Neste trabalho [48] os dados são calibrados separadamente pelos modelos mais usados (embora aqui para a comparação foram usadas as 397 SNIa calibradas pelo SALT com $h = 0,65$). Com isso foram mostradas as peculiaridades de cada calibração bem como a concordância entre os resultados obtidos com cada uma. Assim esses dados são um testemunho da maturidade do teste cosmológico feito com os dados de SNIa, e o fato de que antes da conclusão deste trabalho esses dados já estão desatualizados e superados mostram como a pesquisa com SNIa evolui rapidamente, indicando que os vários efeitos que influem as SNIa serão compreendidos num futuro próximo.

4 *Estatística Bayesiana*

Este capítulo é dedicado às técnicas de inferência estatística (o processo de comparação entre as previsões teóricas e os dados experimentais ou observacionais) amplamente usadas na Cosmologia, que são baseadas na chamada estatística bayesiana, uma alternativa à abordagem mais tradicional na estatística conhecida como *frequentista*. Começando por uma interpretação alternativa do próprio conceito de probabilidade, as técnicas bayesianas dão origem a uma grande variedade de ferramentas, como é evidente na Cosmologia onde é aplicada em diversos testes observacionais. A intenção deste capítulo é de servir apenas como uma breve introdução cobrindo os tópicos mais introdutórios e abrindo o caminho para as técnicas mais avançadas usadas na Cosmologia, a exemplo da própria calibração dos dados das magnitudes da SNIa. Primeiramente o foco será nos aspectos qualitativos que caracterizam a abordagem bayesiana e explicitam sua ligação com a Cosmologia. Em seguida serão abordados os fundamentos da estatística bayesiana, e por último serão mostradas algumas aplicações, usadas a seguir nos dados de SNIa.

4.1 O Paradigma

A estatística bayesiana tem suas origens na obra póstuma de Bayes (1763), cujas idéias foram popularizadas por Laplace, que provou o caso mais geral do teorema e o usou para atacar vários problemas. Durante o séc. XIX essa interpretação subjetiva da probabilidade continuou sendo usada, por exemplo por Gauss que em 1801 usou a técnica dos mínimos quadrados para rastrear a órbita do planeta anão Ceres. Porém no início do séc. XX os trabalhos de Fisher, Neyman, Pearson e outros, que desenvolveram o formalismo da estatística clássica ou frequentista, colocaram os trabalhos de Bayes e Laplace em segundo plano, ao considerar a subjetividade um erro a ser eliminado da inferência estatística. Devido a essa postura crítica e a dificuldade inerente à sua aplicação, pela ausência de capacidade numérico/computacional, durante boa parte do século XX as idéias bayesianas caíram em desuso. Porém isso não impediu o seu amadurecimento pelos trabalhos de Jeffreys, Jaynes, Cox e outros. Assim durante a década de 80 quando o uso de técnicas numéricas se tornou frequente, a estatística bayesiana começou a ser amplamente utilizada e hoje é a interpretação dominante em diversos contextos, incluindo a Física. Hoje sabe-se que a interpretação bayesiana apresenta uma flexibilidade muito maior, permitindo o uso da inferência estatística em problemas até então intratáveis, como é o caso da Cosmologia. E apesar da abordagem bayesiana ser muito mais abrangente, as principais diferenças entre as técnicas, no que diz respeito a resultados, provêm diretamente das consequências da diferença na definição de probabilidade [57].

4.1.1 Interpretações da Probabilidade

Seguindo [58] é possível distinguir 2 definições clássicas de probabilidade: a primeira é a *combinatória*, definida pela razão entre o número de ocorrências de um certo evento e o número total de eventos, que vem da ligação entre probabilidade, jogos de azar, dados e etc. O problema dessa definição é que ela pressupõe que todos os eventos possíveis possuem a *mesma probabilidade de ocorrer*, e assim define-se a probabilidade com ela mesma. Refinando essa definição, tem-se a *frequentista*: a razão (ou frequência) entre um certo tipo de evento e o número total de eventos em um teste, *no limite em que o número total de testes vai ao infinito*.

Nesse contexto a probabilidade é algo que se refere apenas a uma frequência relativa a um número infinito de tentativas ou observações, sendo também por vezes chamada de probabilidade física por conta dos casos em que o uso do termo é justificado e corresponde a uma propriedade física do sistema observado, como no caso da probabilidade de decaimento de um nuclídeo radiativo. Esse caso por sua vez abriria a discussão sobre a conexão entre probabilidade e física, mas isso é descrito no nível mais fundamental pela Mecânica Quântica, sendo que as diferentes interpretações da probabilidade representadas aqui dizem respeito apenas ao processo de inferência estatística baseada na comparação entre hipóteses e previsões teóricas e os resultados de um experimento ou observação.

Apesar de ter sido a interpretação dominante e em certos casos perfeitamente apropriada, a interpretação frequentista é problemática em muitos aspectos. Por exemplo seguindo essa interpretação, afirmações do tipo “há uma chance de 50% de chover amanhã”, ou “há 68% de chance de o Universo ter $\Omega_m = 0,30 \pm 0,05$ ” não têm sentido algum, pois referem-se a situações únicas, que não podem ser repetidas. Isso expõe uma grave limitação dessa interpretação onde afirmações e inferências legítimas não tem qualquer validade científica. Outro problema notável é a referência a um número infinito de testes e/ou observações, algo que na prática é impossível e em diversos casos é um obstáculo.

Uma discussão completa das várias falhas do paradigma frequentista vai muito além dessa introdução e é tipicamente encontrado na literatura [59, 60]. Os pontos chaves são o fato de que enquanto a probabilidade é encarada como frequência relativa, a validade de um modelo teórico só pode ser ou verdadeira ou falsa, enquanto que os parâmetros físicos do modelo são quantidades fixas, mas desconhecidas, e assim não podem ser associadas a uma distribuição de probabilidade. Isso acontece porque o objetivo da inferência é fazer previsões acerca da frequência dos resultados de um experimento/observação a ser infinitamente repetido. A estatística frequentista é baseada no conceito de *amostras*, que

são os resultados do experimento, tomados como uma representação da *população*, que é o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento. Assim na Cosmologia as amostras seriam os resultados das observações cosmológicas, enquanto que a população seriam as infinitas realizações do Universo sugeridos pelos resultados de cada observação, cada um com diferentes valores de seus parâmetros cosmológicos. Isso ilustra a divisão onde a física de partículas é tipicamente frequentista (mesmo que pense, sem saber, de maneira bayesiana), enquanto a Cosmologia é declaradamente bayesiana [57, 60, 61, 62].

A interpretação bayesiana por outro lado afirma que a probabilidade é *uma medida do grau de confiança ou plausibilidade* sobre um evento, hipótese ou parâmetro, tratando cada um desses da mesma maneira. Essa definição é flexível o suficiente para lidar com as deficiências já citadas e ao mesmo tempo recuperar o sentido original frequentista ou combinatório nos casos apropriados, além de oferecer várias vantagens óbvias. Por exemplo nesse caso uma distribuição de probabilidade pode ser atribuída a qualquer hipótese teórica ou parâmetro físico de interesse, que passa a ser determinado pelos dados e observações. Esses últimos passam a dominar o processo de inferência, ao contrário do caso frequentista aonde são tomados como amostras de uma população de resultados, e isso permite à abordagem bayesiana uma inferência baseada nos dados coletados ao invés de suas propriedades ao longo de séries de repetições.

Porém a principal característica do bayesianismo é a subjetividade que é consequência direta da definição de probabilidade e é incorporada na inferência através do teorema de Bayes. Nessa definição a probabilidade é uma medida da incerteza sobre o evento, teoria ou parâmetro a ser testado, e isso depende tanto do experimento/observação quanto de uma informação subjetiva que reflete o conhecimento prévio sobre as teorias/parâmetros antes do experimento, que é a chamada *informação a priori* ou simplesmente a *a priori*. Essa subjetividade é ao mesmo tempo a origem das críticas ao bayesianismo como também uma das maiores vantagens desse paradigma.

4.1.2 O Teorema de Bayes

Do ponto de vista abstrato a probabilidade é definida pelos chamados *axiomas de Kolmogorov*, que identificam os eventos possíveis ou hipóteses prováveis H_i como subconjuntos de um conjunto, o espaço amostral Ω , que representa todos os eventos possíveis. Assim na lógica matemática o conjunto Ω representa uma tautologia, ou uma proposição que é sempre verdadeira, em oposição ao conjunto \emptyset que é a contradição, a proposição que é sempre falsa. Essa identificação é necessária para descrever as operações $H_1 \cap H_2$

que é o *produto lógico* ($H_1 \text{ E } H_2$), que representa a ocorrência simultânea de H_1 e H_2 , e a soma lógica $H_1 \cup H_2$ ($H_1 \text{ OU } H_2$) que seria a ocorrência de pelo menos um desses eventos. Assim, sendo $P(H_i)$ a probabilidade do i -ésimo evento, os axiomas são

$$\bullet 0 \leq P(H_i) \leq 1$$

$$\bullet P(\Omega) = 1$$

$$\bullet P(H_1 \cup H_2) = P(H_1) + P(H_2) - P(H_1 \cap H_2)$$

no entanto esses axiomas apenas definem as propriedades lógicas da probabilidade, mas não definem o seu significado ou como pode ser aplicada. No entanto com esses axiomas derivam-se todas propriedades fundamentais da probabilidade, independente de sua interpretação. Por exemplo dada uma hipótese H e a sua *negação lógica* ($\bar{H} = \text{NÃO } H$), tem-se que $H \cap \bar{H} = \emptyset$ e $H \cup \bar{H} = \Omega$ e assim como consequência do 3º axioma têm-se que

$$P(\emptyset) = 0 \leftrightarrow P(H) + P(\bar{H}) = 1 \quad (4.1)$$

que é uma relação fundamental juntamente com a expressão para a *probabilidade condicional* $P(A|B)$ que significa a probabilidade de A , dada a ocorrência de B .

Para mostrar a forma da $P(A|B)$ convém expressar a tautologia por uma *partição finita* ($\Omega = \bigcup_i H_i = H_1 \cup H_2 \cup \dots$) de uma *classe completa* de hipóteses H_i *mutualmente exclusivas* ($H_i \cap H_j = \emptyset, \forall i \neq j$), análogas a base de um espaço geométrico. Assim notando que a probabilidade de um evento é dada pela probabilidade condicional $P(E) = P(E|\Omega)$, e usando os axiomas e as propriedades algébricas de \cap e \cup tem-se

$$\begin{aligned} P(E|\Omega) &= P(E \cap \Omega) = P \left[E \cap \left(\bigcup_i H_i \right) \right] = P \left[\bigcup_i (E \cap H_i) \right] \\ &= \sum_i P(E \cap H_i) \end{aligned} \quad (4.2)$$

e então para isolar $P(E|H_i)$ toma-se a contribuição correspondente a esse termo

$$P(E|H_i) = \frac{P(E \cap H_i)}{P(H_i)} = \frac{P(E, H_i)}{P(H_i)} \quad (4.3)$$

onde o termo $P(H_i)$ corresponde a uma renormalização que assegura que quando $E = H_i$, $P(E|E) = 1$. A partir dessa relação várias outras são derivadas. Explorando a simetria

$$P(E, H_i) = P(E|H_i)P(H_i) = P(H_i|E)P(E) = P(H_i, E) \quad (4.4)$$

pode-se concluir que dois eventos A e B são *prababilisticamente independentes* se e somente se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$, quando a ocorrência de um evento não influi na do

outro, que é equivalente a $P(A, B) = P(A)P(B) = P(B, A)$. Outra consequência dessa simetria é o próprio teorema de Bayes:

$$P(H_i|E) = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{P(E)} = \frac{P(E|H_i)P(H_i)}{\sum_i P(E|H_i)P(H_i)} \quad (4.5)$$

onde aqui $P(E)$ é a chamada *evidência bayesiana* e inicialmente pode ser interpretada como um constante de normalização que garante que $\sum_i P(H_i|E) = 1$. Essa construção mostra que o teorema de Bayes é uma consequência do mesmo formalismo que sustenta a teoria frequentista da probabilidade, mesmo que não possa ser aplicado nesse caso por que seus termos não teriam sentido. Já no bayesianismo o termo $P(H_i|E)$ representa a *probabilidade da hipótese H_i , dado o evento E* , e é chamada de *probabilidade a posteriori*, que é a ferramenta da inferência estatística bayesiana.

O teorema 4.5 se refere a uma classe completa de hipóteses discretas que em muitos casos, incluindo a Cosmologia, se referem a validade de diferentes modelos teóricos candidatos a explicar os fenômenos observados. Em geral cada modelo possui seu próprio conjunto de n parâmetros contínuos, um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, que são determinados pelo ajuste ao conjunto de dados d da observação/experimento. Assim a probabilidade de cada modelo $P(H_i|E)$ é equivalente a probabilidade $p(\theta|d)d^n\theta$ de que cada parâmetro esteja num intervalo entre θ_i e $\theta_i + d\theta_i$, onde $p(\theta|d)$ é uma *função densidade de probabilidade* (*pdf* em inglês). A passagem das hipóteses discretas para os parâmetros contínuos é feita pelo processo padrão do limite infinitesimal na separação entre os valores discretos.

Do lado direito, $P(E|H_i)$ ou $p(d|\theta)$ é a função *likelihood* ou *verossimilhança* que é a probabilidade do evento ou experimento E (e dos dados coletados d), dada a validade do modelo H_i nos parâmetros θ . Essa função é uma medida da diferença entre as previsões teóricas do modelo nos parâmetros θ e o observado nos dados d , e assim pode ser vista como um funcional dos parâmetros do modelo, uma vez fixados os resultados d do experimento. Por lidar com os dados observados, ela desempenha o papel central na inferência, e o caso frequentista é inteiramente baseado em manipulações feitas sobre essa função, que representa a amostra de resultados do experimento repetível. Nesse caso porém a likelihood não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidade.

Por último o termo $P(H_i) \rightarrow p(\theta)$ é a informação a priori que é a característica marcante do bayesianismo, que representa a informação (sob a forma de uma distribuição de probabilidade) sobre os modelos e parâmetros *antes* da observação ou experimento, o que torna o processo de inferência subjetivo, pois cada experimentador que use sua própria informação a priori e execute o mesmo experimento pode chegar a conclusões diferentes.

Assim a presença da informação a priori reflete a interpretação onde a *probabilidade é uma medida do conhecimento ou informação sobre o modelo ou parâmetro* a ser testado.

Assim o teorema de Bayes mostra que a cada experimento/observação a probabilidade a posteriori é atualizada tanto pela qualidade dos dados d quanto pela informação a priori. E essa pode ser usada tanto para levar em conta os resultados de outros experimentos, como para atualizar os resultados de um mesmo experimento, tomando a probabilidade a posteriori de uma observação como a informação a priori da próxima, gerando assim um mecanismo de aprendizado baseado nos resultados. Isso é um ponto crítico pois nos casos em que os dados do experimento são pouco conclusivos os resultados são dominados pela informação a priori, mas por outro lado a medida que os dados se tornam conclusivos a influência do a priori passa a ser cada vez menos relevante.

Esses argumentos sustentam o critério de objetividade bayesiano em que *somente os observadores que realizem exatamente o mesmo experimento e utilizem exatamente as mesmas informações a priori chegarão aos mesmos resultados*. Isso é evidente na Cosmologia onde o modelo de concordância cósmica é contruído a medida que diferentes cosmólogos, usando diferentes observações e informações a priori, convergem para as mesmas conclusões. A forma padrão do teorema de Bayes torna explícita essa subjetividade:

$$p(\theta|d, I) = \frac{p(d|\theta, I)p(\theta|I)}{\int p(d|\theta, I)p(\theta|I)d^n\theta} \quad (4.6)$$

onde I representa a informação subjetiva e externa, disponível a priori, e dessa maneira toda a equação está condicionada ao estado de conhecimento ou informação I . Por último vale lembrar ainda que as idéias bayesianas vão muito além de sua mera aplicação à inferência. Por exemplo graças ao trabalho dos físicos Cox e Jaynes, hoje sabe-se que o bayesianismo é a única extensão natural da lógica dedutiva frente a informações incompletas. Assim enquanto a lógica dedutiva lida com proposições verdadeiras (1) e falsas (0) a lógica bayesiana é a única extensão consistente para lidar com proposições *incertas* as quais são atribuídas um valor, a probabilidade, entre 0 e 1 [59].

