

Nadia Cardoso Moreira

Superfície Mínima Discreta

Vitória-ES, Brasil

Fevereiro / 2014

Nadia Cardoso Moreira

Superfície Mínima Discreta

Dissertação apresentada ao Programada de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção de grau de Mestra em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Orientador: Fabiano Petronetto do Carmo

Vitória-ES, Brasil

Fevereiro / 2014

Nadia Cardoso Moreira

Superfície Mínima Discreta/ Nadia Cardoso Moreira. – Vitória-ES, Brasil,
Fevereiro / 2014-

78 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Fabiano Petronetto do Carmo

Dissertação de Mestrado em Matemática – Universidade Federal do Espírito Santo
– UFES

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fevereiro / 2014.

1. Superfície Mínima Discreta. 2. Problema de Plateau. I. Fabiano Petronetto
do Carmo. II. Universidade Federal do Espírito Santo. III. Centro de Ciências
Exatas. IV. Superfícies Mínimas

CDU 02:141:005.7

Nadia Cardoso Moreira

Superfície Mínima Discreta

Dissertação apresentada ao Programada de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial à obtenção de grau de Mestra em Matemática.

Trabalho aprovado. Vitória-ES, Brasil, 27 de fevereiro de 2014:

Fabiano Petronetto do Carmo

CPF: 078.758.187-96

Orientador

Lhaylla Crissaff

CPF: 093.124.607-57

Membro Externo

Etereldes Gonçalves Júnior

CPF: 076.195.877-05

Membro Interno

Vitória-ES, Brasil

Fevereiro / 2014

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Antonio Alves Moreira e Ana Maria Cardoso pela educação, apoio, carinho e força que me deram.

Ao meu orientador Prof. Dr. Fabiano Petronetto do Carmo pela instrução no meio acadêmico, desde a época do PET. Por toda paciência e dedicação.

Aos meus amigos da Pós-Graduação. Em especial ao Silvano Junior, Oscar Londono, Alcebiades Dalcol Júnior e Antonio Carlos Telau, que tornaram essa jornada muito mais leve e divertida.

Aos meus amigos fora do meio acadêmico, que me apoiaram, me suportaram e entenderam que minha ausência as vezes foi necessária.

Ao Departamento de Matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Matemática pela excelente formação.

Aos membros da banca Profa. Dra. Lhaylla Crissaff e Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior, pela cuidadosa leitura do trabalho e contribuições para elaboração do texto final da dissertação.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

*"Alguns nunca enlouquecem.
Que vida de merda eles devem
levar."
Charles Bukowski*

Resumo

O problema de Superfícies Mínimas surgiu a partir do estudo do Cálculo de Variações com o significado de ser a superfície regular de menor área dentre aquelas que definem um bordo específico. Este problema foi proposto por Lagrange em 1760 e é chamado de Problema de Plateau devido aos estudos experimentais do físico Joseph Antoine Ferdinand Plateau. Esta dissertação propõe uma solução numérica para uma versão discreta do Problema de Plateau a partir do método proposto por Pinkall e Polthier. Do ponto de vista discreto, as superfícies são complexos simpliciais com certas restrições e usaremos os conceitos de Energia de Dirichlet sobre aplicações que possuem superfícies trianguladas como domínio a fim de obter um algoritmo matematicamente consistente para obter uma superfície mínima dado um determinado bordo.

Palavras-chaves: Problema de Plateau, Superfície Mínima Discreta, Peso Cotangente, Energia de Dirichlet.

Abstract

The Minimal Surfaces problem emerged from the study of the Calculus of Variations with the meaning of being a regular surface of smallest area among those that set a specific boundary. This problem was proposed by Lagrange in 1760 and is called the Plateau Problem due to experimental studies of the physicist Joseph Antoine Ferdinand Plateau. This work proposes a numerical solution to a discrete version of the Plateau Problem from the proposed method by Pinkall and Polthier. Of the discrete viewpoint case, surfaces are simplicial complexes with certain restrictions and we use the concepts of Dirichlet Energy over applications that have triangulated surfaces as domain in order to developed a mathematically consistent algorithm to obtain a minimum surface given a boundary.

Keywords: Plateau Problem, Discrete Minimal Surface, Cotangent Weight Scheme, Dirichlet Energy.

Lista de ilustrações

Figura 1	– Exemplos de simplexes. Da esquerda para a direita, simplexes de dimensão 0 (ponto), dimensão 1 (aresta) e dimensão 2 (triângulo).	22
Figura 2	– O 2-simplexo σ possui sete faces: uma 2-face $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$, que é o triângulo gerado pelo 2-simplexo; três 1-faces $\sigma_6 = [v_0, v_1]$, $\sigma_5 = [v_0, v_2]$ e $\sigma_4 = [v_1, v_2]$, que são as arestas do triângulo; e três 0-faces $\sigma_3 = [v_0]$, $\sigma_2 = [v_1]$ e $\sigma_1 = [v_2]$, que são os vértices do triângulo. Para o 2-simplexo σ , as seis últimas faces são próprias. . . .	23
Figura 3	– A fronteira da aresta $[v_0, v_1]$ é dada pela união de seus vértices (0-faces). O triângulo $[v_0, v_1, v_2]$ possui fronteira dada pela união de seus vértices e arestas (1-faces). Na figura, destacamos em vermelho as faces de cada simplexo que definem suas fronteiras. . . .	23
Figura 4	– K_1 e K_2 são exemplos de complexos simpliciais; enquanto K_3 não é, uma vez que a interseção dos seus simplexes σ_1 e σ_2 não é face própria de nenhum dos dois. . . .	24
Figura 5	– O complexo simplicial K é composto pelo simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ e suas k -faces, donde $\dim(K) = 2$. $L = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_1, v_2]\}$ é um subcomplexo de K e $\dim(L) = 1$	25
Figura 6	– Na esquerda, destacamos em vermelho a estrela σ_0^* do vértice $\sigma_0 = [v_0]$. Na direita, destacamos a estrela σ_1^* da aresta $\sigma_1 = [v_0, v_1]$	25
Figura 7	– À esquerda, o elo do vértice $\sigma_0 = [v_0]$ é destacado (em vermelho), e à direita, destacamos (em vermelho) o elo $V(\sigma_1) = \{[v_2], [v_3]\}$ da aresta $\sigma_1 = [v_0, v_1]$	26
Figura 8	– Na esquerda ilustramos uma triangulação para uma superfície S de diversos pontos de vista. Na direita, ilustramos a topologia da triangulação da superfície S , onde o mapa de cores ilustra, para um dado vértice em S , o número de vértices que pertencem ao elo deste.	27
Figura 9	– A alteração na geometria de um complexo simplicial pode não definir um novo complexo simplicial.	27
Figura 10	– Triângulo T formado pelos pontos p_{i-1} , p_i e p_{i+1} . O vértice $\bar{x} \in T$, e os triângulos t_j , $j = i - 1, i, i + 1$ delimitados pelo triângulo T e os segmentos de reta $\overline{\bar{x}p_j}$, $j = i - 1, i, i + 1$	31
Figura 11	– A aresta (i, j) e seus ângulos opostos α_{ij} e β_{ij}	35
Figura 12	– Triângulo T formado pelos pontos p_{i-1} , p_i e p_{i+1}	38
Figura 13	– Formato da matriz de cotangentes S	47
Figura 14	– A superfície inicial (à esquerda, a fronteira (centro) e a superfície mínima discreta (direita) obtida pelo algoritmo em apenas dois passos.	60
Figura 15	– (a) A superfície inicial M_0 com 1741 pontos, onde a cor representa a distância do vértice ao plano xy , ou seja, a coordenada z . (b) Destacamos os vértices e arestas da fronteira de ∂M_0 . (c) Superfície mínima discreta M_2 obtida pelo algoritmo. . . .	61

Figura 16 – Da esquerda para a direita, a superfície inicial M_0 com 121 pontos; a curva que define a fronteira da superfície mínima durante o algoritmo ∂M_0 ; e a superfície M_2 obtida pelo nosso algoritmo.	63
Figura 17 – À esquerda temos a superfície inicial M_0 com 121 pontos, ao centro a fronteira ∂M_0 a ser fixada ao longo do algoritmo e à direita temos a superfície M_{47} obtida pelo nosso algoritmo.	64
Figura 18 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 17 (à esquerda) como superfície inicial e tomando a curva da Figura 17 (centro) como condição de contorno.	64
Figura 19 – (a) Superfície inicial M_0 com 448 pontos e (b) a fronteira da superfície mínima ∂M_0 que é utilizada como condição de contorno no algoritmo.	65
Figura 20 – Sequência de algumas superfícies obtidas ao longo das iterações: M_4 (esquerda), M_9 (centro) e a superfície final M_{19} (direita).	65
Figura 21 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 19a como superfície inicial e tomando a curva da Figura 19b como condição de contorno.	66
Figura 22 – Duas discretizações da superfície definida por três quadrados nos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 1$	66
Figura 23 – Relação entre o tempo que o algoritmo levou para convergir tomando as tolerâncias $\epsilon = 1E - 02$, $1E - 04$, $1E - 06$, para cada superfície inicial.	67
Figura 24 – À esquerda temos a superfície M_0 com 1360 pontos, tomada como aproximação inicial para o nosso algoritmo, e à direita ilustramos a fronteira que é fixada ao longo do algoritmo.	67
Figura 25 – Sequência de superfícies obtidas ao longo do algoritmo tomando $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância para obter uma catenóide. A coloração das superfícies varia de acordo com a média da curvatura média dos pontos.	68
Figura 26 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 24a como superfície inicial e $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância.	68
Figura 27 – A esquerda o exemplo do Raio de uma catenóide e o gráfico da Catenária $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$, à direita o gráfico comparando o valor do Raio da sequência de superfícies M_k gerada ao longo do algoritmo com o Raio da catenóide.	69
Figura 28 – Cilindros utilizados para analisarmos o convergência do algoritmo no caso da catenóide quando tomamos superfícies iniciais mais discretizadas.	70
Figura 29 – Os gráficos ilustram as áreas (esquerda) e os Raios (direita) das superfícies obtidas pelo algoritmo a partir das diferentes superfícies iniciais tomadas de acordo com a Figura 28	70
Figura 30 – Dados iniciais do algoritmo: (a) superfície inicial M_0 com 361 pontos e (b) fronteira da superfície ∂M_0	71
Figura 31 – Sequência de superfícies obtidas durante o algoritmo tomando como dados iniciais a superfície inicial e a fronteira ilustradas na Figura 30.	71

Figura 32 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 30 (à esquerda) como superfície inicial e tomando a curva da Figura 30 (à direita) como condição de contorno.	72
Figura 33 – Superfície inicial M_0 com 133 pontos (à esquerda) e a fronteira ∂M_0 (à direita).	72
Figura 34 – Temos à esquerda a superfície obtida tomando $\epsilon = 1E - 03$ como tolerância e à direita o comportamento do critério E_1 ao longo das iterações.	73
Figura 35 – Superfície inicial utilizada (à esquerda) e uma das superfícies obtida ao longo do algoritmo (à direita) tomando $\epsilon = 1E - 04$ como tolerância.	73
Figura 36 – Superfícies mínimas geradas pelas aplicações $Re(z^2)$ e $Im(z^4)$ e as superfícies iniciais utilizadas no Exemplo 2.	74
Figura 37 – Superfície utilizada como aproximação inicial para o nosso algoritmo (à esquerda) e o comportamento do critério E_1 ao longo das iterações tomando $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância.	74

Sumário

	Introdução	19
1	Malhas Poliédricas	21
1.1	Simplexos	21
1.2	Complexos Simpliciais em \mathbb{R}^n	23
1.3	Espaços de Elementos Finitos	28
2	Superfície Mínima Discreta	29
2.1	Superfície Mínima	29
2.2	Energia de Dirichlet	30
2.3	Área Discreta	37
2.4	Energia de Dirichlet e Área	41
3	Aspectos Numéricos	43
3.1	O Algoritmo	43
3.2	O Método do Gradiente Conjugado como Método de Descida Acentuada	50
3.2.1	Método de Descida Acentuada	50
3.2.2	Gradiente Conjugado	54
4	Resultados	59
4.1	Exemplo 1: Superfícies Planares	60
4.1.1	Ponto-Plano	60
4.1.2	Semi-Esfera	61
4.2	Exemplo 2: Superfícies Complexas	62
4.2.1	$Re(z^2)$	62
4.2.2	$Im(z^4)$	63
4.3	Exemplo 3: Tempo de processamento \times Tolerância e Discretização	64
4.4	Exemplo 4: Catenóide	67
4.5	Exemplo 5: Scherk	71
4.6	Exemplo 6: Limitações	72
	Conclusão	75
	Referências	77

Introdução

O clássico Problema de Plateau questiona a existência de uma superfície de área mínima cuja fronteira seja composta pela união de curvas fechadas $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ previamente determinada. Este problema foi assim nomeado devido aos inúmeros trabalhos experimentais feitos pelo físico J.A. Plateau durante o século 19 e tais superfícies de área mínima são chamadas de *Superfícies Mínimas*.

Os experimentos de Plateau eram obtidos a partir da imersão de um arame modelando a fronteira de uma suposta superfície em uma mistura de água e sabão. Plateau, por meio destes experimentos, percebeu que ao retirar o arame da mistura, uma película de água e sabão se forma de modo a minimizar a sua energia em decorrência da tensão superficial. Consequentemente, Plateau observou que tal película de água e sabão definia uma superfície que possui a menor área dentre todas as superfícies com aquela mesma fronteira (arame).

O conceito de Superfície Mínima surgiu no trabalho seminal de Lagrange sobre cálculo das variações na década de 1760 e durante muitos anos somente soluções particulares deste problema foram obtidas mesmo sendo pesquisado por brilhantes matemáticos, tais como Riemann e Schwarz.

Outros grandes matemáticos tentaram, sem sucesso, demonstrar a existência deste tipo de superfície minimizando o funcional da Área

$$A(f) = \int_{\Omega} \text{Jacobiano}(f)$$

usando as fórmulas de representação de Weierstrass sobre a classe de funções paramétricas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tais que $f(\partial\Omega) = \Gamma$. Porém, a existência da solução para o Problema de Plateau só foi demonstrada no início da década de 1930 por (RADÓ, 1930) e (DOUGLAS, 1931) e reformulada por (COURANT; SCHIFFER, 1950) em 1950 como um problema de minimização da integral da Energia de Dirichlet

$$E_D(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla f|^2$$

no lugar do funcional da área, também sobre a mesma classe de aplicações paramétricas $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $f(\partial\Omega) = \Gamma$.

Além das definições acima, outras caracterizações para Superfície Mínima podem ser encontradas na literatura (CARMO, 2010). Pode-se determinar que uma Superfície Mínima é aquela que possui curvatura média nula, ou que uma Superfície Mínima é aquela que é parametrizada por uma aplicação harmônica. Do ponto de vista numérico, existem vários métodos para calcular superfícies mínimas [(WILSON, 1961),(CONCUS,

1967), (DZIUK, 1990), (BRAKKE, 1994), (SULLIVAN, 1990)], incluindo métodos que determinam superfícies minimizando outras formas de Energia.

Neste trabalho, iremos estudar e desenvolver o método numérico proposto por Pinkall e Polthier para solução do Problema de Plateau (PINKALL; POLTHIER, 1993). O método propõe minimizar a Energia de Dirichlet sobre um certo conjunto de aplicações definidas sobre um domínio que contém a fronteira da superfície mínima desejada.

A partir do método proposto por Pinkall e Polthier, desenvolvemos um algoritmo iterativo para obter a superfície mínima definida por uma determinada fronteira. Ao longo das iterações do algoritmo, uma sequência de superfícies que possuem a mesma topologia (em particular, a mesma fronteira) é construída porém com pequenas variações na geometria da superfície. Cada superfície desta sequência é obtida a partir de um sistema linear que minimiza o funcional da Energia de Dirichlet com respeito a um determinado conjunto de aplicações definidas sobre um domínio e, conseqüentemente, a sequência de superfícies define uma sequência de Energias de Dirichlet decrescentes. Como é possível relacionar a Energia de Dirichlet com a área de uma superfície, Pinkall e Polthier estabelecem hipóteses para que a sequência de superfícies gerada pelo algoritmo convirja para a solução do Problema de Plateau, obtendo a superfície de menor área dado uma fronteira.

Descrevendo de maneira bem sucinta cada capítulo, a dissertação está dividida da seguinte forma:

No **Capítulo 1** definimos o modelo numérico para uma superfície no qual iremos desenvolver os resultados deste trabalho. Também nesse intuito, introduziremos o espaço de funções sobre o qual o funcional da Energia de Dirichlet será minimizado.

Iniciamos o **Capítulo 2** obtendo caracterizações geométricas para o funcionais da Energia de Dirichlet e da Área e, em seguida, mostraremos a relação entre estes dois funcionais. Por fim, mostraremos que uma superfície é mínima se, e somente se, a aplicação identidade restrita a esta superfície é um ponto crítico do funcional da Energia de Dirichlet.

O objetivo do **Capítulo 3** é construir de maneira intuitiva o algoritmo que utilizamos para obter uma Superfície Mínima Discreta. O algoritmo determina uma sequência de superfícies a partir de soluções de sistemas lineares, a qual mostra-se a convergência para a Superfície Mínima Discreta. A solução de cada sistema linear é obtida pelo método Gradiente Conjugado, também descrito neste capítulo.

O **Capítulo 4** apresenta os resultados obtidos com o algoritmo iterativo desenvolvido neste trabalho. O comportamento da sequência de superfícies obtidas no algoritmo será ilustrado, assim como os valores da Energia de Dirichlet e da Área serão analisados. Além disso, quando possível, utilizaremos outras propriedades de Superfícies Mínimas para estudar o comportamento do algoritmo.

1 Malhas Poliédricas

Veremos mais adiante que o algoritmo desenvolvido por Pinkall e Polthier determina uma sequência de superfícies a partir de uma borda fixada modificando apenas as posições dos vértices de uma superfície inicial. Antes disso é necessário definirmos o modelo numérico de superfície que será utilizado no algoritmo.

Existe uma gama de modelos numéricos de superfícies utilizados na prática computacional (ZIEGLER, 1995), (BLOCH, 1997), (MUNKRES, 1984). Nesta dissertação estamos interessados apenas em malhas conformes (POLTHIER, 2005), onde dois polígonos são disjuntos, têm uma aresta em comum ou têm um vértice em comum; por exemplo, não será permitido que um polígono contenha o vértice de outro polígono no interior de alguma de suas arestas.

No nosso trabalho, desassociamos a geometria e a topologia da superfície numérica, neste intuito introduziremos o conceito de complexo simplicial que irá determinar a topologia da superfície numérica. A essa estrutura topológica iremos adicionar uma geometria dada simplesmente pela posição geométrica no qual um vértice topológico se encontra no espaço.

Por último, definiremos o espaço de funções sobre o qual o funcional Energia de Dirichlet será minimizado a cada iteração do método de Pinkall e Polthier, de forma que a sequência de superfícies gerada não tenha alteração na topologia com relação a superfície inicial.

1.1 Simplexos

Neste trabalho iremos discretizar uma superfície contínua por meio de uma superfície triangulada. Antes de estabelecermos o que é uma superfície triangulada, é necessário definirmos suas entidades mais simples formadas por simplexos, e os complexos simpliciais que determinam a ligação entre os simplexos.

No que se segue, em todos os resultados apresentados, consideramos o espaço euclidiano de dimensão n , n um inteiro positivo,

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} .$$

Começaremos definindo o objeto mais simples presente na superfície triangulada.

Definição 1.1 (Simplexo). *Seja $\mathcal{V} = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto finito de $m + 1$ pontos de \mathbb{R}^n , tal que $\{v_i - v_0 \mid i = 1, \dots, m\}$ é um conjunto linearmente independente. O fecho*

convexo

$$[v_0, v_1, \dots, v_m] = \left\{ \sum_{i=0}^m \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}^+ \text{ e } \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1 \right\}$$

é chamado m -simplexo, ou simplesmente simplexo. O número m é chamado dimensão do simplexo.

De acordo com esta definição um 0-simplexo é a representação topológica de um ponto, um 1-simplexo é um segmento de reta e um 2-simplexo é um triângulo (Figura 1).

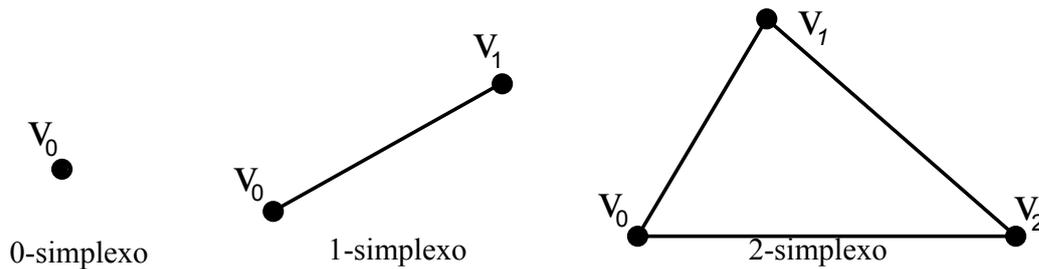


Figura 1 – Exemplos de simplexos. Da esquerda para a direita, simplexos de dimensão 0 (ponto), dimensão 1 (aresta) e dimensão 2 (triângulo).

O simplexo possui esse nome por ser o mais simples de sua dimensão. Por exemplo, um triângulo em \mathbb{R}^2 é o polígono com menor número de vértices e arestas, o tetraedro em \mathbb{R}^3 é o que possui menos vértices e arestas e faces, e assim por diante. Em termos topológicos, um simplexo generaliza o conceito de triângulo a outras dimensões.

Um simplexo pode ser decomposto em simplexos de dimensões menores que ou igual a sua dimensão. Em particular, a união de alguns simplexos de dimensões menores do que a dimensão do simplexo define a fronteira do simplexo.

