UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Sequências Numéricas e Aplicações"

Gabriel Peres Santos

Defesa de Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em 10/04/2013 por:

Fábio Júlio Valentim - UFES

Rosa Elvira Quispe Ccoyllo - UFES

Fábio Luiz Borges Simas – UNIRIO/RJ

Universidade Federal do Espírito Santo

Sequências Numéricas e Aplicações

Gabriel Peres Santos

Trabalho apresentado para obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientador: Dr. Fábio Júlio Valentim

Vitória

Abril, 2013

Resumo

Neste texto expomos alguns resultados relativos a sequências. Iniciamos com a definição formal de sequências, abordamos os assuntos clássicos no Ensino Básico, progressões aritméticas e progressões geométricas e fornecemos alguns tópicos complementares, dentre outros, aplicações de sequências em Matemática Financeira, no cálculo de raiz quadrada de um número e de uma forma introdutória, a noção de limite de uma sequência e Séries numéricas. O trabalho traz ao longos dos capítulos notas históricas, muitos exemplos, aplicações, interpretações geométricas e uma lista de exercícios. Procuramos elaborar um texto que seja receptivo a alunos e professores do Ensino Básico. Para isto, a exposição dos tópicos é focada em uma linguagem matemática formal e informal, de modo que o leitor tenha acesso a parte intuitiva de cada conceito, sem prejuízo no aspecto de precisão da matemática.

Palavras-chave: sequências numéricas - progressões aritméticas - progressões geométricas - Matemática Financeira.

Aos amores de minha vida:

minha mãe, meu pai, meus irmãos e minha querida esposa Amanda,

Agradecimentos

A DEUS, que me deu força e coragem para chegar até aqui, ajudando a transpor os obstáculos que surgiram no decorrer da caminhada.

À minha querida esposa Amanda, aos Pais (Pedro e Iolete) e Familiares (Charles, Rodrigo, Celina, Lauriene, Geraldo, entre outros), pelo incentivo e paciência nesse percurso.

Aos Amigos, Colegas e Companheiros, por todos os momentos de vitória e impasse nesse período, em especial ao grandes amigos Fabrício e Allan Darley.

Ao professor Dr. Fábio Júlio Valentim por todo auxílio na elaboração desse trabalho.

Sumário

1. Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999) quando os estudantes vão se integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada é importante que a educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, resolução de problemas, tomada de decisões, fazer inferências, criar, aperfeiçoar conhecimentos e valores e trabalhar cooperativamente. A compreensão da matemática é essencial para o cidadão agir como consumidor prudente ou tomar decisões em sua vida pessoal e profissional.

O novo Ensino Médio não é simplesmente preparatório para o Ensino Superior ou estritamente profissionalizante, mas sim tem a função de preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho.

Infelizmente tal situação não acontece na prática. De acordo dados do INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (em novembro de 2003), 62,6% dos estudantes brasileiros da 3ª série do Ensino Médio, na disciplina de Matemática, foram classificados no estágio crítico e outros 4,8% no estágio muito crítico do aprendizado. No total, 67,4% dos alunos têm desempenho muito abaixo daquele desejado. No Brasil apenas 6% dos alunos se encontram no estágio considerado adequado para essa disciplina.

Os diversos ramos da Matemática demonstram como reconhecer e analisar formas e manipular números. Atualmente, o cálculo com o emprego de métodos algébricos é instrumento de vasta aplicação a todos os tipos de problemas. Em todos os ramos da atividade humana o uso de conhecimentos matemáticos possibilitou e possibilita diversos avanços.

A Matemática ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, cabe ao estudo de Matemática durante o Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que ele possa continuar aprendendo. Compreender e resolver situações que envolvem conhecimento de cálculos numéricos e da linguagem algébrica possibilitará ao aluno compreender melhor as inúmeras situações do cotidiano que necessitam de conhecimento matemático, colaborando para sua formação social, profissional e para o prosseguimento dos seus estudos.

As sequências Numéricas reais são conteúdos obrigatórios dos currículos do Ensino Médio. O estudo das sequências Numéricas reais possibilitará ao aluno entrar em contato com a linguagem algébrica, bem como reconhecer instrumentos importantes para continuar seus estudos. Além de possibilitar ao aluno adquirir grande parte das competências citadas acima. As progressões aritméticas e geométricas têm aplicabilidade em vários ramos da atividade humana, por exemplo, as PGs (progressões geométricas) são aplicadas a estudos para a obtenção do montante de um valor capitalizado periodicamente, assim como em estudos de taxas de juros, financiamentos e prestações.

No entanto, a maioria dos alunos do Ensino Médio apresenta muitas dificuldades para compreender os conteúdos de Matemática em suas diversas áreas, inclusive do estudo das sequências, destacando-se as progressões aritméticas (PA) e as progressões geométricas (PG), que fazem parte do currículo escolar do Ensino Médio Nacional, normalmente apresentado no 2º ano.

Muitos alunos do Ensino Médio pensam que os conteúdos de Matemática somente enfatizam um grande número de fórmulas sem sentido, com cálculos intermináveis e sem relação com o mundo real. Infelizmente na grande maioria das escolas o ensino das progressões não é construído junto com os alunos, mas simplesmente passado para eles, nota-se também que esses conceitos não são abordados a partir da história e não têm ligação com a realidade dos mesmos.

No último ano do Ensino Fundamental os alunos estudam o básico de Matemática Financeira, conhecem e usam as fórmulas para se descobrir valores, mas neste momento nem é citada a relação entre as progressões geométricas e a Matemática Financeira. Normalmente os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio apresentam o estudo das sequências Numéricas de forma bem resumida, normalmente tem-se uma pequena relação envolvendo alguma situação do cotidiano e em seguida define-se sequências Numéricas, logo em seguida tem uma série de exemplos sobre a formação dos elementos de uma sequência e pula-se logo para o estudo das progressões aritmética e geométricas (onde a ênfase maior é na resolução de exercícios repetitivos) e normalmente também não é feita a relação do estudo das progressões geométricas com os cálculos financeiros.

Diante deste cenário, o objetivo deste texto é colaborar com o aprendizado dos alunos do Ensino Médio em relação ao estudo das sequências Numéricas reais e da sua aplicabilidade em situações do cotidiano, inclusive envolvendo cálculos financeiros. Procuramos elaborar um texto que seja receptivo a alunos e professores do Ensino Básico. Para isto, a exposiçao dos tópicos é focada em uma linguagem matemática formal e informal, de modo que o leitor tenha acesso a parte intuitiva de cada conceito, sem prejuízo no aspecto de precisão da matemática. O texto traz ao longo dos capítulos notas históricas, muitos exemplos, aplicações, interpretações geométricas e uma lista de exercícios.

Neste texto expomos alguns resultados relativos a sequências. Iniciamos com a definição formal de sequências, abordamos os assuntos clássicos no Ensino Básico, progressões aritméticas e progressões geométricas e fornecemos alguns tópicos complementares, dentre outros, aplicações de sequências em Matemática Financeira, no cálculo de raiz quadrada de um número e, de uma forma introdutória, a noção de limite de uma sequência e Séries Numéricas.

2. Sequências Numéricas

Em muitas situações da vida diária aparecem a ideia de sequência ou Sucessão. Assim por exemplo, temos:

A sequência dos dias da semana (domingo, segunda, ..., sábado).

A sequência dos meses do ano (janeiro, fevereiro, ..., dezembro).

A sequência dos números naturais $(1, 2, 3, 4, ...)$.

A sequência dos anos, a partir de 1990, nos quais a Copa do mundo de futebol é realizada $(1990, 1994, 1998, 2002, ...)$.

Em todas essas situações observa-se certa ordem nos termos. Na sequência dos meses do ano temos: 1^o termo: janeiro, 2^o termo: fevereiro, ..., 12^o termo: dezembro.

