

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - DFIS

## Tese de Doutorado

Fases Geométricas e Holonomias em um ambiente com  
violação de simetria de Lorentz

**Autor: André Gonçalves de Lima**

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich

Coorientador: Prof. Dr. Knut Bakke

**Vitória, ES  
Julho - 2015**

André Gonçalves de Lima

**Fases Geométricas e Holonomias em um ambiente com  
violação de simetria de Lorentz**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich

Coorientador: Prof. Dr. Knut Bakke

**Vitória, ES  
Julho - 2015**

---

**André Gonçalves de Lima**

**Fases Geométricas e Holonomias em um ambiente com violação de simetria de Lorentz**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Espírito Santo, como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física.

**Aprovada em**

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Humberto Belich  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Coorientador: Prof. Dr. Knut Bakke  
Universidade Federal da Paraíba

---

Prof. Dr. Edilberto Oliveira Silva  
Universidade Federal do Maranhão

---

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos  
Universidade Federal de Campina Grande

---

Prof. Dr. Marcos Tadeu Dazeredo Orlando  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. Carlos Augusto Cardoso Passos  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

Prof. Dr. José Alexandre Nogueira  
Universidade Federal do Espírito Santo

---

*Ficha Catalográfica*

*Dedicado à minha esposa Denise e ao meu filho Jorge Antônio*

# Agradecimentos

À minha esposa Denise e ao meu filho Jorge Antônio, por serem minha maior motivação para superar os obstáculos da vida.

Aos professores Humberto Belich e Knut Bakke, pela orientação, paciência, amizade e acima de tudo pela confiança depositada em mim.

Ao meu pai João Batista de Lima e sua esposa Margarida Gomes da Silva.

Aos meus irmãos Alexssander Gonçalves de Lima e Anderson Gonçalves de Lima.

Aos meus sogros José Celestino Assafrão e Maria Geralda da Costa Assafrão.

Aos professores e alunos do Programa de Pós-graduação em Física da UFES.

À Universidade Vila Velha, na pessoa do professor Rudson Ribeiro Alves, por ceder as instalações do Laboratório de Física Experimental durante a redação desta tese.

À todos aqueles que, de alguma maneira, contribuíram para a realização deste trabalho e torceram pelo meu sucesso.

Por fim, aos verdadeiros mestres que conheci ao longo desses anos. Agradeço àqueles que, me deram não apenas conhecimento acadêmico, mas sim conhecimento verdadeiro sobre a vida.

Ich suche die Wahrheit

## RESUMO

Esta tese tem como objetivo central a obtenção de fases geométricas quânticas no cenário em que ocorre a violação de simetria de Lorentz. Obteve-se análogos de fases geométricas para a dinâmica não relativística de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente em diversos cenários que envolvem a violação de simetria. A violação de simetria é induzida pelo setor de paridade par e paridade ímpar do setor de calibre  $CPT$ -par do Modelo Padrão Estendido. Obteve-se casos análogos para as fases geométricas quânticas de Anandan, para efeito Aharonov-Casher, para efeito He-McKellar-Wilkens e para o efeito Aharonov-Bohm escalar. Para incluir este cenário da violação de simetria de Lorentz na evolução dinâmica do sistema, a equação de Dirac foi reescrita com a presença de um termo de acoplamento não mínimo,  $i\gamma^\mu\partial_\mu \rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{ig}{2}\gamma^\mu(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu F^{\alpha\beta}$ , já conhecido na literatura. Este termo contém o campo tensorial  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  que induz os efeitos de violação de simetria de Lorentz. Recentemente, holonomias quânticas tem recebido especial atenção devido a possibilidade de uso para realizar computação quântica holonômica. Motivados por esta aplicação, obteve-se nesta tese holonomias quânticas a partir das fases geométricas originadas no contexto da violação de simetria de Lorentz.



## ABSTRACT

In this thesis, calculated the geometric quantum phases of the Lorentz symmetry violation. The Lorentz symmetry violation is induced by the CPT-even and CPT-odd gauge sector of the Standard Model Extension. In this thesis, obtained the geometric phases for non-relativistic dynamics of the a neutral particle with permanent magnetic dipole moment considering this Lorentz symmetry violation background. Calculated the geometric quantum phases considering the Aharonov-Casher effect also He-McKellar-Wilkins and Aharonov-Bohm effects. For all this cases, included in the Dirac equation a coupling term,  $i\gamma^\mu\partial_\mu \rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{ig}{2}\gamma^\mu(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu F^{\alpha\beta}$ . This term is responsible for the symmetry breakdown. In this context, we obtain quantum holonomies from the Anandan geometric phase and we have discussed how this theory could be used by the holonomic quantum computation.

# Lista de Figuras

4.1 Um qubit representado na esfera de Bloch. . . . .	49
---	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>O cenário da violação de simetria de Lorentz</b>	<b>15</b>
2.1	Introdução . . . . .	15
2.1.1	O Modelo Padrão . . . . .	17
2.1.2	A incompleteza do Modelo Padrão . . . . .	18
2.1.3	Violação das Simetrias de Lorentz . . . . .	20
2.2	O Modelo Padrão Estendido . . . . .	21
2.3	Equação de Dirac com o acoplamento não-mínimo . . . . .	23
2.4	Considerações finais . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Fases geométricas quânticas para um cenário de violação da simetria de Lorentz</b>	<b>28</b>
3.1	Introdução . . . . .	28
3.2	Violação da simetria de Lorentz induzida pelo setor de paridade par do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	32
3.2.1	Fase geométrica quântica de Anandan e efeito Aharonov-Casher induzidos pelo setor de paridade par . . . . .	34
3.2.2	Efeito Aharonov-Bohm escalar induzido pelo setor de paridade par . . . . .	37
3.3	Violação da simetria de Lorentz induzida pelo setor de paridade ímpar do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	38
3.3.1	Fase geométrica quântica de Anandan e o efeito Aharonov-Bohm escalar induzidos pelo setor de paridade ímpar . . . . .	39

3.3.2	Análogo do efeito He-McKellar-Wilkins para partículas neutras induzido pelo setor de paridade ímpar . . . . .	41
3.3.3	Confinamento a um potencial do tipo parede rígida . . . . .	43
3.4	Considerações finais . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Holonomias quânticas</b>	<b>46</b>
4.1	Introdução . . . . .	46
4.2	Portas lógicas para qubits . . . . .	48
4.2.1	Qubits - definição . . . . .	48
4.2.2	Esfera de Bloch . . . . .	49
4.2.3	Portas lógicas . . . . .	50
4.3	Computação quântica holonômica não abeliana . . . . .	52
4.4	Holonomias quânticas em um cenário de violação da simetria de Lorentz induzido pelo setor de paridade par do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	56
4.4.1	Configuração de campo: $\vec{E} = E^1 \vec{\rho}$ . . . . .	56
4.4.2	Configuração de campo: $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ . . . . .	58
4.5	Holonomias quânticas em um cenário de violação da simetria de Lorentz induzido pelo setor de paridade ímpar do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . . . . .	59
4.5.1	Configuração de Campo: $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ . . . . .	59
4.5.2	Configuração de Campo: $\vec{B} = B^1 \hat{\rho}$ . . . . .	60
4.6	Considerações finais . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Conclusões e perspectivas futuras</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>A transformação de Foldy-Wouthuysen</b>	<b>65</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>69</b>

---

# Capítulo 1

## Introdução

As alterações nas propriedades de um meio material quando uma certa região passa por uma transição de fase podem ser descritas por uma teoria de campo efetivo o qual envolvem as características cinéticas de partículas que se movem nesta região. Resumidamente, pode-se dizer que um campo efetivo gerado espontaneamente altera as propriedades de transporte de uma partícula se deslocando naquela região. Como consequência, tem-se a violação da simetria original devido ao estado de mínima energia. Portanto, a mudança do mínimo de energia do vácuo para um campo de fundo não nulo muda o meio em que a partícula se propaga.

A quebra de simetria em sistemas não relativísticos tais como sistemas ferromagnéticos, no qual a simetria rotacional é quebrada, ou em supercondutores em que a violação espontânea da simetria de calibre blindada a interação eletromagnética são exemplos bem sucedidos desta ideia. No caso de sistemas ferromagnéticos, temos como exemplo a transição de fase do ferromagnetismo no modelo de Ising [1]. Antes da transição, temos uma cadeia de spins com movimento térmico e sem correlação. À medida que o sistema é resfriado os spins começam a ficar correlacionados e se orientam em uma determinada direção, gerando, como um campo de fundo, um campo magnético. Desta forma, ocorre a quebra de isotropia espacial, pois este campo de fundo seleciona, espontaneamente, uma direção preferencial.

No vácuo, para sistemas relativísticos, a violação de simetria pode ser vislumbrada considerando um cenário dado pelos índices de espaço-tempo do tensor com *rank*  $n \geq 1$ . Desconsiderando detalhes microscópicos, o campo de fundo nesta situação quebra a simetria  $SO(1,3)$  em vez da simetria  $SO(3)$ . Esta linha de pesquisa é conhecida no meio científico como violação espontânea da simetria de Lorentz [2, 3, 4, 5, 6, 7].

Esta nova possibilidade de violação espontânea foi primeiro sugerida em 1989 nos trabalhos de Kostelecky e Samuel [2, 3, 4, 5] indicando que, na teoria de cordas, a violação

espontânea da simetria por um campo escalar poderia ser estendida. Esta realização tem uma consequência imediata: uma quebra espontânea da simetria de Lorentz. Na teoria eletrofraca, um campo escalar adquire valores esperados no vácuo diferentes de zero o qual gera massa aos bósons de calibre (Mecanismo de Higgs). De modo semelhante, na teoria de cordas, situação análoga a esta do campo escalar pode ser realizado com um campo tensorial. Atualmente, estas teorias são englobadas no âmbito do Modelo Padrão Estendido [8, 9, 10], como uma extensão possível do Modelo Padrão mínimo das interações fundamentais.

O setor de calibre *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido é obtido pela inclusão do setor de calibre em um termo da lagrangiana,  $(-\frac{1}{4})(k_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}F^{\mu\nu}(x)F^{\kappa\lambda}(x)$ , sendo  $(k_F)_{\mu\nu\kappa\lambda}$  o tensor responsável por violar a simetria de Lorentz. Este tensor é composto por 19 coeficientes, sendo dez birrefringentes e nove não birrefringentes, todos dotados com a simetria do tensor de Riemann e um duplo traço nulo ( $(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0$ ). Os efeitos desta eletrodinâmica *CPT*-par sobre a interação férmion-férmion foram considerados nas referências [11, 12, 13, 14, 15, 16].

A violação da simetria de Lorentz está implementada no setor fermiônico do Modelo Padrão Estendido por dois termos *CPT*-ímpar:  $v_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  e  $b_\mu\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ , em que  $v_\mu$  e  $b_\mu$  correspondem aos vetores de fundo que violam as simetrias de Lorentz. A partir destes campos vetoriais de fundo, os efeitos da quebra de simetria de Lorentz tem sido investigados no efeito Hall quântico [17], solução de estados ligados [18, 19, 20, 21, 22] e fases geométricas quânticas [23, 24, 25, 26, 27, 28].

O termo Fase Geométrica Quântica foi criado por Berry [29] para descrever um fator de fase adquirido pela função de onda de uma partícula quântica durante uma evolução cíclica. Atualmente, as fases geométricas quânticas podem ser medidas para qualquer evolução cíclica [30, 31, 32, 33]. Efeitos quânticos bem conhecidos que estão relacionados ao surgimento de fases quânticas geométricas são o Efeito Aharonov-Bohm [34], o efeito Aharonov-Dual [35, 36], o efeito Aharonov-Bohm escalar [37, 38, 39], o efeito Aharonov-Casher [40] e o efeito He-McKellar-Wilkins [41, 42]. Casos análogos destes efeitos quânticos foram também investigados em mecânica quântica não-comutativa [43] e para um momento de quadropolo elétrico [44, 45].

No início dos anos 90 o matemático Peter Shor [46] demonstrou um algoritmo eficiente para fatorizar números primos utilizando conceitos da mecânica quântica. Esta demonstração despertou o interesse em vários aspectos da chamada computação quântica, dentre os quais, possíveis maneiras de se obter os computadores quânticos. Uma abordagem que vem recebendo grande destaque nos últimos anos é usar fases geométricas quânticas como uma forma de se implementar portas quânticas para manipular estados de qubits.

A ideia de usar fases geométricas é conhecida como *computação quântica holonômica* ou *computação quântica geométrica* [47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55].

Pretende-se, com esta tese, contribuir para a ampliação do campo de estudos relacionados a violação de simetria de Lorentz. Para isto, tem-se como proposta principal investigar o surgimento de fases geométricas quânticas associadas a evolução de partículas em um ambiente com violação de simetria de Lorentz. Neste sentido, foram obtidos análogos da fase geométrica quântica de Anandan [56, 57], do efeito Aharonov-Casher [40], do efeito He-McKellar-Wilkens [41, 42] e do efeito Aharonov-Bohm escalar para partículas neutras com momento de dipolo magnético permanente [38, 39, 56, 57]. Estas fases foram obtidas em diferentes cenários ocorrendo violação da simetria de Lorentz induzida pelo setor de calibre *CPT*-par do Modelo Padrão Estendido. Outra pretensão desta tese que deve ser destacada, é expandir as possibilidades de se implementar computação quântica holonômica/geométrica. Para isto, foram obtidas holonomias quânticas associadas as fases geométricas obtidas no cenário em que há violação de simetria de Lorentz.

Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2, serão apresentados os conceitos principais associados a violação de simetria de Lorentz. Inicialmente, será feita uma retrospectiva dos principais fatos que levaram ao desenvolvimento do Modelo Padrão Estendido. Além disso, é apresentada a equação de Dirac com o acoplamento não mínimo. Esta equação é necessária para se investigar o surgimento de fases geométricas no limite de baixas energias. No capítulo 3, serão apresentados parte dos resultados originais obtidos durante a realização deste doutorado. Nele, estão contidos os resultados referentes a obtenção das fases geométricas a partir de cenários com violação de simetria de Lorentz. Investiga-se o surgimento de fases geométricas induzidas pelo setor de paridade par e paridade ímpar do campo tensorial  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Deve-se destacar que, através da presença deste campo tensorial introduzido na equação de Dirac via acoplamento não mínimo, tem-se o campo de fundo responsável pela violação de simetria de Lorentz. No capítulo 4, serão apresentados outros resultados originais desenvolvidos ao longo deste doutorado, sendo dedicado a obtenção de holonomias quânticas. A originalidade destes resultados encontram-se no fato de que estas holonomias quânticas são obtidas a partir de fases geométricas advindas de um cenário de violação de simetria de Lorentz. Inicialmente, o capítulo apresentará algumas definições e conceitos básicos sobre portas lógicas quânticas para qubits. Na sequência, será feita uma discussão rápida sobre computação quântica holonômica não abeliana. O capítulo terminará com a descrição da obtenção de holonomias quânticas a partir das fases geométricas obtidas no capítulo 3. No capítulo 5, serão apresentadas as conclusões finais sobre todo o trabalho desenvolvido nesta tese e uma proposta de trabalho futuro. Por fim, um apêndice sobre a transformação de Foldy-Wouthuysen.

---

## Capítulo 2

# O cenário da violação de simetria de Lorentz

*Este Capítulo tem como objetivo básico apresentar ao leitor o contexto da violação de simetria de Lorentz. Não se pretende fazer uma revisão sobre o tema. Para esta finalidade, o leitor interessado em uma boa revisão pode consultar [58].*

### 2.1 Introdução

A Física sempre utiliza dos conceitos de simetria para ajudar em sua busca pela compreensão de fenômenos físicos na Natureza. Na física clássica, o princípio de invariância de Galileu estabelece que as leis que regem os fenômenos da Natureza independem da velocidade (constante, para referenciais inerciais [59]) do observador, sendo invariantes perante as transformações de Galileu. Uma consequência desta invariância é que não se distingue, sob as leis de Newton, se a condição de movimento de um sistema é repouso ou se este se move de forma retilínea com velocidade constante. Ainda no limite clássico, verifica-se a isotropia espacial, da qual se constata que as leis físicas independem da posição do observador, no que diz respeito a deslocamentos no espaço e o passar do tempo. Também, em relação a isotropia espacial, verifica-se que a orientação espacial no qual se encontra um sistema físico não deve, em princípio, influenciá-lo, sendo este também invariante por rotações. Diversos experimentos foram realizados e comprovaram estas ideias e, como consequência, por um longo tempo os físicos acreditaram na falsa ilusão de que seu alcance e aplicabilidade fossem ilimitados. Foi Albert Einstein quem mostrou que estes conceitos não estavam bem compreendidos e que seu alcance era limitado.

No final do século XIX havia uma incompatibilidade entre a Mecânica Newtoniana e a teoria Eletromagnética de Maxwell. As Leis de Newton são estruturadas através das



transformações de Galileu, porém estas transformações são inadequadas para embasar o eletromagnetismo, uma vez que as equações de Maxwell perdem sua forma padrão em tais transformações. Este impasse só foi resolvido em 1905, quando Einstein apresentou ao mundo a Teoria da Relatividade Restrita lançando luz ao pensamento vigente na Física ao mostrar uma nova concepção sobre os conceitos de espaço e tempo. Sua teoria unificava estes conceitos criando uma estrutura denominada de espaço-tempo. Na Teoria da Relatividade as equações que descrevem os sistemas físicos são baseadas em dois postulados:

1. A velocidade da luz é a mesma independente do referencial adotado;
2. As leis físicas são as mesmas em quaisquer referenciais inerciais distintos.

No enunciado do primeiro postulado já se percebe a incompatibilidade com as transformações de Galileu. O segundo postulado define a covariância que deve estar presente nas leis físicas. Baseados nestes postulados, chega-se a equações que descrevem a física de uma forma única em referenciais inerciais distintos. Essa correspondência entre referenciais inerciais é feita através das chamadas *transformações de Lorentz*. Estas transformações envolvem rotações em torno dos três eixos espaciais e *boosts*, que são empurrões associados a mudanças de velocidades ao longo dos eixos espaciais, ou ainda através de uma combinação de ambos. Nesta teoria, o eletromagnetismo torna-se covariante. O leitor interessado em detalhes sobre a conexão entre referenciais inerciais, pode consultar, por exemplo [60]. Um sistema físico é dito possuir a *simetria de Lorentz quando a sua descrição física através de equações é inalterada quando sujeitas as transformações de Lorentz*. Vários experimentos confirmam a simetria de Lorentz como uma simetria fundamental, pois se recupera a simetria de Galileu no limite de baixas velocidades.

Além da Teoria da Relatividade Restrita, Einstein também é um dos “pais” da Mecânica Quântica. Em um outro artigo, também de 1905, ele propôs que a luz deveria ter um comportamento como se fosse constituída por unidades elementares de energia. Além disso, estas unidades deveriam ser proporcionais a sua frequência <sup>1</sup>. É da união da Teoria da Relatividade Restrita com a Mecânica Quântica surge a Teoria Quântica de Campos, como um dos pilares da física moderna. No contexto da Teoria Quântica de Campos, a descrição das partículas elementares é feita como excitações localizadas de um campo que está imerso no espaço-tempo [1]. O conceito de campo é visto como um grande “colchão de molas” onde as excitações se propagariam. A evolução destes conceitos serviu de suporte para o desenvolvimento de outras teorias, que juntas, deram origem ao chamado Modelo Padrão, no início da década de 70.

---

<sup>1</sup>O leitor interessado na obra completa de Einstein, pode consultar, por exemplo [61].

### 2.1.1 O Modelo Padrão

O Modelo Padrão [62] descreve as partículas fundamentais e explica as interações entre partículas existentes na natureza. Compõem este modelo a *eletrodinâmica quântica*, a *cromodinâmica quântica* e a *teoria eletrofraca*. A eletrodinâmica quântica é responsável por explicar as interações eletromagnéticas a nível quântico. A cromodinâmica quântica explica as interações fortes entre quarks e a teoria eletrofraca (de Glashow-Weinberg-Salam), responsável pelas interações fracas em decaimento de partículas. O modelo padrão não contempla a descrição da interação gravitacional, que tem sua descrição física formulada na Teoria da Relatividade Geral, também de Einstein. As tentativas de se representar a Relatividade Geral como uma teoria quântica de campos resultam em sérias inconsistências e questões fundamentais ainda sem resposta.

Uma simetria fundamental presente nas teorias que compõem o modelo padrão é a *simetria CPT* [62]. Esta simetria corresponde a junção de três simetrias discretas:

- conjugação de carga ( $C$ ) - supõe que a cada partícula existe uma anti-partícula com a mesma massa, porém com carga oposta;
- paridade ( $P$ ) ou inversão espacial - que consiste na inversão do sentido dos eixos espaciais para um determinado sistema físico;
- reversão temporal ( $T$ ) - que consiste em trocar o sentido da evolução temporal do sistema.

