

**Universidade Federal do Espírito Santo**

**Centro Tecnológico**

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Jeovane Castro dos Santos

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DARCIANOS  
CONVECTIVOS NÃO LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

VITÓRIA

2011

JEOVANE CASTRO DOS SANTOS

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DARCIANOS  
CONVECTIVOS NÃO LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto.

VITÓRIA

2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

S237s Santos, Jeovane Castro dos, 1975-  
Solução numérica de problemas darcianos convectivos não-  
lineares através do método dos elementos de contorno / Jeovane  
Castro dos Santos. – 2011.  
95 f. : il.

Orientador: Carlos Friedrich Loeffler Neto.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade  
Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Análise numérica. 2. Métodos de elementos de contorno.  
3. Escoamento convectivo em meio poroso . 4. Dinâmica dos fluidos. I.  
Loeffler Neto, Carlos Friedrich. II. Universidade Federal do Espírito  
Santo. Centro Tecnológico. III. Título.

CDU: 621

---

JEOVANE CASTRO DOS SANTOS

**SOLUÇÃO NUMÉRICA DE PROBLEMAS DARCIANOS  
CONVECTIVOS NÃO LINEARES ATRAVÉS DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Aprovada em 05 de agosto de 2011.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Carlos Friedrich Loeffler Neto  
Orientador  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Fernando César Meira Menandro  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Flavio Cezario  
Centro Federal de Educação Tecnológica  
CEFET-RJ

A minha esposa Tatiane, e minhas filhas, Lívia, Beatriz e Sofia, razão de minha vida.

Aos meus pais, Jeovane e Solange, que me deram a vida.

Ao professor Carlos Loeffler, ao qual este trabalho não teria sido possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus por tudo o que proporcionou à minha vida e principalmente pela conclusão do presente trabalho.

A minha família, pela paciência nos momentos críticos e incentivo nos momentos de desânimo dessa longa caminhada.

Ao Professor Dr. Carlos Friedrich Loeffler, pelos ensinamentos e ajuda para transpor os obstáculos.

À Universidade Federal do Espírito Santo – UFES e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM pelas informações e experiências repassadas nas aulas, e pela oportunidade de cursar o Mestrado.

A perfeição existe não quando não há mais nada a acrescentar,

Mas quando não há mais nada a tirar.

Saint-Exupéry

# RESUMO

Neste trabalho é apresentado o equacionamento e a solução numérica de problemas de escoamento convectivo em meios porosos, ou seja, os fenômenos da difusão e da advecção são tratados em conjunto. Além disso, a equação de governo resultante é acoplada a uma equação de Poisson na qual os campos de velocidade e pressão são calculados para definição do modelo difusivo-advectivo. O problema, portanto, resulta não linear devido à dependência das pressões e velocidades do campo de temperaturas e fluxos. O número de Rayleigh aparece como fator governante da participação do transporte advectivo no modelo e matematicamente compõe um termo fonte ou ação de domínio na Equação de Poisson.

Tais equações acopladas são resolvidas através do Método dos Elementos de Contorno (MEC) mediante um procedimento iterativo, no qual a formulação com dupla Reciprocidade é utilizada em ambas as equações - Poisson e Advecção/Difusão, para tratar os termos fonte.

Experiências numéricas em dois problemas teste desacoplados foram implementadas para testar a capacidade e a precisão do MEC. Posteriormente, foi feita a solução de um exemplo mais elaborado, no qual diversos fatores como o refinamento da malha, alteração do número de Rayleigh foram testados de modo a se avaliar a sensibilidade do método nessa classe de problemas acoplados não lineares.



# ABSTRACT

In this study are presented the mathematical model and numerical solution for problems of convective flow in porous media, i.e. diffusion and advection phenomena dealt with together. The momentum equation is transformed in a Poisson equation due to Darcian hypothesis, in which the velocity and pressure fields are calculated in order to define the diffusive-advective model. The problem, therefore, results non-linear due to dependence on pressures and velocities in the temperature and flow fields. The Rayleigh number appears as a governing factor of the advective transport participation in the model, and it mathematically comprises a source term or domain action in the Poisson equation.

These coupled equations are solved through the Boundary Element Method (BEM) using an iterative procedure, in which the Dual Reciprocity Formulation is used in both equations — Poisson and Advection/Diffusion — in order to deal with the source terms.

Numerical experiments in two uncoupled test-problems were implemented so as to test capacity and accuracy of BEM. Later, a more elaborate example was solved, in which several factors such as mesh refinement and Rayleigh number alteration were tested for assessing method sensitivity in this class of nonlinear coupled problems.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Níveis de modelagem científica.....	21
FIGURA 3.1 – Balanço de massa para o volume de controle.....	24
FIGURA 3.2 – Balanço de tensão para o volume de controle.....	26
FIGURA 3.3 – Balanço de calor por advecção no volume de controle.....	28
FIGURA 3.4 – Balanço do trabalho de atrito realizado pelas forças Superficiais.....	28
FIGURA 4.2 – Domínio prescrito com condições essenciais e naturais.....	41
FIGURA 4.3 – Domínio discretizado.....	44
FIGURA 4.4 – Interpolação nodal.....	45
FIGURA 5.1 – Seqüência iterativa do programa.....	55
FIGURA 5.2 – Características geométricas e condições de contorno do problema.....	56
FIGURA 5.3 – Características geométricas e condições de contorno do problema.....	58
FIGURA 5.4.1 – Domínio físico do problema.....	62
FIGURA 5.4.2 – Definição das arestas do domínio do problema.....	63
FIGURA 5.4.3 – (A) Discretização do contorno do problema; (B) Discretização do domínio do problema.....	63
FIGURA 5.4.4 – (A) Discretização do contorno do problema; (B) Discretização do domínio do problema.....	69

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 5.2.1 – Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta horizontal inferior.....	57
GRÁFICO 5.3.1 – Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita para $u=v=1$ .....	59
GRÁFICO 5.3.2 – Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita para $u=v=2$ .....	60
GRÁFICO 5.3.3 – Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita para $u=v=5$ .....	60
GRÁFICO 5.3.4 – Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita para $u=v=10$ .....	61
GRÁFICO 5.4.1 – Distribuição de pressão na aresta 1 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	64
GRÁFICO 5.4.2 – Distribuição de pressão na aresta 2 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	64
GRÁFICO 5.4.3 – Distribuição de velocidade na aresta 3 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	65
GRÁFICO 5.4.4 – Distribuição de pressão na aresta 4 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	65
GRÁFICO 5.4.5 – Distribuição de temperatura na aresta 1 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	66
GRÁFICO 5.4.6 – Distribuição de temperatura na aresta 2 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	67
GRÁFICO 5.4.7 – Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	67
GRÁFICO 5.4.8 – Distribuição de temperatura na aresta 4 com $Ra=2$ e malha de 40 nós.....	68

GRÁFICO 5.4.9 – Distribuição de pressão na aresta 1 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	70
GRÁFICO 5.4.10 – Distribuição de pressão na aresta 2 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	71
GRÁFICO 5.4.11 – Distribuição de velocidade na aresta 3 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	71
GRÁFICO 5.4.12 – Distribuição de pressão na aresta 4 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	72
GRÁFICO 5.4.13 – Distribuição de temperatura na aresta 1 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	73
GRÁFICO 5.4.14 – Distribuição de temperatura na aresta 2 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	73
GRÁFICO 5.4.15 – Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	74
GRÁFICO 5.4.16 – Distribuição de temperatura na aresta 4 com $Ra=2$ e malha de 80 nós.....	74
GRÁFICO 5.4.17 – Distribuição de pressão na aresta 1 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	76
GRÁFICO 5.4.18 – Distribuição de pressão na aresta 2 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	77
GRÁFICO 5.4.19 – Distribuição de velocidade na aresta 3 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	77
GRÁFICO 5.4.20 – Distribuição de pressão na aresta 4 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	78
GRÁFICO 5.4.21 – Distribuição de temperatura na aresta 1 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	78
GRÁFICO 5.4.22 – Distribuição de temperatura na aresta 2 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	79
GRÁFICO 5.4.23 – Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	79
GRÁFICO 5.4.24 – Distribuição de temperatura na aresta 4 com $Ra=1$ e malha de 40 nós.....	80
GRÁFICO 5.4.25 – Distribuição de pressão na aresta 1 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	81

GRÁFICO 5.4.26 – Distribuição de pressão na aresta 2 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	81
GRÁFICO 5.4.27 – Distribuição de velocidade na aresta 3 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	82
GRÁFICO 5.4.28 – Distribuição de pressão na aresta 4 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	82
GRÁFICO 5.4.29 – Distribuição de temperatura na aresta 1 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	83
GRÁFICO 5.4.30 – Distribuição de temperatura na aresta 2 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	84
GRÁFICO 5.4.31 – Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	84
GRÁFICO 5.4.32 – Distribuição de temperatura na aresta 4 com $Ra=1$ e malha de 80 nós.....	85

## **LISTA DE SIGLAS**

EDP – Equação Diferencial Parcial

FDR – Formulação da Dupla Reciprocidade

MDF – Método das Diferenças Finitas

MEC – Método dos Elementos de Contorno

MEF – Método dos Elementos Finitos

MVF – Método dos Volumes Finitos

# SUMÁRIO

DEDICATÓRIA.....	iv
AGRADECIMENTO.....	v
RESUMO .....	vii
ABSTRACT.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	ix
LISTA DE GRÁFICOS.....	x
LISTA DE SIGLAS.....	xiii

## CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.....	16
1.1 – Comentários preliminares.....	16
1.2 – Objetivo.....	17
1.3 – Composição do trabalho.....	18
1.4 – Pesquisa bibliográfica.....	18

## CAPÍTULO II

MODELOS NA ABORDAGEM CIENTÍFICA.....	20
2.1 – Introdução.....	20
2.2 – Modelos científicos.....	21

## CAPÍTULO III

EQUAÇÕES BÁSICAS DE GOVERNO.....	24
3.1 – Equações básicas.....	24
3.2 – Equação da quantidade de movimento.....	26
3.3 – Equação da energia.....	27
3.4 – Lei de Darcy.....	29
3.5 – Equação de Darcy.....	30
3.6 – Aproximação de Boussinesq.....	31
3.7 – Parâmetros adimensionais da convecção livre.....	33
3.8 – Equações de governo adimensionais.....	35
3.8.1 – Equação da continuidade.....	35

3.8.2 – Equação da quantidade de movimento segundo a Lei de Darcy.....	35
3.8.3 – Equação da difusão-advecção.....	37

## **CAPÍTULO IV**

### **FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

COM DUPLA RECIPROCIDADE.....	39
4.1 – Introdução.....	39
4.2 – Formulação clássica do método dos elementos de contorno.....	41
4.3 – Dupla reciprocidade aplicada à equação de Poisson.....	45
4.4 – Dupla reciprocidade aplicada à difusão-advecção.....	48
4.5 – Formulação numérica geral.....	50
4.6 – Particularização do modelo numérico para Poisson.....	51
4.7 – Particularização do modelo numérico para difusão-advecção.....	53

## **CAPÍTULO V**

APLICAÇÕES NUMÉRICAS.....	55
5.1 – Introdução.....	55
5.2 – Validação do modelo para a equação de Poisson.....	56
5.3 – Validação do modelo para a equação da difusão-advecção.....	57
5.4 – Simulação do problema acoplado.....	61
5.4.1 – Simulação com malha de 40 nós e $Ra = 2$ .....	63
5.4.2 – Simulação com malha de 80 nós e $Ra = 2$ .....	69
5.4.3 – Simulação com malha de 40 nós e $Ra = 1$ .....	76
5.4.4 – Simulação com malha de 80 nós e $Ra = 1$ .....	80

## **CAPÍTULO VI**

CONCLUSÕES.....	86
-----------------	----

## **REFERÊNCIAS**

REFERÊNCIAS.....	89
------------------	----

## **BIBLIOGRAFIA**

BIBLIOGRAFIA.....	92
-------------------	----



# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - COMENTÁRIOS PRELIMINARES

A engenharia e a ciência, de modo geral, têm experimentado avanços numa taxa significativamente crescente com o passar do tempo. Mudanças drásticas são observadas nos modos de se tratar os diversos problemas na indústria, nas empresas de projeto, na construção civil e mesmo nos segmentos ligados a atividades financeiras e de recursos humanos. Uma das principais razões para tais transformações na abordagem das questões que desafiam os profissionais dessas diversas áreas são as ferramentas computacionais atualmente disponíveis. Problemas naturalmente impossíveis de se resolver em décadas passadas hoje são solucionados em questões de segundos, seja a obtenção de um campo térmico de temperaturas numa peça ou a geração de uma folha de pagamento de uma organização com dezenas de milhares de componentes. Para gerar tamanha tecnologia, um enorme esforço matemático foi despendido para dar sustentação, precisão, credibilidade e eficiência às técnicas que compõem os programas usados no processamento dos diversos setores da vida moderna.

O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas de engenharia e da física é hoje uma realidade, graças ao vertiginoso desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, que cresce exponencialmente, o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos e engenheiros, fazendo aumentar, também em taxas acentuadas, o número de pesquisadores e usuários da simulação numérica. Além disso, a versatilidade e generalidade dos métodos numéricos para a simulação de problemas de engenharia, e a relativa simplicidade de aplicação dessas técnicas, são outros fatores motivadores para seu uso.

Uma questão básica que surge no exame de muitas dessas ferramentas computacionais, especialmente aquelas empregadas na engenharia, onde muitas vezes não há estimativa de resposta é a seguinte: como se identificam as melhores técnicas? Como se afere a precisão dessas técnicas em problemas para os quais não se tem uma previsão segura de seu comportamento? A resposta naturalmente é complexa e é pertinente aos estudos ligados à metodologia científica.

Existem dois níveis de erros que podem estar presentes na solução numérica quando os resultados são comparados com a realidade de um problema físico: no primeiro nível estão os erros numéricos propriamente ditos, resultado da má solução das equações diferenciais. Para detectá-los, os resultados devem ser comparados com outras soluções, analíticas ou numéricas, verificando-se se a equação diferencial foi corretamente resolvida. Esse processo, denominado aqui de validação numérica, atesta a qualidade do método numérico. No segundo nível estão os erros resultantes do uso de equações diferenciais que não representam adequadamente o fenômeno. A validação física preocupa-se com a fidelidade do modelo matemático para com o problema físico. Logo, a ferramenta numérica é adequada e confiável quando se está de posse de um método numérico que resolva corretamente as equações diferenciais, e de um modelo matemático que represente com fidelidade o fenômeno físico. Na visão da engenharia, esses são os pontos que interessam.

## **1.2 - OBJETIVO**

O objetivo do presente trabalho é desenvolver um modelo numérico para simular computacionalmente a distribuição de pressões, velocidades, temperaturas e fluxos de calor em volumes de controle bidimensionais governados pela equação de Poisson e a equação da difusão-advecção em meios Darcianos. Como ferramenta numérica, emprega-se o Método dos Elementos de Contorno, especificamente da sua formulação com dupla reciprocidade.

Conforme exposto, admite-se a lei de Darcy para associar pressão e velocidade, resultando em um modelo matemático dado pela equação de

Poisson. No entanto, os resultados gerados pela equação de Poisson são implementados no modelo difusivo-advectivo, gerando temperaturas e fluxos de calor, que por sua vez alteram o perfil de velocidades e pressão. Os novos dados são atualizados num esquema iterativo. Para viabilizar esse processo de solução acoplada, foi elaborado um código computacional em FORTRAN, que resolve o problema iterativamente de modo automático.

### **1.3 - COMPOSIÇÃO DO TRABALHO**

O conteúdo do texto se estruturará numa parte inicial onde se apresentará um enfoque moderno sobre o uso de modelos ou idealizações na ciência e na engenharia; posteriormente, serão apresentados os modelos físicos referentes às equações de Poisson e Difusão-advectação, acompanhados das equações que o representam, constituindo o modelo matemático completo. No capítulo subsequente, será apresentado o modelo numérico do método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade. Na parte final do trabalho, apresenta-se uma comparação de resultados para diversas condições de escoamento, e finalmente, o capítulo referente às disposições finais.

### **1.4 – PESQUISA BIBLIOGRÁFICA**

Os fenômenos da difusão térmica, do escoamento em meios porosos no modelo de Darcy e a transferência de energia envolvendo convecção ou transporte difusivo-advectivo são temas bem estudados e detalhados em extensa literatura básica como Ferziger e Peric [7], Lewis 'et al' [10], Maliska [12] e Tannehill 'et al' [24]. Os livros de Fox e McDonald [8], Rosa 'et al' [22], White [26] e Özisik [18], serviram de fonte para o equacionamento básico destes problemas de grande importância prática no decorrer dessa dissertação.

Diante da dificuldade de solução analítica de casos bi ou tridimensionais em todas as classes de problemas previamente citadas, as aplicações atuais não dispensam o recurso dos principais métodos numéricos de solução, baseados na idéia de discretização do domínio. Particularmente no que se refere ao Método dos Elementos de Contorno, escolhido para desenvolvimento e solução do modelo proposto, há diversos trabalhos importantes. Problemas

governados pela Equação de Laplace ou Poisson são muito bem desenvolvidos pelo MEC. Na verdade, problemas de campo escalar estacionários, em geral, são muito explorados na literatura. Livros clássicos como Brebbia [2], Brebbia, Partridge e Wrobel [19], Nardini e Brebbia [15], para citar alguns dos muitos consultados, apresentam soluções numéricas de padrão superior em precisão a maior parte dos demais métodos numéricos, devido a características típicas da formulação integral do MEC e ao papel da solução fundamental.

Já para simulação dos problemas difusivos-advectivos, apesar da existência de formulações elegantes e precisas, conforme apresentando por Massaro [20], a formulação com Dupla Reciprocidade apresenta-se como alternativa mais acessível. Partridge 'et al' [19] e Ramachandran [20] são dois autores que difundiram bastante o uso dessa formulação no trato de problemas convectivos, com baixo número de Peclet. Na UFES, várias dissertações, além da de Massaro [14], exploraram a solução dos problemas convectivos através do MEC: Loeffler [11] com sua formulação com Quase-Dupla Reciprocidade; e também Dan [3], [4] e [6], Jardim [9] e Neves [16].

Este último analisou o acoplamento entre os problemas de Poisson e Difusivos-Advectivos através da dependência do campo de temperaturas. Esse estudo foi baseado principalmente nos trabalhos de Zhao 'et al' [27] e [28], muitos deles voltados a aplicações no transporte de substâncias químicas.

Este trabalho dá continuidade ao apresentado por Neves, mas o principal interesse é verificar a consistência e robustez do modelo de elementos de contorno em problemas difusivos-advectivos não lineares. O modelo de solução, baseado numa técnica iterativa bastante comum, já foi utilizada em outros trabalhos arrolando aplicações não-lineares, como o de Partridge 'et al' [19].

## CAPÍTULO II

### MODELOS NA ABORDAGEM CIENTÍFICA

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

São muito freqüentes na engenharia problemas físicos que envolvem transporte de massa ou energia através da difusão (propagação no meio contínuo) associada à advecção (transporte por meio de fluxo), seja em escoamentos, misturas ou deslocamentos de partículas. Comumente, tal associação entre essas duas formas de transmissão de calor nessas condições recebe a denominação de convecção forçada. Os casos mais comuns e conhecidos consistem na transferência de calor junto à camada limite do fluido em escoamentos laminares, típicos em aletas de trocadores de calor e em aerofólios, e do transporte de fluidos incompressíveis com baixa viscosidade em tubulações sujeitas a diferenciais de temperatura. No entanto, existem situações menos tradicionais, mas não menos importantes, como a dispersão superficial de poluentes ou misturas em meio aquosos homogêneos, a secagem de produtos agrícolas, a absorção de líquidos em região não saturada ou extração do mesmo em meio poroso, este último problema atualmente de grande interesse na indústria de extração de petróleo.

No caso geral, à complexidade dos fenômenos físicos associados a esses problemas corresponde uma modelagem matemática igualmente elaborada, composta por equações diferenciais parciais não lineares, que requerem necessariamente o emprego de métodos numéricos para sua solução aproximada. Por outro lado, particularmente na engenharia, na física e na matemática aplicada, o tratamento geral desses casos usualmente é substituído pela adoção de modelos simplificados, que viabilizem sua solução e ao mesmo tempo atendam às necessidades práticas. Isso é feito de acordo com o estabelecimento de hipóteses simplificadoras tanto nos aspectos físicos quanto geométricos.

## 2.2 – MODELOS CIENTÍFICOS

Quando o homem decidiu aventurar-se pela laboriosa estrada da ciência, na intenção de suavizar as intempéries da natureza e desvendar seus mistérios, e ainda, talvez a mais importante, amplificar o seu potencial diante do meio que o cerca, na intenção de manipular e modificá-lo de modo a buscar a máxima eficiência dos recursos naturais, sentiu a necessidade de criar ferramentas que possibilitassem essa busca. Foram estas ferramentas de domínio prático, em um primeiro momento, e posteriormente ganharam feições teóricas. De qualquer modo, foram necessárias a criação de metodologias que descrevessem da melhor forma possível o meio em que vivia.

Com base nesta necessidade, o homem desenvolveu ferramentas matemáticas, modelos e teorias, que foram se intensificando em grau de complexidade, ampliando, com isso, os horizontes da técnica e da ciência. Segundo Neves [16], o desenvolvimento de modelos, pode ser sistematizado em uma série de quatro etapas operacionais e metodológicas, visando viabilizar a abordagem do objeto de estudo deste modelo, pela mente humana.

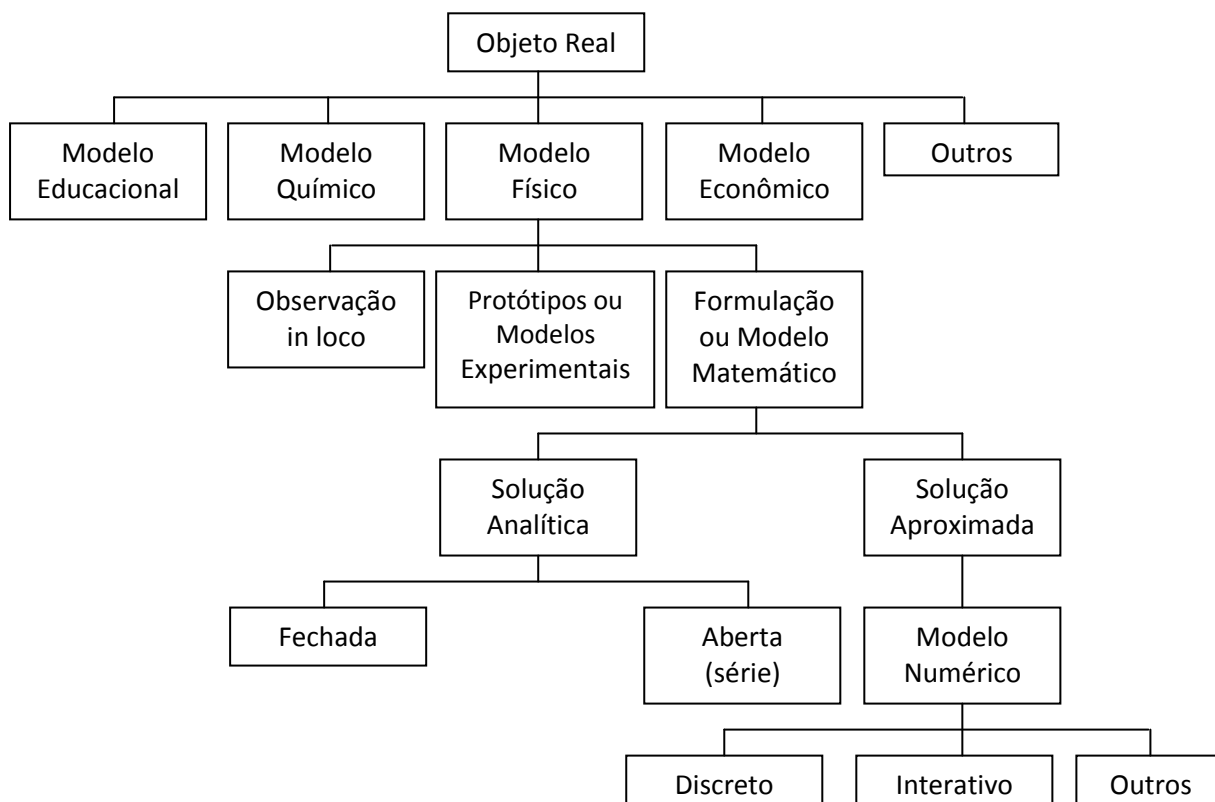


FIGURA 2.1 – Níveis da modelagem científica.

O modelo matemático de um determinado fenômeno abre a possibilidade para que o seu comportamento futuro possa ser previsto com certa precisão e, em conseqüência, o seu impacto possa ser devidamente avaliado e possa até mesmo ser alterado através de ações determinadas para tal fim. Por exemplo, existem atualmente modelos bastante precisos que permitem prever o clima em uma determinada região com grande antecedência e determinar como os poluentes emitidos por indústrias, automóveis, etc. se dissolvem ou reagem na atmosfera indicando o impacto negativo na qualidade de vida da população e a necessidade de controle das fontes primárias de poluição.

A obtenção de um modelo matemático para um determinado fenômeno, normalmente tem como base um conjunto de atributos que devem ser adotados, alguns destes, a saber: leis básicas, simplicidade, precisão e validação. Primeiramente, tendo em vista o ambiente lógico e físico, onde o próprio fenômeno objeto da modelagem se insere, é preciso selecionar de forma adequada as leis básicas, estabelecidas a priori, que devem ser aplicadas. Estas devem gerar um conjunto de equações que descrevem o fenômeno em estudo, tendo como meta sua simplicidade, ou seja, que sejam descritas por relações matemáticas o mais simples possível. Ao mesmo tempo e, de forma geralmente conflitosa, requer-se precisão do modelo que deve fornecer resultados bastante próximos ao fenômeno observado, objeto da modelagem. O conflito se estabelece, pois uma maior simplicidade na modelagem é via de regra conseguida negligenciando alguns aspectos que poderiam ser relevantes e que, por conseguinte, ao não serem explicitamente considerados, redundam em menor precisão. Finalmente, obtido um determinado modelo, é preciso confrontá-lo com a realidade para que ele possa ser validado, isto é, para que ele possa ser eleito como sendo uma representação matemática adequada do fenômeno em estudo. Não é de se surpreender que este caminho seja trilhado várias vezes, até que um modelo efetivo seja devidamente estabelecido de tal maneira a, pelo menos resvalar no paradigma de se conseguir um modelo que, simultaneamente apresente menor complexidade e maior precisão, quando então a engenhosidade e a dedicação para obtê-lo convertem-se em arte.

Desta forma, para se construir e analisar um modelo matemático é importante dominar e saber aplicar corretamente as leis básicas de áreas específicas do conhecimento tais como mecânica translacional e rotacional, eletricidade e eletromagnetismo, entre outras, mas é também imperativo versar sobre um conjunto de propriedades e conceitos matemáticos que são essenciais para manipular processos dinâmicos. Além disso, é importante conhecer as limitações e vantagens de se converter, mesmo que de forma aproximada, equações diferenciais em equações algébricas como resultado de um processo de discretização.