Se representarmos o primeiro termo por a_1 (lê-se a índice um), o segundo termo por a_2, o terceiro por a_3 e, de modo geral, o termo de ordem n ou n-ésimo termo por a_n, temos uma sequência finita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ ou ainda, se permitirmos variar n sobre todos os naturais temos uma sequência infinita $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$.

Mais formalmente, uma sequência infinita de números reais é uma função:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$f(n) = a_n$$

Onde n é o índice da sequência e a_n o n-ésimo termo da sequência.

Escreve-se $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é a_n.

Observe que pela definição de função, a rigor não podemos garantir que a_4 na sequência (3,6,9,...) é 12. Embora, é usual considerar que neste caso, por exemplo, $a_n = 3n$.

Por outro lado uma sequência finita é uma função

$$a : \{1, 2, 3, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$$

onde escrevemos

$$\begin{aligned} a(1) &= a_1 \\ a(2) &= a_2 \\ &\vdots \\ a(n) &= a_n \end{aligned}$$

ou ainda podemos denota-la por $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

Não se pode confundir sequência com conjuntos. Observe que a sequência $(1, 1, 1, ..., 1, ...)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$, ou ainda, as sequências $(0, 1, 0, 1, ...)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$ são diferentes mas o conjunto de seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Observe o exemplo: Determinar os cinco primeiros termos de uma sequência tal que:

$$a_n = 10^n + 1.$$

tem-se então

$$\begin{aligned} a_1 &= 10^1 + 1 = 10 + 1 = 11 \\ a_2 &= 10^2 + 1 = 100 + 1 = 101 \\ a_3 &= 10^3 + 1 = 1000 + 1 = 1001 \end{aligned}$$

$$a_4 = 10^4 + 1 = 10000 + 1 = 10001$$
$$a_5 = 10^5 + 1 = 100000 + 1 = 100001.$$

Portanto, a sequência será

$$(11, 101, 1001, 10001, 100001).$$

Uma nota histórica

Os egípcios de 5.000 anos atrás precisaram estabelecer padrões, como o da enchente do Rio Nilo. Observavam os períodos em que ocorria a enchente do rio, pois para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos, os egípcios precisavam saber quando haveria inundação. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento, ou seja, necessidade de conhecer com que sequência aconteceria a próxima inundação.

Eles descobriram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês. Havia três estações determinadas pelo fluxo do Rio Nilo que eram as Cheias (akket), o semeio (pert) e colheita (shemu).

Fibonacci (1170 - 1240) foi um grande contribuinte para esta área da matemática. Ele inventou uma sequência de inteiros na qual cada número é igual à soma dos dois antecessores, sendo que os dois primeiros termos da sequência são iguais a 1, a sequência é a seguinte (1,1,2,3,5,8,13,...), introduzindo-a em termos de modelagem de uma população reprodutiva de coelhos. Esta sequência tem muitas propriedades curiosas e interessantes. Por exemplo, pode-se perceber que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si. Esta sequência continua sendo aplicada em várias áreas da matemática moderna e da ciência.

Figura 1: imagem do Rio Nilo

Figura 2: Fibonacci

2.1 Progressões Aritméticas

A progressão aritmética (PA) é um tipo de sequência bastante presente em situações do cotidiano, como mostra a situação descrita a seguir.

Quando a quantidade de água de um reservatório atinge o mínimo de $10m^3$, é aberto um registro, automaticamente, despejando-se $5m^3$ de água por hora neste reservatório até completar sua capacidade, que é de $45m^3$, e a partir deste momento não há vazão pois fecha-se o registro.

A sequência que apresenta a quantidade, em m^3, contida no reservatório, de hora em hora, a partir do instante que foi atingida a quantidade mínima é a seguinte

$$(10, 15, 20, 25, 30, 35, 45).$$

Uma sequência de números reais é chamada progressão aritmética quando cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com uma constante r, chamada razão da PA. Em outras palavras uma progressão aritmética é uma sequência de números $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, ...)$ na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e o seu antecedente a_n, para $n \geq 2$. Assim uma progressão aritmética de razão r é uma sequência (a_n) na qual $a_{n+1} - a_n = r$ para todo n natural. (MORGADO, WAGNER, ZANI, 2001, pág. 1).

No exemplo anterior se tem:

1) Razão r é representada pelos $5m^3$ de água que são despejados por hora no reservatório.

2) Os $10m^3$ representam o 1º termo a_1.

3) Os $45m^3$ representam o último termo a_7.

Uma PA pode ser crescente, decrescente ou constante.

Uma PA é crescente quando cada termo é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a razão seja positiva. Exemplo: (3,8,13,18,23,28,...), onde a razão é 5.

Uma PA é decrescente quando em cada termo, é menor que o termo que o antecedente. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a razão seja negativa. Exemplo: (20,17,14,11,8,...), onde a razão é -3.

Uma PA é constante quando sua razão é nula (igual a 0). Como por exemplo: (2,2,2,2,2,2,...).

Outros exemplos simples de PA são a sequência dos números pares (0,2,4,...) ou simplesmente (2n) onde a razão é 2 e a sequência dos números ímpares (1,3,5,...) ou (2n + 1), onde a razão também é 2.

Se (a_n) é uma progressão aritmética finita de razão r, então teremos que:

$$
\begin{gathered}
a_2 - a_1 = r \\
a_3 - a_2 = r \\
a_4 - a_3 = r \\
\vdots \\
a_n - a_{n-1} = r
\end{gathered}
$$

Somando essas $n-1$ igualdades teremos que

$$a_n - a_1 = (n-1)\,r,$$

isto é

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Esta é a expressão que fornece o termo geral da PA a partir do 1º termo e da razão.

O estudo de sequência pode ser um bom laboratório para utilização de indução finita (veja no Apêndice 3 o que é indução finita).

Agora veja que esta mesma relação também pode ser demonstrada através da indução finita. Temos para $n = 1$ a afirmação é obviamente verdadeira, pois

$$a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1.$$

Suponha então que a relação é válida para n, ou seja

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Temos que provar que a relação também é verdadeira para $n + 1$. Como $a_{n+1} = a_n + r$, temos por hipótese $a_{n+1} = a_1 + (n-1)r + r$. Logo $a_{n+1} = a_1 + nr$ e a relação é válida para $n + 1$.

Por fim, ficou demonstrado pelo princípio da indução finita que a fórmula do termo geral de uma PA é dada por

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Como exemplo, na progressão aritmética (3,7,11,15,...) tem-se que

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 3 + (n - 1)4 = 3 + 4n - 4 = 4n - 1.$$

Em particular, teremos

$$a_{30} = 4 \times 30 - 1 = 119.$$

Sobre a soma dos termos de uma PA, comecemos com um comentário histórico.

Gauss percebeu esta fórmula na escola primária e utilizou-a para calcular imediatamente a soma dos números inteiros de 1 a 100. Ao apresentar sua resposta, o professor disse ser impossível o garoto ter realizado a tarefa em tão pouco tempo e duvidou da resposta de Gauss. O garoto só foi levado a sério no final da aula, quando os outros alunos obtiveram a mesma resposta.

Veja o seu raciocínio

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 98 + 99 + 100,$$

somando os extremos tem-se

$$1 + 100 = 101$$
$$2 + 99 = 101$$
$$3 + 98 = 101$$

e assim secessivamente até

$$50 + 51 = 101$$

no total são 50 parcelas de 101, então

$$50 \times 101 = 5050.$$

O procedimento usado por Gauss vale de modo geral. Para se conseguir a soma dos termos de uma PA basta somar o primeiro termo (a_1) com o último termo (a_n), multiplicar pela quantidade de termos e em seguida dividir o resultado encontrado por 2.