4.2 Algumas Aplicações

Esta seção cobre as ferramentas utilizadas neste trabalho e assim representa uma pequena fração das ferramentas bayesianas, principalmente no aspecto de sua implementação computacional que é o principal motivador de seu uso cada vez mais rotineiro. As vantagens dessa abordagem são nítidas desde os princípios, por sua flexibilidade que trata

parâmetros, proposições e modelos da mesma forma, e permite uma “leitura” muito mais detalhada dos resultados. Neste trabalho o foco da análise estatística foi na estimação de parâmetros usando diferentes conjunto de dados frente a diferentes hipóteses, isto é, diferentes modelos cosmológicos. No entanto como a análise bayesiana fornece uma poderosa ferramenta para a comparação de modelos, algo que não pode ser feito da maneira apropriada na análise frequentista, esse aspecto também foi explorado.

A estimação de parâmetros e suas incertezas é um dos principais objetivos da inferência estatística, assim por uma questão de consistência algumas técnicas bayesianas e frequentistas produzem resultados semelhantes em muitos casos. Em ambos os casos a inferência parte da comparação entre uma curva ou previsão teórica para um observável e os dados vindos das observações. A técnica amplamente utilizada na Física para a estimação de parâmetros é a *técnica dos mínimos quadrados ou do χ^2* , onde os n parâmetros θ_j de um modelo são determinados pelos valores θ_m que *minimizam* a expressão

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\{y_i - y(z_i|\theta)\}^2}{\sigma_i^2} \quad (4.7)$$

através do sistema de n equações $\partial\chi^2(\theta)/\partial\theta_j = 0$. Aqui $\{z_i, y_i\}$ são os N pontos observados, com as barras de erro σ_i que servem como *peso* de cada medida, comparados a curva teórica nos pontos $y(z_i|\theta)$. A forma dessa expressão e sua consistência é justificada pelo famoso *teorema do limite central* de Gauss, que afirma que uma soma de variáveis aleatórias e não correlacionadas tem uma distribuição de probabilidade que converge para uma distribuição normal ou gaussiana, desde que a erro nas medidas seja finito. Nesse caso, as variáveis são os desvios entre as posições dos pontos experimentais e a curva teórica $y(z|\theta)$ correspondente ao *valor real* dos parâmetros θ , e esses desvios são supostamente aleatórios devidos a fatores externos que afetam o experimento. Assim:

$$p(d|\theta, I) \propto \exp\left(\frac{-\chi^2}{2}\right) \propto \mathcal{L}(\theta; d) \quad (4.8)$$

que é a likelihood do experimento, e $\mathcal{L}(\theta; d)$ denota uma funcional dos parâmetros θ . Formalmente, sendo cada medida um evento estatisticamente independente, a likelihood é construída pelo produto das probabilidades de cada uma. E como a probabilidade de cada evento é a mesma do desvio $e_i = y_i - y(z_i|\theta)$ em cada medida (sendo máxima quando o desvio é zero), que é dada por uma distribuição normal com variância σ_i , então

$$p(d|\theta, I) = \prod_{i=1}^N p(e_i|\theta, I) = \left(\prod_{i=1}^N \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_i} \right) \times \exp\left\{ - \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - y(z_i|\theta)]^2}{2\sigma_i^2} \right\} \quad (4.9)$$

e assim os valores θ_m que minimizam χ^2 são os *valores mais prováveis* da likelihood.

As técnicas que utilizam essa idéia são chamadas de *maximização da verossimilhança* e são a base da estatística frequentista. Muitas generalizações podem ser feitas às equações 4.7 e 4.9, para serem aplicadas em diferentes casos, que em geral não foram aplicadas neste trabalho. A mais importante para as SNIa é a generalização para o caso onde as medidas são estatisticamente correlacionadas, e a estimativa da incerteza de uma afeta a da outra. Nesse caso a forma da likelihood é do tipo

$$\mathcal{L}(\theta; d) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} |\det C|^{1/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N e_i(\theta) C_{ij}^{-1} e_j(\theta) \right] \quad (4.10)$$

onde C_{ij} é uma *matriz de covariância* construída a partir dos dados y_i e do modelo por $y(z_i|\theta)$ [59], e seus elementos diagonais são as barras de erro σ_i^2 em cada medida. Isso é necessário à calibração dos modelos empíricos para as curvas de luz de SNIa modelo devido aos parâmetros empíricos e suas incertezas que se propagam aos observáveis. Calculando essas correlações (os termos não-diagonais de C_{ij}), e maximizando a 4.10, fixa-se os valores dos parâmetros empíricos, o que permite o cálculo das incertezas associadas ao processo de calibração. Assim calcula-se essas contribuições às incertezas de cada nova SNIa, que voltam a ser não correlacionadas como na equação 4.9, com a diferença que os erros são $\sigma_i^2 = \sigma_{i1}^2 + \sigma_{i2}^2 + \dots$ onde σ_{ik} são os k erros independentes.

Além dos valores mais prováveis dos parâmetros, que maximizam a likelihood no caso frequentista ou a posteriori no caso bayesiano, há também a maneira tradicional usada em ambas interpretações (com suas diferenças), de apresentar os *intervalos de confiança* nos parâmetros, definidos por uma analogia a uma propriedade de uma pdf gaussiana unidimensional $p(x) \propto \exp \frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma}$ centrada em x_0 e com variância σ , de que a probabilidade total $P = \int p(x) dx$ contida num intervalo centrado em x_0 é

$$\int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} p(x) dx = 68,27\% \quad , \quad \int_{x_0-2\sigma}^{x_0+2\sigma} p(x) dx = 95,45\% \quad , \quad \int_{x_0-3\sigma}^{x_0+3\sigma} p(x) dx = 99,73\% \quad (4.11)$$

que dão origem aos nomes *regiões de confiança* de 1σ , 2σ , e 3σ no espaço n -dimensional dos parâmetros θ que contém a quantidade especificada de probabilidade. No entanto a interpretação frequentista não permite esse cálculo direto pois a integração da likelihood é proibida, uma vez que uma pdf não pode ser atribuída a um parâmetro ou proposição. Nessa interpretação as regiões de confiança não são uma medida da incerteza nos parâmetros, e sim uma medida de que “numa série de infinitas repetições do experimento, em 68,27 % (1σ) das vezes os melhores valores dos parâmetros estarão no

intervalo calculado”. Quanto ao valor real dos parâmetros, essa interpretação não pode afirmar nada, a não ser que esses valores *ou* estão contidos no intervalo, *ou* não.

Na interpretação bayesiana as regiões de confiança são medidas da incerteza nos parâmetros que influenciam o experimento, que são variáveis aleatórias associadas a uma pdf (a posteriori), que por sua natureza pode ser o alvo de uma integração ou *marginalização* em um ou mais parâmetros. A marginalização e a informação a priori são a origem das diferenças entre os resultados das técnicas frequentistas e bayesianas uma vez que a informação a priori *pode ser* usada para restringir a inferência a uma região fisicamente interessante (ou real) do espaço de parâmetros, ou para testar a consistência dos resultados de um experimento com os de outro, o que no caso frequentista não pode ser feito e pode comprometer os resultados. Outra função da informação priori é de converter a likelihood na posteriori a ser marginalizada, já que a likelihood isolada é apenas a pdf para os resultados, dados os parâmetros, e não pode ser integrada. E através da marginalização pode-se lidar com os *parâmetros de ruído*, que são parâmetros que para o experimento em questão não são fisicamente interessantes mas estão presentes na likelihood, e em geral representam parâmetros de calibração empírica e/ou instrumental.

Em ambas interpretações a construção das regiões de confiança baseia-se na determinação das fronteiras no espaço de parâmetros que marcam uma variação arbitrária na função $-2 \ln \mathcal{L} = \chi^2$ em torno do máximo de \mathcal{L} em χ_m^2 , que por analogia ao caso anterior corresponde a quantidade especificada de probabilidade total, *no caso da likelihood ou a posteriori serem aproximadamente gaussianas*. Essas variações de $\Delta\chi_m^2 = \chi^2(\theta) - \chi_m^2$ são calculadas a partir das propriedades da chamada *distribuição estatística* χ^2 para $\nu = N - n$ graus de liberdade (N é o número de medidas e n o número de parâmetros de um modelo), que é a distribuição de probabilidade dos N desvios $(e_i/\sigma_i)^2$ (que converge para uma distribuição normal no limite $N \rightarrow \infty$ pelo teorema do limite central), *no caso em que os desvios de fato tenham uma distribuição normal*. Essa distribuição é uma caso especial da distribuição gama e com suas propriedades calcula-se [59, 63] $\Delta\chi^2$ em função da probabilidade total envolvida e do número n de parâmetros *livres*, pela equação

$$P = 1 - \frac{\gamma(n/2, \Delta\chi^2/2)}{\Gamma(n/2)} = \int_{\Delta\chi^2 < \Delta\chi_m^2} p(\theta|d, I) d^n\theta \quad (4.12)$$

onde Γ e γ são as funções gama e gama incompleta, respectivamente. Essas regiões são calculadas assumindo uma aproximação gaussiana, que nem sempre é válida, assim se a distribuição χ^2 do experimento não converge para um gaussiana os contornos de probabilidade de 1σ , 2σ e 3σ passam a ser apenas uma convenção. Por outro lado se

os desvios não obedecerem uma distribuição normal, dando origem a um excesso dos chamados pontos *outliers* (pontos muito distantes da curva dos parâmetros θ_m), esse formalismo não é apropriado. De qualquer forma ao medir variações em torno de χ_m^2 a tendência das regiões de confiança é de esconder a existência de múltiplos picos de probabilidade, se existirem, e a influência dos pontos outliers, como será visível a seguir.

A distribuição χ^2 também é utilizada por sua capacidade de medir o qualidade do ajuste (*goodness of fit*) do modelo aos dados do experimento, onde em princípio o modelo com o conjunto de parâmetros que melhor se ajusta aos dados será aquele que fornece o menor valor do χ_m^2 . No entanto essa idéia não serve para comparar modelos com diferentes números de parâmetros livres pois em geral quanto maior o seu número, menores os valores de χ_m^2 . Uma outra ferramenta amplamente utilizada é o χ^2 reduzido, definido como $\chi_\nu^2 = \chi^2/\nu$, baseada na propriedade da distribuição χ^2 que tem como valor esperado $\langle \chi^2 \rangle = \nu$. Assim se a likelihood ou a posteriori forem bem aproximadas pela distribuição χ^2 , os melhores valores dos θ_m parâmetros serão tais que $\chi_\nu^2(\theta_m) \approx 1$. Por outro lado um valor de $\chi_\nu^2(\theta_m) < 1$ ou $\chi_\nu^2(\theta_m) > 1$ é um indicador de vários possíveis efeitos: ou o modelo não se ajusta aos dados, ou dados estão correlacionados, ou os erros σ_i foram sub ou super estimados [61, 62, 63]. Além desses testes as propriedades da distribuição χ^2 dão origem a outros testes de qualidade de ajuste usados na estatística frequentista, que em geral não podem ser usados para comparar de maneira direta e eficaz a capacidade que diferentes modelos têm de se ajustar aos dados das observações.

Por outro lado o formalismo bayesiano fornece uma ferramenta para a comparação de modelos baseada na evidência bayesiana, também chamada de likelihood global do modelo, que é a integral de normalização no teorema de Bayes. Partindo de sua definição e reescrevendo a equação 4.6 com a notação em que a informação externa I é a hipótese sobre a validade de um modelo H_i , tem-se:

$$E_i = P(d|H_i) = \int p(d|\theta, H_i)p(\theta|H_i)d^n\theta \quad (4.13)$$

e a comparação de modelos parte da flexibilidade da interpretação bayesiana onde probabilidades podem ser associadas não apenas aos parâmetros de um modelo mas também a hipóteses sobre o próprio modelo. Com isso pode-se reescrever o teorema de Bayes para a probabilidade a posteriori do modelo, dados os resultados do experimento, usando a likelihood global do modelo:

$$P(H_i|d) = \frac{P(d|H_i)P(H_i)}{P(d)} \quad (4.14)$$

onde $P(H_i)$ é a informação a priori sobre a validade do modelo H_i e $P(d)$ é uma constante de normalização que garante que $\sum_{i=1}^k P(H_i|d) = 1$ para k modelos considerados. A grande vantagem dessa abordagem é que likelihood global, através do processo de integração, coloca em ação a *navalha de Ockham*¹, pois os modelos mais complexos (com maior número de parâmetros livres) são penalizados a não ser que sejam justificados pelos dados do experimento e produzam valores maiores na likelihood dos parâmetros, de forma que quanto maior o ajuste do modelo aos dados maior será sua evidência bayesiana. Assim a comparação de modelos baseia-se na razão entre as probabilidades a posteriori:

$$O_{ij} = \frac{P(H_i|d)}{P(H_j|d)} = \frac{P(H_i)}{P(H_j)} B_{ij} \quad (4.15)$$

onde $B_{ij} = E_i/E_j$ é o chamado *fator de Bayes*, e no caso onde não há razão para supor a priori que um modelo seja mais provável do que outro, $O_{ij} = B_{ij}$. No capítulo que se segue os modelos cosmológicos serão comparados com o melhor modelo, que é o Λ CDM, que melhor se ajusta aos dados das SNIa e que possui o menor número de parâmetros livres. E para a comparação será usada a chamada *escala de Jeffreys* [60] que é medida em $\ln O_{ij}$, onde $0 < \ln O_{ij} < 1$ é considerada uma evidência inconclusiva, $1 < \ln O_{ij} < 2,5$ é uma evidência fraca, $2,5 < \ln O_{ij} < 5$ é uma evidência moderada e $\ln O_{ij} > 5$ é uma evidência forte a favor do modelo com maior evidência.

Na Cosmologia atualmente existem outros tipos de critérios usados para comparação de modelos que não foram utilizados neste trabalho, como os chamados *Critério de Informação de Akaike* e o *Critério de Informação Bayesiano*, e suas diversas variações, criados em geral para lidar com as dificuldades associadas a evidência bayesiana, a começar pelo alto poder computacional necessário para calculá-la no caso de experimentos e observações afetados por um grande número de parâmetros, como por exemplo a radiação cósmica de fundo. Esses mecanismos de comparação também contornam outros problemas como por exemplo a escolha dos a prioris nos parâmetros dos diferentes modelos comparados, e em geral se baseiam na comparação do valor do χ_m^2 adicionado a um fator que depende do número de parâmetros, cuja presença penaliza os modelos mais complexos. Assim apesar de serem bem motivados e simples de calcular, não foram aplicados nos resultados que se seguem para evitar uma análise estatística mais complexa, e também por que não repetir um resultado já conhecido que é o de que em geral o Λ CDM é o melhor modelo cosmológico, pois é o mais simples e se ajusta melhor aos dados.

¹Princípio criado pelo filósofo medieval que afirma que hipóteses desnecessárias devem ser descartadas e a explicação mais simples deve ser a favorecida.

5 *Análise de Modelos Cosmológicos*

Este capítulo representa a motivação desta dissertação e da própria Cosmologia que é a possibilidade de investigar, frente aos dados observacionais, teorias físicas bem motivadas sobre a natureza da matéria e energia escuras. Recentemente as possíveis explicações acerca da natureza das componentes escuras se multiplicaram em inúmeras alternativas e assim os modelos abordados aqui não representam sequer uma fração mínima das possibilidades abordadas na literatura atual. Como consequência desta variedade a Cosmologia hoje é uma ciência de muitas possibilidades teóricas que tentam se sustentar frente as evidências observacionais. Assim este capítulo representa um estudo sobre o uso e a contribuição dos dados de SNIa para a Cosmologia e não sobre os detalhes da Física teórica que fundamenta os modelos abordados. Além disso o estudo detalhado sobre a viabilidade de cada modelo deve passar também pelos outros testes observacionais da Cosmologia, que estão além do escopo desta dissertação. Assim este capítulo é uma amostra da capacidade do teste com os dados SNIa utilizados isoladamente, em contraste com a literatura onde são normalmente complementados com outros dados observacionais.

