UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO UNIVERSITÁRIO NORTE DO ESPÍRITO SANTO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

JOSÉ APARECIDO DA SILVA FERNANDES

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DIVISIBILIDADE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DE 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

SÃO MATEUS
2016

JOSÉ APARECIDO DA SILVA FERNANDES

ENSINO E APRENDIZAGEM DE DIVISIBILIDADE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DE 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica do Centro Universitário Norte do Espírito Santo, da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica, área de concentração Ensino; linha de pesquisa Ensino de Ciências Naturais e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella

SÃO MATEUS

2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Divisão de Biblioteca Setorial do CEUNES - BC, ES, Brasil)

F363e

Fernandes, José Aparecido da Silva, 1968 -
Ensino e aprendizagem de divisibilidade através da resolução de problemas : experiência com uma turma de 6º ano do ensino fundamental / José Aparecido da Silva Fernandes. – 2016.
218 f. : il.

Orientador: Lúcio Souza Fassarella.
Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo.

1. Resolução de problemas. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Ensino fundamental. 4. Divisibilidade. I. Fassarella, Lúcio Souza. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro Universitário Norte do Espírito Santo. III. Título.

CDU: 37

Ensino e Aprendizagem de Divisibilidade através da Resolução de Problemas: experiência com uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental

José Aparecido da Silva Fernandes

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Espírito Santo, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, para obtenção do título de Mestre em Ensino na Educação Básica.

Aprovada em 17/03/2016.

Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella
Universidade Federal do Espírito Santo
Orientador

Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho
Universidade Federal do Espírito Santo
Membro Interno

Profª. Drª Lourdes de la Rosa Onuchic
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"
Membro Externo

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Alcebíades e Ana, base de tudo, pelas orações e apoio incondicional durante a realização deste curso.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente e acima de tudo, a Deus, que me guia, me direciona e me dá forças para vencer todos os desafios colocados em minha vida.

Aos meus pais, pelo carinho, incentivo, dedicação, apoio, orações e pela compreensão nos momentos de ausência. Ao meu irmão, cunhada e sobrinhos pelo carinho, ajuda e incentivo dispensados.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Lúcio Souza Fassarella, pela condução, apoio, dedicação, confiança, profissionalismo e que, na amplitude de sua humildade, soube ter paciência, entender meus anseios, decisões e limitações. Muito obrigado por ter me proporcionado, através de seus ensinamentos, excelente aprendizagem em todas as etapas dessa caminhada, seja nas disciplinas ministradas ou nos nossos encontros de orientação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica, do Centro Universitário Norte do Espírito Santo, da Universidade Federal do Espírito Santo pela oportunidade a mim concedida de realizar um curso de mestrado de muita qualidade.

Às secretárias da Secretaria Unificada da Pós Graduação (SUPGRAD) Danielle Andrade de Lucena de Carvalho, Josiane Baldo e Lorena Neves Nobre, por sempre demonstrarem boa vontade e carinho nos atributos de suas funções.

À FAPES – Fundação de Amparo à Pesquisa do Espírito Santo, pelo apoio e incentivo financeiro.

Aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Moysés Gonçalves Siqueira Filho e Profª. Drª. Andressa Cesana, por terem aceitado tão prontamente o nosso convite em nos ajudar e por terem tanto contribuído com as valiosas sugestões e críticas para o enriquecimento de nosso estudo.

Aos professores, os quais tive o prazer de cursar disciplinas no Mestrado: Prof. Dr. Franklin Noel dos Santos, Profª. Drª. Márcia Helena Siervi Manso, Profª. Drª. Andréa Brandão Locatelli, pelas valiosas discussões no decurso das disciplinas.

À direção da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Professor Elpídio Campos de Oliveira” que autorizou a realização desta pesquisa.

À professora de Matemática do 6º M01, turma pesquisada, pelo carinho em nos ter acolhido, pela confiança e a generosidade em contribuir com o seu melhor, nesta pesquisa.