Mais formalmente, a soma de todos os termos de uma progressão aritmética não infinita, a partir do primeiro, é calculada pela seguinte fórmula

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Observe a demonstração da fórmula. Tem-se que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{(n-1)} + a_n \text{ e}$$

$$S_n = a_n + a_{(n-1)} + a_{(n-2)} + ... + a_2 + a_1.$$

Somando termo a termo as duas igualdades obtemos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{(n-1)}) + ... + (a_n + a_1).$$

Observe que todos os parênteses são iguais ao do primeiro, ao passar dos parênteses a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, tem-se então um total de n parcelas iguais a $(a_1 + a_n)$. Sendo assim tem-se

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Fica como exercício para os estudantes validar esta expressão via indução. Mais um exemplo, qual é a soma dos trinta primeiros termos da progressão aritmética (3, 7, 11, 15, ...)?

$$\text{Temos } S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(3 + 119)}{2} = 222 \times 15 = 3330.$$

Da mesma forma, pode-se calcular a soma dos n primeiros números pares positivos e dos n primeiros números ímpares positivos que são, respectivamente, $n^2 + n$ e n^2 observe, os n primeiros números pares diferente de 0 são $(2, 4, 6, 8, ..., 2n)$, então

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2 + 2n)n}{2} = n^2 + n$$

e os n primeiros números ímpares são $(1, 3, 5, 7, ..., 2n - 1)$, logo

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Observe mais alguns exemplos. Determine a soma dos n primeiros números inteiros positivos. Observe que se trata de uma PA com n termos, onde o primeiro termo é 1, a razão é 1 e o n-ésimo termo é n. Sendo assim, tem-se

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{(1 + n)n}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Logo o valor de

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Figura 3: Gauss

Uma nota histórica

A utilização das sequências numéricas também pode ser observada no aclamado Papiro de Rhind. Este papiro é um documento egípcio de cerca de 1650 a.C., onde um escriba de nome Ahmes detalha a solução de 85 problemas de aritmética e geometria. É um dos mais famosos antigos documentos matemáticos que chegaram aos dias de hoje. O seguinte problema envolvendo progressões se encontra no papiro Rhind: Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores? Problema que pode ser resolvido utilizando as ferramentas estudadas pelos alunos do Ensino Médio. (Boyer, 1998, pág. 33).

O estudo das sequências também foi notável na Grécia. Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. até 500 a.C.) e aos pitagóricos a criação da aritmética, pois conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as *harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Observaram que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas.* (Boyer, 1998, pág. 59).

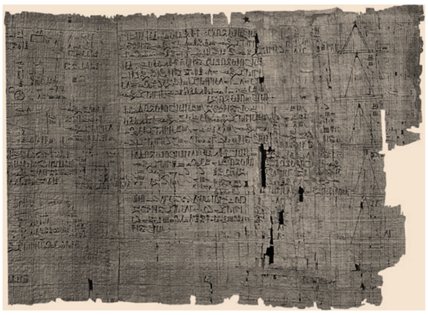

Figura 4: Trecho do Papiro de Rhind

Figura 5: Pitágoras

2.2 Progressões Geométricas

Em várias situações surgem grandezas que crescem ou decrescem pelo produto por uma constante. O estudo dessas grandezas pode ser feito a partir de um tipo especial de sequência chamada de progressão geométrica (PG).

A progressão geométrica é uma sequência de números reais em que cada um de seus termos, a partir do segundo, é igual ao produto do anterior por uma constante q, chamada razão da PG.

As sequências (1,2,4,8,16,32,...), onde cada termo é igual ao dobro do anterior, (216,72,24,8,...), onde cada termo é igual à terça parte do anterior e (5,5,5,5,5,...), onde todos os temos iguais são exemplos de progressões geométricas de razões, respectivamente, 2, 1/3 e 1.

Em uma progressão geométrica, para avançar um termo basta multiplicar pela razão, para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, para avançar três termos, basta multiplicar três vezes pela razão e assim sucessivamente. Assim, por exemplo, em uma progressão geométrica tem-se

$$a_2 = a_1 \times q$$
$$a_3 = a_2 \times q = (a_1 \times q) \times q = a_1 \times q^2$$
$$a_4 = a_3 \times q = (a_1 \times q^2) \times q = a_1 \times q^3$$

e assim por diante. Vale ainda,

$$a_8 = a_2 \times q^6$$
$$a_{11} = a_7 \times q^4$$
$$a_{15} = a_{13} \times q^2.$$

Dessa forma, toda progressão geométrica (a_n) de razão q o termo geral é dado por

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}.$$

De fato, o caso em que $q = 0$ é imediato e no caso $q \neq 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= q \\ \frac{a_3}{a_2} &= q \\ \frac{a_4}{a_3} &= q \\ &\vdots \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} &= q. \end{aligned}$$

Multiplicando estas $n-1$ igualdades, obtém-se

$$\frac{a_n}{a_1} = q^{n-1}.$$

Daí,

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}.$$

Por exemplo, na sequência (1,2,4,8,16,...) para sabermos o seu décimo termo, façamos

$$a_{10} = a_1 \times q^{10-1} = 1 \times 2^{10-1} = 1 \times 2^9 = 512.$$

Assim como nas PAs também existe uma relação para descobrirmos a soma dos infinitos termos de uma PG, observe.

Partindo da definição de soma dos n primeiro termos S_n temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n.$$

O caso em que a razão $q = 1$ (PG constante) é imediato, temos que $S_n = na_1$. No caso em que $q \neq 1$ procedemos da seguinte forma. Multiplicando ambos os lados da expressão de S_n por q, obtem-se

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_n q.$$

Subtraindo essas duas igualdades tem-se

$$S_n - qS_n = a_1 - a_n q = a_1 - a_1 q^n.$$

Ou seja,

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n).$$

Como $q \neq 1$, tem-se

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \tag{1}$$

Tente provar esta relação usando novamente a indução finita.

Calculando, por exemplo, a soma dos 10 primeiros termos da PG (1, 2, 4, 8, 16, ...).

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 1023$$

Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu com recompensa um grão de trigo pela primeira casa, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira e assim sucessivamente, sempre dobrando a quantidade de cada nova casa. Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, a quantidade de grãos pedida pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos de uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é 1 e a razão é 2. Calculando usando a relação acima demonstrada

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2}$$

Calculando, obtém-se um estupendo número 18 446 744 073 709 551 615, com vinte dígitos!

Figura 6: A lenda do xadrez

Observe que se $|q| < 1$, teremos que $\lim q^n = 0$, ou em outras palavras, qualquer número real com o módulo entre 0 e 1 quando elevado a um expoente muito grande vai dar um resultado praticamente igual a zero. A partir daí pode-se deduzir que o limite, quando n tende a infinito, da soma S_n dos n primeiros termos da progressão geométrica (a_n), de razão $|q| < 1$. Segue de (1) que

$$S = \lim S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Como exemplo, temos a sequência

(0,3; 0,03; 0,003; 0,0003;...)

Vamos calcular a soma dos 10, 50 e 100 primeiros termos desta sequência. Observe que a razão é 0,1.

$$S_{10} = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 0,3 \times \frac{1-0,1^{10}}{1-0,1} = 0,3 \times \frac{0,9999999999}{0,9} = 0,3333333333 \cong \frac{1}{3}$$

$$S_{50} = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 0,3 \times \frac{1-0,1^{50}}{1-0,1} = 0,3 \times 1,111...1 = 0,333...3 \cong \frac{1}{3}$$

$$S_{100} = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 0,3 \times \frac{1-0,1^{100}}{1-0,1} = 0,3 \times 1,111...1 = 0,333...3 \cong \frac{1}{3}$$

Observe que a soma dos 10, 50 e 100 primeiros termos desta PG são praticamente iguais à soma dos infinitos termos da PG,

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{0,3}{0,9} = \frac{1}{3}.$$

Uma nota histórica

O grego Euclides de Alexandria também teve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra Os Elementos. Os Elementos se compõem de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII em que se encontram as proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas, de forma que, se tenha uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica. (Boyer, 1998, pág. 89)

Os hindus também foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à Álgebra, somando progressões aritméticas e geométricas rapidamente. Os problemas de aritmética hindus comumente envolviam irracionais quadráticos, o Teorema de Pitágoras, progressões aritméticas e permutações. As progressões eram um dos assuntos que mais interessavam os hindus. O Matemático hindu mais importante do século doze foi Bháskara (1114 a cerca de 1185). Ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e suas obras representam a culminação de contribuições hindus anteriores. (Boyer, 1998, pág. 152)

Figura 7: Euclides de Alexandria

Figura 8: Bháskara

2.3 Limites de uma sequência

Neste capítulo serão apresentadas algumas definições importantes sobre o estudo das sequências numéricas reais, iniciando-se com limite de uma sequência. Vamos considerar nesta seção as sequências infinitas.