Definição 1.2 (k -face). *Uma k -face f de um simplexo $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_m]$ é um simplexo determinado por $(k + 1)$ pontos do conjunto $\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$. Se a dimensão da k -face f for menor do que a dimensão do simplexo σ ($k < m$) dizemos que f é uma face própria de σ .*

Definição 1.3 (Fronteira e Interior do Simplexo). *A fronteira de um m -simplexo σ é denotada por $\partial\sigma$ e é composta pela união das faces próprias de σ . A partir da fronteira do simplexo σ , o interior de σ é definido como $\text{int}(\sigma) = \sigma - \partial\sigma$.*

As faces de um simplexo de dimensão 2, isto é, um triângulo, são as 3 0-faces dadas pelos seus 3 vértices, as 3 1-faces definidas pelas suas arestas e a 2-face dada pelo próprio simplexo (Figura 2). Também podemos observar a partir das definições anteriores que a fronteira de um triângulo é dada pela reunião de seus vértices (0-faces) e suas arestas (1-faces), justamente as faces próprias do simplexo (Figura 3).

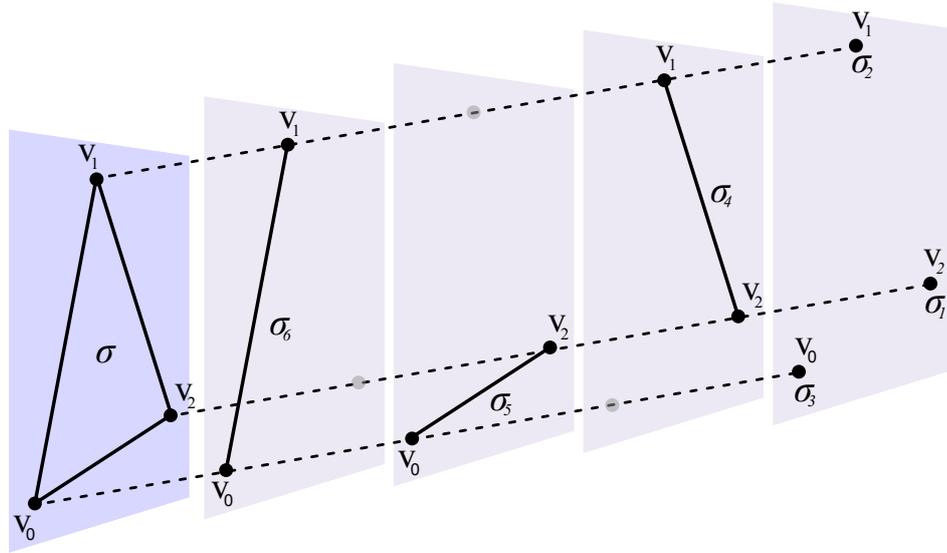


Figura 2 – O 2-simplexo σ possui sete faces: uma 2-face $\sigma = [v_0, v_1, v_2]$, que é o triângulo gerado pelo 2-simplexo; três 1-faces $\sigma_6 = [v_0, v_1]$, $\sigma_5 = [v_0, v_2]$ e $\sigma_4 = [v_1, v_2]$, que são as arestas do triângulo; e três 0-faces $\sigma_3 = [v_0]$, $\sigma_2 = [v_1]$ e $\sigma_1 = [v_2]$, que são os vértices do triângulo. Para o 2-simplexo σ , as seis últimas faces são próprias.

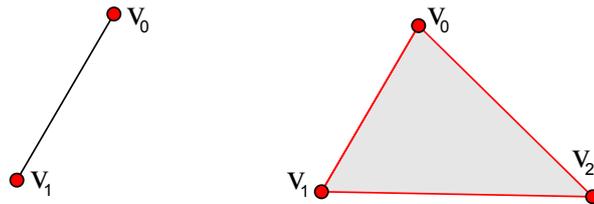


Figura 3 – A fronteira da aresta $[v_0, v_1]$ é dada pela união de seus vértices (0-faces). O triângulo $[v_0, v_1, v_2]$ possui fronteira dada pela união de seus vértices e arestas (1-faces). Na figura, destacamos em vermelho as faces de cada simplexo que definem suas fronteiras.

1.2 Complexos Simpliciais em \mathbb{R}^n

Uma vez definidas as entidades mais simples de uma superfície triangulada, vamos determinar agora as ligações entre elas. Estas ligações são estabelecidas por meio de complexos simpliciais satisfazendo algumas propriedades particulares.

Definição 1.4. *Um complexo simplicial K de \mathbb{R}^n é uma coleção de simplexos em \mathbb{R}^n de forma que:*

1. *se o simplexo σ pertence a K , então todas suas faces próprias também pertencem;*
2. *se σ e τ são simplexos de K , então $\sigma \cap \tau$ é vazia ou é uma face própria de ambos.*

Seja K um complexo simplicial dado pela coleção de simplexos $\{\sigma_i \mid i \in C_i\}$, onde C_i é um conjunto de índices qualquer. Quando a interseção de dois simplexos de K , digamos σ_i e σ_j , é diferente de vazia, dizemos que eles são adjacentes ou vizinhos. A condição 2 da Definição 1.4 garante que não existam interseções "indevidas", isto é,

que não sejam faces próprias entre os simplexos do complexo simplicial K . Por exemplo, a interseção de 2-simplexos com algum outro simplexo de K pode ser apenas vértices ou arestas e a interseção de 1-simplexos com outro simplexo de K se restringe apenas a vértices.

A figura 4 ilustra 3 coleções de simplexos. A coleção K_1 é composta por um 2-simplexo σ e suas faces próprias, as coleções K_2 e K_3 são compostas por simplexos de dimensão menor ou igual a dois e suas faces próprias. As coleções K_1 e K_2 são exemplos de complexos simpliciais, enquanto K_3 não é um complexo simplicial, pois a interseção dos simplexos σ_1 e σ_2 de K_3 não é vazia e também não é uma face própria dos simplexos, contrariando o item 2 da Definição 1.4.

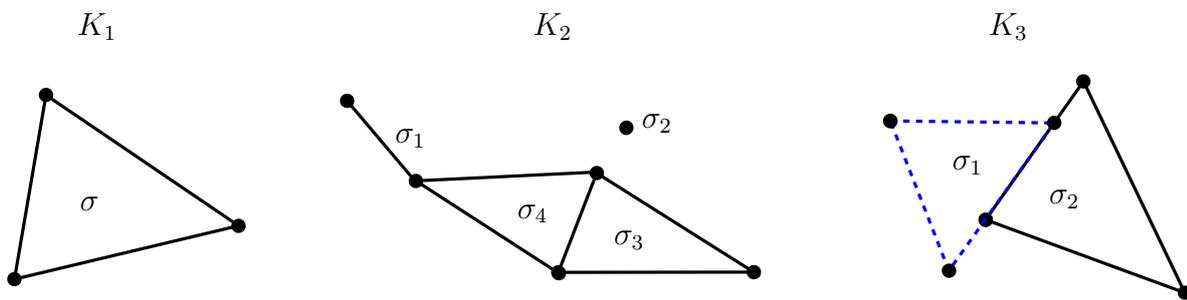


Figura 4 – K_1 e K_2 são exemplos de complexos simpliciais; enquanto K_3 não é, uma vez que a interseção dos seus simplexos σ_1 e σ_2 não é face própria de nenhum dos dois.

Definição 1.5. *Seja K um complexo simplicial. A dimensão de K , denotada por $\dim(K)$, é dada por*

$$\dim(K) = \max\{\dim(\sigma) \mid \sigma \text{ é um simplexo de } K\} .$$

Se $\dim(K) = d$, então chamamos K de d -complexo simplicial ou complexo simplicial d -dimensional.

Na figura 4, o complexo simplicial K_1 possui um simplexo σ de dimensão 2 e nenhum com dimensão superior, logo $\dim(K_1) = 2$. Da mesma forma, o simplexo de maior dimensão em K_2 tem dimensão 2 e, portanto, K_2 também é um complexo de dimensão 2.

Subconjuntos da coleção de complexos que definem um complexo simplicial podem também definir um complexo. Observe que neste caso, se um simplexo pertence ao subconjunto, então todas as faces próprias deste simplexo também pertencem ao subconjunto (Figura 5).

Definição 1.6. *Sejam K um complexo simplicial e L um subconjunto dos complexos simpliciais que definem K . Se L é também um complexo simplicial, então L é dito um subcomplexo de K .*

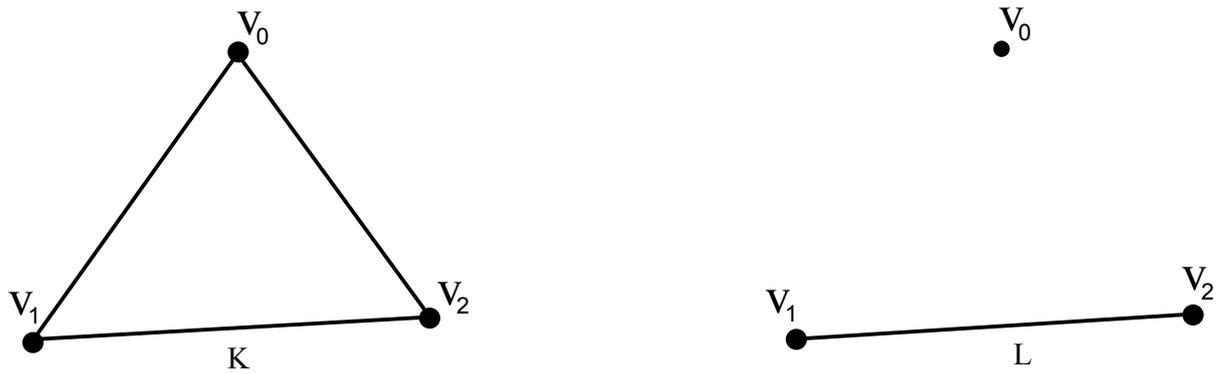


Figura 5 – O complexo simplicial K é composto pelo simplexo $[v_0, v_1, v_2]$ e suas k -faces, donde $\dim(K) = 2$. $L = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_1, v_2]\}$ é um subcomplexo de K e $\dim(L) = 1$.

A seguir daremos exemplos de subcomplexos de grande importância no desenvolvimento deste trabalho, denominados *estrela* e *elo* de um simplexos σ .

Definição 1.7. *Sejam K um complexo simplicial em \mathbb{R}^n e σ um simplexo de K , então os seguintes conjuntos são subcomplexos de K :*

1. *estrela de σ :*

$$\sigma^* := \{\eta \in K \text{ e todas as faces próprias de } \eta \mid \sigma \subset \eta\};$$

2. *elo de σ :*

$$V(\sigma) := \{\eta \in \sigma^* \mid \eta \cap \sigma = \emptyset\}.$$

As Figuras 6 e 7 ilustram as estrelas e os elos de um vértice e uma aresta de um complexo simplicial K dado, o qual é definido por 2-simplexos (triângulos) e as faces próprias destes. Observe que $\dim(\sigma^*) \geq \dim(\sigma)$ para qualquer σ e vale a igualdade se, e somente se, $\dim(\sigma) = \dim(K)$ ou $\sigma^* = \sigma$. Por outro lado, não existe nenhuma relação entre as dimensões de um simplexo σ e de seu elo $V(\sigma)$.

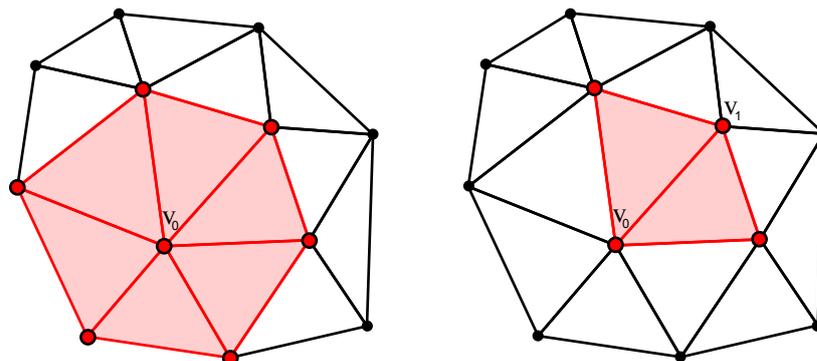


Figura 6 – Na esquerda, destacamos em vermelho a estrela σ_0^* do vértice $\sigma_0 = [v_0]$. Na direita, destacamos a estrela σ_1^* da aresta $\sigma_1 = [v_0, v_1]$.

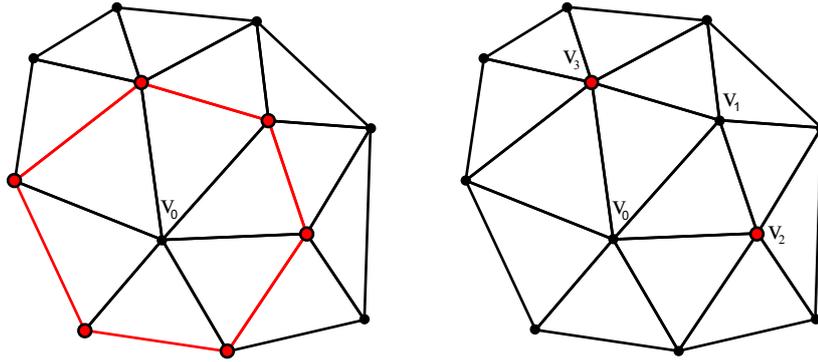


Figura 7 – À esquerda, o elo do vértice $\sigma_0 = [v_0]$ é destacado (em vermelho), e à direita, destacamos (em vermelho) o elo $V(\sigma_1) = \{[v_2], [v_3]\}$ da aresta $\sigma_1 = [v_0, v_1]$.

Com todas entidades mais simples bem definidas, agora podemos estabelecer o conceito de superfície triangulada, que estende a noção de uma 2-variedade topológica para o mundo simplicial.

Definição 1.8. *Uma superfície triangulada M é um complexo simplicial composto por um conjunto finito \mathcal{T} de triângulos tal que:*

1. qualquer ponto $p \in M$ pertence a pelo menos um triângulo $t \in \mathcal{T}$;
2. se $p \in M$ então o subcomplexo p^* é homeomorfo ao disco unitário

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}.$$

Então, se M é uma superfície triangulada e $p \in M$ é um ponto de M , então p deve pertencer a pelo menos um triângulo de M . Seja $\mathcal{T} = \{t \in M \mid p \in t\}$ o conjunto dos triângulos de M que contém p , então o conjunto p^* é composto pela união destes triângulos, suas arestas e vértices (Figura 6) e, pela definição anterior, é homeomorfo ao disco unitário. O elo de p será formado pelas arestas destes triângulos que não possuem p como vértice, e os vértices destas arestas (Figura 7).

A triangulação é uma das maneiras de decomposição espacial mais utilizada, já que os triângulos são estruturas lineares extremamente simples. Dessa forma, gostaríamos de saber quando é possível triangular uma superfície topológica M utilizando uma superfície triangulada M . O seguinte resultado assegura que qualquer superfície topológica bidimensional (em \mathbb{R}^3) pode ser triangulada por uma superfície triangulada M . A demonstração deste resultado foge do escopo desta dissertação e pode ser encontrada em (MOISE, 1977).

Teorema 1.9. *Os seguintes fatos valem para superfícies bidimensionais:*

1. Qualquer superfície topológica compacta $S \in \mathbb{R}^3$ pode ser triangulada, isto é, existe uma superfície triangulada M que triangula S .

2. Se uma superfície topológica é triangulada por duas superfícies trianguladas M_1 e M_2 , então M_1 e M_2 possuem subdivisões simpliciais isomorfas.

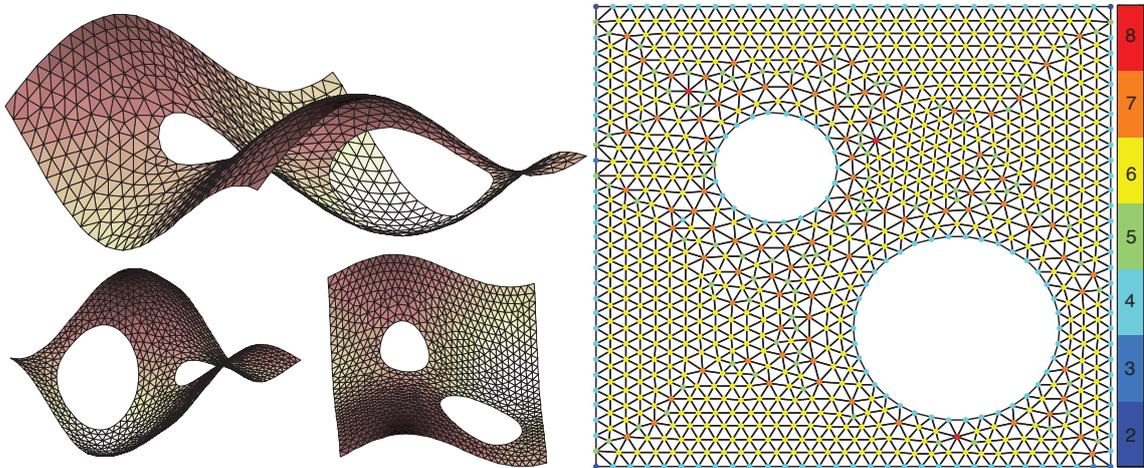


Figura 8 – Na esquerda ilustramos uma triangulação para uma superfície S de diversos pontos de vista. Na direita, ilustramos a topologia da triangulação da superfície S , onde o mapa de cores ilustra, para um dado vértice em S , o número de vértices que pertencem ao elo deste.

Finalizamos esta seção observando que na prática, durante o algoritmo que iremos apresentar, podem ocorrer situações degeneradas nos complexos simpliciais, como ilustramos na Figura 9. A geometria de um determinado complexo simplicial é alterada, porém, sem alterar a topologia do mesmo, formando novos conjuntos de simplexes que não definem mais um complexo simplicial. O caso degenerado à esquerda mostra que houve um colapso de um vértice de um triângulo com a sua aresta oposta neste mesmo triângulo. O caso degenerado à direita houve um colapso de dois vértices opostos a uma mesma aresta em um único novo vértice formando a partir daí um único triângulo.

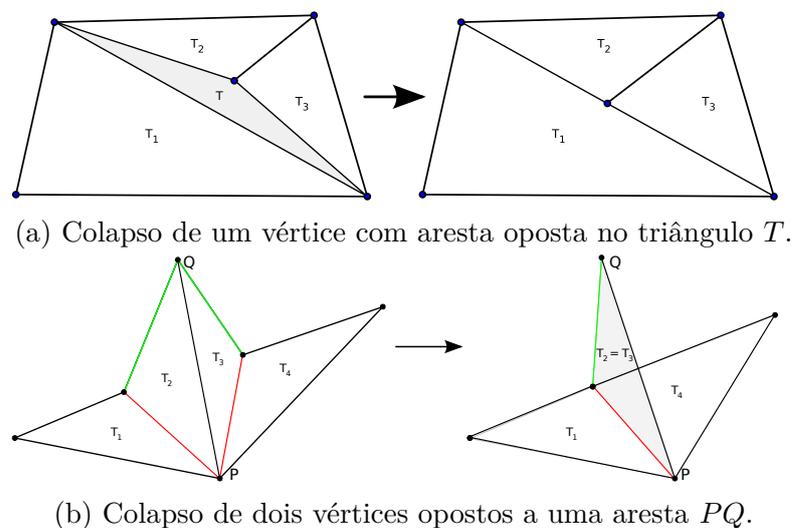


Figura 9 – A alteração na geometria de um complexo simplicial pode não definir um novo complexo simplicial.

1.3 Espaços de Elementos Finitos

A cada iteração do algoritmo que será exibido no capítulo 3, buscamos minimizar a Energia de Dirichlet. Antes que isto seja feito precisamos definir o espaço de funções sobre o qual iremos minimizar o funcional, de forma que não seja alterada a topologia das superfícies M_k obtidas a cada iteração.

Nesta seção vamos recordar brevemente um Espaço de Elementos Finitos. A cada iteração do nosso algoritmo, a partir da superfície M_k , o funcional da Energia de Dirichlet sobre ele e obter a superfície seguinte M_{k+1} . Para uma introdução mais elaborada veja (BRENNER; SCOTT, 2008), (CIARLET, 1978).

Definição 1.10. *Seja M uma superfície triangulada. Definimos S , o espaço formado pelas funções contínuas e lineares por partes sobre M , como*

$$S := \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \in C^0(M) \text{ e } f \text{ é linear em cada triângulo de } M\}.$$

Exemplos de funções em S são as próprias funções coordenadas de M . Mais ainda, observe que o espaço S de dimensão finita é gerado pela base de funções de Lagrange. De fato, se M possui n vértices então S é gerado pelas funções $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ definidas com relação aos vértices $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ de M , isto é, para cada vértice $p_i \in M$ temos uma função

$$\varphi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

linear em cada triângulo de M definida por

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Assim, se u é uma aplicação pertencente a S , ela possui uma única representação dada pelas funções $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Em cada ponto $p \in M$, tem-se:

$$u(p) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(p),$$

onde $u_j = u(p_j) \in \mathbb{R}^3$. Logo, toda função u em S pode ser unicamente determinada pelo vetor $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{3n}$.

2 Superfície Mínima Discreta

No capítulo anterior os principais conceitos que serão utilizados para o desenvolvimento do método foram apresentados: a) modelo numérico utilizado no algoritmo, a superfície triangulada, e b) o espaço de funções, a base de Lagrange. Neste capítulo, iremos desenvolver os principais resultados utilizados para definir o sistema linear cuja solução define a sequência de superfícies trianguladas que converge para a Superfície Mínima Discreta desejada.

Iniciamos este capítulo recordando o conceito de Superfície Mínima dado a partir da Energia de Dirichlet. Posteriormente, focamos no nosso objeto de interesse que é Superfície Mínima Discreta. Iremos mostrar que tanto o funcional da Energia de Dirichlet quanto o funcional da Área, com respeito a uma superfície triangulada, podem ser expressos em termos da geometria da superfície.

Por fim, os dois funcionais serão relacionados e mostraremos que uma superfície triangulada M é mínima se, e somente se, a aplicação identidade $id : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um ponto crítico do funcional da Energia de Dirichlet.