Aos alunos do 6º M01, pelo carinho, respeito e dedicação que construímos mutualmente, no decorrer do desenvolvimento de nossas atividades.

À Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo, que autorizou o meu afastamento para cursar este mestrado, que com certeza irá se refletir no aprimoramento dos serviços prestados à sociedade.

À Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, UNESP, Rio Claro, que mesmo não sendo minha orientadora e ter me visto, apenas pela segunda vez, me recebeu em seu Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas e em sua residência com muito carinho e respeito para compartilhar comigo seus saberes e experiências. Por disponibilizar materiais que tanto contribuíram para o nosso estudo e por aceitar prontamente o nosso convite em participar de nossa banca de defesa. Meus sinceros agradecimentos.

Aos colegas da primeira turma do Mestrado, pelo convívio harmonioso, pelas discussões proveitosas nas disciplinas cursadas e em participação nos eventos e, em especial, os da área de Ensino de Matemática, Ana Cláudia Pezzin, André Tessaro, Clarice Segantini e Jonas José Chequeto pelas sugestões e reflexões que fizemos juntos, durante a construção de nosso conhecimento e elaboração de nossos trabalhos.

À Elisandra Brizolla (Mana), pela amizade verdadeira, companheirismo, carinho, discussões, viagens para eventos ou não e, sobretudo, pela relação de parceria e pela ajuda mútua nos momentos de aprendizagem. A Héryca, pelo carinho, amizade e companheirismo. Meu muito obrigado, a vocês, por tudo!

Estendo, ainda, os meus agradecimentos a todos aqueles que, apesar de não serem citados aqui, me apoiaram direta ou indiretamente nessa fase da minha vida.

RESUMO

A presente dissertação tem como propósito investigar as contribuições da metodologia de Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem de divisibilidade com números naturais a alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Caracteriza-se pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso do tipo etnográfico, organizada segundo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic. Para a coleta de dados utiliza-se: diário de campo, observação participante e entrevista; além disso, descreve as produções dos alunos ao longo da aplicação das atividades do plano de trabalho. Têm-se como pergunta de pesquisa: *quais contribuições a metodologia Resolução de Problemas pode propiciar para o ensino e aprendizagem do tema divisibilidade a alunos de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Espírito Santo?* O objetivo geral é selecionar e aplicar atividades didáticas sobre divisibilidade usando como metodologia de ensino a Resolução de Problemas conforme preconizada por Allevato e Onuchic e analisar o processo de aprendizagem na perspectiva da participação do aluno na construção do seu conhecimento. Constata-se que no decorrer do desenvolvimento das atividades, houve melhoras consideráveis dos alunos em diversos aspectos: no comportamento, na organização, na participação individual e no trabalho colaborativo, além do aprendizado de diversos conceitos e técnicas relacionadas à divisibilidade.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Ensino e Aprendizagem. Divisibilidade. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The present dissertation aims to investigate the contributions of the methodology of Problem Solving in the teaching and learning process of divisibility with natural numbers, to students of 6th grade of Elementary School. It is characterized as qualitative research in the form of case study of ethnographic type, organized according to the Methodological Model of Romberg-Onuchic. For data collection is used field diary, participant observation and interview; furthermore it describes the productions of the students throughout the application of the activities from the working plan. It has as research question: *what contributions of the Methodology Problem Solving can propitiate for teaching and learning the divisibility theme to 6th grade students of elementary school from a public school in Espírito Santo?* The general objective is to select and apply didactic activities about divisibility using Problem Solving as methodology of teaching as preconized by Allevato and Onuchic and analyze the process of learning in the perspective of student participation to their own knowledge. It has been verified that during the development of activities, construct there was considerable improvement of students in several aspects: at the behavior, organization, individual participation and collaborative work, besides the learning of several concepts and techniques related to divisibility.