Uma sequência (a_n) pode ser limitada superiormente ou inferiormente. A sequência é considerada limitada superiormente quando existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e é limitada inferiormente quando existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \geq c_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência se diz limitada quando ela é limitada inferiormente e superiormente. (LIMA, 2012, pág. 23).

Informalmente, se construirmos o gráfico da sequência no plano cartesiano $(n, a_n) \in \mathbb{R}^2$ existem retas horizontais acima do gráfico (limitada superiormente) e abaixo do gráfico (limitada inferiormente).

Uma subsequência de uma dada sequência (a_n) é a restrição da função a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, ..., n_k, ...\}$ de $\mathbb{N}$ onde $n_k < n_{k+1}$. Uma sequência somente com números pares ou com números ímpares são exemplos de subsequências de uma sequência dos números naturais.

Diz-se que um número real l é limite da sequência (a_n) quando, para todo número real $\varepsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos a_n com índice $n > n_0$ cumprem a condição $|a_n - l| < \varepsilon$. Escreve-se então que $l = lim(x_n)$. Significa que, para valores muito grandes de n, os termos a_n tornam-se e se mantêm tão próximos de l quanto se deseje (veja um exemplo na figura 9).

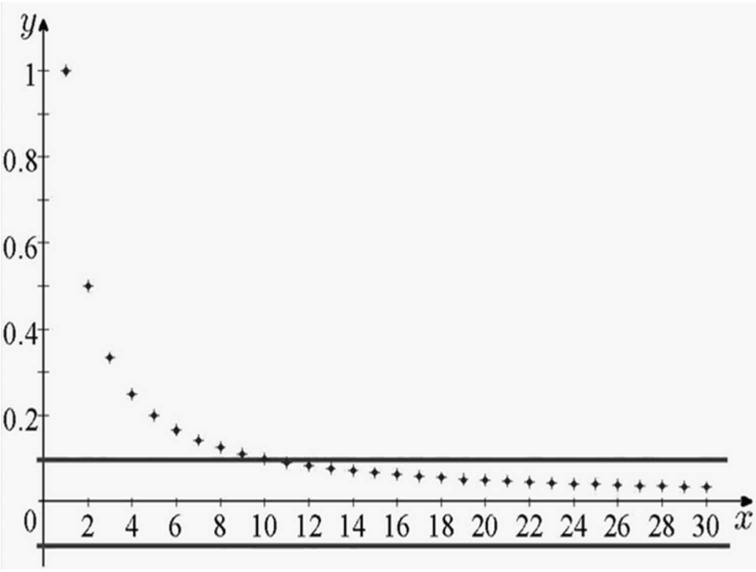

Figura 9: gráfico da sequência $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ com $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$

A sequência (1,2,4,8,16,...) onde o primeiro termo é 1 e os termos seguintes são o dobro do termo anterior é um exemplo simples de sequência limitada inferiormente (zero é menor que todos os outros termos da sequência) e que não é limitada superiormente (pois não existe um número real que é superior a todos os termos da sequência).

Um exemplo de sequência limitada é

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$$

esta sequência pode ser também representada da forma

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

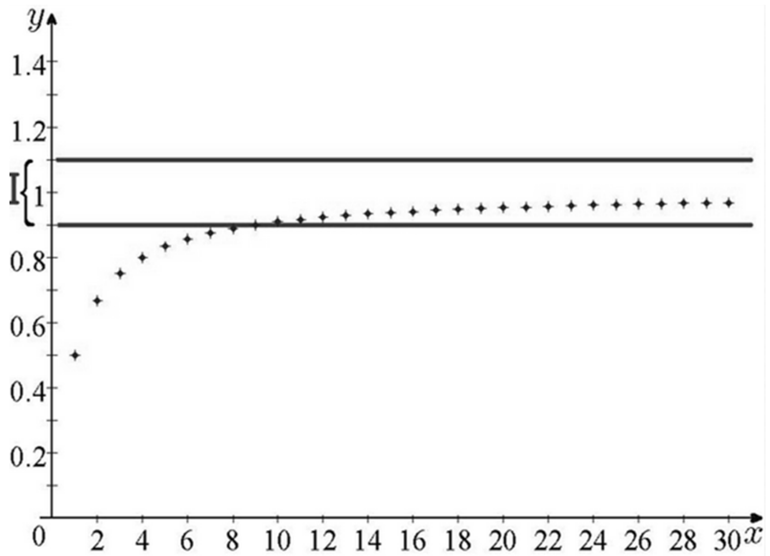

Figura 10: gráfico da sequência $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ com $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$.

Observe que todos os termos desta sequência são iguais ou superiores a $\dfrac{1}{2}$ e todos os termos são inferiores a 1 (veja a figura 10).

Uma sequência que possui limite diz-se convergente. Caso contrário ela é divergente. Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos (unicidade do limite). Uma justificativa informal e a seguinte. Se a sequência converge para l e l' com $l \neq l'$, teriamos a partir de um índice, todos os termos da sequência estão bem próximos de l, por exemplo, a uma distância menor que $\dfrac{|l - l'|}{2}$ de l e logo não estarão próximas de l'.

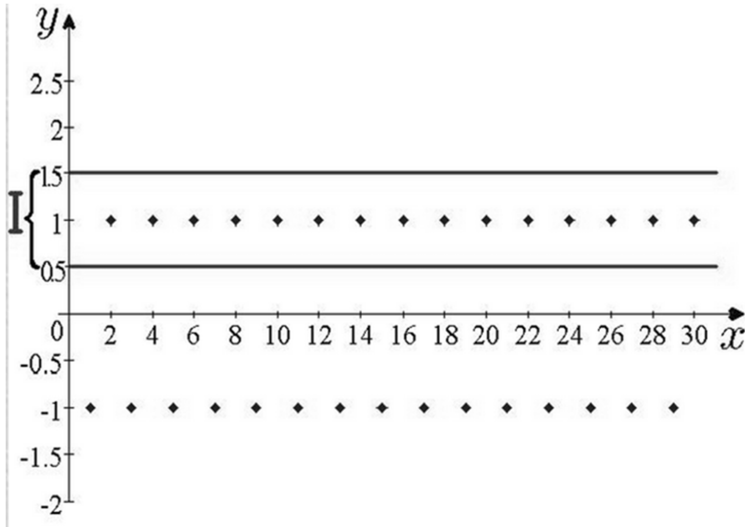

Figura 11: gráfico da sequência $(-1)^n$, observe que a sequência não tem limite.

Se $\lim a_n = l$ toda subsequência de (a_n) converge para o limite l. De fato, a partir de um indice, todos os termos da sequência estão suficientemente próximos de l, em particular os termos de uma subsequência arbitrária. Também é verdade que toda sequência convergente é limitada. A sequência $(1, -1, 1, -1, ...)$ é limitada mas não é convergente pois possui duas subsequências com limites distintos, já a sequência (1, 2, 3, 4, ...) não converge porque não é limitada.

Observe que as sequências (1,3,5,7,9,...) e (1,1,2,3,5,8,13,...) não são convergentes pois não são limitadas, por outro lado as sequências (1,1,1,1,1,...) e $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$ têm limites respectivamente iguais a 1, ou seja, são convergentes.