5.1 Introdução

Antes de partir para a análise dos modelos cosmológicos faz-se aqui uma última revisão sobre o uso dos dados de SNIa na Cosmologia, afim de justificar as hipóteses fixadas neste trabalho, o impacto que elas terão nos resultados, e a forma com que estes serão apresentados no restante do capítulo. A equação fundamental usada na construção da escada de distância cósmica é a

$$\mu = m - M = 5 \log d_L + 25 = 5 \log D_L - \log h + 42,39 \quad (5.1)$$

que permite a determinação da distância uma vez conhecida a magnitude absoluta M do astro observado com magnitude m . A magnitude M de cada SNIa observada é estimada (a menos de um fator que depende de H_0) através de suas curvas de luz e de cor, que são comparadas, através de uma estatística χ^2 , com as de um banco de dados de SNIa locais ($z < 0,01$) que tem seus parâmetros e curvas conhecidos. A calibração de cada SNIa fornece os valores de seu módulo de distância μ_i , do redshift z_i de sua galáxia, e o erro na distância $\sigma_{i,\mu}$. Esse erro inclui várias contribuições como as correlações na incerteza dos parâmetros empíricos, variações intrínsecas nas magnitudes (que é uma incerteza somada arbitrariamente de modo que $\chi_\nu \approx 1$ para o conjunto de SNIa), e os fatores instrumentais como a fotometria e o efeito da correção K . A estas componentes somam-se ainda, quando possível, outras contribuições independentes que podem ser apenas estimadas, como as

das lentes gravitacionais em alto z , e a incerteza no redshift associada aos movimentos peculiares da SNIa e da galáxia hospedeira, que contribui com [64]

$$\sigma_{i,\vec{v}} = \frac{\partial \mu}{\partial z} \delta z = \frac{5}{\ln 10} \times \frac{1}{d_L} \frac{\partial d_L}{\partial z} \times \frac{\delta v}{c} \quad (5.2)$$

que domina a incerteza em baixo z (baixas d_L) e estabelece um critério de corte, geralmente entre $0,01 < z < 0,02$, onde as SNIa abaixo deste z não são usadas pois seu redshift é dominado pelos movimentos peculiares. Esta incerteza em geral é incluída nos dados disponibilizados, onde usa-se $\delta v \approx 200 - 600$ km/s, no caso deste trabalho 400 km/s e $z > 0,015$ em todas as amostras. Além disso outros critérios de corte arbitrários também são aplicados para remover SNIa outliers e/ou cujas muitas incertezas citadas acima não podem ser calculadas. A Cosmologia prossegue então com as SNIa restantes, montando a likelihood para um modelo e um conjunto de dados não correlacionados

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\{\mu_i - \mu(z_i, H_0, \theta)\}^2}{\sigma_{i,\mu}^2 + \sigma_{i,\vec{v}}^2} \quad (5.3)$$

onde $\mu(z_i; H_0, \theta)$ é a função teórica dada pelo modelo, construída através da interpolação numérica de uma tabela de valores de $\{\mu(z; H_0, \theta), z, H_0, \theta\}$ que contém tantos pontos quanto necessários para alcançar a precisão almejada, que neste trabalho foi de 1% nas estimativas dos parâmetros cosmológicos¹. A função teórica depende de todos os parâmetros que afetam a distância luminosa $\mu \propto \log d_L$, incluindo a curvatura espacial através de

$$d_L = a_0(1+z) \times \begin{cases} \text{sen}(\chi), & k = 1 \\ \chi, & k = 0 \\ \text{senh}(\chi), & k = -1 \end{cases}, \text{ onde } \chi = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (5.4)$$

e os parâmetros de cada modelo através da equação de Friedmann $H(z)$, ou a sua equivalente em teorias que modificam a RG.

No entanto cada teste observacional da Cosmologia é marcado por sua *degenerescência* característica, que é a existência de amplas regiões no espaço de parâmetros onde a pdf é > 0 . Isso é visível na figura 5.1 que mostra os resultados de vários testes no plano $\Omega_\Lambda - \Omega_m$ do modelo Λ CDM, incluindo as SNIa da amostra Gold usada a seguir. A figura ilustra a forte degenerescência dos resultados das SNIa em relação ao valor de Ω_k , que quando incluído como parâmetro livre gera no espaço de parâmetros uma larga região de compatibilidade com os dados, isto é, com valores razoáveis na likelihood, especialmente para modelos com vários parâmetros livres como por exemplo

¹Essa precisão não é a dos dados utilizados mas sim a da função interpolada $\mu(z; \theta)$ que juntamente com os dados, dão origem ao χ^2 e os resultados.

o gás de Chaplygin [65, 66] analisado a seguir. O parâmetro $\Omega_k = 1 - \Omega_0$ descreve as possíveis geometrias de um Universo homogêneo e isotrópico onde $\Omega_k < 0 \leftrightarrow k = 1$, $\Omega_k = 0 \leftrightarrow k = 0$ e $\Omega_k > 0 \leftrightarrow k = -1$ de forma que Ω_k é um parâmetro contínuo ainda

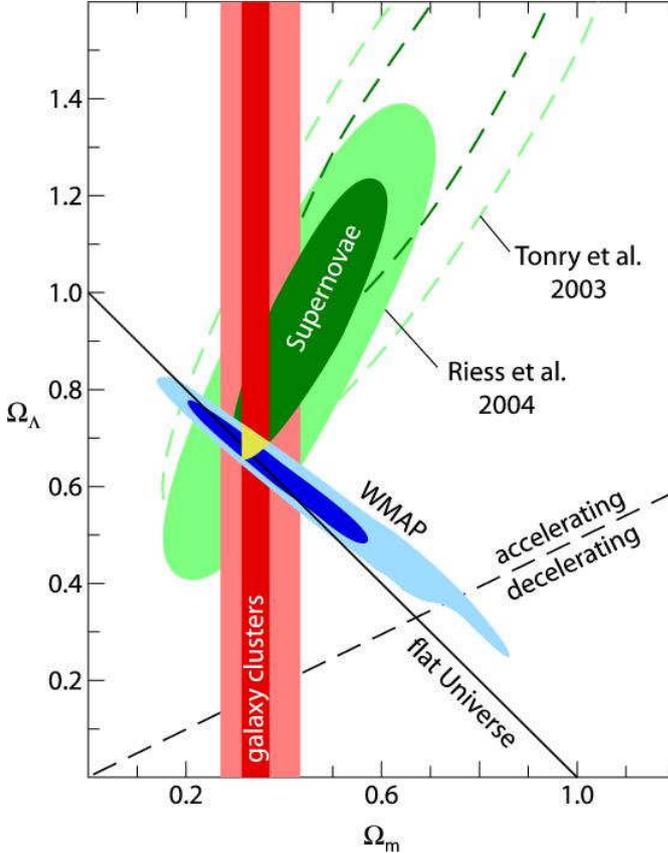


Figura 14: www.xray.mpe.mpg.de/theorie/

valor de um parâmetro medido por outro experimento, ou até mesmo o χ^2 de outra observação com poucos pontos, como é o caso da oscilações acústicas de bárions (BAO) e as medidas de $H(z)$ em galáxias de evolução passiva. Assim dadas essas dificuldades a abordagem deste trabalho segue a tendência encontrada na literatura que é de fixar o parâmetro $k = 0$ para facilitar a construção da d_L e a interpretação dos resultados.

Uma última degenerescência que afeta os testes com as SNIa é o fato de que em princípio a expansão cósmica é sensível apenas à quantidade total de matéria com $p = 0$ no Universo, e assim a estimativa das contribuições individuais da matéria escura e da bariônica deve vir de outras observações ou fixando uma dessas quantidades a priori. Essa afirmação no entanto pode depender do modelo considerado como será visto a seguir.

Para o uso das ferramentas bayesianas foi escolhida a informação *a priori uniforme ou plana* que é afirmação que qualquer valor de cada um dos parâmetros é igualmente provável dentro do intervalo considerado, e 0 fora desse. Assim $p(\theta|I) = k$, onde k é uma constante, e como a informação a priori é uma pdf normalizada, $k^{-1} = \Delta\theta$ que é o tamanho do intervalo considerado. Essa a priori não afeta os resultados e sequer aparece

que k seja discreto. Assim o Universo pode ser curvo ainda que $\Omega_k \approx 0$, porém a única forma de conciliar os resultados das SNIa com este fato é através do cruzamento com os resultados de outras observações (a parte central da figura 5.1 onde as regiões se encontram), especialmente da RCF (através do WMAP) que mostra que $\Omega_k \approx 0$ (a linha $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$), e neste caso a análise estatística dependeria do soma dos χ^2 de cada experimento. Uma outra alternativa é o uso da informação a priori, que dada sua natureza subjetiva pode ser usada de diversas maneiras, geralmente sob a forma de uma gaussiana centrada no

na posteriori pois cancela-se com o fator correspondente na integral de normalização, juntamente com as outras constantes na likelihood 4.9, onde a posteriori final é

$$p(\theta|d) = \frac{\exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right)}{\int \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right) d^n \theta} \quad (5.5)$$

Nesse caso a análise bayesiana poderia reproduzir os resultados frequentistas de maximização da verossimilhança, mas a prática encontrada na literatura e reproduzida aqui é de usar a marginalização para obter as pdfs unidimensionais para cada parâmetro, com a qual calcula-se o valor mais provável e os erros a 1σ ou 2σ do parâmetro.

Assim os resultados expostos a seguir diferem dos da literatura em alguns aspectos, como o da visualização das pdfs unidimensionais para cada parâmetro, que normalmente são usadas apenas para o cálculo dos erros (que neste trabalho foram todos calculados a 95,45% da probabilidade). E também o uso de uma informação a priori plana difere do que é encontrado na literatura onde os dados de SNIa são usadas em conjunto com outros dados observacionais (normalmente sob a forma de um a priori gaussiano), com o objetivo de quebrar a degenerescência entre os parâmetros e aumentar a sensibilidade do dados das SNIa. Assim o que se vê a seguir representa a capacidade real do teste das SNIa e mostra as limitações desses dados usados isoladamente. Por último, para a visualização das regiões de confiança foi seguido o seguinte padrão, em todas as figuras bidimensionais a seguir: a linha contínua representa 1σ e a tracejada 3σ , todas calculadas em relação ao mínimo do χ^2 após a marginalização.

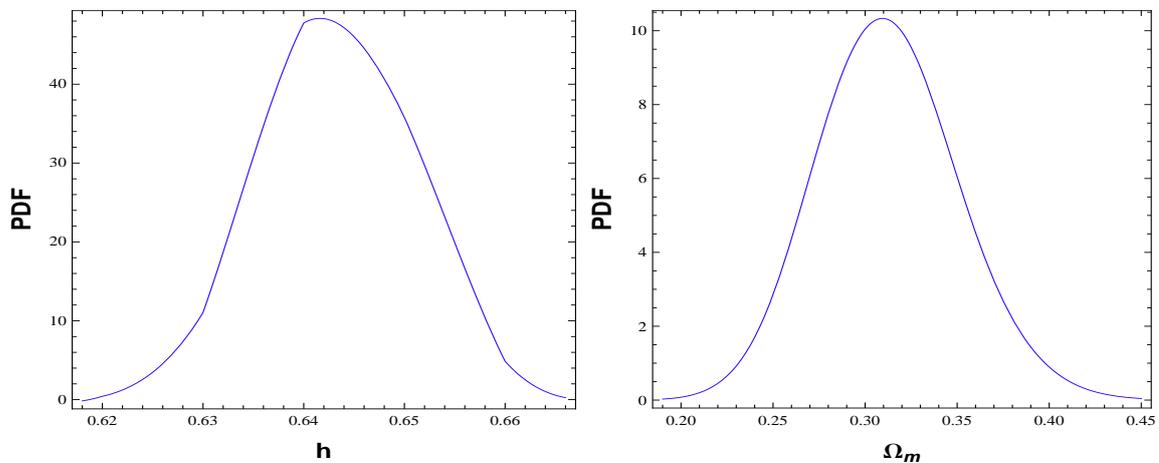
5.2 Λ CDM

Este é o modelo de concordância cósmica que produz os melhores resultados frente a grande maioria dos dados observacionais, e por isso ele é tomado como referência para a comparação de modelos e qualidade de ajuste dos dados. Também é um dos modelos mais simples pois só possui um parâmetro livre que é o da matéria total $\Omega_m = \Omega_e + \Omega_b = 1 - \Omega_\Lambda$ já que $k = 0$ e h é um parâmetro de ruído da calibração das magnitudes das SNIa. Nesse modelo a matéria escura é a CDM que tem *quase* todos os atributos desejáveis frente as outras evidências observacionais, como as anisotropias da RCF e a estrutura em larga escala do Universo. Assim apesar de sua natureza desconhecida e de seu comportamento exótico nas escalas astrofísicas, nesse modelo a matéria escura afeta a expansão do Universo da mesma maneira que a bariônica, com o parâmetro da equação de estado constante $\omega = 0$. Por outro lado a constante cosmológica Λ com $\omega_\Lambda = -1$ e

densidade de energia ρ_Λ constante acelera o Universo, e a equação de Friedmann é

$$H^2 = H_0^2 \{ \Omega_m (1+z)^3 + 1 - \Omega_m \} \quad (5.6)$$

O sucesso desse modelo se origina no fato de que ele é o único compatível com várias evidências observacionais distintas, consideradas isoladamente ou em conjunto. Por exemplo considerando os últimos resultados do WMAP [17], onde $\Omega_k \approx 0$ e $\Omega_m = 0,27$, todos os valores de Ω_m mostrados abaixo são compatíveis com esse. Este não é o caso de alguns modelos cosmológicos que se seguem (e muitos em geral na literatura), onde sem o uso de informação a priori e/ou o cruzamento com outros dados observacionais os resultados em geral não são compatíveis com as várias evidências e os melhores modelos são aqueles que mais se aproximam do Λ CDM. Porém esse aparente sucesso não alivia os problemas acerca da natureza da matéria e da energia escura e as recentes evidências observacionais que não são explicadas por esse paradigma [33]. Assim o que ficará claro nos resultados a seguir é a capacidade do Λ CDM gerar resultados compatíveis com as observações, *sem o uso de informação a priori ou cruzamento de dados*.



(a) $h = 0.642^{+0.017}_{-0.013}$, $\langle h \rangle = 0.644$

(b) $\Omega_m = 0.310^{+0.081}_{-0.073}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.312$

Figura 15: GOLD: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.135(0.644, 0.301)$

Estes primeiros resultados são os da amostra Gold que mostra aparentemente um bom ajuste ao modelo pelo seu valor de $\chi^2_\nu \approx 1$. Como em todos os resultados a seguir, os gráficos são obtidos após a marginalização da pdf multidimensional para os parâmetros, e as barras de erro são calculadas a 95,45% e tomam como referência o o valor mais provável da pdf. Dois aspectos que não são abordados na literatura chamam a atenção: o primeiro é o cálculo do *valor esperado* $\langle \dots \rangle$ do parâmetro, que é uma importante informação ² no caso em que a pdf tem características não gaussianas (como assimetrias), pois no no limite

²Na estatística bayesiana a natureza subjetiva da probabilidade sugere que valor estatisticamente significativo é o valor esperado e não o valor mais provável de uma pdf [58].

em que a distribuição χ^2 (que assume que os desvios na observações sejam aleatórios) converge para uma gaussiana, o valor esperado e o mais provável se igualam. O segundo aspecto é o da pdf para h , que raramente recebe alguma atenção na literatura e é restrito a uma pequena região perto de seu máximo, em geral a $O(1\%)$ do valor usado na calibração, $h = 0,65$. O fato desse valor não concordar com as medidas atuais que colocam $h > 70$ não é uma inconsistência pois seu valor afeta tanto a curva teórica quanto os dados das SNIa, sendo normalmente apenas marginalizado dos resultados finais, o que os altera também na ordem de $O(1\%)$ [67]. Sendo assim todos os modelos exibem resultados semelhantes para esse parâmetro e não são mostrados a seguir.