Keywords: Problem Solving. Teaching and Learning. Divisibility. Elementary School.

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma área do conhecimento que surgiu e tem se desenvolvido a partir dos problemas que o homem encontra na sociedade. Assim, a resolução de problemas faz parte da Matemática.

Devido ao baixo aproveitamento dos alunos das escolas públicas nas avaliações externas, a exemplo do SAEB/Prova Brasil[1] nas suas três últimas edições, além de outros fatores vivenciados diariamente por professores e alunos, a Matemática tem sido vista, ultimamente, no Brasil como uma disciplina problemática, no que tange ao processo de ensino e aprendizagem. Por um lado, observamos a incompreensão, muitas vezes o descaso ou a desmotivação dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos ensinados de forma *tradicional*[2]. Por outro lado, o professor, muitas vezes, não possui qualificação ou tempo para planejar adequadamente suas aulas. Assim sendo, é comum e compreensível o fato de os alunos não alcançarem resultados satisfatórios nesse componente curricular.

Visando minimizar a incompreensão, o descaso e a desmotivação dos alunos, a Resolução de Problemas (RP) como uma metodologia *alternativa*[3] para o ensino de Matemática pode ser muito eficaz, pois propicia a mobilização de saberes, o raciocínio, a organização das ideias, a criatividade na elaboração de estratégias e a análise crítica na verificação das soluções obtidas para problemas propostos. Todos esses fatores podem possibilitar o amadurecimento e a consolidação das estruturas cognitivas relacionadas ao processo de aprendizagem.

Educadores/pesquisadores matemáticos como Onuchic (1999), Allevato (2005), Allevato e Onuchic (2014), Dante (2005), Smole e Diniz (2001), Pozo (1998), Schroeder e Lester (1989), Polya (1945) defendem que a utilização de metodologias envolvendo Resolução de

---

[1]SAEB/Prova Brasil – Sistema de Avaliação da Educação Básica realizado pelo Inep/MEC, a cada dois anos, abrange estudantes das redes pública e privada do país localizadas em área rural e urbana, matriculados na 4ª e 8ª séries (ou 5º e 9º anos) do Ensino Fundamental e também no 3º ano do Ensino Médio. As provas aplicadas de Língua Portuguesa e Matemática recebem o nome de Prova Brasil.

[2]Entendemos por *ensino tradicional* aquele desenvolvido conforme o *paradigma do exercício* ou segundo o *absolutismo burocrático* definidos por Helle AlrØ e Ole Skovsmose (2010), ou seja, o modo de ensinar Matemática no qual o professor vai ao quadro e explica determinado conteúdo, demonstra alguma fórmula ou teorema, resolve exemplos, passa uma lista de exercícios, enquanto o aluno ouve, copia, resolve ou não a lista e repete o que aprendeu numa avaliação, sempre tendo o professor como a fonte inquestionável de conhecimento.

[3]Aqui, o termo metodologia alternativa designa qualquer metodologia de ensino distinta da *tradicional*.

Problemas nas aulas de Matemática as tornam mais ricas, interessantes e plenas de sentido para o aluno. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) também preconizam buscar metodologias alternativas, dentre elas a Resolução de Problemas, visando atingir os objetivos educacionais que a sociedade reclama.

Contudo, as orientações sobre a abordagem de conceitos, técnicas e ideias conjugadas à resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas da grande maioria dos professores de Matemática da Educação Básica. Quando algumas delas é incorporada à prática escolar, geralmente aparece como um item isolado, proposta como aplicação da aprendizagem, a partir de listagem de problemas cuja resolução depende basicamente de procedimentos (tais como o uso de fórmulas e algoritmos) memorizados pelos alunos (BRASIL, 1998).