Uma sequência (a_n) chama-se monótona não-decrescente quando se tem $a_n \leq a_{n-1}$ e chama-se monótona não-crescente quando se tem $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No caso de $a_n < a_{n-1}$ e $a_n > a_{n+1}$ define-se respectivamente que a sequência é monótona crescente e monótona decrescente.

Toda sequência monótona não-decrescente é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo e toda sequência monótona não-crescente é limitada superiormente pelo seu primeiro termo.

Sejam as sequências (1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,...), (n), $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right)$ e $\left(\frac{1}{n}\right)$. A primeira é monótona não-decrescente ilimitada, a segunda é monótona crescente ilimitada, a terceira é monótona crescente limitada e a quarta é monótona decrescente limitada.

Um resultado interessante sobre sequências é conhecido como Teorema de Bolzano-Weirerstrass que diz que toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente. Para provar tal afirmação, basta mostrar que toda sequência (a_n) possui uma subsequência monótona. Para quem interessar a demonstração está no Apêndice 1.

Existe um método para obter aproximações da raiz quadrada baseado em convergência de sequências, denominado *aproximações sucessivas da raiz quadrada*. Este método conhecido pelos babilônios há vários séculos tem como objetivo descobrir a raiz quadrada de certo número real $m > 0$ com um erro tão pequeno quanto se deseje. recorde que $b > 0$ é a raiz quadrada de $m > 0$ se $b^2 = b \times b = m$.

Para iniciar escolha a_1 de modo que $a_1^2 > m$ e defina indutivamente

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \dfrac{m}{a_n}}{2}.$$

Para mostrar que (a_n) converge para $\sqrt{m}$ veja que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\sqrt{m} < a \Rightarrow \sqrt{m}\sqrt{m} < a\sqrt{m} \Rightarrow m < a\sqrt{m} \Rightarrow \frac{m}{a} < \sqrt{m}$$

então

$$\sqrt{m} < a \Rightarrow \mathrm{m} < a^2 \Rightarrow \frac{m}{a} < \sqrt{m} < a.$$

Seja y a média aritmética de $\frac{m}{a}$ e a, logo $y = \frac{a + \frac{m}{a}}{2}$ obviamente é menor do que a e é maior que a média geométrica destes números (a média aritmética de dois números positivos é sempre maior que a média geométrica destes números, demonstração no Apêndice 2).

Logo, $\sqrt{m} < y < a$ e tem-se uma sequência decrescente com todos os termos maiores que $\sqrt{m}$

$$a_1 > a_2 > ... > a_n > a_{n+1} > ... > \sqrt{m}.$$

Desta forma, esta sequência converge para um número real c e fazendo $n \to \infty$ na igualdade

$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n + \frac{m}{a_n}}{2} \right),$$

obtém-se

$$c = \left(\frac{c + \frac{m}{c}}{2} \right) \Rightarrow 2c^2 = c^2 + m \Rightarrow c^2 = m.$$

Isto é, $\lim a_n$=c $= \sqrt{m}$.

Observe alguns exemplos de como se conseguir a raiz quadrada de alguns números reais utilizando este método. Vamos calcular com uma precisão de quatro casas decimais o valor de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{10}$.

Calculando uma apróximação para $\sqrt{2}$, temos $m = 2$ e podemos escolher $a_1 = 2$. Assim,

$$a_2 = \frac{2 + \frac{2}{2}}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$a_3 = \frac{1,5 + \frac{2}{1,5}}{2} = \frac{1,5 + 1,3333}{2} = 1,4167$$

$$a_4 = \frac{1,4167 + \dfrac{2}{1,4167}}{2} = \frac{1,4167 + 1,4117}{2} = 1,4142.$$

Observe que o valor de a_4=1,4142 é a raiz quadrada de 2 com quatro casas decimais.

Calculando uma apróximação para $\sqrt{10}$, temos $m = 10$ e podemos escolher $a_1 = 4$. Assim,

$$a_2 = \frac{4 + \dfrac{10}{4}}{2} = \frac{6,5}{2} = 3,25$$

$$a_3 = \frac{3,25 + \dfrac{10}{3,25}}{2} = \frac{3,25 + 3,0769}{2} = 3,1635$$

$$a_4 = \frac{3,1635 + \dfrac{10}{3,1635}}{2} = \frac{3,1635 + 3,1611}{2} = 3,1623.$$

Observe que o valor de a_4 = 3,1623 é a raiz quadrada de 10 com quatro casas decimais.

2.4 Séries Numéricas

Durante o Ensino Médio a abordagem de séries numéricas fica reduzida ao estudo da soma dos termos de uma PG infinita com $|q| < 1$.

As Séries são conhecidas desde a época de Arquimedes, ele utilizou uma série geométrica de razão $1/4$, no cálculo da área da parábola. Depois desta ocorrência de uma série geométrica num trabalho de Arquimedes, as séries somente voltaram a aparecer na Matemática cerca de 1500 anos mais tarde, no século XIV. Nessa época tinha um grupo de matemáticos na Universidade de Oxford que estudava a cinemática, ao que parece, foi esse estudo que levou à reconsideração das séries.

Haviam também pesquisadores na Universidade de Paris, um famoso professor chamado Nicole Oresme (1325-1382), um destacado intelectual em vários ramos do conhecimento. Além de professor universitário, Oresme era conselheiro do rei, principalmente na área de finanças públicas, e nessa função revelou-se um homem de larga visão. Um dos trabalhos mais notáveis de Oresme sobre as séries está ligado à série harmônica. Antes, porém, de falar da Série Harmônica, temos que definir o conceito de séries e explicar o que significa dizer que uma série é convergente ou divergente.

Intuitivamente uma série é uma soma

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

com um número infinito de parcelas. O sentido desta soma é dado via a limite,

$$S = \lim_{n \to \infty} (a_1 + \cdots + a_n)$$

que pode existir ou não. Quando existe, dizemos que a série é convergentes caso contrário, se o limite não existe dizemos que a serie é divergente ou ainda, que as somas parciais divergem (LIMA, 2012, pág. 38).

Dada uma sequência (a_n) de números reais, a partir dela formamos uma nova sequência (S_n) onde

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\vdots$$

Onde S_n é a sequência das somas parciais. Se existir o limite $S = lim_{n\to\infty} S_n$, pode-se dizer que a Série $\sum a_n$ é convergente e ainda,

$$S = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

que será chamado de a soma da série. Por outro lado, se $lim\ S_n$ não existir significa que a Série é divergente.

Como já foi visto anteriormente quando $|a| < 1$, a série geométrica $1 + a + a^2 + ... + a^n + ...$ é convergente com soma igual a $\dfrac{1}{1-a}$.

Podemos, por exemplo, calcular a soma dos infinitos termos da série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...$$

que é uma progressão geométrica com primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\dfrac{1}{3}$. Temos,

$$limS_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{3}} = \frac{1}{\dfrac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Logo a soma da série $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + ...$, é igual a $\dfrac{3}{2}$. Já a série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$, de termo geral $(-1)^{n+1}$, onde a soma parcial S_n é igual a zero quando n é par e é igual a 1 quando n é ímpar é divergente, pois não existe $\lim S_n$.

A série $\sum \frac{1}{n}$ é conhecida com série harmônica (o nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar), é divergente. Para justificar que a série harmônica é divergente observe que se $\sum \frac{1}{n} = s$ fosse convergente então $\sum \frac{1}{2n} = t$ e $\sum \frac{1}{2n-1} = u$ também seriam convergentes. Além disso, como $s_{2n} = t_n + u_n$, fazendo $n \to \infty$ teríamos $s = t + u$. Mas $t = \sum \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{n} = \frac{s}{2}$. Por outro lado têm-se

$$u - t = lim_{n \to \infty} (u_n - t_n) =$$
$$lim_{n \to \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \right] =$$
$$lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{5 \times 6} + ... + \frac{1}{(2n-1)2n} \right).$$

Logo $u > t$, contradição. Concluimos dai que a série harmônica é divergente.