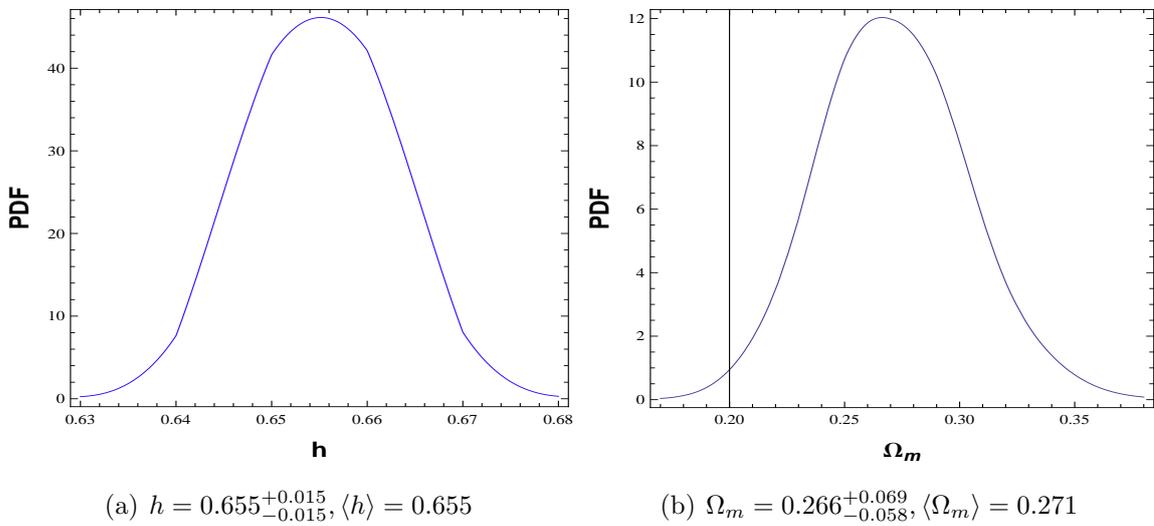


Figura 16: ESSENCE: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.024(0.655, 0.269)$

Esses resultados mostram que os dados dessa amostra, por conter as SNIa dos programas SNLS e ESSENCE projetados especificamente para a observação de SNIa, são os mais uniformes e fornecem o melhores ajustes ($\chi^2_\nu \rightarrow 1$) entre as amostras analisadas aqui.

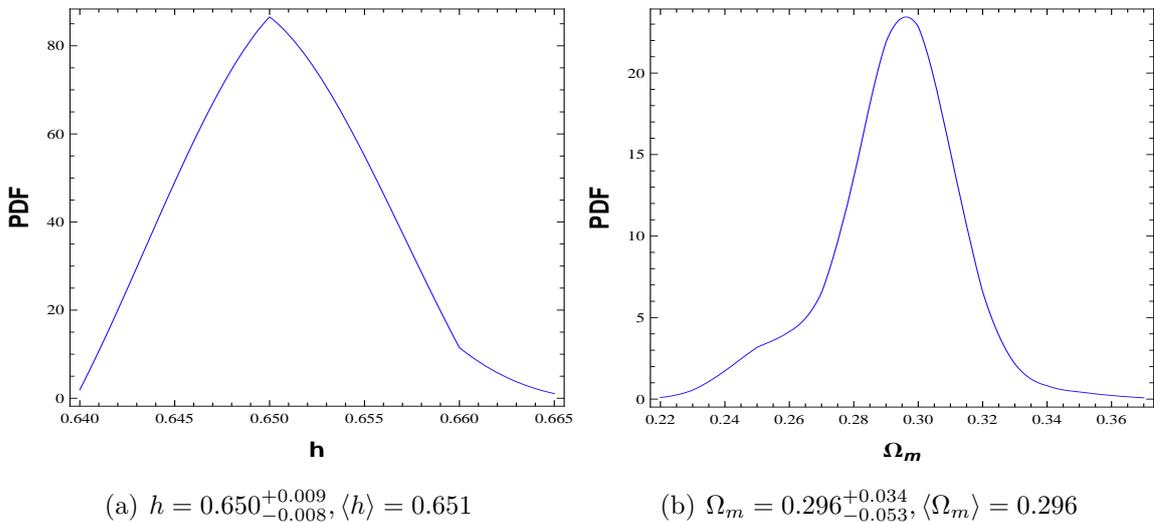


Figura 17: CONSTITUTION: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.179(0.652, 0.289)$

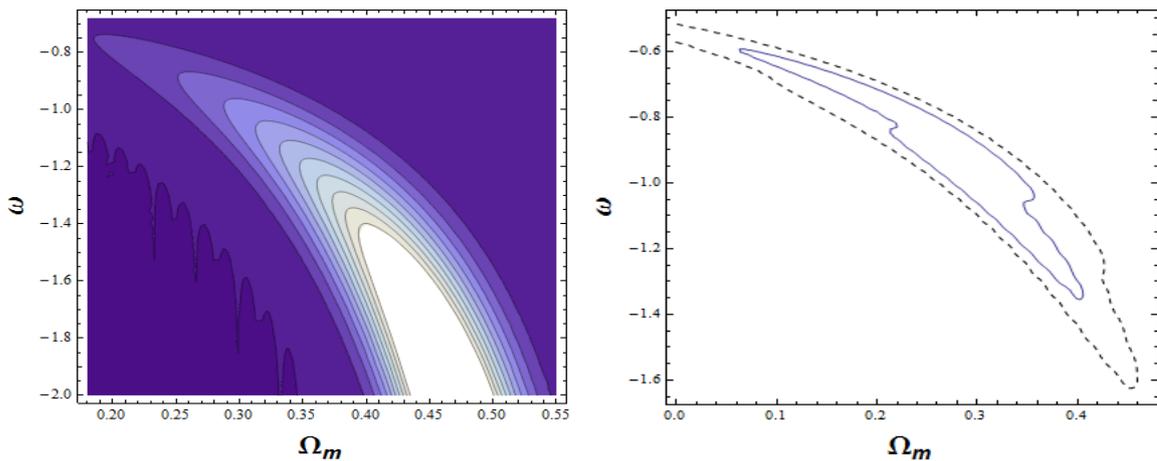
E finalmente a amostra Constitution que mostra o efeito do número crescente de SNIa

utilizadas nas barras de erro, que é o esperado pois o erro nos parâmetros depende do número de pontos observados como $\delta \propto (N)^{-1/2}$ [63], e isso é o que faz com que as barras de erro do Constitution sejam menores (397 SNIa), seguidas das do Essense (192) e Gold (157). Porém os a presença de uma assimetria na pdf de Ω_m dessa amostra indica que esses dados estão sendo afetados por fatores diversos, que não podem ser identificados aqui (a exemplo da presença de outliers, como indicado em [33, 56]), que destróem a convergência para uma distribuição gaussiana, que é o esperado a medida que o número de SNIa nas amostras aumenta.

5.3 ω CDM

Este caso não é um modelo fisicamente motivado e sim uma parametrização (também chamada de $XCDM$) da equação de estado da energia escura, escrita como $p = \omega\rho$, onde ω é uma constante a ser determinada pelos dados. Essa parametrização tem claramente como objetivo testar a consistência dos dados da expansão do Universo com a constante cosmológica que tem sua equação de estado constante e $\omega_\Lambda = -1$, ainda que o teste não seja completo pois assume que a equação de estado é constante ao invés de testar essa hipótese. Assim com essas hipóteses a equação de Friedmann 2.40 é

$$H^2(z) = H_0^2 \{ \Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)(1+z)^{3(1+\omega)} \} \quad (5.7)$$



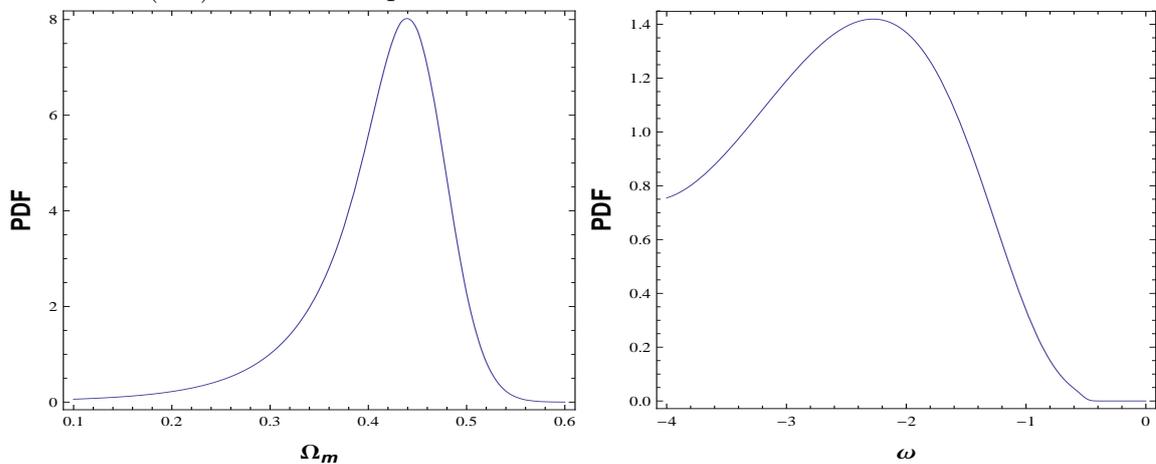
(a) GOLD

(b) CONSTITUTION

Figura 18: Degenerescência no plano $\omega - \Omega_m$

A figura 18 mostra os contornos de probabilidade constante da amostra Gold e as curvas de 1σ e 3σ da amostra Constitution, para os dois parâmetros livres. Fica evidente aqui o resultado problemático da amostra Gold, cujos valores mais prováveis de ω ficam muito distantes de -1. Outra característica notável é que a inclusão de apenas um

parâmetro livre a mais em relação ao Λ CDM introduz uma considerável degenerescência e produz barras de erro bem maiores. A origem dessa degenerescência está na distância luminosa que depende de uma integral da expansão do Universo e de todos os parâmetros que a afetam. Essa integração soma as contribuições de cada parâmetro, o que dificulta a identificação dos seus efeitos, e para separar essas contribuições e distinguir modelos cosmológicos, é preciso construir com precisão adequada a d_L em uma larga faixa de redshift. Esse tem sido o desafio da Cosmologia atual, onde os dados observacionais tem sido usados para progressivamente restringir os valores dos parâmetros cosmológicos. No entanto esses resultados mostram que o uso dos dados das SNIa *isoladamente* leva a resultados bem menos expressivos do que os encontrados na literatura, onde em geral obtém-se $\omega \approx -1 \pm O(1\%)$ com uso de priors como o da BAO.

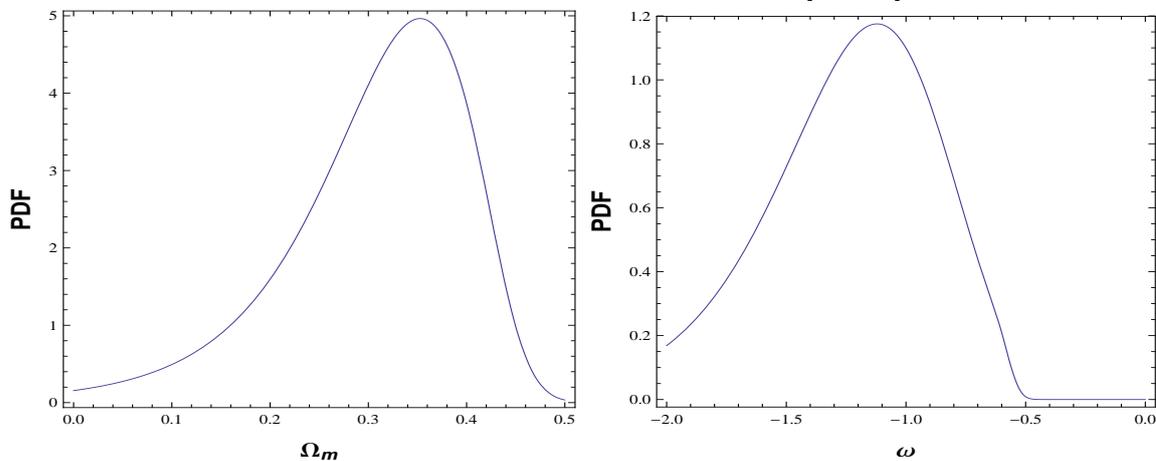


(a) $\Omega_m = 0.440^{+0.088}_{-0.178}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.412$

(b) $\omega = -2.2765^{+1.356}_{-?}$, $\langle \omega \rangle = -1.546$

Figura 19: GOLD: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \omega) = 1.121(0.656, 0.492, -2.411)$

Esses gráficos comprovam que a amostra Gold dá origem a resultados inconsistentes, sendo alegadamente prejudicada pelo uso de SNIa coletadas em diversas observações usando equipamentos diferentes, e pela presença de outliers [49, 68].

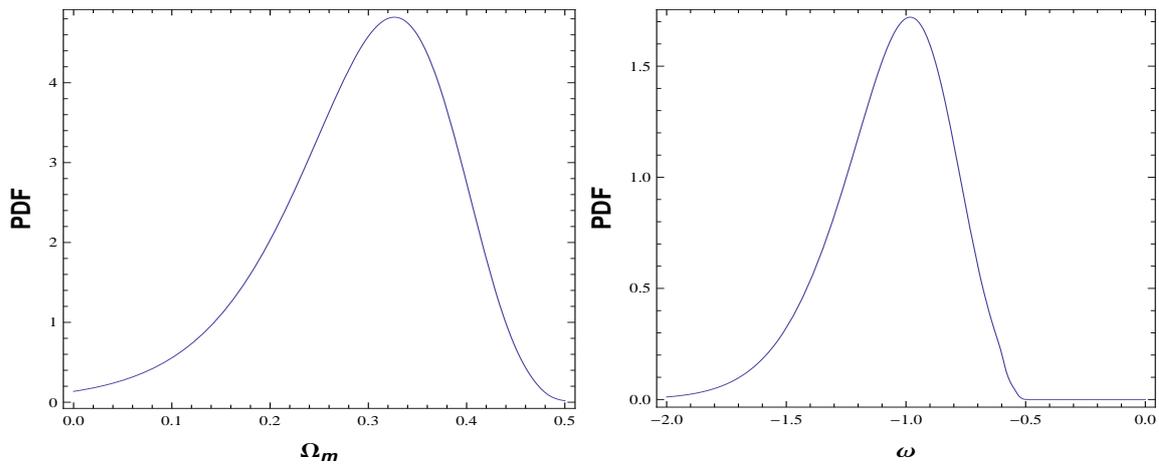


(a) $\Omega_m = 0.353^{+0.108}_{-0.238}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.308$

(b) $\omega = -1.121^{+0.497}_{-0.737}$, $\langle \omega \rangle = -1.213$

Figura 20: ESSENCE: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \omega) = 1.028(0.658, 0.313, -1.153)$

Já as amostras Essence e Constitution mostram sua consistência com $\omega = -1$, ainda que seus melhores valores estão em regiões < -1 e > -1 respectivamente. Isso, somado ao tamanho das barras de erro (que poderiam ser diminuídas com o uso de priors) mostra que estes dados ainda são consistentes com outras possibilidades para a energia escura. Também é visível a vantagem do uso em conjunto dos valores esperado, do valor máximo e o da likelihood máxima, que dão informações muito mais detalhadas sobre o comportamento da pdf do que apenas o valor máximo, deixando visíveis o efeito do aumento do número de SNIa nas barras de erro e na convergência dos valores obtidos.



(a) $\Omega_m = 0.327^{+0.125}_{-0.218}, \langle \Omega_m \rangle = 0.294$

(b) $\omega = -0.982^{+0.372}_{-0.568}, \langle \omega \rangle = -1.061$

Figura 21: CONSTITUTION: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \omega) = 1.182(0.652, 0.300, -1.029)$

Na comparação de modelos nota-se que os valores de χ^2_ν dados acima só são menores do que os valores do Λ CDM para a amostra Gold. Através do uso da evidência bayesiana pode-se obter uma idéia de qual modelo se ajusta melhor aos dados: para a amostra Essence $\ln B_{ij} = 0,10$ e para o Constitution $\ln B_{ij} = 0,39$ a favor do Λ CDM que possui uma evidencia maior, o que na escala de Jeffreys indica uma evidência inconclusiva a favor do Λ CDM. Por outro lado na amostra Gold a tendência se inverte $\ln B_{ij} = 1,08$ que é uma evidência fraca a favor a favor do ω CDM, o que poderia ser mais uma indicação da irregularidade dos dados.