2.1 Superfície Mínima

Uma Superfície Mínima é caracterizada por ser aquela que possui a menor área dentre as outras superfícies de mesma fronteira. O Problema de Plateau ([TSUCHIYA, 1987](#)), que tem como solução uma Superfície Mínima, é formulado da seguinte forma:

Dada uma curva fechada $\Gamma \in \mathbb{R}^3$, considere o conjunto de aplicações paramétricas $\mathbb{F} = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f(\partial\Omega) = \Gamma\}$. Então $M \in \mathbb{R}^3$ é uma superfície mínima se existe $f \in \mathbb{F}$ tal que $f(\Omega) = M$ e f minimiza o funcional da Área

$$\begin{aligned} Area : \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow Area(f) = \int_{\Omega} Jacobiano(f(\mathbf{x}))d\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega. \end{aligned}$$

$Area(f)$ é o valor da área da superfície parametrizada pela aplicação paramétrica $f \in \mathbb{F}$.

Os exemplos têm sido fundamentais no desenvolvimento da teoria de Superfícies Mínimas e complementaram a pesquisa teórica. Nos últimos anos, muitos exemplos foram estudados experimentalmente usando cálculos para continuação analítica de funções complexas e integração das fórmulas de Weierstrass. Embora estes métodos permitam calcular qualquer superfície dada pela representação de Weierstrass, é necessário que as fórmulas de Weierstrass sejam conhecidas previamente.

Na década de 1930 (RADÓ, 1930) e (DOUGLAS, 1931) tiveram a ideia de não minimizar o funcional da Área diretamente, e sim o funcional da Energia de Dirichlet:

$$\begin{aligned} E_D : \mathbb{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow E_D(f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla f(\mathbf{x})\|^2 d\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega. \end{aligned}$$

Daí nosso interesse em relacionar as formulações geométricas do funcional da Energia de Dirichlet e do funcional Área, para que no fim o leitor compreenda a relação entre eles. Veremos na Seção 2.4 que, se a aplicação $id|_M : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ minimiza o funcional da Energia de Dirichlet, então $E_D(id|_M) = Area(M)$ e M é uma superfície mínima.

Uma outra caracterização de Superfície Mínima Discreta vem do funcional da Energia Conforme, de acordo com (HUTCHINSON, 1991),

$$E_C(f) = E_D(f) - A(f(M)) \geq 0; M \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

onde $E_C(f)$ é o valor da Energia conforme da aplicação $f \in \mathbb{F}$ e é igual a zero somente quando f é uma parametrização conforme. Como $E_D(id|_M) = A(M)$ quando $id|_M$ minimiza o funcional da Energia de Dirichlet, é fácil ver que, $id|_M$ minimiza o funcional da Energia Conforme se, e somente se, $id|_M$ minimiza o funcional da Energia de Dirichlet, ou seja, M é uma superfície mínima se, e somente se, $id|_M$ minimiza o funcional da Energia Conforme.

2.2 Energia de Dirichlet

Nesta seção vamos obter uma expressão geométrica para o funcional da Energia de Dirichlet para posteriormente relaciona-la com o funcional da Área.

A seguir, começaremos com a definição da Energia de Dirichlet de uma aplicação u cujo domínio é uma superfície triangulada.

Definição 2.1. *Sejam M uma superfície triangulada em \mathbb{R}^3 , \mathcal{T} o conjunto de triângulos de M ,*

$$S = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid f \in C^0(M) \text{ e } f \text{ é linear em cada triângulo de } M\}$$

o conjunto de aplicações contínuas e lineares por partes sobre M e \mathcal{T} o conjunto de triângulos de M . Então, a Energia de Dirichlet de uma função $u \in S$ com $u : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por

$$E_D(u) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \|\nabla u|_T\|^2 d\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x, y, z) \in T \quad (2.2)$$

Logo, a Energia de Dirichlet de uma aplicação $u \in S$ é dada pela soma das Energias de Dirichlet das restrições $u|_T$ para cada $T \in \mathcal{T}$, uma vez que as aplicações $u|_T : T \rightarrow \mathbb{R}^3$ são suaves.

O Lema enunciado a seguir enumera importantes resultados relacionados às funções base de Lagrange. Estes resultados serão utilizados no decorrer deste trabalho para obter alguns dos principais resultados.

Lema 2.2. *Seja $T = [p_{i-1}, p_i, p_{i+1}]$ um triângulo de uma superfície triangulada; com arestas orientadas $\{\vec{c}_{i-1}, \vec{c}_i, \vec{c}_{i+1}\}$ onde $\vec{c}_j = p_{j-1} - p_{j+1}$. Seja $\varphi_j : T \rightarrow \mathbb{R}$ a função base de Lagrange com respeito ao vértice p_j com $\varphi_j(p_k) = \delta_{jk}$ e \mathcal{A} a área do triângulo T . Então, para cada $j = i - 1, i, i + 1$ é verdade que:*

1. $\nabla \varphi_j|_T = \frac{1}{2\mathcal{A}} J \vec{c}_j$ em T ,
2. $\nabla \varphi_{i-1} + \nabla \varphi_i + \nabla \varphi_{i+1} = 0$ em T ,
3. $\langle \nabla \varphi_{j-1}, \nabla \varphi_{j+1} \rangle = \frac{-\cot(\alpha_j)}{2\mathcal{A}}$ em T ;

onde J representa a rotação de $\frac{\pi}{2}$ orientada sobre o plano que contém o triângulo T e α_j é o ângulo oposto à aresta \vec{c}_j .

Demonstração. 1. Seja $\bar{\mathbf{x}} = (x, y, z) \in T$. Podemos reescrever $\bar{\mathbf{x}}$, de forma única, utilizando as coordenadas baricêntricas

$$\bar{\mathbf{x}} = \alpha_{i-1} p_{i-1} + \alpha_i p_i + \alpha_{i+1} p_{i+1},$$

com $\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = 1$, onde $\alpha_j = \frac{\text{Area}(t_j)}{\mathcal{A}}$, $j = i - 1, i, i + 1$; e os triângulos t_{i-1}, t_i, t_{i+1} são obtidos conforme a Figura 10.

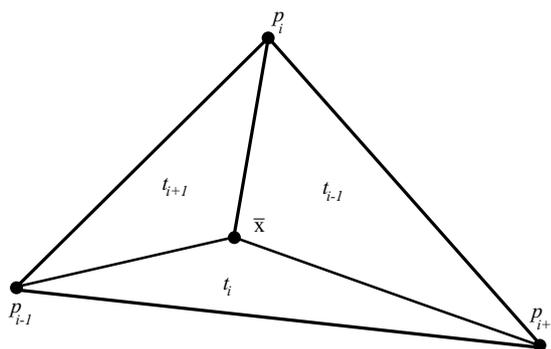


Figura 10 – Triângulo T formado pelos pontos p_{i-1}, p_i e p_{i+1} . O vértice $\bar{x} \in T$, e os triângulos t_j , $j = i - 1, i, i + 1$ delimitados pelo triângulo T e os segmentos de reta $\bar{x}p_j$, $j = i - 1, i, i + 1$.

Pela linearidade de φ_j , temos que

$$\varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha_{i-1} \varphi_j(p_{i-1}) + \alpha_i \varphi_j(p_i) + \alpha_{i+1} \varphi_j(p_{i+1}).$$

Se $j \in \{i - 1, i, i + 1\}$ então

$$\varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) = \alpha_j.$$

Por outro lado a área do triângulo t_j pode ser expressa como

$$\text{Area}(t_j) = \frac{1}{2} \|(p_{j-1} - p_{j+1}) \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})\| = \frac{1}{2} \|\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})\|.$$

Assim,

$$\varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{f(\bar{\mathbf{x}})}{2\mathcal{A}},$$

onde

$$\begin{aligned} f : T &\rightarrow \mathbb{R} \\ \bar{\mathbf{x}} &\rightarrow \|\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})\|. \end{aligned}$$

Considere a notação $p_{j+1} = (a_1, b_1, c_1)$, $p_{j-1} = (a_2, b_2, c_2)$, reescrevemos $f(\bar{\mathbf{x}})$:

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = \left\| \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \\ x - a_1 & y - b_1 & z - c_1 \end{pmatrix} \right\| = \|(w_1, w_2, w_3)\|,$$

onde

$$\begin{aligned} w_1 &:= (b_2 - b_1)(z - c_1) - (c_2 - c_1)(y - b_1) \\ w_2 &:= (c_2 - c_1)(x - a_1) - (a_2 - a_1)(z - c_1) \\ w_3 &:= (a_2 - a_1)(y - b_1) - (b_2 - b_1)(x - a_1). \end{aligned}$$

Então,

$$\varphi_j(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}{2\mathcal{A}}.$$

Agora podemos obter o gradiente de φ_j . Suas derivadas parciais são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x}(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{w_2(c_2 - c_1) - w_3(b_2 - b_1)}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial y}(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{w_3(a_2 - a_1) - w_1(c_2 - c_1)}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}(\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{w_1(b_2 - b_1) - w_2(a_2 - a_1)}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \varphi_j &= \frac{1}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})} \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ a_2 - a_1 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})} \{[(p_{j-1} - p_{j+1}) \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] \times (p_{j-1} - p_{j+1})\} \\ &= \frac{1}{2\mathcal{A}f(\bar{\mathbf{x}})} \{[\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] \times \vec{c}_j\}. \end{aligned}$$

Observe que se $J\vec{c}_j = \frac{\{[\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] \times \vec{c}_j\}}{f(\bar{\mathbf{x}})}$, então a tese $\nabla \varphi_j|_T = J\vec{c}_j$; $j = i - 1, i, i + 1$ é verificada. De fato, de acordo com (BAJD; MIHELJ; MUNIH, 2013),

a rotação de um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de um ângulo θ em torno do eixo unitário \vec{e} é dada por

$$\vec{v}' = \cos(\theta)\vec{v} + (1 - \cos(\theta))\langle \vec{e}, \vec{v} \rangle \vec{e} + \sin(\theta) (\vec{e} \times \vec{v}).$$

No nosso caso queremos rotacionar o vetor \vec{c}_j a um ângulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ com respeito ao eixo unitário $\vec{e} = \frac{\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})}{\|\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})\|} = \frac{\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})}{f(\bar{\mathbf{x}})}$, que é perpendicular ao plano que contém o triângulo T . Assim,

$$J\vec{c}_j = \frac{\langle \vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1}), \vec{c}_j \rangle}{[f(\bar{\mathbf{x}})]^2} [\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] + \frac{\{[\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] \times \vec{c}_j\}}{f(\bar{\mathbf{x}})}.$$

Como \vec{e} e \vec{c}_j são ortogonais, então $\langle \vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1}), \vec{c}_j \rangle = 0$ e teremos que

$$J\vec{c}_j = \frac{\{[\vec{c}_j \times (\bar{\mathbf{x}} - p_{j+1})] \times \vec{c}_j\}}{f(\bar{\mathbf{x}})}.$$

2. Defina $\varphi = \varphi_{i-1} + \varphi_i + \varphi_{i+1} : T \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\bar{\mathbf{x}} \in T$, então $\bar{\mathbf{x}} = \alpha_{i-1}p_{i-1} + \alpha_i p_i + \alpha_{i+1}p_{i+1}$ tal que $\alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\mathbf{x}}) &= \varphi_{i-1}(\bar{\mathbf{x}}) + \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}) + \varphi_{i+1}(\bar{\mathbf{x}}) \\ &= \alpha_{i-1} + \alpha_i + \alpha_{i+1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $\bar{\mathbf{x}} \in T$, temos

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = 1 \Rightarrow \nabla\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \Rightarrow \nabla\varphi_{i-1}(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla\varphi_i(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla\varphi_{i+1}(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \text{ em } T.$$

3. Pelo Item 1 deste Lema, temos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla\varphi_{j-1}, \nabla\varphi_{j+1} \rangle &= \frac{1}{4\mathcal{A}^2} \langle J\vec{c}_{j-1}, J\vec{c}_{j+1} \rangle \\ &= \frac{1}{4\mathcal{A}^2} \|J\vec{c}_{j-1}\| \|J\vec{c}_{j+1}\| \cos\theta, \end{aligned}$$

onde θ é o ângulo entre os vetores $J\vec{c}_{j-1}$ e $J\vec{c}_{j+1}$.

Uma vez que J representa uma rotação, ela não altera o tamanho dos vetores, isto é, $\|J\vec{c}_{j-1}\| = \|\vec{c}_{j-1}\|$, $\|J\vec{c}_{j+1}\| = \|\vec{c}_{j+1}\|$. Note, também, que o ângulo interno entre os vetores \vec{c}_{j-1} , \vec{c}_{j+1} é dada por $\theta = \pi - \alpha_j$, onde α_j é o ângulo interno do triângulo T oposto a aresta \vec{c}_j .

Então,

$$\begin{aligned} \langle \nabla\varphi_{j-1}, \nabla\varphi_{j+1} \rangle &= \frac{1}{4\mathcal{A}^2} \|\vec{c}_{j-1}\| \|\vec{c}_{j+1}\| \cos(\pi - \alpha_j) \\ &= \frac{1}{4\mathcal{A}^2} \|\vec{c}_{j-1}\| \|\vec{c}_{j+1}\| [\cos(\pi) \cos(\alpha_j) + \sin(\pi) \sin(\alpha_j)] \\ &= -\frac{1}{4\mathcal{A}^2} \|\vec{c}_{j-1}\| \|\vec{c}_{j+1}\| \cos(\alpha_j) \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{A}^2} \frac{\|\vec{c}_{j-1}\| \|\vec{c}_{j+1}\|}{2} \sin(\alpha_j) \cot(\alpha_j). \end{aligned}$$

Por sua vez, a área \mathcal{A} do triângulo T pode ser expressa como $\frac{\|\vec{c}_{j-1}\| \|\vec{c}_{j+1}\|}{2} \text{sen}(\alpha_j)$.
Portanto,

$$\langle \nabla \varphi_{j-1}, \nabla \varphi_{j+1} \rangle = -\frac{\cot(\alpha_j)}{2\mathcal{A}}.$$

□

O próximo Teorema fornece uma expressão geométrica para o funcional da Energia de Dirichlet. Além disso, garante que o funcional possui apenas um ponto crítico, que é um ponto de mínimo do mesmo. Antes de enuncia-lo, porém, precisamos impor algumas notações e observações para melhor entendimento da demonstração. Seja M uma superfície triangulada.

- $A(M) = \{(i, j) \mid p_i, p_j \text{ formam uma aresta de } M\}$ é o conjunto das arestas de M .
- $V_i = V(p_i)$ é o elo do vértice p_i .
- $\mathcal{T} = \{T \mid T \text{ é um triângulo de } M\}$ é o conjunto dos triângulos de M .
- $\mathcal{A}(T)$ é a área do triângulo $T \in \mathcal{T}$.
- $\text{int}(M) = \{p_i \in (M \setminus \partial M)\}$ é o conjunto dos vértices internos de M .
- Seja $u : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação de S e $T \in \mathcal{T}$, então $\|\nabla u|_T\|^2 = \sum_{i=1}^3 \|\nabla u|_T^i\|^2$ onde u^i são as funções coordenadas de u .
- Como consequência do item anterior temos que $E_D(u) = \sum_{i=1}^3 E_D(u^i)$, ou seja, a Energia de Dirichlet de u é a soma das energias de suas funções coordenadas.

O próximo teorema define a Energia de Dirichlet de uma aplicação $u \in S : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a partir do uso das funções base de Lagrange, onde para cada ponto $p \in M$ tem-se

$$u(p) = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(p),$$

com $u_j = u(p_j)$; e dos resultados demonstrados no lema anterior.

Teorema 2.3. *Seja M uma superfície triangulada e S o conjunto de funções contínuas e lineares por partes sobre M . Então a Energia de Dirichlet de uma aplicação $u \in S : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por*

$$E_D(u) = \frac{1}{8} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|u_i - u_j\|^2. \quad (2.3)$$

Além disso, o minimizador do funcional da Energia é único e satisfaz a equação

$$\nabla_{u_i} E_D(u) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i - u_j) = 0, \quad (2.4)$$

para cada vértice $p_i \in \text{int}(M)$. O somatório na equação 2.3 percorre as arestas de M , e o somatório na equação 2.4 percorre os vértices adjacentes ao vértice p_i , $u_i = u(p_i)$ representa a aplicação u avaliada no vértice p_i e os ângulos α_{ij} , β_{ij} são o ângulos opostos com respeito a aresta $(i, j) \in A(M)$ nos triângulos que são adjacentes por esta aresta (Figura 11).

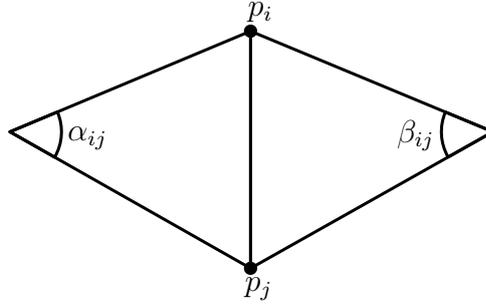


Figura 11 – A aresta (i, j) e seus ângulos opostos α_{ij} e β_{ij} .

Demonstração. Por simplicidade vamos considerar a aplicação $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, posteriormente generalizar para o caso desejado $u : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Já sabemos que $E_D(u) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \|\nabla u|_T\|^2 dx$. Considere $T = \{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$, então

$$\begin{aligned} \|\nabla u|_T\|^2 &= \left\| \sum_{j=i-1}^{i+1} u_j \nabla \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=i-1}^{i+1} |u_j|^2 \|\nabla \varphi_j\|^2 + 2 \sum_{j=i-1}^{i+1} \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq j}}^{i+1} \langle u_j \nabla \varphi_j, u_k \nabla \varphi_k \rangle \\ &= \sum_{j=i-1}^{i+1} \left[|u_j|^2 \|\nabla \varphi_j\|^2 + 2 \sum_{\substack{k=i-1, \\ k \neq j}}^{i+1} \langle u_j \nabla \varphi_j, u_k \nabla \varphi_k \rangle \right]. \end{aligned}$$

Como $\nabla \varphi_{i-1} + \nabla \varphi_i + \nabla \varphi_{i+1} \equiv 0$ em T , temos que

$$\begin{aligned} \|\nabla u|_T\|^2 &= \sum_{j=i-1}^{i+1} \left[|u_j|^2 \langle \nabla \varphi_j, -\nabla \varphi_{j-1} - \nabla \varphi_{j+1} \rangle + 2 \sum_{\substack{k=i-1 \\ k \neq j}}^{i+1} u_j u_k \langle \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_k \rangle \right] \\ &= - \sum_{j=i-1}^{i+1} (|u_{j-1}|^2 - 2u_{j-1}u_{j+1} + |u_{j+1}|^2) \langle \nabla \varphi_{j-1}, \nabla \varphi_{j+1} \rangle \\ &= - \sum_{j=i-1}^{i+1} |u_{j-1} - u_{j+1}|^2 \langle \nabla \varphi_{j-1}, \nabla \varphi_{j+1} \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, a Energia de Dirichlet de u é dada por

$$\begin{aligned} E_D(u) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} E_D(u|_T) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{2} \int_T \|\nabla u|_T\|^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_M \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{j=i-1}^{i+1} |u_{j-1} - u_{j+1}|^2 \langle \nabla \varphi_{j-1}, \nabla \varphi_{j+1} \rangle dx \\ &= \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{j=i-1}^{i+1} |u_{j-1} - u_{j+1}|^2 \frac{\cot(\alpha_j)}{\mathcal{A}(T)} \int_T dx \\ &= \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}} \sum_{j=i-1}^{i+1} |u_{j-1} - u_{j+1}|^2 \cot(\alpha_j), \end{aligned}$$

onde α_j é o ângulo oposto a aresta \vec{c}_j . Se percorrermos o somatório sobre as arestas (i, j) de M para cada aresta teremos o fator $\frac{1}{4}[\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})]|u_i - u_j|^2$ onde α_{ij} e β_{ij} são os ângulos opostos à aresta (i, j) , como na Figura 11. Caso a aresta (i, j) pertença a apenas um triângulo o fator será da forma $\frac{1}{4}[\cot(\alpha_{ij})]|u_i - u_j|^2$ onde α_{ij} é o único ângulo oposto a esta aresta. Portanto,

$$E_D(u) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] |u_i - u_j|^2. \quad (2.5)$$

Agora, se quisermos percorrer o somatório sobre cada vértice $p_i \in M$ e seus vértices adjacentes p_j , $j \in V_i$ a Energia de Dirichlet será reescrita como

$$E_D(u) = \frac{1}{8} \sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] |u_i - u_j|^2,$$

o somatório precisou ser multiplicado por $\frac{1}{2}$, pois ao percorrer o vértice i e depois o vértice $j \in V_i$ contamos a aresta (i, j) duas vezes. Dessa forma se $p_i \in \text{int}(M)$ e $u_i = u(p_i)$, a derivada parcial da Energia de Dirichlet com respeito a u_i pode ser expressa da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_i} E_D(u) &= \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial u_i} \left[\sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i - u_j)^2 \right] \\ &= \frac{1}{8} \sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \frac{\partial}{\partial u_i} [(u_i - u_j)^2] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i - u_j) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})] (-1)(u_j - u_i) \right]. \end{aligned}$$

Já que as arestas (i, j) e (j, i) são as mesmas, exceto por uma questão de orientação, os ângulos opostos à elas são os mesmos, isto é, $[\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] = [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})]$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial u_i} E_D(u) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i - u_j). \quad (2.6)$$

Agora, se $u = (u^1, u^2, u^3) : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, temos que

$$E_D(u) = \sum_{k=1}^3 E_D(u^k),$$

e utilizando a Equação 2.5 temos

$$\begin{aligned} E_D(u) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] |u_i^k - u_j^k|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \sum_{k=1}^3 |u_i^k - u_j^k|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|u_i - u_j\|^2, \end{aligned}$$

onde u_i^k é o valor da k -ésima função coordenada da aplicação u no vértice p_i e os ângulos α_{ij}, β_{ij} são os ângulos opostos a aresta (i, j) .