A Série Harmônica admite uma imterpretação geométrica. De fato $\sum \frac{1}{n}$ é a soma da área dos retângulos sob a curva $y = \dfrac{1}{x}$ e o eixo x. A área do primeiro retângulo é 1, do segundo é $\dfrac{1}{2}$, do terceiro é $\dfrac{1}{3}$ e assim por diante.

Observe o gráfico

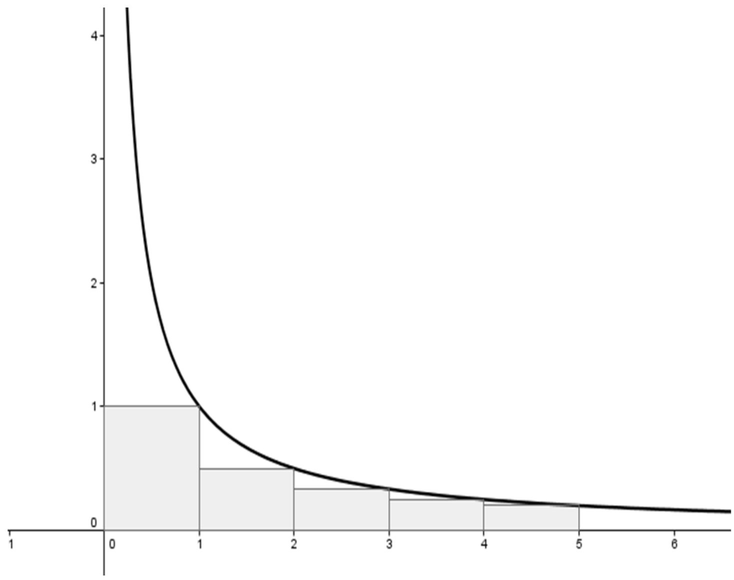

Figura 12: idéia da Série Harmônica

Figura 13: gravura de Oresme

Uma nota histórica

Zenão (ou Zeno) de Eléa (490-425 a.C.) foi o primeiro matemático a propor problemas envolvendo Séries e sequências.

Ele escreveu um livro com 40 paradoxos relativos ao contínuo e ao infinito. Pelo menos quatro dos paradoxos influenciaram o desenvolvimento da Matemática para explicar fenômenos relevantes. Infelizmente, o livro não sobreviveu até os tempos modernos, assim conhecemos estes paradoxos a partir *de outras fontes (BOYER, 1998, pág. 71).*

Dentre os paradoxos de Zenão, dois deles causaram maior perturbação, a Dicotomia e o Aquiles. O primeiro diz que antes que um objeto possa percorrer uma distância dada, deve percorrer primeiro a metade desta distância, mas antes disso, deve percorrer o primeiro quarto, e antes disso, o primeiro oitavo e assim por diante, logo é impossível iniciar o movimento. No segundo paradoxo, Aquiles aposta corrida com uma tartaruga que sai com vantagem e é argumentado que Aquiles por mais depressa que corra, não pode alcançar a tartaruga, por mais devagar que ela caminhe. Pois, quando Aquiles chegar à posição inicial da tartaruga, ela já terá avançado um pouco, e quando Aquiles cobrir essa distância, a tartaruga terá avançado um pouco mais e assim indefinidamente, ou seja, Aquiles nunca alcançará a tartaruga.

Os argumentos de Zenão parecem ter influenciado profundamente o desenvolvimento da matemática grega, influência comparável à da descoberta dos incomensuráveis (que demonstrou que nem todos os segmentos podem representar racionais) com a qual talvez se relacione. No final, estes paradoxos envolvem a soma de um número infinito de termos positivos a um número finito, o qual é a essência da convergência de uma Série Infinita de números.

Os gregos da antiguidade usaram seu método de exaustão para mediar áreas de figuras e regiões. Um exemplo é Arquimedes (287 - 212 a.C.) que alcançou vários resultados importantes envolvendo áreas e volumes de várias figuras e sólidos. Ele construiu vários exemplos e tentou explicar como somas infinitas de sequências numéricas poderiam ter resultados finitos. Seu trabalho não foi tão completo ou rigoroso, como daqueles matemáticos que vieram depois e desenvolveram sequências e séries como Newton e Leibniz, mas foi tão impressionante quanto. Embora Arquimedes tenha sido obstruído *pela falta de precisão e notação eficiente, foi capaz de descobrir muito dos elementos da análise moderna de sequências e séries.*

Figura 14: Arquimedes

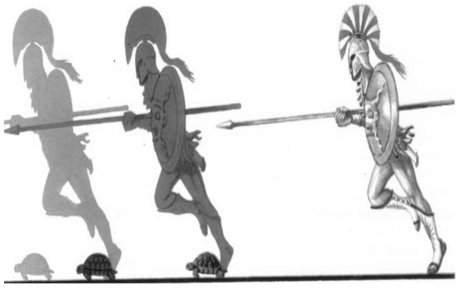

Figura 15: Aquiles e a tartaruga, um dos mais famosos paradoxos de Zenão

3. Aplicações em Cálculos Financeiros

De uma forma simples pode-se dizer que o objetivo da Matemática Financeira no Ensino Médio é dar respostas a indagações como:

- Quanto se receberá por uma aplicação de determinado valor no final de n períodos?

- Quanto se deve depositar periodicamente para atingir uma poupança desejada?

- Quanto vale hoje um título vencível no futuro?

- Quanto se deve pagar mensalmente por um empréstimo?

Ao analisar as indagações acima, verifica-se que em todos os casos depara-se com valores datados, ou seja, uma receita ou desembolso acontecendo em determinada data. Este problema se apresenta toda vez que se precisa comparar alternativas em datas diferentes. Ocorre em cada troca que não se completa imediatamente, isto é, quando uma das partes recebe valores mediante a promessa de pagamento futuro.

Todos os casos de empréstimos, transações comerciais a prazo e decisões de investimentos incluem-se no conceito de valores datados. De forma genérica, pode-se afirmar que o objetivo da Matemática Financeira é o estudo da equivalência de valores datados. (KUHNEN, 1996, pág. 55).

Nos valores datados, normalmente se têm vários fatores influenciando, como juros (elemento que permite transformar um valor de uma data para outra), atualização de valores (reposição do poder de compra de um capital), impostos incidentes (como por exemplo, IOF - Imposto sobre Operações Financeiras e o IOC - Imposto sobre Operações de Crédito) e as despesas (cobranças, bancárias, juridiciais, entre outras).

Uma das mais importantes aplicações de progressões geométricas é na Matemática Financeira. A operação básica da Matemática Financeira é a operação de empréstimo. Alguém dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por certo período de tempo, e após esse período recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Esta remuneração é chamada de juro. A soma $C+J$ é chamada de montante e será representada por M. A razão $i = \frac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação chamada de taxa de juros. Observe como alguns problemas de Matemática Financeira podem ser resolvidos utilizando conhecimentos de progressões geométricas.

Exemplo 1: Fátima investiu R$ 1000,00 em um investimento que rende 6% ao mês, determine quantos reais Fátima vai ter deste investimento em cada um dos 4 primeiros meses, sendo que ela em nenhum momento retirou ou adicionou valores.

Resposta: Observe que o capital (R$ 1000,00) representa o primeiro termo da PG e a razão é uma unidade adicionada da taxa de juros (1+0,06=1,06) que representa o valor que cada montante mês a mês deverá ser multiplicado, sendo assim, tem-se

No primeiro mês ($n = 2$, pois a_1 representa o capital)

$$a_2 = a_1 \times q^{2-1} = 1000 \times 1,06 = 1060$$

No segundo mês ($n = 3$)

$$a_3 = a_1 \times q^{3-1} = 1000 \times 1,06^2 = 1123,60$$

No terceiro mês ($n = 4$)

$$a_4 = a_1 \times q^{4-1} = 1000 \times 1,06^3 = 1191,02$$

Finalmente no quarto mês ($n = 5$)

$$a_5 = a_1 \times q^{5-1} = 1000 \times 1,06^4 = 1262,48$$

A sequência formada por estes valores é uma PG com cinco termos com razão igual a 1,06.