Uma descrição individual sobre cada uma destas simetrias é encontrada em [59].

Um sistema físico apresenta a simetria  $CPT$  quando, sob transformações  $C$ ,  $P$  e  $T$ , sua física permanece a mesma. Toda teoria de campos livre é invariante sob estas transformações [59]. É sabido que a quebra de cada uma destas transformações ocorre na natureza de forma isolada, porém não se observa esta quebra quando estas transformações se apresentam combinadas. Este é um dos resultados mais gerais e fundamentais presentes na teoria quântica de campos, conhecido como *teorema CPT*.

É importante mencionar a presença da *simetria de calibre* no modelo padrão [63, 64]. Esta simetria apresenta-se como uma das mais importantes que existem na física. Teorias que se baseiam através desta simetria recebem o nome de *teorias de calibre*, sendo o eletromagnetismo de Maxwell considerado como a primeira teoria física de calibre. Na teoria de Maxwell, verifica-se que os campos elétrico e magnético são invariantes perante mudanças nos potenciais escalar e vetorial. Este fato mostra a arbitrariedade na escolha do zero do potencial escalar, lembrando que a grandeza física de interesse é a diferença de

---

potencial.<sup>2</sup> A simetria de calibre foi introduzida no contexto do modelo padrão nos anos 50 quando C.N. Yang e Robert Mills a utilizaram no estudo das interações fortes com base em grupos não-abelianos [64]. A partir de então, as teorias de calibre deram suporte a construção do embasamento matemático do modelo fundamental, utilizando os conceitos de Teoria de Grupos para unificar a descrição das três interações fundamentais descritas pelo modelo padrão. Assim, a cromodinâmica quântica tem como base de construção o grupo de simetria de calibre  $SU(3)$ . A teoria eletrofraca tem como base de construção o grupo de simetria de calibre  $SU(2)$  e a eletrodinâmica quântica tem como base de construção o grupo  $U(1)$ . Portanto, o modelo padrão tem como base o grupo de simetria de calibre  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  [62].

### 2.1.2 A incompleteza do Modelo Padrão

As previsões feita pelo modelo padrão acerca das partículas elementares e as interações envolvendo estas partículas são válidas em muitos aspectos, porém, este modelo não é de todo completo e sua validade é questionada em diversos casos [65]. Como mencionado anteriormente, o modelo padrão não contempla a força gravitacional e na tentativa de incluir esta força como sendo a quarta força fundamental é necessário definir uma escala de energia limite para que os efeitos gravitacionais quânticos comecem a aparecer. Tal escala de energia é denominada *escala de Planck*  $\sim 10^{19}$  GeV. Nesta escala de energia, as interações gravitacionais passam a ser comparáveis com as interações fortes e eletrofracas e torna-se possível sua inclusão em uma teoria fundamental a ser criada. Define-se, então, o parâmetro de *cutoff*,  $\Lambda \simeq 10^{19}$  GeV, como a escala de energia mais alta em que o modelo padrão pode ser válido. Esta escala de energia é superior a maior escala de energia de massas das partículas conhecidas do modelo padrão, a *escala eletrofraca*. Em princípio não se deveria esperar existir nova física entre a escala eletrofraca e a escala de Planck. No entanto, a presença do bóson de Higgs, previsto teoricamente pelo modelo padrão e confirmado experimentalmente [66], muda esta perspectiva. No modelo padrão a massa do bóson de Higgs é prevista com um valor da ordem de 1 TeV e ao mesmo tempo sua correção deve ser proporcional a  $\Lambda$ . Para se ajustar esta correção para que ele seja da mesma ordem da própria massa, deve-se definir um valor para  $\Lambda$  bastante inferior ao definido pela escala de Planck, reduzindo a validade do modelo padrão como teoria. Este problema é denominado de *problema da hierarquia*. Uma discussão pedagógica deste problema é encontrado em [65].

---

<sup>2</sup>No Capítulo 3 será apresentada a importância do potencial vetor devido a interpretação física obtida por esta quantidade através do efeito Aharonov-Bohm [34]. Este potencial tem papel importante na obtenção das fases geométricas.

O modelo padrão prevê a existência de bósons e férmions e estes são identificados pelos seus respectivos spins [62]. Os férmions são formados por léptons e quarks que possuem uma hierarquia de massa um tanto individual. A massa dos férmions é gerada por um mecanismo de quebra espontânea de simetria, que se dá através do acoplamento de Yukawa do férmion com o bóson de Higgs. Um problema existente é que as massas observadas nas famílias de quarks e léptons variam em uma faixa de mais de 5 ordens de grandeza, desde a massa do elétron até a massa do quark top. Essa variação é estranha uma vez que o mecanismo de geração de todas elas é o mesmo. Este problema é conhecido como *problema de massa dos férmions* [65].

Além destes problemas, existem outros que também não são explicados pela teoria do modelo padrão vigente. Tem-se o *problema da constante cosmológica* [67], no qual existe uma discrepância entre os valores previstos pelo modelo padrão e os valores observados para a energia de vácuo e flutuações quânticas. O *problema da matéria/anti-matéria* [68] que aborda a existência de mais matéria do que anti-matéria no universo. O modelo padrão, além de prevê a existência de léptons e quarks, prevê também a existência de suas anti-partículas. Estas anti-partículas possuem o mesmo número quântico que a partícula usual, porém, possuem carga elétrica oposta. Esta característica, possibilita a existência do processo de aniquilação pares, e também do processo de criação de pares. No processo de aniquilação de pares, uma partícula e uma anti-partícula se transformam em energia. Por outro lado, no processo de criação de pares, uma partícula e uma anti-partícula são produzidos a partir de uma determinada quantidade de energia. Admitindo a criação do universo descrita pelo Big-Bang, pode-se pensar em uma mesma quantidade de matéria e anti-matéria, porém, este balanço não é observado. Uma solução para o problema matéria/anti-matéria, baseia-se na suposição de que haja a violação da *simetria CP*. De forma geral, a simetria *CP* diz que na natureza não deve haver tratamento diferenciado entre partículas e anti-partículas. A violação desta simetria para altas energias explicaria o problema da matéria/anti-matéria [69]. Ainda não se conseguiu observar processos que violem esta simetria na cromodinâmica quântica, somente no setor fraco da teoria. Por fim, o *problema da matéria escura* [70]. Em astronomia e cosmologia, *matéria escura* é a denominação dada a um tipo de matéria presente no universo o qual não emite nem tão pouco reflete a radiação eletromagnética. Tal característica inviabiliza sua detecção direta. Essencialmente, o universo é composto, em maior parte, por matéria escura que não é formada por partículas contidas no modelo padrão.

Em face a todos esses problemas mencionados que não são contemplados pela teoria do modelo padrão, é natural que surjam propostas de novas teorias com o objetivo de preencher estes espaços em aberto da teoria. Estas teorias são conhecidas na literatura como *Física além do Modelo Padrão*. Uma destas teorias surgiu da tentativa de se incluir

gravitação no âmbito do modelo padrão. Como é conhecido, o modelo padrão trata a descrição da teoria física das partículas fundamentais e suas interações em escalas de energia (*problema da hierarquia*). A escala de energia mais baixa, em torno de 100 GeV, é a escala eletrofraca. Nesta escala, a teoria do modelo padrão é testada e comprovada precisamente. Bem acima, na faixa dos  $10^{16}$  GeV, tem-se a escala de energia na qual ocorre a unificação das forças fraca, forte e eletromagnética. Por último, destaca-se a escala de energia limite para do modelo, a *escala de Planck*  $\sim 10^{19}$  GeV, [62]. A existência destas separações entre as escalas de energia leva a questionamentos sobre a física que existe neste intervalo entre elas. Especificamente, no caso da proposta de inclusão da gravitação ao modelo padrão é necessário compreender a Física na escala de energia de Planck, onde é de se esperar que haja a violação da simetria de Lorentz, por ser a escala de energia na qual se deve ter uma unificação das teorias que descrevem a natureza. A *teoria de cordas* é uma teoria que tem como objetivo realizar a descrição física nesta escala de energia. Foi no cenário da teoria de cordas que em 1989, Kostelecky e Samuel [2, 3, 4, 5] descobriram um mecanismo que permite a violação da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck.

### 2.1.3 Violação das Simetrias de Lorentz

Como mencionado, a Teoria da Relatividade Restrita é baseada em dois postulados e transformações que relacionam dois ou mais referenciais inerciais que satisfazem a estes postulados. Estas transformações recebem o nome de *transformações de Lorentz*, [60]. Elas podem ocorrer sob dois pontos de vista [1]: *passivo* - quando a relação ocorre entre as bases dos referenciais inerciais, permanecendo intacto os pontos da estrutura do espaço-tempo; e *ativo* - quando os referenciais inerciais permanecem fixos e o movimento ocorre entre os pontos da estrutura do espaço-tempo. Se a descrição de um sistema físico, feito nestes dois ou mais referenciais inerciais que se relacionam através das transformações de Lorentz, são equivalentes, verifica-se, então, a *simetria de Lorentz*. Caso contrário, ocorre a *violação ou quebra da simetria de Lorentz*. A violação da simetria de Lorentz é dita ser *espontânea*, quando puder ser obtida pela presença de um campo de fundo; (um campo ao qual não se tenha acesso as suas fontes), que permearia a estrutura do espaço-tempo. Com a presença deste campo de fundo, as transformações de Lorentz são renomeadas para [1]: *transformação de Lorentz do Observador* - para designar a realização de uma transformação passiva com a presença do campo de fundo; e *transformação de Lorentz da partícula* - para designar a realização de uma transformação ativa com a presença de um campo de fundo. O mecanismo proposto por Kostelecky e Samuel [2, 3, 4, 5] no âmbito da teoria de cordas, prevê a violação espontânea da simetria de Lorentz na escala de energia de Planck. Tal quebra de simetria seria realizada por tensores que adquirem

---

valores esperados no vácuo diferentes de zero, gerando campos de fundo. Atingir o nível de energia da escala de Planck, é inviável aos equipamentos experimentais atuais, mas busca-se sinais dos efeitos desta violação em sistemas físicos de baixas energias.

## 2.2 O Modelo Padrão Estendido

O *Modelo Padrão Estendido* é o nome dado a teoria proposta por Colladay e Kostelecky [8, 9] que inclui, em todos os setores do modelo padrão, os termos que exibem a violação de simetria de Lorentz e *CPT*. A origem deste novo modelo vem dos trabalhos de Kostelecky e Samuel [2, 3, 4, 5] no âmbito da teoria de cordas. Os termos acrescentados são construídos pela contração de operadores de campos do modelo padrão com constantes de acoplamento (campos tensoriais) que permeiam o espaço-tempo [59]. São estes campos tensoriais que possuem o valor esperado no vácuo, sendo responsáveis pelo campo de fundo que induz a violação de simetria de Lorentz. Diversos termos podem ser construídos e incluídos no Modelo Padrão Estendido, mas para investigar efeitos físicos em escalas de baixas energias, Colladay e Kostelecky diminuiu o número de termos a serem inclusos impondo condições realistas. Tal subconjunto recebeu o nome de *Modelo Padrão Estendido mínimo*.

Os termos presentes no Modelo Padrão Estendido mínimo podem ser classificados de acordo com o seu comportamento do ponto de vista das transformações *CPT*. De agora em diante, o Modelo Padrão Estendido mínimo será referido apenas como Modelo Padrão Estendido. Não serão discutidos detalhes sobre as transformações *C*, *P* e *T*. Além disso, também não será apresentada a conexão entre o teorema *CPT* e a simetria de Lorentz, o leitor interessado nesta discussão pode consultar [59]. Um resultado importante foi mostrado por O.W. Greenberg [71], o qual estabeleceu que qualquer violação da simetria *CPT*, implicará na violação de simetria de Lorentz. Portanto, pode haver um sistema que apresente violação de simetria de Lorentz e violação de simetria *CPT*, sendo descrito por termos denominados *CPT-ímpar*. E, por outro lado, pode haver um sistema que exiba a violação de simetria de Lorentz, mas *não viole* a simetria *CPT*. Este sistema será descrito por termos denominados *CPT-par*. Não existe um sistema físico que exiba somente a violação de simetria *CPT*.

A lagrangeana do modelo padrão estendido pode ser escrita como composta de duas partes, uma contendo explicitamente termos associados ao modelo padrão usual (MP) e outro termo associado aos campos tensoriais que induzem a violação da simetria de Lorentz (VSL). Não serão apresentados de forma explícita os termos que compõem esta lagrangeana. O leitor interessado pode encontrá-los em [8, 9]. Assim, da maneira geral

---

$$\mathcal{L}_{MPE} = \mathcal{L}_{MP} + \mathcal{L}_{VSL}. \quad (2.1)$$

O efeito físico do termo adicional  $\mathcal{L}_{VSL}$  presente na expressão (2.1) tem semelhança ao efeito de geração de massa dos férmions (mecanismo de Higgs [62]), descrito no modelo padrão. Presente ao termo  $\mathcal{L}_{VSL}$  encontram-se campos tensoriais que possuem comportamento análogos ao campo escalar de Higgs e que exibem também a violação espontânea de simetria, uma vez que os valores esperados de vácuo são não nulos. Este fato implica na existência de um campo de fundo que irá afetar os campos que descrevem partículas, alterando assim completamente a física envolvida. É importante ressaltar que, *a física descrita pela lagrangeana do modelo padrão estendido é covariante por transformações de Lorentz do observador, mas é alterada por transformações de Lorentz de partícula, uma vez que o campo de fundo não se altera por esta transformação* [72]. Assim, todas as interações são inalteradas sob o ponto de vista do referencial do observador. Por outro lado, a invariância sob translações e rotações de partículas localizadas é perdida, levando a modificações nas interações quando ocorre mudança de orientação ou movimento em relação ao campo de fundo.

Um ponto importante a ser mencionado sobre a teoria desenvolvida por Kostelecky, refere-se ao fato de os efeitos da violação de simetria de Lorentz ainda não terem sido detectados experimentalmente em outros níveis de energia contemplados pelo modelo padrão usual [72]. Uma das tentativas de se detectar os indícios desta violação, baseia-se no fato de que modificações físicas impostas pela presença de um campo de fundo devam levar a alterações nas relações de dispersão das partículas do modelo padrão. Da Teoria da Relatividade Restrita, a simetria de Lorentz permite a existência de quadri-vetores no espaço de Minkowski que possuem norma ao quadrado invariante. No caso do quadri-vetor energia momento  $p^\mu$ , pode-se escrever a relação de dispersão baseado em sua norma como  $E^2 = m^2 + p^2$  [73]. A modificação causada pela violação da simetria de Lorentz altera a relação de dispersão para  $E^2 = m^2 + p^2 + \mathcal{O}(m_P, E)$  [72, 74]. No termo  $\mathcal{O}(m_P, E)$  estão presentes parâmetros associados a violação de simetria Lorentz ( $m_P$  refere-se a massa de Planck) em potências de ordem superior a dois [74].<sup>3</sup> Baseados nesta alteração na relação de dispersão, fica claro que a investigação das propriedades cinemáticas das partículas pode vir a revelar pistas importantes sobre a ocorrência desta quebra de simetria. A detecção dessa violação daria início a uma nova Física que teria sua fonte na escala de energia de Planck.

Uma vez que, o termo  $\mathcal{O}(m_P, E)$  altera muito pouco a relação de dispersão, expe-

---

<sup>3</sup>O leitor interessado em mais detalhes sobre as alterações na relação de dispersão, pode consultar [74].

rimentos feitos em ambientes de altas energias são os mais indicados para observações destas alterações em tal relação. Neste contexto, deve-se destacar os experimentos de detecção de raios cósmicos além do limite GZK ( $E_{GZK} \simeq 4.10^{19}$ ), como por exemplo [75]. Mas existem outras técnicas que também tem sido utilizadas neste sentido, como medidas envolvendo sistemas atômicos [76], experimentos modernos de Michelson-Morley [77], oscilações de mésons neutros [78], oscilações de neutrinos [79] e experimentos de birrefringência [80]. Deve ser ressaltado que, os resultados destes experimentos apenas limitam os valores possíveis para os termos que violam a simetria de Lorentz presentes ao modelo padrão.

### 2.3 Equação de Dirac com o acoplamento não-mínimo

Como já mencionado, a proposta principal desta tese é obter fases geométricas associadas a dinâmica de partículas neutras em cenários onde existe a presença de um campo de fundo, conseqüentemente, com a violação da simetria de Lorentz. Assim sendo, optou-se por estudar o setor de calibre (também conhecido como setor de radiação) do modelo padrão estendido. A lagrangeana do setor de calibre do modelo padrão estendido (sem fontes) é composta por,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\mu A^\nu F^{\alpha\beta} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}F^{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

Na expressão (2.2), percebe-se a presença de dois termos além do termo usual de Maxwell, contendo o tensor eletromagnético  $F^{\mu\nu}$ . O termo contendo o quadrivetor  $v^\mu$  é conhecido da literatura como termo de Carrol-Field-Jackiw, tendo sido primeiro a ser incluído no setor de radiação do modelo padrão [81]. Este termo é *CPT*-ímpar, pois viola a simetria de Lorentz e também a simetria *CPT*. O quadrivetor  $v^\mu$  corresponde ao campo de fundo responsável pela violação da simetria de Lorentz. O segundo termo é o termo *CPT*-par, que viola a simetria de Lorentz mas não a simetria *CPT*. Este termo será relevante para o restante desta tese. Nele, pode-se ver a presença do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ , que é um tensor de acoplamento adimensional e renormalizável, responsável por induzir a presença de um campo de fundo. Além disso, este tensor apresenta as mesmas simetrias do tensor de Riemann, isto é

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = -(k_F)_{\nu\mu\beta\alpha}, \quad (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} = (k_F)_{\beta\alpha\mu\nu}; \quad (2.3)$$

$$(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} + (k_F)_{\mu\alpha\beta\nu} + (k_F)_{\mu\beta\nu\alpha} = 0, \quad (2.4)$$



e duplo traço nulo

$$(k_F)^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Portanto, o tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  possui dezenove componentes independentes, das quais nove não fornecem birrefringência [59]. A birrefringência está associada a alterações na relação de dispersão, sendo um mecanismo de restrição aos possíveis valores dos coeficientes que geram a violação de simetria.

Recentemente, um modelo de acoplamento não mínimo no setor fermiônico foi sugerido [82, 83]. Esta proposta implica em vantagens, uma vez que, não somente fótons preenchem este cenário, mas também neutrinos, prótons, elétrons, apresentaram modificações em suas propriedades de transporte. De acordo com a referência [83], este acoplamento foi proposto na forma

$$i\gamma^\mu\partial_\mu \rightarrow i\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{ig}{2}\gamma^\mu(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\nu F^{\alpha\beta}(x), \quad (2.6)$$

em que  $g$  é uma constante,  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  corresponde a um tensor responsável por quebrar a simetria de Lorentz no setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido. O tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  pode ser escrito em termos de quatro matrizes  $3 \times 3$  de forma a facilitar sua manipulação. Estas matrizes são definidas como

$$\begin{aligned} (\kappa_{DE})_{ij} &= -2(k_F)_{0j0k}, \\ (\kappa_{HB})_{jk} &= \frac{1}{2}\epsilon_{j pq}\epsilon_{klm}(k_F)^{pqlm}, \\ (\kappa_{DB})_{jk} &= -(\kappa_{HE})_{kj} = \epsilon_{kpq}(k_F)^{0j pq}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observe que as matrizes  $(\kappa_{DE})_{ij}$  e  $(\kappa_{HB})_{ij}$  são simétricas e representam o setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Por outro lado, as matrizes  $(\kappa_{DB})_{ij}$  e  $(\kappa_{HE})_{ij}$  não têm simetria e representam o setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Além disso, o tensor  $F_{\mu\nu}(x)$  na equação (2.6) corresponde ao tensor eletromagnético usual ( $F_{0i} = -F_{i0} = E_i$ , e  $F_{ij} = -F_{ji} = \epsilon_{ijk}B^k$ ). As matrizes  $\gamma^\mu$  são definidas no espaço tempo de Minkowski na forma [84]

$$\gamma^0 = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

com  $\Sigma^i$  como o vetor de spin. As matrizes  $\sigma^i$  correspondem as matrizes de Pauli e satisfazem as relações  $(\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i) = 2\eta^{ij}$ .