Assim, se $p_i \in \text{int}(M)$ e $u_i = (u^1(p_i), u^2(p_i), u^3(p_i))$ é o valor da aplicação u sobre o vértice p_i então o gradiente da Energia com respeito a u_i é expresso como

$$\nabla_{u_i} E_D(u) = \left(\frac{\partial}{\partial u_i^1} E_D(u), \frac{\partial}{\partial u_i^2} E_D(u), \frac{\partial}{\partial u_i^3} E_D(u) \right)$$

e, pela equação 2.6, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{u_i} E_D(u) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i^1 - u_j^1, u_i^2 - u_j^2, u_i^3 - u_j^3) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (u_i - u_j). \end{aligned}$$

□

Para cada vértice p_i , a equação do funcional da Energia de Dirichlet pode ser geometricamente interpretada como uma condição de equilíbrio para ponderar as arestas em torno deste vértice, onde o peso de cada aresta depende unicamente dos ângulos na base da superfície M , ou seja, os pesos dependem apenas da estrutura conforme de M .

Outra importante observação é que a equação do funcional da Energia de Dirichlet é a soma de equações quadráticas, logo ela por si só é uma equação quadrática. Portanto, o funcional possui apenas um ponto crítico e é seu ponto de mínimo. Logo existe uma única aplicação $u = u_{min}$ que minimiza o funcional da Energia de Dirichlet, e como consequência

$$\nabla_{u_i} E_D(u_{min}) = 0$$

para toda variável $u_i = u(p_i)$, onde p_i pertence ao interior da superfície triangulada M .

2.3 Área Discreta

Nesta seção encontraremos uma expressão geométrica para o funcional da Área que será relacionada com a expressão do funcional da Energia de Dirichlet (Teorema 2.3).

Definição 2.4. *Seja M uma superfície triangulada e $S = \{u : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid u \in C^0(M) \text{ e } u \text{ é linear em cada triângulo de } M\}$ o espaço de funções contínuas, lineares por partes sobre M . Então o funcional da Área é dado por*

$$\begin{aligned} \text{Area} : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longrightarrow \text{Area}(u(M)) = \int_M \det(\text{Jacobiano}(u(\mathbf{x}))) \, d\mathbf{x}; \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in M. \end{aligned}$$

Note que, se $u = id|_M$ a aplicação identidade restrita a M , então $\text{Area}(u(M)) = \text{Area}(M)$.

Assim como para o funcional da Energia de Dirichlet, para calcular o funcional da Área iremos inicialmente estudar este funcional num triângulo da superfície triangulada para posteriormente obter o funcional em toda a superfície.

Lema 2.5. *Seja T um triângulo não degenerado com vértices $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$ e ângulos $\{\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}\}$ como na Figura 12. Uma vez que c_i é a norma do segmento oposto ao ângulo α_i , a área do triângulo T é dada por*

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{4}[(c_{i-1})^2 \cot(\alpha_{i-1}) + (c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1})] \quad (2.7)$$

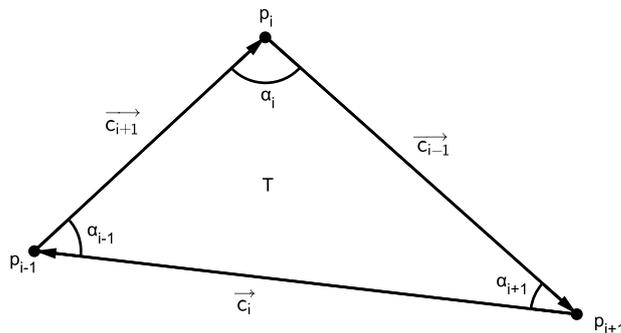


Figura 12 – Triângulo T formado pelos pontos p_{i-1} , p_i e p_{i+1} .

Demonstração. Utilizando as seguintes relações trigonométricas

$$\mathcal{A}(T) = \frac{c_{i-1}c_i \text{sen}(\alpha_{i+1})}{2} = \frac{c_{i-1}c_{i+1} \text{sen}(\alpha_i)}{2} = \frac{c_i c_{i+1} \text{sen}(\alpha_{i-1})}{2}$$

e a Lei dos Senos

$$\frac{\text{sen}(\alpha_{i-1})}{c_{i-1}} = \frac{\text{sen}(\alpha_i)}{c_i} = \frac{\text{sen}(\alpha_{i+1})}{c_{i+1}}$$

a área do triângulo pode ser obtida por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T) &= c_i \left[\frac{c_i \text{sen}(\alpha_{i-1})}{\text{sen}(\alpha_i)} \right] \left[\frac{\text{sen}(\alpha_{i+1})}{2} \right] \\ &= (c_i)^2 \frac{\text{sen}(\alpha_{i-1}) \text{sen}(\alpha_{i+1})}{2 \text{sen}(\alpha_i)} \\ &= (c_i)^2 \frac{-\cos(\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}) + \cos(\alpha_{i-1}) \cos(\alpha_{i+1})}{2 \text{sen}(\alpha_i)}. \end{aligned}$$

Como α_{i-1} , α_i , α_{i+1} são os ângulos internos de um triângulo, temos que

$$\begin{aligned}\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1} &= \pi - \alpha_i \\ \Downarrow \\ \cos(\alpha_{i-1} + \alpha_{i+1}) &= \cos(\pi - \alpha_i) = -\cos(\alpha_i)\end{aligned}$$

Daí,

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2} \left[(c_i)^2 \frac{\cos(\alpha_i)}{\text{sen}(\alpha_i)} + (c_i)^2 \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \cos(\alpha_{i+1})}{\text{sen}(\alpha_i)} \right] \quad (2.8)$$

De maneira semelhante podemos obter

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{2} \left[(c_{i+1})^2 \frac{\cos(\alpha_{i+1})}{\text{sen}(\alpha_{i+1})} + (c_{i+1})^2 \frac{\cos(\alpha_{i-1}) \cos(\alpha_i)}{\text{sen}(\alpha_{i+1})} \right] \quad (2.9)$$

Somando as equações 2.8 e 2.9, obtemos

$$\begin{aligned}2\mathcal{A}(T) &= \frac{1}{2} \left\{ (c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) + \cos(\alpha_{i-1}) \left[(c_i)^2 \frac{\cos(\alpha_{i+1})}{\text{sen}(\alpha_i)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (c_{i+1})^2 \frac{\cos(\alpha_i)}{\text{sen}(\alpha_{i+1})} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) + (c_{i-1})^2 \cos(\alpha_{i-1}) \left[\frac{[\text{sen}(\alpha_i)]^2}{[\text{sen}(\alpha_{i-1})]^2} \frac{\cos(\alpha_{i+1})}{\text{sen}(\alpha_i)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{[\text{sen}(\alpha_{i+1})]^2}{[\text{sen}(\alpha_{i-1})]^2} \frac{\cos(\alpha_i)}{\text{sen}(\alpha_{i+1})} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left[(c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) + (c_{i-1})^2 \frac{\cot(\alpha_{i-1})}{\text{sen}(\alpha_{i-1})} \text{sen}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) + (c_{i-1})^2 \frac{\cot(\alpha_{i-1})}{\text{sen}(\alpha_{i-1})} \text{sen}(\pi - \alpha_{i-1}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) + (c_{i-1})^2 \cot(\alpha_{i-1}) \right] \\ &\quad \Downarrow \\ \mathcal{A}(T) &= \frac{1}{4} \left[(c_{i-1})^2 \cot(\alpha_{i-1}) + (c_i)^2 \cot(\alpha_i) + (c_{i+1})^2 \cot(\alpha_{i+1}) \right]. \quad (2.10)\end{aligned}$$

□

Proposição 2.6. *Seja M uma superfície triangulada com vértices $\{p_j\}$. Então, se M não possui triângulos degenerados, sua área é dada por*

$$\text{Area}(M) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|p_i - p_j\|^2, \quad (2.11)$$

onde α_{ij} e β_{ij} são os ângulos opostos à aresta formada pelos vértices p_i e p_j (Figura 11).

Demonstração. Seja M uma superfície triangulada de vértices $\{p_j\}$, sem triângulos degenerados. Então

$$Area(M) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathcal{A}(T)$$

ou seja, a área de M é a soma das áreas dos triângulos $T \in \mathcal{T}$ formado pelos vértices $\{p_{i-1}, p_i, p_{i+1}\}$, como na figura 12.

Sabendo que c_j é a norma do segmento oposto ao ângulo α_j do vértice p_j , o lema 2.5 mostra que

$$\mathcal{A}(T) = \frac{1}{4} \left[\|p_{i+1} - p_i\|^2 \cot(\alpha_{i-1}) + \|p_{i+1} - p_{i-1}\|^2 \cot \alpha_i + \|p_i - p_{i-1}\|^2 \cot(\alpha_{i+1}) \right]$$

e, substituindo o somatório sobre os triângulos pelo somatório nas arestas da triangulação, obtemos

$$Area(M) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|p_i - p_j\|^2.$$

□

Afim de obter uma caracterização para uma superfície mínima discreta vamos utilizar a definição a seguir, que estabelece quando uma superfície é mínima de acordo com o funcional da Área, e a Proposição 2.8, que fornece uma caracterização geométrica para o funcional da Área. Relacionando-as conseguimos um sistema de equações lineares que devem ser satisfeitas afim de que uma superfície triangulada M seja mínima.

Definição 2.7. *Uma superfície triangulada M é dita Superfície Mínima Discreta se o funcional da Área da aplicação identidade $id|_M$ é crítico com respeito a variações de qualquer conjunto de vértices interiores de M , ou seja, $\nabla_p Area(id|_M) = 0$ para todo $p \in int(M)$.*

Proposição 2.8. *Se $M \in \mathbb{R}^3$ é uma Superfície Mínima Discreta, então ela satisfaz a equação*

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i - p_j) = 0. \quad (2.12)$$

Demonstração. Seja M uma Superfície Mínima Discreta. Reescrevendo a equação 2.11 da proposição 2.6, temos

$$Area(M) = \frac{1}{8} \sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|p_i - p_j\|^2.$$

Tomando $p_i = (p_i^k)_{k=1,2,3} \in int(M)$ temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i^k} Area(M) &= \frac{1}{8} \sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \frac{\partial}{\partial p_i^k} (\|p_i - p_j\|^2) \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i^k - p_j^k) + \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})] (-1)(p_j^k - p_i^k) \right]. \end{aligned}$$

Uma vez as arestas (i, j) e (j, i) são as mesmas, exceto por uma questão de orientação, os ângulos opostos à elas também são os mesmos e $[\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] = [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})]$.

Como $\nabla_{p_i} Area(M) = \left[\frac{\partial}{\partial p_i^k} Area(M) \right]_{k=1,2,3}$ temos que

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i - p_j).$$

Pela definição 2.7, como M é mínima então $\nabla_{p_i} Area(M) = 0, \forall p_i \in \text{int}(M)$. Então

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i - p_j) = 0.$$

□

2.4 Energia de Dirichlet e Área

Nesse ponto é necessário que o leitor perceba a diferença entre a equação 2.3 e a equação 2.11 que definem, respectivamente, o funcional da Energia de Dirichlet e o funcional da Área como a soma finita de equações lineares. Em ambas, os ângulos são tomados com relação a superfície do domínio M , mas os vértices relacionados na equação 2.3 são os vértices da imagem $u(M)$ enquanto na equação 2.11 os vértices relacionados no somatório são da superfície do domínio M . Porém, quando a superfície é mínima podemos relacionar os dois funcionais.

Proposição 2.9. *Sejam M uma superfície triangulada e S o conjunto de aplicações contínuas e lineares por partes sobre M . Assim,*

$$Area(M) = E_D(id|_M). \quad (2.13)$$

Consequentemente, para cada vértice $p_i \in \text{int}(M)$

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \nabla_{p_i} E_D(id|_M).$$

E mais, M é uma Superfície Mínima Discreta se, e somente se,

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \nabla_{p_i} E_D(id|_M) = 0.$$

Demonstração. Seja $M \in \mathbb{R}^3$ uma superfície triangulada e S . Pela Proposição 2.6 temos que

$$Area(M) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \|p_i - p_j\|^2,$$

onde α_{ij}, β_{ij} são os ângulos opostos a aresta $(i, j) \in A(M)$.

Por outro lado, a equação 2.3 do Teorema 2.3, nos dá

$$E_D(id|_M) = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \|id(p_i) - id(p_j)\|^2$$

$$\begin{aligned} & \Updownarrow \\ E_D(id|_M) &= \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) \|p_i - p_j\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, $Area(M) = E_D(id|_M)$, como desejado.

Agora, seja p_i um vértice interior de M , pela Proposição 2.8

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (p_i - p_j)$$

e a equação 2.4 do Teorema 2.3 garante que

$$\nabla_{id(p_i)} E_D(id|_M) = \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (id(p_i) - id(p_j)) = 0$$

$$\begin{aligned} & \Updownarrow \\ \nabla_{p_i} E_D(id|_M) &= \frac{1}{2} \sum_{j \in V_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (p_i - p_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla_{p_i} Area(M) = \nabla_{p_i} E_D(id|_M) = \frac{1}{2} \sum_{p_j \in V_i} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}) (p_i - p_j).$$

Como a Definição 2.7 nos garante que M é mínima se, e so se,

$$\nabla_{p_i} Area(M) = 0, \quad \forall p_i \in int(M),$$

como consequência do que acabamos de demonstrar

$$M \text{ é mínima} \Leftrightarrow \nabla_{p_i} Area(M) = E_D(id|_M) = 0.$$

□

Concluimos que uma superfície triangulada M é mínima se, e somente se,

$$\nabla_{p_i} E_D(id|_M) = \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in A(M)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i - p_j) = 0 \quad \forall p_i \in int(M).$$

A partir deste fato, no próximo capítulo, vamos desenvolver nosso algoritmo para obter superfícies mínimas discretas.

3 Aspectos Numéricos

3.1 O Algoritmo

Agora iremos utilizar o método sugerido por (PINKALL; POLTHIER, 1993) para definir uma sequência de superfícies trianguladas, e mostrar que a sequência converge para uma Superfície Mínima Discreta. É necessário definirmos previamente:

- $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ um conjunto de curvas fechadas, a fronteira que será fixada;
- M_0 uma superfície triangulada, tal que $\partial M_0 = \Gamma$, uma aproximação inicial.

A sequência (M_k) é determinada da seguinte forma, $M_{k+1} = u_{min_k}(M_k)$, e u_{min_k} é o mínimo do funcional da Energia de Dirichlet em

$$S_k = \{u : M_k \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid u \in C^0(M_k) \text{ e } u \text{ é linear em cada triângulo de } M_k\}.$$

O Problema: De acordo com a Proposição 2.9 M é uma Superfície Mínima Discreta $\Leftrightarrow Area(M) = E_D(id|_M)$ e $\nabla_p Area(M) = \nabla_p E_D(id|_M) = 0 \forall p \in int(M)$. Dadas Γ e M_0 vamos buscar uma superfície M^* no conjunto

$$\mathbb{M} = \{M \subset \mathbb{R}^3 \mid \partial M = \Gamma \text{ e } M \text{ possui a mesma topologia de } M_0\}.$$

de forma que $\nabla_p E_D(id|_{M^*}) = 0$ para todo $p \in int(M^*)$.

Note que precisamos de uma superfície inicial M_0 para determinarmos uma topologia inicial, e não é permitida nenhuma mudança topológica entre a superfície inicial M_0 e a Superfície Mínima Discreta resultante do algoritmo proposto por Pinkall e Polthier.

Para obtermos a próxima superfície triangulada da sequência seguiremos o esquema:

$$\begin{array}{c} M_k \\ \Downarrow \\ u_{min_k} \in S_k; \nabla_p E_D(u_{min_k}) = 0 \forall p \in int(M_k) \\ \Downarrow \\ M_{k+1}. \end{array}$$

Depois de determinada a superfície triangulada $M_k \in \mathbb{M}$ para obter a superfície seguinte precisamos encontrar u_{min_k} , o mínimo do funcional da Energia de Dirichlet no espaço S_k . Daí os pontos da superfície M_{k+1} são definidos pelo conjunto

$$\{u_{min_k}(int(M_k)) \cup \partial M_k\},$$

com a mesma topologia da superfície M_0 .

Este processo repete-se até que o critério de convergência

$$|Area(M_{k+1}) - Area(M_k)| < \epsilon$$

seja satisfeito para um dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Pelas equações 2.1, 2.13 temos que:

$$E_D(u_{min_{k-1}}) \geq Area(M_k) = E_D(id|_{M_k}) \geq E_D(u_{min_k}) \geq Area(M_{k+1}),$$

↓

$$\begin{cases} -E_D(u_{min_{k-1}}) \leq -Area(M_{k+1}) \\ E_D(u_{min_k}) \leq Area(M_k) \end{cases}$$

↓

$$0 \leq E_D(u_{min_k}) - E_D(u_{min_{k-1}}) \leq Area(M_{k+1}) - Area(M_k).$$

Portanto, faz sentido utilizarmos $|Area(M_{k+1}) - Area(M_k)| < \epsilon$ como critério de convergência.

No que segue, iremos mostrar que para encontrar os pontos $\{u_{min_k}(int(M_k))\}$ basta resolver um sistema linear positivo definido; ou seja, para determinar os pontos da superfície M_{k+1} basta resolver um sistema linear que possui única solução.

Considere a triangulação de $M_k \in \mathbb{M}$ com pontos $P = \{p_1, \dots, p_B, p_{B+1}, \dots, p_{B+I}\}$ onde $p_i \in \partial M_k$ para $i \leq B$ e $p_i \in int(M_k)$ quando $i > B$. Como os pontos da fronteira são fixados, defina $X = [p_1, \dots, p_B, x_{B+1}, \dots, x_{B+I}]$ a triangulação de M_{k+1} e a matriz $S \in M_{B+I}(\mathbb{R})$ da seguinte forma: para $i \neq j$, defina

$$S_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] & ; (i, j) \in A(M_k) \\ 0 & ; (i, j) \notin A(M_k), \end{cases}$$

onde α_{ij}, β_{ij} são os ângulos opostos a aresta $(i, j) \in A(M_k)$. E na diagonal, defina

$$S_{ii} = \sum_{j \neq i} (-S_{ij}).$$

Note que os ângulos α_{ij}, β_{ij} dependem da geometria da superfície triangulada M_k , logo ela é alterada a cada iteração do processo. E mais, a matriz S é simétrica uma vez $[\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] = [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})]$, como já foi visto no capítulo anterior. Se a aresta (i, j) só pertencer a um triângulo de M_k , então umas das cotangentes será nula (não existe).

Podemos reescrever a Equação 2.2 utilizando a matriz S

$$\begin{aligned}
E_D(u_{\min_k}) &= \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in A(M_k)} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] \|u_i - u_j\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{B+I} (-S_{ij}) (\|u_i\|^2 - 2\langle u_i, u_j \rangle + \|u_j\|^2) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j=1}^{B+I} (-S_{ij}) \|u_i\|^2 + 2 \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle + \sum_{i,j=1}^{B+I} (-S_{ij}) \|u_j\|^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{B+I} \|u_i\|^2 \left[\sum_{j=1}^{B+I} (-S_{ij}) \right] + 2 \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle + \sum_{j=1}^{B+I} \|u_j\|^2 \left[\sum_{i=1}^{B+I} (-S_{ij}) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{B+I} \|u_i\|^2 \left[-S_{ii} + \sum_{j \neq i} (-S_{ij}) \right] + 2 \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{B+I} \|u_j\|^2 \left[-S_{jj} + \sum_{i \neq j} (-S_{ij}) \right] \right\} \\
&= \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle.
\end{aligned}$$

Onde $u_i = u_{\min_k}(p_i)$ é o valor da aplicação u_{\min_k} sobre o vértice p_i , $A(M_k)$ é o conjunto das arestas da superfície M_k e os ângulos α_{ij} e β_{ij} são os ângulos oposto a aresta $(i, j) \in A(M_k)$.

Por outro lado, se considerarmos $U = [u_i^j]$ onde $u_i^j = u_{\min_k}^j(p_i)$ é o valor da j -ésima função coordenada de u_{\min_k} sobre o vértice p_i , temos que

$$\begin{aligned}
U^T S U &= \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_{B+I}^1 \\ u_1^2 & \dots & u_{B+I}^2 \\ u_1^3 & \dots & u_{B+I}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1,1} & \dots & S_{1,B+I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{B+I,1} & \dots & S_{B+I,B+I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & u_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{B+I}^1 & u_{B+I}^2 & u_{B+I}^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{B+I} u_i^1 S_{i1} & \sum_{i=1}^{B+I} u_i^1 S_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{B+I} u_i^1 S_{iB+I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{B+I} u_i^3 S_{i1} & \sum_{i=1}^{B+I} u_i^3 S_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{B+I} u_i^3 S_{iB+I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{B+I}^1 & \dots & u_{B+I}^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{B+I} u_j^1 \left(\sum_{i=1}^{B+I} u_i^1 S_{ij} \right) & \dots & \sum_{j=1}^{B+I} u_j^3 \left(\sum_{i=1}^{B+I} u_i^1 S_{ij} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{B+I} u_j^1 \left(\sum_{i=1}^{B+I} u_i^3 S_{ij} \right) & \dots & \sum_{j=1}^{B+I} u_j^3 \left(\sum_{i=1}^{B+I} u_i^3 S_{ij} \right) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^1 u_j^1 S_{ij} & \dots & \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^1 u_j^3 S_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^3 u_j^1 S_{ij} & \dots & \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^3 u_j^3 S_{ij} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(U^T S T) &= \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^1 u_j^1 S_{ij} + \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^2 u_j^2 S_{ij} + \sum_{i,j=1}^{B+I} u_i^3 u_j^3 S_{ij} \\
 &= \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} (u_i^1 u_j^1 + u_i^2 u_j^2 + u_i^3 u_j^3) \\
 &= \sum_{i,j=1}^{B+I} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle .
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{tr}(U^T S U) = E_D(u_{\min_k})$$

Como consequência, seja u_i^j o valor da j -ésima função coordenada de u_{\min_k} sobre o vértice p_i , o gradiente da Energia de Dirichlet com respeito a variável u_i é expresso da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \nabla_{u_i} E_D(u_{\min_k}) &= \left[\frac{\partial}{\partial u_i^1} E_D(u_{\min_k}), \frac{\partial}{\partial u_i^2} E_D(u_{\min_k}), \frac{\partial}{\partial u_i^3} E_D(u_{\min_k}) \right] = \left[\frac{\partial}{\partial u_i^j} E_D(u_{\min_k}) \right] \\
 &= 2 \sum_{l=1}^{B+I} S_{il} (u_l^1, u_l^2, u_l^3) \\
 &= 2 \sum_{l=1}^{B+I} S_{il} U_l,
 \end{aligned}$$

onde U_l representa a linha l da matriz U .