(1000; 1060; 1123,60; 1191,02; 1262,48)

Exemplo 2: Paula tomou um empréstimo no valor de R$ 1200,00 com uma taxa de juros de 5% ao mês. Ela deseja quitar sua dívida em um único pagamento no final do quinto mês, sendo assim, quanto Paula terá que pagar?

Resposta: Neste caso tem-se que capital (R$ 1200,00) representa o primeiro termo da PG, a razão será 1,05 (que é quanto o valor inicial vai variar mês a mês), o tempo mais uma unidade (6) representará a quantidade de termos da PG e o valor da dívida no final do quinto mês será representado por a_6, que é o sexto termo da PG, sendo assim tem-se

$$a_6 = a_1 \times q^{n-1} = 1200 \times 1,05^5 = 1200 \times 1,276 = 1531,2$$

Logo o valor a ser pago será de R$ 1531,20.

Exemplo 3: Marcelo pegou um empréstimo de certo valor e apenas no final do décimo mês pagou toda sua dívida em um único pagamento de R$ 2687,83. Sabendo que a taxa de juros era de 3% *a.m.* Determine quantos reais Marcelo pegou neste empréstimo. Dado: $1,03^{10} = 1,344$.

Resposta: Observe que o número de meses mais um (11) representa o número de termos da PG, a razão da PG em questão será 1,03 (taxa 3% *a.m.*), o valor do pagamento ou montante (R$ 2687,83) representa o décimo primeiro termo (a_{11}) e finalmente o primeiro termo (a_1) é o capital, ou seja, o valor que Marcelo pegou no início, sendo assim

$$a_{11} = a_1 \times q^{n-1}$$

$$2687,83 = a_1 \times 1,03^{10-1}$$

$$2687,83 = a_1 \times 1,344$$

$$a_1 = \frac{2687,83}{1,344}$$

$$a_1 = 1999,87.$$

Sendo assim, o valor do empréstimo é de aproximadamente R$ 2000,00.

Exemplo 4: Ricardo investiu R$ 800,00 em um investimento que rende 7% ao mês e alguns meses depois, sem que ele adicionasse ou retirasse valores, Ricardo retirou R$ 1374,55, ou seja, todo o dinheiro deste investimento. Determine quantos meses este dinheiro ficou investido.

(Sendo: $\log(1,72)$ = 0,23553 e $\log(1,07)$ = 0,02938).

Resposta: Tem-se que o primeiro termo da PG (a_1) é 800, o n-ésimo termo

(a_n) é 1374,55, a razão é 1,07 e o número de termos menos 1 representa a quantidade de meses que o dinheiro ficou investido. Sendo assim

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$1374,55 = 800 \times 1,07^{n-1}$$

$$1,07^{n-1} = \frac{1375,55}{800}$$

$$1,07^{n-1} = 1,72$$

$$\log(1,07^{n-1}) = \log(1,72)$$

$$n-1 = \frac{\log(1,72)}{\log(1,07)}$$

$$n-1 = \frac{0,23553}{0,02938}$$

$$n-1 = 8 \Rightarrow n = 9.$$

Logo, o dinheiro ficou investido durante 8 meses (número de termos da PG menos 1, pois o primeiro termo da PG representa o capital).

Exemplo 5: Investindo a juros mensais de 8% em quanto tempo seu capital dobra? Sendo: $\log(2) = 0,301$ e $\log(1,08) = 0,033$.

Resposta: Neste caso o primeiro termo da PG é representado por (a_1), o n-ésimo termo será representado por $(2a_1)$ e a razão da PG será 1,08. Sendo assim

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$2a_1 = a_1 \times 1,08^{n-1}$$

$$1,08^{n-1} = \frac{2a_1}{a_1}$$

$$1,08^{n-1} = 2$$

$$\log(1,08)^{n-1} = \log(2)$$

$$(n-1)\log(1,08) = \log(2)$$

$$n-1 = \frac{log(2)}{\log(1,08)}$$

$$n-1 = \frac{0,301}{0,033}$$

$$n-1 = 9$$

$$n = 10$$

Logo a PG formada por estes valores tem 10 termos, mas como o primeiro termo representa o capital serão necessários 9 meses para que o capital dobre.

Exemplo 6: Márcia fez um empréstimo no valor de R$ 1800,00 e no final de um ano ela quitou este empréstimo com uma única parcela de R$ 2566,37. Qual foi a taxa mensal de juros deste empréstimo?

Resposta: Observe que o primeiro termo da PG é 1800, o n-ésimo termo é 2566,37 e a quantidade de termos da PG é 13 (o capital mais os saldos devedores dos 12 meses). Sendo assim

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

$$2566,37 = 1800 \times q^{13-1}$$

$$q^{12} = \frac{2566,37}{1800}$$

$$q^{12} = 1,426$$

$$q = \sqrt[12]{1,426}$$

$$q = 1,03.$$

Como a razão da PG é 1,03 pode-se dizer que a taxa de juros do empréstimo é de 0,03, ou seja, 3%.

Exemplo 7: Charles pretende pegar R$ 2000,00 de empréstimo em um banco para serem pagos em 10 parcelas mensais fixas. Sabendo que a taxa de juros do empréstimo é de 3% ao mês determine qual será o valor da parcela.

Resposta: neste caso usaremos a relação da soma dos termos de uma PG finita

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}.$$

A soma do valor atual de todas as parcelas é igual a R$ 2000,00, então (sendo P o valor de cada parcela):

$$2000 = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^{10}}.$$

Temos então que o capital é soma dos 10 primeiros termos de uma PG onde $S_n = 2000$, $q = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{1,03}$, $n = 10$ e $a_1 = \dfrac{P}{1,03}$.

Assim sendo

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$2000 = \frac{P}{1,03} \times \frac{1-(\frac{1}{1,03})^{10}}{1-\dfrac{1}{1,03}}$$

$$2000 = \frac{P}{1,03} \times \frac{1-0,7441}{1-0,9709}$$

$$2000 = \frac{P}{1,03} \times \frac{0,2559}{0,0291}$$

$$2000 = \frac{P \times 0,2559}{0,02997}$$

0,2559×P=59,946

$$P = 234,25.$$

Logo o valor de cada prestação será de R$ 234,25.

Exemplo 8: Geraldo comprou uma moto sem entrada para ser paga em 36 parcelas mensais e iguais de R$ 327,90 com uma taxa de juros de 4% ao mês. Qual seria o preço desta moto a vista?

Resposta: A soma dos valores atuais de cada parcela é igual ao valor da moto a vista (capital), temos então

$$\text{Capital} = \frac{327,90}{1,04} + \frac{327,90}{(1,04)^2} + ... + \frac{327,90}{(1,04)^{36}}.$$

Temos então uma soma de PG onde $S_n = \text{Capital}$, $a_1 = \dfrac{327,90}{1,04} = 315,29$, $q = \dfrac{1}{1,04} = 0,9615$ e $n = 36$.

Assim

$$S_n = a_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$S_n = 315,29 \times \frac{1 - 0,9615^{36}}{1 - 0,9615}$$

$$S_n = 315,29 \times \frac{1 - 0,2433}{0,0385}$$

$$S_n = 315,29 \times \frac{0,7567}{0,0385}$$

$$S_n = 315,29 \times 19,6545$$

$$S_n \cong 6200.$$

Logo, o valor a vista da moto é de R$ 6200,00.