Neste contexto, a idéia de discretização pode ser entendida informalmente como uma transformação de modelos matemáticos diferenciais em modelos matemáticos algébricos. Como no processo de discretização resultam equações algébricas em número referente à quantidade de pontos escolhidos para representar o domínio original, se faz necessário a utilização de um sistema de resolução das equações. Sendo estas facilmente tratadas pelo computador.

No processo de discretização, existem várias abordagens, a eficiência neste caso, dependerá do tipo de problema tratado. Dentre as técnicas numéricas que podem ser destacadas, encontram-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Volumes Finitos (MVF), que são os expoentes de uma família de métodos diferenciais. Outra técnica conhecida é o Método dos Elementos de Contorno (MEC), que compreende uma formulação integral.

A consolidação do MEC como opção eficiente em algumas categorias de problemas veio ratificar uma concepção mais arrojada com relação à superioridade de determinadas técnicas sobre outras. Tal supremacia é relativa, e depende do tipo de problema a ser analisado.



# CAPÍTULO III

## EQUAÇÕES BÁSICAS DE GOVERNO

### 3.1 - EQUAÇÕES BÁSICAS

A obtenção da solução numérica de qualquer problema físico requer a habilidade da criação do modelo matemático correspondente. O modelo matemático deve ser tal que possa ser resolvido com tempos de computação não proibitivos e que os resultados obtidos representem adequadamente o fenômeno físico em consideração.

Na área em que se enquadra o presente trabalho, o domínio físico compõe-se de um volume de controle bidimensional  $\Omega(x, y)$ , dentro do qual atua um campo de velocidades  $V_x$  e  $V_y$ , e pressões  $p$  e em cujas fronteiras  $\Gamma(x, y)$  são prescritas distribuição de potencial temperatura e pressão (condições essenciais) ou fluxos (condições naturais). A figura (3.1) ilustra tais características.

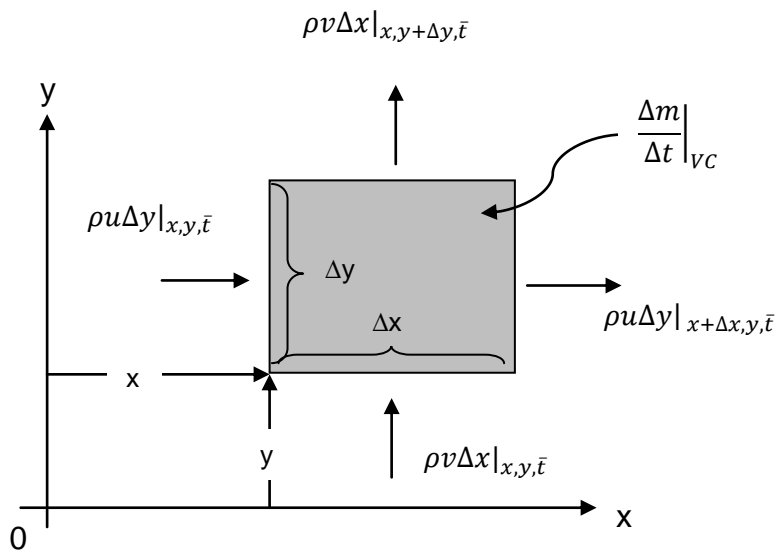


Figura 3.1 Balanço de massa para o volume de controle.

Considerando-se primordialmente as seguintes hipóteses: escoamento homogêneo sob regime permanente com número de Reynolds menor que a

unidade; propriedades e variáveis com comportamento plano, ou seja, passíveis de descrição num volume de controle bidimensional; e, quanto ao fluido, admite-se seja incompressível com propriedades isotrópicas.

A equação da continuidade (3.1), segundo Fox e McDonald [8], expressa-se por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.1)$$

Onde,  $\rho$  representa a massa específica,  $t$  representa o tempo e  $\vec{v}$  é o vetor velocidade. Com a adoção das hipóteses supra-mencionadas, tem-se a equação anterior da seguinte forma,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.2)$$

está última pode, ainda, ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Na equação anterior  $v_x$  e  $v_y$  são componentes do vetor velocidade  $\vec{v}$  do escoamento, enquanto  $x$  e  $y$  caracterizam as coordenadas globais do volume de controle. Não obstante o regime do escoamento ser permanente, há um relacionamento entre as propriedades locais das variáveis de cada partícula em movimento com o sistema global de referência, de modo que as derivadas totais da velocidade com relação ao tempo são dadas por,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} v_x + \frac{\partial v}{\partial y} v_y$$

o mesmo ocorre com relação a temperatura  $T$ , de forma que:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y$$

### 3.2 - EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A equação da quantidade de movimento relaciona as forças inerciais com as forças de superfície e as forças de corpo, onde  $\vec{\sigma}$  é o tensor das tensões e  $\vec{B}$  representa as grandezas de campo, que no presente trabalho é representado apenas pelos efeitos gravitacionais, que no presente trabalho considera-se apenas a ação gravitacional, conforme a figura (3.2) do seguinte modo:

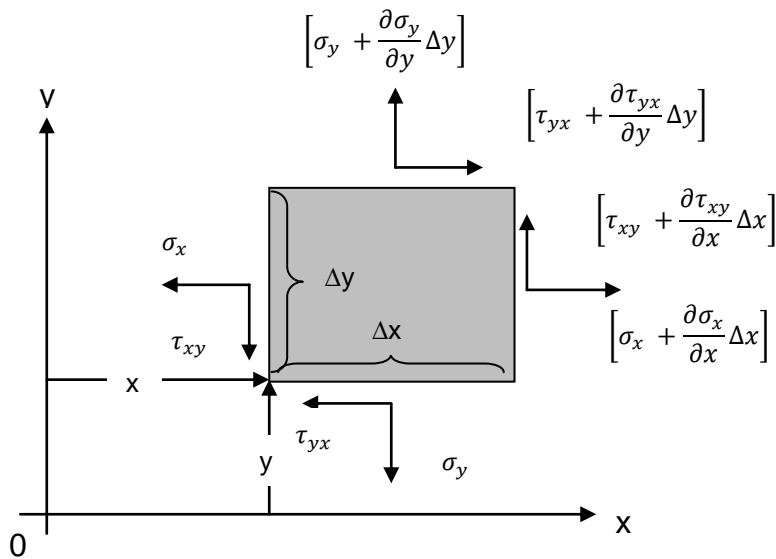


Figura 3.2 Balanço de tensões para o volume de controle.

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{g} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

De acordo com o que foi dito, pode-se expressar a equação da quantidade de movimento da seguinte maneira, baseando-se no demonstrado em Fox e Mcdonald [8].

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v}) \right] = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{B} \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), o primeiro membro da equação da quantidade de movimento representa a ação das forças de inércia que atuam no volume de controle. E no segundo membro, a primeira parcela representa a ação das forças de superfícies que atuam no volume de controle e a segunda parcela são as forças de corpo atuante no volume de controle.

As forças de superfícies, representadas pelo divergente do tensor das tensões, pode ainda ser decomposto em duas parcelas da seguinte maneira,

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} = -\vec{\nabla}P + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.6)$$

o divergente do tensor das tensões foi decomposto, respectivamente, em forças de superfície e forças viscosas. Onde, P representa a pressão termodinâmica e  $\mu$  representa a viscosidade dinâmica do fluido. Assim, reescrevendo-se a equação da quantidade de movimento conforme a decomposição acima, tem-se.

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \vec{v}) \right] = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{B} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.7)$$

Uma das hipóteses utilizadas no contexto deste trabalho é que o escoamento deve ter baixo número de Reynolds. Isto implica diretamente numa relação especial entre forças inerciais e forças viscosas. A influência das forças inerciais do escoamento será insignificante perante a influência dos efeitos viscosos, de tal maneira que elimina-se da equação da quantidade de movimento o termo que se refere às forças inerciais, simplificando a equação da seguinte forma:

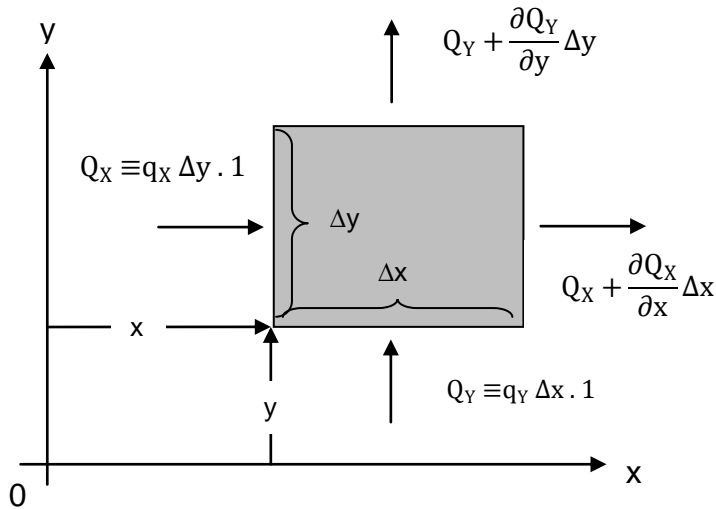
$$\vec{\nabla}P = \rho \vec{B} + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (3.8)$$

### 3.3 - EQUAÇÃO DA ENERGIA

A equação da energia é obtida da primeira lei da termodinâmica, que relaciona a interação entre a energia do sistema com o calor e o trabalho, da seguinte maneira:

$$\left. \frac{\Delta E}{\Delta t} \right|_{sist} = \dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai}$$

A figura (3.3) mostra o calor advectado no volume de controle e a figura (3.4) demonstra o balanço do trabalho de atrito realizado pelas forças superficiais, segundo Özisik [18],

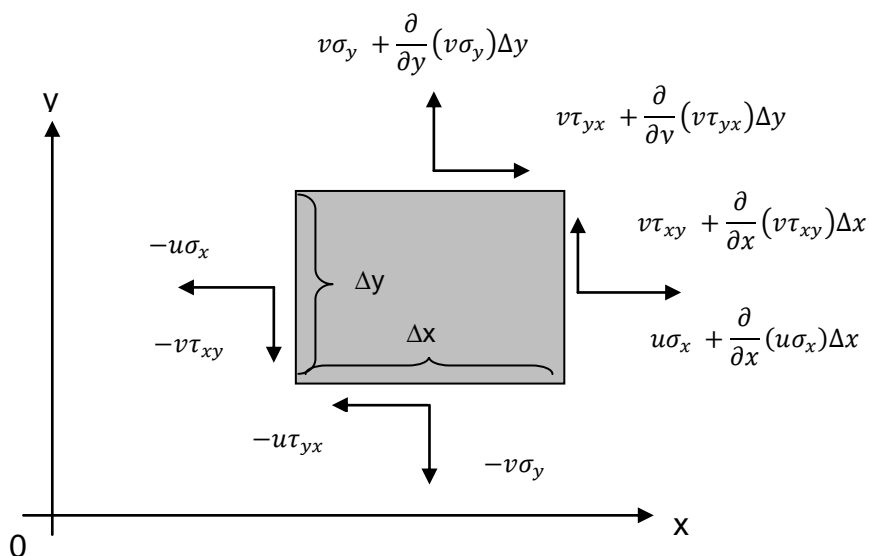


**Figura 3.3** Balanço de calor por advecção no volume de controle.

resultando na equação da conservação da energia para um volume de controle, dada por,

$$\dot{Q}_{entra} - \dot{W}_{sai} + \dot{E}_{entra} - \dot{E}_{sai} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Big|_{VC}$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo representa o calor por difusão que atravessa as fronteiras do volume de controle de acordo com a figura (3.3). O segundo termo representa o trabalho realizado ou recebido pelo sistema conforme a figura (3.4). O terceiro e quarto termos representam a energia líquida advectada para o interior do volume de controle.



**Figura 3.4** Balanço do trabalho de atrito realizado pelas forças superficiais.

Fazendo-se as devidas considerações, White [26] e Rosa [22], a equação anterior pode ser escrita na sua forma diferencial por,

$$\rho C_V \left[ \frac{\partial T}{\partial x} v_x + \frac{\partial T}{\partial y} v_y \right] = K \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (3.9)$$

onde,  $C_V$  é o coeficiente de calor específico à volume constante do fluido e  $K$  representa a condutividade térmica do fluido. O primeiro membro da equação da energia é responsável por tratar os efeitos advectivos do escoamento no volume de controle, enquanto que o segundo membro fica responsável pelos efeitos difusivos do escoamento.

### 3.4 - LEI DE DARCY

Neste trabalho a lei de Darcy juntamente com a equação da quantidade de movimento, desempenhará o acoplamento da pressão com a velocidade no meio poroso. A lei de Darcy (3.10) segundo Rosa [22] e Maliska [12], expressa se por,

$$\vec{Q} = -\frac{\chi}{\mu} A \vec{\nabla} P \quad (3.10)$$

onde  $\vec{Q}$  representa o fluxo volumétrico;  $\chi$  representa a permeabilidade média;  $A$  corresponde à área;  $\mu$  representa a viscosidade dinâmica e  $\vec{\nabla} P$  representa o gradiente de pressão.

Pode-se escrever a equação anterior em termos do fluxo por unidade de área, representada aqui por  $\vec{q}$ , da seguinte maneira.

$$\vec{q} = -\frac{\chi}{\mu} \vec{\nabla} P \quad (3.11)$$

A velocidade do escoamento pode ser escrita em função do fluxo por unidade de área e pela porosidade média  $\phi$ , da seguinte forma.

$$\vec{v} = \frac{\vec{q}}{\phi} \quad (3.12)$$

O fechamento do problema é obtido com a equação de estado, relacionando a massa específica com a pressão e a temperatura,

$$\rho = \rho(P, T)$$

obtendo-se assim, para um problema bidimensional compressível, cinco equações (conservação da massa (3.2), quantidade de movimento em duas direções (3.8), energia (3.9) e equação de estado), para cinco incógnitas  $\rho, u, v, P$  e  $T$ .

A equação de estado será vista com mais detalhes na seção (3.6), mas para adiantar a equação de estado aqui proposta é conhecida como aproximação de Boussinesq e depende apenas da temperatura.

### 3.5 - EQUAÇÃO DE DARCY

Com as equações de transporte básicas, simplificadas sob a luz das hipóteses adotadas, fazem-se as devidas associações e acoplamentos para chegar-se na equação de governo da seguinte maneira. Substituindo-se a equação (3.12) na equação (3.11), tem-se.

$$\vec{v} = -\frac{\chi}{\mu\phi} \vec{\nabla}P \quad (3.13)$$

Comparando-se o valor do gradiente de pressão dado pela lei de Darcy (3.13) e a expressão correlata dada pela equação da quantidade de movimento (3.8), percebe-se,

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu\phi}{\chi} \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}P = \rho\vec{B} + \mu\nabla^2\vec{v}$$

de maneira que.

$$-\frac{\mu\phi}{\chi} \vec{v} = \rho\vec{B} + \mu\nabla^2\vec{v}$$

Desse modo, para o escoamento Darcyano, a equação da quantidade de movimento generalizada fica.

$$\vec{\nabla}P = \rho\vec{B} - \frac{\mu\phi}{\chi} \vec{v} \quad (3.14)$$

Rearranjando a equação anterior de modo a explicitar a velocidade, obtém-se a seguinte equação,

$$\vec{v} = \frac{\chi}{\mu\phi}(\rho\vec{B} - \vec{\nabla}P)$$

pode-se escrever então,

$$\vec{v} = \frac{1}{\mu}K(\rho\vec{B} - \vec{\nabla}P) \quad (3.15)$$

onde  $K = \chi/\phi$ , que representa a permeabilidade do meio em questão. Substituindo-se a equação (3.15) na equação (3.3), tem-se a seguinte relação:

$$\frac{1}{\mu}K\nabla^2P = 0 \quad (3.16)$$

Que pode ser reescrita da seguinte forma.

$$\frac{1}{\mu}K \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (3.17)$$

A expressão anterior é uma equação de Laplace, ou seja, nas condições darcyianas apresentadas, o campo de pressão é harmônico e, estando o problema bem posto na fronteira do volume de controle pode-se resolvê-lo gerando o campo de pressões e de velocidades em qualquer ponto do domínio.

De posse da distribuição de pressão e do campo de velocidade obtidas da equação (3.17), a distribuição de temperatura e o fluxo de calor são determinados diretamente através da equação da energia (3.9). O que torna o modelo resolvível por qualquer método numérico discreto tradicional.

### 3.6 – APROXIMAÇÃO DE BOUSSINESQ

As equações de governo do escoamento de fluidos em um meio poroso, como apresentado, dependem de propriedades de rocha e fluidos deste meio. Tomando como hipótese que os fluidos são ligeiramente compressíveis, segundo Maliska [12] e Rosa 'et al' [22], é possível assumir que a compressibilidade do fluido é definida por:

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (3.18)$$



A relação (3.18) é constante dentro de um intervalo de pressão, onde  $\beta$ , chamado de coeficiente de dilatação térmica do fluido, Segundo Özisik [18]. Expressando o termo da derivada nesta relação, mediante diferenças finitas, a equação (3.18) é aproximada por,

$$\Delta\rho = -\beta\rho\Delta T$$

ou melhor,

$$\rho_{\infty} - \rho = -\beta\rho(T_{\infty} - T) \quad (3.19)$$

onde  $\rho_{\infty}$  é a massa específica a uma temperatura  $T_{\infty}$  qualquer, enquanto  $\rho$  é a massa específica na temperatura  $T$  de referência do meio e  $\beta$  é o coeficiente de expansão térmica do meio poroso. A equação (3.19) é uma aproximação conhecida como aproximação de Boussinesq.

Generalizando à aproximação de Boussinesq, segundo Ferziger e Peric [7], diz que nos escoamentos acompanhados por transferência de calor, as propriedades dos fluidos são normalmente função da temperatura. Segundo essa hipótese, mesmo sendo pequena tal variação de temperatura, esta ocasionará movimento no fluido não desprezível. Se a variação de massa específica for pequena, pode ser tratada sendo constante nos termos da convecção, e tratada como sendo variável nos termos da gravidade.

Na aproximação de Boussinesq assume-se usualmente que a massa específica varia linearmente com a temperatura. Se incluídos seus efeitos na força de corpo, a aproximação pode ser descrita por meio da massa específica e da pressão, o que é demonstrado pela equação (3.19). Então, a equação (3.14) pode ser escrita da seguinte maneira,

$$\vec{\nabla}P - \rho\vec{B} = -\rho\beta(T_{\infty} - T)\vec{B} - \frac{\mu\phi}{\chi}\vec{v} \quad (3.20)$$

se o fluido for um gás ideal, tem-se.

$$\rho = \frac{P}{\mathcal{R}T} \quad (3.21)$$

Na equação anterior,  $\mathcal{R}$  é a constante dos gases. Então,  $\beta$  na equação (3.21) se torna,

$$\beta = \frac{(\rho_\infty/\rho) - 1}{T - T_\infty} = \frac{(T/T_\infty) - 1}{T - T_\infty} = \frac{1}{T_\infty} \quad (3.22)$$

para os líquidos, o valor de  $\beta$  pode ser obtido a partir de tabelas de propriedades.

### 3.7 - PARÂMETROS ADIMENSIONAIS DA CONVECÇÃO LIVRE

Para determinar os parâmetros adimensionais que governam a transferência de calor na convecção livre, precisa-se tornar adimensional a equação do momento (3.20). Para tanto, são definidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$X^* = \frac{x}{L} \quad Y^* = \frac{y}{L} \quad U^* = \frac{u}{U_0} \quad V^* = \frac{v}{U_0} \quad T^* = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \quad (3.23)$$

onde,  $L$  é um comprimento característico,  $U_0$  é uma velocidade de referência,  $T_w$  é a temperatura na superfície de contato, e  $T_\infty$  é uma temperatura do fluido a uma grande distância da superfície de contato. Substituindo-se as variáveis (3.23) na equação (3.7), o resultado será.

$$\rho \left[ \frac{U_0^2 U^*}{L} \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \frac{U_0^2 V^*}{L} \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right] = \beta \rho g (T_w - T_\infty) T^* + \mu \frac{U_0}{L} \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}}$$

Manipulando-se a expressão anterior, encontra-se,

$$\rho \frac{U_0^2}{L} \left[ U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right] = \beta \rho g (T_w - T_\infty) T^* + \mu \frac{U_0}{L} \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}}$$

reordenando,

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) L}{U_0^2} T^* + \frac{\mu L}{\rho U_0 L} \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} \quad (3.24)$$

lembrando que,

$$Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu} \quad e \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad e \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.25)$$

Onde,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido, de tal forma que,

$$U^* \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = \frac{\beta g (T_w - T_\infty) L}{U_0^2} T^* + \frac{L}{Re} \frac{\partial^2 U^*}{\partial X^{*2}} \quad (3.26)$$

o grupo adimensional na equação de momento (3.26) pode ser reordenado como,

$$\frac{\beta g (T_w - T_\infty) L}{U_0^2} = \frac{\beta g L^3 (T_w - T_\infty) / \nu^2}{(L U_0 / \nu)^2} \equiv \frac{Gr}{Re^2} \quad (3.27)$$

onde o número de Grashof,  $Gr$ , é definido, segundo Özisik [18], por.

$$Gr = \frac{g \beta L^3 (T_w - T_\infty)}{\nu^2} \quad (3.28)$$

O número de Grashof representa a razão entre o empuxo e a força viscosa que atua no fluido. O número de Reynolds, na convecção forçada, representa a razão entre a força inercial e a força viscosa que atuam no fluido. Portanto, o número de Grashof na convecção livre exerce o mesmo o papel do número de Reynolds na convecção forçada. Por exemplo, na convecção forçada, a transição do escoamento laminar para o turbulento é governada pelo valor crítico do número de Reynolds. De modo semelhante, na convecção livre, a transição do escoamento laminar para o turbulento é governada pelo valor crítico do número de Grashof.

O parâmetro  $Gr/Re^2$ , definido na equação (3.27), é uma medida da importância relativa da convecção livre frente à convecção forçada. Quando  $Gr/Re^2 \cong 1$ , a convecção livre é da mesma ordem de grandeza que a convecção forçada, e por isso ambas devem ser consideradas. Se  $Gr/Re^2 \ll 1$ , o escoamento é provocado principalmente pela convecção forçada. Se  $Gr/Re^2 \gg 1$ , a convecção livre torna-se dominante e o número de Nusselt depende somente de  $Gr$  e de  $Pr$ .

$$Nu = f(Gr, Pr) \quad (3.29)$$

Na convecção livre, as velocidades do escoamento são provocadas somente pelo empuxo, e, portanto, não há velocidade de escoamento induzida externamente. Por isso, o número de Nusselt não depende do número de Reynolds. Nos gases,  $Pr \cong 1$ ; portanto, o número de Nusselt, na convecção livre, é uma função exclusiva do número de Grashof.

$$Nu = f(Gr) \quad (3.30)$$

Às vezes é utilizado outro parâmetro adimensional, o número de Rayleigh, função do número de Grashoff e do número de Prandtl, definido como,

$$Ra = GrPr = \frac{g\beta L^3(T_w - T_\infty)}{\nu^2} Pr = \frac{g\beta L^3(T_w - T_\infty)}{\alpha\nu} = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\alpha\nu} \quad (3.31)$$

onde,  $\beta$  é o coeficiente de expansão volumétrica,  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $g$  é a gravidade local,  $\Delta T$  é a diferença de temperatura,  $L_c$  é o comprimento característico e  $\alpha$  é o coeficiente de difusividade térmica do fluido. Assim, o número de Grashof é alternativa para correlacionar a transferência de calor na convecção livre. Nesses casos, a equação (3.29) toma a seguinte forma,

$$Nu = f(Ra, Pr) \quad (3.32)$$

### 3.8 - EQUAÇÕES DE GOVERNO ADIMENSIONAIS

Aqui demonstraremos as equações de governo em sua forma adimensional. Para tal, utilizaremos as relações (3.23).

#### 3.8.1 - Equação da continuidade

$$\frac{u_0}{L} \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \frac{u_0}{L} \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{u_0}{L} \left[ \frac{\partial U^*}{\partial X^*} + \frac{\partial U^*}{\partial Y^*} \right] = 0 \quad (3.33)$$

#### 3.8.2 - Equação da Quantidade de Movimento segundo a Lei de Darcy

A equação da quantidade de movimento segundo a lei de Darcy, dada pela equação (3.15):

$$\vec{v} = \frac{1}{\mu} K (-\vec{\nabla} P + \rho \vec{B})$$

Na modelagem anterior foi considerado escoamento incompressível, ou seja, a massa específica não sofre variação espaço-temporal. No entanto, a equação da energia (3.9) apresenta uma parcela advectiva que implica em uma

variação da massa específica devido aos efeitos convectivos oriundos do escoamento. Para contornar tal situação e validar fisicamente o modelo, se faz necessário uma aproximação para a variação de massa específica conhecida como aproximação de Boussinesq, que já foi explicitada na equação (3.19), mas que será aqui repetida por conveniência.

$$\rho_F = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$$

Isto quer dizer que a massa específica é uma função da temperatura. A aproximação de Boussinesq estabelece que a diferença na massa específica é pequena o suficiente para ser desprezada, excetuando-se os casos em que atua a força gravitacional. Essencialmente pode-se desprezar a inércia, mas a ação gravitacional é significativa para alterar a massa específica entre dois poros adjacentes, que pode ser visualizado com a equação (3.14). Desse modo, o campo de velocidades fica:

$$v_x = -\frac{\chi}{\mu\phi} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_F m \quad (3.34)$$

$$v_y = -\frac{\chi}{\mu\phi} \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_F g \quad (3.35)$$

As equações da quantidade de movimento, fundamentadas na Lei de Darcy, considerando a variação da massa específica ficam:

$$v_x = -\frac{\chi}{\mu\phi} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 m [1 - \beta \Delta T] \quad (3.36)$$

$$v_y = -\frac{\chi}{\mu\phi} \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 g [1 - \beta \Delta T] \quad (3.37)$$

com a adimensionalização, tem-se:

$$v_X^* = \chi^* \left[ -\frac{\partial p^*}{\partial X^*} + \frac{m R_A}{g} T^* \right] = \chi^* \left[ -\frac{\partial p^*}{\partial X^*} + R_A^X T^* \right] \quad (3.38)$$

$$v_Y^* = \chi^* \left[ -\frac{\partial p^*}{\partial Y^*} + \frac{g R_A}{g} T^* \right] = \chi^* \left[ -\frac{\partial p^*}{\partial Y^*} + R_A^Y T^* \right] \quad (3.39)$$

onde  $R_A$  é o número de Rayleigh, anteriormente definido, que toma aqui a seguinte forma:

$$R_A^X = \frac{\rho^2 C_p \beta m \Delta T \chi H}{\mu K}$$

$$R_A^Y = \frac{\rho^2 C_p \beta g \Delta T \chi H}{\mu K}$$

A substituição das expressões (3.38) e (3.39) na equação da continuidade (3.3), resulta no seguinte sistema acoplado de pressão e temperatura, que se enquadra como uma Equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial Y^{*2}} = - \left[ R_A^X \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + R_A^Y \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] \quad (3.40)$$

### 3.8.3 - Equação da Difusão-Advecção

Tomando a equação (3.9) e os parâmetros expressos em (3.23) e em (3.25), e fazendo as devidas substituições,

$$\rho C_v \left[ \frac{U_0 U^*}{L} \Delta T \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + \frac{U_0 V^*}{L} \Delta T \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] = K \left[ \frac{1}{L^2} \Delta T \frac{\partial^2 T^*}{\partial X^{*2}} + \frac{1}{L^2} \Delta T \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^{*2}} \right]$$

isolando-se alguns termos na expressão anterior,

$$\rho C_v \frac{U_0}{L} \Delta T \left[ U^* \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] = K \frac{1}{L^2} \Delta T \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^{*2}} \right]$$

re-arrumando a expressão anterior no intuito de encontrar os grupos adimensionais.

$$\left[ U^* \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] = \frac{K}{C_v \rho U_0 L} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^{*2}} \right]$$

Percebe-se que para os grupos dimensionais citados em (3.25), falta a presença da viscosidade dinâmica  $\mu$ , no segundo membro da expressão anterior para a sua definição, de tal forma que,

$$Pr = \frac{\mu C_v}{K} \quad e \quad Re = \frac{\rho L U_0}{\mu}$$

então,

$$\left[ U^* \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + V^* \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] = \frac{1}{RePr} \left[ \frac{\partial^2 T^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial Y^{*2}} \right] \quad (3.41)$$

a equação (3.41) é a equação da energia adimensionalizada.