5.4 $\Lambda(t)$ CDM

Este modelo e o próximo são representantes de uma classe muito explorada na literatura cuja estratégia de abordagem ao problema do setor escuro é de supor a existência de uma interação entre suas componentes. Em geral isso pode ser implementado em diversos modelos para o setor escuro e fornece uma solução dinâmica para o problema da coincidência cósmica, onde a energia escura passa a ser descrita por uma equação de

estado efetiva e a transferência de energia para a matéria escura modifica a forma usual, $\rho_e \propto a^{-3}$, com que a matéria escura com $p = 0$ afeta a expansão do Universo [29]. Em contextos específicos pode-se mostrar que a aceleração recente do Universo é uma consequência da transferência de energia para a matéria escura [69, 70], o que implica na criação de partículas ou no aumento de sua massa. Sendo $\rho = \rho_m + \rho_X$ e $p = p_X$ a densidade de energia e a pressão total, a conservação do momentum-energia para cada componente implica que

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0 \longrightarrow \dot{\rho}_e + 3H\rho_e = -\dot{\rho}_X \quad (5.8)$$

e então o passo seguinte do modelo é a especificar a forma de $\dot{\rho}_X$ e suas motivações.

Nesse modelo, descrito em [71, 72, 73], a energia escura é a própria energia do vácuo quântico com $\omega_X = -1$ cuja densidade de energia, num Universo homogêneo e isotrópico, pode variar no tempo. O modelo lida diretamente com o problema da constante cosmológica através de um processo de renormalização da energia do vácuo quântico, cujo cálculo diverge nas teorias de campo em espaço-tempo plano. Em princípio o cálculo dessa energia num espaço-tempo curvo contém essa contribuição, que deve ser subtraída ao final do cálculo, restando assim apenas a parte da energia do vácuo que depende da curvatura, sendo muito alta no passado remoto mas diminuindo com a expansão cósmica. O grande problema é que não existe uma teoria que forneça uma expressão exata para a energia do vácuo no espaço-tempo curvo, que pode ser apenas estimada. Assim esse modelo segue um *ansatz* onde a energia do vácuo é dominada pela contribuição da transição de fase da cromodinâmica quântica (QCD), o que dá origem a uma lei de decaimento da forma $\Lambda \propto m_\pi^3 H = \sigma H$, que concorda com os valores atuais de $\Lambda = 10^{-47} \text{ GeV}^4$, $H_0 \approx 70 \text{ Km/s/Mpc}$ e a massa do pión $m_\pi \approx 150 \text{ MeV}/c^2$.

Esse *ansatz* tem um atrativo do ponto de vista cosmológico pois ele reproduz todas as fases do modelo padrão, incluindo o Universo primordial com energias acima da escala da QCD com diferentes comportamentos de Λ , seguida da fase de radiação, da nucleossíntese e a era da matéria. No Universo mais recente, que é a fase observada com os dados das SNIa, a combinação das equações de Friedmann e da conservação do momentum-energia para cada componente leva a

$$2\dot{H} + 3H^2 - \sigma H = 0 \quad (5.9)$$

que pode ser integrada no tempo para gerar uma solução $a(t)$ que tem a propriedade desejada de reproduzir uma fase Einstein-de Sitter no passado remoto e uma fase de Sitter no futuro, como no ΛCDM . E com essa solução pode-se reescrever a evolução das

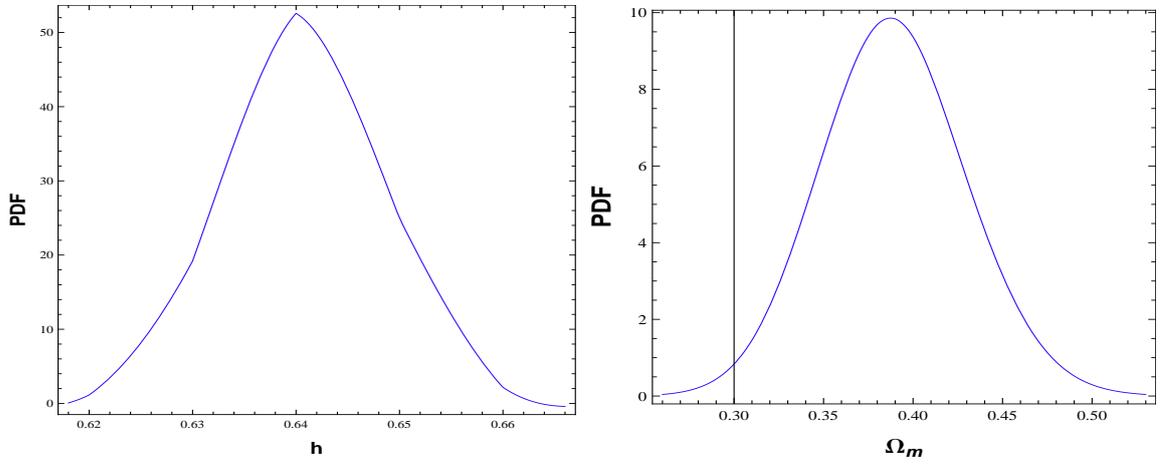
densidades de energia

$$\rho_m = \frac{\sigma^2 C^3}{3a^3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}} \quad \text{e} \quad \rho_\Lambda = \frac{\sigma^2}{3} + \frac{\sigma^2 C^{3/2}}{3a^{3/2}} \quad (5.10)$$

onde C é uma constante de integração, que mostram como a transferência de energia altera a evolução das densidades da matéria e da energia do vácuo. Com essas relações a equação de Friedmann fica

$$H(z) = H_0 \{ \Omega_m (1+z)^{3/2} + 1 - \Omega_m \} \quad (5.11)$$

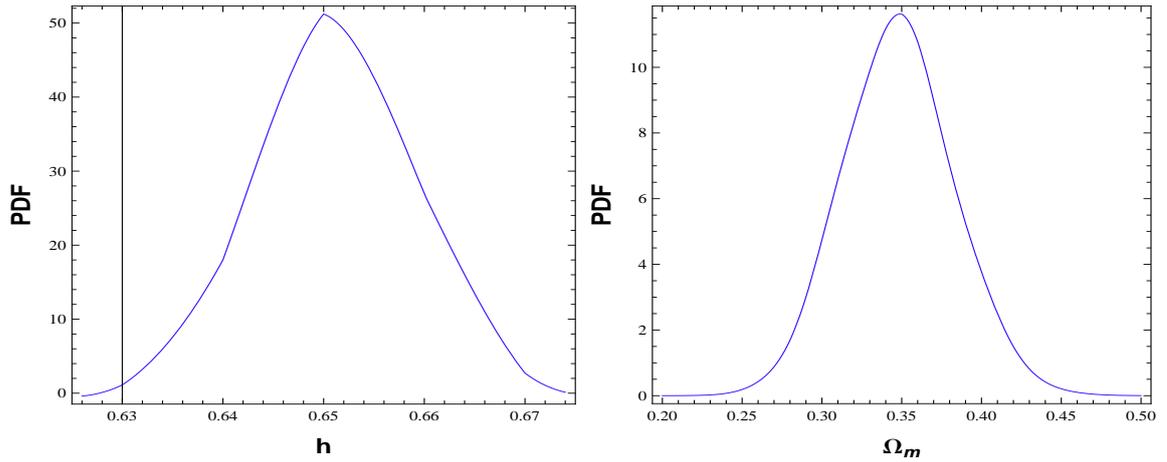
e como a taxa de transferência de energia é fixada pelo ansatz, esse modelo só tem um parâmetro livre.



(a) $h = 0.640^{+0.016}_{-0.014}$, $\langle h \rangle = 0.641$

(b) $\Omega_m = 0.387^{+0.084}_{-0.079}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.390$

Figura 22: GOLD: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.150(0.641, 0.387)$

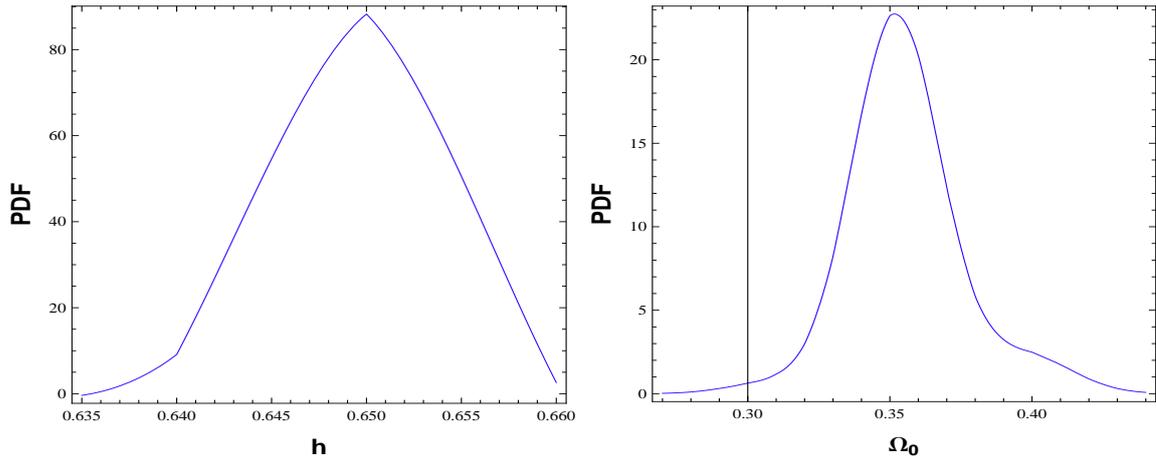


(a) $h = 0.650^{+0.017}_{-0.014}$, $\langle h \rangle = 0.651$

(b) $\Omega_m = 0.349^{+0.070}_{-0.070}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.348$

Figura 23: ESSENCE: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.031(0.651, 0.347)$

Esses resultados mostram que a tendência desse modelo é de um valor de Ω_m superior ao de concordância (mesmo com o uso de priors [74]), apesar das barras de erro mostrarem que esses valores são ainda compatíveis com o Λ CDM.



(a) $h = 0.650^{+0.008}_{-0.008}$, $\langle h \rangle = 0.649$

(b) $\Omega_m = 0.352^{+0.058}_{-0.036}$, $\langle \Omega_m \rangle = 0.356$

Figura 24: CONSTITUTION: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m) = 1.186(0.649, 0.357)$

Outro aspecto visível é o de que apesar de também possuir apenas um parâmetro livre o ajuste do modelo aos dados é ligeiramente inferior ao do Λ CDM, pelos valores de χ^2_ν . Nesse caso esses valores podem ser comparados diretamente (pois os modelos tem o mesmo número de parâmetros), e mostram uma pequena preferência pelo Λ CDM. A evidência bayesiana também mostra essa preferência apontando evidências fracas (Gold) ou inconclusivas (Essence e Constitution) a favor do Λ CDM. Assim a conclusão é de que no que diz respeito aos dados de SNIa apenas, esse modelo é apenas marginalmente compatível com o Λ CDM além de não oferecer um melhor ajuste aos dados do que esse.

5.5 Running Λ

Este modelo compartilha a intenção do anterior em atacar diretamente o problema da constante cosmológica partindo do fato de que tanto do ponto de vista clássico quanto quântico não há razão para supor que Λ seja constante ou zero. Esse caso porém não é um ansatz e sim uma abordagem mais direta através do formalismo do grupo de renormalização aplicado à teoria quântica de campos efetiva em espaço-tempo curvo. Colocando da maneira mais simples (a descrição completa se encontra em [75, 76]), a idéia é de que através de uma teoria de campo efetiva pode-se investigar os efeitos quânticos provenientes de novos campos/partículas perto da escala de Planck, ainda que a teoria fundamental para a gravitação quântica não seja totalmente conhecida. E através de uma equação do grupo de renormalização, a energia do vácuo Λ faz o papel de uma constante de acoplamento cujo valor depende da densidade de energia do Universo. Combinando argumentos teóricos e fenomenológicos (que parecem invalidar o ansatz do modelo anterior $\Lambda \propto H$),

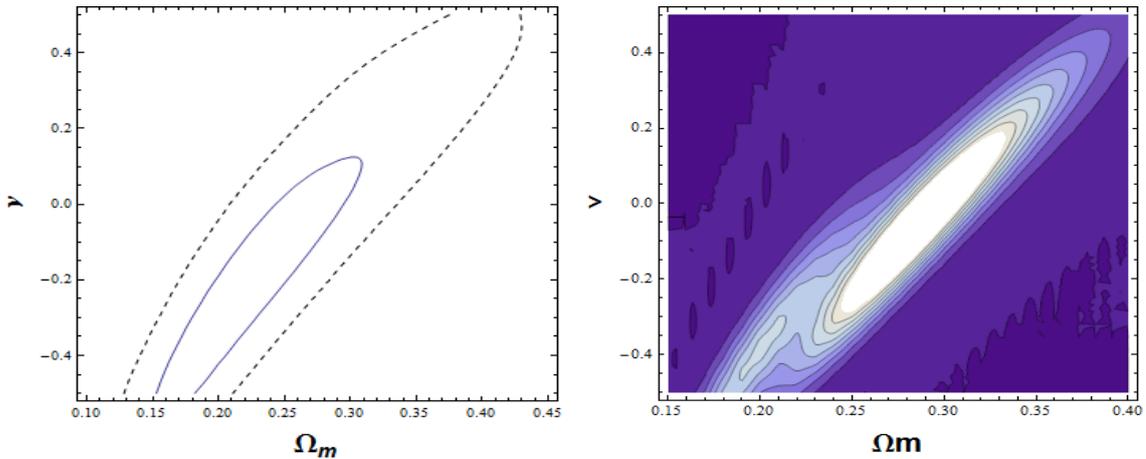
deduz-se a forma da equação do grupo de renormalização que é

$$\frac{d\Lambda}{d\ln H} \approx \frac{\sigma H^2 M^2}{4\pi^2} = \frac{3\nu}{4\pi} H^2 M_P^2 \quad \text{com } \nu = \frac{\sigma}{12\pi} \frac{M^2}{M_P^2} \quad (5.12)$$

onde M é a soma das contribuições das massas de cada campo/partícula, M_P^2 a massa de Planck, $\sigma = \pm 1$ dependendo se a maior contribuição for bosônica ou fermiônica, e o parâmetro ν quantifica a contribuição dos campos. Juntamente com as equações da conservação do momentum energia, essa relação permite, assim como no modelo anterior, expressar a evolução das componentes e a equação de Friedmann, que no caso $k=0$ é:

$$H^2(z) = H_0^2 \left\{ 1 + \Omega_m \frac{(1+z)^{3(1-\nu)} - 1}{1-\nu} \right\} \quad (5.13)$$

e por fim mostra-se que no caso $|\nu| \ll 1$ esse modelo se aproxima do Λ CDM e reproduz as fases do modelo padrão como a nucleossíntese e as eras da radiação e da matéria. Por exemplo para campos cuja escala de energia seja próxima a escala de Planck, $M \approx M_P$ e $\nu \approx 0,01$ e assim espera-se que os valores fisicamente interessantes sejam $\nu \lesssim 0,01$.