4. Um pouco mais sobre sequências

Faremos neste capitulo alguns exemplos, comentários e curiosidades gerais sobre sequências, vamos iniciar com um exemplo. Determinar a soma dos quadrados dos n primeiros termos inteiros positivos, ou seja, o valor de

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2.$$

Observe que a sequência da soma dos quadrados dos n primeiros inteiros positivos $(1, 4, 9, 16, ..., n^2)$ não é uma PA e nem uma PG, ou seja, não pode-se usar as relações já demonstradas anteriormente. Este somatório pode ser obtido da seguinte forma. A partir da igualdade

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1,$$

fazendo k sucessivamente igual a 1, 2, 3, ..., n e somando obtém-se

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Isto é

$$2^3 + 3^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Simplificando as parcelas em comum

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n.$$

Usando a soma de PA

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2},$$

teremos

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 3\left(\frac{n^2+n}{2}\right) - n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n^2}{2} - \frac{3n}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Concluimos que,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

De forma análoga pode-se provar que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esta demonstração fica como exercício.

O número e

Seja (S_n) definido por

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $S_n < S_{n+1}$ e

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 \times \cdots \times n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) < 3, \end{aligned}$$

segue então que (S_n) converge. Definimos

$$e = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (S_{n+1}) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

O número e assim definido é um dos mais importantes da matemática. Pelo que acabamos de ver, vale $2 < e \leq 3$. A sequência acima nos perminte obter aproximações de e com erros arbitrariamente pequenos. Por exemplo, S_{10} nos dá a aproximação $2,7182818$, com erro menor que 10^{-7}. O número e é as vezes chamado de *Número de Euler*, em homenagem a Leonard Euler (1707-1783), considerado até hoje um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

A partir do número de Euler podemos definir a função exponencial $y = e^x$ para $x \in \mathbb{R}$. A função exponencial tem a notável propriedade de que sua taxa de variação, ou variação instantânea, quanto $x = t$ coincide com o valor da função e^t no correspondente ponto. Daí sua importância na modelagem de diversos fenômenos naturais como, por exemplo, desintegração radiativa, crescimento de população de bactérias e assim por diante. Um tratamento completo deste assunto é visto comumente em um curso de cálculo diferencial e integral presente nos períodos inicias de uma graduação na área de exatas.

Figura 16: Leonard Euler

5. Exercícios Propostos

1. Determine os 5 primeiros termos de uma sequência formada pela lei de formação

$$a_n = 5^n + 13$$

2. Qual é a soma dos 50 primeiros números pares e dos 50 primeiros números ímpares?

3. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?

4. Qual é a soma de todos os múltiplos de 7 compreendidos entre 200 e 800?

5. Qual é a soma de todos os múltiplos de 15 compreendidos entre 160 e 370?

6. Sabe-se que há dois tipos de anos bissextos: o que são múltiplos de 4 mas não de 100 e os que são múltiplos de 400. Sendo assim, determine quantos anos são bissextos entre 1799 e 2013?

7. Qual é o valor do sexto termo de uma PG onde o primeiro termo é 2 e a razão é 5?

8. Qual é a soma dos 8 primeiros termos de uma PG em o que o primeiro termo é 3 e a razão é 4?

9. Calcule o limite da soma a seguir

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + ...$$

10. A soma de três números em progressão geométrica é 19. Subtraindo-se 1 ao primeiro, eles passam a formar uma progressão aritmética. Calcule-os.

11. Marcia fez um investimento de R$ 2500,00 que rende 3 ao mês, determine quantos reais Paulo vai ter deste investimento em cada um dos 5 primeiros meses, sendo que ele em nenhum momento retirou ou adicionou valores.

12. Fernando tomou um empréstimo no banco MMT no valor de R$ 4000,00 com uma taxa de juros de 2,5 ao mês. Ele deseja quitar sua dívida em um único pagamento no final do sétimo mês, sendo assim, quanto ele terá que pagar?

13. Amanda quitou um empréstimo pagando no final do décimo mês uma parcela única de R$ 3.481,62. Sabendo que a taxa de juros mensal aplicada a este empréstimo era de 1,5 determine de quantos reais foi este empréstimo. Dado: $1,015^{10} = 1,16$.

14. Aplicando a juros de 5% em quanto tempo seu capital triplica?

15. Rodrigo fez um empréstimo no valor de R$ 5.000,00 e no final de um semestre ele quitou este empréstimo com uma única parcela de RS 5.970,16. Qual foi a taxa mensal de juros deste empréstimo?

16. Daniel pretende pegar um empréstimo no valor de R$ 4500,00 para serem pagos em 12 parcelas mensais fixas. Sabendo que a taxa de juros do empréstimo é de 2,5% determine qual será o valor de cada parcela.

17. Pedro comprou um carro sem entrada para ser pago em 48 parcelas mensais e iguais de R$ 938,68 com uma taxa de juros de 1,8% ao mês. Quanto ele pagaria se comprasse o carro a vista?

Apêndice 1

Demonstração do Teorema de Bolzano-Weierstrass

Teorema: Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.

Prova: Basta mostrar que toda sequência (a_n) possui uma subsequência monótona. Diremos que um termo a_n da sequência dada é destacado quando $a_n \geq a_p$ para todo $p > n$. Seja $D \subset \mathbb{N}$, o conjunto dos índices n tais que a_n é um termo destacado.

Se D for um conjunto infinito:

$D = \{n_1, \cdots, n_k, \cdots\}$, com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, então a subsequência $(a_{n \in D})$ será monótona não-crescente. Se, entretanto, D for finito seja $n_1 \in \mathbb{N}$ maior que todos os $n \in D$, então a_{n_1} não é destacado, logo existe $n_2 > n_1$ com $a_{n_1} < a_{n_2}$. Por sua vez, a_{n_2} não é destacado, logo existe $n_3 > n_2$ com $a_{n_1} < a_{n_2} < a_{n_3}$. Prosseguindo obtemos uma subsequência crescente $a_{n_1} < a_{n_2} < ... < a_{n_k ...}$. Como queríamos demonstrar.

Apêndice 2

A média aritmética é maior que a média geométrica de dois números reais positivos.

Prova: Sejam a e b dois números reais positivos têm-se que

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 = a+b-2\sqrt{ab}.$$

Como todo número real elevado ao quadrado é não negativo temos,

$$a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$$

Logo, pode-se afirmar que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Exercício: Tente provar que a média aritmética é maior que a média geométrica de n números reais positivos. Ou seja, mostre que

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n}.$$

Apêndice 3

Indução finita

Algumas vezes nos defrontamos com afirmações envolvendo os números naturais e a questão que surge é: tal afirmação é válida para todo número natural? Para responder às questões colocadas pelos problemas não basta testar a veracidade das fórmulas substituindo valores específicos para n. Por mais que as igualdades ganhem credibilidade, isso não nos garante a sua validade para algum outro valor de n que não tenha sido testado.

Um método comumente utilizado para verificar a veracidade de uma afirmação ou propriedade acerca do números naturais é o Princípio da Indução Finita cujo enunciado é o seguinte: Seja $P(n)$ uma propriedade descrita em termos de números naturais n. Suponhamos que as afirmações abaixo estejam satisfeitas:

a) $P(1)$ é válida.

b) Se $P(k)$ vale então $P(k+1)$ também vale.

Logo temos que $P(n)$ é válido para todo $n \geq 1$.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. Boyer. A História da Matemática (tradução de Elza F. Gomide). 2ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

[2] BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Dados do SAEB sobre educação, 2003. Disponível em:

[3] BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília, 1999.

[4] LIMA, Elon Lages. Análise Real Volume 1, Funções de uma variável. 11ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[5] MORGADO, Augusto César. WAGNER, Eduardo. Zani, Sheila C. Progressões e Matemática Financeira. 5ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[6] KUHNEN, Osmar Leonardo. Matemática Financeira e Aplicada e Análise de Investimentos. 2ª ed. São Paulo: Atlas, 1996.

[7] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins. FERNÁNDEZ, Adán José Carcho. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. Rio de Janeiro: SBM, 2010.