## CAPÍTULO IV

### FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM DUPLA RECIPROCIDADE

#### 4.1 - INTRODUÇÃO

Existem algumas formulações do MEC direcionadas para solução do problema da Difusão–advecção. Aqui será apresentada a formulação com dupla reciprocidade, por conta de sua facilidade e flexibilidade.

A formulação com Dupla Reciprocidade, inicialmente proposta por Nardini & Brebbia [15] em 1983 para solução de problemas de autovalor, ampliou o campo de aplicação do MEC, permitindo abordar com relativa simplicidade uma série de problemas anteriormente não acessíveis às formulações mais clássicas, particularmente os casos envolvendo ações de domínio, processos transientes, comportamento dinâmico e, ainda, situações nas quais há escoamento com convecção forçada. Existe uma grande diferença conceitual entre a Dupla Reciprocidade e as formulações clássicas, mas a principal delas consiste no fato de que no lugar de se utilizar soluções fundamentais correlatas, a Dupla Reciprocidade usa soluções fundamentais mais simples e funções auxiliares de interpolação para então estabelecer uma equação integral de contorno.

Essas funções auxiliares acarretam uma imprecisão no modelo numérico gerado pela formulação, diferente daquela produzida pela discretização do domínio contínuo e que é típica de todos os métodos numéricos. Uma série de pesquisas foi empreendida no sentido de obter uma melhoria dos resultados, principalmente através do uso de funções mais eficientes. Excetuando-se os casos da dinâmica e da convecção forçada, atualmente é consensual que o erro cometido pelas funções auxiliares pode ser reduzido até limites aceitáveis pelas aplicações usuais em engenharia.

A aplicação da Dupla Reciprocidade em problemas Difusivos-Advectivos foi feita primordialmente por Partridge et al [19], no início dos anos noventa.



Usando uma solução fundamental difusiva e tratando as derivadas espaciais relacionadas à convecção através de uma nova interpolação, seu modelo superou as limitações das formulações clássicas precedentes, resolvendo problemas onde o campo de velocidades era variável, situação de significativa importância em problemas de percolação e dispersão de efluentes. Particularmente, estes casos envolvem escoamentos com baixo número de Peclet, o que resulta numa área de especial interesse para as simulações do MEC com a técnica de Dupla Reciprocidade, pois o erro cometido pelas funções auxiliares é aceitável. Para uma melhor compreensão, a formulação mais elegante do MEC que usa como solução fundamental a solução de um problema Difusivo-Advectivo similar com fonte concentrada num domínio infinito, normalmente apresenta alta precisão de resultados, mas só consegue resolver os problemas onde o campo de velocidades é constante, apesar de não possuir nenhuma aproximação ou interpolação adicional. De qualquer modo, ressalva-se que para os problemas de convecção forçada, os resultados obtidos pela Dupla Reciprocidade tradicional apresentaram precisão limitada a baixos números de Peclet, conforme observaram Neves [16] e Massaro [14], motivando o desenvolvimento das formulações alternativas que compõem o presente trabalho.

No desenvolvimento deste trabalho será utilizada a modelagem matemática, acompanhada de uma posterior simulação computacional, que possibilitará a avaliação do desempenho das aproximações impostas pela modelagem.

O problema de escoamento de fluido em meios porosos é governado, conforme o modelo estabelecido no capítulo 2, por duas equações diferenciais parciais não lineares, acopladas através da lei de Darcy e pela aproximação de Boussinesq. Essas equações escrevem-se como:

$$\nabla^2 P = -R_A^x \frac{\partial T}{\partial x} - R_A^y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.1)$$

$$\frac{1}{\text{Re Pr}} \nabla^2 T = V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.2)$$

As equações (4.1) e (4.2), respectivamente, representam a quantidade de movimento e a difusão-advecção segundo a lei de Darcy e aproximação de Boussinesq. Escrevendo essas equações através da notação indicial, visando facilitar o desenvolvimento da formulação do método dos elementos de contorno destas equações, tem-se:

$$p_{,ii} = -R_A^i u_{,i} \quad (4.3)$$

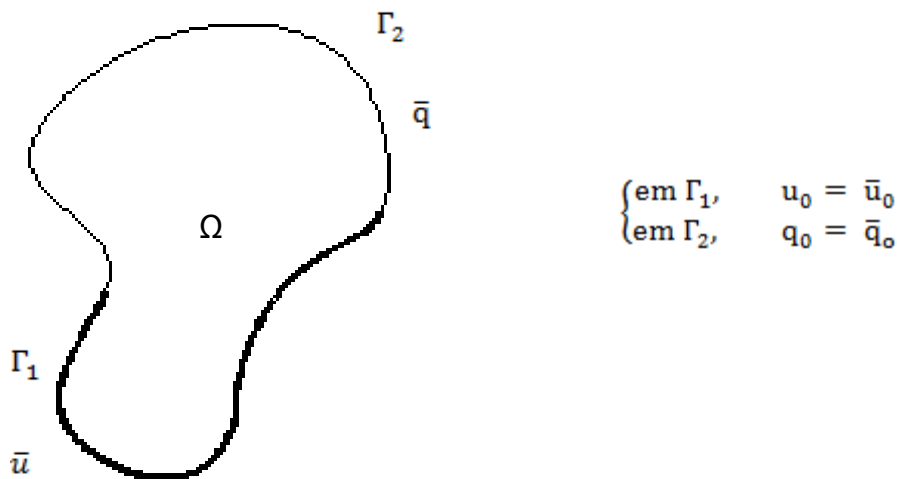
$$k u_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.4)$$

onde k corresponde a  $1/(RePr)$ .

## 4.2 - FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO MEC

Comumente o método é apresentado para problemas de potencial estacionário governado pela equação de Laplace. Uma vez que as equações de governo do presente modelo envolvem o laplaciano, é oportuna a apresentação clássica do método para a equação de Laplace. Considere a equação de Laplace:

$$\nabla^2 u_0(x, y) = 0 \quad (4.5)$$



**Figura 4.2** Domínio prescrito com condições essenciais e naturais.

Escreve-se inicialmente a forma fraca desta equação,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_o w \, d\Omega = 0 \quad (4.6)$$

integrando por partes,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_o w \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(\nabla u_o w) \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla u_o \nabla w \, d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

aplicando o teorema da divergência,

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u_o w) \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_o}{\partial x_j} w \right) \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_o}{\partial x_j} w \right) \frac{\partial x_j}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} w \frac{\partial u_o}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial n} \, d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma} w \frac{\partial u_o}{\partial n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} q_o w \, d\Gamma \quad (4.8)$$

assim,

$$-\int_{\Omega} \nabla u_o \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma} q_o w \, d\Gamma = -\int_{\Omega} \nabla u_o \nabla w \, d\Omega + \int_{\Gamma_1} q_o w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w \, d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

prescrito  $\bar{q}_o$  volta-se à forma original:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_o w \, d\Omega - \int_{\Gamma} q_o w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q_o w \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w \, d\Gamma = 0 \quad (4.10)$$

considere agora:  $\begin{cases} u_o \cong \bar{u}_o \\ q_o \cong \bar{q}_o \end{cases}$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} q w \, d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \bar{q} w \, d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_1} q w \, d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w \, d\Gamma_2 = 0$$

logo,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega = \int_{\Gamma_2} (\bar{q} - \bar{q}_o) w \, d\Gamma_2 \quad (4.11)$$

Está é a expressão equivalente do MRP. Isto quer dizer que a forma fraca da equação de Laplace é equivalente a uma expressão de resíduos onde o erro cometido nas condições de contorno naturais já está embutido. Caso haja um erro nas condições de contorno essenciais, Ele deve ser explicitamente equacionado.

Escreve-se agora a forma inversa do problema de Laplace,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_o w \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla(\nabla u_o w) \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla(u_o \nabla w) \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla^2 w u_o \, d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

onde,

$$\int_{\Omega} \nabla(\nabla u_o w) d\Omega = \int_{\Gamma} q_o w d\Gamma \quad (4.13)$$

e

$$\int_{\Omega} \nabla(u_o \nabla w) d\Omega = \int_{\Gamma} u_o \frac{dw}{dn} d\Gamma \quad (4.14)$$

considerada as regiões com  $\bar{q}_o$  ou  $\bar{u}_o$  ,

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w u_o d\Omega + \int_{\Gamma_1} q_o w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_o \frac{dw}{dn} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u_o \frac{dw}{dn} d\Gamma = 0 \quad (4.15)$$

voltando a reescrever o problema na forma original,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u_o w d\Omega - \int_{\Gamma} q_o w d\Gamma + \int_{\Gamma} u_o \frac{dw}{dn} d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q_o w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_o \frac{dw}{dn} d\Gamma - \\ \int_{\Gamma_2} u_o \frac{dw}{dn} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

simplificando a expressão, teremos:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u_o w d\Omega + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_o \frac{dw}{dn} d\Gamma = 0 \quad (4.17)$$

Fazendo:

$$\begin{cases} u_o \approx u \\ q_o \approx q \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega - \int_{\Gamma_2} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u \frac{dw}{dn} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u}_o \frac{dw}{dn} d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}_o) w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}_o) \frac{dw}{dn} d\Gamma \quad (4.18)$$

O MEC parte do princípio que a sua solução aproximada não obedece às condições de contorno naturais ou essenciais. A equação (4.18) é expressão equivalente do MRP.

Desenvolve-se o lado esquerdo da equação (4.18) por partes, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w u d\Omega + \int_{\Gamma_1} q w d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}_o w d\Gamma = \int_{\Gamma_1} \bar{u}_o \frac{dw}{dn} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u \frac{dw}{dn} d\Gamma \quad (4.19)$$

Consegue-se eliminar a integral de domínio que ainda persistia. Admitindo-se os contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  como compostos de elementos discretos onde se definem pontos nodais e se aproximam os valores do potencial  $u$  e sua derivada, ou seja:

$$\begin{cases} u = \phi U^e \\ q = \phi Q^e \end{cases}$$



**Figura 4.3** Domínio discretizado.

desse modo, escreve-se:

$$u(\xi) + Q^e \int_{\Gamma_e} \phi u^*(\xi; x) d\Gamma_e - U^e \int_{\Gamma_e} \phi q^*(\xi; x) d\Gamma_e = 0 \quad (4.20)$$

A função  $u^*(\xi; x)$  corresponde à solução fundamental e  $q^*(\xi; x)$  é denominado de fluxo fundamental, que para este caso bidimensional, é dada por:

$$u^*(\xi; x) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right) \ln r(\xi; x)$$

$$q^*(\xi; x) = -\frac{1}{2\pi r(\xi; x)} \frac{\partial r(\xi; x)}{\partial n(x)}$$

Pode-se demonstrar que a equação (4.20) é um caso particular de uma expressão geral dada por:

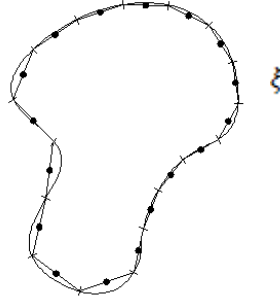
$$C(\xi)u(\xi) + Q^e \int_{\Gamma_e} \phi u^*(\xi; x) d\Gamma_e - U^e \int_{\Gamma_e} \phi q^*(\xi; x) d\Gamma_e = 0 \quad (4.21)$$

onde,

$$C(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi \in \Omega(x) \\ \frac{1}{2}, & \text{se } \xi \in \Gamma(x) \\ 0, & \text{se } \xi \notin \Omega(x) + \Gamma(x) \end{cases}$$

Devem-se gerar tantas equações quantas forem às incógnitas nodais, fazendo a coincidência entre os pontos  $\xi$  e os pontos nodais, chega-se a:

$$H U - G Q = 0 \quad (4.22)$$



**Figura 4.4** Interpolação nodal.

Este sistema final, após as aplicações das condições de contorno que caracterizam determinado problema, pode ser implementado e resolvido computacionalmente.

### 4.3– DUPLA RECIPROCIDADE APLICADA A EQUAÇÃO DE POISSON

Durante o processo iterativo proposto, a relação entre o campo de velocidades e pressão é afetado pela temperatura do meio, conforme atesta a equação repetida aqui por conveniência:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial X^{*2}} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial Y^{*2}} = - \left[ R_A^X \frac{\partial T^*}{\partial X^*} + R_A^Y \frac{\partial T^*}{\partial Y^*} \right] = p(x) \quad (4.23)$$

O lado direito da igualdade pode ser interpretado como um termo fonte, de modo que esta é uma Equação de Poisson. O tratamento matemático proposto pelo MEC para essa equação é similar ao feito para a equação de Laplace, no que tange ao lado esquerdo da equação. Entretanto, para o termo fonte, termo esse conhecido, existem algumas alternativas de solução.

A mais elementar é o uso de células, muito similar ao utilizado pelo Método dos Elementos Finitos, mas que requer a discretização do domínio, algo que foge à filosofia do MEC, que visa discretizar exclusivamente o contorno. A opção mais elegante e já bem consolidada com o MEC é o uso da Formulação com Dupla Reciprocidade (FDR), que interpola a função distribuída no domínio empregando usualmente funções radiais de base e escolhendo adequadamente tais funções de modo que transformem todas as integrais de domínio em integrais de contorno.

A FDR propõe substituir a ação de domínio  $u$  por uma soma finita composta por novas funções auxiliares  $\alpha^j F^j$ , onde  $\alpha^j$  são coeficientes inicialmente desconhecidos e  $F^j$  são funções de aproximação cuja quantificação depende de pontos  $X^j$  escolhidos tanto no contorno, quanto no interior do domínio. Assim, a seguinte aproximação é considerada [2].

$$p(x) \cong \alpha^j F^j(x) \quad (4.24)$$

Para se poder transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, define-se uma nova função  $\Psi^j$ , como sendo uma primitiva de  $F^j(x)$ , conforme a equação (4.24) a seguir,

$$\Psi_{,ii}^j = F^j(x) \quad (4.25)$$

deste modo, a ação de domínio  $u$  pode ser escrita como se segue:

$$p(x) = \alpha^j \Psi_{,ii}^j \quad (4.26)$$

substituindo-se a equação (4.26) pode-se, então, escrever:

$$\int_{\Omega} p u^* d\Omega = \int_{\Omega} \alpha^j \Psi_{,ii}^j u^* d\Omega \quad (4.27)$$

Percebe-se nesta última equação que o mesmo operador diferencial que atuou no lado esquerdo da equação de governo – o Laplaciano – atua também do lado direito. Assim sendo, aplicam-se as mesmas transformações matemáticas que conduziram a equação de governo a se expressar unicamente em termos de valores de contorno. Desta forma a equação (4.27) fica:

$$\int_{\Omega} p u^* d\Omega = \alpha^j \left[ \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Psi^j q^* d\Gamma - C(\xi) \Psi^j(\xi) \right] \quad (4.28)$$

Deve-se ressaltar que  $\eta^j$  e  $\Psi^j$  são funções conhecidas, ou seja, não dependem da solução do problema, dependendo apenas das funções  $F^j$ , que podem ser escolhidas arbitrariamente.

Assim, um aspecto importante surge com referência à escolha das funções. Funções bem simples e flexíveis devem ser preferidas. A escolha dessas funções interpolantes  $F^j$  é objeto de muitas pesquisas, mas a classe de

funções mais adequadas é a das funções radiais de base, devido à sua flexibilidade, invariância, entre outras propriedades. Dentre essas, a mais comum é a radial simples, dada pela distância euclidiana entre pontos do contorno  $X$  e pontos interpolantes  $X^j$ , isto é:

$$F^j(X; X_j) = R(X; X_j) = \left[ (x - x^j)^2 + (y - y^j)^2 \right]^{1/2} \quad (4.29)$$

de modo mais conciso:

$$F^j(X) = R(X^j, X) \quad (4.30)$$

Referenciando-a em coordenadas polares, com origem em pontos base de interpolação  $X^j$ , a equação (4.25) passa a ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^j(X)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial \theta^2} = r \quad (4.31)$$

sendo  $\Psi^j$  independente de  $\theta$ , a equação (4.31) passa a ser:

$$\frac{\partial^2 \Psi^j(X)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^j(X)}{\partial r} = r \quad (4.32)$$

Trabalhando a equação diferencial (4.32), pode-se obter uma solução particular conforme mostrada:

$$\Psi^j = \frac{r^3}{9} \quad (4.33)$$

dessa maneira as funções  $\eta^j$  serão:

$$\eta^j = \frac{r^2}{3} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.34)$$

Assim sendo, mediante o uso da Dupla Reciprocidade, a Equação de Poisson na sua forma integral encontra-se na forma:

$$\int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q^* u d\Gamma - C(\xi) \Psi^j(\xi) = \alpha^j \quad (4.35)$$

$$\left[ \int_{\Gamma} \eta^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \Psi^j q^* d\Gamma - C(\xi) \Psi^j(\xi) \right] = \alpha^j \quad (4.36)$$



#### 4.4- DUPLA RECIPROCIDADE APLICADA A DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Para ilustrar a aplicação da técnica da Dupla Reciprocidade aos casos de convecção forçada, apresenta-se a seguir seu tratamento matemático a partir da Equação Diferencial da Difusão-Advecção:

$$ku_{,ii} = v_i u_{,i} \quad (4.37)$$

Em um primeiro estágio, a técnica em apreço busca tratar o termo advectivo como se fosse uma ação de domínio  $p(X)$ , dado que nenhum procedimento especial é aplicado quando em comparação com os procedimentos usuais utilizados para se trabalhar a equação de Poisson. Posto isto, rerepresenta-se a equação (4.37) como se segue:

$$ku_{,ii} = p \quad (4.38)$$

onde:

$$v_i u_{,i} = p \quad (4.39)$$

Tradicionalmente, a Técnica da Dupla Reciprocidade quando aplicada à equação de Poisson busca aproximar a ação de domínio  $p$  por um conjunto de funções auxiliares  $f^j$ , ajustadas convenientemente por coeficientes constantes  $\alpha^j$  inicialmente desconhecidos, que serão eliminados posteriormente, novamente aqui a equação (4.24):

$$p \cong \alpha^j f^j$$

Esta aproximação constitui a maior fonte de erro produzida pela formulação nos casos mais tradicionais como, por exemplo, problemas dinâmicos escalares e problemas difusivos envolvendo transientes térmicos. Para problemas difusivos-advectivos existe ainda uma fonte adicional de erros, proveniente das interpolações adicionais realizadas para eliminar derivadas espaciais que aparecem no sistema de equações lineares proveniente do método. Esses últimos serão detalhados posteriormente. Define-se agora uma nova função  $\bar{u}^j$  conforme a equação:

$$\bar{u}_{,ii}^j = f^j \quad (4.40)$$

deste modo, a ação de domínio  $p$  pode ser escrita como se segue:

$$p \cong \alpha^j \bar{u}_{,ii}^j \quad (4.41)$$

substituindo a equação (4.41) na equação (4.38), pode-se então escrever:

$$ku_{,ii} = \alpha^j \bar{u}_{,ii}^j \quad (4.42)$$

Percebe-se nesta última equação que o mesmo operador diferencial que atua do lado esquerdo da equação atua também do lado direito, e que tanto  $k$  como  $\alpha^j$  são constantes. Deste modo, as duas estruturas matemáticas que aparecem na equação anterior são equivalentes.

Conforme exposto precedentemente, a Técnica da Dupla Reciprocidade utiliza uma solução fundamental difusiva ao invés de estabelecer uma solução fundamental correlata, conforme feito no capítulo anterior para problemas difusivos. Multiplicando-se então a equação (4.42) pela solução fundamental difusiva e integrando-se em um domínio  $\Omega$ , tem-se:

$$\int_{\Omega} ku_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} \alpha^j \bar{u}_{,ii}^j u^* d\Omega \quad (4.43)$$

Salvo a constante  $K$ , o lado esquerdo da equação acima corresponde exatamente ao mesmo termo que aparece na equação (4.6) da seção (4.2). Aplicando-se, então, à equação (4.43) as mesmas transformações matemáticas aplicadas naquela oportunidade, chega-se a:

$$K \int_{\Omega} u_{,ii} u^* d\Omega = K \left[ \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - C(\xi) u(\xi) \right] \quad (4.44)$$

Do mesmo modo, como o lado direito da equação (4.43) apresenta uma estrutura equivalente ao lado esquerdo do ponto de vista dos operadores matemáticos, empregando as mesmas transformações matemáticas obtém-se:

$$\alpha^j \int_{\Omega} \bar{u}_{,ii}^j u^* d\Omega = \alpha^j \left[ \int_{\Gamma} \bar{q}^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u}^j q^* d\Gamma - C(\xi) \bar{u}^j(\xi) \right] \quad (4.45)$$

Deve-se ressaltar que  $\bar{u}^j$  e  $\bar{q}^j$  são funções conhecidas, ou seja, não depende da solução do problema, dependendo apenas das funções  $f^j$  que podem ser escolhidas arbitrariamente. Nas simulações realizadas neste trabalho, foram utilizadas funções radiais de primeira ordem, pois apresentam

uma estrutura simples com regularidade dos resultados, independente da geometria do problema. Estas funções caracterizam a distância euclidiana entre os pontos  $X$  do domínio e os pontos relacionados à interpolação realizada pela Dupla Reciprocidade  $X^j$ :

$$f^j = \sqrt{(x - x^j)^2 + (y - y^j)^2} \quad (4.46)$$

Definidas as funções  $f^j$ , podem-se calcular as funções  $\bar{u}^j$  pela equação (4.40). A estrutura radial das funções em questão permite reescrever a equação (4.40) em coordenadas cilíndricas, reduzindo o problema à resolução de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, que pode ser resolvida sem grandes dificuldades obtendo-se:

$$\bar{u}^j = \frac{r^3}{9} \quad (4.47)$$

Dado que  $\bar{q}^j$  é a derivada normal da função  $\bar{u}^j$ , com base na equação anterior tem-se:

$$\bar{q}^j = \frac{r}{3} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.48)$$

Definidas as funções acima, pode-se agora igualar as equações (4.44) e (4.45) obtendo-se a equação integral escrita em termos de valores de contorno, onde os coeficientes  $\alpha^j$  ainda desconhecidos serão eliminados na seção seguinte.

$$K \left[ \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - C(\xi) u(\xi) \right] = \alpha^j \left[ \int_{\Gamma} \bar{q}^j u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u}^j q^* d\Gamma - C(\xi) \bar{u}^j(\xi) \right] \quad (4.49)$$

#### 4.5 - FORMULAÇÃO NUMÉRICA GERAL

O procedimento de discretização com o método dos elementos de contorno é bastante conhecido e muito simples. Divide-se o contorno  $\Gamma(x)$  em  $N$  elementos discretos (na ocasião elementos constantes), nos quais a variável básica e derivada normal e a forma geométrica dos elementos, todos são aproximados por funções típicas de interpolação. No caso da FDR, também as

funções auxiliares de interpolação são aproximadas ao longo dos elementos de contorno. No caso da Equação de Laplace, a equação (4.19) pode ser escrita para cada elemento de contorno, ou seja, toma-se o ponto fonte coincidente com os pontos nodais dos elementos, gerando um conjunto de equações que, na forma matricial, escreve-se como:

$$[H][u] - [G][q] = 0 \quad (4.50)$$

O próximo passo consiste em reescrever a equação (4.49) de forma discretizada. Considera-se, então, a figura (4.3) apresentada na seção (4.1), que representa a fronteira de um domínio bidimensional discretizado em elementos de contorno constantes. Para tal caso pode-se escrever:

$$K \left[ u^k \int_{\Gamma^k} q^* d\Gamma^k + C(\xi)u(\xi) \right] - Kq^k \int_{\Gamma^k} u^* d\Gamma^k = \alpha^j \left[ \bar{u}^{jk} \int_{\Gamma^k} q^* d\Gamma^k + C(\xi)\bar{u}^j(\xi) \right] - \alpha^j \bar{q}^{jk} \int_{\Gamma^k} u^* d\Gamma^k \quad (4.51)$$

Onde os índices  $k$  repetidos obedecem à convenção de somatório e caracterizam os elementos de contorno que compõem a malha. Os índices  $j$  estão relacionados aos pontos de interpolação, de acordo com a equação (4.46). Os pontos de interpolação também são considerados coincidentes com os pontos nodais, por simplicidade, pois poderiam ser tomados quaisquer. Inclusive, é interessante considerá-los também no interior do domínio para melhorar a representação das ações de domínio.