Para a utilização em coordenadas curvilíneas, deve-se aplicar a transformação de co-

ordenadas,  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\nu}$  e uma transformação unitária sobre a função de onda  $\psi(x) = U\psi'(\bar{x})$  [19, 20, 27, 85]. Assim, a equação de Dirac pode ser escrita em qualquer referencial descrito por um sistema ortogonal com a presença de efeitos que violam a simetria de Lorentz (2.6) como [19, 20, 27]

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi + \frac{i}{2} \sum_{k=i}^3 \gamma^k \left[ D_k \ln \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_k} \right) \right] \psi + \frac{ig}{2} \gamma^\mu (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta}(x) \psi = m\psi. \quad (2.9)$$

Nesta expressão, utiliza-se  $D_\mu = \frac{1}{h_\mu} \partial_\mu$  como a derivada do sistema de coordenadas correspondente, e o parâmetro  $h_\mu$  corresponde ao fator de escala deste sistema de coordenadas [85]. Por exemplo, o elemento de linha do espaço tempo de Minkowski é escrito em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:  $ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$ ; então, os correspondentes fatores de escala são  $h_0 = 1, h_1 = 1, h_\rho$  e  $h_3 = 1$ . Além disso, o segundo termo na equação (2.9) tem origem a partir de um termo chamado *conexão espinorial*  $\Gamma_\mu(x)$  [19, 26, 27, 85, 86].

A equação de Dirac (2.9) pode ser reescrita de uma forma mais conveniente. Para isto, uma modificação se dará no terceiro termo da equação, o que permitirá investigar de modo mais prático os efeitos originados do acoplamento não-mínimo (2.6) na dinâmica de partículas.

É conhecido da literatura que as matrizes  $\gamma$ , definidas em (2.8), satisfazem a relação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \}. \quad (2.10)$$

Assim, pode-se escrever que

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2\eta^{\mu\nu} \hat{1}, \quad (2.11)$$

com  $\eta^{\mu\nu}$  sendo métrica do espaço plano de Minkowski. Supondo que  $\mu \neq \nu$ , tem-se então que

$$\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 0. \quad (2.12)$$

Como consequência

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu, \quad (2.13)$$

e chega-se então que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (2.14)$$

Da expressão (2.14), obtém-se então que

$$\gamma^\mu (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta} = (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] F^{\alpha\beta}. \quad (2.15)$$

Uma vez que

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{2}{i} \sigma^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

a expressão (2.15) pode ser reescrita como

$$\gamma^\mu (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\nu F^{\alpha\beta} = \frac{1}{i} (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta}. \quad (2.17)$$

Torna-se útil agora usar a relação

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij}, \quad (2.18)$$

uma vez que o tensor eletromagnético pode ser escrito como  $F^{0i} = -E^i$  e  $F^{ij} = \epsilon^{ijm} B^m$ . Fazendo uso da expressão (2.18), chega-se então a

$$\begin{aligned} (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} &= -4(k_F)_{0l0i} \sigma^{0l} E^i - 2(k_F)_{j\bar{k}0i} \sigma^{j\bar{k}} E^i \\ &+ 2(k_F)_{0lij} \sigma^{0l} \epsilon^{ijm} B^m + (k_F)_{\bar{k}lij} \sigma^{\bar{k}l} \epsilon^{ijm} B^m. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando as matrizes definidas em (2.7) e também que  $\sigma^{j\bar{k}} = -\epsilon^{j\bar{k}n} \Sigma^n$  e  $\sigma^{0l} = i\alpha^l$  chega-se a

$$\begin{aligned} (k_F)_{\mu\nu\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} &= 2i(\kappa_{DE})_{li} \alpha^l E^i + 2(\kappa_{HE})_{ni} \Sigma^n E^i \\ &+ 2i(\kappa_{DB})_{lm} \alpha^l B^m + 2(\kappa_{HB})_{nm} \Sigma^n B^m. \end{aligned} \quad (2.20)$$

De posse desse resultado, é possível escrever a equação de Dirac (2.9), semelhante ao realizado nas referências [19, 27]. Assim, considerando um sistema de coordenadas cilíndricas, a equação de Dirac com o acoplamento não mínimo (2.6), torna-se, então <sup>4</sup>

$$m\psi = i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho} \right) \psi + i\frac{\gamma^2}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} + ig\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbb{E}}\psi - g\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}\psi + ig\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{B}}\psi - g\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\psi. \quad (2.21)$$

<sup>4</sup>Optou-se por usar no desenvolvimento desta tese o sistema de unidades naturais, com  $\hbar = c = 1$

Para a expressão (2.21), foram definidos campos efetivos definidos como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i &= (\kappa_{DE})_{ij} E^j; & \mathbb{B}_i &= (\kappa_{HB})_{ij} B^j; \\ \mathbf{E}_i &= (\kappa_{HE})_{ij} E^j; & \mathbf{B}_i &= (\kappa_{DB})_{ij} B^j.\end{aligned}\tag{2.22}$$

## 2.4 Considerações finais

Neste capítulo apresentou-se de forma bastante direta o ambiente da física que culminou no desenvolvimento da teoria do Modelo Padrão Estendido, no qual se admite a violação da simetria de Lorentz. A violação da simetria de Lorentz é obtida por uma solução não trivial do estado fundamental das equações de movimento. Resumidamente, o vácuo da teoria possui agora uma estrutura, com a presença de um campo de fundo gerando uma anisotropia do espaço-tempo. Utilizando um acoplamento não mínimo composto por um termo que contém um campo tensorial que viola a simetria de Lorentz, foi obtida a equação de Dirac para uma partícula neutra. Esta equação é fundamental para a obtenção das fases geométricas, como será descrito no capítulo 3.

## Capítulo 3

# Fases geométricas quânticas para um cenário de violação da simetria de Lorentz

*Neste Capítulo, serão apresentados parte dos resultados originais obtidos durante a realização deste doutorado. Especificamente, ele descreverá a obtenção das fases geométricas quânticas. No Capítulo 2, foi apresentada a equação de Dirac com o acoplamento não mínimo (2.6), que rege a dinâmica de partículas neutras em um cenário de violação de simetria de Lorentz imposta pelo campo tensorial  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ , equação (2.21). Considerando o limite não relativístico desta equação, será obtida as fases geométricas quânticas, inicialmente para o setor de paridade par, e em seguida, para o setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ .*

### 3.1 Introdução

A descrição teórica do estado físico de uma partícula em algum instante é representado pela função de onda  $\psi$ . Essa função de onda assume valores complexos do espaço, e, quando o sistema evolui no tempo, ela também muda.

Em 1984 Michael V. Berry [29] descobriu que através da realização de uma evolução adiabática de um sistema quântico, o sistema retém uma “memória” deste movimento quando ele retorna ao seu estado físico original. Esta memória foi denominada de *fase geométrica* ou *fase de Berry*. Em seu trabalho, Berry considerou que após uma evolução temporal, uma função de onda final  $\psi'$  está relacionada a uma função de onda inicial  $\psi$  por  $\psi' = e^{i\phi}\psi$ , com  $\phi$  um número real e  $i^2 = -1$ . Assim, as características observáveis do

estado inicial e final são iguais e, portanto, do ponto de vista clássico, não existe distinção entre eles. Por outro lado, na mecânica quântica,  $\phi$ , que é a fase adquirida pela função de onda, constitui uma memória da evolução seguida pelo sistema. Berry também mostrou que, além de uma contribuição referente aos efeitos devido ao ambiente em cada instante,  $\phi$  contém uma parte que é de natureza geométrica. Posteriormente, o estudo destas fases geométricas foi generalizado para o caso em que o sistema quântico realiza uma evolução não adiabática [30], o que ajudou a destacar a influência geométrica do caminho ao longo do qual o sistema quântico evolui.

Em 1931, Dirac demonstrou um método de se obter a função de onda de uma partícula carregada interagindo com um campo magnético [87]. É importante descrever um exemplo simples para considerar este método [48]. Da eletrodinâmica clássica, sabe-se que o campo magnético  $\vec{B}$  está relacionado com o potencial vetor  $\vec{A}$  através da relação [88]

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.1)$$

Qualquer gradiente de uma função escalar,  $\omega$ , pode ser acrescentado ao potencial vetor  $\vec{A}$  sem causar mudança no valor do campo  $\vec{B}$ , isto é,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\omega) = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (3.2)$$

Esta invariância do campo  $\vec{B}$  sobre a escolha da função  $\omega$  [88] é conhecida como *invariância de calibre* ou *simetria de calibre*, e o potencial vetor  $\vec{A}$  é também conhecido como um *campo de calibre*. A saber, a simetria de calibre representa uma das simetrias mais importantes presentes na natureza, presente na essência do eletromagnetismo clássico. Quando uma partícula carregada se move na presença de um campo de calibre, sua função de onda adquire uma fase quântica [48].

Considere uma partícula com uma carga  $q$  em uma certa posição  $\vec{r} = (x, y, z)$ , movendo-se ao longo de uma trajetória fechada contida em um plano. Admitindo a presença de um campo magnético  $\vec{B}$  perpendicular a este plano, pode-se escrever o hamiltoniano não relativístico deste sistema utilizando a prescrição de acoplamento mínimo, ou seja,

$$H^A = -\frac{1}{2m} \left( \vec{\nabla} - iq\vec{A} \right)^2. \quad (3.3)$$

Pode-se verificar que, se  $\psi(\vec{r})$  é um autoestado deste hamiltoniano (3.3) com  $\vec{A} = 0$ , então o autoestado com a mesma energia para um potencial vetor geral  $\vec{A} \neq 0$  é dado por

$$\psi^A(\vec{r}) = \exp \left( iq \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}' \right) \psi(\vec{r}). \quad (3.4)$$

Na expressão (3.4), se admitie que  $\vec{r}_0$  é um ponto de referência arbitrário e a integral é ao longo de um caminho que liga  $\vec{r}_0$  até  $\vec{r}$ . O autoestado  $\psi^A$ , (3.4), mostra explicitamente a relação entre campos de calibre e o fator de fase. Considerando que esta evolução é adiabática ao longo de uma trajetória fechada  $\mathcal{C}$  e desconsiderando qualquer outro efeito externo além da interação entre a carga  $q$  e o campo magnético  $\vec{B}$ , a função de onda ao final de uma evolução cíclica adquire a fase

$$\phi = q \oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (3.5)$$

Aplicando o teorema de Stokes, esta fase pode ser reescrita como

$$\phi = q \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{s} = q \iint_{S(\mathcal{C})} \vec{B} \cdot d\vec{s} = q\Phi. \quad (3.6)$$

Na expressão para a fase quântica (3.6) tem-se que,  $d\vec{r}$  é um elemento infinitesimal do caminho fechado  $\mathcal{C}$ ,  $S(\mathcal{C})$  é a superfície que contornada por  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi$  é o fluxo do campo magnético que atravessa a superfície  $S(\mathcal{C})$  e  $d\vec{s}$  é um elemento de superfície. A fase quântica (3.6) independe da escolha do campo de calibre  $\vec{A}$  uma vez que ele fornece o mesmo campo magnético  $\vec{B}$ . A fase quântica (3.6) depende do caminho  $\mathcal{C}$  contudo, ela é invariante sobre deformações na superfície  $S(\mathcal{C})$  que mantém o fluxo  $\Phi$  fixo.

É possível, a partir deste exemplo, apresentar o efeito Aharonov-Bohm [34]. Para isto, basta considerar que o fluxo magnético descrito acima encontre-se confinado em um tubo infinito e muito fino que impossibilite completamente a interação entre a partícula e o fluxo. Este fluxo também pode ser obtido por uma série de dipolos magnéticos alinhados ao longo de um solenóide. A função de onda que representa a partícula adquire um fator de fase mesmo em uma região livre da influência do campo eletromagnético. Esta fase é dada pela integral de linha do potencial vetor  $\vec{A}$ , adquire valor não trivial fora do solenóide. Graças a isso, o potencial vetor  $\vec{A}$  deixou de ser tratado apenas como um artifício matemático para a obtenção do campo magnético  $\vec{B}$  e passou a ser interpretado como um parâmetro físico que se manifesta apenas no âmbito da quântico. A comprovação experimental do efeito Aharonov-Bohm foi dada por [37]. Aharonov e Bohm também reproduziram a proposta do experimento para verificar o surgimento de fases geométricas para o caso de uma partícula carregada na presença de um campo elétrico [37, 38, 39]. Neste experimento, uma partícula carregada atravessa um interferômetro experimentando a interação de um potencial escalar homogêneo durante um certo intervalo de tempo. Esta interação gera um deslocamento de fase na energia potencial, mesmo quando nenhuma força atua sobre a partícula na região deste campo, visto que lá o gradiente deste é nulo. Este efeito é conhecido como efeito Aharonov-Bohm Escalar.

Deve-se destacar, que este trabalho realizado por Aharonov-Bohm [34] é datado de 1959, porém somente com a publicação do trabalho de Berry [29] mais de duas décadas depois é que o interesse nas fases geométricas adquiriu força. Em 1980, anterior a publicação deste célebre trabalho, Berry já demonstrava interesse no estudo dos fatores de fase adquiridos pela função de onda, ao publicar um trabalho [89] em que obtém a função de onda exata para o efeito Aharonov-Bohm. Neste trabalho, Berry utilizou o método proposto por Dirac em 1931 [87] para se obter o fator de fase de partículas que interagem com campos externos. Na elaboração dos trabalhos apresentados nesta tese, também se utilizou deste método. Em 1983, Barry Simon interpretou as fases geométricas como holonomias utilizando o conceito de transporte paralelo de um vetor ou espinor por uma curva fechada [90]. Uma revisão bastante pedagógica sobre fases geométricas e que descreve de forma clara esta analogia entre fases geométricas e holonomias foi feita por Anandan [91].

Ainda sobre o trabalho [29], é importante frisar que o fator de fase obtido é de natureza abeliana, supondo que o sistema foi preparado em um autoestado que realizará uma evolução adiabática através de uma trajetória fechada. A remoção da condição de evolução adiabática foi feita por Aharonov e Anandan [30]. Neste trabalho, os autores calcularam uma fase geométrica adquirida pela função de onda quando o sistema realiza uma evolução cíclica. A generalização das fases geométricas abelianas para fases geométricas não-abelianas foi feito por Wilczek e Zee em 1984 [92]. Posteriormente, Samuel e Bhandari [93] obtiveram fases geométricas quânticas no qual consideraram que a evolução do estado quântico que descreve um sistema não é unitária nem tampouco cíclica. Uma extensão ainda mais geral foi feita por Anandan [56]. Ele obteve fases geométricas não-abelianas considerando que a evolução feita pelo sistema não é adiabática. Nesta descrição foi analisada a dinâmica de uma partícula que possui momento de dipolo elétrico e momento de dipolo magnético permanente em interação com o campo eletromagnético. Esta interação se deu no contexto da mecânica quântica não relativística. Anos mais tarde, em 2000, Anandan refaz esta mesma análise mas sob um tratamento covariante e relativístico desta interação entre a partícula e o campo eletromagnético [57].

Um outro efeito associado a ideia de fase geométrica bastante conhecido, foi proposto por Aharonov e Casher em 1984 [40]. Eles realizaram uma adaptação ao trabalho original de Aharonov [34], substituindo o solenóide por uma distribuição linear de cargas e trocando as partículas carregadas por partículas neutras (nêutrons). Com esta correção eles inverteram a experiência e analisaram efeitos de interferência para partículas neutras com momento de dipolo magnético permanente que se movem na presença de um campo elétrico devido a um fio carregado. A função de onda também adquire uma fase geométrica quântica. O efeito Aharonov-Casher foi comprovado experimentalmente em um

---



interferômetro de nêutrons [94] e em um interferômetro atômico de Ramsey [95, 96].

Em um trabalho teórico realizado em 1993 por He e McKellar [41] e de forma independente Wilkens [42] em 1994, foi previsto o surgimento de uma fase geométrica quântica que seria adquirida pela função de onda. Esta fase representaria o estado de uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico permanente, quando esta circula ao redor e paralelamente a uma linha de monopólos magnéticos. Esse efeito é conhecido pela comunidade científica como efeito He-McKellar-Wilkens, e tem sido comprovado experimentalmente em vários trabalhos [97, 98, 99]. Deve-se ressaltar que os monopolos magnéticos de Dirac são partículas que possuem o comportamento de pólos magnéticos isolados o que não é admitido no eletromagnetismo clássico. Recentemente, tais partículas foram observados em campos magnéticos sintéticos gerados por um condensado de Bose-Einstein [100].

A descrição unificada dos efeitos Aharonov-Bohm, Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens foi feita através de uma discussão sobre dualidade eletromagnética de Maxwell por Dowling, Williams e Franson [35]. Através deste estudo, eles obtiveram uma nova fase geométrica quântica, ao qual este novo efeito foi denominado de *efeito Aharonov-Bohm Dual*.

O leitor interessado em mais detalhes sobre a fase de Berry e outros tópicos relacionados a fases geométricas, pode consultar os livros [33, 101] que foram utilizados no embasamento teórico sobre o tema. No caso específico da fase de Berry, é indicado ao leitor a referência [102] para um estudo detalhado do artigo [29] e sobre o efeito Aharonov-Bohm Dual. Um estudo sobre o efeito Aharonov-Bohm e o Efeito Aharonov-Casher utilizando o método de integrais de trajetória de Feynman é encontrado em [103].

A partir da próxima seção até o final deste capítulo serão apresentados parte da contribuição original desenvolvida durante a realização deste doutorado [104, 105, 106]. Como já mencionado, foram obtidas fases geométricas quânticas considerando a dinâmica de partículas em cenários com violação de simetria de Lorentz. Esta violação de simetria torna o espaço tempo anisotrópico, influenciando assim suas propriedades cinemáticas.

## 3.2 Violação da simetria de Lorentz induzida pelo setor de paridade par do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$

Esta seção será dedicada à obtenção de fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula neutra não relativística, induzida para um cenário de violação da simetria de Lorentz. Tal cenário é definido pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$

[104]. Será verificado que este possível cenário de violação da simetria de Lorentz induz um análogo da fase quântica de Anandan [56, 57] e, como um caso particular, será obtido um caso análogo ao efeito Aharonov-Casher [40]. No que segue, serão calculados *bounds* para os parâmetros que violam a simetria de Lorentz.

Para as matrizes definidas em (2.22), é possível considerar somente as que representam o setor paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  tendo componentes não nulas. Com isso, a equação (2.21) torna-se

$$m\psi = i\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} + i\gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{2\rho} \right) \psi + i\frac{\gamma^2}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + i\gamma^3 \frac{\partial\psi}{\partial z} + ig\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbb{E}}\psi - g\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}\psi, \quad (3.7)$$

no qual estão presentes os campos efetivos

$$\mathbb{E}_i = (\kappa_{DE})_{ij} E^j; \quad \mathbb{B}_i = (\kappa_{HB})_{ij} B^j. \quad (3.8)$$

Para a obtenção das fases geométricas, faz-se necessário seguir para o regime de baixas energias. O limite não relativístico da equação de Dirac (3.7) pode, então, ser obtido pela extração da dependência temporal da função de onda devido a energia de repouso [84]. Assim sendo, é necessário escrever o espinor de Dirac na forma  $\psi = e^{-imt}(\eta \ \chi)^T$ , em que  $\eta$  e  $\chi$  são dois espinores correspondendo as componentes forte e fraca, respectivamente. Substituindo esta solução na equação de Dirac (3.7), torna-se possível obter duas equações acopladas para  $\eta$  e para  $\chi$ , descritas por

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} - g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}\eta = \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} - ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{E}} \right] \chi, \quad (3.9)$$

$$2m\chi + i\frac{\partial\chi}{\partial t} + g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}\chi = \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{E}} \right] \eta, \quad (3.10)$$

no qual  $\vec{\pi} = \vec{p} - i\vec{\xi}$  e  $-i\xi_k = -\frac{1}{2\rho}\sigma^3\delta_{2k}$ , conforme descrito em [20, 27].

Uma vez que  $\chi$  é a componente fraca do bispinor de Dirac, é conveniente considerar  $|2m\chi| \gg |i\frac{\partial\chi}{\partial t}|$  e  $|2m\chi| \gg |g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}|$ . Assim, pode-se escrever que

$$\chi \approx \frac{1}{2m} \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{E}} \right] \eta. \quad (3.11)$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.9), chega-se à

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - i\vec{\xi} + g \left( \vec{\sigma} \times \vec{\mathbb{E}} \right) \right]^2 \eta - \frac{g^2\mathbb{E}^2}{2m}\eta + \frac{g}{2m} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{E}} \right) \eta + g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}}\eta, \quad (3.12)$$

que é a equação de Schrödinger-Pauli para um cenário de violação da simetria de Lorentz definido pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Recentemente, os efeitos causados pela violação da simetria de Lorentz foram estudados através da equação (3.12). Como exemplo, pode-se destacar a investigação feita em [82], que descreve correções do momento magnético anômalo de uma partícula carregada, induzida pelo cenário de violação da simetria de Lorentz. Tal cenário, é definido pelo termo  $g\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathbb{B}}$ . No que se refere a este texto, dado a obtenção da equação (3.12), será apresentado na próxima subseção a obtenção propriamente das fases geométricas [104].