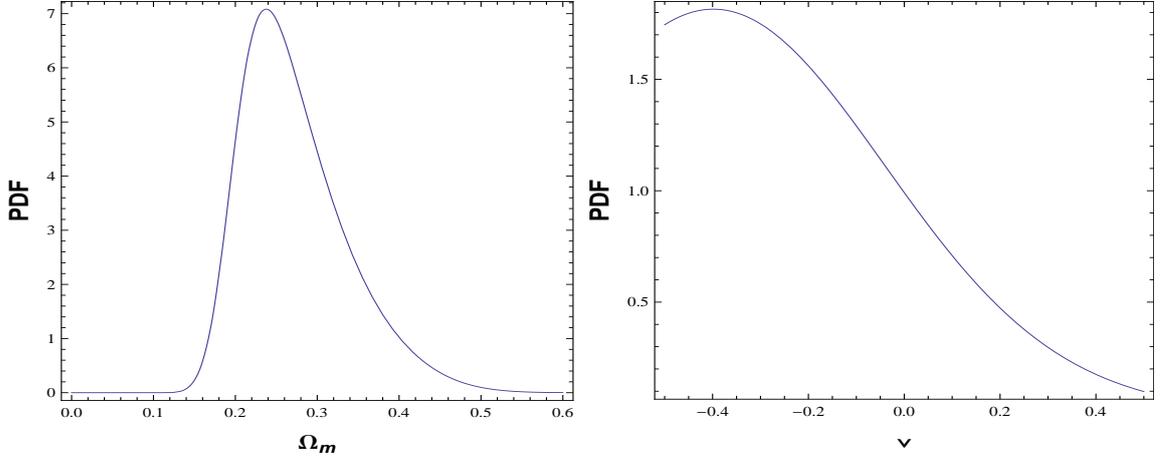
(a) Essense

(b) Constitution

Figura 25: Degenerescência no Modelo Running Λ

Os resultados mostram mais uma vez que o modelo possui degenerescência suficiente tal que seus parâmetros não são acuradamente restringidos pelos amostras atuais de dados de SNIa, ainda que haja uma evolução visível nos resultados a medida que o número de SNIa aumenta. A amostra Gold mais uma vez mostra resultados problemáticos, pois nesse caso o valor de ν obtido não permite a ocorrência da nucleossíntese primordial. Já a amostra Essense mostra uma sensibilidade maior ao valor de ν mas assim como a Gold prevê um Ω_m abaixo do observado. Por último a Constitution mostra um valor de Ω_m muito consistente com o observado, e deixa evidente que apenas essa amostra começa a atingir a sensibilidade necessária para restringir esse modelo, como observado na evolução dos valores máximo, esperado e χ_ν^2 . Assim a conclusão é de que a investigação desse

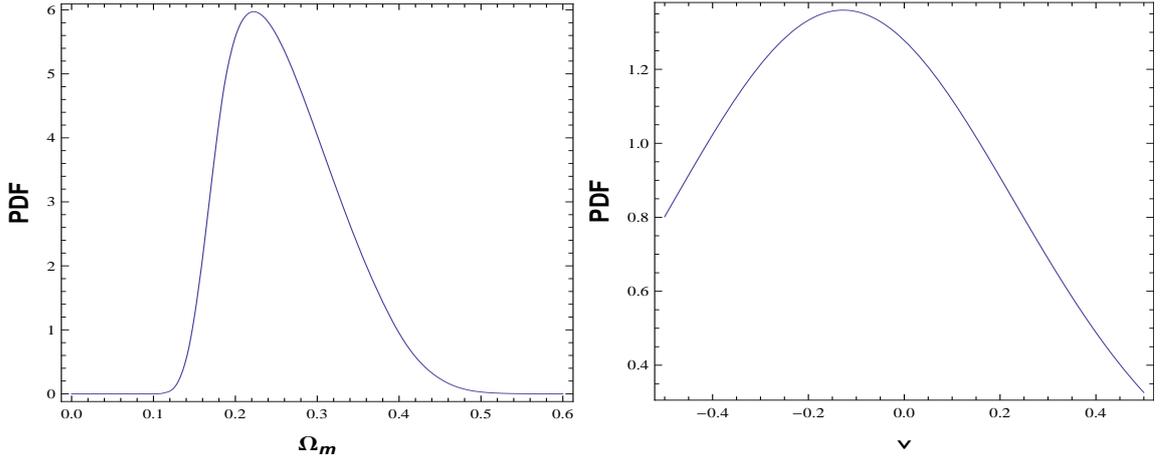
modelo precisa da complementação com outros dados observacionais, como por exemplo da estrutura em larga escala, que se mostra compatível com $\nu < 10^{-3}$ [77].



(a) $\Omega_m = 0.238^{+0.173}_{-0.073}, \langle \Omega_m \rangle = 0.273$

(b) $\nu = -0.398^{+0.670}_{-0.547}, \langle \nu \rangle = -0.178$

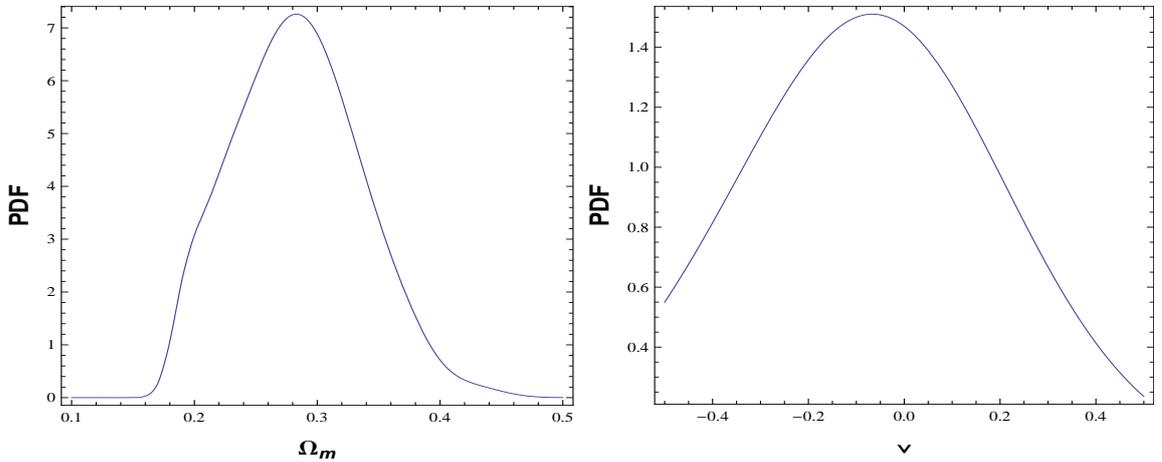
Figura 26: GOLD: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \nu) = 1.130(0.648, 0.199, -0.501)$



(a) $\Omega_m = 0.222^{+0.175}_{-0.075}, \langle \Omega_m \rangle = 0.261$

(b) $\nu = -0.127^{+0.517}_{-0.513}, \langle \nu \rangle = -0.060$

Figura 27: ESSENCE: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \nu) = 1.027(0.659, 0.217, -0.234)$



(a) $\Omega_m = 0.283^{+0.101}_{-0.100}, \langle \Omega_m \rangle = 0.284$

(b) $\nu = -0.066^{+0.436}_{-0.462}, \langle \nu \rangle = -0.047$

Figura 28: CONSTITUTION: $\chi^2_\nu(h, \Omega_m, \nu) = 1.181(0.653, 0.257, -0.157)$

Já o aspecto de comparação de modelos mostra novamente que esses dados não são sensíveis o suficiente para chegar a conclusões acerca desse modelo. Comparando por exemplo com a parametrização ω CDM os valores de χ_ν^2 são praticamente os mesmos. Já em relação ao Λ CDM a comparação bayesiana também é inconclusiva pois as evidências são praticamente iguais e $\ln B_{ij} < 1$ para todos os casos.

5.6 Gás de Chaplygin Generalizado

Este caso é a inspiração dos chamados modelos de quartessência que propõem que a matéria e a energia escura sejam ambas manifestações de um mesmo fenômeno físico, em oposição a quintessência e outros modelos que em geral supõem a existência separada da CDM e da energia escura. Assim como no caso anterior suas motivações têm origem nas propostas da física teórica para conciliar a Mecânica Quântica com a Relatividade Geral, nesse caso através das teorias de supercordas e suas possíveis dimensões espaciais extras compactificadas. Originalmente o gás de Chaplygin aparece como um fluido com pressão negativa e uma equação de estado exótica $p_c = -A/\rho_c$ (com $A > 0$) que é deduzida da ação de Nambu-Goto, a ação mais simples das teorias de cordas, para uma d -brana (um objeto em d dimensões) em um espaço-tempo em $(d+1,1)$ dimensões. Assim no contexto das teorias de cordas esse modelo é bem motivado e além disso possui uma generalização para teorias supersimétricas [78, 79]. Porém o caso analisado aqui é uma generalização do anterior, que também pode ser interpretado como uma d -brana generalizada [80] e é descrito pela equação de estado

$$p_c = \frac{-\bar{A}}{\rho_c^\alpha} \quad (5.14)$$

e como nesse modelo não há interação, sua densidade de energia se conserva separadamente, e integral da equação de conservação leva a

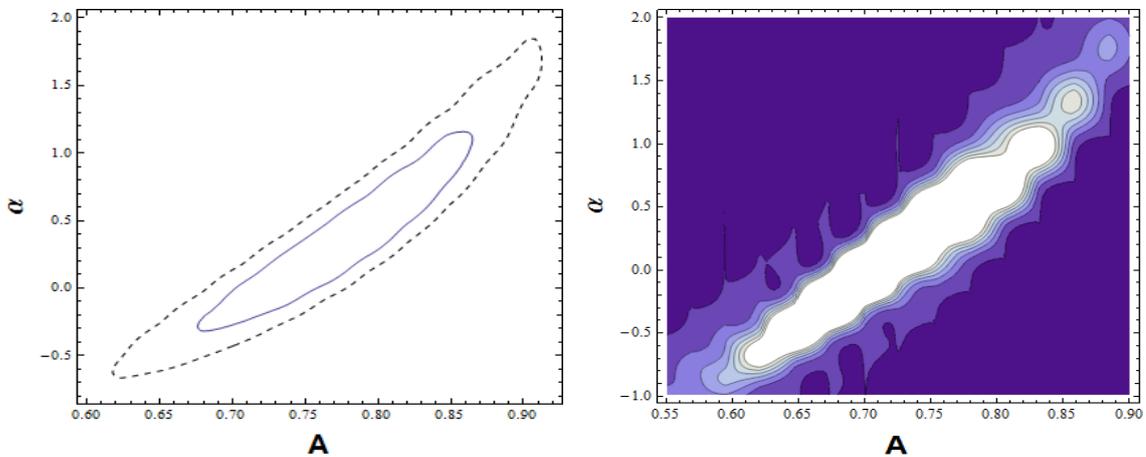
$$\rho_c = \rho_{c0} \left\{ A + \frac{1-A}{a^{3(1+\alpha)}} \right\}^{\frac{1}{1+\alpha}} \quad (5.15)$$

onde $\bar{A} = A\rho_{c0}$ tal que em $a(t_0) = 1$, $\rho_c = \rho_{c0}$. Esse é o chamado gás de Chaplygin generalizado, que no caso $\alpha = 1$ se reduz ao original. Do ponto de vista da cosmologia esses modelos são interessantes pois no caso em que $0 < A < 1$ o comportamento de sua densidade de energia dada pela expressão acima varia entre o da matéria ($p = 0$ e $\rho_c \propto a^{-3}$) no passado remoto ($a \ll 1$) e uma fase de Sitter no futuro ($a \rightarrow \infty$) com constante cosmológica $\rho_c = -p \propto A^{\frac{1}{1+\alpha}}$, com uma fase intermediária onde $p \approx \alpha\rho$. Outro aspecto interessante é que o modelo se comporta como energia do vácuo para $A = 1$ e

como o modelo Λ CDM para $\alpha = 0$. Assim o modelo pode ser visto como uma mistura de matéria descrita por $p = \alpha\rho$ e uma constante cosmológica com $\rho \propto A^{\frac{1}{1+\alpha}}$ o que em princípio poderia eliminar a necessidade da existência da CDM como entidade separada. Esses modelos foram extensivamente estudados na última década não só através dos dados de SNIa (por exemplo [65, 66]) onde a equação de Friedmann com $k = 0$ é

$$H^2(a) = H_0^2 \left\{ \Omega_m a^{-3} + (1 - \Omega_m) \left(A + \frac{1 - A}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \right\} \quad (5.16)$$

mas também frente as várias outras evidências observacionais. Inicialmente o valor de α foi restringido a $0 < \alpha < 1$ o que garantiria uma velocidade de som $0 < v_s^2 < c$ para as perturbações de densidade que dão origem a estrutura em larga escala do Universo, já que para o gás de Chaplygin $v_s^2 = \partial p / \partial \rho = A\alpha / \rho_c^{1+\alpha}$. Mas como essa restrição deve ser investigada em detalhes no formalismo da teoria de perturbações cosmológicas, e como os outros dados observacionais não restringem os valores dos parâmetros, especialmente o de α , outros intervalos passaram ser estudados na literatura, dependendo do teste considerado. Soma-se a esse fato a presença da matéria $\Omega_m = \Omega_e + \Omega_b$ que pode ser modelada de várias maneiras, por exemplo supondo que toda a matéria não bariônica é descrita pelo gás de Chaplygin (quando $\Omega_e = 0$), fixando a priori a quantidade de matéria bariônica Ω_b pela nucleossíntese primordial, deixando a quantidade total Ω_m livre e ainda outras combinações. O resultado é que existem várias maneiras com as quais o esse modelo pode ser testado frente as evidências, dependendo da escolha dos parâmetros e de seus intervalos. Nesse trabalho a alternativa mais simples foi escolhida para testar a capacidade de unificação do modelo, onde $\Omega_m = 0$ apesar da existência da matéria bariônica que poderia ser fixada a priori. Assim na equação de Friedmann só há dois parâmetros livres, onde $A \in [-1, 1]$ e $\alpha \in [-1, 2]$.

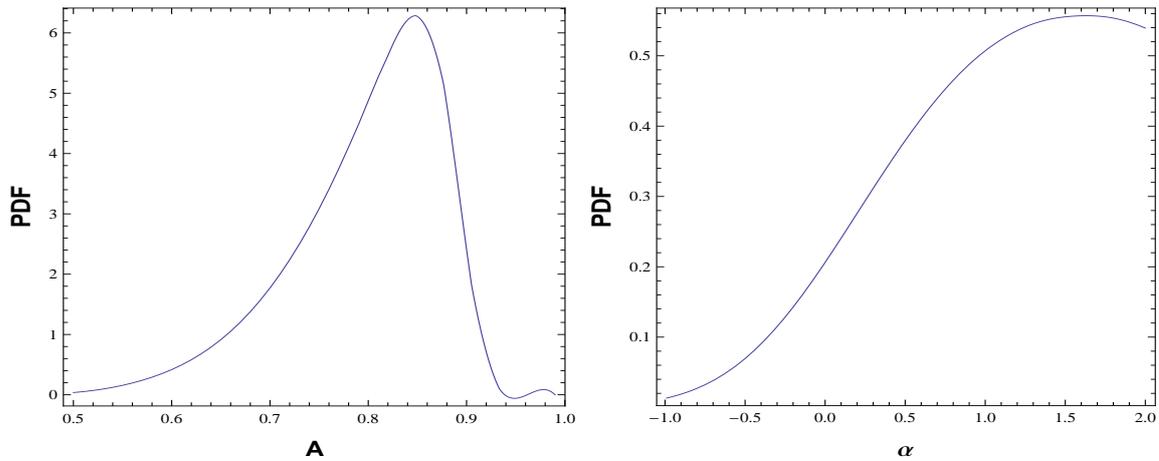


(a) Essence

(b) Constitution

Figura 29: Degenerescência no Modelo Gás de Chaplygin Generalizado

Esses gráficos mostram que mesmo a escolha conveniente de eliminar os parâmetros Ω_k e Ω_m o que resta são pdfs ainda degeneradas no espaço de parâmetros do modelo. Em particular é visível na amostra Gold a degenerescência relatada na literatura [81] na direção de valores positivos de α e $A \rightarrow 1$, que por outro lado não se faz visível nas outras. Outras características notáveis são a grande diferença nos valores obtidos com as diferentes amostras que demonstram a sensibilidade do teste com o aumento do número de SNIa utilizadas, e também o fato de que nenhuma amostra produz valores $\neq 0$ para a pdf na região $A < 0$, o que é um sinal da consistência do modelo.