Como a triangulação de M_{k+1} é dada por $X = [p_1, \dots, p_B, x_{B+1}, \dots, x_{B+I}]$ e $u_{\min_k} : M_k \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação que minimiza o funcional da Energia de Dirichlet sobre S_k o espaço de funções contínuas e lineares por partes sobre M_k , temos que

$$\nabla_{x_i} E_D(u_{\min_k}) = 2 \left(\sum_{j=1}^B S_{ij} p_j + \sum_{j=B+1}^{B+I} S_{ij} x_j \right) = \vec{0},$$

onde o zero no lado direito da equação é o vetor nulo de \mathbb{R}^3 .

Na formulação do nosso problema os pontos de fronteira ficam fixos, logo a direção de variação será dada por $\tilde{\mathbf{X}} = [0, \dots, 0, x_{B+1}, \dots, x_{B+I}]$. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{X}}} E_D(u_{\min_k})|_{X=P} = Q,$$

onde $Q \in M_{B+I,3}(\mathbb{R})$ é definida como

$$\begin{cases} Q_i = [0 \ 0 \ 0] & ; i \leq B \\ Q_i = [2 \sum_{j=1}^B S_{ij} p_j + \sum_{j=B+1}^{B+I} S_{ij} x_j] & ; i > B \end{cases} ,$$

sendo Q_i é a i -ésima linha da matriz Q .

Portanto, encontrar a próxima superfície da sequência se resume a resolução do sistema linear

$$S^{II}x = -S^{IB}p \quad (3.1)$$

onde $x = [x_{B+1}, \dots, x_{B+I}]$, $p = [p_1, \dots, p_B]$, e S^{II} , S^{IB} são submatrizes de S , relacionado os vértices internos (I) e os vértices da fronteira (B)(Figura 13), ou seja, $S^{II} = [S]_{ij}; B+1 \leq i, j \leq B+I$ e $S^{IB} = [S]_{ij}; B+1 \leq i \leq B+I, 1 \leq j \leq B$.

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \dots & B & B+1 & \dots & B+I \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ \hline & & & \\ & & & \\ \hline & & S^{IB} & \\ & & & S^{II} \\ & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} 1 \\ \dots \\ B \\ B+1 \\ \dots \\ B+I \end{array} \end{array}$$

Figura 13 – Formato da matriz de cotangentes S .

Proposição 3.1. *O sistema $S^{II}x = -S^{IB}p$ obtido na Equação 3.1 possui solução e ela é única, se os ângulos internos dos triângulos da superfície M pertencem ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.*

Demonstração. De fato, note que a matriz S é simétrica já que

$$[\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] = [\cot(\alpha_{ji}) + \cot(\beta_{ji})]$$

e também é positiva definida, já que

$$U^T S U = 0 \Leftrightarrow \sum_{p_i \in M} \sum_{j \in V_i} S_{ij} \langle u_i, u_j \rangle = 0$$

onde 0 representa a matriz nula 3×3 . Agora, como todos ângulos internos dos triângulos pertencem ao intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$, temos que $\langle u_i, u_j \rangle > 0 \forall p_i \in M, j \in V_i$. Portanto $U^T S U = 0 \Leftrightarrow U = 0 \in \mathbb{R}^{(B+I) \times 3}$.

E, da forma que é definida a submatriz S^{II} de S , podemos afirmar que ela também é simétrica positiva definida, basta tomar U_I com os vértices internos de M e notar que $U_I^T S^{II} U_I = 0$ se, e somente se, $U_I = 0 \in \mathbb{R}^{I \times 3}$. Portanto o sistema linear

$$S^{II}x = -S^{IB}p$$

(Eq. 3.1) é simétrico positivo definido, e podemos afirmar que ele possui solução e ela é única. \square

O esquema para obter a próxima superfície triangulada da sequência pode ser reescrito como:

$$M_k$$

$$\Downarrow$$

$$Ax = b; \quad A = S^{II} \text{ e } b = -S^{IB}p$$

$$\Downarrow$$

$$M_{k+1}$$

Determinada a superfície triangulada M_k , para obtermos os vértices internos da superfície M_{k+1} basta resolvermos o sistema linear de solução única $Ax = p$, onde $A = S^{II}$ e $b = -S^{IB}p$, que dependem da geometria da superfície M_k . Para resolvermos este sistema, utilizaremos o Gradiente Conjugado, que será exibido na próxima seção deste capítulo.

Desta forma, nosso algoritmo seguirá os seguintes passos:

1. Dados uma união de curvas fechadas $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tome uma superfície $M_0 \subset \mathbb{R}^3$, onde $\partial M_0 = \Gamma$, como aproximação inicial da superfície mínima M^* que possui Γ como fronteira.
2. Calcular os vértices internos de M_{k+1} a partir da solução do sistema linear de solução única

$$Ax = b; \quad A = S^{II} \text{ e } b = -S^{IB}p.$$

Os vértices da fronteira são fixos, $\partial M_{k+1} = \partial M_0$.

3. Se $|Area(M_k) - Area(M_{k+1})| < \epsilon$, então a superfície M_{k+1} é a superfície mínima desejada, isto é, $M^* = M_{k+1}$. Caso contrário, voltamos ao passo 2.

A convergência do algoritmo tem grande dependência com relação a superfície inicial tomada, ela deve ser bem estruturada em se tratando de ângulos, se os ângulos internos de seus triângulos forem próximos ou maiores que 90° graus o algoritmo pode se portar de forma indesejada, principalmente no momento em que usamos o Gradiente Conjugado para solucionar o sistema linear, gerando degenerações nas superfícies obtidas ao longo do algoritmo.

Proposição 3.2. *Se não houver triângulos degenerados em nenhuma superfície da sequência (M_k) o algoritmo converge para a solução do problema.*

Demonstração. Dizer que não se tem triângulos degenerados significa, por definição, que os ângulos de todos triângulos em toda superfície M_k são uniformemente limitados entre 0 e π . Assim, estamos trabalhando sobre um conjunto compacto de superfícies.

Por construção, as sequências $\{Area(M_k)\}$ e $\{E_D(u^k)\}$ são monótonas decrescentes e limitadas. Pela Equação 2.1, temos

$$\begin{aligned} Area(M_k) &= E_D(id|_{M_k}) \\ &\geq E_D(u_{min_{k-1}}) \\ &= Area(M_{k+1}) + E_C(u_{min_{k-1}}) \\ &\geq Area(M_{k+1}) \\ &= E_D(u_{min_k}), \end{aligned}$$

onde u_{min_i} é o mínimo do funcional da Energia de Dirichlet sobre o conjunto S_i das funções contínuas e lineares por partes sobre M_i . Temos então que

$$\begin{cases} 0 \leq Area(M_{k+1}) \leq Area(M_k) \leq Area(M_0) \\ 0 \leq E_D(u_{min_k} : M_k \rightarrow M_{k+1}) \leq E_D(u_{min_{k-1}} : M_{k-1} \rightarrow M_k) \leq E_D(u_{min_0} : M_0 \rightarrow M_1). \end{cases}$$

Então, a sequência (M_k) possui uma subsequência convergente uniformemente para uma superfície triangulada $M^* \in \mathbb{M}$, isto é, $|M_k - M^*| \rightarrow 0$, onde a norma utilizada é o máximo da distância entre os vértices correspondentes. Resta mostrarmos que M^* é uma Superfície Mínima Discreta. Seja

$$\begin{aligned} F_k : \mathbb{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longrightarrow F_k(M) := E_D(u : M_k \rightarrow M) = \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \|\nabla u|_T\|^2 dx; \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in T. \end{aligned}$$

Note que F_k é um funcional quadrático com mínimo em M_{k+1} , ou seja,

$$\nabla F_k|_{M_{k+1}} = 0.$$

Como estamos minimizando sobre um conjunto compacto de superfícies existe

$$s_{max} = \sup_k \|\nabla^2 F_k\|.$$

Daí, pelo Teorema do Valor Médio, existe $M \in \mathbb{M}$ tal que

$$\begin{aligned} \nabla F_k|_{M_k} &= \nabla F_k|_{M_k} - \nabla F_k|_{M_{k+1}} = \nabla^2 F_k|_M |M_k - M_{k+1}|^2 \\ &\downarrow \\ \nabla F_k|_{M_k} &\leq s_{max} |M_k - M_{k+1}|^2 \end{aligned}$$

Uma vez que $M_k \rightarrow M^*$ uniformemente, temos que

$$\nabla E_D(id|_{M_k}) = \nabla F_k|_{M_k} \rightarrow \nabla E_D(id|_{M^*}) = \nabla F_{|M^*}^* = 0$$

Portanto, a aplicação identidade restrita a M^* é o mínimo da Energia de Dirichlet, e pela Proposição 2.9, concluímos que M^* é uma Superfície Mínima Discreta. □

3.2 O Método do Gradiente Conjugado como Método de Descida Acentuada

Vimos na seção anterior, que nosso problema foi resumido a resolução de um sistema linear $Ax = b$ de única solução, onde a matriz $A = S^{II}$ é simétrica positiva definida. Para tal tarefa vamos utilizar o método do Gradiente Conjugado como um método de Descida (GOLUB; LOAN, 1996). Inicialmente vamos introduzir o que é um método de descida e um método de descida acentuada.

3.2.1 Método de Descida Acentuada

O método de descida é um método de projeção que visa encontrar uma solução aproximada \tilde{x} do sistema linear $Ax = b$ sobre o subespaço $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^n$ chamado subespaço de busca. Se $\dim \mathcal{K} = m$, então necessitamos de m restrições para obtermos nossa aproximação. Dessa forma tomamos m vetores linearmente independentes ortogonais ao vetor resíduo $r = Ax - b$, e o subespaço \mathcal{L} gerado por estes vetores é chamado subespaço de restrições.

Assim, o objetivo é encontrarmos um vetor $\tilde{x} \in \mathcal{K}$ tal que $r = A\tilde{x} - b$ seja ortogonal ao subespaço \mathcal{L} . Vamos obter este vetor através da minimização do funcional $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle y, b \rangle$.

Proposição 3.3. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida e $b \in \mathbb{R}^n$. Então a solução do sistema $Ax = b$ é o único ponto que minimiza o funcional quadrático*

$$f(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle .$$

Demonstração. Considerando uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica positiva definida, então A é inversível e o sistema linear $Ax = b$ possui uma única solução \bar{x} .

Temos que

$$\begin{aligned} f(y) - f(\bar{x}) &= \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle y, b \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, b \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle A\bar{x}, y \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle + \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle A\bar{x}, y \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, y \rangle - \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, y \rangle + \frac{1}{2} \langle A\bar{x}, \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle A(y - \bar{x}), y \rangle - \frac{1}{2} \langle A(y - \bar{x}), \bar{x} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle A(y - \bar{x}), y - \bar{x} \rangle . \end{aligned}$$

Como a matriz A é positiva definida, temos

$\langle A(y - \bar{x}), y - \bar{x} \rangle \geq 0$ e $\langle A(y - \bar{x}), y - \bar{x} \rangle = 0$ se, e somente se, $y = \bar{x}$. Portanto $f(y) > f(\bar{x})$ para todo $y \neq \bar{x}$ e o mínimo de f ocorre em \bar{x} .

□

O objetivo do método de descida é obter uma sequência de iterados $x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ a partir de um chute inicial x^0 , de forma que

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) \text{ ou ainda melhor, que } f(x^{k+1}) < f(x^k),$$

convirja para o mínimo do funcional f .

Para passar do passo x^k para o próximo iterado x^{k+1} é necessário:

1. **Uma direção de busca:** A escolha de um vetor p^k que indicará a direção que vamos avançar de x^k para x^{k+1} .
2. **O comprimento do avanço:** Determinar o comprimento do avanço na direção de busca, que equivale à escolha de um escalar α_k multiplicado pelo vetor de busca p^k .

Assim, teremos

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k.$$

Para encontrarmos o comprimento do avanço faremos a chamada busca exata na reta, uma vez que queremos determinar um ponto α_k na reta $\{x^k + \alpha p^k \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ de forma que

$$f(x^{k+1}) = f(x^k + \alpha_k p^k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^k + \alpha p^k).$$

Proposição 3.4. *Considere o sistema $Ax = b$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida, $b \in \mathbb{R}^n$, o funcional f de modo que $f(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle$ e α_k de modo que $\alpha_k = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} f(x^k + \alpha p^k)$. Então,*

$$\alpha_k = \frac{\langle p^k, r^k \rangle}{\langle p^k, Ap^k \rangle}.$$

Demonstração. Considerando todas as hipóteses da proposição, defina agora o funcional

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\rightarrow f(x^k + \alpha p^k). \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que o funcional g nada mais é que uma equação de segundo grau em α e que seu mínimo ocorre em $\alpha_k = \frac{\langle p^k, r^k \rangle}{\langle p^k, Ap^k \rangle}$ como desejado. Note que,

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \frac{1}{2} \langle A(x^k + \alpha p^k), x^k + \alpha p^k \rangle - \langle b, x^k + \alpha p^k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax^k, x^k \rangle - \langle b, x^k \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle Ap^k, x^k \rangle + \frac{\alpha}{2} \langle Ax^k, p^k \rangle \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{2} \langle Ap^k, p^k \rangle - \alpha \langle b, p^k \rangle \\ &= f(x^k) + \alpha [\langle Ax^k, p^k \rangle - \langle b, p^k \rangle] + \frac{\alpha^2}{2} \langle Ap^k, p^k \rangle \\ &= f(x^k) - \alpha \langle r^k, p^k \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle Ap^k, p^k \rangle. \end{aligned}$$

Logo o mínimo de g ocorre no ponto $-\frac{b}{2a}$ da parábola $y = a\alpha^2 + b\alpha + c$, que é dado por

$$\alpha_k = \frac{\langle r^k, p^k \rangle}{\langle Ap^k, p^k \rangle}.$$

□

Gostaríamos ainda que x^k seja diferente de x^{k+1} para que tenhamos $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, para isso é necessário que α_k seja diferente de zero. Note que α_k se anula se, e somente se, $\langle p^k, r^k \rangle$ se anular, ou seja, se a direção de busca for ortogonal ao resíduo. Então para conseguirmos o que almejamos devemos escolher uma direção de busca p^k que não seja ortogonal ao resíduo r^k .

O que irá determinar a diferença entre o método de descida acentuada e o método do gradiente conjugado é exatamente a escolha do vetor de busca p^k . Uma escolha mais apropriada fará com que o método convirja mais rápido ou não para solução.

De acordo com o cálculo diferencial a direção que uma função cresce a uma taxa mais rápida é na direção de seu vetor gradiente, portanto se considerarmos o negativo de seu vetor gradiente será a direção em que a função decresce a uma taxa mais rápida. Essa é a ideia do **Método de Descida Mais Acentuada**, onde consideramos a direção de busca como

$$p^k = -\nabla f(x^k) = b - Ax^k = r^k.$$

Então, no método de descida mais acentuada, temos que

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k,$$

onde $\alpha_k = \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle Ar^k, r^k \rangle}.$

Vamos agora, mostrar que o método de descida acentuada converge de fato, e antes de enunciarmos o Teorema que irá provar esse fato vamos enunciar alguns argumentos que vamos utilizar na demonstração de tal Teorema.

Observação 3.5. Se $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ é uma matriz simétrica positiva definida, então ela define um produto interno em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e, conseqüentemente, uma norma em \mathbb{R}^n , dados por:

$$\begin{aligned} \langle, \rangle_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow \langle u, v \rangle_A = \langle u, Av \rangle = \langle Au, v \rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_A: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\rightarrow \|v\|_A = \sqrt{\langle u, u \rangle_A} = \sqrt{\langle u, Au \rangle}. \end{aligned}$$

Definição 3.6. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica positiva definida, $b \in \mathbb{R}^n$ e \bar{x} é a solução do sistema, então definimos o erro algébrico do método de descida acentuada como

$$e^k = \bar{x} - x^k$$

Lema 3.7 (Desigualdade de Kantorovich). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida e λ_{max} , λ_{min} seu maior e menor autovalor, respectivamente. Então*

$$\frac{\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle}{\langle x, x \rangle^2} \leq \frac{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2}{4\lambda_{min}\lambda_{max}}; \text{ para todo } x \neq 0.$$

Lema 3.8. *Seja $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$ obtido através da busca exata na reta. Então,*

$$r^{k+1} \perp p^k$$

e

$$e^{k+1} \perp_A p^k.$$

Corolário 3.9. *Considerando o método de descida acentuada para resolver o sistema linear $Ax = b$, onde A é simétrica positiva definida, temos que*

$$r^{k+1} \perp r^k$$

e

$$e^{k+1} \perp_A r^k.$$

Teorema 3.10. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica positiva definida, λ_{max} , λ_{min} seu maior e menor autovalor, respectivamente. Então o erro algébrico do método de descida acentuada dado por $e^k = \bar{x} - x^k$, satisfaz a estimativa*

$$\|e^k\|_A \leq \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^k \|e^0\|_A.$$

e, portanto, o método de descida acentuada converge qualquer que seja o chute inicial x^0 .

Demonstração. Note que

$$e^{k+1} = \bar{x} - x^{k+1} = \bar{x} - (x^k + \alpha_k r^k) = e^k - \alpha_k r^k.$$

Pelo Corolário 3.9, temos que

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|_A^2 &= \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle_A = \langle e^{k+1}, e^k \rangle_A - \alpha_k \langle e^{k+1}, r^k \rangle_A = \langle e^{k+1}, e^k \rangle_A \\ &= \langle e^{k+1}, Ae^k \rangle = \langle e^{k+1}, r^k \rangle. \end{aligned}$$

Agora utilizando o Lema 3.7,

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|_A^2 &= \langle e^k - \alpha_k r^k, r^k \rangle = \langle e^k, r^k \rangle - \alpha_k \langle r^k, r^k \rangle \\ &= \langle e^k, r^k \rangle \left(1 - \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^k, Ar^k \rangle} \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle e^k, r^k \rangle} \right) \\ &= \langle e^k, Ae^k \rangle \left(1 - \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^k, Ar^k \rangle} \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle A^{-1}r^k, r^k \rangle} \right) \\ &= \|e^k\|_A^2 \left(1 - \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^k, Ar^k \rangle} \frac{\langle r^k, r^k \rangle}{\langle r^k, A^{-1}r^k \rangle} \right) \\ &\leq \|e^k\|_A^2 \left(1 - \frac{4\lambda_{min}\lambda_{max}}{(\lambda_{min} + \lambda_{max})^2} \right) \\ &= \|e^k\|_A^2 \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^2. \end{aligned}$$

Daí segue de imediato que

$$\|e^k\|_A \leq \left(\frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{\lambda_{max} + \lambda_{min}} \right)^k \|e^0\|_A.$$

Logo a sequência de iterados (x^k) converge para a solução \bar{x} qualquer que seja o chute inicial x^0 dado. \square

Devido a problemas de velocidade na convergência do Método de Descida Acentuada foi necessário aprimorá-lo, criando o Método do **Gradiente Conjugado**.

3.2.2 Gradiente Conjugado

Ao longo do Método de Descida Acentuada temos que $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$, assim na k -ésima iteração temos que

$$x^k = x^0 + \alpha_1 p^1 + \dots + \alpha_{k-1} p^{k-1}.$$

A cada iteração, o método minimiza o funcional quadrático f ao longo da reta $\{x^{k-1} + \alpha p_{k-1}\}$ que constitui um pequeno subconjunto do subespaço $x^0 + \langle p^0, p^1, \dots, p^{k-1} \rangle$. No método do Gradiente Conjugado vamos minimizar o funcional f sobre todo o subespaço $x^0 + \langle p^0, p^1, \dots, p^{k-1} \rangle$.

No que segue vamos definir a direção de busca p^k do método Gradiente Conjugado. Por uma pequena manipulação de contas levando em consideração a Proposição 3.3 obtemos o seguinte Teorema:

Teorema 3.11. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida e $b \in \mathbb{R}^n$. Então o funcional quadrático associado ao sistema $Ax = b$ pode ser reescrito da forma*

$$f(y) = \frac{1}{2} \|e\|_A^2 - \frac{1}{2} \|\bar{x}\|_A^2,$$

onde \bar{x} é a solução do sistema $Ax = b$ e $e = \bar{x} - y$ é o erro algébrico. Em particular, minimizar o funcional quadrático equivale a minimizar a A -norma do erro algébrico.

Corolário 3.12. *Em um método de descida minimizar a A -norma do erro algébrico equivale a encontrar uma melhor aproximação do vetor $e^0 = \bar{x} - x^0$ no subespaço $W_m = \langle p^0, p^1, \dots, p^{m-1} \rangle$.*

Demonstração. Considerando o sistema $Ax = b$ e \bar{x} a solução do sistema; em um método de descida no seu k -ésimo passo teremos

$$\begin{aligned} e^k &= \bar{x} - x^k \\ &= \bar{x} - x^0 - (\alpha_0 p^0 + \alpha_1 p^1 + \dots + \alpha_{k-1} p^{k-1}). \\ &= e^0 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p^i. \end{aligned}$$

Então a A -norma do erro algébrico no k -ésimo passo é

$$\|e^k\|_A = \|e^0 - \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p^i\|_A.$$

Portanto, minimizar $\|e^k\|_A$ é o mesmo que buscar a melhor aproximação do vetor e^0 no subespaço gerado pelos vetores de direção de busca dos passos anteriores $\{p^0, p^1, \dots, p^{k-1}\}$. \square

De acordo com o Teorema 3.11 e o Corolário 3.12, encontrar uma boa aproximação da solução \bar{x} do sistema linear $Ax = b$ simétrico positivo definido, equivale a encontrar uma melhor aproximação do vetor $e^0 = \bar{x} - x^0$ no subespaço $W_m = \langle p^0, p^1, \dots, p^{m-1} \rangle$.