### 3.2.1 Fase geométrica quântica de Anandan e efeito Aharonov-Casher induzidos pelo setor de paridade par

Como já mencionado, as fases geométricas serão obtidas através da aplicação do método do fator de fase de Dirac [87, 89]. Neste caso, para equação (3.12), o método permite escrever

$$\eta = \vec{\mathcal{P}} e^{i\phi} \eta_0, \quad (3.13)$$

com  $\vec{\mathcal{P}}$  representando o operador ordenamento de caminho. Da expressão (3.13), pode-se verificar que,  $\eta_0$  é uma solução da equação

$$i \frac{\partial \eta_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - i\vec{\xi} \right]^2 \eta_0 - \frac{g^2 \mathbb{E}^2}{2m} \eta_0 + \frac{g}{2m} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbb{E}}) \eta_0, \quad (3.14)$$

e, além disso, a expressão geral para a fase geométrica adquirida pela função de onda de uma partícula neutra é dada por

$$\phi_A = -g \oint \left[ \vec{\sigma} \times \vec{\mathbb{E}} \right] \cdot d\vec{r} - g \int_0^\tau \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbb{B}} dt. \quad (3.15)$$

A fase geométrica dada na equação (3.15) corresponde ao *análogo* da fase geométrica quântica de Anandan [56, 57]. Esta fase análoga é obtida para um cenário que viola a simetria de Lorentz, definido pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Como descrito em [56, 57], a fase geométrica quântica de Anandan corresponde a um deslocamento de fase adquirido pela função de onda de uma partícula neutra, que possui momento de dipolo magnético permanente. Esta fase, surge devido a interação entre o momento de dipolo magnético e campos elétricos e magnéticos externos. Este deslocamento de fase

corresponde a uma fase geométrica não-abeliana [56, 57], e tem sua expressão dada por

$$\Psi(x^\nu) = \vec{\mathcal{P}} \exp\left(-i \frac{\mu}{\hbar c} \oint a_\nu dx^\nu\right) \Psi_0(x^\nu), \quad (3.16)$$

no qual  $\vec{\mu} = \mu \vec{\sigma}$  é o momento de dipolo magnético permanente de uma partícula neutra e  $a_\nu = (-\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \vec{\sigma} \times \vec{E})$  é um campo de calibre não abeliano [56, 57]. Portanto, a expressão para a fase quântica de Anandan é

$$\phi_{\mathcal{A}} = -\frac{\mu}{\hbar c} \oint (\vec{\sigma} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} - \frac{\mu}{\hbar c} \int_0^\tau \vec{\sigma} \cdot \vec{B} dt, \quad (3.17)$$

no qual  $\tau$  representa o tempo necessário para a partícula percorrer uma trajetória fechada.

A comparação direta entre as expressões (3.15) e (3.17), permite verificar a analogia mencionada com a fase quântica de Anandan. Como consequência, é possível definir o potencial vetor efetivo  $M_\mu = (\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \vec{\sigma} \times \vec{E})$  a partir da equação (3.12). A fase quântica de Anandan em um cenário com violação da simetria de Lorentz foi estudada anteriormente em [26]. Nele, os autores mostram que a fase quântica induzida por um campo vetorial de fundo é uma fase abeliana. Contrário a este resultado, a fase quântica obtida pela equação (3.15) é uma fase *não-abeliana*. Esta diferença entre a natureza abeliana na referência [26] e a natureza não-abeliana da equação (3.15) deriva do cenário que possui a violação da simetria de Lorentz definida pelo campo tensorial na equação (2.6).

Seguindo com a descrição, será apresentado um caso específico, no qual se admite uma configuração de campo definida por um campo elétrico radial produzido por uma distribuição linear de cargas elétricas ao longo do eixo- $z$ . Isto permite então escrever

$$\vec{E} = E^1 \hat{\rho} = \frac{\lambda}{\rho} \hat{\rho}, \quad (3.18)$$

com  $\lambda$  correspondendo a uma densidade linear de cargas elétricas,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\hat{\rho}$  é um vetor unitário na direção radial. Neste caso, a fase quântica de Anandan (3.15) torna-se

$$\phi_{A1} = -\zeta_3 \sigma^3 + \zeta_1 \sigma^1, \quad (3.19)$$

no qual foram definidos os parâmetros  $\zeta_3 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{11}$  e  $\zeta_1 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{31}$ . Como um caso particular, pode-se considerar a matriz  $(\kappa_{DE})_{ij}$  sendo uma matriz diagonal. Assim sendo, a fase quântica de Anandan (3.19) torna-se

$$\phi_{AC} = -2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{11} \sigma^3, \quad (3.20)$$

que corresponde a um análogo do efeito Aharonov-Casher [40] baseado em um cenário de

violação da simetria de Lorentz definido pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Como descrito em [40], Aharonov e Casher investigaram a dinâmica de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético permanente  $\vec{\mu} = \mu\sigma^3\hat{k}$  que interage com um campo elétrico produzido por uma distribuição linear de cargas. A fase geométrica obtidas por eles foi

$$\phi_{AC} = -\frac{\mu}{\hbar c} \oint (\vec{\sigma} \times \vec{E}) \cdot d\vec{r} = -2\pi \frac{\mu\lambda}{\hbar c} \sigma^3, \quad (3.21)$$

no qual  $\lambda$  é a distribuição linear de cargas. Deve-se ressaltar que, a fase geometria quântica (3.20) independe da velocidade da partícula, e consiste em uma fase geométrica não-dispersiva como estabelecido nas referências [107, 108, 109]. Deve ser destacado que, a fase geométrica (3.20) é uma fase não-abeliana devido ao ambiente com violação de simetria de Lorentz definido pelo tensor (2.6). Este resultado é contrário ao apresentado pela referência [26]. Neste trabalho, os autores obtiveram um análogo da fase geométrica de Aharonov-Casher [40], porém, a fase obtida é abeliana, devido a um campo vetorial fixo responsável pela violação da simetria de Lorentz.

Além disso, com o objetivo de fornecer um limite superior (*bound*) para o termo  $g(\kappa_{DE})_{11}$ , que leva a violação da simetria de Lorentz, é conveniente considerar uma capacidade experimental para medir fases geométricas muito pequenas, da ordem de  $10^{-4}$  rad [94, 95, 96], então, pode-se afirmar que, o valor teórico para a fase geométrica induzida para uma partícula neutra, não pode ser maior que este valor, que é,  $|\phi_{AC}| < 10^{-4}$  rad. Assim, supondo que o spin da partícula neutra é *up*, usando que  $|\vec{E}| \approx 10^9$  V/m e  $r_0 = 10^{-5}$  m (no qual em experimentos utilizando anéis mesoscópicos unidimensionais corresponde aos valores usuais para campos elétricos e raio, respectivamente, conforme pode ser verificado em [110, 111, 112, 113, 114]), foi possível estimar um limite superior para a constante  $g(\kappa_{DE})_{11}$  dada por

$$|g(\kappa_{DE})_{11}| < 1.3 \times 10^{-10} (\text{eV})^{-1}. \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Efeito Aharonov-Bohm escalar induzido pelo setor de paridade par

Ainda no contexto associado ao setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ , um outro caso particular considerado refere-se a configuração de um campo fundo dado por

$$\vec{B} = B_0 \hat{z}. \quad (3.23)$$

Neste caso, a fase quântica de Anandan (3.15) torna-se

$$\phi_{A2} = -b_3 \sigma^3 - b_1 \sigma^1 - b_2 \sigma^2, \quad (3.24)$$

no qual foram definidos os parâmetros  $b_3 = g(\kappa_{HB})_{33} B_0 \tau$ ,  $b_1 = g(\kappa_{HB})_{13} B_0 \tau$  e  $b_2 = g(\kappa_{HB})_{23} B_0 \tau$ . É interessante observar que, uma vez considerada a matriz  $(\kappa_{HB})_{ij}$  como uma matriz diagonal, a fase geométrica quântica (3.24) torna-se

$$\phi_{SAB} = -g(\kappa_{HB})_{33} B_0 \tau \sigma^3. \quad (3.25)$$

Os efeitos quânticos associados ao deslocamento de fase dado pela (3.25) correspondem ao *análogo* do efeito Aharonov-Bohm escalar [38, 39, 56, 57]. É importante ressaltar, que, esta fase é baseada em um cenário em que ocorre a violação da simetria de Lorentz definida pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Deve-se observar além disso, que, a fase geométrica (3.25) é uma fase não dispersiva (uma vez que independe da velocidade da partícula neutra) [107, 108, 109] e também uma fase não-abeliana. Além disso, para que um limite superior (*bound*) para o parâmetro que representa a violação da simetria de Lorentz  $g(\kappa_{HB})_{33}$  possa ser estimado, pode-se utilizar valores da ordem de  $10^{-4} rad$ , que se baseiam nas atuais técnicas experimentais de medida destas grandezas [94, 95, 96]. Assim, usando  $B_0 = 1T$  e  $\tau = 17,8 \times 10^{-6} s$  [141], foi estimado o limite superior para a constante

$$|g(\kappa_{HB})_{33}| < 3.2 \times 10^{-24} (eV)^{-1}. \quad (3.26)$$

### 3.3 Violação da simetria de Lorentz induzida pelo setor de paridade ímpar do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$

Esta seção também será dedicada à obtenção de fases geométricas, mas, sob outro aspecto. O cenário agora será definido pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  [105, 106]. Será mostrado que, este outro cenário de violação da simetria de Lorentz também induz um análogo da fase geométrica quântica de Anandan [56, 57], e, como casos particulares, o efeito Aharonov-Bohm escalar [38, 39, 56, 57] e o efeito He-McKellar-Wilkens [41, 42].

Para as matrizes definidas em (2.22), serão consideradas somente as que representam o setor paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Com isso, a equação (2.21) torna-se

$$m\psi = i\gamma^0 \frac{\partial\psi}{\partial t} + i\gamma^1 \left( \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{2\rho} \right) \psi + i\frac{\gamma^2}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + i\gamma^3 \frac{\partial\psi}{\partial z} + ig\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{B}}\psi - g\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\psi, \quad (3.27)$$

no qual encontram-se os campos efetivos

$$\mathbf{E}_i = (\kappa_{HE})_{ij} E^j; \quad \mathbf{B}_i = (\kappa_{DB})_{ij} B^j. \quad (3.28)$$

A equação de Dirac (3.27) apresenta o acoplamento das componentes fortes e fracas do espinor de Dirac  $\psi$  devido a presença do operador  $\vec{\alpha}$ . Além disso, existe uma dependência temporal associada ao campo de radiação externo presente. Uma vez que, o objetivo principal é obter fases geométricas, torna-se necessário discutir o comportamento no limite de baixas energias. Optou-se, agora, pela utilização do método de Foldy-Wouthuysen [84, 115, 116] para esta finalidade. Em 1950, Foldy e Wouthuysen desenvolveram um método que promove a separação do hamiltoniano relativístico da equação de Dirac em termos de operadores pares e ímpares, denotados por  $\hat{\mathcal{E}}$  e  $\hat{\mathcal{O}}$ , respectivamente. Com isso, pode-se escrever

$$\hat{H} = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\mathcal{O}} \quad (3.29)$$

Além disso, estes operadores também devem satisfazer as relações

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{E}}, \hat{\beta}] &= \hat{\mathcal{E}}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\mathcal{E}} = 0; \\ \{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\beta}\} &= \hat{\mathcal{O}}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\mathcal{O}} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Tal separação do operador hamiltoniano é obtida realizando transformações unitárias sobre o espinor  $\psi$  de modo que a lei de transformação  $\psi' = U\psi$  permaneça válida<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>A descrição geral deste método está no **Apêndice A**

Reescrevendo a equação (3.27) na forma da equação (A.1) e aplicando o método de Foldy-

Wouthuysen [84, 115, 116] chega-se a

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = m\hat{\beta}\psi + \hat{\mathcal{E}}\psi + \frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^2\psi, \quad (3.31)$$

com  $\psi$  a partir de agora representando um espinor com duas componentes. Pela equação (3.27), os operadores  $\hat{\mathcal{E}}$  e  $\hat{\mathcal{O}}$  são definidos por

$$\hat{\mathcal{E}} = g\hat{\beta}\vec{\Sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}; \quad \hat{\mathcal{O}} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} - ig\hat{\beta}\vec{\alpha} \cdot \vec{\mathbf{B}}, \quad (3.32)$$

no qual é utilizado  $\vec{\pi} = \vec{p} - i\vec{\xi}$  com o vetor  $\vec{\xi}$  possuindo componentes dadas por  $-i\xi_k = -\frac{\sigma^3}{2\rho}\delta_{2k}$ . O vetor  $\vec{\xi}$  tem origem a partir da conexão espinorial  $\Gamma_\mu(x)$  discutida em [26]. Assim, a equação de Schrödinger-Pauli para o cenário de violação de simetria de Lorentz induzido pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  é dada por

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - i\vec{\xi} + g(\vec{\sigma} \times \vec{\mathbf{B}}) \right]^2 \psi - \frac{g^2\mathbf{B}^2}{2m}\psi + \frac{g}{2m} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}}) \psi + g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\psi. \quad (3.33)$$

Deve-se ressaltar que, na expressão (3.33) estão presentes análogos do potencial vetor e do potencial escalar, dados por

$$\vec{A}_{eff} = \vec{\sigma} \times \vec{\mathbf{B}}; \quad A_0^{eff} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \quad (3.34)$$

### 3.3.1 Fase geométrica quântica de Anandan e o efeito Aharonov-Bohm escalar induzidos pelo setor de paridade ímpar

Seguindo com o objetivo de se obter fases geométricas quânticas, será considerado uma configuração de campo fundo definido por um campo elétrico dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\hat{z}. \quad (3.35)$$

Como já mencionado, as fases geométricas podem ser obtidas pela aplicação do método do fator de fase de Dirac [87, 89] na equação de Schrödinger-Pauli (3.33). Seguindo este método, a função de onda pode ser escrita como

$$\psi = \hat{\mathcal{P}}e^{i\phi_A}\psi_0, \quad (3.36)$$



com  $\hat{\mathcal{P}}$  representando o operador ordenamento de caminho. A função de onda  $\psi_0$  representa a solução da equação de Schrödinger-Pauli livre de campos, isto é,

$$i\frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - i\vec{\xi} \right]^2 \psi_0. \quad (3.37)$$

Aplicando o método de Dirac, chega-se a expressão para a fase geométrica

$$\phi_A = -g \int_0^\tau \vec{\sigma} \cdot \vec{E} dt. \quad (3.38)$$

Considerando o campo definido em (3.35), esta fase pode ser reescrita como

$$\phi_A = -g(\kappa_{HE})_{13} E_0 \tau \sigma^1 - g(\kappa_{HE})_{23} E_0 \tau \sigma^2 - g(\kappa_{HE})_{33} E_0 \tau \sigma^3, \quad (3.39)$$

no qual  $\tau$  é o tempo que a partícula leva para percorrer um caminho cíclico. A fase geométrica (3.39) tem origem a partir do cenário de violação da simetria de Lorentz definida pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Como mencionado anteriormente, Anandan [56, 57] mostrou que a interação entre o dipolo magnético permanente de uma partícula neutra e um campo de calibre  $a_\nu = (-\vec{\sigma} \cdot \vec{B}, \vec{\sigma} \times \vec{E})$ , dá origem a uma fase geométrica dada por (3.17). Por outro lado, é possível definir o campo de calibre  $\mathcal{A}_\nu = (\vec{\sigma} \cdot \vec{E}, \vec{\sigma} \times \vec{B})$  a partir da expressão (3.34). Comparando o campo de calibre  $a_\nu$ , com o campo de calibre  $\mathcal{A}_\nu$ , é possível afirmar que a fase geométrica da expressão (3.39) é um *análogo* da fase geométrica quântica de Anandan, e este resultado encontra-se publicado em [105].

Prosseguindo, busca-se agora investigar um caso particular, obtido quando se considera a matriz  $(\kappa_{HE})_{ij}$ , como uma matriz diagonal. Tal condição, leva a fase geométrica (3.39) a tornar-se

$$\phi_{SAB} = -g(\kappa_{HE})_{33} E_0 \tau \sigma^3. \quad (3.40)$$

Uma rápida análise na expressão (3.40), permite afirmar que o efeito quântico associado ao deslocamento de fase causado por ela é um caso análogo ao efeito Aharonov-Bohm escalar para partículas neutras com momento de dipolo elétrico permanente [38, 39, 56, 57]. Deve-se destacar que, este análogo, está agora baseado no cenário de violação de simetria de Lorentz definido pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . É importante também mencionar que, ambas as fases geométricas (3.39) e (3.40) são fases não-abelianas e não dispersivas [105]. A característica não dispersiva vem do fato delas não dependerem da velocidade da partícula [107, 108, 109]. Ambas as fases são não-abelianas devido ao acoplamento não mínimo (2.6) escolhido para ser utilizado neste trabalho. Como já mencionado, este acoplamento define como se processa a interação entre a partícula neutra e o campo de fundo. Por outro lado, esta característica difere do que foi apresentado na

referência [27]. Neste trabalho, os autores obtiveram uma fase geométrica abeliana, devido a escolha de um outro tipo de acoplamento, que leva a violação de simetria de Lorentz através de um campo vetorial fixo.

### 3.3.2 Análogo do efeito He-McKellar-Wilkens para partículas neutras induzido pelo setor de paridade ímpar

Além de utilizar o método de Foldy-Wouthuysen [84, 115, 116], será descrita também a análise do limite para baixas energias da equação (3.27) através da separação em componentes fortes e fracas. Este limite é atingido extraíndo a dependência temporal presente na função de onda devido a energia de repouso [84]. Deve-se destacar que, a equação (3.27) contém apenas os termos referentes a violação de simetria de Lorentz induzidos pelo setor de paridade ímpar definido através do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . O procedimento se assemelha ao descrito na seção (3.1). O bispinor de Dirac pode ser escrito na forma

$$\psi = e^{-imt}(\eta \ \chi)^T, \quad (3.41)$$

em que  $\eta$  e  $\chi$  são os espinores de Pauli de duas componentes, correspondendo as componentes fortes e fracas respectivamente. Substituindo a expressão (3.41) na equação (3.27), são obtidas duas equações acopladas para  $\eta$  e  $\chi$ , dadas por

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} - g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\eta = \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} - ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{B}} \right] \chi, \quad (3.42)$$

e

$$2m\chi + i\frac{\partial\chi}{\partial t} + g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\chi = \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{B}} \right] \eta, \quad (3.43)$$

com  $\vec{\pi} = \vec{p} - i\vec{\xi}$  e  $-i\xi_k = -\frac{1}{2\rho}\sigma^3\delta_{2k}$ , conforme descrito em [20, 27]. Uma vez que  $\chi$  representa a componente fraca do bispinor de Dirac, então, é conveniente considerar que  $|2m\chi| \gg |i\frac{\partial\chi}{\partial t}|$  e  $|2m\chi| \gg |g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}|$ . Assim, pode ser admitido que

$$\chi \approx \frac{1}{2m} \left[ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} + ig\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{B}} \right] \eta. \quad (3.44)$$

Substituindo a equação (3.44) na equação (3.9), é encontrada a expressão

$$i\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - i\vec{\xi} + g \left( \vec{\sigma} \times \vec{\mathbf{B}} \right) \right]^2 \eta - \frac{g^2\mathbf{B}^2}{2m}\eta + \frac{g}{2m} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} \right) \eta + g\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}\eta, \quad (3.45)$$

que é a equação de Schrödinger-Pauli para o cenário em que existe a violação da simetria de Lorentz definida pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . A equação (3.45)

é semelhante a equação (3.33), porém não foi obtida através da aproximação de Foldy-Wouthuysen [84, 115, 116]. Além disso, é verificado a presença de análogos do potencial vetor e do potencial escalar

$$\vec{A}_{eff} = \vec{\sigma} \times \vec{\mathbf{B}}; \quad A_0^{eff} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}. \quad (3.46)$$

De posse da equação (3.45), será apresentado agora a obtenção das fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula neutra devido ao cenário envolvendo a violação de simetria de Lorentz no setor de calibre do  $CPT$ -par do modelo padrão estendido. Como já mencionado anteriormente, pode-se agora aplicar o método do fator de fase de Dirac [87, 89] na equação de Schrödinger-Pauli (3.45), e, como resultado, obtem-se um análogo da fase geométrica quântica de encontrada por Anandan [56, 57]. A expressão para esta fase análoga é

$$\phi_A = -g \oint [\vec{\sigma} \times \vec{\mathbf{B}}] \cdot d\vec{r} - g \int_0^\tau \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}} dt. \quad (3.47)$$

A expressão (3.47) mostra uma fase geométrica quântica análoga a fase geométrica de Anandan. Contudo, esta fase é oriunda do cenário de violação de simetria de Lorentz, definido através do setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Como mencionado anteriormente, o estudo da influência de um cenário com violação de simetria de Lorentz no surgimento de fases geométricas quânticas de Anandan já foram realizados anteriormente. Por exemplo, na referência [27], mostrou-se que uma fase geométrica quântica de Anandan induzida por um cenário contendo um campo vetorial de fundo, é de característica abeliana. Ao contrário, a fase geométrica quântica análoga obtida (3.47) é não-abeliana. Esta diferença entre a natureza abeliana da fase geométrica obtida em [27] e a natureza não-abeliana da fase dada em (3.47), reside no cenário de violação da simetria de Lorentz definido pelo tipo de campo tensorial presente na equação (2.6).