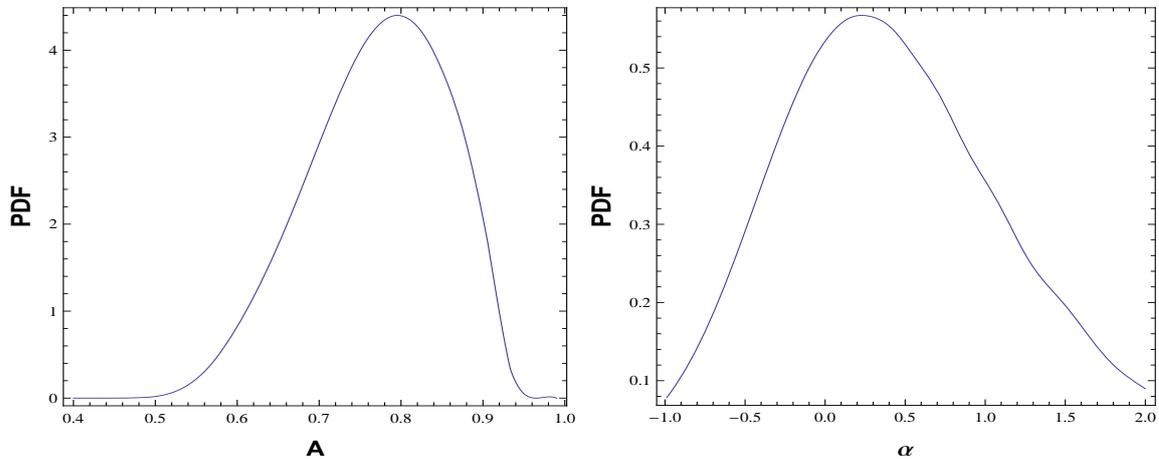


(a) $A = 0.848^{+0.072}_{-0.212}, \langle A \rangle = 0.798$

(b) $\alpha = 1.630^{+?}_{-1.850}, \langle \alpha \rangle = 1.006$

Figura 30: GOLD: $\chi^2_\nu(h, A, \alpha) = 1.124(0.651, 0.920, 2.614)$

A amostra Gold mostra mais uma vez, no parâmetro α , a sua tendência para resultados em regiões distintas do espaço de parâmetros, que poderia levar a conclusões que são desmentidas pelas outras amostras de SNIa. Já a amostra Essence mostra a mudança do resultado do parâmetro $\alpha \rightarrow 0$ e também a mudança no parâmetro A para valores mais baixos.

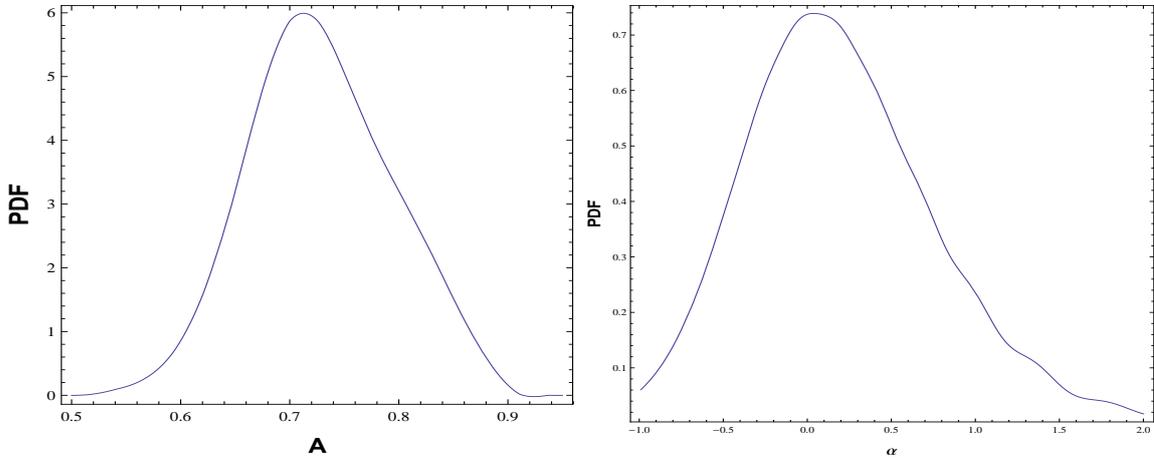


(a) $A = 0.795^{+0.122}_{-0.178}, \langle A \rangle = 0.771$

(b) $\alpha = 0.228^{+1.490}_{-1.036}, \langle \alpha \rangle = 0.408$

Figura 31: ESSENCE: $\chi^2_\nu(h, A, \alpha) = 1.028(0.658, 0.779, 0.355)$

A mesma tendência também é visível na Constitution que mostra valores ainda mais baixos de A e valores de α , como mostram os valores médio e do χ^2_ν .



(a) $A = 0.713^{+0.153}_{-0.108}, \langle A \rangle = 0.728$

(b) $\alpha = 0.037^{+1.310}_{-0.889}, \langle \alpha \rangle = 0.203$

Figura 32: CONSTITUTION: $\chi^2_\nu(h, A, \alpha) = 1.182(0.652, 0.730, 0.154)$

Na comparação de modelos nota-se que os valores de χ^2_ν novamente são menores do que o do Λ CDM o que justifica o uso das técnicas bayesianas de comparação. Porém nesse caso a comparação pela evidência bayesiana tem resultados surpreendentes que apontam que o gás de Chaplygin se ajusta melhor aos dados do que o Λ CDM com $\ln B_{ij} = 1,58$ para a amostra Gold o que é um evidência fraca a favor do gás de Chaplygin. Já a comparação com a Essence resulta em $\ln B_{ij} = 0,64$ e a Constitution $\ln B_{ij} = 0,34$ que são evidências inconclusivas, mas também a favor do gás de Chaplygin. Esse é um resultado interessante que deve ser comparado a outros da literatura, onde através do uso de outros critérios de comparação, o modelo Λ CDM geralmente é o melhor [55]. No entanto deve-se lembrar que todas as técnicas de comparação penalizam modelos com mais parâmetros livres, e que portanto esse resultado pode ser consequência do fato de que o parâmetro Ω_m foi eliminado desse modelo, gerando apenas um parâmetro livre a mais do que o Λ CDM. Assim mais uma vez a degenerescência da pdf que possui valores $\neq 0$ em uma ampla região do espaço de parâmetros (A, α) é o que gera uma evidência maior do que a do Λ CDM.

6 Conclusões e Perspectivas

A Cosmologia é atualmente uma ciência de várias frentes que vão desde a observação e redução de dados astronômicos até a investigação da Física apropriada as escalas mais extremas da natureza. Assim devido a essa abrangência, e ao caráter de revisão deste trabalho, muitos detalhes relevantes ao uso das SNIa na Cosmologia não foram abordados aqui. Ainda sim através dos resultados obtidos, algumas conclusões sobre esse teste observacional puderam ser inferidas ao término deste trabalho.

Na última década através de grandes projetos como o SNLS, Essence, CfA e o telescópio espacial Hubble, a Cosmologia baseada na observação de SNIa atingiu uma maturidade e deu um passo além do inicial no fim da década de 90 que revelou a aceleração do Universo. Além do aumento gradual no número de SNIa presentes nas amostras, que garantem a qualidade estatística dos resultados, houve também uma sensível melhora nos procedimentos de calibração das magnitudes das SNIa. Esta calibração é baseada na suposição de que as explosões de SNIa ocorridas há bilhões de anos-luz e observadas hoje ocorrem exatamente da mesma forma que as SNIa locais, a milhões de anos-luz, que podem ser bem observadas e estudadas em seus detalhes. E se por um lado há uma grande quantidade de evidências reportadas na literatura que suportam essa suposição, no nível de precisão já atingido pela calibração, por outro lado há diversos efeitos que introduzem erros na estimativa das distâncias das SNIa. Alguns desses já tem sua contribuição estimada nas barras de erro das medidas, como é o caso dos velocidades peculiares (que dominam os erros em baixo z), das lentes gravitacionais (que introduzem erros em alto z) e dos erros induzidos pela calibração com as curvas de luz das SNIa modelo.

Porém estas técnicas de calibração empírica e de estimativa de incertezas estão se aproximando de uma nova etapa, a medida que um limite é atingido. Quanto maior o número de SNIa nas amostras, menor é o erro nas estimativas dos parâmetros devido ao peso estatístico de cada medida individual. E atualmente essas estimativas de parâmetros cosmológicos começam a ser mais afetadas pelas incertezas de origem observacional e Astrofísica do que pela incerteza de origem estatística. Assim o futuro próximo das investigações baseadas nas SNIa passa necessariamente por uma investigação mais profunda desses diversos efeitos, e é provável que a Astrofísica das SNIa se torne um tema de grande importância para a Cosmologia, em uma analogia ao que já ocorreu com a Física das anisotropias da RCF. Apesar da extensa discussão encontrada na literatura ainda não há um consenso sobre como alguns desses efeitos afetam as SNIa e de como corrigi-los. Uma prova disto é a presença constante de SNIa outliers nas amostras, que por motivos diversos tem suas magnitudes muito acima ou abaixo da maioria, e que mesmo sendo sistematicamente removidas das amostras pelas equipes de astrônomos, ainda sim

parecem se fazer presentes no resultados deste trabalho.

Um efeito em particular que é o alvo de muitas investigações e é um dos principais desafios futuros para o uso das SNIa na Cosmologia, por lidar diretamente com a suposição usada na calibração das magnitudes, é o da evolução Astrofísica das SNIa possivelmente devido a evolução da composição química do Universo. Sabe-se que os elementos químicos leves, até o Fe, são produzidos no interior das estrelas, e acima desse, pelas explosões de SN. Assim quanto mais velho o Universo maior o seu conteúdo metálico e isto pode afetar as SNIa de várias maneiras, como pela variação da extinção interestelar na galáxia hospedeira com z e pela variação da razão entre as quantidades de C e O presentes na anã branca no momento da explosão, que apesar de terem o mesmo produto final de sua combustão (o ^{56}Ni), têm balanços energéticos diferentes em suas cadeias de reações. Além da evolução há também outros efeitos que ainda não podem ser descartados como a possível existência de diferentes sub-tipos de SNIa que não deveriam ser calibrados usando o mesmo modelo empírico.

Apesar de não haver como afirmar, com base nos resultados deste trabalho apenas, que este ou outro efeito em particular esteja afetando os dados das SNIa, os resultados da amostras Gold e Constitution mostram sinais que poderiam ser causadas por esses fatores. Mas como na literatura a presença desses efeitos ainda é muito discutida, até pelo fato de que essa só poderá ser confirmada com amostras maiores de SNIa que terão maior precisão estatística, os resultados apresentados aqui pedem uma investigação mais detalhada de cada amostra, a exemplo da Constitution que foi originalmente processada por vários filtros de calibração, mas que aqui está representada por apenas um deles, o SALT. Por outro lado fica claro nos resultados obtidos aqui e na literatura em geral que as diferenças entre as amostras são causada pelas diferenças nos mecanismos de calibração e como esses lidam com os vários efeitos astrofísicos e instrumentais.

De qualquer forma fica claro com os resultados expostos aqui que o teste cosmológico com os dados de SNIa ainda tem muito a evoluir nos próximos anos e ainda não pode ser usado isoladamente (sem o uso de informação a priori ou cruzamento com outros dados observacionais) para analisar precisamente diferentes modelos cosmológicos. Isto não diminui a importância das SNIa para a Cosmologia pois sabe-se que a reconstrução da distância luminosa é o teste cosmológico que possui maior sensibilidade à aceleração recente na história do Universo, em contraste a outros testes como o da RCF e o da estrutura em larga escala que apesar de detectá-la indiretamente, são mais sensíveis ao passado do Universo onde ela não se faz presente. Assim atualmente sabe-se que para

discriminar entre diferentes modelos cosmológicos será necessário no futuro próximo um estudo muito mais detalhado para determinar como esses fatores astrofísicos afetam as magnitudes das SNIa e introduzem incertezas em suas distâncias, principalmente em $z > 1$ onde espera-se que seus efeitos sejam maiores e onde a qualidade dos dados obtidos já é inferior devido a baixa luminosidade, o que por si só introduz barras de erros maiores do que em baixo z .

Algumas conclusões deste estudo dizem respeito à aplicação das técnicas estatísticas. O fato de que o uso de técnicas bayesianas é muitas vezes ignorada na literatura torna mais difícil a interpretação dos dados e dos resultados da inferência estatística. Durante todo quase todo o século XX a técnicas frequentistas foram as preferidas pela comunidade científica e assim até hoje algumas convenções utilizadas têm origem nessa interpretação. Por exemplo até hoje o valor mais provável é normalmente o escolhido como estatisticamente interessante, já que na estatística frequentista a integração da verossimilhança para o cálculo de valores médios é proibido, em contraste com a estatística bayesiana que encoraja o uso da marginalização para o cálculo do valor médio para os parâmetros e o seu uso como valor estatisticamente significativo.

E essa mudança de paradigma se manifesta na literatura recente onde nota-se uma aceitação cada vez maior ao uso declarado da estatística bayesiana, principalmente para as técnicas de comparação de modelos. Por exemplo se no início da década passada encontravam-se publicações que se referiam a seus resultados como frequentistas, mesmo após obtê-los através de marginalização, por outro lado as últimas publicações da equipe do satélite WMAP expõem todos os seus resultados usando os valores médios da likelihood, contrariando a convenção seguida.

Assim ao ignorar os fundamentos da estatística e as mudanças trazidas pela interpretação bayesiana no resultado final do formalismo, detalhes se perdem e frequentemente não são reportados. Por exemplo a convenção estabelecida de expor os resultados sob a forma de regiões de confiança multidimensionais (normalmente 2d) *assume* que os dados obedecem uma distribuição gaussiana o que é uma suposição que a princípio tem que ser testada. E ao pular esse passo detalhes sobre possíveis não uniformidades nos dados podem ser escondidos pelos contornos de probabilidade. Isso sem falar da profunda mudança conceitual na definição de probabilidade que tende a ser ignorada.

Pelos resultados apresentados fica claro que do ponto de vista estatístico os vários modelos cosmológicos distintos, com diferentes números de parâmetros livres, têm praticamente a mesma compatibilidade com os dados das SNIa em seu atual nível de precisão,

pelo fato de que não possuem uma diferença maior do que um ordem de grandeza em suas evidências bayesianas. Esse fato pode ser contrastado com uma aplicação ilustrativa da evidência bayesiana ao caso das previsões da teorias Newtoniana e da RG para o cálculo do desvio da trajetória da luz no campo gravitacional do Sol: nesse caso pode-se mostrar que os dados medidos em 1919 na famosa observação em Sobral levariam a um fator de Bayes $B_{ij} \propto 10^{10}$ que seria um evidência esmagadora a favor da RG, e números semelhantes seriam obtidos ao comparar as previsões da mecânica clássica com a quântica.

Isto ilustra o quão sutil é a comparação de modelos na Cosmologia e o quanto isto dependerá decisivamente do aumento na precisão nas observações cosmológicas no futuro próximo. E também explica porque a evidência bayesiana não é usada na literatura: como ela é praticamente a mesma para diferentes modelos, tem pouco capacidade de discriminação e isso justifica a preferência pelas técnicas alternativas (AIC, BIC e outras) que também quantificam o princípio da navalha de Occam.

Finalmente no que diz respeito aos diferentes modelos pouco pode ser dito além do já exposto. Devido a limitação do uso isolado dos dados das SNIa percebe-se que o teste de modelos concorrentes mais complexos (maior número de parâmetros) que o Λ CDM é muito prejudicado devido a alta degenerescência estatística no espaço de parâmetros e as incertezas nas distâncias das SNIa. Assim o estado atual do teste com as SNIa é de que apesar do modelo Λ CDM ser o que melhor se ajusta as observações em geral, esse fato terá que ser continuamente testado no futuro visto que algumas amostras de SNIa (incluindo as mais atuais não usadas aqui) parecem se ajustar melhor a outros modelos como o Gás de Chaplygin. E também o fato de que uma mesma amostra de dados, calibrada por modelos distintos como o SALT ou MLCS2k2, leva a resultados ligeiramente diferentes, podendo preferir modelos distintos na comparação, é mais um sinal de que as incertezas na calibração precisam ser melhor controladas.