#### 4.6 – PARTICULARIZAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO PARA POISSON

Localizando-se os pontos  $\xi$  sobre cada um dos elementos e realizando-se as integrais expostas na equação, gera-se um conjunto de  $n$  equações lineares, que matricialmente pode ser escrito como:

$$HU - GQ = (H\bar{U} - G\bar{Q})\alpha \quad (4.52)$$

Na equação anterior aparecem as matrizes difusivas  $H$  e  $G$ , e as matrizes  $\bar{U}$  e  $\bar{Q}$ , que correspondem as matrizes formadas pelas funções dadas nas equações (4.47) e (4.48) respectivamente. Aparece também o vetor  $\alpha$ , que é ainda desconhecido e deve ser eliminado para ser possível a resolução do

sistema. Para isso, recorre-se a equação (4.52), que pode ser aplicada ao contorno discretizado, resultando na seguinte equação matricial:

$$P = F\alpha \quad (4.53)$$

Onde cada elemento do vetor  $P$  corresponde ao valor nodal da ação de domínio, e a matriz  $F$  corresponde à matriz formada pelas funções  $f^j$ . Tem-se, com a substituição da expressão anterior:

$$(H\bar{U} - G\bar{Q})\alpha = (H\bar{U} - G\bar{Q})F^{-1}P = P \quad (4.54)$$

O MEC, não obstante ser uma técnica de contorno, pode determinar valores das variáveis internas com menor dificuldade, empregando recursivamente a equação integral de governo, em que novos pontos de colocação, os pontos fonte, são localizados no interior. Assim sendo, para as pressões:

$$p(\xi^i) = \sum_{e=1}^N v_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k u^*(\xi^i; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \phi_k q^*(\xi^i; X) d\Gamma \quad (4.55)$$

Onde  $v_k$  e  $p_k$  são valores nodais de velocidade e pressão calculados em cada elemento  $e$ . A derivada direcional dessa última equação no interior não possui singularidades, pois os novos pontos de colocação são internos, de modo que:

$$v_i(\xi^j) = \sum_{e=1}^N p_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k p^*(\xi^j; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N v_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k q_i^*(\xi^j; X) d\Gamma \quad (4.56)$$

$$p_i^*(\xi^j; X) = \frac{\partial q^*(\xi^j; X)}{\partial x_i} \quad (4.57)$$

$$q_i^*(\xi^j; X) = \frac{\partial u^*(\xi^j; X)}{\partial x_i} \quad (4.58)$$

## 4.7 – PARTICULARIZAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO PARA DIFUSÃO ADVECÇÃO

No caso da equação da difusão-advecção o procedimento é similar,

$$HT - Gq = \frac{\rho C_v}{K} (H\Psi - GN)\alpha \quad (4.59)$$

No entanto, a explicitação dos coeficientes  $\alpha$  agora é mais elaborado,

$$\alpha = F^{-1}b = F^{-1} \left( v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4.60)$$

Escolhendo-se um número de funções  $F^j$  igual ao número de nós de discretização, os coeficientes  $\alpha$  podem ser substituídos e escritos em termos dos valores nodais de  $b(x, y)$ , que por sua vez dependem das velocidades e das derivadas da temperatura. Assim sendo

$$P = (H\Psi - GN)F^{-1}v_i T_i \quad (4.61)$$

Aparecem agora nesta equação as derivadas espaciais da temperatura, que constituem um novo conjunto de incógnitas que ainda não permite a resolução do sistema. Para se eliminar estas novas incógnitas, foi proposto por Partridge [19] outro esquema para interpolação do campo de temperaturas. Neste esquema se estabelece a seguinte interpolação:

$$T = F\beta \rightarrow T_i = F_i F^{-1}T \quad (4.62)$$

a expressão final fica então,

$$HT - Gq = (H\Psi - GN)F^{-1}v_i F_i F^{-1}T = RT \quad (4.63)$$

assim o sistema matricial final fica,

$$(HT - RT) = Gq \quad (4.64)$$

Este sistema final, após as aplicações das condições de contorno que caracterizam determinado problema, pode ser implementado e resolvido computacionalmente.

Ressalta-se que o campo de velocidades deve ser completamente conhecido nas fronteiras do volume de controle, considerando que a equação

de Poisson fornece apenas valores das velocidades normais, as demais componentes precisam ser calculadas para compor as velocidades na equação da difusão-advectação. Então, para o cálculo das derivadas direcionais da temperatura no interior do volume de controle:

$$q_i(\xi^j) = \frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_{e=1}^N T_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k p_i^*(\xi^j; X) d\Gamma - \sum_{e=1}^N Q_k^e \int_{\Gamma_e} \varphi_k q_i^*(\xi^j; X) d\Gamma \quad (4.65)$$

$$q_i^*(\xi^j; X) = \frac{\partial u^*(\xi^j; X)}{\partial x_i} \quad (4.66)$$

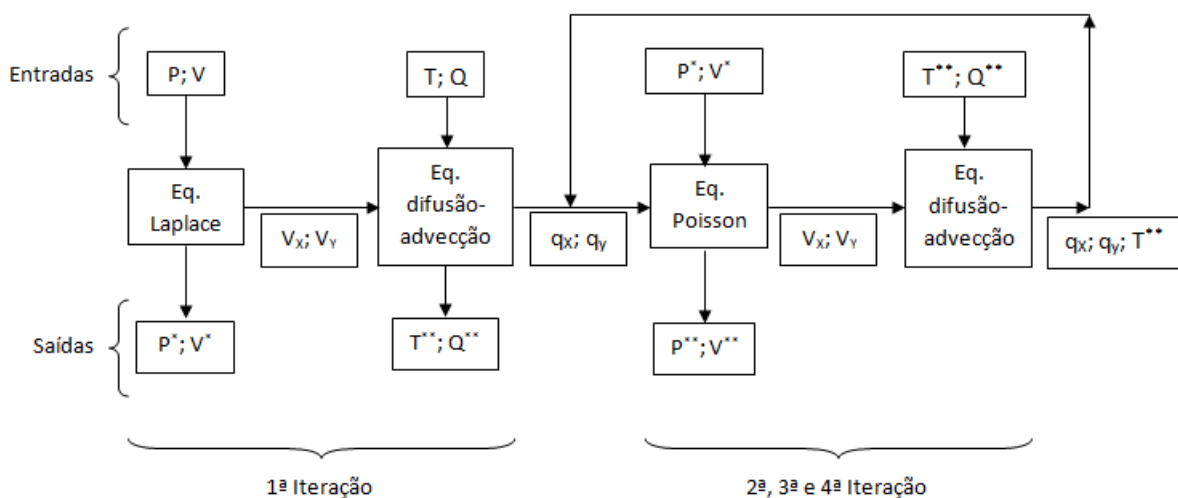
# CAPÍTULO V

## APLICAÇÕES NUMÉRICAS

### 5.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, aplica-se inicialmente a modelagem proposta em dois testes simples para efeito de validação dos resultados numéricos e verificação da confiabilidade do programa implementado. Nestes testes o programa trabalha com as equações do modelo separadas ou desacopladas. Os resultados numéricos gerados através destas duas primeiras simulações são comparados com os resultados de problemas nos quais se dispõe de solução analítica. Em ambas as simulações foram empregadas malhas compostas de quarenta elementos de contorno constantes.

Na terceira e última simulação, o programa trabalha com as equações interagindo entre si, ou seja, a equação de Poisson gerando um campo de velocidades que será usado na equação da difusão-advectação, que por sua vez irá gerar uma distribuição de fluxo de calor que será usada pela equação de Poisson e assim, sucessivamente, iterando até o estabelecimento da convergência, conforme a figura (5.1). O programa foi escrito em código FORTRAN, e para a primeira simulação foi escrito um código em MATLAB, para gerar as soluções analíticas.



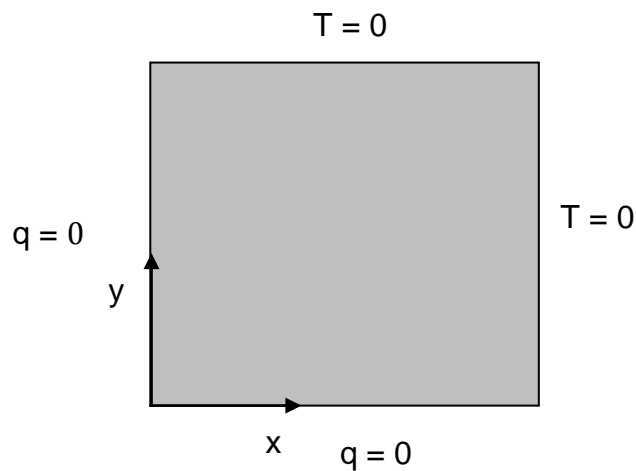
**Figura 5.1** Seqüência iterativa do programa.



## 5.2 – VALIDAÇÃO DO MODELO PARA A EQUAÇÃO DE POISSON

Da mesma maneira que a validação numérica para a equação da difusão-advecção, iremos confrontar o modelo numérico da equação de Poisson com a sua respectiva solução analítica proposta por Reddy [21]. A solução analítica foi obtida de acordo com o modelo na figura (5.2).

As condições do problema são as seguintes:



**Figura 5.2** Características geométricas e condições de contorno do problema.

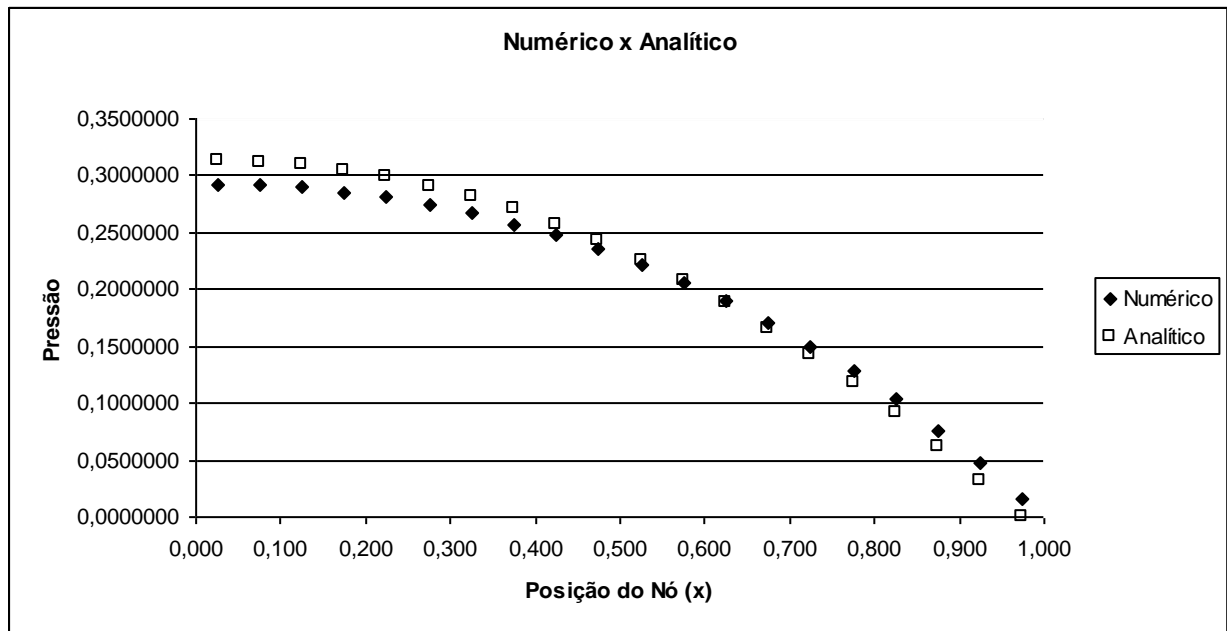
A equação de governo é dada por,

$$-k\nabla^2 T = q_0, \text{ em } \Omega = \{(x, y): 0 < (x, y) < 1\}$$

e a solução analítica para a distribuição de temperatura é dada por:

$$T(x, y) = \frac{q_0}{2k} \left[ (1 - y^2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha_n y \cosh \alpha_n x}{\alpha_n^3 \cosh \alpha_n} \right]$$

Simulando os resultados para  $x=1$  e  $y=0$ , obteremos os resultados conforme o gráfico (5.2.1), a seguir:



**Gráfico 5.2.1** Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta horizontal inferior.

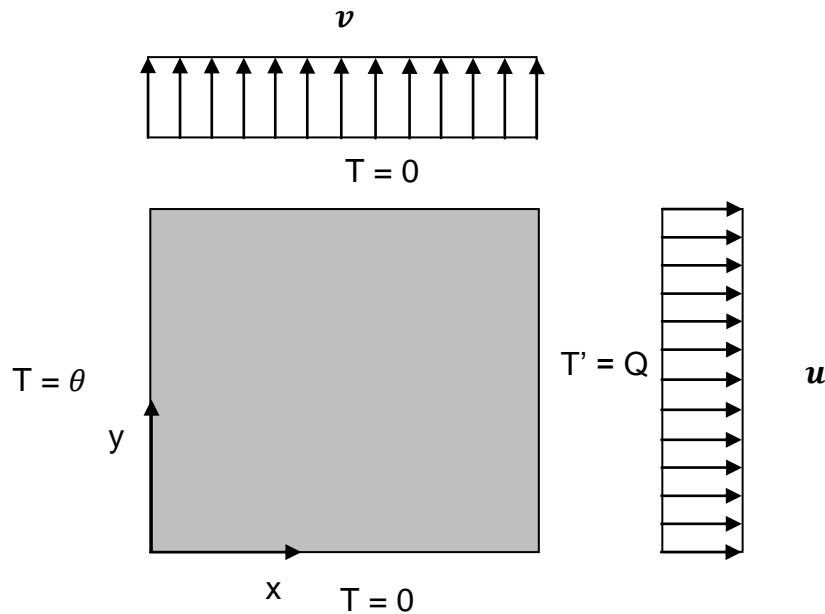
De acordo com o gráfico (5.2.1), verifica-se que o modelo numérico para a equação de Poisson tem validade numérica.

Ressalta-se que os modelos numéricos para a equação da difusão-advecção e para a equação de Poisson foram implementados pelo método dos elementos de contorno com dupla reciprocidade. Com os resultados satisfatórios obtidos com tais implementações, simula-se a seguir um problema mais complexo, no qual as equações de Poisson e Difusão/Advecção estão acopladas.

### 5.3 – VALIDAÇÃO DO MODELO PARA A EQUAÇÃO DA DIFUSÃO-ADVECÇÃO

Para validar o programa proposto, foi necessário confrontá-lo com a solução analítica da equação da difusão-advecção de um problema já estudado, segundo Santos [23]. A solução analítica foi obtida de acordo com o modelo da figura (5.3), e iremos confrontar a solução numérica com a solução analítica.

As condições do problema são as seguintes: uma chapa quadrada sujeita a um fluxo de velocidades em duas direções,  $u$  e  $v$ , e submetido a valores de temperaturas,  $T$ , e fluxos difusivos, prescritos,  $Q$ , nas suas arestas tal como apresentado na figura (5.3), a seguir:



**Figura 5.3** Características geométricas e condições de contorno do problema.

A equação de governo é dada por,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

e a solução analítica para a distribuição de temperatura é dada por:

$$T(x, y) = \left\{ \left[ \frac{e^{ux} - 1}{u} \right] + 1 \right\} + \sum_{i=1}^{\infty} G_i e^{\frac{u}{2}x} \sin q_i x \left\{ \left[ \frac{(1 - e^{\lambda_2})}{(e^{\lambda_1} - 1)} e^{\lambda_1 y} + e^{\lambda_2 y} \right] \right\}$$

Para obtermos o fluxo de calor, basta derivar a função de distribuição de calor, da seguinte maneira.

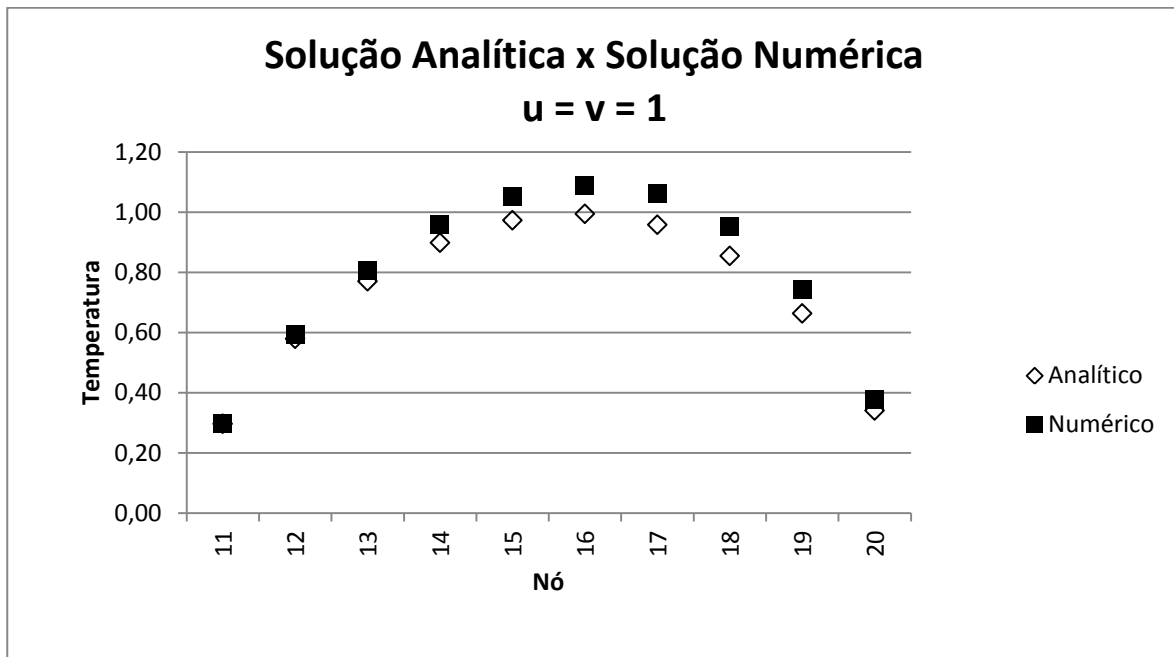
Para as arestas verticais:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = e^{ux}$$

Para as arestas horizontais:

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = G_i e^{\frac{u}{2}x} \sin qx \left\{ \left[ \frac{(1 - e^{\lambda_2})}{(e^{\lambda_1} - 1)} \lambda_1 e^{\lambda_1 y} + \lambda_2 e^{\lambda_2 y} \right] \right\}$$

Fazendo-se as simulações obteremos os resultados descritos pelos gráficos a seguir:

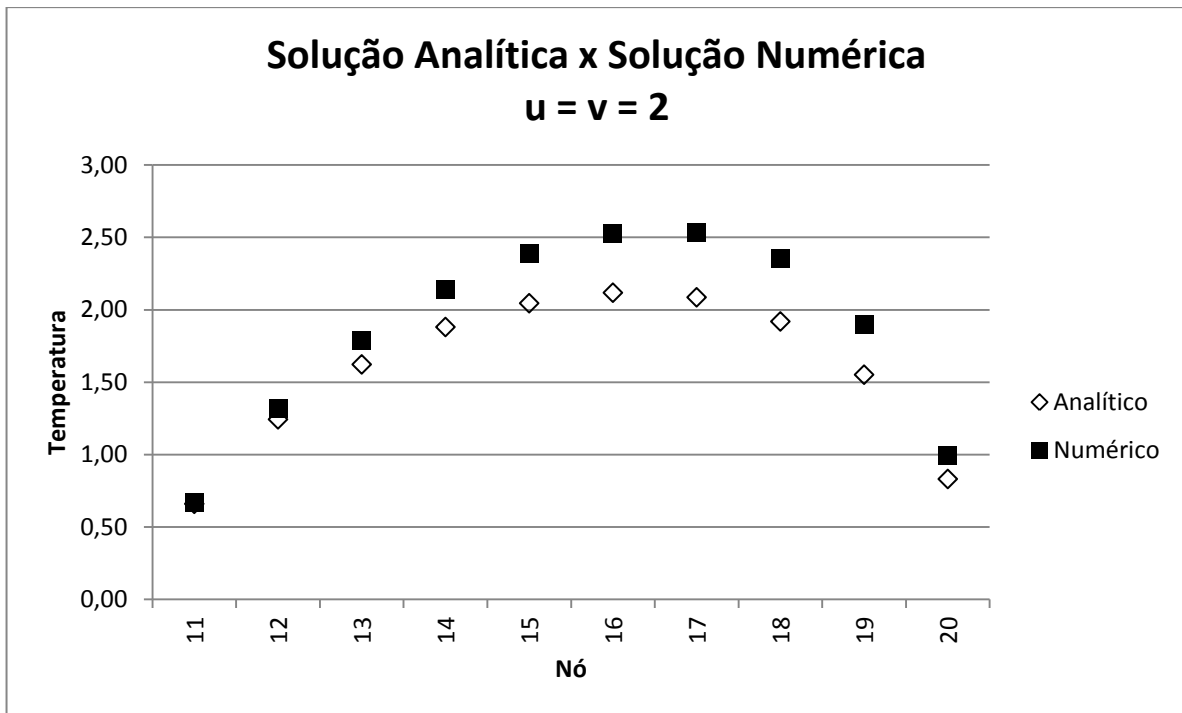


**Gráfico 5.3.1** Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita, para  $u = v = 1$ .

Primeiramente foi feito um teste no qual as velocidades de escoamento foram tomadas iguais e de valor unitário, e os resultados numéricos para a temperatura na aresta vertical foram comparados com os resultados analíticos, conforme mostra o gráfico apresentado na Figura (5.2.1).

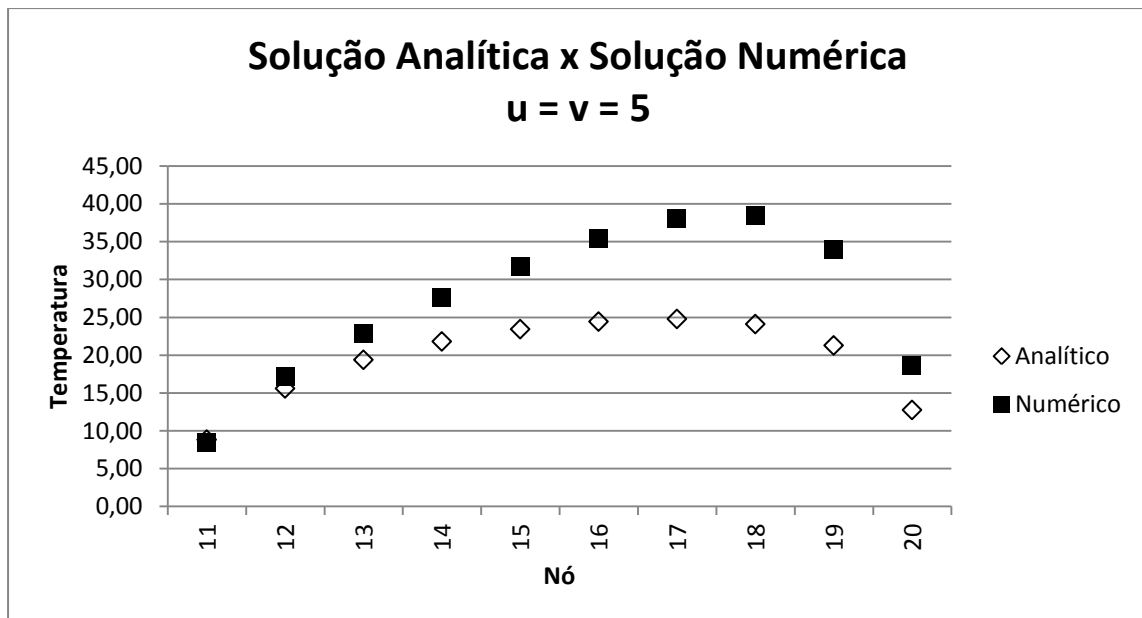
Embora para alcançar o propósito de resultados mais precisos fosse necessário refinar a malha, com a finalidade de testar a potencialidade da formulação do método dos elementos de contorno empregada, a velocidade do escoamento que atravessa o volume de controle será dobrada, ou seja, as velocidades horizontais e verticais,  $u$  e  $v$  respectivamente, serão tomadas iguais a dois.

Percebe-se na Figura (5.3.2) que as curvas apresentam maior discordância, conforme esperado.



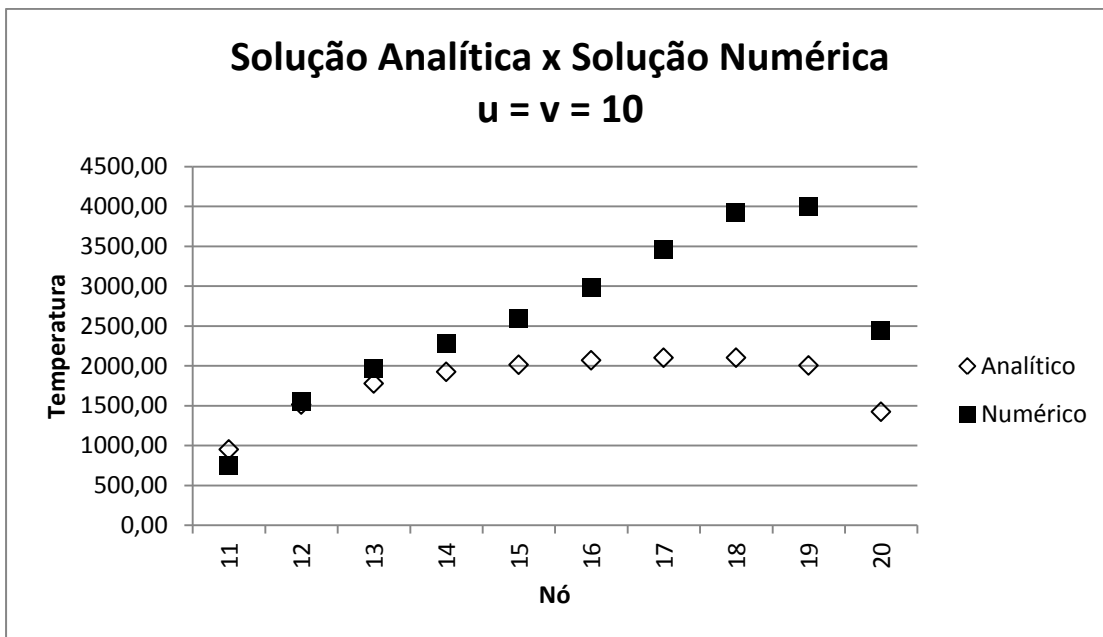
**Gráfico 5.3.2** Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita, para  $u = v = 2$ .

A penúltima experiência é feita considerando-se velocidades iguais a 5. Naturalmente há um grande crescimento do erro numérico nesse caso, conforme mostra a Figura (5.3.3).



**Gráfico 5.3.3** Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita, para  $u = v = 5$ .

Com base nos resultados da ultima fase de testes nesse exemplo, considerando a velocidade de escoamento igual a 10, percebe-se que o método numérico não mais consegue oferecer resultados satisfatórios, com erro máximo na faixa de 50%. Evidentemente que uma redução desses valores de erro poderia ser obtida refinando-se a malha de elementos de contorno utilizada, conforme a Figura (5.3.4).



**Gráfico 5.3.4** Comparação entre as temperaturas analíticas e numéricas na aresta vertical direita, para  $u = v = 10$ .