A partir de minha experiência, como professor de Matemática da Educação Básica com tais considerações em mente, surgiu a vontade de conhecer as contribuições da metodologia de ensino Resolução de Problemas para a aprendizagem da divisão, um assunto normalmente difícil de ser abordado na Educação Básica. Isso me levou a desenvolver esta pesquisa com foco na divisibilidade junto a uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental da escola em que trabalho, sendo a escolha desta série uma consequência imediata do fato da divisão constar no seu currículo. Nossa questão de pesquisa é: *quais contribuições a metodologia Resolução de Problemas pode propiciar para o ensino e aprendizagem do tema divisibilidade a alunos de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Espírito Santo?*

O texto está organizado em cinco capítulos. **No primeiro capítulo**, *Metodologia de Pesquisa*, descrevemos a metodologia adotada para desenvolver este trabalho, chamada de **Modelo Metodológico de Romberg–Onuchic**[4] pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas (GTERP)[5]. Esse modelo é constituído por onze atividades que estão distribuídas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema; o segundo bloco apresenta uma proposta de resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados; e o último bloco trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante da questão ou conjectura levantada. Por

[4]O GTERP, após alguns anos desenvolvendo pesquisas com base no **Modelo Metodológico de Romberg**, em 2014 sugere alterações ao modelo original, acrescentando uma atividade (Modelo Modificado) ao primeiro bloco. Esse novo modelo passou a ser chamado pelo grupo de **Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic**.
[5]Grupo vinculado ao programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, na UNESP, Rio Claro-São Paulo e coordenado pela Professora Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic.

ser este um modelo que descreve todas as estratégias e todos os procedimentos de uma pesquisa, o texto pode se tornar extenso.

No segundo capítulo, *Identificação do Problema de Pesquisa*, apresentamos como chegamos ao Fenômeno de Interesse desta pesquisa, o ensino e aprendizagem de *Divisibilidade*, a partir de minha trajetória pessoal[6].

No terceiro capítulo, *Resolução do Problema da Pesquisa*, selecionamos uma Estratégia Geral – criar um plano de ensino para **divisibilidade** – e o seu correspondente Procedimento Geral – a criação de um plano de ensino para **divisibilidade**.

O quarto capítulo, *A Aplicação do Plano de Trabalho*, constitui-se do relato da aplicação do plano de trabalho e aprendizagem de *divisibilidade*, desenvolvido em 36 aulas de 55 minutos, numa turma de 6º ano composta por 28 alunos, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professor Elpídio Campos de Oliveira", em Montanha – ES.

No quinto capítulo, *Considerações Finais*, apresentamos informações destacadas ao longo da aplicação do plano de ensino. Fizemos uma reflexão dessas evidências buscando responder o problema da pesquisa. Relatamos os resultados obtidos, discutimos algumas conclusões e implicações da pesquisa.

---

[6]Estamos considerando trajetória pessoal como sendo escolar, acadêmica e profissional.

1 METODOLOGIA DE PESQUISA

Apresentamos neste capítulo o ponto de vista de alguns pesquisadores sobre o que vem a ser pesquisa de um modo geral, a natureza de nossa pesquisa e o modelo metodológico escolhido para desenvolver esta pesquisa.

1.1 PONTO DE VISTA DE PESQUISADORES SOBRE PESQUISA

1.1.1 O que é pesquisa?

De acordo com D'Ambrosio (2012, p. 86) a palavra *pesquisa* está ligada "a investigação, a busca (=*quest*), a *research* (*search* = procura) e a ideia, sempre a mesma, é a de mergulhar na busca de explicações, dos porquês e dos comos, com foco em uma prática".

Para Gil (1999, p.42), a pesquisa tem um caráter pragmático, é um "processo formal e sistemático de desenvolvimento do método científico. O objetivo fundamental da pesquisa é descobrir respostas para problemas mediante o emprego de procedimentos científicos".

Conforme Ludke e André (1986, p. 1),"para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele".

Assim, remetendo-nos a D'Ambrósio (2012), encontramos que "entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados" (p. 73). Portanto, pesquisa "é o elo entre teoria e prática" (p.84).