E para garantir a existência dessa melhor aproximação e caracterizá-la, basta considerar o Lema da Melhor Aproximação:

Lema 3.13 (Lema de Melhor Aproximação). *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica positiva definida, $v \in \mathbb{R}^n$ e W um subespaço de \mathbb{R}^n . Então, existe um único vetor $w \in W$ que satisfaz*

$$\|v - w\|_A = \min_{z \in W} \|v - z\|_A.$$

E este vetor w pode ser caracterizado como

$$v - w \perp_A W.$$

Agora vamos construir o método Gradiente Conjugado, isto é, determinar a sua direção de busca a cada iteração. De acordo com a Proposição 3.13 precisamos escolher um vetor $p = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i p^i$ de tal forma que

$$e^k = e^0 - p \perp_A p^i; \quad \forall i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Logo, a cada passo desejamos que o erro algébrico seja A -perpendicular à todos vetores de busca anteriores. O Lema 3.8 garante que

$$e^k \perp_A p^{k-1}.$$

ou seja, garantimos que o erro algébrico é A -perpendicular ao último vetor de busca p^{k-1} .

Esquema da construção do Gradiente Conjugado:

1. Dê um chute inicial x^0 e vamos tomar o primeiro p^0 como no método de descida acentuada, ou seja, $p^0 = r^0$.
2. Faça uma busca exata na reta $\{x^0 + tp^0 \mid t \in \mathbb{R}\}$ e determine α_0 definido na Proposição 3.4 como

$$\alpha_0 = \frac{\langle p^0, r^0 \rangle}{\langle p^0, Ap^0 \rangle} = \frac{\langle r^0, r^0 \rangle}{\langle r^0, Ar^0 \rangle}$$

Assim, $x^1 = x^0 + \alpha_0 p^0$.

3. Determinar p^1 :

O Lema 3.8 nos garante que $e^1 \perp_A p^0$, e considerando que será feita uma busca exata na reta, também teremos que $e^2 \perp_A p^1$. Como

$$e^2 = \bar{x} - x^2 = e^1 - \alpha_1 p^1.$$

↓

$$\langle e^2, p^0 \rangle_A = \langle e^1, p^0 \rangle_A - \alpha_1 \langle p^1, p^0 \rangle_A = -\alpha_1 \langle p^1, p^0 \rangle_A.$$

Logo, para que tenhamos $e^2 \perp_A p^0$, basta que p^1 seja conjugado a p^0 . Para isso vamos escolher

$$p^1 = r^1 - \frac{\langle r^1, p^0 \rangle_A}{\langle p^0, p^0 \rangle_A} p^0,$$

onde $\langle r^1, p^0 \rangle_A / \langle p^0, p^0 \rangle_A$ é dado pelo algoritmo de Gram-Schmidt.

4. Faça uma busca exata na reta $\{x^1 + tp^1 \mid t \in \mathbb{R}\}$ e determine α_1 como na Proposição 3.4 e $x^2 = x^1 + \alpha_1 p^1$.

5. Determinar p^m :

Seguindo dessa forma, após m iterações teremos $\{x^0, x^1, \dots, x^m\}$ e o m -ésimo erro algébrico satisfazendo

$$e^m \perp_A p^i; \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

Levando em consideração que será feita uma busca exata na reta posteriormente já garantimos que $e^{m+1} \perp_A p^m$. Agora, para todo $i = 1, \dots, m-1$

$$e^{m+1} = e^m - \alpha_m p^m$$

↓

$$\langle e^{m+1}, p^i \rangle_A = \langle e^m, p^i \rangle_A - \alpha_m \langle p^m, p^i \rangle_A$$

↓

$$\langle e^{m+1}, p^i \rangle_A = -\alpha_m \langle p^m, p^i \rangle_A.$$

Portanto, para que $e^{m+1} \perp_A p^i$ para todo $i = 1, \dots, m$ basta que p^m seja A-perpendicular com a todos vetores de busca anteriores. Para isto, tomaremos

$$p^m = r^m - \sum_{i=0}^{m-1} c_{mi} p^i$$

onde os coeficientes $c_{mi} = \langle r^{m+1}, p^i \rangle_A / \langle p^i, p^i \rangle_A$ são dados pelo algoritmo de Gram-Schmidt.

Proposição 3.14. *Os coeficientes c_{mi} utilizados para gerar o vetor de busca p^m no método Gradiente Conjugado são nulos; exceto, talvez, para $i = m$.*

Demonstração. Vamos dar uma ideia da demonstração desta proposição. Inicialmente o leitor deve provar que, após j iterações do Gradiente Conjugado vale

$$\langle p^0, \dots, p^{j-1} \rangle = \langle r^0, \dots, r^{j-1} \rangle = \langle r^0, Ar^0, \dots, A^{j-1}r^0 \rangle := \mathcal{K}_j(A, r^0)$$

Depois, será fácil notar que

$$e^j \perp_A \mathcal{K}_j(A, r^0) \text{ e } r^j \perp \mathcal{K}_j(A, r^0)$$

Uma vez que, para todo $i = 1, \dots, m-1$, temos que $c_{mi} = \langle r^{m+1}, p^i \rangle_A / \langle p^i, p^i \rangle_A$, devemos mostrar que $\langle r^{m+1}, Ap^i \rangle = 0$. Mas $\langle p^0, \dots, p^{m-1} \rangle = \langle r^0, Ar^0, \dots, A^{m-1}r^0 \rangle$, implica que

$$Ap^i \in \langle Ap^0, \dots, Ap^i \rangle = \langle Ar^0, \dots, A^{i+1}r^0 \rangle \subset \mathcal{K}_{i+1}(A, r^0) \subset \mathcal{K}_{m+1}(A, r^0)$$

como $r^{m+1} \perp \mathcal{K}_{m+1}(A, r^0)$ temos que $r^{m+1} \perp Ap^i$. \square

Portando, a cada iteração do método Gradiente Conjugado, teremos

$$x^{m+1} = x^m + \alpha_m p^m,$$

onde α_m é obtida através da busca exata na reta e $p^m = r^{m+1} - \frac{\langle r^{m+1}, p^m \rangle_A}{\langle p^m, p^m \rangle_A}$. Com mais algumas manipulações na equação que define p^m , conseguimos uma formulação que só dependerá dos resíduos e do vetor de busca anterior, dada por

$$p^m = r^{m+1} - \beta_m p^{m-1}; \beta_m = \frac{\langle r^{m+1}, r^{m+1} \rangle}{\langle r^m, r^m \rangle}$$

Teorema 3.15. *Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida. Então o método Gradiente Conjugado converge, no máximo, em n iterações.*

Demonstração. Uma vez que $r^j \perp \mathcal{K}_j(A, r^0) = \langle r^0, r^1, \dots, r^{j-1} \rangle$, depois de $n-1$ iterações com $r^i \neq 0$; $\forall i = 1, \dots, n-1$, temos que os vetores r^0, r^1, \dots, r^{n-1} são linearmente independentes, logo formam uma base ortogonal de \mathbb{R}^n . Depois de mais uma iteração r^n deve satisfazer

$$r^n \perp \langle r^0, r^1, \dots, r^{n-1} \rangle = \mathbb{R}^n$$

\Downarrow

$$r^n = 0$$

\Downarrow

$$b - Ax^n = 0.$$

Portanto, x^n é a solução do sistema. \square

Portanto, se A é uma matriz $n \times n$ simétrica positiva definida, o Gradiente Conjugado converge, no máximo, em n iterações. Na maioria das aplicações o método do Gradiente Conjugado converge ainda mais rápido do que as n iterações, se apenas uma boa aproximação é requerida. O Teorema a seguir garante uma estimativa da velocidade de convergência do método Gradiente Conjugado, sua demonstração será omitida e pode ser encontrada em (GOLUB; LOAN, 1996).

Teorema 3.16. *Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica positiva definida e $b \in \mathbb{R}^n$. Utilizando o Gradiente Conjugado para encontrar a solução do sistema linear $Ax = b$, temos que o erro algébrico do Gradiente conjugado na k -ésima iteração, $e^k = \bar{x} - x^k$, satisfaz*

$$\|e^k\|_A \leq 2\|e^0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k$$

onde $\kappa = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}}$, a razão entre o menor e o maior autovalor de A .

Esta estimativa é bem melhor que a estimativa do método da Descida Acentuada, mostrando que o método do gradiente conjugado é bem mais rápido. Por outro lado, como naquele método, a velocidade de convergência do método Gradiente Conjugado dependerá fortemente da boa ou má condicionalidade da matriz A .

4 Resultados

Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos utilizando o método desenvolvido por (PINKALL; POLTHIER, 1993) para gerar superfícies mínimas discretas como solução do Problema de Plateau. O algoritmo que desenvolvemos durante este trabalho tem como entrada uma superfície inicial cuja fronteira será fixada durante as iterações e, portanto, será a curva que define a Superfície Mínima Discreta. Ao longo do algoritmo é gerada uma sequência de superfícies M_k , de mesma fronteira, cujos vértices são obtidos por meio da solução de um sistema linear.

Todas as rotinas, empregadas para obter os resultados do capítulo anterior, foram desenvolvidas e executadas no MATLAB em um computador com processador Core i7 870 2.93GHz 8MB L3 Cache (Quad-Core), memória 4Gb DDR3 1333Mhz e placa de vídeo PCI-E GeForce 250 GTS 512MB DDR3 (Xfx).

Alguns critérios de comparação foram utilizados para analisar a convergência da sequência de superfícies de mesma fronteira, verificando se os funcionais da Área e da Energia de Dirichlet convergem para o mesmo valor como mostramos no Capítulo 2. Em todos exemplos empregamos a norma da diferença entre a área da superfície obtida na iteração anterior pela área da superfície obtida na iteração atual:

$$E_1 = \|Area(M_{k-1}) - Area(M_k)\|. \quad (4.1)$$

Cabe ressaltar que E_1 , como vimos no capítulo anterior, é utilizado como critério de parada para algoritmo: Se $E_1 = \|Area(M_{k-1}) - Area(M_k)\| < \epsilon$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, então o algoritmo é encerrado. Tomamos $\epsilon = 1E - 04$ como tolerância para nosso critério de parada.

O segundo critério de comparação só poderá ser calculado quando conhecermos a superfície mínima, ou melhor, a área da superfície mínima que é solução do Problema de Plateau com tal fronteira fixada. O critério é obtido tomando a norma da diferença entre a área da superfície obtida a cada iteração e a área da superfície mínima contínua:

$$E_2 = \|Area(M_k) - Area(S)\|. \quad (4.2)$$

Por último, também sabemos que uma superfície mínima também é caracterizada por ter curvatura média nula. Por isso, em alguns casos também iremos observar o comportamento da curvatura média discreta da sequência (M_k) de superfícies trianguladas. Em cada vértice p_i de uma superfície triangulada M_k , a curvatura média discreta é dada

por:

$$H(p_i) = \frac{1}{4\mathcal{A}_i} \left\| \sum_{j \in V_i} [\cot(\alpha_{ij}) + \cot(\beta_{ij})] (p_i - p_j) \right\|, \quad (4.3)$$

α_{ij} e β_{ij} são os ângulos opostos a aresta $(i, j) \in A(M_k)$, e \mathcal{A}_i é a área da região de Voronoi do ponto p_i . Uma forma de calcular \mathcal{A}_i pode ser vista em (MESMOUDI; FLORIANI; MAGILLO, 2012).

4.1 Exemplo 1: Superfícies Planares

O exemplo mais simples de superfície mínima é dado por qualquer região limitada por uma curva fechada simples em um plano de \mathbb{R}^3 . Para obtermos essa superfície fizemos uso de dois tipos de superfície inicial. Primeiro, uma superfície inicial na qual apenas o seu vértice central não está no plano $z = 0$, que chamaremos de Ponto-Plano; e a segunda superfície inicial utilizada foi uma semi-esfera de raio $r = 1$ centrada no ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

4.1.1 Ponto-Plano

A superfície inicial escolhida neste primeiro exemplo é chamada Ponto-Plano. Esta superfície possui quase todos os pontos no plano $z = 0$, exceto pelo seu ponto central $x = y = 0$ que está a uma altura $h = 0,1\text{cm}$ deste plano. A fronteira fixada é composta pelos pontos pertencentes ao conjunto $\{(x, y, z) \in \partial[-1, 1]^2 \times \{0\}\}$.

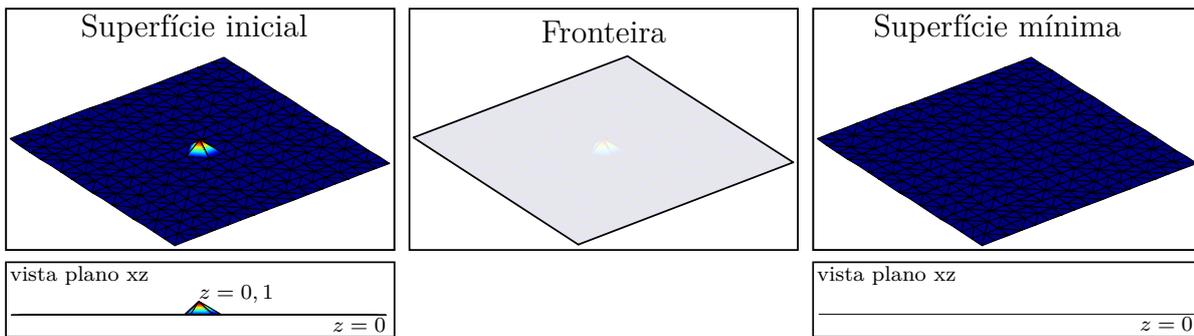


Figura 14 – A superfície inicial (à esquerda, a fronteira (centro) e a superfície mínima discreta (direita) obtida pelo algoritmo em apenas dois passos.

Neste caso também se fez interessante observamos se todos os pontos da superfície estavam contidos no plano $z = 0$, para isto definimos o critério **Altura Máxima**, ou seja, qual o maior valor em módulo da coordenada z dos pontos da superfície. Assim, se a Altura Máxima da superfície M for igual a zero, podemos concluir que todos seus vértices pertencem ao plano $z = 0$.

A Tabela 1 lista alguns dados da convergência do algoritmo para o problema Ponto-Plano. Além do critério E_1 (Equação 4.1), também são listados: o critério E_2 (Equação

4.2); os valores dos funcionais da Energia de Dirichlet e da Área, onde observamos a convergência destes para os mesmos valores, bem próximos da área desta parte do plano; e a Altura Máxima dos pontos da superfície.

Observando os dados da Tabela 1 vemos que o algoritmo converge após duas iterações. Notamos que a convergência para o plano já ocorre na primeira iteração, já que a Altura Máxima é nula. Mas, como é necessário que a diferença entre a área das duas últimas superfícies seja menor que $1E - 4$ foi necessário realizar mais uma iteração. A Figura 14 ilustra o resultado do algoritmo.

Tabela 1 – Análise de convergência do problema Ponto-Plano. Os critérios E_1 (Equação 4.1) e E_2 (Equação 4.2), a Altura Máxima e os funcionais de Área (2.11) e da Energia de Dirichlet (2.3) são listados em cada passo do algoritmo, isto é, para cada superfície do algoritmo até a convergência.

Iteração	E_1	E_2	Altura Máxima	Área	Energia
0	-	1,67E-02	0.1	4,016	4,0167
1	1,67E-02	2,22E-15	0	4,000	4,0019
2	1,77E-15	4,44E-16	0	4,000	4,0000

Os dados na Tabela 1 também mostram que o funcional da Energia de Dirichlet e da Área estão convergindo para o mesmo valor como é assegurado na Proposição 2.9. O fato de E_2 e a Altura Máxima também estarem indo para zero indicam que a superfície para a qual o algoritmo convergiu é de fato o pedaço $[-1, 1]^2$ do plano $z = 0$.

4.1.2 Semi-Esfera

A superfície inicial utilizada neste exemplo (Figura 15a) foi a semi-esfera de raio $r = 1cm$ dada pelos pontos pertencentes ao conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ e } z \geq 0\}$$

A fronteira fixada é composta pelos pontos da semi-esfera que possuem coordenada $z = 0$ (Figura 15b).

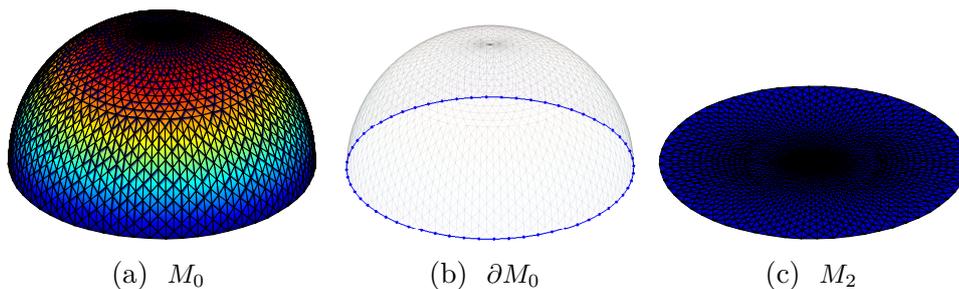


Figura 15 – (a) A superfície inicial M_0 com 1741 pontos, onde a cor representa a distância do vértice ao plano xy , ou seja, a coordenada z . (b) Destacamos os vértices e arestas da fronteira de ∂M_0 . (c) Superfície mínima discreta M_2 obtida pelo algoritmo.

Como no primeiro caso, independente da forma da superfície inicial, se a borda da superfície mínima fixada, a qual podemos entender como condição de contorno do algoritmo, é uma curva plana, então o algoritmo converge para a região limitada por esta curva (Figura 15c).

Neste caso também foi interessante observar o comportamento da Altura Máxima das superfícies ao longo das iterações, além dos critérios E_1 e E_2 . A Tabela 2 mostra que o algoritmo tomando a semi-esfera como superfície inicial convergiu em duas iterações. Além disso, o funcional da Energia de Dirichlet e da Área convergem para os mesmos valores, próximos da área do disco de raio $r = 1\text{cm}$ centrado na origem no plano $z = 0$.

Tabela 2 – Análise de convergência do problema Semi-Esfera. Os critérios E_1 e E_2 , a Altura Máxima e os funcionais de Área e da Energia de Dirichlet são listados em cada passo do algoritmo.

Iteração	E_1	E_2	Altura Máxima	Área	Energia
0	-	$3,1347e + 04$	1	6,2763	6.2762
1	$3,1404e + 00$	$5,7383e - 03$	0	3,1359	3,1381
2	$2,2204e - 15$	$5,7383e - 03$	0	3,1359	3,1359

4.2 Exemplo 2: Superfícies Complexas

Outro exemplo de conjunto de superfícies mínimas são obtidas a partir de funções harmônicas dadas por interpolações lineares de imagens de funções complexas definidas sobre um domínio reticular

$$\left\{ -x_0 + ih_x \mid i = 1, \dots, n \text{ e } h_x = \frac{2x_0}{n} \right\} \times \left\{ -y_0 + jh_y \mid j = 1, \dots, m \text{ e } h_y = \frac{2y_0}{m} \right\}$$

$$\subset [-x_0, x_0] \times [-y_0, y_0]$$

onde $h_x = h_y$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Neste reticulado, o qual é triangulado a partir da subdivisão de cada quadrado pela diagonal do mesmo, as interpolações lineares das funções

$$\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(z^2), \operatorname{Re}(z^3) \text{ e } \operatorname{Im}(z^4)$$

são funções harmônicas e, portanto, são superfícies mínimas.

4.2.1 $\operatorname{Re}(z^2)$

O primeiro exemplo de superfície mínima como imagem de uma aplicação sobre um domínio complexo é dada pelos pontos $(x, y, f(x, y))$, onde

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = \operatorname{Re}((x + iy)^2) = x^2 - y^2.$$

A superfície inicial deste exemplo foi gerada a partir de uma leve perturbação nos pontos da superfície mínima discreta com 121 pontos (Figura 16). A fronteira é ilustrada ao centro

da Figura 16 e, cabe ressaltar, não é alterada ao longo de todo o algoritmo. À esquerda da 16, temos a superfície obtida pelo algoritmo.

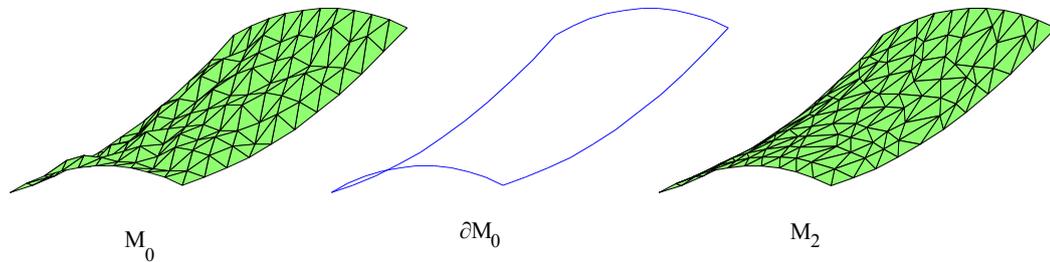


Figura 16 – Da esquerda para a direita, a superfície inicial M_0 com 121 pontos; a curva que define a fronteira da superfície mínima durante o algoritmo ∂M_0 ; e a superfície M_2 obtida pelo nosso algoritmo.

Na tabela 3 é exibido o comportamento dos critérios E_1 e E_2 , além dos funcionais da Área e da Energia de Dirichlet. Observamos que E_1 está convergindo para zero ao longo das iterações, indicando a convergência do algoritmo. O critério E_2 decresce na primeira iteração, porém aumenta da segunda; isso ocorre por que obtemos uma superfície triangulada de área menor que da superfície mínima. Notamos que ao final do algoritmo os valores do funcional da Área e da Energia de Dirichlet são bem próximos, como esperado.

Tabela 3 – Análise de convergência do problema $Re(z^2)$. Os critérios E_1 e E_2 , e os funcionais de Área e da Energia de Dirichlet são listados em cada passo do algoritmo.