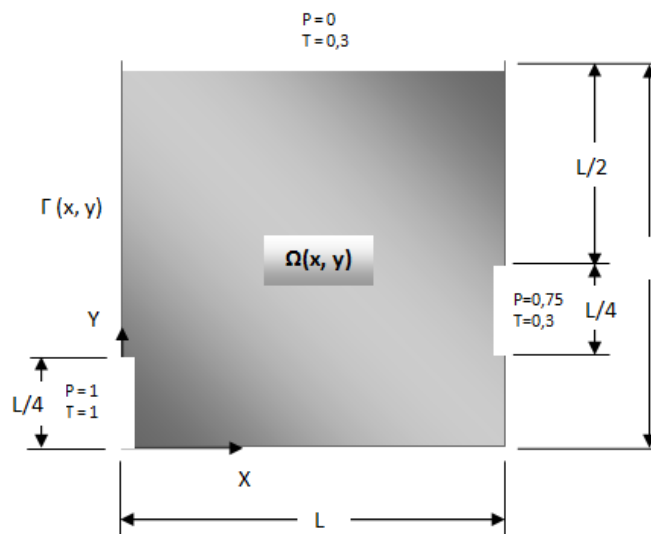
#### 5.4 – SIMULAÇÃO DO PROBLEMA ACOPLADO

O problema proposto fisicamente pode ser considerado como o caso de um silo no qual são armazenados em seu interior grãos ou outros pequenos particulados, cuja modelagem se aproxima do modelo Darciano adotado. O silo está repleto e sujeito às condições apresentadas nas figuras (5.4.1) que se seguem. Nesta simulação, inicialmente o modelo trabalha com a equação de Laplace, pois o termo fonte originado pela aproximação de Bousinessq é considerado nulo, por simplicidade. Os resultados de pressão e velocidade são aplicados na equação da difusão-advecção. Após sua solução, os termos fonte da equação de Poisson, que envolvem o fluxo de calor, o número de Rayleigh

e o campo gravitacional, são definidos. Novas pressões e velocidades são geradas, e essas últimas são realimentadas na equação da Difusão-advecção, e assim sucessivamente, até a convergência. Em outras palavras, a equação de Poisson terá como entrada de dados o fluxo de calor, gerada pela iteração anterior, e irá fornecer um campo de velocidades para a equação da difusão-advecção, que também usará como entrada de dados a distribuição de temperatura proveniente da iteração anterior. Esta equação fornecerá uma nova distribuição de temperatura e fluxos de calor.

A cada iteração a matriz dos coeficientes será atualizada com uma nova distribuição de velocidade, pressão, temperatura e fluxos de calor, tanto no domínio quanto na fronteira, e voltará a realizar uma nova iteração.

O número de iterações utilizado neste trabalho foram quatro ciclos, e utilizamos dois tipos de malhas, a saber: 40 nós e 80 nós ao longo do contorno. Quanto à geometria e condições de contorno, o domínio do problema está demonstrado na figura (5.4.1).



**Figura 5.4.1** Domínio físico do problema.

Para maior clareza dos gráficos apresentados a seguir, definem-se as arestas do volume de controle conforme a figura (5.4.2).

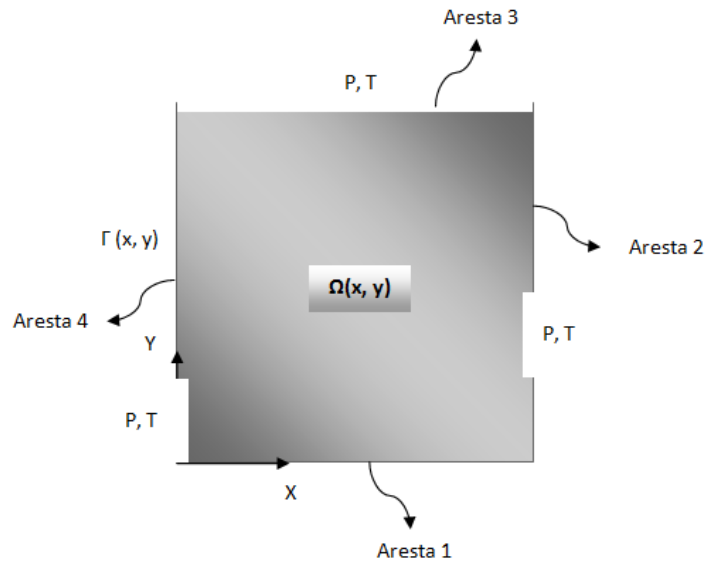


Figura 5.4.2 Definição das arestas do domínio do problema.

### 5.4.1 - Simulação com Malha de 40 nós e Ra = 2

A malha de 40 nós será distribuída segundo a figura (5.4.3) como segue.

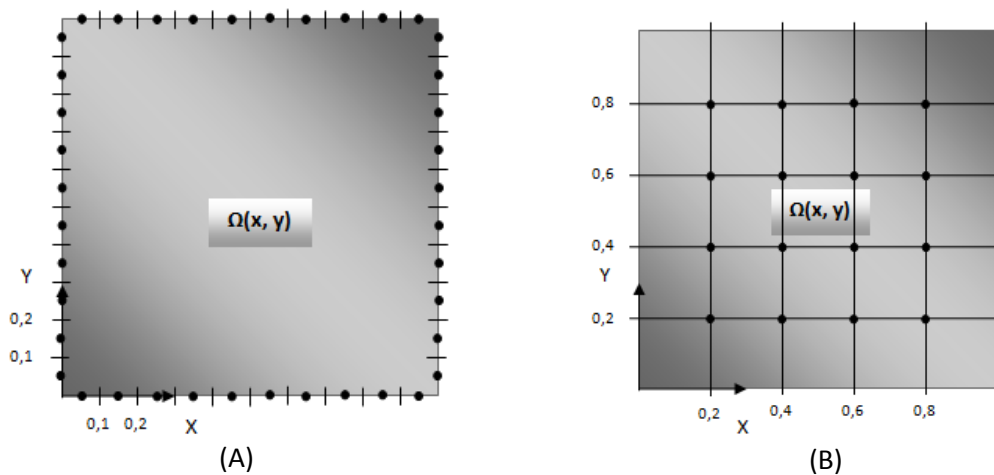
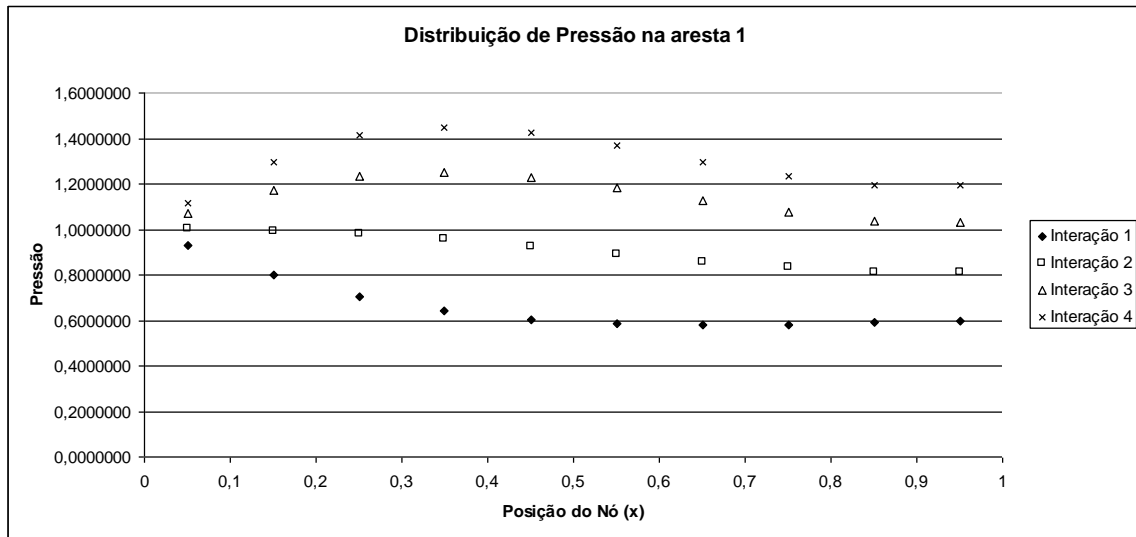


Figura 5.4.3 (A) discretização do contorno do problema; (B) Discretização do domínio do problema.

Nesta primeira simulação, apresentam-se no gráfico (5.4.3), os valores do perfil de pressão no fundo do silo, correspondente às quatro iterações realizadas. Percebe-se o aumento da pressão à medida que as iterações se processam. É importante destacar que na primeira iteração o modelo de pressão e velocidades não sofre a ação gravitacional, sendo governado pela Equação de Laplace. Com o decorrer do processo iterativo, atua a ação de domínio, dada pelo fluxo de calor versus o número de Rayleigh (que contém o



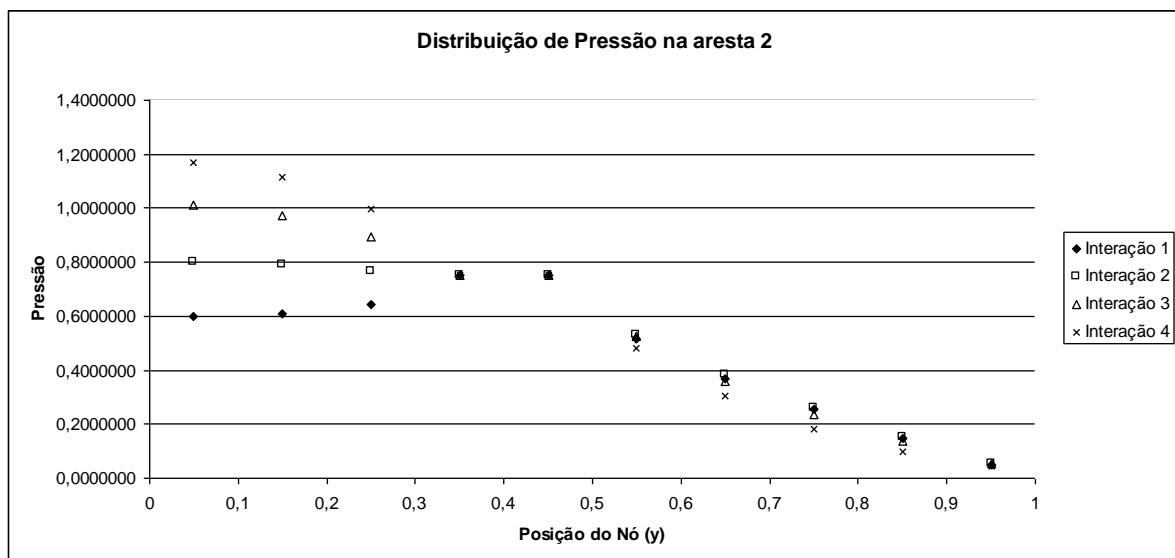
campo gravitacional) amplificando gradativamente a pressão no fundo, como pode ser percebido no gráfico (5.4.1).



**Gráfico 5.4.1:** Distribuição de pressão na aresta 1 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

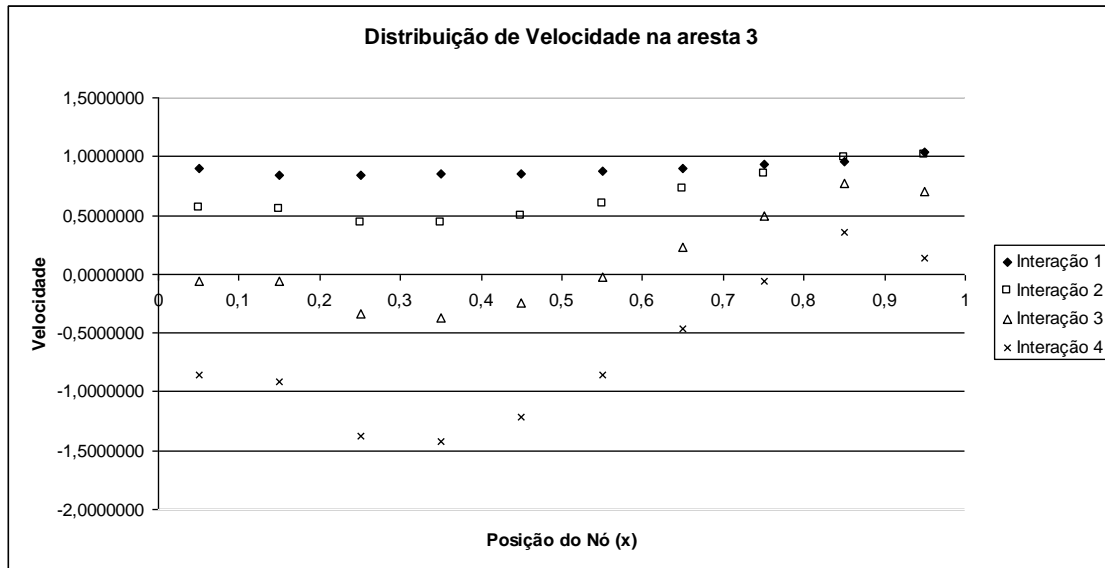
Não se identifica uma convergência imediata nos perfis de pressão, mas a diferença de valores entre as quatro sucessivas iterações diminui gradativamente.

No segundo gráfico, referente aos valores de pressão na aresta vertical direita, não houve variação dos resultados com as iterações realizadas, excetuando-se a região inferior do canto direito que, de acordo com cálculos feitos em pontos internos (não mostrados aqui) mostra ser uma região na qual há maior estagnação dos valores das velocidades.



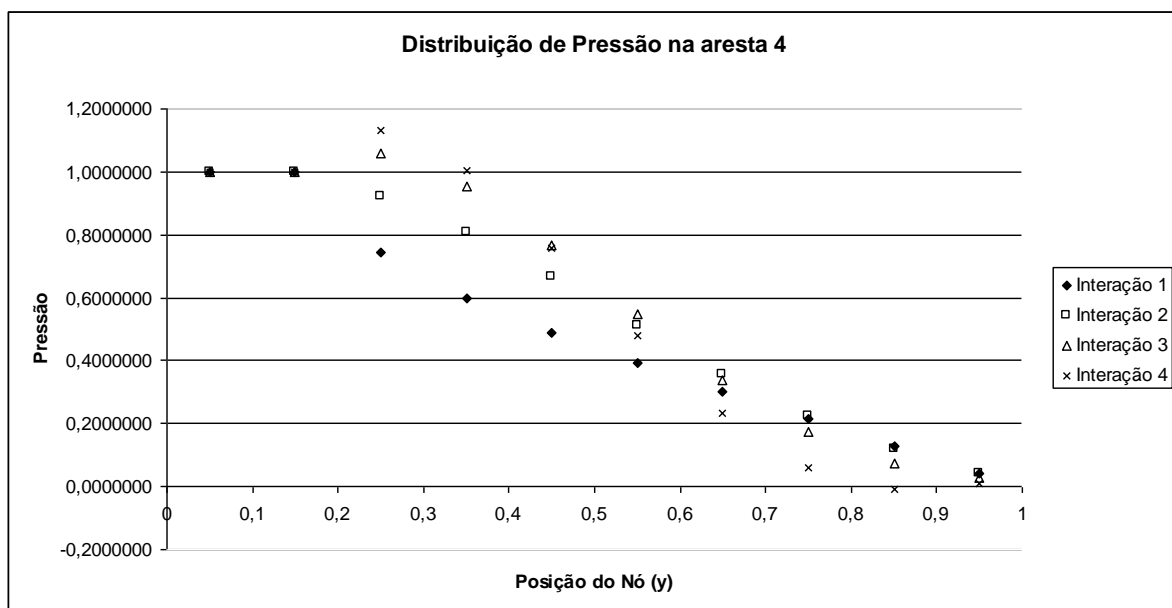
**Gráfico 5.4.2:** Distribuição de pressão na aresta 2 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

No gráfico (5.4.3) apresentam-se os resultados referentes às velocidades na aresta horizontal superior. Inicialmente, os resultados estão de acordo com o previsto, pois na primeira iteração não há ação gravitacional fazendo com que as velocidades iniciais sejam mais elevadas. Com a introdução do efeito gravitacional, percebe-se que o perfil de velocidades se reduz. Especialmente na quarta iteração, os valores do centro para a esquerda (próximos à aresta 4) chegam a alterar o seu sentido de atuação.



**Gráfico 5.4.3:** Distribuição de velocidade na aresta 3 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

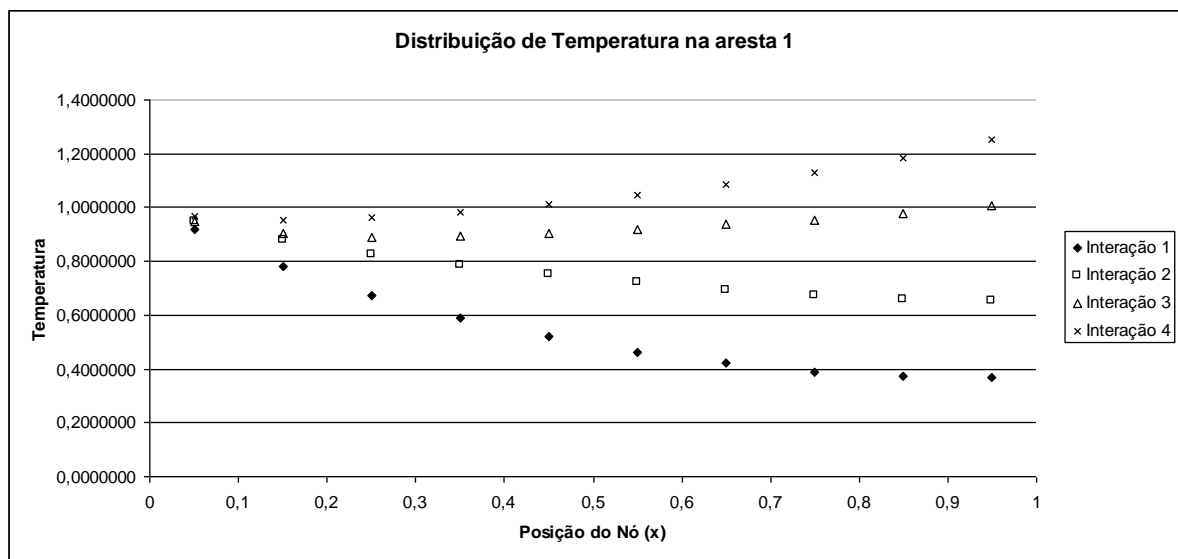
Na aresta 4 os valores de pressão não apresentam grande variação no decorrer do processo iterativo, conforme pode-se observar no gráfico (5.4.4).



**Gráfico 5.4.4:** Distribuição de pressão na aresta 4 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

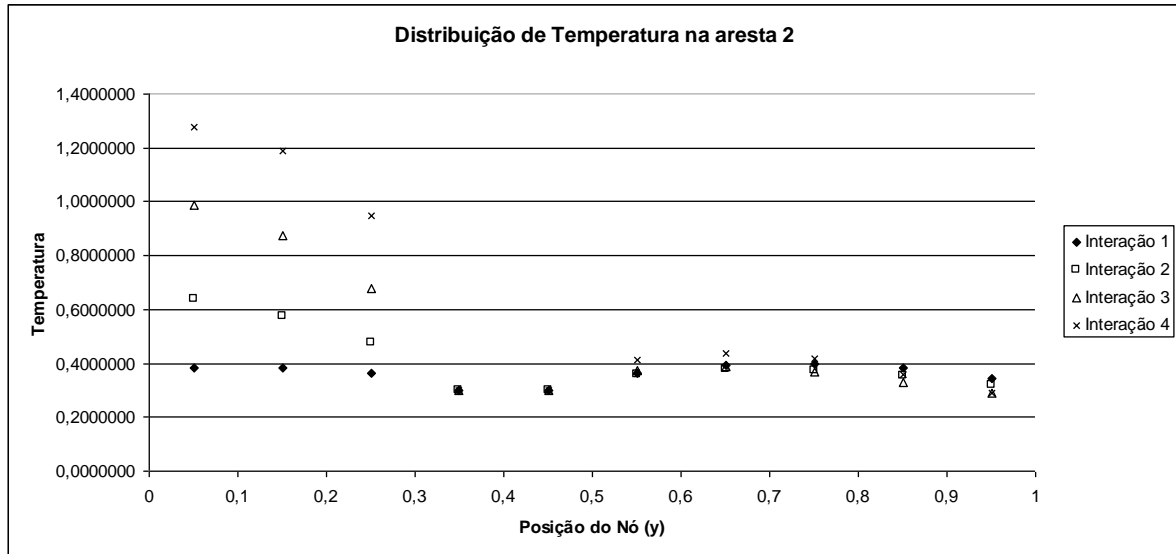
Nos gráficos seguintes são apresentados os resultados referentes à temperatura e ao fluxo de calor gerados através da solução da equação da Difusão-Advecção.

Para a aresta 1, no fundo do silo, gráfico (5.4.5), verifica-se sucessivos ganhos de calor no sistema com a introdução das variações de velocidade obtidas com o acoplamento do efeito gravitacional. O efeito compressivo da ação de domínio faz com que a distribuição de temperatura ao longo da aresta 1 aumente gradativamente seus níveis.



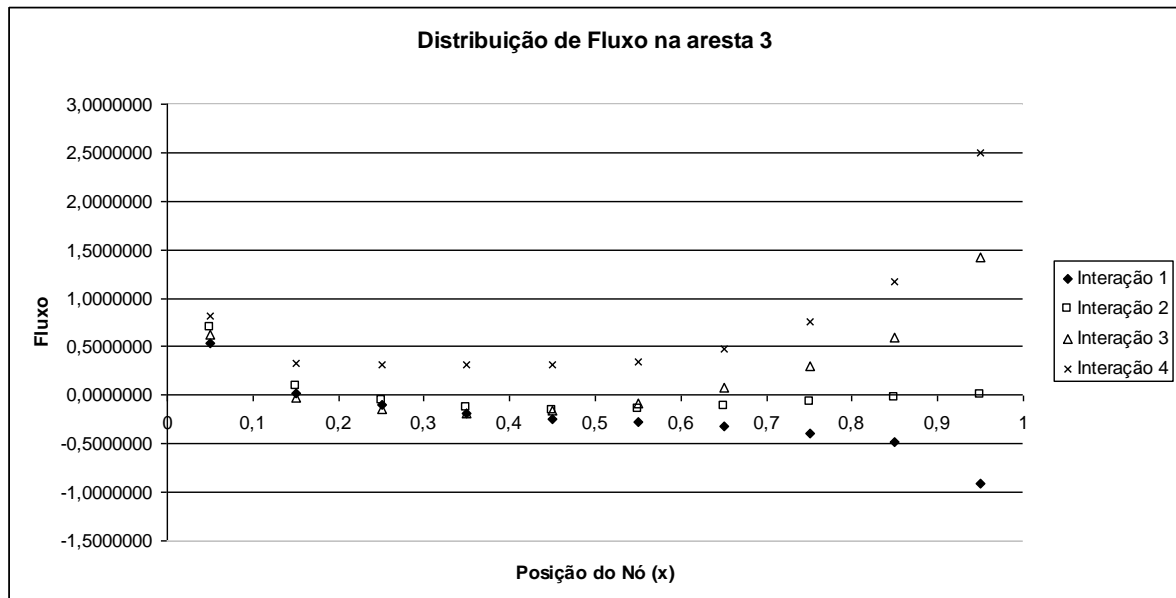
**Gráfico 5.4.5:** Distribuição de temperatura na aresta 1 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

Da mesma forma que no histórico da pressão, os valores de temperatura apresentaram convergência na aresta vertical direita, conforme mostra o gráfico (5.4.6). Talvez o fato de haver uma região com valores de temperatura prescritos nesta aresta faça com que esses resultados pouco se alterem.



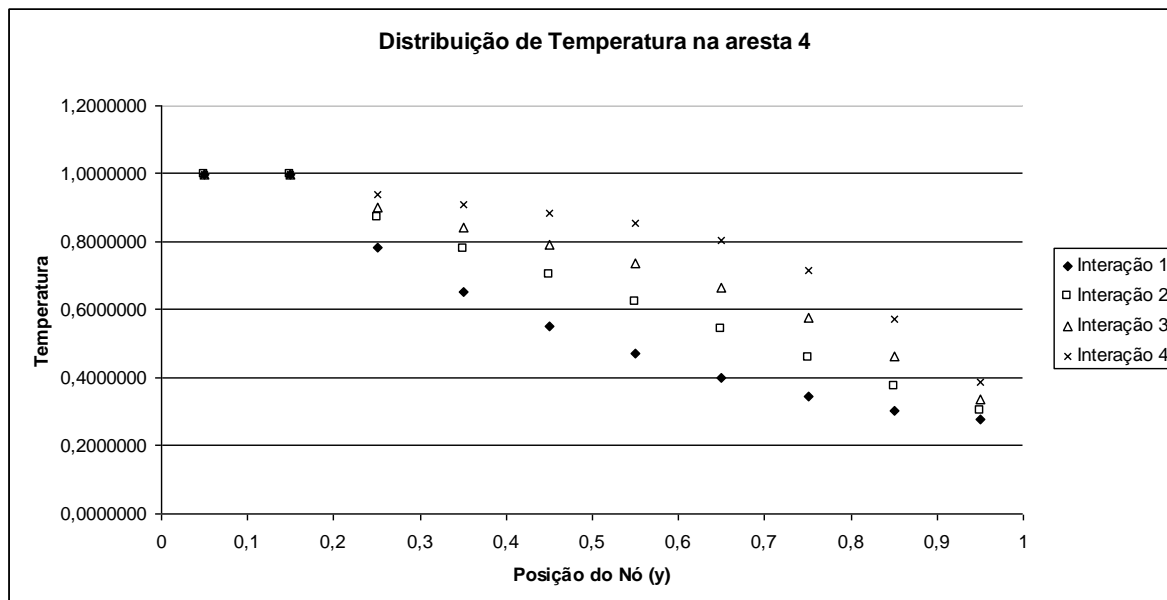
**Gráfico 5.4.6:** Distribuição de temperatura na aresta 2 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

No gráfico (5.4.7), referente aos fluxos atuantes na aresta horizontal superior, percebe-se que seu perfil, inicialmente distribuído de modo a reduzir-se da aresta esquerda em direção à direita, muda de comportamento com as iterações. Na quarta iteração os valores próximos à aresta direita estão muito elevados.



**Gráfico 5.4.7:** Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

A temperatura ao longo da aresta 4, gráfico (5.4.8), tem o seu comportamento semelhante ao da pressão; no entanto, há um aumento da temperatura com as sucessivas iterações, devido absorção de calor pelo volume de controle.



**Gráfico 5.4.8:** Distribuição de temperatura na aresta 4 com  $Ra = 2$  e malha de 40 nós.

Diante dos gráficos apresentados, pode-se verificar que: sendo o problema não linear, representado pelo acoplamento das equações de Poisson e Difusão-advecção através da dependência das velocidades com a temperatura, o comportamento físico do sistema como um todo mostra-se bastante sensível e com certos caracteres de imprevisibilidade, o que é comum em modelos não lineares. Aliado ao que foi dito, a literatura não fornece informações para efeito de comparações de resultado, o que torna o processo de análise algo complexo.

Os resultados mostrados apontam para uma contínua alteração dos perfis de pressão, velocidades, temperatura e fluxos difusivos, ou seja, nenhuma das curvas anteriores apresentou alguma tendência de estabilização no sentido de estar convergindo para um perfil limite, embora em algumas dessas curvas possa ser identificada uma redução de valores nas sucessivas iterações.