Assim atualmente sabe-se que qualquer que seja a causa da aceleração do Universo, ela deve se comportar de maneira muito parecida com a constante cosmológica, isto é com $\omega_X \approx -1$ e aproximadamente constante. No entanto ainda há espaço para toda uma variedade de modelos (incluindo os sem energia escura) onde ω_X varia muito lentamente no tempo, e esses modelos só poderão ser melhor restringidos a medida que um número significativo de SNIa na região $z > 1$ seja observada e calibrada permitindo uma medida precisa da variação de ω_X com z . Também nessa faixa de redshift o efeito da presença de Ω_k poderá ser investigado, pois sabe-se que mesmo que para $\Omega_k \approx 0,01$ seus efeitos não podem ser desprezados nessa faixa de redshift, ainda que a prática atual seja de desprezar

esse fator uma vez as amostras atuais de SNIa não permitem sua determinação com uma precisão razoável, também devido a degenerescência nos dados de SNIa e sua imprecisão.

No entanto espera-se que esse panorama atual se modifique em breve e que a Cosmologia baseada nas observações de SNIa dê outro salto de qualidade a medida que os próximos grandes projetos dedicados as SNIa como o DES e o JDEM com o satélite SNAP entrem em operação e observem cada um milhares de SNIa. Com essa quantidade de SNIa as incertezas serão totalmente dominadas pelos efeitos astrofísicos e uma vez que esses sejam determinados, a discriminação de modelos cosmológicos poderá prosseguir.

Enquanto isto não ocorre as várias possibilidades teóricas devem continuar a ser investigadas, inspiradas nos muitos problemas e lacunas do modelo Λ CDM. E também no fato que algum desses muitos modelos alternativos, seja com equações de estado exóticas para energia escura, modificações a teoria da RG ou com interações entre a matéria e a energia escuras, para citar alguns exemplos, podem ser a descrição correta do Universo mas que no entanto ainda não podem ser apontados como tal devido à limitada precisão nos dados astronômicos.

Por fim o fato de que esta dissertação tem como objeto de estudo esse tema tão atual e significativo para a Cosmologia e para a Física em geral traz a vantagem de abrir automaticamente muitas perspectivas, a começar pela reaplicação dessa análise nas amostras de SNIa mais atuais que as utilizadas aqui (como as SNIa dos programas SDSS e Union2) e das muitas que surgirão na próxima década. Assim esse trabalho servirá como base para possíveis investigações futuras sobre os muitos detalhes que não foram explorados a fundo nesse estudo, como os efeitos astrofísicos nas SNIa, o estudo de técnicas estatísticas mais avançadas e por fim no objetivo da Cosmologia em geral que é a análise detalhada de modelos Cosmológicos sobre a natureza da matéria e da energia escura frente a múltiplas evidências observacionais.

Referências

- [1] W. Rindler. *Relativity: Special, General and Cosmological*. Oxford University Press, 2001.
- [2] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Jonh Wiley & Sons, 1972.
- [3] C.W. Misner; K.S. Thorne e J.A. Wheeler. *Gravitation*. W.H. Freeman & Co., 1973.
- [4] F.S. Labini; N.L. Vasilyev e Y.V. Baryshev. Persistent fluctuations in the distribution of galaxies from the two degree field galaxy redshift survey. *Europhysics Letters*, 85:29002, 2009. arXiv:astro-ph/0812.3260v1.
- [5] M.N. Célérier. The accelerated expansion of the universe challenged by an effect of the inhomogeneities: A review. *New Advances in Physics*, 1, 29, 2007. arXiv:astro-ph/0702416v2.
- [6] S. Alexander *et al.* Local void vs dark energy: Confrontation with wmap and type ia supernovae. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 0909:025, 2009. arXiv:astro-ph/0712.0370v3.
- [7] P.J.E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1993.
- [8] D.J. Schwarz. Thoughts on the cosmological principle. In D. Grumiller; A. Rebhan e D. Vassilevich, editor, *Fundamental Interactions - A Memorial Volume for Wolfgang Kummer*. World Scientific Publishing Company, 2009. arXiv:astro-ph/0905.0384v1.
- [9] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press, 1992.
- [10] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [11] J.N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge University Press, 1991.
- [12] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008.
- [13] A.G. Riess *et al.* A redetermination of the hubble constant with the hubble space telescope from a differential distance ladder. *The Astrophysical Journal*, 2009. arXiv:astro-ph.CO/0905.0695v1.
- [14] T.M. Davis e C. H. Lineweaver. Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21(1) 97-109, 2003. arXiv:astro-ph/0310808v2.

- [15] S. Tsujikawa. Introductory review of cosmic inflation. arXiv:hep-ph/0304257v1, 2003.
- [16] E. Komatsu *et al.* Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Cosmological interpretation, 2010. arXiv:astro-ph.CO/1001.4538v1.
- [17] D. Larson *et al.* Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Power spectra and wmap-derived parameters, 2010. arXiv:astro-ph.CO/1001.4635v1.
- [18] S. Dodelson. *Modern Cosmology*. Elsevier, 2003.
- [19] J. Garcia-Bellido. Cosmology and astrophysics. *Report IFT-UAM/CSIC-05-09*, 05-09, 2005. arXiv:astro-ph/0502139v2.
- [20] K.G. Begeman. H i rotation curves of spiral galaxies. i - ngc 3198. *Astronomy & Astrophysics*, 223:1-2, p.47-60, 1989. SAO/NASA ADS:1989A%26A...223...47B.
- [21] P. Salucci e A. Borriello. The intriguing distribution of dark matter in galaxies. *Lecture Notes in Physics*, 616: 66-77, 2003. arXiv:astro-ph/0203457v1.
- [22] M. Roncadelli. Searching for dark matter, 2003. arXiv:astro-ph/0307115v1.
- [23] M. Roncadelli. Dark baryons in galactic halos, 2003. arXiv:astro-ph/0301537v1.
- [24] J.P. Ostriker e P.J. Steinhardt. New light on dark matter. *Science*, 300:1909-1913, 2003. arXiv:astro-ph/0306402v1.
- [25] V. Sahni e A. Starobinsky. The case for a positive cosmological λ -term. *International Journal of Modern Physics D*, 9:373-444, 2000. arXiv:astro-ph/9904398v2.
- [26] A.G Riess *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astrophysical Journal*, 116:1009-1038, 1998. arXiv:astro-ph/9805201v1.
- [27] S. Perlmutter *et al.* Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517:565-586, 1999. arXiv:astro-ph/9812133v1.
- [28] S. Carrol. The cosmological constant. *Living Reviews In Relativity*, 4:1, 2001. arXiv:astro-ph/0004075.
- [29] E.J. Copeland; M. Sami e S. Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15:1753-19366, 2006. arXiv:hep-th/0603057v3.
- [30] D.J. Eisenstein *et al.* Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633:560-574, 2005. arXiv:astro-ph/0501171v1.
- [31] E. Gaztanaga; A. Cabre e L. Hui. Clustering of luminous red galaxies iv: Baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $h(z)$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 399:1663-1680, 2009. arXiv:astro-ph/0807.3551v5.

- [32] D. Stern *et al.* Cosmic chronometers: Constraining the equation of state of dark energy. i: $H(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 02:008, 2008. arXiv:astro-ph.CO/0907.3149v1.
- [33] L. Perivolaropoulos. Six puzzles for Λ CDM cosmology, 2008. arXiv:astro-ph/0811.4684v2.
- [34] R. Kirshner. Foundations of supernova cosmology. In M.P. Ruiz-Lapuente, editor, *Dark Energy - Observational and Theoretical Approaches*. Cambridge University Press, 2010. arXiv:astro-ph.CO/0910.0257v1.
- [35] K.S. Oliveira Filho e M.F.O. Saraiva. *Astronomia & Astrofísica*. Livraria da Física, 2004.
- [36] J.A. Cardelli; G.C. Clayton e J.S. Mathis. The relationship between infrared, optical, and ultraviolet extinction. *The Astrophysical Journal*, 345:245-256, 1989. SAO/NASA ADS: 1989ApJ...345..245C.
- [37] A.V. Filippenko. Optical spectra of supernovae. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 35:309-355, 1997. <http://nedwww.ipac.caltech.edu/>.
- [38] D. Richardson *et al.* A comparative study of the absolute-magnitude distributions of supernovae. *Astronomical Journal*, 123:745-752, 2002. arXiv:astro-ph/0112051v1.
- [39] K. Nomoto *et al.* Thermal stability of white dwarfs accreting hydrogen-rich matter and progenitors of type ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 663:1269, 2007. arXiv:astro-ph/0603351v2.
- [40] W. Hillebrandt e J.C. Niemeyer. Type ia supernova explosion models. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 38:191-230, 2000. arXiv:astro-ph/0006305v1.
- [41] P.A. Mazzali *et al.* A common explosion mechanism for type ia supernovae. *Science*, 315:825, 2007. arXiv:astro-ph/0702351v1.
- [42] M. Gilfanov e A. Bogdan. An upper limit on the contribution of accreting white dwarfs to the type ia supernova rate. *Nature*, 463:924, 2010. arXiv:astro-ph.CO/1002.3359v1.
- [43] M.M. Phillips. The absolute magnitudes of type ia supernovae. *Astrophysical Journal*, 413:105-108, 1993. SAO/NASA ADS:1993ApJ...413L.105P.
- [44] A.G. Riess; W.H. Press e R.P. Kirshner. A precise distance indicator: Type ia supernova multicolor light curve shapes. *The Astrophysical Journal*, 473:88, 1996. arXiv:astro-ph/9604143v1.
- [45] G. Goldhaber *et al.* Timescale stretch parameterization of type ia supernova b-band light curves. *Astrophysical Journal*, 558:359, 2001. arXiv:astro-ph/0104382v1.
- [46] J. Guy *et al.* Salt: a spectral adaptive light curve template for type ia supernovae. *Astronomy & Astrophysics*, 443:781-791, 2005. arXiv:astro-ph/0506583v2.
- [47] A.V. Filippenko. Type ia supernovae and cosmology. In E.M. Sion; H.L. Shipman e S. Vennes, editor, *White Dwarfs: Probes of Galactic Structure and Cosmology*. Kluwer: Dordrecht, 2004. arXiv:astro-ph/0410609v1.

- [48] M. Hicken *et al.* Improved dark energy constraints from 100 new cfa supernova type ia light curves. *The Astrophysical Journal*, 700:1097-1140, 2009. astro-ph.CO/0901.4804v3.
- [49] J.C. Bueno Sanchez; S. Nesseris e L. Perivolaropoulos. Comparison of recent snia datasets. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 11:29, 2009. arXiv:astro-ph.CO/0908.2636v2.
- [50] A.G. Riess *et al.* Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, 607:665-687, 2004. astro-ph/0402512v2.
- [51] S. Jha; A.G. Riess e R.P. Kirshner. Improved distances to type ia supernovae with multicolor light curve shapes: Mlcs2k2. *Astrophysical Journal*, 659:122-148, 2007. arXiv:astro-ph/0612666v1.
- [52] P. Astier *et al.* The supernova legacy survey: Measurement of ω_M, ω_Λ and w from the first year data set. *Astronomy & Astrophysics*, 447:31-48, 2006. astro-ph/0510447v1.
- [53] W. M. Wood-Vasey *et al.* Observational constraints on the nature of dark energy: First cosmological results from the essence supernova survey. *Astrophysical Journal*, 666:694-715, 2007. arXiv:astro-ph/0701041v1.
- [54] A.G. Riess *et al.* New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at $z > 1$: Narrowing constraints on the early behavior of dark energy. *Astrophysical Journal*, 659:98-121, 2007. arXiv:astro-ph/0611572v2.
- [55] T.M. Davis *et al.* Scrutinizing exotic cosmological models using essence supernova data combined with other cosmological probes. *Astrophysical Journal*, 666:716, 2007. arXiv:astro-ph/0701510v2.
- [56] M. Kowalski *et al.* Improved cosmological constraints from new, old and combined supernova datasets. *Astrophysical Journal*, 686:749-778, 2008. arXiv:astro-ph/0804.4142v1.
- [57] R.D. Cousins. Why isn't every physicist a bayesian? *American Journal of Physics*, 63:398-410, 1995.
- [58] G. D'Agostini. Bayesian inference in processing experimental data: Principles and basic applications. *Reports on Progress in Physics*, 66:1383-1420, 2003. arXiv:physics/0304102v1.
- [59] P. Gregory. *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences*. Cambridge University Press, 2005.
- [60] R. Trotta. Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology. *Contemporary Physics*, 49:71-104, 2008. arXiv:astro-ph/0803.4089v1.
- [61] L. Verde. A practical guide to basic statistical techniques for data analysis in cosmology. arXiv:arXiv:astro-ph/0712.3028v2, 2007.

- [62] L. Verde. Statistical methods in cosmology. In G. Wolschin, editor, *Lectures on cosmology: Accelerated expansion of the universe*. Springer, 2010. arXiv:astro-ph.CO/0911.3105v1.
- [63] W.H. Press *et al.* *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [64] T.R. Choudhury e T. Padmanabhan. Cosmological parameters from supernova observations: A critical comparison of three data sets. *Astronomy & Astrophysics*, 429:807, 2005. arXiv:astro-ph/0311622v4.
- [65] R. Colistete Jr *et al.* Bayesian analysis of the chaplygin gas and cosmological constant models using the sne ia data. *International Journal of Modern Physics D*, 13:669-694, 2004. arXiv:astro-ph/0303338v1.
- [66] R. Colistete Jr e J.C. Fabris. Bayesian analysis of the (generalized) chaplygin gas and cosmological constant models using the 157 gold sne ia data. *Classical and Quantum Gravity*, 22:2813-2834, 2005. arXiv:astro-ph/0501519v1.
- [67] S. Nesseris e L. Perivolaropoulos. A comparison of cosmological models using recent supernova data. *Physical Review D*, 70:043531, 2004. arXiv:astro-ph/0401556v2.
- [68] S. Nesseris e L. Perivolaropoulos. Tension and systematics in the gold06 snia dataset. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 0702:025, 2007. arXiv:astro-ph/0612653v2.
- [69] D. Pavon e W. Zimdahl. Holographic dark energy and present cosmic acceleration. AIP Conference Proceedings, 2005. arXiv:hep-th/0511053v1.
- [70] J.C Fabris *et al.* Transient cosmic acceleration from interacting fluids. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 04:008, 2010. arXiv:astro-ph.CO/0910.3246v1.
- [71] H.A. Borges e S. Carneiro. Friedmann cosmology with decaying vacuum density. *General Relativity and Gravitation*, 37:1385-1394, 2005. arXiv:gr-qc/0503037v1.
- [72] S. Carneiro *et al.* Supernova constraints on decaying vacuum cosmology. *Physical Review D*, 74:023532, 2006. arXiv:astro-ph/0605607v2.
- [73] S. Carneiro *et al.* Observational constraints on late-time lambda(t) cosmology. *Physical Review D*, 77:083504, 2008. arXiv:astro-ph/0711.2686v2.
- [74] C. Pigozzo *et al.* Background tests for l(t)cdm cosmology. arXiv:astro-ph/1007.5290v1, 2010.
- [75] I.L. Shapiro e J. Sola. A friedmann-lemaitre-robertson-walker cosmological model with running lambda. AHEP-2003 Conference Proceedings, 2004. arXiv:astro-ph/0401015v2.
- [76] C. España-Bonet *et al.* Testing the running of the cosmological constant with type ia supernovae at high z. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 0402:006, 2004. arXiv:hep-ph/0311171v2.

- [77] J. Grande *et al.* Cosmic perturbations with running g and λ . *Classical and Quantum Gravity*, 27:105004, 2010. arXiv:astro-ph.CO/1001.0259v2.
- [78] A.Y. Kamenshchik; U. Moschella e V. Pasquier. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, 511:265-268, 2001. arXiv:gr-qc/0103004v2.
- [79] R. Jackiw. A particle field theorist's lectures on supersymmetric, non-abelian fluid mechanics and d-branes. arXiv:hep-ph/0010042v1, 2000.
- [80] M.C. Bento; O. Bertolami e A.A. Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion and dark energy-matter unification. *Physical Review D*, 66:043507, 2002. arXiv:gr-qc/0202064v2.
- [81] O.F. Piattella. The extreme limit of the generalised chaplygin gas. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 1003:012, 2010. arXiv:astro-ph.CO/0906.4430v3.