Iteração	E_1	E_2	Área	Energia
0	-	$2,016808E - 01$	2.063586	-
1	$2,070601E - 01$	$5,379318E - 03$	1,856526	1,868737
2	$8,595778E - 05$	$5,465275E - 03$	1,856440	1,856445

4.2.2 $Im(z^4)$

Outro exemplo de superfície mínima como imagem de uma aplicação sobre um domínio complexo é dado pelos pontos $(x, y, f(x, y))$, onde

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; f(x, y) = Im((x + iy)^4) = 4x^3y - 4xy^3$$

Na figura 17 temos a superfície inicial utilizada, com 121 pontos e a fronteira com respeito a superfície mínima, que é fixado ao longo das iterações. Esta superfície inicial, assim como a superfície inicial tomada no caso anterior, foi produzida por meio de uma pequena perturbação nos vértices da superfície mínima discreta.

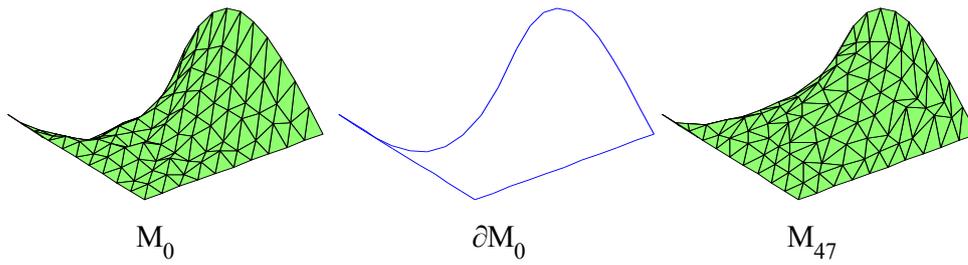
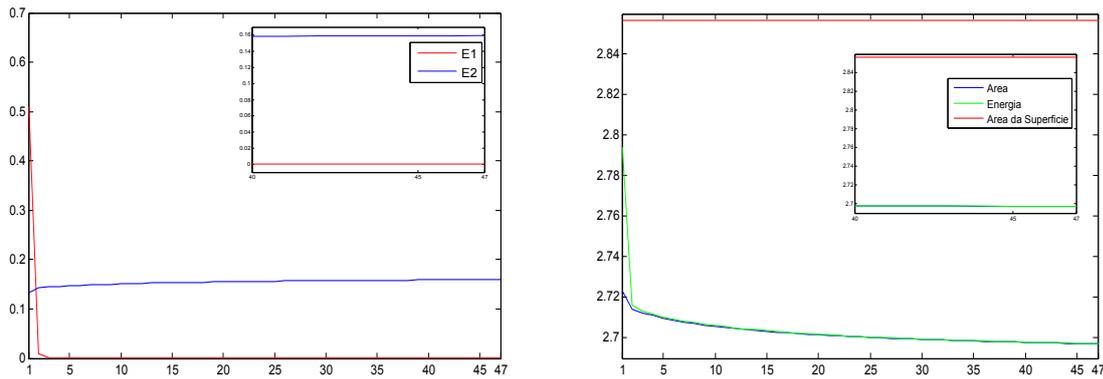


Figura 17 – À esquerda temos a superfície inicial M_0 com 121 pontos, ao centro a fronteira ∂M_0 a ser fixada ao longo do algoritmo e à direita temos a superfície M_{47} obtida pelo nosso algoritmo.

Na Figura 18a vemos que o critério E_1 converge para zero ao longo das iterações, indicando a convergência do algoritmo. O critério E_2 cresce após a segunda iteração e logo depois se estabilizar. Ao olharmos para a Figura 18b, concluímos que isso ocorre porque a área da superfície obtida ao longo das iterações está cada vez menor do que a área da superfície mínima.



(a) Comportamento dos critérios E_1 e E_2 ao longo das iterações.

(b) Funcional da Área, da Energia de Dirichlet e a área da superfície mínima.

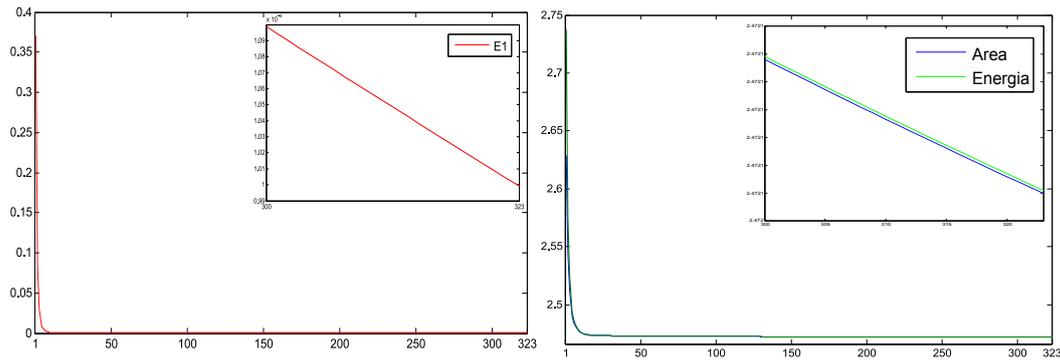
Figura 18 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 17 (à esquerda) como superfície inicial e tomando a curva da Figura 17 (centro) como condição de contorno.

4.3 Exemplo 3: Tempo de processamento \times Tolerância e Discretização

Ao contrário dos exemplos anteriores, neste exemplo não conhecemos a superfície mínima com tal fronteira. Os vértices da superfície inicial M_0 , com 448 pontos (Figura 19a), pertencem ao conjunto

$$\{(x, y, z) \mid x \in \{0, 1\}, y, z \in [0, 1]\} \cup \{(x, y, z) \mid x, y \in [0, 1] \text{ e } z = 1\}$$

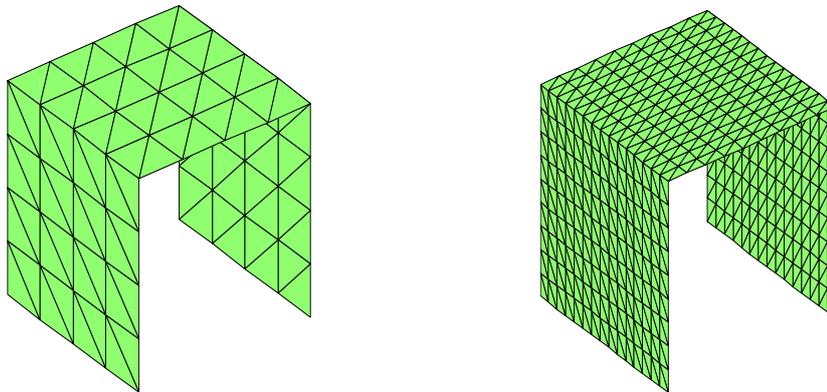
isto é, ela é basicamente formada pelos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 1$, sua fronteira ∂M_0 (Figura 19b) será fixada ao longo das iterações, e gostaríamos de saber qual será a superfície mínima obtida.



(a) Comportamento do critério E_1 ao longo das iterações. (b) Funcional da Área, da Energia de Dirichlet e a área da superfície mínima.

Figura 21 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 19a como superfície inicial e tomando a curva da Figura 19b como condição de contorno.

Neste exemplo achamos interessante observar o comportamento do algoritmo com relação ao tempo de execução, ou seja, se quando tomamos uma superfície inicial com mais vértices que outra o algoritmo demora mais tempo para convergir, quanto tempo a mais, etc. Tomamos duas superfícies iniciais, onde uma possui mais vértices que a outra:



(a) Superfície 1: 65 pontos.

(b) Superfície 2: 448 pontos.

Figura 22 – Duas discretizações da superfície definida por três quadrados nos planos $x = 0$, $x = 1$ e $z = 1$.

Foram utilizadas três tolerâncias diferentes $\epsilon = 1E - 02$, $1E - 04$, $1E - 06$. O Gráfico na Figura 23 relaciona o tempo que o algoritmo demorou com relação a cada tolerância tomada, levando em consideração as duas superfícies iniciais. Este gráfico mostra que, quando $\epsilon = 1E - 02$, o algoritmo leva quase o mesmo tempo para convergir em ambos casos, porém, a medida que reduzimos a tolerância a diferença de tempo se torna visível. Quando $\epsilon = 1E - 06$, para a superfície inicial com 65 pontos o algoritmo convergiu em menos de dois minutos; enquanto, para a superfície inicial com 448 pontos ele precisou de quase 2 horas para convergir. Isso mostra que a medida que refinamos a discretização da nossa topologia inicial, o algoritmo necessita de mais tempo para convergir. E, se exigirmos uma tolerância muito pequena essa diferença de tempo se torna considerável.

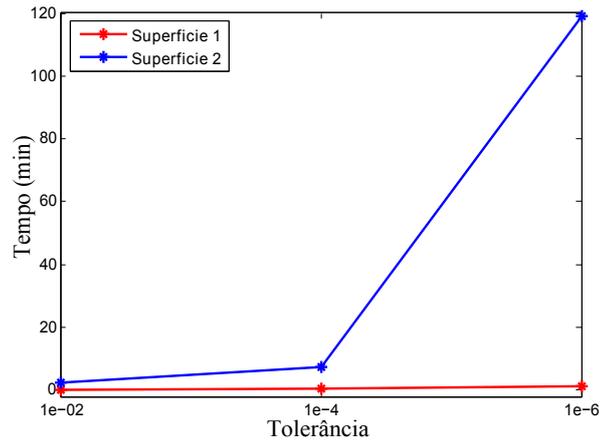


Figura 23 – Relação entre o tempo que o algoritmo levou para convergir tomando as tolerâncias $\epsilon = 1E - 02$, $1E - 04$, $1E - 06$, para cada superfície inicial.

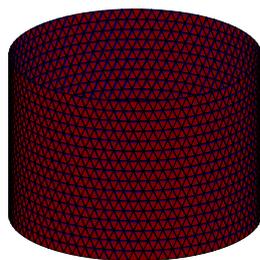
4.4 Exemplo 4: Catenóide

Leonhard Euler em 1764 descobriu que ao rotacionar a catenária $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$ ao redor do eixo z obtemos uma superfície mínima. Esta superfície foi chamada catenóide. Ela surge quando brincamos com películas à base de água e sabão. A tensão superficial faz com que as películas se comportem como superfícies elásticas, assim assumem formas de menor área possível entre todas as outras que satisfazem a mesma condição de contorno imposta. Meusnier em 1776 mostrou que a equação paramétrica da catenóide

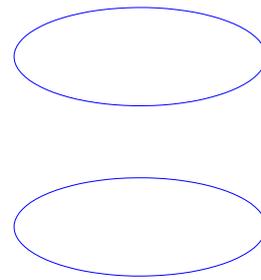
$$(a \cosh y \cos x, a \cosh y \sin x, ay); (x, y) \in (0, 2\pi)^2$$

é solução da equação de Lagrange.

Para obter uma catenóide, tomamos como superfície inicial M_0 um cilindro de altura $h = 2cm$ que varia no intervalo $[-1, 1]$ e raio $r = 2cm$. A fronteira fixada será composta pelas duas circunferências $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \sqrt{2} \text{ e } z = 1\}$ e $C_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = \sqrt{2} \text{ e } z = -1\}$ (Figura 24).



(a) M_0



(b) ∂M_0

Figura 24 – À esquerda temos a superfície M_0 com 1360 pontos, tomada como aproximação inicial para o nosso algoritmo, e à direita ilustramos a fronteira que é fixada ao longo do algoritmo.

O resultado do algoritmo é ilustrado na Figura 25. O algoritmo convergiu para a superfície mínima discreta com 8 iterações e uma sequência de superfícies trianguladas até a convergência do algoritmo é ilustrada da esquerda para a direita.

O mapa de cor ilustra o comportamento da média da curvatura média sobre os vértices da superfície, denotada por CM , variando da curvatura mais alta obtida no cilindro com $CM = 0.500526598602874$ que aproxima a analítica dada por $\frac{1}{r}$, onde r é o raio do cilindro; até a menor curvatura (em azul escuro), mais precisamente $CM = 2.767424E - 04$. Note que a superfície M_5 já possui uma coloração azul claro e na superfície final M_9 vemos sua coloração azul escuro, indicando que sua curvatura média é muito baixa.

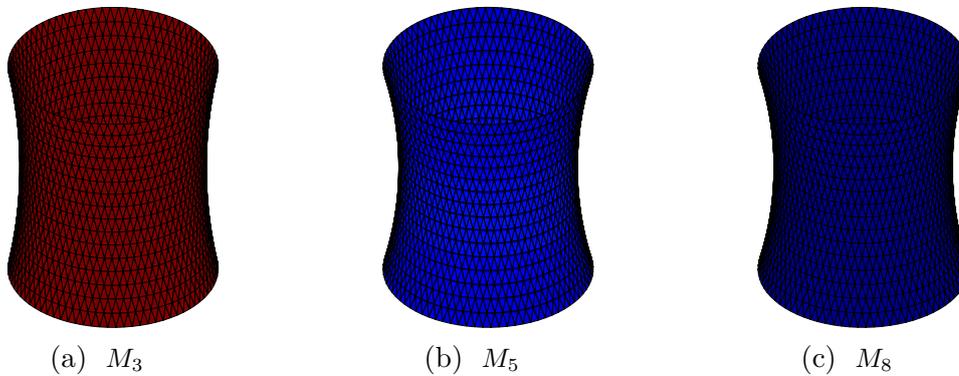


Figura 25 – Sequência de superfícies obtidas ao longo do algoritmo tomando $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância para obter uma catenóide. A coloração das superfícies varia de acordo com a média da curvatura média dos pontos.

As figuras 26a e 26b mostram o comportamento dos critérios E_1 e E_2 , e dos funcionais da Área e da Energia de Dirichlet ao longo das 8 iterações que foram necessárias para o algoritmo convergir tomando $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância.

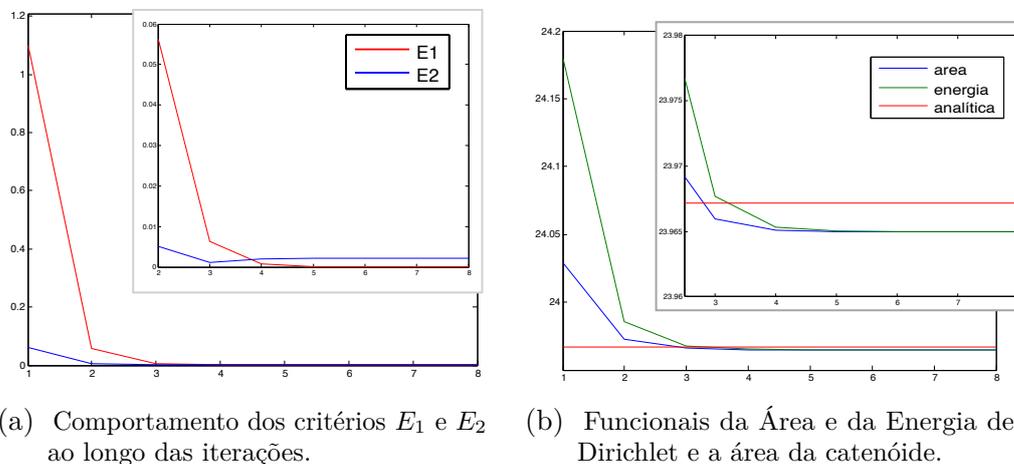


Figura 26 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 24a como superfície inicial e $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância.

No gráfico da Figura 26a podemos observar que o critério E_1 converge para zero ao longo das iterações, mostrando a convergência do algoritmo. O critério E_2 parece estar convergindo para zero, mas da terceira para a quarta iteração vemos que ele começa a aumentar, se olharmos para o gráfico na Figura 26b vemos que isso ocorre porque a sequência de superfícies gerada após a terceira iteração possui área menor do que a área da catenóide.

Além de analisar o comportamento dos erros E_1 e E_2 e dos funcionais da Área e Energia, podemos no caso da catenóide analisar o comportamento, do Raio, que é dado pelo raio r da circunferência $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = r^2 \text{ e } z = 0\}$. Na catenóide esse raio é dado pelo valor de a , onde $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$.

Na figura 27 vemos que o algoritmo converge para uma superfície que possui o Raio menor do que o Raio da catenóide, por isso a superfície M_8 possui área menor do que a área da catenóide, como vimos na Figura 26b.

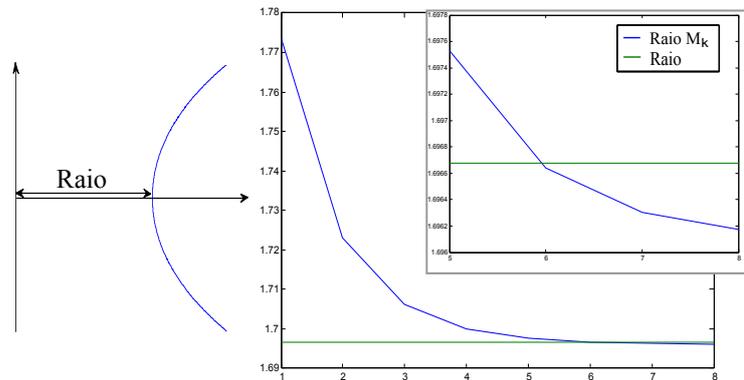


Figura 27 – A esquerda o exemplo do Raio de uma catenóide e o gráfico da Catenária $y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right)$, à direita o gráfico comparando o valor do Raio da sequência de superfícies M_k gerada ao longo do algoritmo com o Raio da catenóide.

Para estudarmos este comportamento, em que M_0 converge para uma superfície com menor área que a superfície mínima, criamos quatro cilindros de mesmo raio $r = 2\text{cm}$ e mesma altura $h = 2\text{cm}$ porém com número de pontos diferentes (Figura 28). Tomando cada um desses cilindros como aproximação inicial, $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância, coletamos os seguintes resultados exibidos na Figura 29.

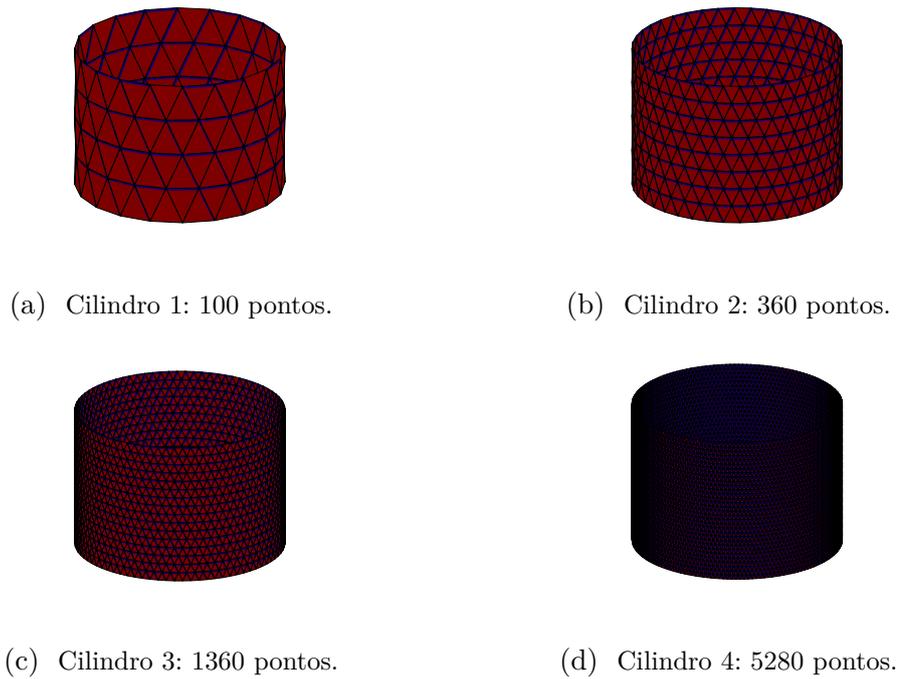


Figura 28 – Cilindros utilizados para analisarmos o convergência do algoritmo no caso da catenóide quando tomamos superfícies iniciais mais discretizadas.

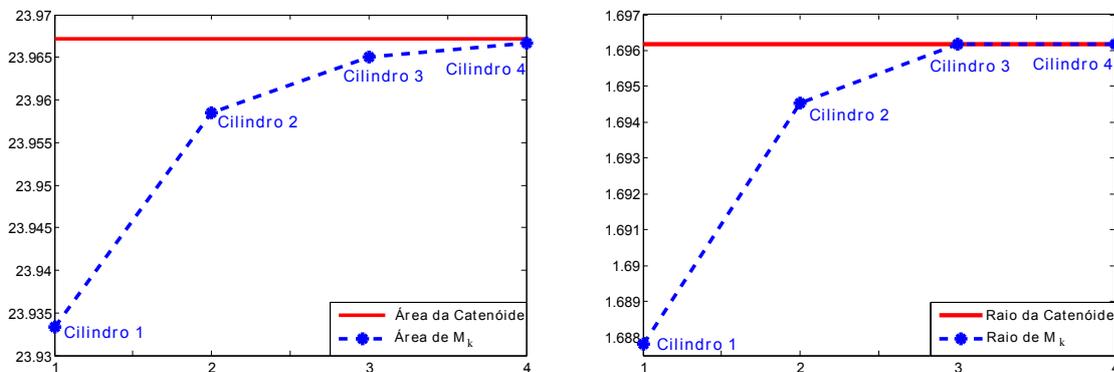


Figura 29 – Os gráficos ilustram as áreas (esquerda) e os Raios (direita) das superfícies obtidas pelo algoritmo a partir das diferentes superfícies iniciais tomadas de acordo com a Figura 28

De acordo com a Figura 29, notamos que, a medida que refinamos a discretização da topologia inicial, isto é, aumentamos o número de vértices na superfície inicial, obtemos uma melhor aproximação da superfície mínima que possui tal fronteira. Os valores da área e do Raio da superfície final obtida pelo algoritmo em cada caso, se aproximam dos valores da área e do Raio da catenóide a medida que aumentamos o números de pontos em nossa aproximação inicial.