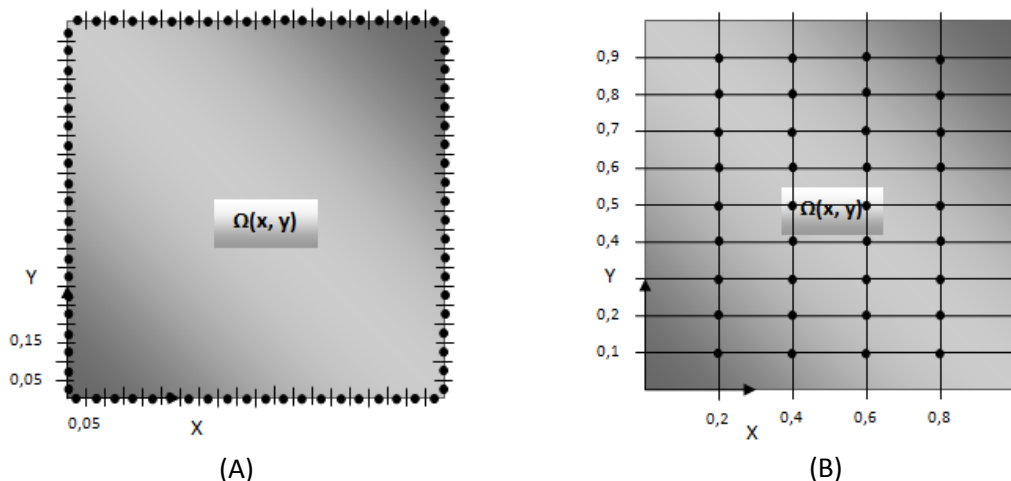
Uma experiência muito importante para melhor conhecimento do problema consiste na redução do número de Rayleigh, pois como dito na seção (3.6), esse número adimensional trata da relação advectiva/difusiva do

escoamento. Quanto menor o número de Rayleigh, menor a influência da parcela advectiva. É bastante provável que, diminuindo-se a participação dos efeitos advectivos, a sensibilidade do comportamento físico do problema se atenua. Os efeitos advectivos, segundo a literatura [7], [10], [12] e [24], são altamente sensíveis e muitas vezes de difícil convergência numérica.

Todavia, antes de se implementar essa experiência, é interessante verificar se o comportamento não convergente dos perfis das grandezas físicas está relacionado ao baixo refinamento das malhas utilizadas, de apenas 40 elementos de contorno, com interpolação constante. Assim, no próximo item, a malha empregada nas simulações tem 80 elementos de contorno constantes.

#### 5.4.2 – Simulação com malha de 80 nós e $Ra = 2$

A malha de 80 nós será distribuída segundo a figura (5.4.4) como segue.

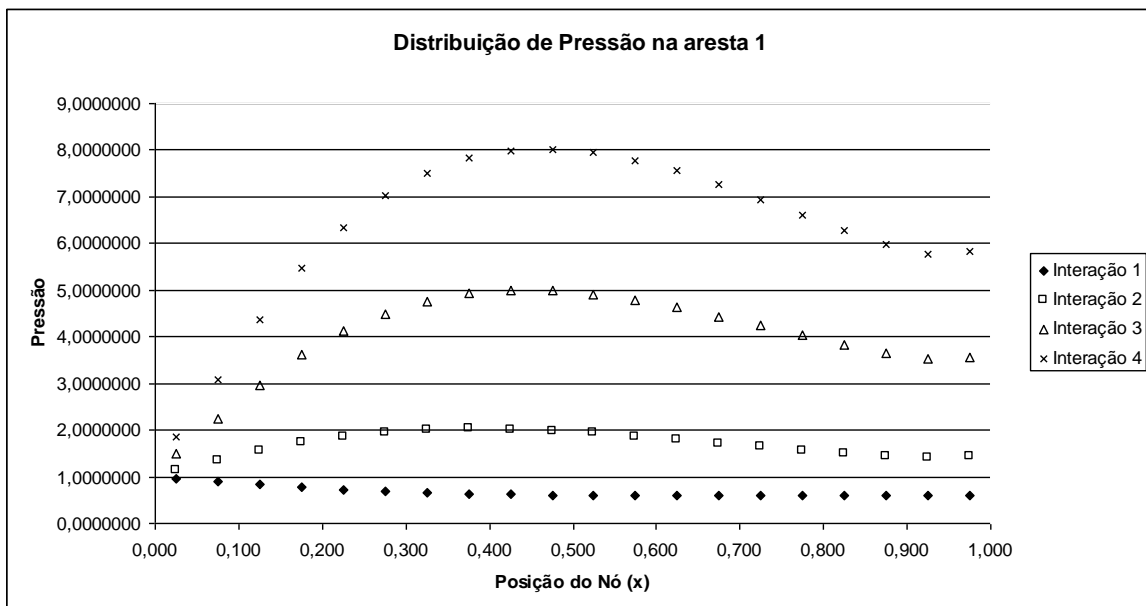


**Figura 5.4.4** (A) discretização do contorno do problema; (B) Discretização do domínio do problema.

Nas próximas simulações verifica-se o efeito do refinamento da malha, considerando o mesmo número de Rayleigh. Segundo Maliska [12] no caso de escoamentos advectivos, pode não haver redução dos problemas numéricos adversos à simulação do fenômeno advectivo. No Método dos Elementos Finitos, a natureza da interpolação presente no interior dos elementos impede sua boa precisão nesses problemas, mesmo nos casos lineares. Aqui, ressalta-se que se está trabalhando com um problema não-linear. O sistema de equações é linear, mas seu acoplamento não o é. As equações, embora

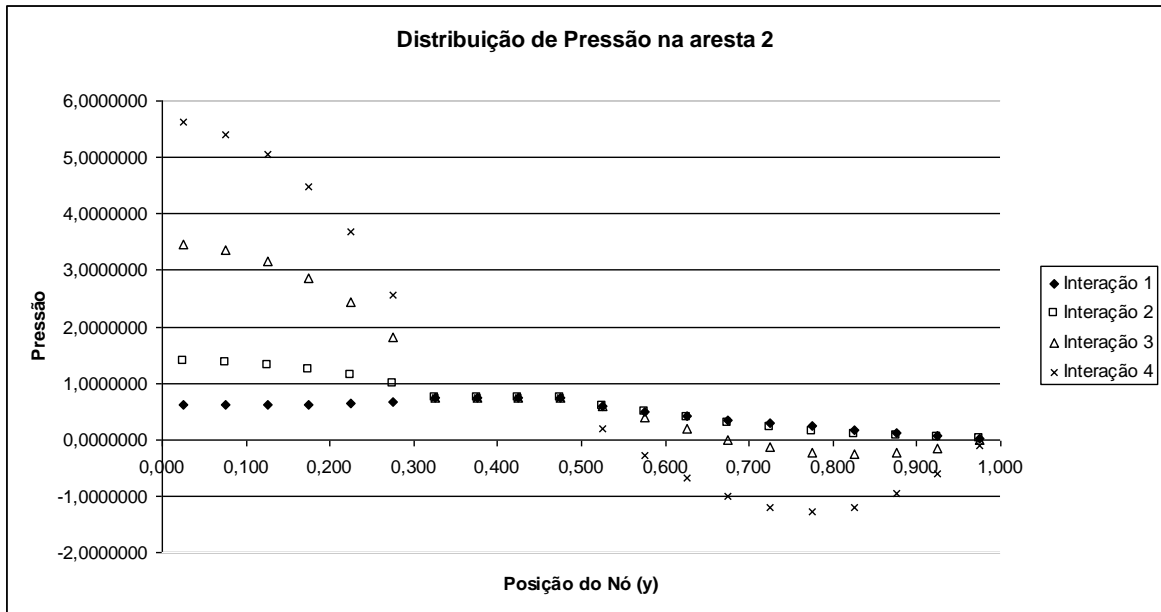
resolvidas de forma seqüencial, envolvem acoplamentos sensíveis, sendo muito difícil provar matematicamente que uma aproximação numérica é estável e convergente.

As mesmas experiências previamente efetuadas são agora repetidas, porém para as malhas de 80 nós com o mesmo número de  $Ra = 2$ . Inicialmente, no gráfico (5.4.9), percebe-se que a tendência de não convergência dos resultados se acentuou. Além disso e, ainda mais grave, é o fato de que os valores de pressão cresceram exponencialmente, denotando problemas numéricos mais sérios, provavelmente relacionados aos mesmos problemas citados por Maliska [12].



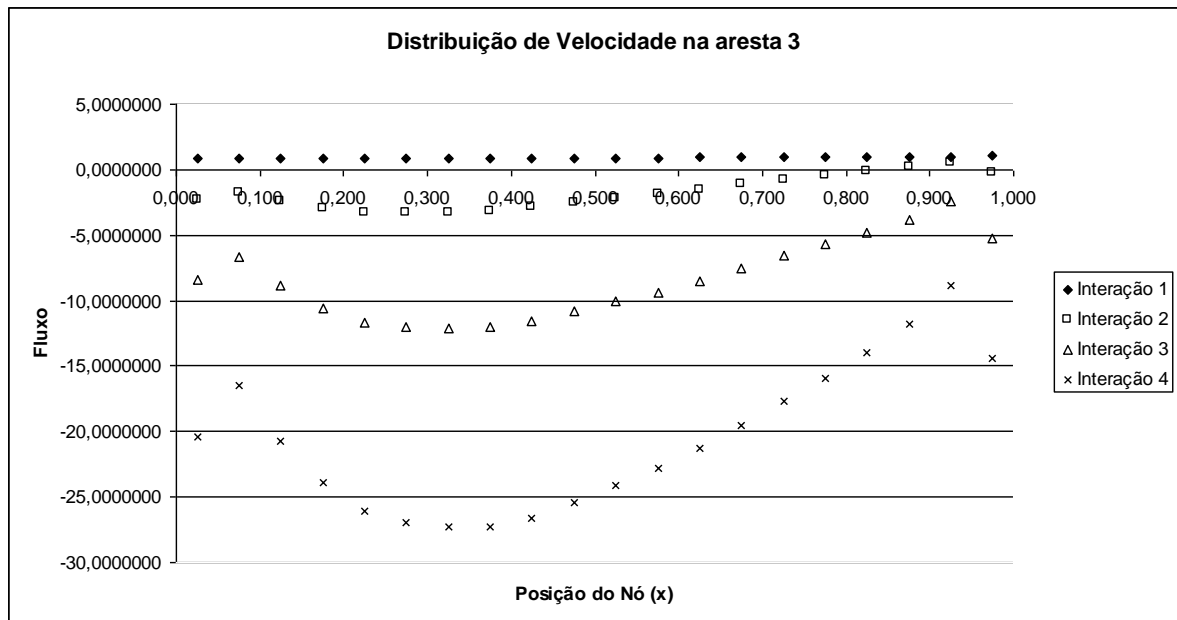
**Gráfico 5.4.9:** Distribuição de pressão na aresta 1 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

O mesmo comportamento se repete. No gráfico (5.4.10), na do canto inferior direito do silo, os valores cresceram sucessivamente, sem tendência à convergência. Na região acima nessa mesma aresta, houve uma relativa estabilização da pressão na aresta 2, devida especialmente à prescrição de valores da variável essencial nesta aresta, de modo semelhante ao que ocorreu na malha de 40 nós, gráfico (5.4.2). No entanto, os valores agora obtidos são muitos maiores do que os anteriores.



**Gráfico 5.4.10:** Distribuição de pressão na aresta 2 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

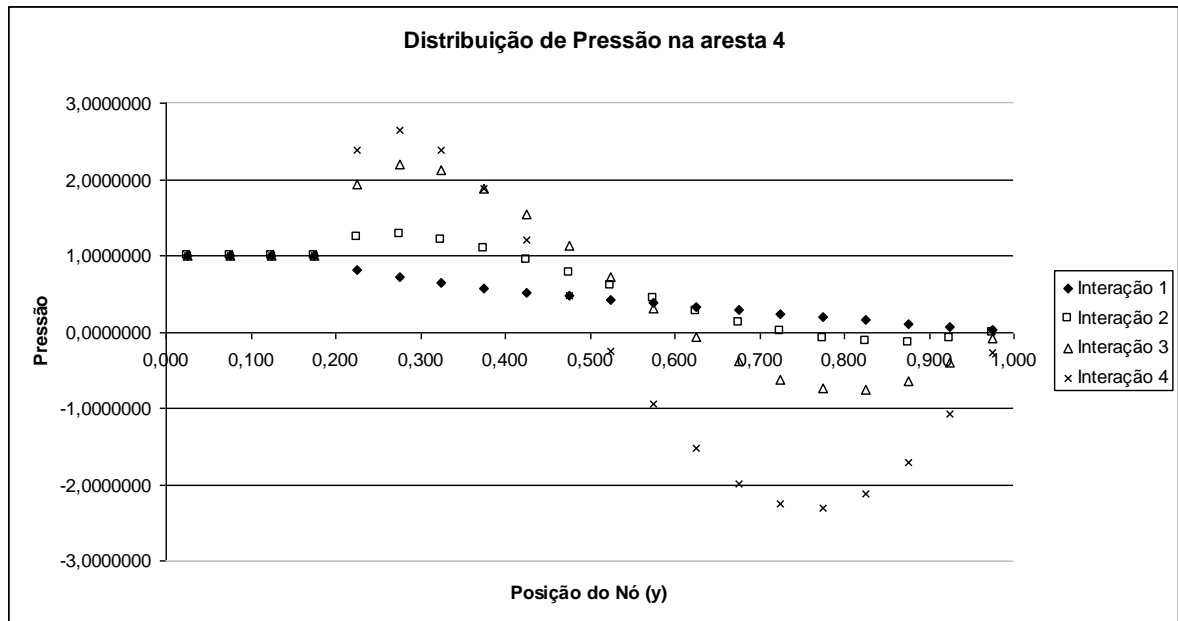
O distanciamento dos perfis de velocidade normal na saída superior do silo também se acentuou com o refinamento, conforme mostra o gráfico (5.4.11).



**Gráfico 5.4.11:** Distribuição de velocidade na aresta 3 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.



O mesmo ocorre na aresta vertical esquerda, conforme o gráfico (5.4.12).

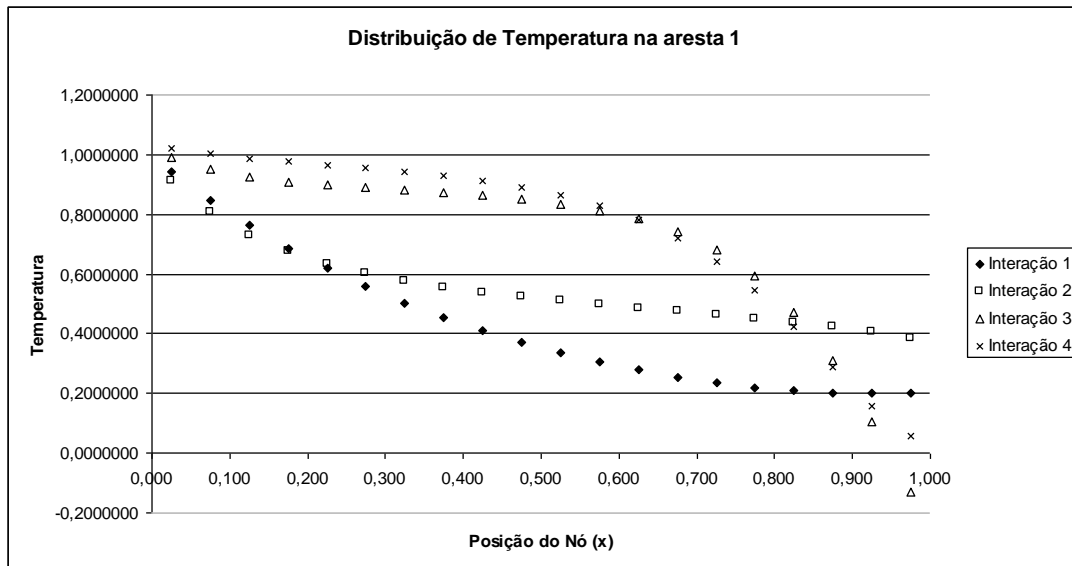


**Gráfico 5.4.12:** Distribuição de pressão na aresta 4 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

Da comparação entre a simulação de 40 elementos com a de 80 elementos, os resultados não mostraram nenhuma tendência à estabilização como poderia se esperar; pelo contrário, se distanciaram de uma desejável convergência. Pior ainda, não houve similaridade de valores com as duas malhas.

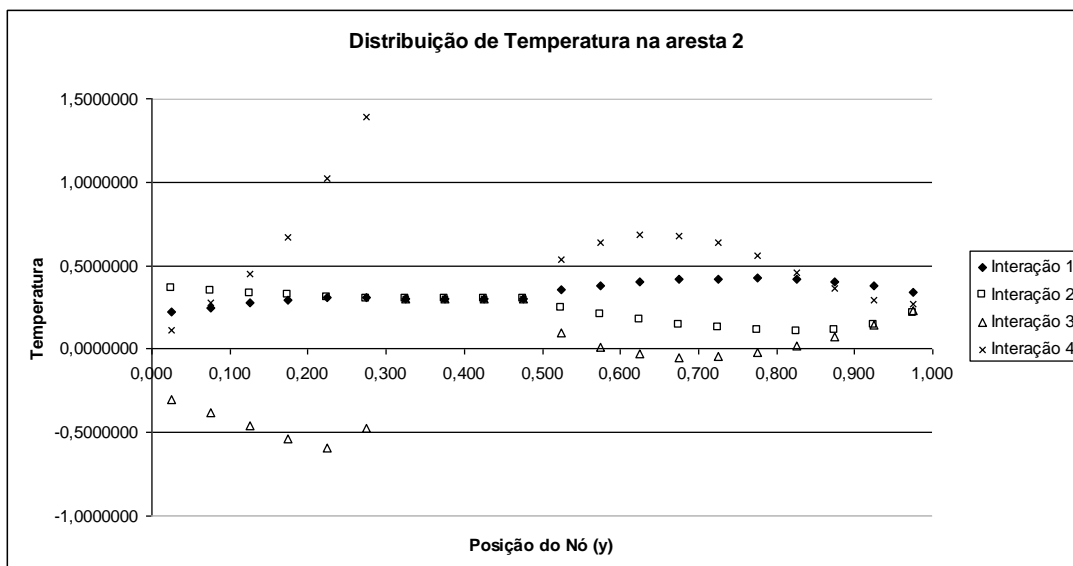
No que tange aos valores de temperatura e fluxo de calor difusivos, extraídos das simulações com o modelo difusivo-advectivo, o mesmo ocorreu, de modo geral, conforme mostram os gráficos a seguir.

Primeiramente, a distribuição de temperatura na aresta, gráfico (5.4.13). Esse perfil de temperatura, colhido no fundo do silo, aresta horizontal inferior, aparenta estar tendendo a estabilização. Esses valores de temperatura, diferentemente dos obtidos para pressão com diferentes malhas, não estão completamente discrepantes; entretanto, o formato ou perfil das curvas é bastante distinto.



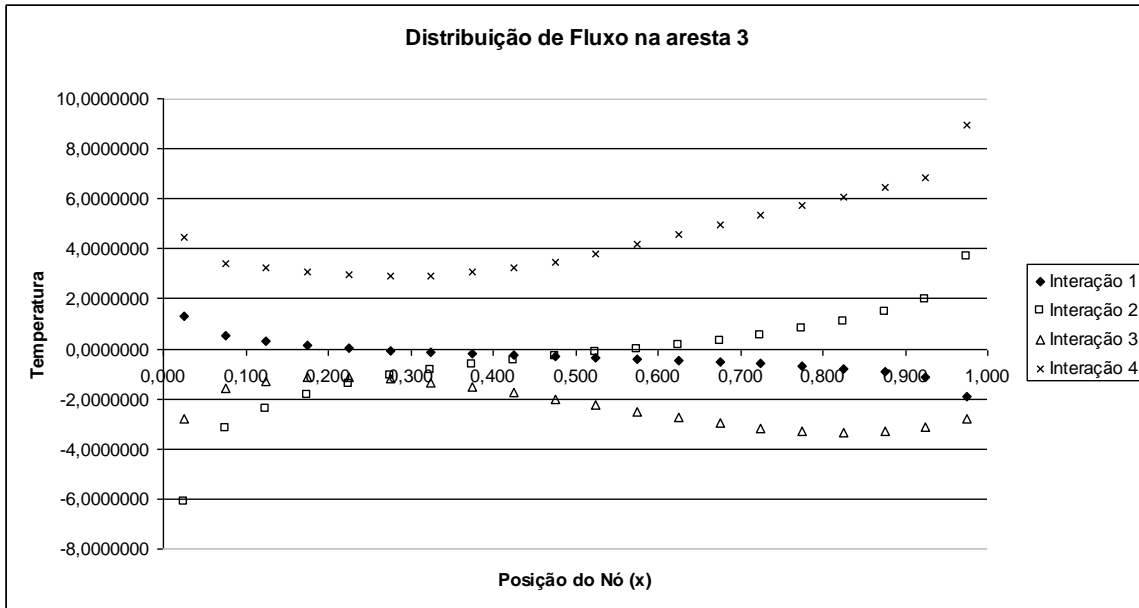
**Gráfico 5.4.13:** Distribuição de temperatura na aresta 1 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

Mas os gráficos posteriores, como o imediatamente a seguir, referente à aresta vertical direita, gráfico (5.4.14), contrariam essa expectativa de modo geral. Especialmente na quarta iteração os resultados se distanciam bastante dos demais.



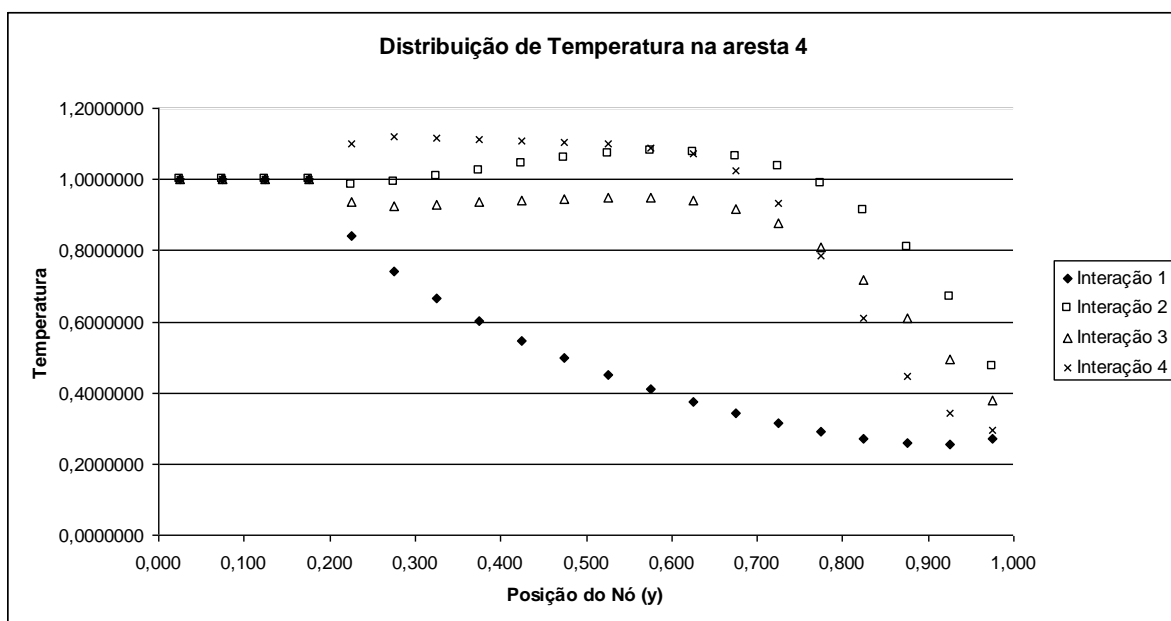
**Gráfico 5.4.14:** Distribuição de temperatura na aresta 2 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

O mesmo se sucede na distribuição do fluxo na aresta horizontal superior.



**Gráfico 5.4.15:** Distribuição de fluxo de calor na aresta 3 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

Do mesmo modo que no gráfico anterior, a quarta iteração apresenta um perfil que se distancia por completo das demais, demonstrando problemas numéricos no modelo. Essa tendência à divergência pode ser oriunda da incapacidade do modelo para simular problemas com número de Rayleigh nessa faixa e o número mais alto de pontos nodais da malha estar acumulando a denominada instabilidade advectiva.



**Gráfico 5.4.16:** Distribuição de temperatura na aresta 4 com  $Ra = 2$  e malha de 80 nós.

O gráfico 5.4.16, referente à distribuição de temperatura na aresta vertical esquerda, embora apresente certa concordância entre os valores das segunda, terceira e quarta iterações, não é suficiente para atestar um bom desempenho numérico em termos gerais, pois apresentam valores distintos dos obtidos com a malha de 40 elementos, embora sem a mesma discrepância na ordem dos valores obtidos para a solução do problema de Poisson.

De acordo com o demonstrado pelos gráficos anteriores, o número de Rayleigh alto significa uma preponderância da advecção sobre a difusão, conforme dito anteriormente. A advecção é um fenômeno muito sensível a perturbações e por isso de difícil simulação. Este fato pode ser resolvido diminuindo-se o número de Rayleigh, tornando o escoamento um pouco menos advectivo e mais difusivo.

Vale ressaltar aqui, segundo Maliska [12] e Ferziger e Peric [7], que de acordo com a aproximação numérica de uma equação diferencial parcial linear dá origem a um sistema linear de equações cuja matriz tem coeficientes constantes, quando o problema é não-linear, novamente a aproximação dá origem a um sistema linear de equações, mas, desta feita, a matriz contém coeficientes dependentes da variável e deve ser atualizada ao longo das iterações. Do ponto de vista de implementação, incluir no algoritmo o tratamento de uma não-linearidade significa apenas atualizar a matriz dos coeficientes. Mas, do ponto de vista da convergência, poderá ser diferente, pois dependendo da natureza da não-linearidade, a obtenção da solução poderá ser mais lenta.