Agora, como um caso específico, será considerado uma configuração de campo de fundo definido por um campo magnético radial produzido por uma distribuição linear de cargas magnéticas sobre o eixo- $z$ . A escolha desta configuração específica, está baseada nos trabalhos teóricos realizados por He e McKellar [41] e por Wilkens [42]. Diversos experimentos foram realizados para reproduzir a configuração de campo do efeito He-McKellar-Wilkens [97, 98, 99]. Além disso, deve-se destacar que os monopolos magnéticos de Dirac foram observados em campos magnéticos sintéticos [100]. Assim, o campo magnético pode ser escrito por

$$\vec{\mathbf{B}} = B^1 \hat{\rho} = \frac{\lambda_m}{\rho} \hat{\rho}, \quad (3.48)$$

o qual  $\lambda_m$  é uma constante associada com a densidade linear de cargas magnéticas,  $\rho =$

$\sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\hat{\rho}$  é o versor na direção radial. Neste caso, a fase quântica de Anandan (3.47) torna-se

$$\phi_{A1} = -2\pi\lambda_m g(\kappa_{DB})_{11}\sigma^3 + 2\pi\lambda_m g(\kappa_{DB})_{31}\sigma^1. \quad (3.49)$$

Pode-se admitir, como um caso particular, que a matriz  $(\kappa_{DB})_{ij}$  seja uma matriz diagonal. Assim sendo, a fase quântica de Anandan (3.49) torna-se

$$\phi_{HMW} = -2\pi\lambda_m g(\kappa_{DB})_{11}\sigma^3, \quad (3.50)$$

e corresponde a um análogo do efeito He-McKellar-Wilkins [41, 42]. Este caso análogo está baseado no cenário de violação da simetria de Lorentz definida pelo setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  [106]. Deve-se ressaltar que, fase geométrica definida em (3.50) não depende da velocidade da partícula neutra de Dirac. Com isso, ela pode então ser caracterizada como uma fase geométrica quântica não dispersiva [107, 108, 109]. Outro ponto que merece destaque, refere-se ao fato de que, este análogo da fase geométrica quântica de He-McKellar-Wilkins, é uma fase não-abeliana e isto se deve ao cenário de violação de simetria de Lorentz definido pelo campo tensorial presente na equação (2.6). Ao contrário do análogo da fase geométrica quântica de He-McKellar-Wilkins obtida em [27], que é abeliana, devido ao cenário de violação de simetria de Lorentz ser definido por um campo vetorial fixo.

### 3.3.3 Confinamento a um potencial do tipo parede rígida

Será considerado agora, uma partícula não relativística sob a influência dos efeitos da violação da simetria de Lorentz que originaram a fase geométrica quântica expressa em (3.50) em sua função de onda [106]. Pretende-se discutir, o caso em que esta partícula está confinada em uma região do espaço sob a ação de um potencial do *tipo parede rígida*. A ideia reside em investigar os efeitos quânticos associados com o análogo do efeito He-McKellar-Wilkins [41, 42]. Deve-se observar que, das expressões (3.46) e (3.50), é possível escrever

$$g\vec{A}_{eff} = g\vec{\sigma} \times \mathbf{B} = \frac{\phi_{HMW}}{\phi_{0\rho}}\sigma^3\hat{\rho}, \quad (3.51)$$

com  $\hat{\varphi}$  é o versor na direção azimutal em  $\phi_0 = 2\pi$ . Desta forma, a equação de Schrödinger-Pauli (3.45) torna-se

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\eta}{\partial t} &= -\frac{1}{2m} \left[ \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \eta + \frac{1}{2m} \frac{i\sigma^3}{\rho^2} \frac{\partial\eta}{\partial\varphi} + \frac{1}{8m\rho^2} \eta \\ &- \frac{i}{m} \frac{\phi_{\text{HMW}}}{\phi_0 \rho^2} \frac{\partial\eta}{\partial\varphi} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\phi_{\text{HMW}}}{\phi_0 \rho} \right)^2 \eta - \frac{1}{2m} \frac{\phi_{\text{HMW}}}{\phi_0 \rho^2} \eta. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Pode-se verificar que, os operadores  $\hat{p}_z = -i\partial_z$  e  $\hat{J}_z = -i\partial_\varphi$  [85] comutam com o hamiltoniano do lado direito da equação (3.52). Assim sendo, pode-se ver que,  $\eta$  é uma autofunção de  $\sigma^3$  na equação (3.52), e, além disso, escrever que  $\sigma^3\eta_s = \pm\eta_s = s\eta_s$ . A solução da equação (3.52) pode ser escrita em termos dos autovalores dos operadores acima como

$$\eta_s = e^{-i\mathcal{E}t} e^{i(l+\frac{1}{2})\varphi} e^{ikz} R_s(\rho), \quad (3.53)$$

com  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e  $k$  é uma constante. Substituindo a expressão (3.53) na equação (3.52), obtém-se:

$$R_s'' + \frac{1}{\rho} R_s' - \frac{\tau^2}{\rho^2} R_s + \beta^2 R_s = 0, \quad (3.54)$$

com

$$\begin{aligned} \tau &= l + \frac{1}{2}(1-s) + s \frac{\phi_{\text{HMW}}}{\phi_0}; \\ \beta^2 &= 2m\mathcal{E} - k^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

De agora em diante, será considerado  $k = 0$  para que este sistema seja planar. É importante ressaltar que, a equação radial (3.53) corresponde a equação diferencial de Bessel [117]. A solução geral desta equação é  $R_s(\rho) = A J_\tau(\beta\rho) + B N_\tau(\beta\rho)$ , com as funções  $J_\tau(\beta\rho)$  e  $N_\tau(\beta\rho)$  como funções de Bessel de primeiro e segundo tipo. Diante disso, pode-se supor que a função de onda da partícula seja contínua e perfeitamente definida na origem, tendendo a zero em um raio fixo  $\rho_0$ . Uma vez que, a função  $N_\tau(\beta\rho)$  diverge na origem, deve-se considerar  $B = 0$ , além disso, escrever a solução para a equação (3.53) como  $R_s(\rho) = A J_{|\tau|}(\beta\rho)$ , conforme a referência [118]. Portanto, assumindo que  $\beta\rho_0 \gg 0$ , então, pode-se escrever [117, 118]

$$J_{|\tau|}(\beta\rho_0) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi\beta\rho_0}} \cos\left(\beta\rho_0 - \frac{|\tau|\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.56)$$

Com isso, através das equações (3.55) e (3.56), além de impor que  $R_s(\rho_0) = 0$ , obtem-se que,

$$\mathcal{E}_{n,l,s} \approx \frac{1}{2m\rho_0^2} \left[ n\pi + \frac{\pi}{2} \left| l + \frac{1}{2}(1-s) + s \frac{\phi_{\text{HMW}}}{\phi_0} \right| + \frac{3\pi}{4} \right]^2, \quad (3.57)$$

com  $n = 0, 1, 2, \dots$  sendo os números quânticos associados com os modos radiais.

Assim, o espectro de energia dado pela equação (3.57), são os níveis de energia para partículas neutras com spin 1/2, confinadas sob um potencial do tipo parede dura [106]. Estas partículas são influenciadas por um cenário de violação de simetria de Lorentz no setor de calibre  $CPT$ -par do modelo padrão estendido. Esta influência está presente na expressão (3.52). É importante ressaltar que os níveis de energia expressos em (3.57) são dependentes do análogo da fase geométrica quântica de He-McKellar-Wilkens obtida na expressão (3.52) cuja periodicidade é  $\phi_0 = 2\pi$ , isto é,  $\mathcal{E}_{n,l,s}(\phi_{\text{HMW}} + \phi_0) = \mathcal{E}_{n,l+1,s}(\phi_{\text{HMW}})$ .

### 3.4 Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados a primeira parte dos nossos resultados originais obtidos durante a realização deste doutorado [104, 105, 106]. É um capítulo exclusivamente voltado para a obtenção de fases geométricas quânticas. Após uma descrição básica sobre a origem e a evolução do estudo de fases geométricas quânticas na física, foi mostrado como essas fases geométricas foram obtidas a partir da dinâmica de partículas em cenários em que ocorre a violação de simetria de Lorentz. Para isto, foi necessário encontrar o limite não relativístico da equação de Dirac que apresenta com o termo de acoplamento não mínimo contendo o tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Foram obtidas fases geométricas para o setor de paridade par e também para o setor de paridade ímpar deste tensor.

## Capítulo 4

# Holonomias quânticas

*Neste Capítulo, serão apresentados a última parte dos resultados originais desenvolvidos durante a realização deste doutorado [104, 105, 106]. Especificamente ele se refere a obtenção de holonomias quânticas a partir das fases geométricas quânticas. Como descrito no Capítulo 3, foram obtidas fases geométricas quânticas para partículas considerando o setor de paridade par e também para o setor de paridade ímpar do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Neste capítulo, será descrita a utilização destas fases geométricas para se construir holonomias quânticas, o qual desempenham um papel relevante para computação quântica holonômica desenvolvida por Zanardi e Rasetti [47].*

### 4.1 Introdução

Desde meados da década de 90, o mundo tem assistido a expansão do uso da internet para os mais diversos tipos de finalidade, inclusive para a realização de transações bancárias. Os motivos desta expansão se devem a comodidade, agilidade e em especial a segurança que estas transações adquiriram com a utilização do algoritmo de criptografia RSA [119]. Este algoritmo permitiu que estas operações pudessem ser realizadas com êxito devido a sua forma de funcionamento, em que a chave de codificação é pública, permitindo que qualquer pessoa codifique mensagens, mas a chave de decodificação é privada. De forma bastante resumida, é verificado que a chave de codificação é um número  $n$  resultado do produto de dois números primos  $p$  e  $q$ , isto é,  $n = pq$ . A chave para decodificação refere-se então em conhecer que são os número  $p$  e  $q$ . Decifrar a criptografia RSA implica na fatoração do número  $n$ . Atualmente, tem se usado  $n$  contendo algo em torno de 150 algarismos. Com os recursos computacionais de hoje, para se realizar a fatoração pelos métodos matemáticos tradicionais, seriam necessários alguns milhares de anos [119].

Em 1994, o matemático Peter Shor desenvolveu um algoritmo eficiente para fatorar números primos [46]. Seu algoritmo diminui consideravelmente o tempo necessário para a fatoração de números primos de tamanho qualquer. Esta vantagem, vem do fato deste algoritmo requerer um número de passos em ordem polinomial, sendo necessário para isso, a utilização de um computador quântico. A partir de então, surgiram diversas formas de implementar-se a computação quântica, utilizando para isso, átomos [120], íons [121] e até pontos quânticos [122]. Ainda não se conseguiu uma forma de se realizar um computador quântico que possa manipular o qubits sem causar decoerência (que é a perda de informação contida no qubit para o ambiente) nestes sistemas. A utilização de fases geométricas neste aspecto é um dos ramos da computação quântica que é conhecida como *computação quântica holonômica* [47, 49, 50, 51].

Nos últimos anos um grande número de trabalhos tem estudado holonomias sob o ponto de vista clássico [123, 124, 125, 126, 127]. As transformações unitárias, denominadas transformações holônomas, medem a mudança na direção de um vetor ou espinor quando estas quantidades matemáticas realizam um transporte paralelo entre dois pontos distintos, seja através de caminhos diferentes ou ao redor de um caminho fechado. Pode-se dizer que holonomia corresponde a uma matriz que representa o transporte paralelo entre vetores, espinores, etc., em torno de uma trajetória fechada gerando informação sobre a topologia ou curvatura de uma dada variedade [123, 124, 125, 126, 127].

Do ponto de vista quântico, o destaque para holonomias surgiu quando estas foram interpretadas como fases geométricas por Barry Simon [90] em um trabalho realizado em 1983. Simon foi motivado a esta interpretação devido a influência do trabalho realizado três anos antes por Michael Berry [89], que obteve a expressão exata para a função de onda do efeito Aharonov-Bohm. Holonomias quânticas não-abelianas são uma generalização das fases geométricas abelianas.

O estudo de holonomias tem despertado forte interesse na comunidade científica uma vez que estas grandezas podem ser utilizadas para construir portas lógicas quânticas para manipular estados de qubits [51]. Estas portas lógicas são análogas quântico das portas lógicas encontradas em microprocessadores atualmente. A computação quântica holonômica foi proposta por Zanardi e Rasetti [47] e é baseada sobre evoluções cíclicas adiabáticas com o objetivo de implementar portas quânticas [134] utilizando transformações unitárias definidas como holonomias quânticas. A formalização matemática do uso da computação quântica holonômica foi feita por Pachos e Zanardi em 2001 [49]. Experimentalmente, dentre os vários sistemas adotados, pode-se destacar que já implementaram a computação quântica holonômica em sistemas ópticos [128], em sistemas de cavidades utilizando átomos neutros [129] e em dispositivos com junções Josephson [130].



## 4.2 Portas lógicas para qubits

Como já mencionado, uma das propostas originais desenvolvidas [104, 105, 106] e descritas nesta tese, é utilizar as fases geométricas quânticas obtidas a partir de um ambiente com violação de simetria de Lorentz, descritas no capítulo anterior, para compor holonomias quânticas. Antes da descrição dos resultados, será feita agora uma revisão simples sobre portas lógicas para manipular qubits. Optou-se por seguir a sequência desenvolvida em [131] por ser a mais adequada para servir de suporte teórico ao trabalho desenvolvido nesta tese e que será descrito nas próximas seções. O leitor interessado em mais detalhes, pode buscar por exemplo, a referência [132].

### 4.2.1 Qubits - definição

A unidade fundamental da computação quântica é denominada *qubit*. É um elemento análogo ao bit, que é como unidade fundamental para se processar informação de maneira clássica. O bit clássico é tratado como um objeto matemático que deve possuir dois estados distintos, como verdadeiro ou falso, sim ou não, ou simplesmente assumir os valores “0” ou “1”. Seu análogo quântico, o qubit, é relacionado a um sistema de dois níveis. Do ponto de vista físico, estes podem ser por exemplo a polarização de fótons ou estados eletrônicos do átomo. Para construir um qubit, basta que se tome um sistema físico que possa ser descrito pelos vetores de estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Diz-se que um sistema quântico possui  $n$  qubits se o vetor de estado é definido em um espaço de Hilbert de  $2^n$  dimensões, possuindo  $2^n$  estados quânticos mutuamente ortogonais. Assim, os estados ortogonais de um qubit são vetores da base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , o que permite escrever o qubit como

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad (4.1)$$

no qual  $a$  e  $b$  são números complexos. Posto de outra forma, o estado de um qubit nada mais é que um vetor que faz parte de um espaço vetorial complexo de duas dimensões, e  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são denominados *base computacional* ou *estados lógicos*.

Vetores pertencentes a base podem ser definidos a menos de uma fase global, que não apresenta significado físico. Os números complexos  $a$  e  $b$  obedecem à condição de normalização,

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (4.2)$$

Assim, pode-se escolher  $a$  como real e positivo,  $b$  como complexo (exceto para o estado

de base  $|\psi\rangle = |\psi\rangle$ , onde  $a = 0$  e  $b = 1$  real) de forma que o estado genérico de um qubit pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \quad (4.3)$$

Da expressão (4.3), verifica-se que, o qubit é parametrizado por variáveis contínuas  $a$  e  $b$  (ou  $\theta$  e  $\phi$ ). Tal parametrização, pode levar a se interpretar que estes objetos possam conter uma quantidade de informação, mas baseado na mecânica quântica a medida de um qubit (projetando-o na base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ ) resulta em encontrarmos o estado 0 com probabilidade  $|a|^2$  ou o estado 1 com probabilidade  $|b|^2$ , o que remete ao qubit apenas um bit de informação.

## 4.2.2 Esfera de Bloch

Uma representação útil de qubits, (4.3), é sobre a superfície de uma esfera, chamada de esfera de Bloch, Figura (4.1).

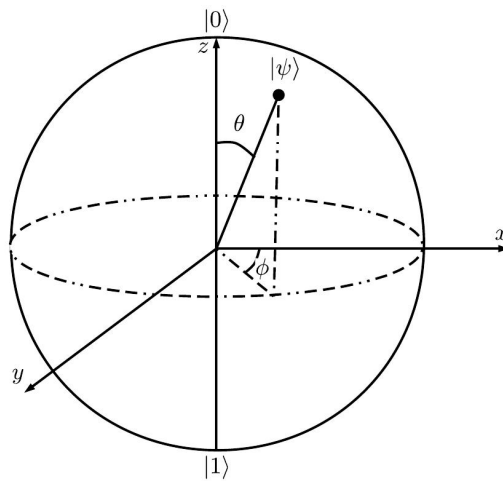


Figura 4.1: Um qubit representado na esfera de Bloch.

Esta é uma representação geométrica de um qubit que permite visualizá-lo assim como as transformações que são possíveis de serem realizadas no seu estado. Uma vez que  $a$  e  $b$  satisfazem a condição de normalização (4.2), o estado do qubit pode ser representado por um ponto em uma esfera de raio unitário, em que  $\theta$  e  $\phi$  definem este ponto.

Uma outra forma de visualizar a esfera de Bloch é pensa-la como um espaço de coor-

denadas cartesianas em três dimensões, tal que o estado (4.1) possa ser escrito como

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{1/2} \\ \left(\frac{x+iy}{2(1+z)}\right)^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

com  $x = \cos\phi\sin\theta$ ,  $y = \sin\phi\sin\theta$  e  $z = \cos\theta$ . Portanto, as componentes  $(x, y, z)$  do vetor de Bloch representam um ponto sobre a esfera de Bloch, devendo satisfazer a condição  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

### 4.2.3 Portas lógicas

Assim como na computação clássica, a computação quântica possui seu próprio conjunto de portas universais que permitem aproximar a qualquer outra porta lógica para se implementar qualquer computação complexa. Por *portas lógicas quânticas* entende-se operações unitárias simples em qubits que preservam a condição de normalização (4.2), podendo ser descritas por matrizes unitárias  $2 \times 2$ . Considere uma matriz  $X$ ,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Escrevendo o estado  $a|0\rangle + b|1\rangle$  na notação de matricial, pode-se então fazer a seguinte operação

$$X \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Para que uma matriz possa representar uma porta lógica quântica, ela deve ser unitária. Ela deve satisfazer a única condição que define o que vem a ser uma matriz unitária  $U$ , ou seja, que  $U^\dagger U = \hat{1}$ , no qual  $U^\dagger$  é a matriz adjunta de  $U$  e  $\hat{1}$  a matriz identidade (ambas  $2 \times 2$ ). Assim sendo, *qualquer matriz unitária* determina uma porta lógica quântica válida e deste fato segue que existem infinitas matrizes  $2 \times 2$ , isto é, infinitas portas para um qubit.

Baseado neste fato, as matrizes de Pauli são exemplos de portas lógicas quânticas de um qubit representadas por

$$X \equiv \sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \equiv \sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Z \equiv \sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

A porta  $X$  é conhecida como porta NOT. Outras portas de um qubit são as de Hadamard, Fase  $S$  e a porta  $T$ , também conhecida como porta  $\pi/8$ . Em notação matricial, estas portas são

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Portas lógicas quânticas movem o estado do qubit,  $|\psi\rangle$ , de um ponto a outro sobre a esfera de Bloch. As rotações são feitas em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  na esfera de Bloch. Uma rotação na direção do vetor unitário  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$  é dada pelo operador unitário  $\mathcal{R}_n$  representado por

$$\mathcal{R}_n = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cos\frac{\theta}{2}\hat{1} - i(n_x\sigma^x + n_y\sigma^y + n_z\sigma^z)\sin\frac{\theta}{2}. \quad (4.9)$$

Na expressão (4.9)  $\hat{1}$  representa a matriz identidade  $2\times 2$ , além disso, é utilizado a definição matemática da função exponencial de uma matriz,  $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$  na última igualdade.