4.5 Exemplo 5: Scherk

A superfície mínima Scherk foi descoberta em 1834 pelo matemático Heinrich Ferdinand Scherk. Foram as primeiras novas superfícies mínimas desde Meusnier em 1776. A primeira superfície duplamente periódica definida implicitamente pela equação $\exp^z \cos y = \cos x$, ou explicitamente pelo conjunto de pontos em $\left(x, y, \log\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right)\right) \in \mathbb{R}^3$.

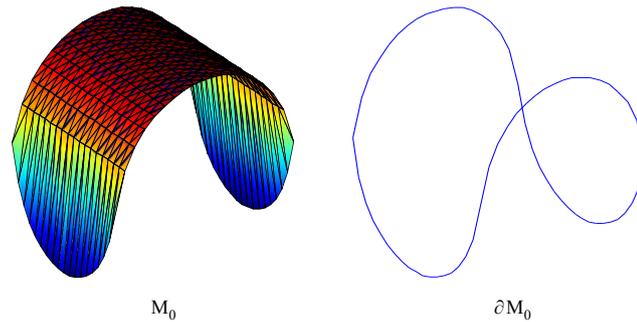


Figura 30 – Dados iniciais do algoritmo: (a) superfície inicial M_0 com 361 pontos e (b) fronteira da superfície ∂M_0 .

Na Figura 30 ilustramos a superfície inicial com 361 pontos e a fronteira utilizada neste exemplo. O algoritmo convergiu para a superfície mínima discreta após 136 iterações, uma sequência de superfícies trianguladas até a convergência do algoritmo é ilustrada na Figura 31. O mapa de cor varia de acordo com o valor da coordenada z de cada vértice. Ao observarmos a Figura 31, podemos notar que os pontos de fronteira $x = \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$ e $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}$ de forma a deixar a superfície mais suave e com aparência mais semelhante a Scherk.

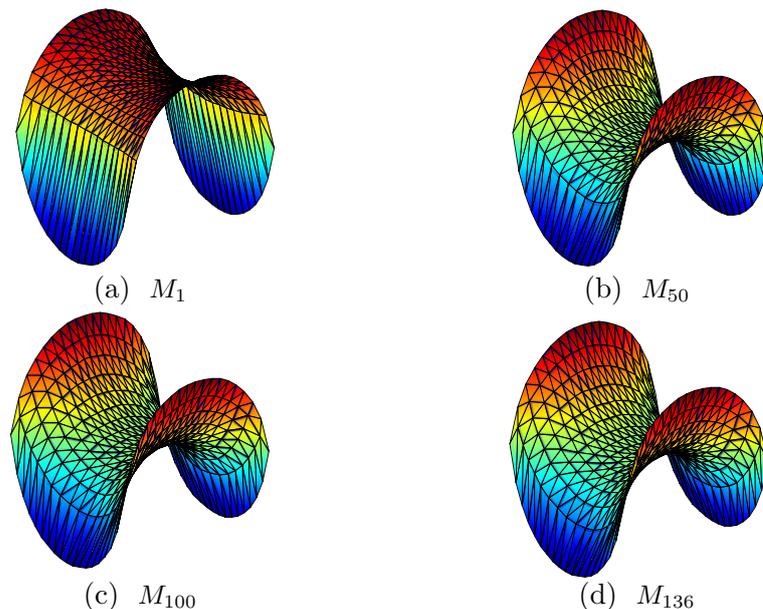


Figura 31 – Sequência de superfícies obtidas durante o algoritmo tomando como dados iniciais a superfície inicial e a fronteira ilustradas na Figura 30.

Por último, a Figura 32 ilustra o comportamento dos critérios E_1 e E_2 , assim como os funcionais da Área e da Energia de Dirichlet, para este exemplo. A convergência de E_1 para zero, observada no gráfico da Figura 32a, mostra que o algoritmo está convergindo ao longo das iterações. Analisando o mesmo gráfico, vemos que o critério E_2 decresce até, mais ou menos, a iteração 30 e a partir daí começa a crescer. De acordo com o gráfico na Figura 32b isso ocorre por que a área da superfície M_k vai ficando menor do que a área da Scherk por volta da iteração 30.

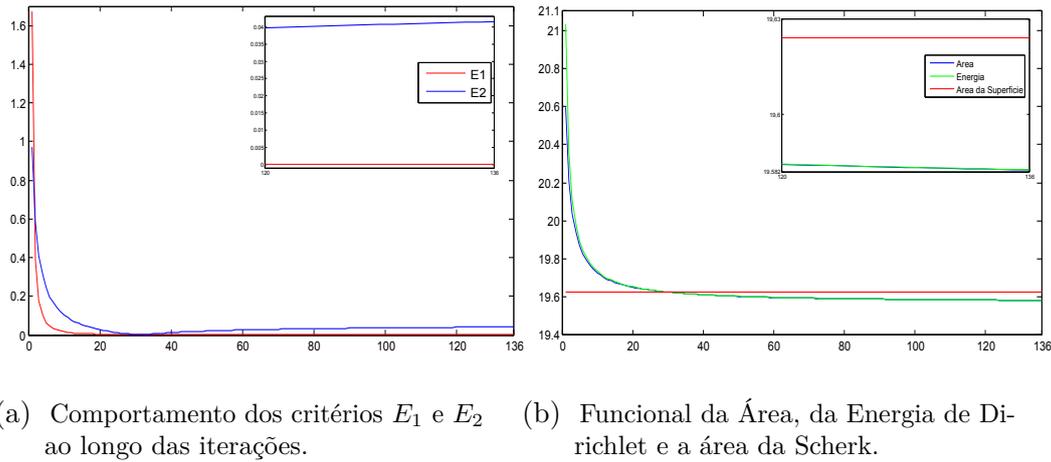


Figura 32 – Dados obtidos tomando a superfície da Figura 30 (à esquerda) como superfície inicial e tomando a curva da Figura 30 (à direita) como condição de contorno.

4.6 Exemplo 6: Limitações

Neste exemplo, assim como no Exemplo 4.3, não conhecemos a superfície mínima com tal fronteira. Dada uma superfície inicial, gostaríamos de saber qual a superfície mínima possui mesma fronteira. Na Figura 33 temos a superfície que foi tomada como aproximação inicial, seus vértices pertencem ao conjunto

$$\{(x, y, z) \mid y \in [-1, 1], z \in [0, 1] \text{ e } x = 0\} \cup \{(x, y, z) \mid x \in [0, 1], z \in [0, 1] \text{ e } y = 0\},$$

isto é, ele é basicamente formada por vértices dos planos $x = 0$ e $y = 0$.

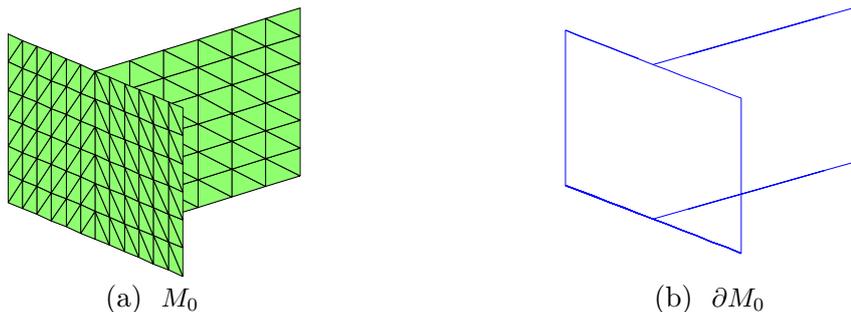


Figura 33 – Superfície inicial M_0 com 133 pontos (à esquerda) e a fronteira ∂M_0 (à direita).

É importante notar que esta superfície inicial não é uma superfície triangulada como definimos. Existem arestas que são compartilhadas por três triângulos, isto faz com que o conjunto estrela de um vértice extremo de uma dessas arestas não seja isomorfo ao disco unitário.

Mesmo não sendo o tipo de superfície sobre a qual foi fundamentado nosso trabalho, quando tomamos $\epsilon = 1E - 03$ como tolerância, o algoritmo convergiu em apenas duas iterações. Como não conhecíamos de antemão a superfície mínima que possui tal fronteira, não foi possível observar o comportamento do critério E_2 . Na Figura 34, vemos a superfície final obtida pelo algoritmo e o comportamento de E_1 ao longo das iterações, garantindo a convergência no algoritmo neste caso.

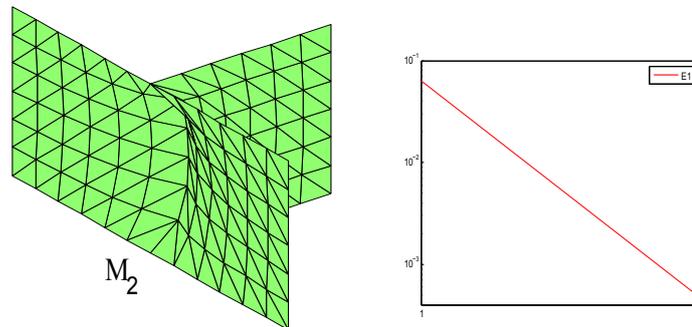


Figura 34 – Temos à esquerda a superfície obtida tomando $\epsilon = 1E - 03$ como tolerância e à direita o comportamento do critério E_1 ao longo das iterações.

Porém, quando diminuimos a tolerância para $\epsilon = 1E - 04$, começam a aparecer degenerações nas superfícies geradas ao longo das iterações e o algoritmo não consegue convergir, isso pode ter ocorrido por causa das arestas que são compartilhadas por mais de dois triângulos. Na Figura 35 vemos uma das superfícies gerada ao longo do algoritmo (à direita).

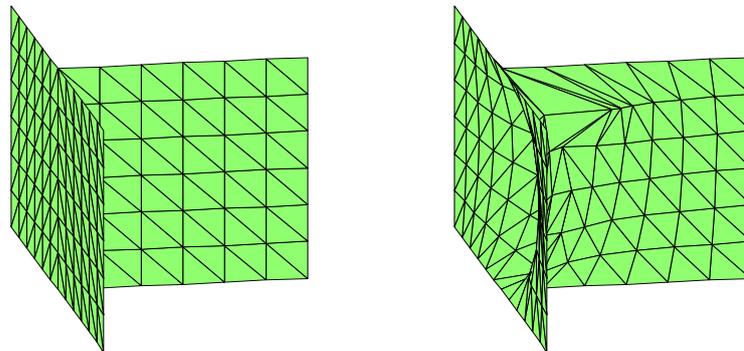


Figura 35 – Superfície inicial utilizada (à esquerda) e uma das superfícies obtida ao longo do algoritmo (à direita) tomando $\epsilon = 1E - 04$ como tolerância.

Mesmo sobre um domínio de superfícies trianguladas encontramos alguns obstáculos ao tentar encontrar a solução do Problema de Plateau. A obtenção de uma superfície

inicial M_0 como aproximação inicial pode ser bastante árdua em alguns casos. Por exemplo, no Exemplo 2 para tomarmos uma superfície inicial foi necessário perturbar os vértices da própria superfície mínima (Figura 36). As superfícies devem estar bem estruturadas em se tratando de ângulos, se os ângulos internos de seus triângulos forem próximos ou maiores que 90° graus o algoritmo pode se portar de forma indesejada, principalmente no momento em que usamos o Gradiente Conjugado para solucionar o sistema linear.

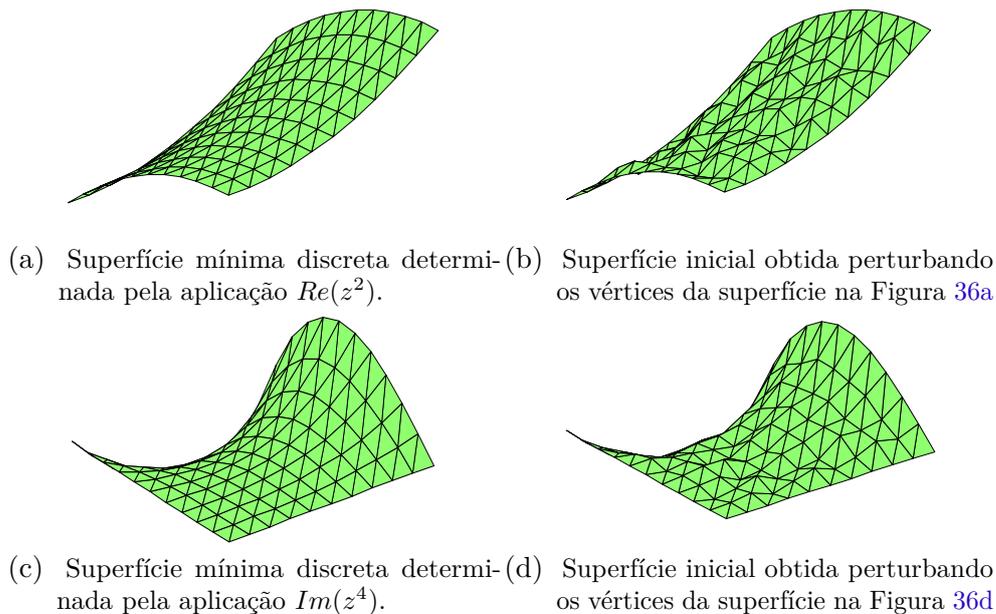


Figura 36 – Superfícies mínimas geradas pelas aplicações $Re(z^2)$ e $Im(z^4)$ e as superfícies iniciais utilizadas no Exemplo 2.

Além da dificuldade em encontrar uma superfície inicial, em certos casos não houve convergência. No caso da superfície mínima determinada pela aplicação $Im(z^4)$, quando tomamos uma superfície inicial com mesma intensidade de perturbação que a superfície inicial na Figura 36d porém com menos vértices (Figura 37a), nosso algoritmo não convergiu. Isto fica claro ao observar o comportamento do critério E_1 no Gráfico da Figura 37b.

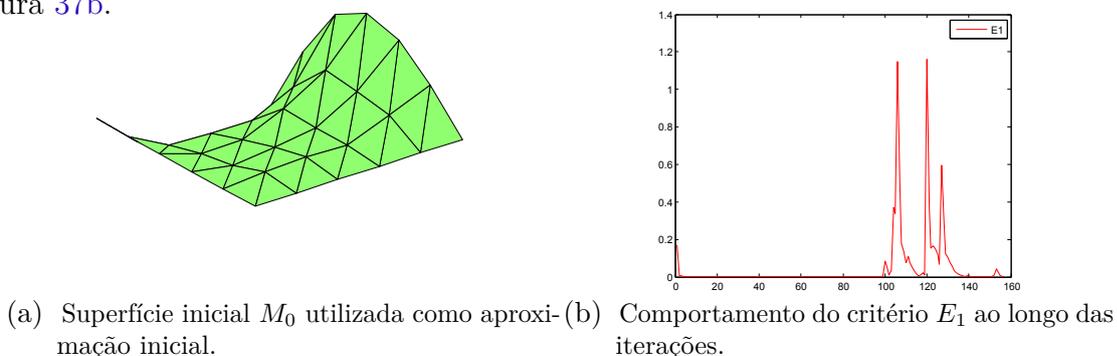


Figura 37 – Superfície utilizada como aproximação inicial para o nosso algoritmo (à esquerda) e o comportamento do critério E_1 ao longo das iterações tomando $\epsilon = 1E - 06$ como tolerância.

Conclusão

O objetivo inicial deste trabalho era encontrar a solução do Problema de Plateau sobre o modelo discreto de superfície dado apenas por um conjunto de pontos. Tal modelo é chamado de *nuvem de pontos*. Embora a topologia da superfície não é implicitamente obtida na nuvem de pontos, ainda é possível definir uma matriz de pesos equivalente à matriz que define o sistema linear que resolvemos nesta dissertação. A partir daí, tentamos adaptar o método clássico de Pinkall e Polthier para obter superfícies mínimas em nuvens de pontos, mas não encontramos resultados preliminares que nos convenceram de continuar a nossa pesquisa. Por exemplo, nos casos de superfícies mínimas planares, Ponto-Plano e Semi-Esfera, os pontos da nuvem tendem a convergir para o plano $z = 0$, mas após alguns passos antes da convergência do algoritmo com uma tolerância aceitável, os pontos começavam a se acumular ao redor da origem.

Inicialmente, quando pensamos em ambas discretizações de superfícies, a principal diferença entre os modelos é a topologia, que é implícita numa malha. Mas, seria este o único problema? Daí, começamos a estudar o método proposto por Pinkall e Polthier baseado em superfícies trianguladas, com uma topologia bem definida. Entender o processo de minimização, a definição e relação do funcional da Energia de Dirichlet com o funcional Área, o domínio ideal sobre o qual eles devem ser minimizados, a construção de um sistema linear baseado em superfícies trianguladas que minimiza o funcional da Energia e a convergência do método. E futuramente, aplicarmos todo esse conhecimento, estruturas e algoritmos bem estabelecidas, para conseguir o que era nosso objetivo inicial e minimizar a área de um superfície definida pela sua nuvem de pontos.

Os resultados exibidos no Capítulo 4 mostram que o algoritmo desenvolvido no Capítulo 3 se portou de forma eficiente. Nas Figuras 18a, 21a, 26a, 32a e 34 observamos a convergência do critério de comparação E_1 à zero, indicando a convergência do algoritmo ao longo das iterações. Nos casos em que podemos utilizar o critério E_2 vimos que em algum deles E_2 converge para zero, e em outros ele converge, mas para um valor diferente de zero. Isto ocorre porque a sequência de superfícies obtidas vai ficando com área menor do que a superfície mínima.

Nas Figuras 18b, 21b, 26b e 32a verificamos que os funcional da Energia de Dirichlet e da Área satisfazem a Proposição 2.9 convergindo para o mesmo valor, o qual é bem próximo do valor da área da superfície mínima. Portanto, a sequência de superfícies trianguladas, converge para uma superfície que possui mesma fronteira e área aproximada a da superfície mínima com tal fronteira. Concluindo que o algoritmo converge para a solução do Problema de Plateau.

A análise feita à respeito da Catenóide (Figura 29) mostra que quanto maior o número de vértices na topologia inicial melhor será a aproximação da solução, ou seja, quanto mais discretizada tomamos nossa superfícies inicial, melhor a aproximação da superfície mínima que iremos obter. Mostrando que o problema encontrando em alguns casos, quando a sequência de superfícies obtidas ao longo do algoritmo vai ficando com área menor do que a área da superfície mínima, pode ser corrigido refinando mais a superfície inicial. Porém, no gráfico da Figura 23, a análise feita relacionando o número de vértices da superfície inicial com o tempo que o algoritmo leva para convergir, concluimos que uma topologia inicial mais refinada pode necessitar de muito mais tempo para convergir.

Portanto, a medida que aumentamos o número de vértices na superfície tomada como aproximação inicial, conseguimos uma aproximação melhor da superfície mínima com tal fronteira, porém demanda muito mais custo computacional.

Em trabalhos futuros gostaríamos de trabalhar mais a esparsidade do sistema linear oriundo do método desenvolvido por Pinkall e Polthier e o condicionamento da matriz. Depois, relacionar todos resultados com os que serão obtidos utilizando a nuvem de pontos ao invés de uma superfície triangulada

Referências

- BAJD, T.; MIHELJ, M.; MUNIH, M. *Introduction to Robotics*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado na página 32.
- BLOCH, E. D. *A first course in geometric topology and differential geometry*. [S.l.]: Springer, 1997. Citado na página 21.
- BRAKKE, K. A. Surface evolver manual. *Mathematics Department, Susquehanna University, Selinsgrove, PA*, v. 17870, n. 2.24, 1994. Citado na página 20.
- BRENNER, S. C.; SCOTT, R. *The mathematical theory of finite element methods*. [S.l.]: Springer, 2008. Citado na página 28.
- CARMO, M. do. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. (Textos Universitários). Citado na página 19.
- CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. [S.l.]: Elsevier, 1978. Citado na página 28.
- CONCUS, P. Numerical solution of the minimal surface equation. *Mathematics of Computation*, JSTOR, p. 340–350, 1967. Citado na página 20.
- COURANT, R.; SCHIFFER, M. *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*. [S.l.]: Springer, 1950. Citado na página 19.
- DOUGLAS, J. Solution of the problem of plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, JSTOR, v. 33, n. 1, p. 263–321, 1931. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 30.
- DZIUK, G. An algorithm for evolutionary surfaces. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 58, n. 1, p. 603–611, 1990. Citado na página 20.
- GOLUB, G.; LOAN, C. V. *Matrix Computations*. [S.l.]: Johns Hopkins University Press, 1996. (Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences). Citado 2 vezes nas páginas 50 e 58.
- HUTCHINSON, J. E. Computing conformal maps and minimal surfaces. In: *Proc. Centr. Math. Anal., Canberra*. [S.l.: s.n.], 1991. v. 26, p. 1405161. Citado na página 30.
- MESMOUDI, M. M.; FLORIANI, L. D.; MAGILLO, P. Discrete curvature estimation methods for triangulated surfaces. In: *Applications of Discrete Geometry and Mathematical Morphology*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 28–42. Citado na página 60.
- MOISE, E. E. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. [S.l.]: Springer, 1977. Citado na página 26.
- MUNKRES, J. R. *Elements of algebraic topology*. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, 1984. Citado na página 21.

- PINKALL, U.; POLTHIER, K. Computing discrete minimal surfaces and their conjugates. *Experimental mathematics*, Taylor & Francis, v. 2, n. 1, p. 15–36, 1993. Citado 3 vezes nas páginas 20, 43 e 59.
- POLTHIER, K. Computational aspects of discrete minimal surfaces. *Global theory of minimal surfaces*, v. 2, p. 65–111, 2005. Citado na página 21.
- RADÓ, T. The problem of the least area and the problem of plateau. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 32, n. 1, p. 763–796, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 30.
- SULLIVAN, J. M. *A crystalline approximation theorem for hypersurfaces*. Tese (Doutorado) — Princeton University, 1990. Citado na página 20.
- TSUCHIYA, T. Discrete solution of the plateau problem and its convergence. *Mathematics of computation*, v. 49, n. 179, p. 157–165, 1987. Citado na página 29.
- WILSON, W. L. On discrete dirichlet and plateau problems. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 3, n. 1, p. 359–373, 1961. Citado na página 19.
- ZIEGLER, G. M. *Lectures on polytopes*. [S.l.]: Springer, 1995. Citado na página 21.