Para o caso de problemas com efeitos advectivos dominantes, o refinamento da malha dificilmente acompanhará uma melhoria nos resultados pois, segundo Maliska [12], este aspecto vincula a divergência em solucionar o sistema de equações lineares, e a instabilidade da aproximação da função da interpolação dos termos advectivos. E ainda, particularmente, o Método dos Elementos de Contorno na sua formulação com Dupla Reciprocidade possui limitações no tratamento de escoamentos advectivos com altos números de Peclet. De acordo com Massaro [14], os resultados gerados com o MEC para números de Peclet maiores do que 3 tem a precisão comprometida devido ao efeito da dupla interpolação presente na formulação com Dupla Reciprocidade,

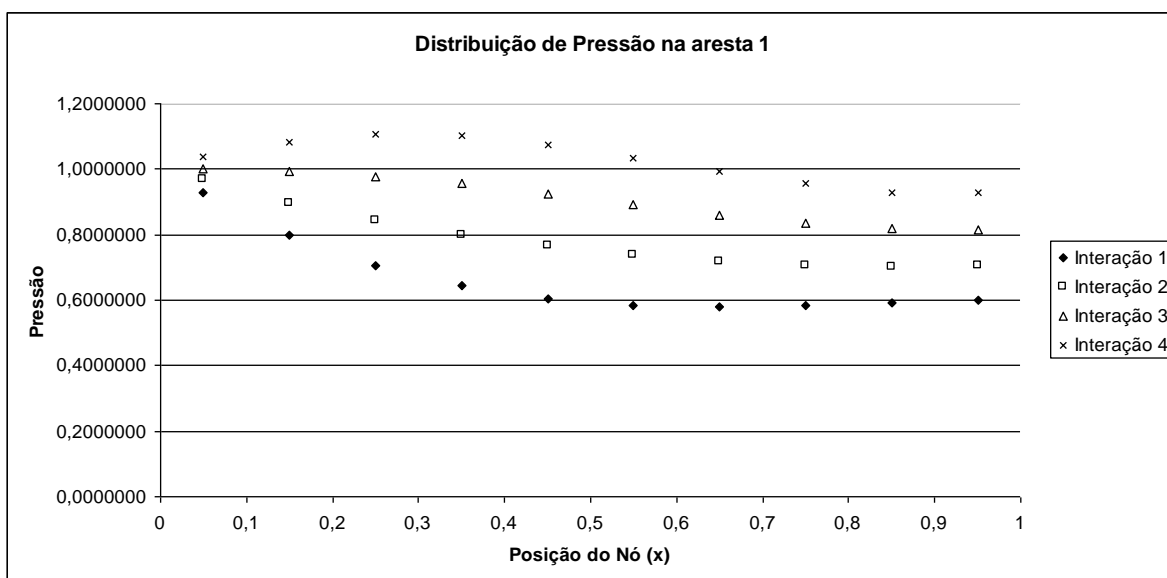
conforme descrito na seção (4.1). Em problemas não-lineares, essa limitação pode ter impactos na baixa precisão dos resultados ainda maiores.

### 5.4.3 - Simulação com malha de 40 nós e $Ra = 1$

Nesta simulação verifica-se a influência que a diminuição do número de Rayleigh tem sobre a simulação numérica do escoamento Darciano nas condições impostas nesse trabalho.

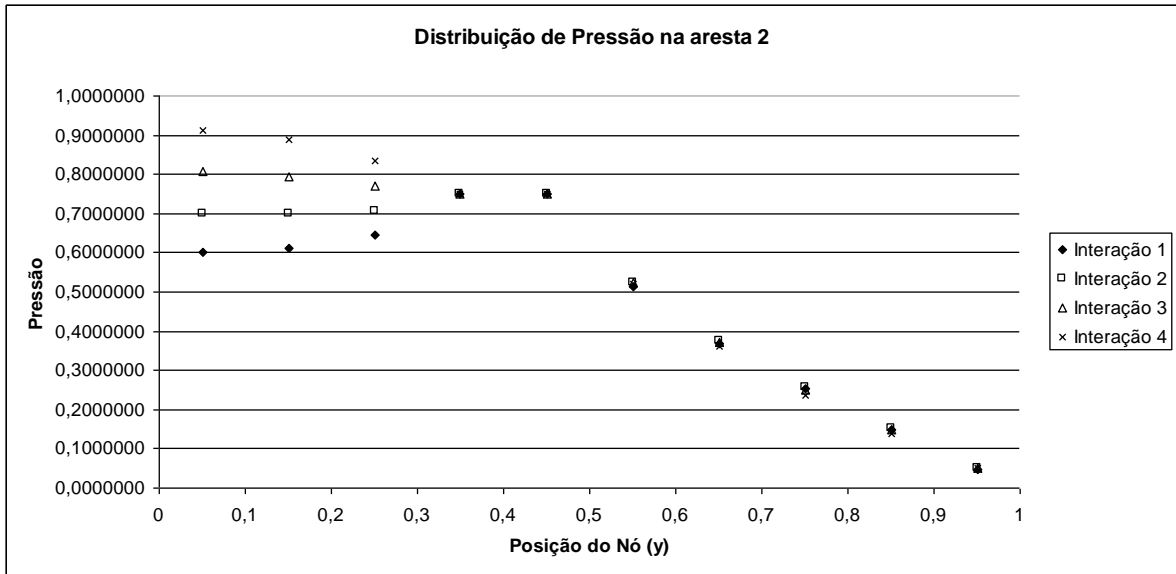
Primeiramente, utiliza-se uma malha de 40 nós e, em um segundo momento, uma malha de 80 nós. Sendo estas malhas idênticas, respectivamente, as das figuras (5.4.3) e (5.4.4). Com isso, a influência da malha na simulação do escoamento pode ser analisada com mais clareza. Inicialmente, analisam-se o comportamento das variáveis associadas à Equação de Poisson, ou seja, pressões e velocidades.

Na aresta horizontal inferior, pode-se verificar com base no gráfico (5.4.17), que a discrepância entre a primeira e a quarta iteração foi atenuada, embora não se possa identificar uma tendência de estabilização de resultados.



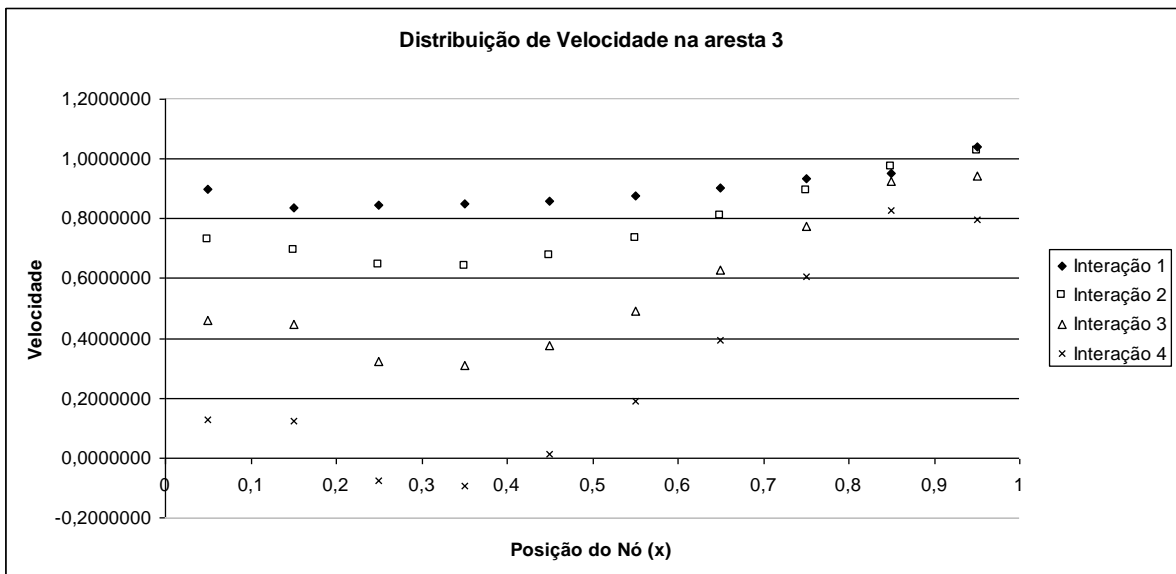
**Gráfico 5.4.17:** Distribuição de pressão na aresta 1 com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

Verifica-se no gráfico (5.4.18) a seguir, que a pressão tende a manter resultados semelhantes às simulações anteriores, porém com um efeito aparentemente mais estável.



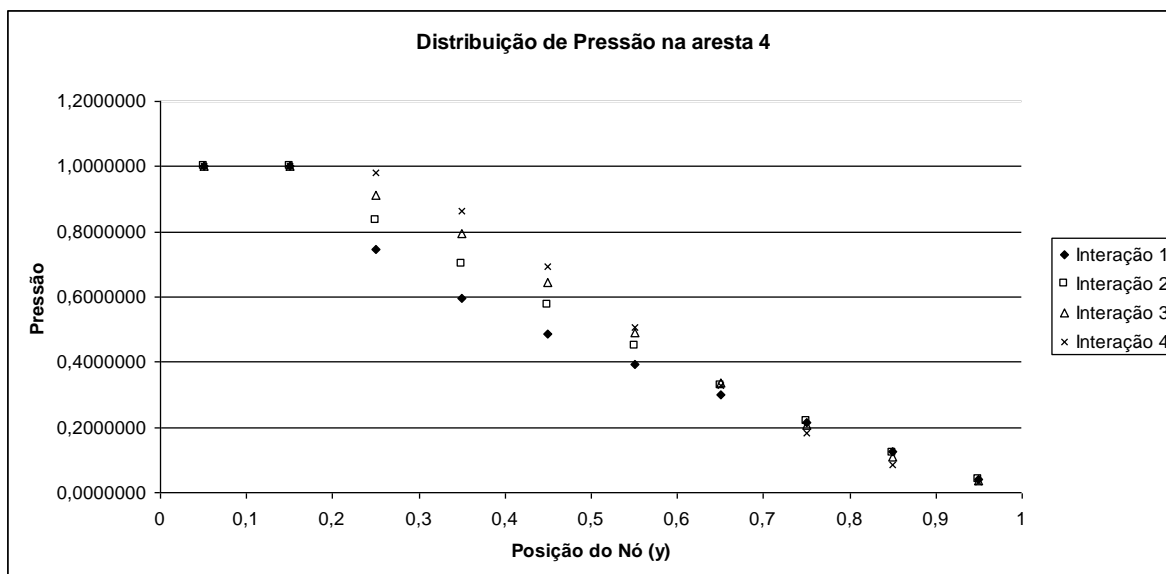
**Gráfico 5.4.18:** Distribuição de pressão na aresta 2 com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

No gráfico (5.4.19), verifica-se que o gradiente de velocidade na aresta horizontal superior é maior próximo ao canto, no encontro da aresta 4. Isso significa que houve uma maior absorção dos efeitos térmicos nesta região.



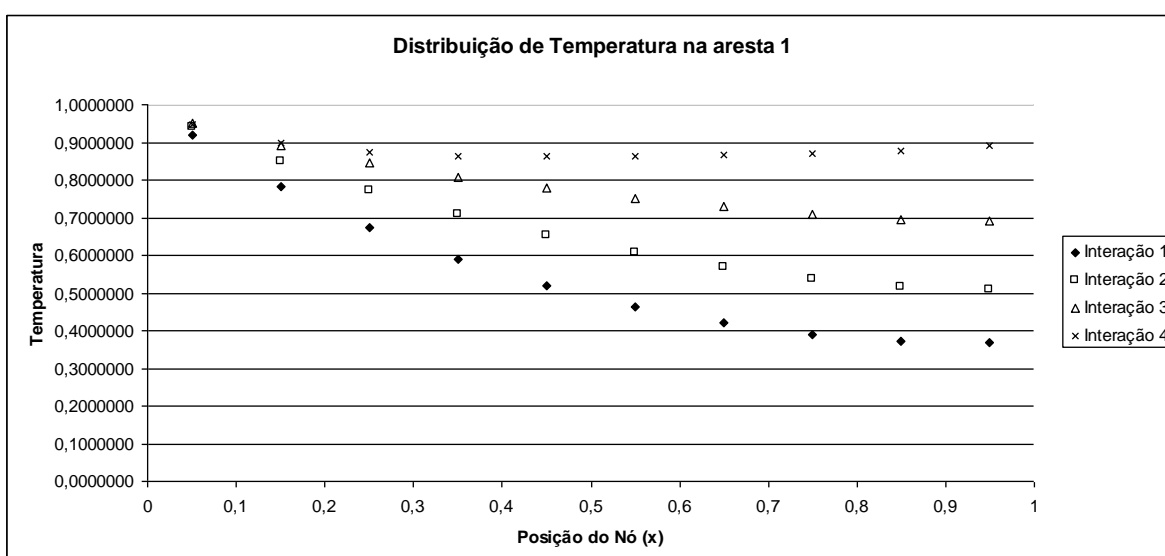
**Gráfico 5.4.19:** Distribuição de velocidade na aresta 3 com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

De maneira análoga as simulações anteriores, o gráfico (5.4.20), a distribuição de pressão na aresta 4 mantém-se nos mesmos níveis.



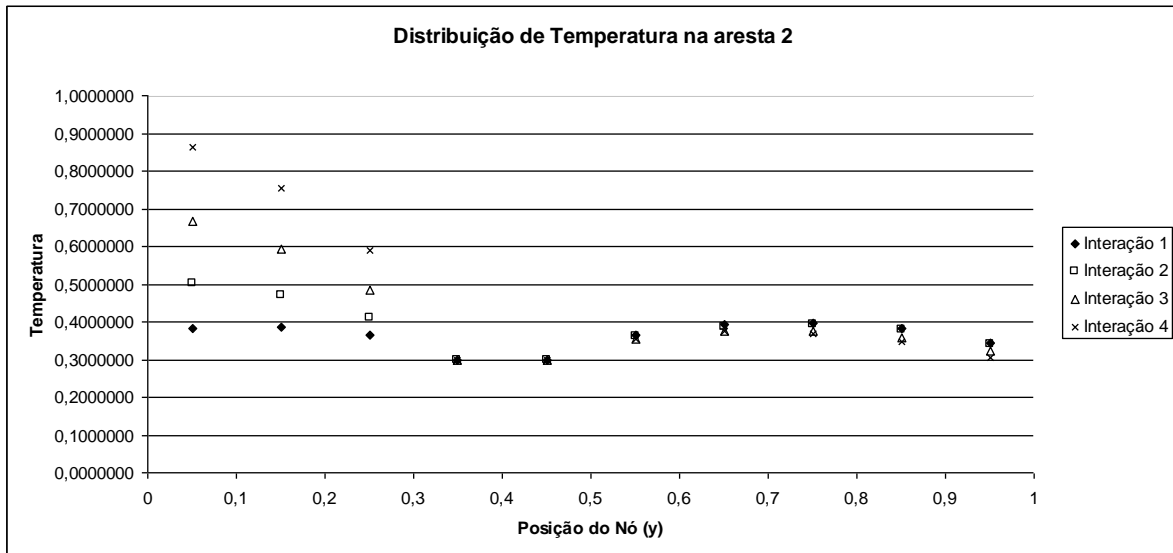
**Gráfico 5.4.20:** Distribuição de pressão na aresta 4 com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

A distribuição de temperatura no gráfico (5.4.21), quando comparado com os resultados anteriores para  $Ra=2$ , tem os seus efeitos atenuados, apresentando com isso uma resposta numérica mais coerente com o esperado em termos de comportamento físico. Todavia, o comportamento numérico dos perfis de temperatura não apresentam uma tendência nítida à convergência nas quatro iterações realizadas.



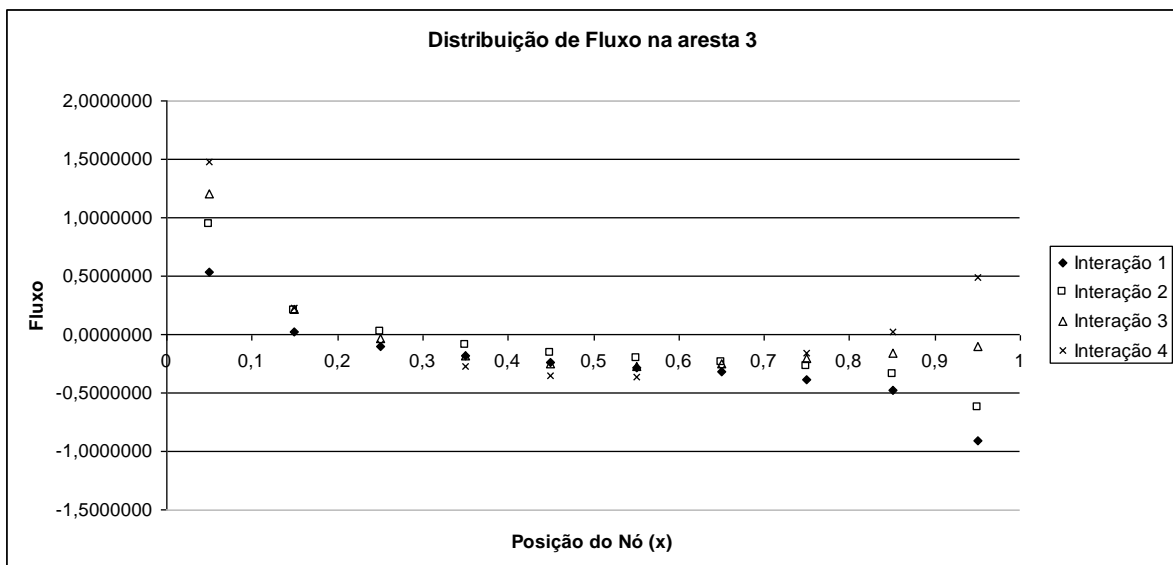
**Gráfico 5.4.21:** Distribuição de temperatura na aresta 1, com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

O gráfico (5.4.22) mantém as características anteriores, porém com uma atenuação menor, e devido à escala, verifica-se uma tendência de aumento dos valores de temperatura vigentes imediatamente após os valores prescritos no contorno, para todas as iterações.



**Gráfico 5.4.22:** Distribuição de temperatura na aresta 2, com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

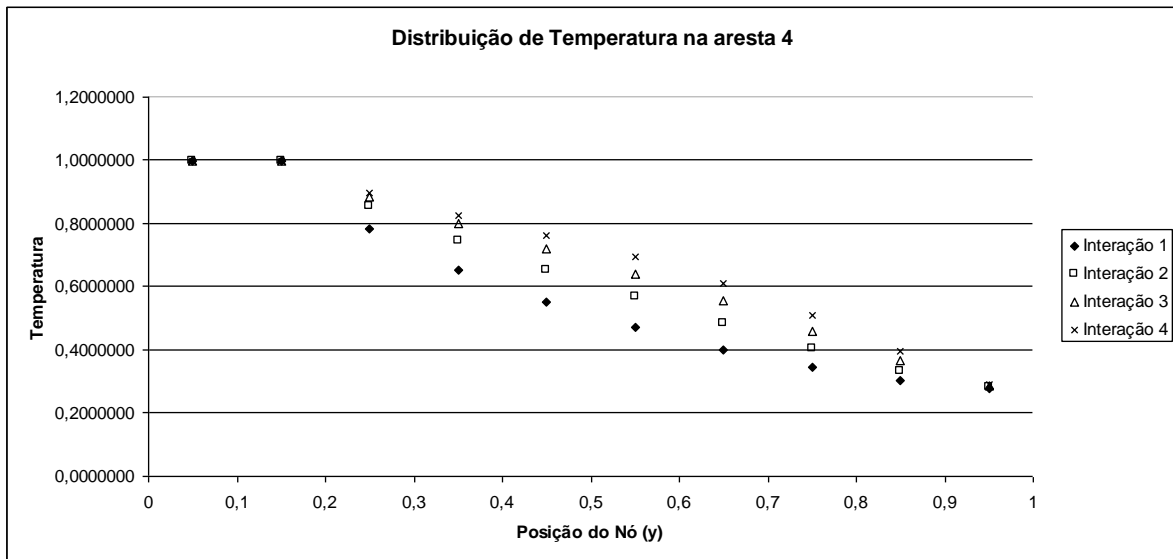
A distribuição de fluxo na aresta 3, conforme o gráfico (5.4.23), denota um maior crescimento das curvas referentes às iterações nas proximidades da aresta 4, comparativamente as simulações anteriores com  $Ra=2$ . Naturalmente, os fluxos são menores em valor absoluto.



**Gráfico 5.4.23:** Distribuição de fluxo de calor na aresta 3, com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.



O gráfico (5.4.24) também está de acordo com as simulações anteriores.



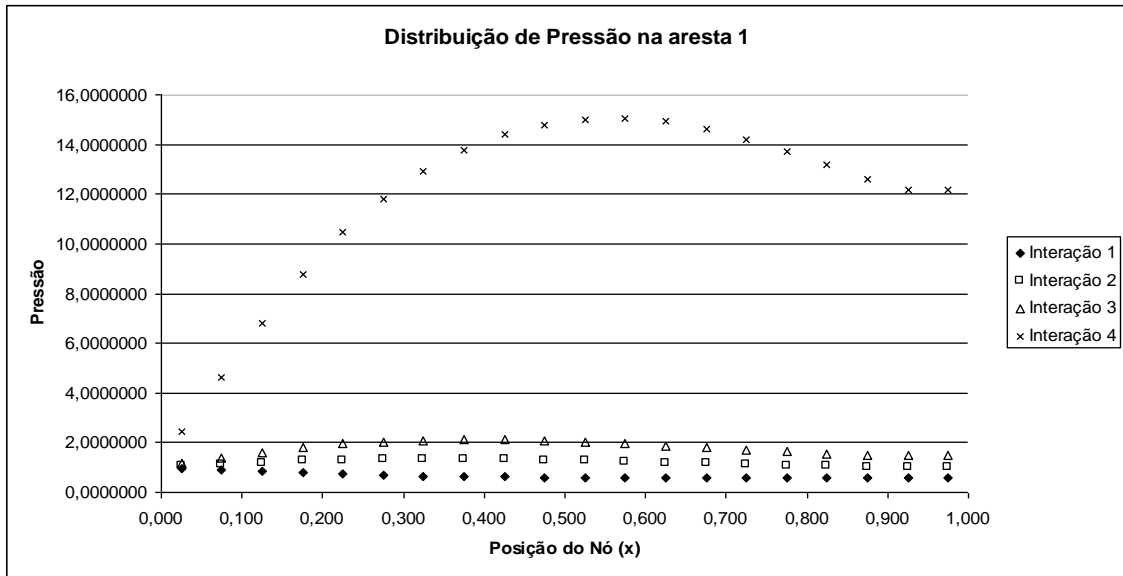
**Gráfico 5.4.24:** Distribuição de temperatura na aresta 4, com  $Ra = 1$  e malha de 40 nós.

Nestas simulações, com malha de 40 nós e  $Ra$  igual a 1, pode-se concluir que a diminuição do número de Rayleigh e conseqüente diminuição dos efeitos advectivos, produziu aparentemente uma leve estabilidade numérica dos resultados. Entretanto, não pode ser observado nenhum comportamento das curvas no sentido de convergência de resultados para um padrão estacionário.

#### 5.4.4 - Simulação com malha de 80 nós e $Ra = 1$

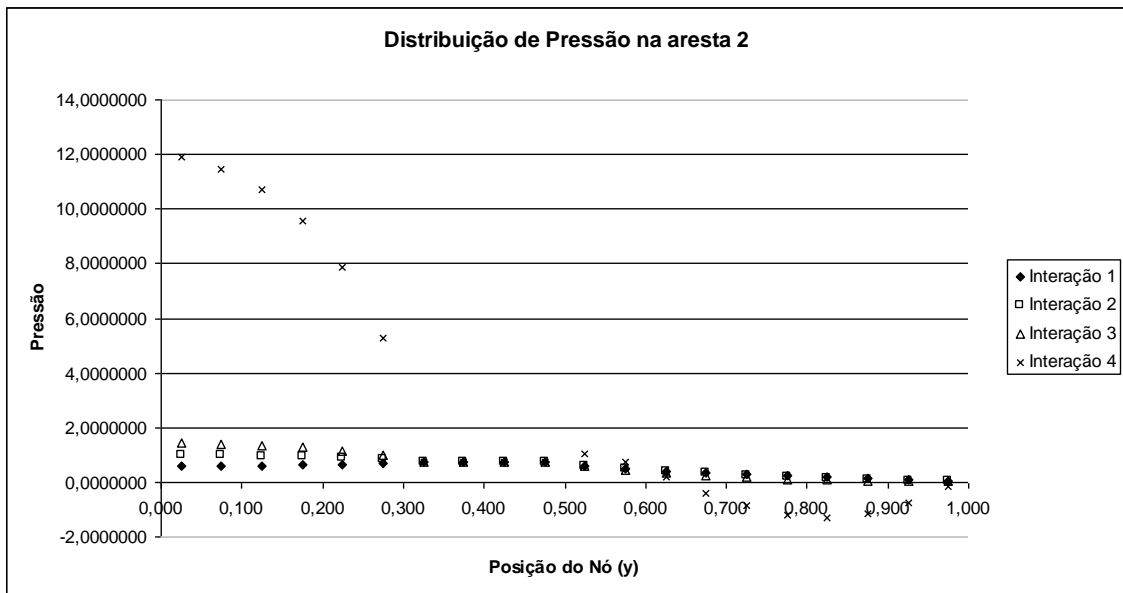
Nestas simulações foi empregada uma malha de 80 nós, conforme figura (5.4.4). A expectativa era de que o aumento da malha não impusesse alterações significativas no padrão de comportamento das curvas referentes às variáveis de estado envolvidas, diferentemente do que se observou para  $Ra=2$ .

Não foi isto que ocorreu. De início, pode-se verificar com o gráfico (5.4.25), que apresenta os valores de pressão no fundo do silo, que o processo iterativo segue uma trajetória de mudança dos perfis de pressão, mas na quarta iteração existe uma grave discrepância, denotando instabilidade.