É possível decompor qualquer transformação unitária sobre um qubit em rotações sobre o eixo  $z$  e sobre o eixo  $y$ , a menos de um fator de fase global  $\alpha$ . Este importante resultado está enunciado em um teorema de grande utilidade na computação quântica:

**Teorema 4.2.1** *Seja  $\mathbb{U}$  uma transformação unitária sobre um qubit simples. Então existem números reais  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  tais que*

$$\mathbb{U} = e^{i\alpha}\mathcal{R}_z(\beta)\mathcal{R}_y(\gamma)\mathcal{R}_z(\delta) \quad (4.10)$$

A demonstração deste teorema será omitida. O leitor interessado pode encontrá-la em [132].

Outra porta lógica quântica importante é a *não-controlada*, CNOT. Esta porta é um exemplo de porta no espaço de dois qubits. Sua definição é na base computacional com  $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|x\oplus y\rangle$ , onde o símbolo  $\oplus$  representa soma módulo dois, isto é,  $1\oplus 1 = 0$ ,  $0\oplus 0 = 0$ ,  $1\oplus 0 = 1$  e  $0\oplus 1 = 1$ , [133]. Este resultado pode ser escrito na forma matricial, isto é,

$$U_{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

É importante destacar que esta porta lógica ficará apta quando o primeiro qubit, chamado qubit de controle, estiver no estado lógico  $|1\rangle$ , permitindo a mudança do estado lógico do segundo qubit, o chamado alvo.

Pode-se construir um conjunto de portas quânticas para um ou dois qubits as quais nos possibilitem fazer qualquer rotação de um qubit na esfera de Bloch. Tal conjunto de portas lógicas são chamados de *conjunto de portas universais*. Em computação quântica o conceito de universalidade está relacionado a uma operação unitária qualquer (rotação na esfera de Bloch) que pode ser construída com precisão arbitrária através de um circuito quântico envolvendo somente aquelas portas. Por circuito quântico, entende-se uma sequência de portas lógicas quânticas atuando sobre vários qubits. O conjunto de portas (Hadamard, Fase, porta  $T$  e CNOT) constituem um conjunto universal de portas lógicas quânticas. Após o processamento dos qubits a leitura destes é realizada por meio de medidas projetivas ou generalizadas.

### 4.3 Computação quântica holonômica não abeliana

A computação quântica holonômica para fases geométricas não abelianas é definida no autoespaço expandido a autovetores de uma família de operadores Hamiltonianos [49]

$$\mathcal{F} = \{H(\lambda) = \mathcal{U}(\lambda)H_0\mathcal{U}^\dagger(\lambda); \lambda \in \mathcal{M}\}, \quad (4.12)$$

no qual  $\mathcal{U}(\lambda)$  é um operador unitário, que pertence ao grupo  $SU(D)$ .  $\lambda$  corresponde ao parâmetro de controle que pode ser mudado adiabaticamente ao longo de um caminho fechado, definido em uma variedade de controle  $\mathcal{M}$ . Esta variedade é considerada como um espaço de parâmetros de dimensão  $D$ , podendo ser descrita como  $\mathcal{M} = \{\lambda^\mu, \mu = 1, \dots, D\}$ . Através da definição da variedade  $\mathcal{M}$ , verifica-se que o hamiltoniano  $H(\lambda)$  possui também dimensão  $D$  [49].

A ação do operador unitário  $\mathbb{U}(\lambda)$  sobre um estado inicial  $|\psi_0\rangle$ , levando-o a um estado final  $|\psi\rangle = \mathbb{U}(\lambda)|\psi_0\rangle$ , dá origem a uma porta quântica [134]. A expressão geral da ação deste operador unitário é dada por

$$|\psi\rangle = \mathbb{U}(\lambda)|\psi_0\rangle = e^{-i\int_0^t E(t')dt'} \Gamma_A(\lambda)|\psi_0\rangle, \quad (4.13)$$

com  $e^{-i\int_0^t E(t')dt'}$  e  $\Gamma_A(\lambda)$ . O primeiro corresponde a *fase dinâmica* e o segundo corresponde a *holonomia*, respectivamente.

Pode-se considerar que, o estado fundamental de  $H_0$  (4.12), consiste de um subespaço degenerado  $n$ -dimensional,  $\mathcal{H}_0 = \{|\psi^\alpha\rangle, \alpha = 1, \dots, n\}$  com energia  $E_0$  e uma energia de gap  $\Delta E$  que separa este subespaço dos estados excitados. Baseado na referência [30], a fase dinâmica pode ser omitida pela redefinição dos níveis de energia (por exemplo, considerando  $E(0) = 0$ ), o que permite estudar o aparecimento de fases geométricas em qualquer evolução cíclica em sistemas quânticos. Esta escolha permite omitir o termo referente a fase dinâmica,  $e^{-i \int_0^t E(t') dt'}$ , presente na expressão (4.13), que torna-se

$$|\psi\rangle = \mathbb{U}(\lambda) |\psi_0\rangle = \Gamma_A(\lambda) |\psi_0\rangle \quad (4.14)$$

O objetivo agora será apresentar uma expressão para  $\Gamma_A(\lambda)$ . Considere um sistema físico em um certo autoestado de  $\mathcal{H}_0$ . Se a mudança do parâmetro de controle físico  $\lambda$  é feita lentamente no tempo quando comparado com a escala de energia de gap  $\Delta E$ , então a evolução é dita adiabática. Isto feito, garante que os estados acessíveis ao sistema estão restritos a estados que compõem  $\mathcal{H}_0$ . A expansão de um caminho fechado  $\mathcal{C}$  no espaço de parâmetros  $\mathcal{M}$  resulta em uma evolução governada por um elemento do grupo unitário  $n$ -dimensional  $U(n)$ , [48]. Temos então que  $\mathcal{C} : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(T)$  em que  $T$  é o período de evolução. Esta evolução atua em um algum estado inicial da seguinte forma

$$|\psi(\mathcal{C})\rangle = \Gamma_A(\mathcal{C}) |\psi(0)\rangle, \quad (4.15)$$

no qual  $|\psi(0)\rangle$  e  $|\psi(\mathcal{C})\rangle$  ambos pertencem a  $\mathcal{H}_0$ . O passo seguinte para se obter uma expressão para  $\Gamma_A(\mathcal{C})$ , será considerar o operador evolução com a forma [49]

$$\mathbb{U}(0, T) = \mathbf{T} \exp \left( -i \int_0^T H(\lambda) dt \right), \quad (4.16)$$

no qual  $H(\lambda)$  é um hamiltoniano membro da família  $\mathcal{F}$  definida na expressão (4.12) e  $\mathbf{T}$  representa o operador ordenamento temporal.

Pode-se dividir o intervalo temporal de uma evolução cíclica,  $[0, T]$ , em  $N$  segmentos iguais  $\Delta t$  e definir  $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}(\lambda(t_i))$  para  $i = 1, \dots, N$ . Com isso, o operador evolução na expressão (4.16) assume forma

$$\begin{aligned} \mathbb{U}(0, T) &= \mathbf{T} e^{-i \int_0^T \mathcal{U}(\lambda) H_0 \mathcal{U}^\dagger(\lambda) dt} = \mathbf{T} \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-i \sum_{i=1}^N \mathcal{U}_i H_0 \mathcal{U}_i^\dagger \Delta t} \\ &= \mathbf{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \mathcal{U}_i e^{-i H_0 \Delta t} \mathcal{U}_i^\dagger. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Como  $\Delta t$  torna-se muito pequeno quando tem-se limite de  $N \rightarrow \infty$ , fica garantida a terceira igualdade em (4.17) [49]. Isto significa que, o produto  $\mathcal{U}_i^\dagger \mathcal{U}_{i+1}$  de duas unitárias

sucessivas dá origem a uma rotação infinitesimal da forma

$$\mathcal{U}_i^\dagger \mathcal{U}_{i+1} \approx \hat{1} + \mathbf{A}_i \cdot \Delta \lambda_i, \quad (4.18)$$

com

$$(A_i)_\mu = \mathcal{U}_i^\dagger \frac{\Delta \mathcal{U}_i}{\Delta (\lambda_i)_\mu}. \quad (4.19)$$

Na expressão (4.19), a conexão  $A$  possui no tempo  $t_i$  componentes  $(A_i)_\mu$  com  $\mu = 1, \dots, d$  [49]. Assim, o operador evolução  $\mathbb{U}(0, T)$  pode ser escrito como

$$\mathbb{U}(0, T) = \mathbf{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathcal{U}_N \left( \hat{1} - i H_0 N \cdot \Delta t + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}_i \cdot \Delta \lambda_i \right) \mathcal{U}_1^\dagger. \quad (4.20)$$

Na expressão (4.20) as transformações inicial  $\mathcal{U}_1$  e final  $\mathcal{U}_N$  são idênticas para um caminho fechado quando correspondem ao mesmo ponto do parâmetro de contorne  $\mathcal{M}$ . Com uma reparametrização, estas transformações podem ser consideradas a transformação identidade [49], isto é,  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_N = \hat{1}$ . Agora torna-se possível considerar a ação do operador  $\mathbb{U}(0, T)$  sobre um estado inicial  $|\psi(0)\rangle$  que pertence a  $\mathcal{H}_0$ . Se a condição de adiabaticidade da evolução é mantida, então em cada instante de tempo  $t_i$  o estado  $|\psi(t_i)\rangle$ , permanecerá em  $\mathcal{H}_0$ . Como este autoespaço é caracterizado pelo autovalor  $E_0 = 0$ , o termo associado a  $H_0$  na expressão (4.20) pode ser omitido, assim,

$$\mathbb{U}(0, T) = \mathbf{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \hat{1} + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}_i \cdot \Delta \lambda_i \right) = \mathbf{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} A(\lambda) \cdot d\lambda, \quad (4.21)$$

ou seja,

$$\Gamma_A(\mathcal{C}) = \mathbf{P} \exp \oint_{\mathcal{C}} A(\lambda) \cdot d\lambda. \quad (4.22)$$

Pela expressão (4.22) verifica-se que,  $\Gamma_A(\mathcal{C}) \in \mathbb{U}(n)$ . Além disso, a conexão é definida por  $A = \Pi(\lambda) \mathbf{A}(\lambda) \Pi(\lambda)$ , o qual  $\Pi(\lambda)$  representa o projetor sobre  $\mathcal{H}_0$  devido a condição de adiabaticidade [49]. A conexão é equivalente a

$$A^{\alpha\beta} = \langle \psi^\alpha(\lambda) | \partial / \partial \lambda | \psi^\beta(\lambda) \rangle. \quad (4.23)$$

Ainda sobre a expressão (4.22), é importante notar que o operador ordenamento temporal  $\mathbf{T}$  foi substituído pelo operador ordenamento de caminho  $\mathbf{P}$ . Esta substituição torna claro como a holonomia aparece do operador evolução através da imposição da condição de adiabaticidade para uma evolução fechada [49]. De acordo com a referência [47],  $\Gamma_A(\lambda)$

é uma fase geométrica não abeliana, uma vez que a dimensão de  $\mathcal{H}_0$  é maior que um, isto é,  $\dim \mathcal{H}_0 \geq 1$ . Contudo, se  $\dim \mathcal{H}_0 = 1$  esta fase geométrica torna-se abeliana e idêntica a fase de Berry. O termo  $A(\lambda)$  é uma conexão 1-forma denominada conexão 1-forma de Mead-Berry [33] e é também chamado de potencial de calibre. A descrição feita acima, é útil, principalmente por apresentar o papel do potencial de calibre nas holonomias, especialmente as não-abelianas.

No contexto atual da computação quântica holonômica, a utilização da aproximação adiabática nas metodologias utilizadas para se obter as holonomias, ainda é o procedimento mais usado [48]. Isto mantém a concordância com a proposta original para computação quântica holonômica feita por Zanardi e Rasetti [47]. Para o desenvolvimento deste trabalho de doutorado, optou-se por seguir na contramão deste processo. Em 1987, Aharonov e Anandan publicaram um trabalho [30] em que mostram a possibilidade de se obter  $\Gamma_A$  para uma evolução cíclica sem utilizar a aproximação adiabática. Baseado nesta possibilidade de obter fases quânticas geométricas sem utilizar a aproximação adiabática, como mostrado em [30], portas quânticas de um qubit associados com defeitos topológicos [135, 136] tem sido estudadas para partículas neutras [137] e no cenário em que existe a violação da simetria de Lorentz [138]. No caso de portas quânticas associadas a defeitos topológicos para partículas neutras, o leitor interessado pode encontrar boas referências em [131]. Outros estudos que consideraram fases geométricas quânticas para evolução não adiabáticas, propondo novos modelos para implementar a computação quântica podem ser encontrados nas referências [52, 53, 54, 55].

Nas próximas seções, serão apresentados parte dos resultados originais desenvolvidos durante a realização deste doutorado, no contexto das holonomias quânticas [104, 105, 106]. Com a utilização das fases geométricas quânticas do tipo Aharonov-Anandan descritas no capítulo anterior, foram obtidas holonomias quânticas. Estas grandezas são essenciais para a realização de computação quântica holonômica/geométrica [47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. Será mostrado que, as holonomias obtidas dependem dos valores associados aos parâmetros que violam a simetria de Lorentz, por exemplo, o resultado obtido na equação (3.22). Desta forma, admitindo a possibilidade de se detectar os efeitos da violação da simetria de Lorentz, os parâmetros de controle  $\lambda$  serão então definidos através dos termos relacionados a violação da simetria de Lorentz. O que, neste caso, podem ser conhecidos ou mesmo determinados previamente.



## 4.4 Holonomias quânticas em um cenário de violação da simetria de Lorentz induzido pelo setor de paridade par do tensor $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$

Para a obtenção das holonomias, é útil, primeiramente, definir os estados lógicos ou estados da base computacional. Optou-se por considerar a base representando o spin de uma partícula neutra, ou seja,

$$|0_L\rangle = |\uparrow\rangle; \quad |1_L\rangle = |\downarrow\rangle, \quad (4.24)$$

com  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  correspondendo ao spin up e spin down, respectivamente, O spin da partícula sendo polarizado inicialmente sobre o eixo-z. Esta escolha, é justificada pelo acoplamento entre a partícula e o campo de fundo presente no ambiente com a violação da simetria de Lorentz. É importante mencionar alguns outros trabalhos que também consideraram uma base lógica definida através do spin de uma partícula neutra. Pode-se citar, por exemplo, a referência [139], no qual foi escolhida base semelhante devido ao acoplamento do spin de um elétron com um defeito do tipo torção em um sólido cristalino. Ou a referência [140], que optou por uma base deste tipo motivado por um acoplamento do tipo spin-órbita.

### 4.4.1 Configuração de campo: $\vec{E} = E^1 \vec{\rho}$

Na subseção (3.1.1), descreveu-se o surgimento de fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula não relativística, no contexto da violação de simetria de Lorentz. Considerou-se uma configuração de campo de fundo definido por um campo elétrico radial produzido por uma distribuição linear de cargas elétricas sobre o eixo-z. Com isto, mostrou-se como foi obtida um análogo da fase quântica de Anandan, através da expressão (3.19). Através das expressões (4.15) e (4.22), pode-se verificar que, o transporte paralelo de espinores, definidos pela equação (4.24), ao redor de um caminho fechado, é gerado por uma holonomia quântica associada a fase geométrica (3.19). A holonomia terá então a forma

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) = \exp(-i\zeta_3\sigma^3 + i\zeta_1\sigma^1). \quad (4.25)$$

Uma vez que, a transformação holônoma (4.25) possui a soma de duas matrizes que não comutam dentro do argumento da função exponencial, com isto, verifica-se que  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ . Assim, para simplificar o operador unitário (4.25) agindo sobre os estados lógicos

(4.24), será utilizado a fórmula Zassenhaus

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \dots, \quad (4.26)$$

no qual  $A$  e  $B$  são matrizes. Com isto, pode-se reescrever a equação (4.25) na forma [137, 138]

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) \approx e^{-i\zeta_3\sigma^3} e^{i\zeta_1\sigma^1} e^{-i\zeta_3\zeta_1\sigma^2}, \quad (4.27)$$

com os parâmetros  $\zeta_1 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{31}$  e  $\zeta_3 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{11}$ . É importante ressaltar que, foram descartados os termos  $\mathcal{O}(\zeta_1^2, \zeta_3)$  e  $\mathcal{O}(\zeta_3^2, \zeta_1)$ , além dos termos de ordem superior, por serem termos muito pequenos. Utilizando a definição matemática da função exponencial de uma matriz, isto é,

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \quad (4.28)$$

pode-se reescrever a expressão (4.27) da seguinte forma

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) \approx q_0 I + iq_1 \sigma^1 - iq_2 \sigma^2 + iq_3 \sigma^3. \quad (4.29)$$

Na expressão (4.29), verifica-se que, os parâmetros  $q_k$  são definidos como

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \zeta_3 \cos \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_3 \sin \zeta_1 \zeta_3, \\ q_1 &= \cos \zeta_3 \sin \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3 + \sin \zeta_3 \cos \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3, \\ q_2 &= \cos \zeta_3 \cos \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3 - \sin \zeta_3 \sin \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3, \\ q_3 &= \cos \zeta_3 \sin \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3 - \sin \zeta_3 \cos \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Assim, o último passo para definir a holonomia quântica induzida pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  (4.29), como válida na computação quântica holonômica/geométrica estabelecida em [47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55], é considerar os parâmetros  $\zeta_3 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{11}$  e  $\zeta_1 = 2\pi\lambda g(\kappa_{DE})_{31}$  como parâmetros de controle. Tal consideração é válida, uma vez que, pode-se conhecer ou determinar os valores dos produtos  $\lambda g(\kappa_{DE})_{11}$  e  $\lambda g(\kappa_{DE})_{31}$  previamente. Este conhecimento prévio, se baseia nos valores da incerteza em medidas das fases geométricas. Assim, com esses valores, juntamente com valores típicos de parâmetros envolvidos na medidas das fases, permite que se estime os valores dos parâmetros associados a violação de simetria de Lorentz. Processo semelhante a este foi descrito no Capítulo 3, para se obter as expressões (3.22) e (3.26). A aplicação das transformações unitárias definidas pelas equações (4.29) e (4.30) aos estados lógicos (4.24), equivale a fazer uma rotação destes estados. Aplicando a transformação holonômica

(4.29) sobre os estados lógicos (4.24) várias vezes, é possível realizar um conjunto de portas quânticas de um qubit e implementar a computação quântica holonômica/geométrica [47, 50, 51, 52, 53, 54, 55], em um cenário com violação de simetria de Lorentz.

#### 4.4.2 Configuração de campo: $\vec{B} = B_0\hat{z}$

Na seção (3.1.2), descreveu-se o surgimento de fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula não relativística, devido a violação de simetria de Lorentz. Tal violação, foi definida pelo setor de paridade par do tensor  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Como descrito, considerando a presença de um campo magnético de fundo com a configuração  $\vec{B} = B_0\hat{z}$ , obteve-se um análogo a fase geométrica de Anandan dado pela expressão (3.24). Para esta fase, pode-se realizar uma analogia com a computação quântica holonômica/geométrica definida em [47, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. Considerando os estados lógicos definidos em (4.24), pode-se definir a holonomia associada com a fase quântica de Anandan (3.24) em uma evolução por um caminho fechado por

$$\mathbb{U}(b_1, b_2, b_3) = \exp(-ib_3\sigma^3 - ib_2\sigma^2 - ib_1\sigma^1). \quad (4.31)$$

Com isso, seguindo os passos a partir da equação (4.25) até a equação (4.30), pode-se reescrever a expressão (4.31) na forma [137, 138]

$$\mathbb{U}(b_1, b_2, b_3) \approx \beta_0 I - i\beta_1\sigma^1 - i\beta_2\sigma^2 - i\beta_3\sigma^3. \quad (4.32)$$

Na expressão (4.32), verifica-se que, os parâmetros  $\beta_k$  presentes na equação (4.32), são definidos como

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \cos b_3 \cos b_2 \cos b_1 - \sin b_3 \sin b_2 \sin b_1, \\ \beta_1 &= \cos b_3 \sin b_1 \cos b_2 - \sin b_3 \cos b_1 \sin b_2, \\ \beta_2 &= \cos b_3 \cos b_1 \sin b_2 + \sin b_3 \sin b_1 \cos b_2, \\ \beta_3 &= \cos b_3 \sin b_1 \sin b_2 + \sin b_3 \cos b_1 \cos b_2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Portanto, os parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  podem ser considerados como parâmetros de controle no sentido de que pode-se conhecer ou determinar previamente, os valores dos produtos  $B_0\tau g(\kappa_{HB})_{33}$ ,  $B_0\tau g(\kappa_{HB})_{13}$  e  $B_0\tau g(\kappa_{HB})_{23}$ . Assim, aplicando as transformações unitárias definidas pelas equações (4.32) e (4.33), nos estados lógicos (4.24), permite realizar uma rotação destes estados, através de uma escolha apropriada dos parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ .

## 4.5 Holonomias quânticas em um cenário de violação da simetria de Lorentz induzido pelo setor de paridade ímpar do tensor $(\kappa_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$

### 4.5.1 Configuração de Campo: $\vec{E} = E_0 \hat{z}$

Na subseção (3.2.1), descreveu-se o surgimento de fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula não relativística, no contexto da violação de simetria de Lorentz. Considerou-se uma configuração de campo de fundo definido por um campo elétrico constante, ao longo do eixo-z. Com isso, mostrou-se como foi obtido um análogo a fase geométrica de Anandan dado pela expressão (3.39). Nesta subseção, será descrito a construção de holonomias quânticas a partir da expressão (3.39). Atualmente, o interesse em estudar holonomias em sistemas quânticos está diretamente relacionado a computação quântica holonômica/geométrica [47, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. Portanto, a partir da fase geométrica (3.39), pode-se definir a holonomia associada com ela em uma evolução através de um caminho fechado:

$$\mathbb{U}(b_1, b_2, b_3) = \exp(-ib_3\sigma^3 - ib_2\sigma^2 - ib_1\sigma^1), \quad (4.34)$$

com  $b_1 = g(\kappa_{HE})_{13}E_0\tau$ ,  $b_2 = g(\kappa_{HE})_{23}E_0\tau$  e  $b_3 = g(\kappa_{HE})_{33}E_0\tau$ . Deve-se destacar que, a transformação holônoma (4.34) apresenta a soma de duas matrizes que não comutam no argumento da função exponencial. Deste fato, verifica-se que  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ . Portanto, torna-se útil utilizar a fórmula Zassenhaus (4.26), o que permite reescrever a expressão (4.34) na forma

$$\mathbb{U}(b_1, b_2, b_3) \approx e^{-ib_3\sigma^3} e^{-ib_2\sigma^2} e^{-ib_1\sigma^1}. \quad (4.35)$$

Deve-se ressaltar que, na expressão (4.35) foram descartados os termos de ordem  $\mathcal{O}(b_i b_k)$  e superior. Assim, utilizando a definição matemática da função exponencial de uma matriz (4.28), permite que a expressão (4.35) possa ser simplificada, de modo que a holonomia quântica passa a ter a forma

$$\mathbb{U}(b_1, b_2, b_3) \approx \beta_0 I - i\beta_1\sigma^1 - i\beta_2\sigma^2 - i\beta_3\sigma^3. \quad (4.36)$$

Pode-se verificar que, os parâmetros  $\beta_k$  presentes na equação (4.29), são definidos como

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \cos b_3 \cos b_2 \cos b_1 - \sin b_3 \sin b_2 \sin b_1; \\ \beta_1 &= \cos b_3 \sin b_1 \cos b_2 - \sin b_3 \cos b_1 \sin b_2; \\ \beta_2 &= \cos b_3 \cos b_1 \sin b_2 + \sin b_3 \sin b_1 \cos b_2; \\ \beta_3 &= \cos b_3 \sin b_1 \sin b_2 + \sin b_3 \cos b_1 \cos b_2.\end{aligned}\tag{4.37}$$

Admitindo a possibilidade de se detectar efeitos oriundos da violação da simetria de Lorentz, as holonomias quânticas obtidas em (4.36) permitem que se faça uma analogia como a computação quântica holnômica/geométrica definida em [51, 52, 53, 54, 55]. Esta analogia, é feita definindo como parâmetros de controle os termos relacionados a violação de simetria de Lorentz. Esta escolha se justifica, uma vez que, pode-se conhecer ou determinar previamente estes parâmetros, e, não sendo necessário que estes parâmetros sejam variados de maneira muito lenta [138]. Assim, os produtos que definem os parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  podem ser determinados pelo conhecimento dos valores de  $g(\kappa_{HE})_{13}$ ,  $g(\kappa_{HE})_{23}$  e  $g(\kappa_{HE})_{33}$ . Atuando a transformação unitária (4.36) sobre os estados lógicos representados em (4.24), verifica-se a possibilidade de realizar rotações sobre esses estados através de uma escolha apropriada dos parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$ .

#### 4.5.2 Configuração de Campo: $\vec{B} = B^1 \hat{\rho}$

Na subseção (3.2.2), descreveu-se o surgimento de fases geométricas quânticas na função de onda de uma partícula não relativística devido a violação de simetria de Lorentz. Considerou-se uma configuração de campo de fundo definido por um campo magnético de direção radial. Com isso, mostrou-se como foi obtido o análogo a fase geométrica de Anandan dado pela expressão (3.49). Deve ser mencionado que, esta fase geométrica foi obtida sem aplicar a aproximação adiabática, o qual concorda com a abordagem feita em [30]. Nesta subseção, ainda admite-se a possibilidade de se detectar os efeitos advindos da violação de simetria de Lorentz. Isto permite que se faça uma analogia com a computação quântica geométrica definida em [51, 52, 53, 54, 55]. Assim, será descrito a construção de holonomias quânticas a partir da expressão (3.49). É importante mencionar que, os estados lógicos definidos em (4.24) continuam válidos. Com isso, o transporte paralelo de espinores dado pela expressão (4.24) sobre um caminho fechado, se dará através de uma holonomia quântica, associada a fase geométrica de Anandan (3.49). Com isso, a expressão para esta holonomia tem a forma

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) = \exp(-i\zeta_3 \sigma^3 + i\zeta_1 \sigma^1),\tag{4.38}$$

no qual foram definidos os parâmetros

$$\zeta_1 = 2\pi\lambda_m g(\kappa_{DB})_{31}; \quad \zeta_3 = 2\pi\lambda_m g(\kappa_{DB})_{11}. \quad (4.39)$$

A transformação holônoma (4.38) apresenta no argumento da função exponencial, a soma de matrizes que não comutam. Deste fato, verifica-se que,  $e^{A+B} \neq e^A e^B$ . Torna-se útil simplificar esta expressão, o qual pode ser feito com a utilização da fórmula de Zassenhaus (4.26). Assim sendo, chega-se a

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) \approx e^{-i\zeta_3 \sigma^3} e^{i\zeta_1 \sigma^1} e^{-i\zeta_3 \zeta_1 \sigma^2}. \quad (4.40)$$

Na expressão (4.40) foram negligenciados os termos de ordem  $\mathcal{O}(\zeta_1^2 \zeta_3)$ ,  $\mathcal{O}(\zeta_3^2 \zeta_1)$  e superior, uma vez que são termos muito pequenos. Pretende-se, agora, obter uma expressão mais adequada para a transformação holônoma (4.40), o qual permita a atuação sobre os estados definidos em (4.24). Assim, torna-se útil usar a definição matemática para função exponencial de uma matriz (4.28). Deste modo pode-se reescrever (4.40) como

$$\mathbb{U}(\zeta_1, \zeta_3) \approx \omega_0 I + i\omega_1 \sigma^1 - i\omega_2 \sigma^2 + i\omega_3 \sigma^3. \quad (4.41)$$

com os parâmetros  $\omega_k$  definidos como

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \cos \zeta_3 \cos \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3 + \sin \zeta_1 \sin \zeta_3 \sin \zeta_1 \zeta_3; \\ \omega_1 &= \cos \zeta_3 \sin \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3 + \sin \zeta_3 \cos \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3; \\ \omega_2 &= \cos \zeta_3 \cos \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3 - \sin \zeta_3 \sin \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3; \\ \omega_3 &= \cos \zeta_3 \sin \zeta_1 \sin \zeta_1 \zeta_3 - \sin \zeta_3 \cos \zeta_1 \cos \zeta_1 \zeta_3. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Para uma completa analogia com a computação quântica holonomica/geometria definida em [47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55], deve-se considerar  $\zeta_1$  e  $\zeta_3$  definidos em (4.39) como parâmetros de controle. Isto é possível uma vez que, pode-se conhecer ou determinar previamente os valores para  $g(\kappa_{DB})_{11}$  e  $g(\kappa_{DB})_{31}$ . Como mencionado anteriormente, este conhecimento prévio, se baseia nos valores da incerteza nas medidas das fases geométricas. Assim, com esses valores, juntamente com valores típicos de parâmetros envolvidos nas medidas das fases, permite que se estime os valores associados a violação de simetria de Lorentz. Aplicando-se várias vezes a transformação unitária definida em (4.41) sobre os estados (4.24), torna-se possível realizar um conjunto de portas quânticas de um qubit e implementar a computação quântica holonomica/geométrica [47, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55], em um cenário de violação de simetria de Lorentz.

## 4.6 Considerações finais

Neste capítulo, apresentou-se a segunda parte dos nossos resultados originais obtidos durante a realização deste doutorado. É um capítulo exclusivamente voltado para a obtenção de holonomias quânticas. A originalidade do trabalho está no fato de que estas holonomias foram obtidas a partir das fases geométricas quânticas advindas de um cenário em que ocorre a violação da simetria de Lorentz.

---

## Capítulo 5

# Conclusões e perspectivas futuras

Nesta tese, foi apresentada uma nova proposta para o estudo da violação de simetria de Lorentz. Esta nova proposta teve como problema central, a obtenção de fases geométricas na função de onda de partículas neutras para um cenário com violação de simetria de Lorentz. Como foi apresentado, considerando a evolução dinâmica de partículas neutras com momento de dipolo magnético permanente, foram obtidos casos análogos para as fases geométrica quânticas de Anandan, para efeito Aharonov-Casher, para efeito He-McKellar-Wilkins e para Aharonov-Bohm escalar. Estes casos análogos foram obtidos considerando diversos cenários envolvendo a violação de simetria de Lorentz induzidos pelos setores de paridade par e ímpar do campo tensorial  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Deve-se destacar que, as fases geométricas obtidas são fases geométricas não dispersivas, ou seja, independem da velocidade de propagação das partículas. Além disso, estas fases geométricas são de características não-abelianas. Esta característica tem origem no cenário de violação de simetria de Lorentz definido pelos setores de paridade par e paridade ímpar do campo tensorial  $(k_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$ . Foram obtidos também, valores que limitam os parâmetros associados a violação de simetria para estes casos análogos. Outra contribuição desta tese refere-se a obtenção de holonomias quânticas a partir das fases geométricas de Anandan. Estas holonomias obtidas contém termos associados a violação da simetria de Lorentz. Como foi mostrado, holonomias quânticas são componentes manipulam qubits, sendo importantes para se realizar a computação quântica holonômica/geométrica.

A detecção de efeitos ligados a violação de simetria de Lorentz através das fases geométricas é difícil, uma vez que o deslocamento de fase gerado pela presença do campo de fundo é muito pequena, como mostrado nas expressões (3.22) e (3.26). Esta dificuldade de se detectar as fases geométricas induzidas pelos efeitos de quebra de simetria de Lorentz no laboratório com a presente tecnologia não nos permite propor um modelo real para se implementar a computação quântica holonômica. Contudo, holonomias quânticas e fases geométricas não abelianas não foram ainda amplamente exploradas no contexto



da violação de simetria de Lorentz e abrem novas possibilidades de estudo de seus efeitos para se estabelecer novos valores para os limites superiores para os termos que violam a simetria de Lorentz. Portanto, a viabilidade de utilizar holonomias quânticas induzidas por efeitos de quebra de violação de simetria de Lorentz se baseia em assumir a possibilidade de detectar estes efeitos, onde uma superposição de estados lógicos ou uma mudança entre estes estados lógicos pode ser produzida aplicando a holonomia quântica. Assim, exceto pela não confirmação experimental dos efeitos de violação de simetria, nossa proposta inclui novos cenários para se investigar os efeitos desta violação em sistemas de baixa energia. Como proposta futura imediata, pretendemos investigar o surgimento de fases geométricas no contexto da violação de simetria de Lorentz inspirados no setor de radiação *CPT*-par, agora para partículas que evoluem em um espaço com a presença de curvatura.

---

# Apêndice A

## A transformação de Foldy-Wouthuysen

Considere a equação de Dirac escrita na forma

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (\text{A.1})$$

pode-se considerar o operador unitário  $U = e^{i\hat{S}}$  de forma que  $\psi' = e^{i\hat{S}}\psi$ . Então,

$$i\frac{\partial\psi'}{\partial t} = \left[ e^{i\hat{S}}\hat{H}e^{-i\hat{S}} - ie^{i\hat{S}}\frac{\partial}{\partial t}e^{-i\hat{S}} \right] \psi' = \hat{H}'\psi'. \quad (\text{A.2})$$

Pode-se expandir a equação (A.2) em série de Baker-Campbell-Hausdorff [116], que é uma expressão geral para operadores da forma  $e^{i\hat{S}}\hat{A}e^{-i\hat{S}}$  que pode ser escrita em termos de comutadores. Um fato que deve ser considerado aqui, é que, no limite de baixas energias, a energia de repouso  $m$  deverá ser dominante na composição dos termos referentes a energia cinética. Assim, uma expansão em  $1/m$  para a hamiltoniana (A.2) é útil, uma vez que a medida que as potências de  $1/m$  aumentam a contribuição em cada termo da expansão deixa-os pequenos. Expandindo em série até a ordem quarta ordem temos

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} + i[\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{i}{6}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \\ &+ \frac{1}{24}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]]] - i\dot{\hat{S}} - \frac{i}{2}[\hat{S}, \dot{\hat{S}}] + \frac{1}{6}[\hat{S}, [\hat{S}, \dot{\hat{S}}]]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

O operador  $\hat{S}$  pode ser definido sem a presença de dependência temporal explícita como

$$\hat{S} = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{O}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo o operador  $\hat{S}$  (A.4) na expressão (A.3) encontramos a expressão para o operador  $\hat{H}'$  como

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & m\hat{\beta} + \left( \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^4 - \frac{1}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}]] - \frac{i}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, \dot{\hat{\mathcal{O}}}] \right) + \\ & + \left( \frac{1}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}] - \frac{1}{48m^3}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}]]] - \frac{1}{3m^2}\hat{\mathcal{O}}^3 + \frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}} - \frac{1}{48m^3}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \dot{\hat{\mathcal{O}}}] \right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

que pode ser reescrito de forma compacta como

$$\hat{H}' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \hat{\mathcal{O}}', \quad (\text{A.6})$$

sendo o operador par dado por

$$\hat{\mathcal{E}}' = \hat{\mathcal{E}} + \frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^4 - \frac{1}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}]] - \frac{i}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, \dot{\hat{\mathcal{O}}}], \quad (\text{A.7})$$

e o operador ímpar por

$$\hat{\mathcal{O}}' = \frac{1}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}] - \frac{1}{3m^2}\hat{\mathcal{O}}^3 + \frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}} \quad (\text{A.8})$$

até a ordem  $1/m$ .

É conveniente lembrar que para obtermos a expressão (A.5), nos valem das relações entre os operadores

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{E}}, \hat{\beta}] &= \hat{\mathcal{E}}\hat{\beta} - \hat{\beta}\hat{\mathcal{E}} = 0; \\ \{\hat{\mathcal{O}}, \hat{\beta}\} &= \hat{\mathcal{O}}\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\mathcal{O}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Na busca por obter uma expressão para o hamiltoniano em baixas energias, o processo é repetido novamente para um novo operador  $\hat{S}'$  que é agora definido como,

$$\hat{S}' = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}' \quad (\text{A.10})$$

para o qual  $\hat{\mathcal{O}}'$  é definido em (A.8). Para encontrarmos o operador  $\hat{H}''$ , é necessário substituir o operador  $\hat{S}'$  definido em (A.10) na expressão (A.3). Analisando as relações envolvendo os comutadores entre  $\hat{S}'$  e  $\hat{H}'$ , observa-se que na expansão para  $\hat{H}''$  os operadores envolvendo mais de um comutador podem ser desprezados, de modo que a expressão para  $\hat{H}''$  é resumida para

$$\hat{H}'' = \hat{H}' + i[\hat{S}', \hat{H}'] - \dot{\hat{S}}'. \quad (\text{A.11})$$

O comutador da expressão (A.11) será

$$[\hat{S}', \hat{H}'] = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}', \hat{\mathcal{E}}'] + i\hat{\mathcal{O}}',$$

que aplicado na equação (A.11), resulta em

$$\hat{H}'' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \left( \frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}}' + \frac{1}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}', \hat{\mathcal{E}}'] \right) \quad (\text{A.12})$$

ou

$$\hat{H}'' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \hat{\mathcal{O}}'' \quad (\text{A.13})$$

Destacamos que, para obtermos a expressão (A.12), utilizou-se o operador  $\hat{H}'$  definido em (A.6). O operador  $\hat{\mathcal{O}}''$  na expressão (A.13) está expandido até a ordem  $1/m^2$ .

A aproximação em baixas energias será obtida após a realização de uma última iteração deste método, no qual será eliminado da hamiltoniana da equação de Dirac o operador ímpar até a ordem  $1/m^3$ . Para isto, torna-se necessário definirmos novamente um operador unitário  $\hat{S}''$  que possui forma similar aos operadores (A.4) e (A.10),

$$\hat{S}'' = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}''. \quad (\text{A.14})$$

Na expressão (A.14), verifica-se que o operador  $\hat{\mathcal{O}}''$  é definido por

$$\hat{\mathcal{O}}'' = \left( \frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}}' + \frac{1}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}', \hat{\mathcal{E}}'] \right) \quad (\text{A.15})$$

Nesta última iteração, busca-se a forma do operador  $\hat{H}'''$ , que será expandido em uma série de comutadores de modo semelhante ao que foi feito anteriormente para se obter a expressão  $\hat{H}''$ . Similarmente, podemos nos concentrar apenas no termo contendo  $[\hat{S}'', \hat{H}'']$ , de modo que teremos

$$\hat{H}''' = \hat{H}'' + i[\hat{S}'', \hat{H}''] - \dot{\hat{S}}''. \quad (\text{A.16})$$

Calculando o comutador que aparece em (A.16), obten-se que,

$$\hat{H}''' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \hat{\mathcal{O}}'' + i \left( i\hat{\mathcal{O}}'' - \frac{i}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}'', \hat{\mathcal{E}}'] \right) - \left( -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}}' \right)$$

ou

$$\hat{H}''' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \left( \frac{i}{2m}\hat{\beta}\dot{\hat{\mathcal{O}}}'' + \frac{1}{2m}\hat{\beta}[\hat{\mathcal{O}}'', \hat{\mathcal{E}}'] \right). \quad (\text{A.17})$$

Como passo final, é necessário desenvolver os operadores presentes na expressão (A.17). Substituindo então a definição do operador  $\hat{\mathcal{E}}'$  definido em (A.7) na expressão (A.17) teremos

$$\hat{H}''' = m\hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}} + \left( \frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}^4 - \frac{1}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}]] - \frac{i}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, \dot{\hat{\mathcal{O}}}] \right). \quad (\text{A.18})$$

Em uma rápida análise é possível perceber que na expressão (A.18) temos somente termos pares e que para uma boa aproximação ao limite de baixas energias é suficiente considerar termos de ordem  $1/m$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] H. Belich, T. Costa-Soares, M.A. Santos and M.T.D. Orlando, *Violação da simetria de Lorentz*, Rev. Bras. Ensino de Física **29**, 57 (2007).
- [2] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories* , Phys. Rev. Lett. **63**, 224 (1989).
- [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Photon and graviton masses in string theories* , Phys. Rev. Lett. **66**, 1811 (1991).
- [4] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *Phenomenological gravitational constraints on strings and higher-dimensional theories* , Phys. Lett. B **381**, 89 (1996).
- [5] V. A. Kostelecky and R. Potting, *CPT, strings, and meson factories*, Phys. Rev. D **51**, 3923 (1995).
- [6] D. Mattingly, *Modern Tests of Lorentz Invariance*, Living Rev. Relativ. **8**, 5 (2005).
- [7] V.A. Kostelecky, ed., *CPT and Lorentz Symmetry*, World Scientific, Singapore, (2011).
- [8] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [9] D. Colladay and V.A. Kostelecky, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [10] S. Coleman and S. L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999).
- [11] F. R. Klinkhamer and M. Schreck, *New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D **78**, 085026 (2008).
- [12] C. D. Carone, M. Sher, and M. Vanderhaeghen, *New two-sided bound on the isotropic Lorentz-violating parameter of modified Maxwell theory*, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006).
- [13] B. Altschul, *Lorentz violation and  $\alpha$  decay*, Phys. Rev. D **79**, 016004 (2009).

- 
- [14] M. A. Hohensee, R. Lehnert, D. F. Phillips, and R. L. Walsworth, *Limits on isotropic Lorentz violation in QED from collider physics*, Phys. Rev. D **80**, 036010 (2009).
- [15] B. Altschul, *Bounding isotropic Lorentz violation using synchrotron losses at LEP*, Phys. Rev. D **80**, 016004 (2009).
- [16] C. Miller, R. Casana, M. M. Ferreira Jr., and E. da Hora, *Uncharged compactlike and fractional Lorentz-violating BPS vortices in the CPT-even sector of the standard model extension*, Phys. Rev. D **86**, 091901(R) (2012).
- [17] L.R. Ribeiro, E. Passos, C. Furtado, *An analogy of the quantum hall conductivity in a Lorentz-symmetry violation setup*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39**, 105004 (2012).
- [18] K. Bakke and H. Belich, *Abelian geometric phase for a Dirac neutral particle in a Lorentz symmetry violation environment*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39**, 085001 (2012).
- [19] K. Bakke, H. Belich and E.O. Silva, *Relativistic Landau-Aharonov-Casher quantization based on the Lorentz symmetry violation background*, J. Math. Phys. **52**, 063505 (2011).
- [20] K. Bakke and H. Belich, *On the influence of a Coulomb-like potential induced by the Lorentz symmetry breaking effects on the harmonic oscillator*, Eur. Phys. J. Plus **127**, 102 (2012).
- [21] E.O. Silva and F.M. Andrade, *Remarks on the Aharonov-Casher dynamics in a CPT-odd Lorentz-violating background*, EPL **101**, 51005 (2013).
- [22] K. Bakke and H. Belich, *Relativistic Landau-He-McKellar-Wilkins quantization and relativistic bound states solutions for a Coulomb-like potential induced by the Lorentz symmetry breaking effects*, Ann. Phys. (NY) **333**, 272 (2013).
- [23] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr. and J.A. Helayël-Neto, *Non-minimal coupling to a Lorentz-violating background and topological implications*, Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005).
- [24] H. Belich, T. Costa-Soares, M.M. Ferreira Jr., J.A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, *A comment on the topological phase for anti-particles in a Lorentz-violating environment*, Phys. Lett. B **639**, 675 (2006).
- [25] H. Belich, L.P. Collato, T. Costa-Soares, J.A. Helayël-Neto and M.T.D. Orlando, *Magnetic moment generation from non-minimal couplings in a scenario with Lorentz-symmetry violation*, Eur. Phys. J. C **62**, 425 (2009).
-

- 
- [26] K. Bakke, H. Belich and E.O. Silva, *Relativistic Anandan quantum phase in the Lorentz violation background*, Ann. Phys. (Berlin) **523**, 910 (2011).
- [27] K. Bakke, E.O. Silva, H. Belich, *He-McKellar-Wilkens effect and scalar Aharonov-Bohm effect for a neutral particle based on the Lorentz symmetry violation*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **39**, 055004 (2012).
- [28] M.A. Anacleto, F.A. Brito and E. Passos, *Analogue Aharonov-Bohm effect in a Lorentz-violating background*, Phys. Rev. D **86**, 125015 (2012).
- [29] M.V. Berry, *Quantal Phase Factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. London A **392**, 45 (1984).
- [30] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987).
- [31] J. Anandan, *Non-adiabatic non-abelian geometric phase*, Phys. Lett. A **133**, 171 (1988).
- [32] J. Anandan, *Geometric phase for cyclic motions and the quantum state space metric*, Phys. Lett. A **147**, 3 (1990).
- [33] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger, *The geometric phase in quantum systems: foundations, mathematical concepts and applications in molecular and condensed matter physics*, Springer-Verlag, New York, (2003).
- [34] Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [35] J.P. Dowling, C. Williams and J.D. Franson, *Maxwell Duality, Lorentz Invariance, and Topological Phase*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2486 (1999).
- [36] C. Furtado and, G. Duarte, *Dual Aharonov-Bohm Effect*, Phys. Scr. **71**, 7 (2005).
- [37] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, in Lecture Notes in Physics, Vol. 340, Springer-Verlag, Berlin, (1989).
- [38] A. Zeilinger, *Fundamental Aspects of Quantum Theory*, editado por V. Gorini, A. Frigerio, Plenum, New York, (1985).
- [39] A. Zeilinger, J. Phys. Colloq. (France) **45**, C3-213 (1984).
- [40] Y. Aharonov and A. Casher, *Topological quantum effects for neutral particles*, Phys. Rev. Lett. **53**, 319 (1984).
-



- 
- [41] X.G. He and B.H.J. McKellar, *Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction*, Phys. Rev. A **47**, 3424 (1993).
- [42] M. Wilkens, *Quantum phase of a moving dipole*, Phys. Rev. Lett. **72**, 5 (1994).
- [43] E. Passos, L.R. Ribeiro, C. Furtado and J.R. Nascimento, *Noncommutative Anandan quantum phase*, Phys. Rev. A **76**, 012113 (2007).
- [44] C.-C. Chen, *Topological quantum phase and multipole moment of neutral particles*, Phys. Rev. A **51**, 2611 (1995).
- [45] K. Bakke, *On the interaction between an electric quadrupole moment and electric fields*, Ann. Phys. (Berlin) **524**, 338 (2012).
- [46] P.W. Shor, *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, IEEE Press, Los Alamitos CA, (1994).
- [47] P. Zanardi and M. Rasetti, *Holonomic quantum computation*, Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).
- [48] J. Pachos, *Introduction to topological quantum computation*, Cambridge University Press, Cambridge UK, (2012).
- [49] J. Pachos and P. Zanardi, *Quantum holonomies for quantum computing*, Int. J. Mod. Phys. B **15**, 1257 (2001).
- [50] A. Ekert, M. Ericsson, P. Hayden, H. Inamory, J.A. Jones, D.K.L. Oi and V. Vedral, *Geometric quantum computation*, J. Mod. Opt. **47**, 2501 (2000).
- [51] V. Vedral, *Geometric Phases and Topological Quantum Computation*, Int. J. Quantum Inf. **1**, 1 (2003).
- [52] Z.S. Wang, C. Wu, X.-L. Feng, L.C. Kwek, C.H. Lai, C.H. Oh and V. Vedral, *Nonadiabatic geometric quantum computation*, Phys. Rev. A **76**, 044303 (2007).
- [53] S.-L. Zhu and Z.D. Wang, *Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases*, Phys. Rev. Lett. **89**, 097902 (2002).
- [54] D. Kult, J. Åberg and E. Sjöqvist, *Noncyclic geometric changes of quantum states*, Phys. Rev. A **74**, 022106 (2006).
- [55] E. Sjöqvist, D. M. Tong, L. M. Andersson, B. Hessmo, M. Johansson and K. Singh, *Non-adiabatic holonomic quantum computation*, New J. Phys. **14**, 103035 (2012).
- [56] J. Anandan, *Electromagnetic effects in the quantum interference of dipoles*, Phys. Lett. A **138**, 347 (1989).
-

- [57] J. Anandan, *Classical and quantum interaction of the dipole*, Phys. Rev. Lett. **85**, 1354 (2000).
- [58] J.D. Tasson, *What do we know about Lorentz invariance?*, Reports on Progress in Physics **77**, 062901 (2014).
- [59] H.L.C. Louzada, *O estudo do setor de gauge CPT-par do Modelo Padrão Estendido acrescido de um potencial do tipo Higgs e a generalização supersimétrica do tensor  $K_F$* , Tese de Doutorado em Física, Programa de Pósgraduação em Física - UFES, Vitória, (2014).
- [60] A.N. Rocha, B.F. Rizzuti and D.S. Mota, *Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos*, Rev. Bras. Ensino de Física **35**, 4304 (2013).
- [61] A. Pais, *Subtle is the Lord: The science and the life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford UK (2005).
- [62] T. Morii, C.S. Lim and S.N. Mukherjee, *The physics of standard model and beyond*, World Scientific, Singapore (2004).
- [63] P.H. Frampton, *Gauge fields theories*, 3rd Edition, Wiley-VCH, Weinheim, (2008).
- [64] K. Moriyasu, *An elementary primer for gauge theory*, World Scientific, Cingapore, (1993).
- [65] P.M. de Aquino, *Física além do modelo padrão em teorias com dimensões extras*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Física - USP, São Paulo (2007).
- [66] S. Dittmaier and M. Schumacher, *The Higgs boson in the Standard Model-From LEP to LHC: Expectations, Searches, and Discovery of a Candidate*, Prog. Part. Nucl. Phys. **70**, 1 (2013).
- [67] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).
- [68] J.M. Cline, *Baryogenesis*, lectures at Les Houches Summer School, Session 86: Particle Physics and Cosmology: the Fabric of Spacetime, (2006) <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0609145v3.pdf>
- [69] J.F. Donoghue, E. Golowich and B. Holstein, *Dynamics of the Standard Model*, Cambridge University Press, (1994).
- [70] D. Hooper, *Tasi lectures on dark matter*, Lectures given at Theoretical Advanced Study Institute (TASI), (2008) <http://arxiv.org/abs/0901.4090v1.pdf>
- [71] O.W. Greenberg, *CPT violation implies Violation of Lorentz Invariance*, Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002).
-

- [72] F.J.L. Leal, *Aspectos particulares do setor fermiônico de modelos supersimétricos em presença de violação da simetria de Lorentz*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-graduação em Física do Centro Brasileiro de Pesquisas Física, CBPF, (2011).
- [73] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, John Wiley and Sons Inc., (1987).
- [74] L. Smolin, *How far are we from the quantum theory of gravity?*, hep-th/0303185.
- [75] R. U. Abbasi *et al*, *First Observation of the Greisen-Zatsepin-Kuzmin Suppression*, Phys. Rev. Lett. **100**, 101101 (2008).
- [76] R.S. van Dyck Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt, *New high-precision comparison of electron and positron  $g$  factors* Phys. Rev. Lett. **59**, 26 (1987).
- [77] P.L. Stanwix *et al*, *Test of the isotropy of the speed of light using a continuously rotating optical resonator*, Phys. Rev. Lett. **95**, 040404 (2005).
- [78] B. Schwingerheuer *CPT tests in the neutral kaon system*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4376 (1995).
- [79] J.S. Días, V.A. Kostelecky and M. Mewes, *Perturbative Lorentz and CPT violation for neutrino and antineutrino oscillations*, Phys. Rev. D **80**, 076007 (2009).
- [80] B. Nodland and J.P. Ralston, *Indication of anisotropy in electromagnetic propagation over cosmological distances*, Phys. Rev. Lett. **78**, 3043 (1997).
- [81] S.M. Carrol, G.B. Field and R. Jackiw, *Limits on a Lorentz and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [82] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., R.V. Maluf and F.E.P. dos Santos, *Effects of a CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on electron-positron scattering*, Phys. Rev. D **86**, 125033 (2012).
- [83] R. Casana, M.M. Ferreira Jr., E. Passos, F.E.P. dos Santos and E.O. Silva, *New CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling in the Dirac equation*, Phys. Rev. D **87**, 047701 (2013).
- [84] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, 3rd edition, Springer, Berlin, (2000).
- [85] P. Schlüter, K.-H. Wietschorke and W. Greiner, *The Dirac equation in orthogonal coordinate systems. I. The local representation*, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 1999 (1983).
- [86] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, IE-Wiley, New York, (1972).
-

- [87] P.A.M. Dirac, *Quantised singularities in the electromagnetic field*, Proc. R. Soc. A **133**, 60 (1931).
- [88] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th edition, Addison-Wesley, (2012).
- [89] M.V. Berry, *Exact Aharonov-Bohm wavefunction obtained by applying Dirac's magnetic phase factor*, Eur. J. Phys. **1**, 240 (1980).
- [90] B. Simon, *Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase*, Phys. Rev. Lett. **51**, 2167 (1983).
- [91] J. Anandan, *The geometric phase*, Nature **360**, 307 (1992).
- [92] F. Wilczek and A. Zee, *Appearance of gauge structure in simple dynamical systems*, Phys. Rev. Lett. **38**, 2111 (1984).
- [93] J. Samuel and R. Bhandari, *General setting for Berry's phase*, Phys. Rev. Lett. **60**, 2339 (1988).
- [94] A. Cimmino, G. I. Opat, A. G. Klein, H. Kaiser, S. A. Werner, M. Arif and R. Clothier, *Observation of the topological Aharonov-Casher phase shift by neutron interferometry*, Phys. Rev. Lett. **63**, 380 (1989).
- [95] K. Sangster, E.A. Hinds, S.M. Barnett and E. Riis, *Measurement of the Aharonov-Casher phase in an atomic system*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3641 (1993).
- [96] A. Görlitz, B. Schuh and A. Weis, *Measurement of the Aharonov-Casher phase of aligned Rb atoms*, Phys. Rev. A **51**, 4305 (1995).
- [97] V. M. Tkachuk, *Quantum topological phase of an electric dipole circulating around a ferromagnetic wire*, Phys. Rev. A **62**, 052112 (2000).
- [98] C. Chryssomalakos, A. Franco, A. Reyes-Coronado, *Spin 1/2 particle on a cylinder with radial magnetic field*, European Journal of Physics **25**, 489 (2004).
- [99] S. Lepoutre, A. Gauguet, G. Tréneç, M. Büchner and J. Vigué, *He-McKellar-Wilkens topological phase in atom interferometry*, Phys. Rev. Lett. **109**, 120404 (2012).
- [100] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Möttönen and D. S. Hall, *Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field*, Nature **505**, 657 (2014).
- [101] A. Shapere and F. Wilczek, *Geometric phases in physics*, Advanced Series in Mathematical Physics vol. 5, World Scientific, Singapore, (1989).
- [102] C.C. Favato, *Um estudo sobre a fase geométrica de Berry e o efeito Aharonov-Bohm dual*, Dissertação de Mestrado em Física, Programa de Pósgraduação em Física - UFES, Vitória, (2014).
-

- 
- [103] G.T. Nicoli, *Efeito Aharonov-Casher*, Dissertação de Mestrado em Física, Programa de Pósgraduação em Física - UFES, Vitória, (2006).
- [104] A.G. de Lima, H. Belich and K. Bakke, *Anandan quantum phase and quantum holonomies induced by the effects of the Lorentz symmetry violation background in the CPT-even gauge sector of the Standard Model Extension*, Eur. Phys. J. Plus **128**, 154 (2013).
- [105] A.G. de Lima, H. Belich and K. Bakke, *Scalar Aharonov-Bohm-type effect induced by Lorentz symmetry breaking effects*, Ann. Phys. (Berlin) **526**, 514 (2014).
- [106] A.G. de Lima, H. Belich and K. Bakke, *He-McKellar-Wilkens-type effect from the Lorentz symmetry breaking effects*, preprint <http://arxiv.org/pdf/1502.07515v1.pdf>
- [107] G. Badurek, H. Weinfurter, R. Gähler, A. Kollmar, S. Wehinger and A. Zeilinger, *Nondispersive phase of the Aharonov-Bohm effect*, Phys. Rev. Lett. **71**, 307 (1993).
- [108] M. Peshkin and H.J. Lipkin, *Topology, locality, and Aharonov-Bohm effect with neutrons*, Phys. Rev. Lett. **74**, 2847 (1995).
- [109] M. Peshkin, *Force-free interactions and nondispersive phase shifts in interferometry*, Found. Phys. **29**, 481 (1999).
- [110] J. Nitta, Frank E. Meijer and H. Takayanagi, *Spin-interference device*, App. Phys. Lett. **75**, 695 (1999).
- [111] F.E. Meijer, A.F. Morpurgo and T.M. Klapwijk, *One-dimensional ring in the presence of Rashba spin-orbit interaction: Derivation of the correct Hamiltonian*, Phys. Rev. B **66**, 033107 (2002).
- [112] T. Choi, S.Y. Cho, C.-M. Ryu and C. K. Kim, *Quantum transport by nonadiabatic Aharonov-Casher phase in mesoscopic rings*, Phys. Rev. B **56**, 4825 (1997).
- [113] D. Frustaglia and K. Richter, *Spin interference effects in ring conductors subject to Rashba coupling*, Phys. Rev. B **69**, 235310 (2004).
- [114] S.-Q. Shen, Z.-J. Li and Z. Ma, *Controllable quantum spin precession by Aharonov-Casher phase in a conducting ring*, App. Phys. Lett. **84**, 996 (2004).
- [115] L.L. Foldy and S.A. Wouthuysen, *On the Dirac Theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit*, Phys. Rev. **78**, 29 (1950).
- [116] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, (1964).
-

- 
- [117] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications Inc., New York, (1965).
- [118] S. Azevedo and F. Moraes, *Topological Aharonov-Bohm effect around a disclination*, Phys. Lett. A **246**, 374 (1998).
- [119] S.C. Coutinho, *Números inteiros e criptografia RSA*, IMPA/SBM, Rio de Janeiro, (2000).
- [120] T. Pellizzari, S. A. Gardiner, J. I. Cirac and P. Zoller, *Decoherence, continuous observation, and quantum computing: a cavity QED model*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3788 (1995).
- [121] J. I. Cirac and P. Zoller, *Quantum Computations with Cold Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4091 (1995).
- [122] D. Loss and D. P. DiVincenzo, *Quantum computation with quantum dots*, Phys. Rev. A **57**, 120 (1998).
- [123] V.B. Bezerra, *Gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect in four and three dimensions*, Phys. Rev. D **35**, 2031 (1987).
- [124] T. Rothman, G.F.R. Ellis and J. Murugan, *Holonomy in the Schwarzschild-Droste geometry*, Class. Quantum Grav. **18**, 1217 (2001).
- [125] A.M. de M. Carvalho, F. Moraes and C. Furtado, *Loop variables in the geometry of a rotating black string*, Class. Quantum Grav. **20**, 2063 (2003).
- [126] A.M. de M. Carvalho and C. Furtado, *Holonomy transformation in the FRW metric*, Gen. Relativ. Gravit. **39**, 1311 (2004).
- [127] A.M. de M. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, *Circular orbits around Schwarzschild-AdS spacetime*, Mod. Phys. Lett. A **39**, 2683 (2004).
- [128] J. Pachos and S. Chountasis, *Optical holonomic quantum computer*, Phys. Rev. A **62**, 052318 (2000).
- [129] A. Recati, T. Calarco, P. Zanardi, J.I. Cirac and P. Zoller, *Holonomic quantum computation with neutral atoms*, Phys. Rev. A **66**, 032309 (2002).
- [130] M. Cholascinski, *Quantum holonomies with Josephson-junction devices*, Phys. Rev. B **69**, 134516 (2004).
-

- [131] K. Bakke, *Fases Geométricas, Quantização de Landau e Computação Quântica Holonômica para partículas neutras na presença de defeitos topológicos*, Tese de Doutorado em Física, Programa de Pósgraduação em Física - UFPB, João Pessoa, (2009).
- [132] M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, Cambridge University Press, Cambridge, (2000).
- [133] M.R. Barros, *Demonstração óptica do algoritmo de Deutsch-Jozsa com 1 qubit*, Dissertação de Mestrado em Física, Programa de Pósgraduação em Física - UFMG, Belo Horizonte, (2010).
- [134] S. Lloyd, *Almost any quantum logic gate is universal*, Phys. Rev. Lett. **75**, 346 (1995).
- [135] M.O. Katanaev and I.V. Volovich, *Theory of defects in solids and three-dimensional gravity*, Ann. Phys. (NY) **216**, 1 (1992).
- [136] F. Moraes, *Condensed Matter Physics as a laboratory for gravitation and Cosmology*, Braz. J. Phys. **30**, 304 (2000).
- [137] K. Bakke and C. Furtado, *Quantum holonomies for an electric dipole moment*, Phys. Lett. A **375**, 3956 (2011).
- [138] K. Bakke and H. Belich, *Quantum holonomies based on the Lorentz-violating tensor background*, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **40**, 065002 (2013).
- [139] K. Bakke and C. Furtado, *One-qubit quantum gates associated with topological defects in solids*, Quantum Inf. Process. **12**, 119 (2013).
- [140] R. Ionicioiu, *Quantum gates with topological phases*, Phys. Rev. A **68**, 034305 (2003).
- [141] B.E. Allman, A. Cimmino, A.G. Klein and G.I. Opat, *Scalar Aharonov-Bohm experiment with neutrons*, Phys. Rev. Lett. **68**, 2409 (1992).
-