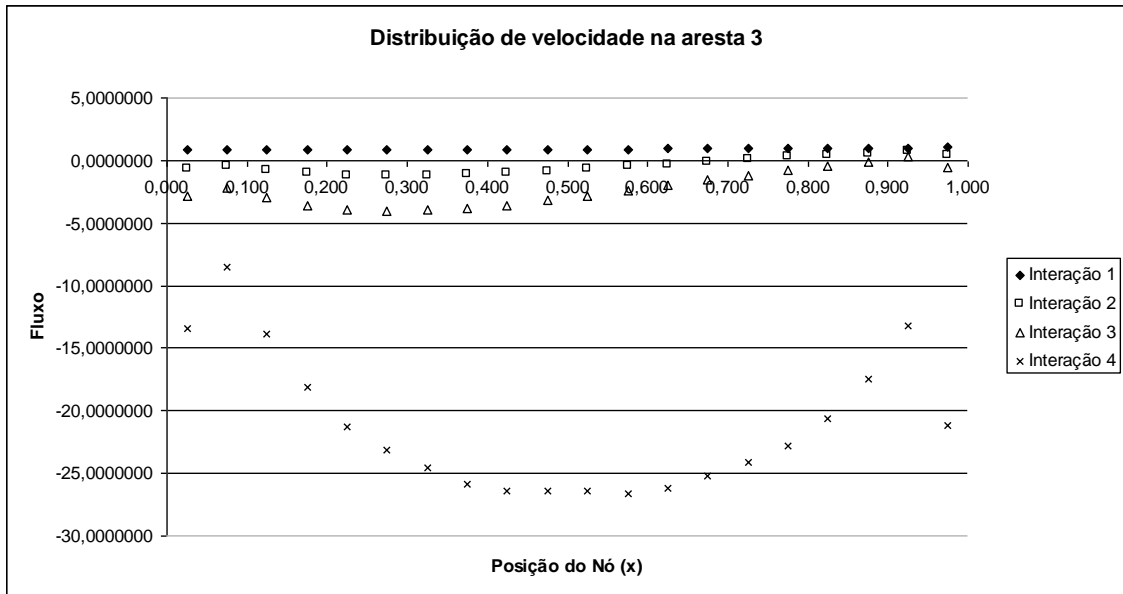


**Gráfico 5.4.25** Distribuição de pressão na aresta 1, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.

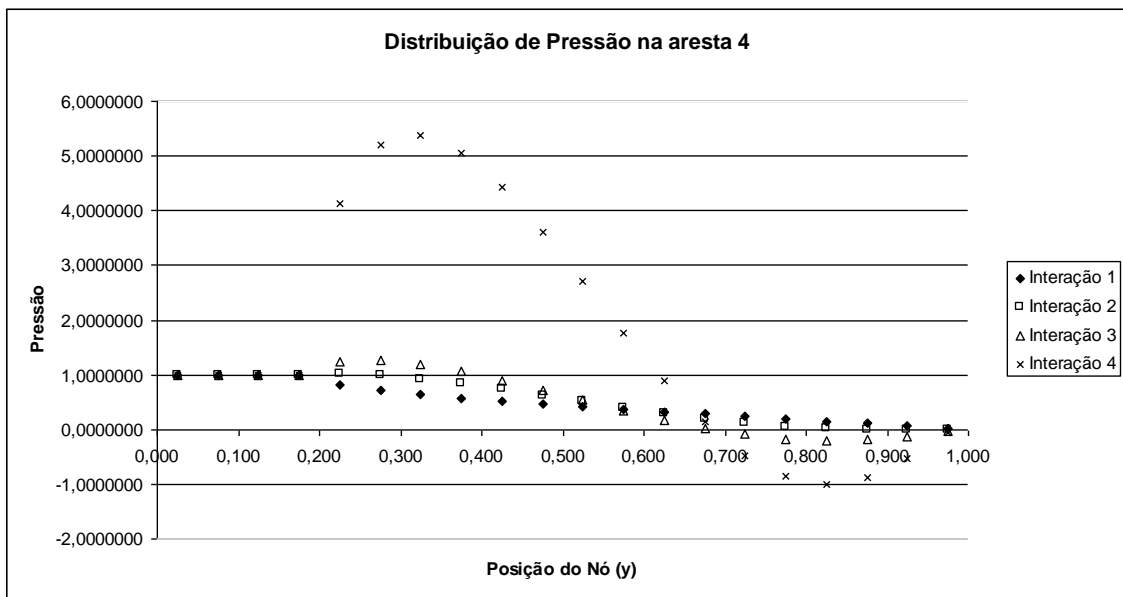
O mesmo acontece em todas as demais arestas, tanto em termos de pressão quanto velocidade normal. Isso pode ser observado nos gráficos (5.4.26), (5.4.27) e (5.4.28), mostrados a seguir.



**Gráfico 5.4.26** Distribuição de pressão na aresta 2, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.



**Gráfico 5.4.27** Distribuição de velocidade na aresta 3, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.



**Gráfico 5.4.28** Distribuição de pressão na aresta 4, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.

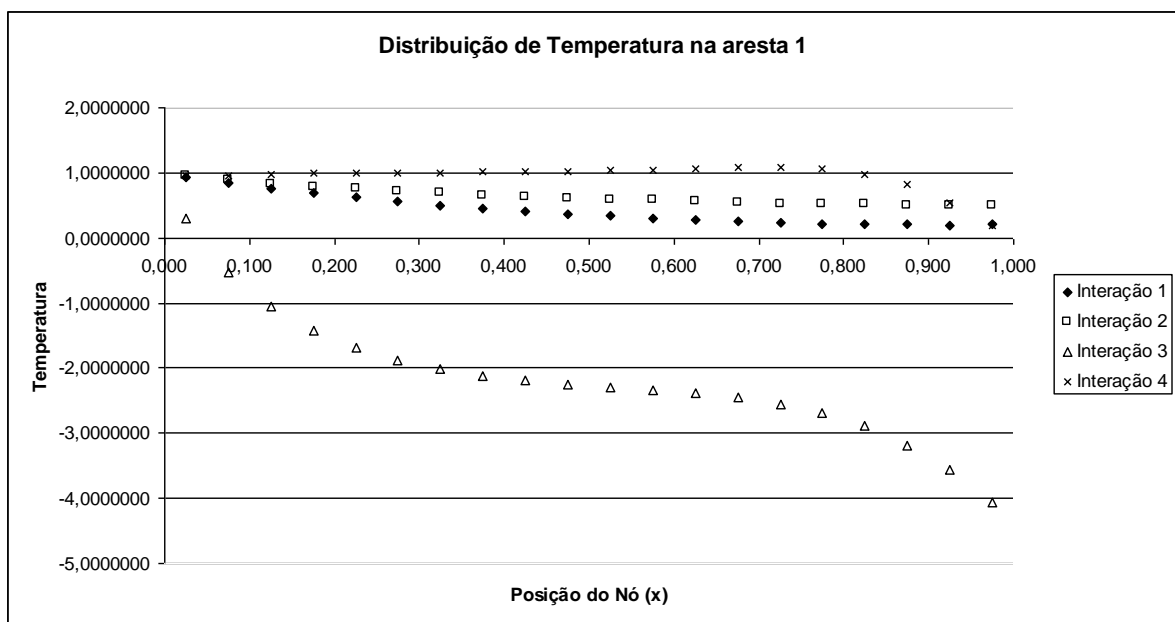
No caso da distribuição das velocidades, gráfico (5.4.27), houve uma mudança no sentido da velocidade na segunda e terceira interação. Na quarta interação fica clara a instabilidade da solução numérica.

Os gráficos a seguir tratam da solução da equação da Difusão-Advecção. O gráfico (5.4.29) mostra a distribuição de temperatura na aresta horizontal inferior. Os perfis agora mostraram-se anômalos na terceira interação, produzindo temperaturas negativas, embora na quarta interação voltem a ser

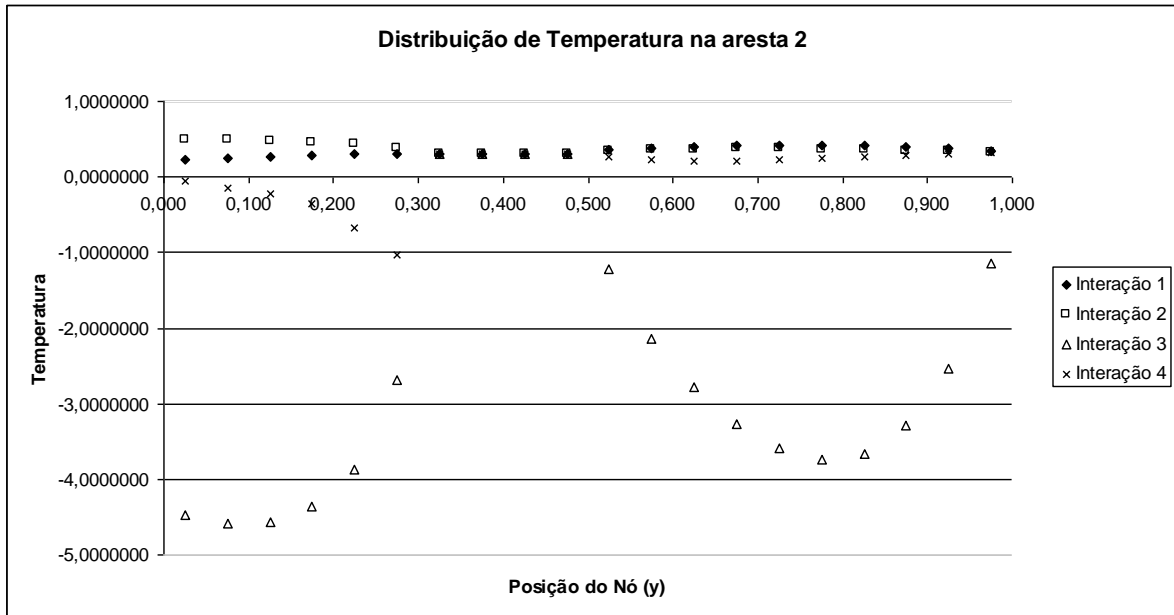
positivos. Ressalta-se que esta distribuição de temperatura influenciará o fluxo de calor que são entradas na equação de Poisson.

O refinamento da malha nesta condição de  $Ra=1$  produziu resultados ainda piores do que para  $Ra=2$ , conforme os gráficos que são mostrados a seguir, gráficos (5.4.29), (5.4.30) e (5.4.31).

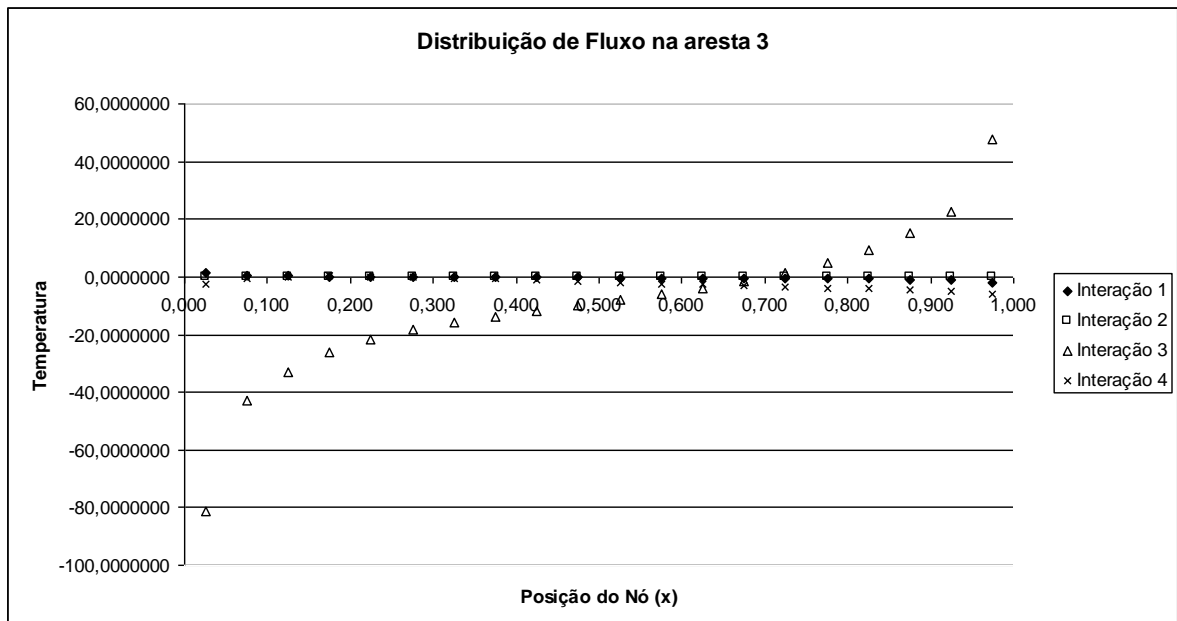
Claramente gerou-se uma instabilidade numérica, que pode ser resultado das não linearidades das equações de governo, pode ser oriundo das limitações do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade no que tange ao tratamento dado aos fenômenos advectivos, já que utiliza uma solução fundamental difusiva, ou por outras razões, expostas com mais detalhe na conclusão deste trabalho.



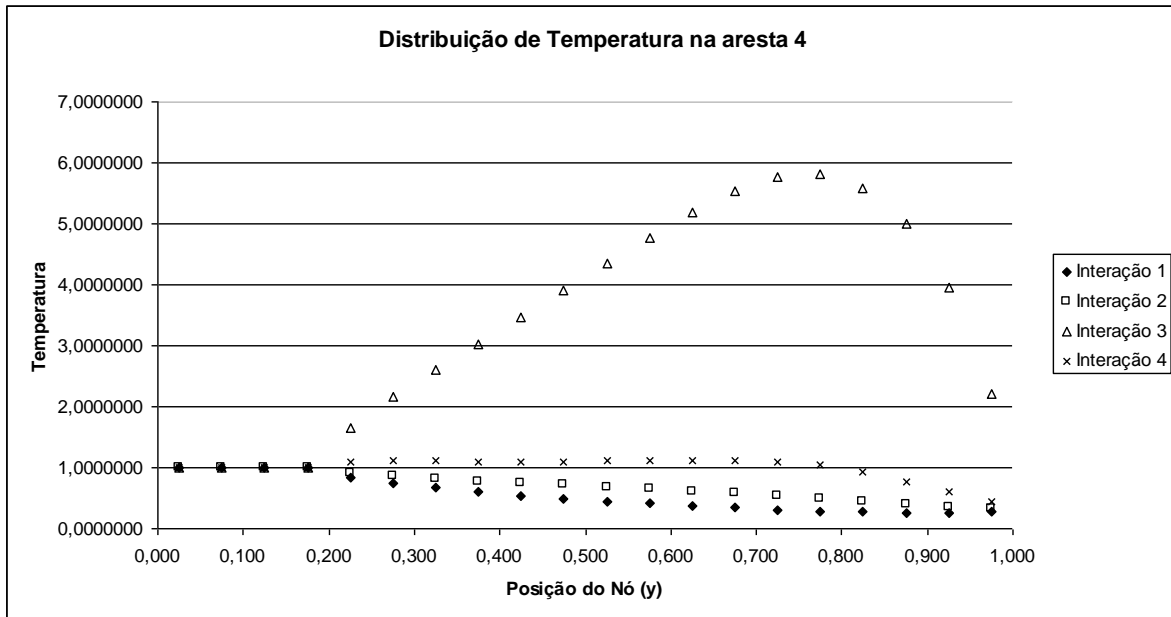
**Gráfico 5.4.29** Distribuição de temperatura na aresta 1, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.



**Gráfico 5.4.30** Distribuição de temperatura na aresta 2, com Ra = 1 e malha de 80 nós.



**Gráfico 5.4.31** Distribuição de fluxo de calor na aresta 3, com Ra = 1 e malha de 80 nós.



**Gráfico 5.4.32** Distribuição de temperatura na aresta 4, com  $Ra = 1$  e malha de 80 nós.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES

Os resultados apresentados para o problema não-linear não foram satisfatórios e importa discutir quais razões foram determinantes para esse comportamento bem aquém do desejado.

Primeiramente é preciso considerar que o principal critério empregado para avaliação do principal problema teste foi a convergência das curvas das variáveis de estado, diante da ausência de uma solução de referência. Outros fatores foram a expectativa física de que ao considerar-se o efeito gravitacional, as pressões no fundo e as velocidades no topo do silo deveriam alterar-se para mais e para menos, respectivamente.

Zhao 'et al' [28], de onde se retirou o modelo matemático utilizado neste trabalho, empregou o Método dos Elementos Finitos e foi bem sucedido. Mas os trabalhos acessados desse autor arrolam outros efeitos além dos que foram estudados, ou seja, ainda são muito mais complexos. Optou-se por fazer uma análise mais simples, considerando apenas a dependência das velocidades do escoamento com a temperatura, ignorando efeitos químicos e não linearidades materiais que estão presentes nas simulações feitas por Zhao [27] e [28] em colaboração com outros autores.

Diante da ausência de uma solução de referência para o problema mais completo, o modelo de elementos de contorno foi testado em vários problemas desacoplados lineares. Apenas dois desses foram apresentados nesse trabalho. Essas simulações mostraram que o modelo do MEC comporta-se numericamente bem nas condições desacopladas, tanto na Equação de Poisson, quanto na solução de problemas Difusivos-Advectivos.

Com relação ao problema de Poisson, inúmeros testes já foram feitos envolvendo casos lineares que podem ser interpretados como problemas de deflexão em membranas, torção em barras, potencial elétrico, potencial térmico em chapas entre outros com excelentes resultados.

No que se refere à equação da Difusão-Advecção, o desempenho do MEC com a formulação com Dupla Reciprocidade não é tão eficaz, quanto nos casos arrolando a Equação de Poisson, mas perfeitamente satisfatórios.

A Dupla Reciprocidade usa soluções fundamentais mais simples e funções auxiliares de interpolação para então estabelecer uma equação integral de contorno. Essas funções auxiliares acarretam uma imprecisão no modelo numérico gerado pela formulação, diferente daquela produzida pela discretização do domínio contínuo e que é típica de todos os métodos numéricos. Uma série de pesquisas foi empreendida no sentido de obter uma melhoria dos resultados, principalmente através do uso de funções mais eficientes. Particularmente nos problemas difusivos-advectivos, usa-se uma nova interpolação para tratar as derivadas espaciais relacionadas à convecção. Mas para baixos números de Peclet, o erro cometido com a técnica de dupla reciprocidade é bastante aceitável.

As limitações da formulação com Dupla Reciprocidade nos casos da Difusão-Advecção para médios e altos números de Peclet pode ser o fator responsável pelos maus resultados, mas deve-se considerar que com  $Ra=1$  os resultados foram ainda mais instáveis do que com  $Ra=2$ , que não são valores muito altos para o número de Rayleigh.

Outras fontes de erro ainda ligadas ao MEC consistem do uso de elementos constantes, que são os mais simples de toda a família de interpolações cabíveis com o Método, e ainda ao fato de que uma interpolação do campo de velocidades e fluxos tangenciais foi feita usando funções radiais, e essas grandezas poderiam ter sido calculadas através de integrais hiper-singulares, com muito maior precisão.

Por outro lado, devem ser consideradas as particularidades de um modelo não linear, onde quaisquer imprecisões podem ser multiplicadas ao longo do processo iterativo, e nesse sentido é preciso considerar as observações colhidas por Maliska [12], ao longo de muitas experiências mal-sucedidas com métodos integrais na solução de problemas difusivos-advectivos, mesmo nos casos lineares, devido a questões de interpolação insatisfatória em nível de elemento.



Quando tais condições de estabilidade em nível elementar não são obedecidas, o refinamento da malha somente faz piorar o padrão dos resultados.

Entretanto, o efeito mais discutível, que conduz a forte possibilidade de haver algum erro em nível de programação computacional no acoplamento do problema de Poisson com o Difusivo-Advectivo, encontra-se no fato de que ao se reduzir o número de Rayleigh o comportamento iterativo piorou, particularmente na última iteração em todas as simulações realizadas.

Embora possa não ser evidente, a integração ou acoplamento das duas equações, de energia (Difusão-Advecção) e momentum (Poisson), envolvem cálculo dos fluxos de temperatura e velocidades tanto internos quanto no contorno, nas duas direções espaciais, que precisam ser transportados na forma de dados de entrada. O programa computacional é extenso e muitas possibilidades de erro existem e podem não ter sido corretamente eliminadas.

## REFERÊNCIAS

- [1] Barrows, A. P., “Análise de Alguns Problemas Especiais de Campo Escalar através do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade”, Dissertação de mestrado, UFES, 1999.
- [2] Brebbia, C.A., “The Boundary Element Method for Engineers”. Pentech Press, London, 1978.
- [3] Dan, M. L., “Formulação Quase-Dual Híbrida do Método dos Elementos de Contorno para Simulação e Análise de Problemas de Convecção Forçada”, Dissertação de mestrado, UFES, 2004.
- [4] Dan, M. L., “Formulação Híbrida do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Difusivos- Advectivos”, Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica (RIBIM), vol 10, num 3, pp 23-32, Septiembre, 2006.
- [5] Dan, M. L., “Modelagem de um Problema de Convecção Forçada com Escoamento Compressível Através da Equação da Advecção-Difusão”, Revista Ciência e Engenharia do CT, vol VII n 5, pg 21-25, set/out 2004.
- [6] Dan, M. L., Mansur, W. J., “A Transformation of Variables Technique Applicable to the Boundary Element Method to Simulate a Special Class of Diffusive-Advective Potential Problems”, RBCM, março, 2008.
- [7] Ferziger, J.H., Peric, M., “Computational Methods For Fluid Dynamics”. 3ª edição, Ed. Springer-Verlag, New York, 2002.
- [8] Fox, R.W., Mcdonald, A. T., “Introdução à Mecânica dos Fluidos”. 4ª edição, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 1992.
- [9] Jardim, A. C., “Estratégias para Melhoria da Completude da Seqüência de Funções de Interpolação Empregadas na Formulação Quase-Dual do Método dos Elementos de Contorno”. Dissertação de mestrado, UFES, 2006.
- [10] Lewis, R. W., Nithiarasu, P., Seetharamu, K. N., “Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow”, John Wiley & Sons, 2004.
- [11] Loeffler, C.F., Mansur, W.J., “Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation”. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- [12] Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”. 2ª edição, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2004.
- [13] Mansur, W. J., “Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation”,

International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 58, Issue 8. 28/10/03, pag 1167-1186, 2003.

- [14] Massaro, C. A. M., "O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos" Dissertação de mestrado, UFES, 2001.
- [15] Nardini, D., Brebbia, C.A., "A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements", Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton, 1982.
- [16] Neves, F.P., "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade em Problemas Difusivos-Advectivos Não-Lineares". Dissertação de mestrado, UFES, 2009.
- [17] Oliveira, P.C., Loeffler, C.F., Bulcão, A., Esquema Flux-spline Aplicado a Problemas Difusivos, Anais do XX CILAMCE, São Paulo, 1999.
- [18] Özisik, M.N., "Transferência de Calor, Um Texto Básico". Ed. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1990.
- [19] Partridge, P.W., Brebbia, C.A., Wrobel, L.C., "The Dual Reciprocity, Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
- [20] Ramachandran, P.A., "Boundary Element Methods in Transport Phenomena". Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science. London, 1994.
- [21] Reddy, J.N., "An Introduction to the Finite Element Method". 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill Education, 2005.
- [22] Rosa, A.J., Carvalho, R. S., Xavier, J. A. D. "Engenharia de Reservatórios de Petróleo". Ed. Interciência, Rio de Janeiro, 2006.
- [23] Santos, J.C., Loffler, C.F., "Solução Analítica de um Problema difusivo-advectivo bidimensional através do método de separação de variáveis", 32<sup>a</sup> Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, MT, 2009.
- [24] Tannehill, J.C., Anderson, D.A., Pletcher, R.H., "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer". Second edition, Taylor & Francis Ltd, Philadelphia, 1997.
- [25] Telles, J.C.F., Prado, A.A., Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London (1993).
- [26] White, F.M., "Fluid Mechanics", McGraw-Hill Int., Singapore, 1986.

- [27] Zhao, C., Mühlhaus, H.B., Hobbs, B.E., "Finite Element Analysis of Steady-State Natural Convection Problem In Fluid-Saturated Porous Media Heated from Below". International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, NedLands, 1997.
- [28] Zhao, C., Mühlhaus, H.B., Hobbs, B.E., "Finite Element Modelling of Temperature Gradient Driven Rock Alteration and Mineralization in Porous Rock Masses". Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, NedLands, 1998.

## BIBLIOGRAFIA

- Barrows, A. P., “Análise de Alguns Problemas Especiais de Campo Escalar através do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade”, Dissertação de mestrado, UFES, 1999.
- Brebbia, C.A., “The Boundary Element Method for Engineers”. Pentech Press, London, 1978.
- Dan, M. L., “Formulação Quase-Dual Híbrida do Método dos Elementos de Contorno para Simulação e Análise de Problemas de Convecção Forçada”, Dissertação de mestrado, UFES, 2004.
- Dan, M. L., “Formulação Híbrida do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Difusivos- Advectivos”, Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica (RIBIM), vol 10, num 3, pp 23-32, Septiembre, 2006.
- Dan, M. L., “Modelagem de um Problema de Convecção Forçada com Escoamento Compressível Através da Equação da Advecção-Difusão”, Revista Ciência e Engenharia do CT, vol VII n 5, pg 21-25, set/out 2004.
- Dan, M. L., Mansur, W. J., “A Transformation of Variables Technique Applicable to the Boundary Element Method to Simulate a Special Class of Diffusive-Advective Potential Problems”, RBCM, março, 2008.
- Ferziger, J.H., Peric, M., “Computational Methods For Fluid Dynamics”. 3ª edição, Ed. Springer-Verlag, New York, 2002.
- Fox, R.W., Mcdonald, A. T., “Introdução à Mecânica dos Fluidos”. 4ª edição, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 1992.
- Jardim, A. C., “Estratégias para Melhoria da Completude da Seqüência de Funções de Interpolação Empregadas na Formulação Quase-Dual do Método dos Elementos de Contorno”. Dissertação de mestrado, UFES, 2006.
- Lewis, R. W., Nithiarasu, P., Seetharamu, K. N., “Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow”, John Wiley & Sons, 2004.
- Loeffler, C.F., Mansur, W.J., “Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation”. International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”. 2ª edição, Ed. LTC, Rio de Janeiro, 2004.
- Mansur, W. J., “Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 58, Issue 8. 28/10/03, pag 1167-1186, 2003.

- Massaro, C. A. M., “O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos” Dissertação de mestrado, UFES, 2001.
- Nardini, D., Brebbia, C.A., “A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements”, Proceeding of the Fourth International Seminar, Boundary Element Methods in Engineering, Southampton, 1982.
- Neves, F.P., “Aplicação do Método dos Elementos de Contorno com Dupla Reciprocidade em Problemas Difusivos-Advectivos Não-Lineares”. Dissertação de mestrado, UFES, 2009.
- Oliveira, P.C., Loeffler, C.F., Bulcão, A., Esquema Flux-spline Aplicado a Problemas Difusivos, Anais do XX CILAMCE, São Paulo, 1999.
- Özisik, M.N., “Transferência de Calor, Um Texto Básico”. Ed. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1990.
- Partridge, P.W., Brebbia, C.A., Wrobel, L.C., “The Dual Reciprocity, Boundary Element Method”, Computational Mechanics Publications and Elsevier, London, 1992.
- Ramachandran, P.A., “Boundary Element Methods in Transport Phenomena”. Computational Mechanics Publication and Elsevier Applied Science. London, 1994.
- Reddy, J.N., “An Introduction to the Finite Element Method”. 3<sup>rd</sup> ed., McGraw-Hill Education, 2005.
- Rosa, A.J., Carvalho, R. S., Xavier, J. A. D. “Engenharia de Reservatórios de Petróleo”. Ed. Interciência, Rio de Janeiro, 2006.
- Santos, J.C., Loffler, C.F., “Solução Analítica de um Problema difusivo-advectivo bidimensional através do método de separação de variáveis”, 32<sup>a</sup> Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Cuiabá, MT, 2009.
- Tannehill, J.C., Anderson, D.A., Pletcher, R.H., “Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer”. Second edition, Taylor & Francis Ltd, Philadelphia, 1997.
- Telles, J.C.F., Prado, A.A., Hyper-singular Formulation for 2-D Potential Problems, Chap 6 of Advanced Formulations in Boundary Element Methods, Elsevier, London (1993).
- White, F.M., “Fluid Mechanics”, McGraw-Hill Int., Singapore, 1986.
- Zhao, C., Mühlhaus, H.B., Hobbs, B.E., “Finite Element Analysis of Steady-State Natural Convection Problem In Fluid-Saturated Porous Media Heated from Below”. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, NedLands, 1997.

- Zhao, C., Mühlhaus, H.B., Hobbs, B.E., “Finite Element Modelling of Temperature Gradient Driven Rock Alteration and Mineralization in Porous Rock Masses”. Computer methods in applied mechanics and engineering, Elsevier, NedLands, 1998.