Podemos, ainda, encontrar no Dicionário Houaiss Conciso (2011) um significado para a palavra *pesquisa* como sendo uma investigação científica, artística, escolar, etc.

1.2 NATUREZA DO ESTUDO

Projetamos nossa pesquisa à luz de uma abordagem qualitativa, uma vez que não estamos interessados na representatividade numérica do grupo pesquisado e sim, com o processo.

Segundo Goldenberg (2004, p. 14), na “pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc.”.

Segundo Bogdan & Biklen (1994), o conceito de pesquisa qualitativa envolve cinco características básicas que configuram este tipo de estudo: **(i)** o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento; **(ii)** os dados coletados são predominantemente descritivos; **(iii)** a preocupação com o processo é muito maior que com o produto; **(iv)** o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida é de suma importância numa abordagem qualitativa; **(v)** a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. Ainda segundo esses autores, a pesquisa qualitativa envolve a coleta de dados descritivos, adquiridos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, evidencia mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.

Entre as várias formas, que uma pesquisa qualitativa pode admitir, destaca-se o estudo de caso do tipo etnográfico, pois permite, assim, “[...] compreender melhor a manifestação geral de um problema, as ações, as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas [...] relacionadas à situação específica onde ocorrem ou à problemática determinada à que estão ligadas” (LUDKE; ANDRÉ 1986, p. 18-19).

Segundo Fiorentini & Lorenzato (2012, p. 107) este é um tipo de estudo em que,

> [...] o pesquisador frequenta os locais onde os fenômenos ocorrem naturalmente. A coleta de dados é realizada junto aos comportamentos naturais das pessoas quando essas estão conversando, ouvindo, trabalhando, estudando em classe, brincando, comendo... [...].

Conforme Ludke e André (1986), o estudo do tipo etnográfico combina, também, com outras técnicas, entre elas, a observação participante e entrevistas com os participantes. De acordo com Fiorentini & Lorenzato (2012, p. 108),

> A “observação participante” é uma estratégia que envolve não só a observação direta, mas todo um conjunto de técnicas metodológicas (incluindo entrevistas, consulta a materiais, etc.), pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada.

As entrevistas, sob o ponto de vista de Fiorentini & Lorenzato (2012, p. 120), "além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados [...]".

Ainda, segundo Ludke & André (1986), documentos produzidos, como, por exemplo, diário de campo[7], diário de classe, entrevistas, não só complementam as técnicas já mencionadas, mas, também "constituem [...] uma fonte poderosa de onde podem ser retiradas evidências que fundamentam afirmações e declarações do pesquisador" (p. 39).

Dessa forma, para desenvolver este estudo, consideramos a própria sala de aula dos participantes envolvidos na pesquisa, numa escola pública, como ambiente natural; tendo como objetivos: selecionar atividades, aplicar, observar e promover a construção de conhecimento através do ensino e aprendizagem de *divisibilidade* através[8] da metodologia de Resolução de Problemas.

Mesmo que nossa pesquisa esteja caracterizada como um estudo de caso do tipo etnográfico, necessitamos, como pesquisador iniciante, de uma estrutura na qual teremos mais facilidade e segurança quanto às ações a serem realizadas. Assim, em nossas buscas, escolhemos, como estrutura, o modelo metodológico que está mencionado a seguir.

1.3 MODELO METODOLÓGICO DE ROMBERG–ONUCHIC

O contato com alguns trabalhos do grupo GTERP nos trouxe o conhecimento da metodologia de Romberg-Onuchic, com sua estruturação mais ampla e caracterização mais detalhada de cada etapa do processo de pesquisa. Terminamos por escolher esta em função dessas características e, também, porque nos adaptamos bem à rigidez dessa estrutura e com ela sentimo-nos mais seguros em relação às ações a serem desenvolvidas.

---

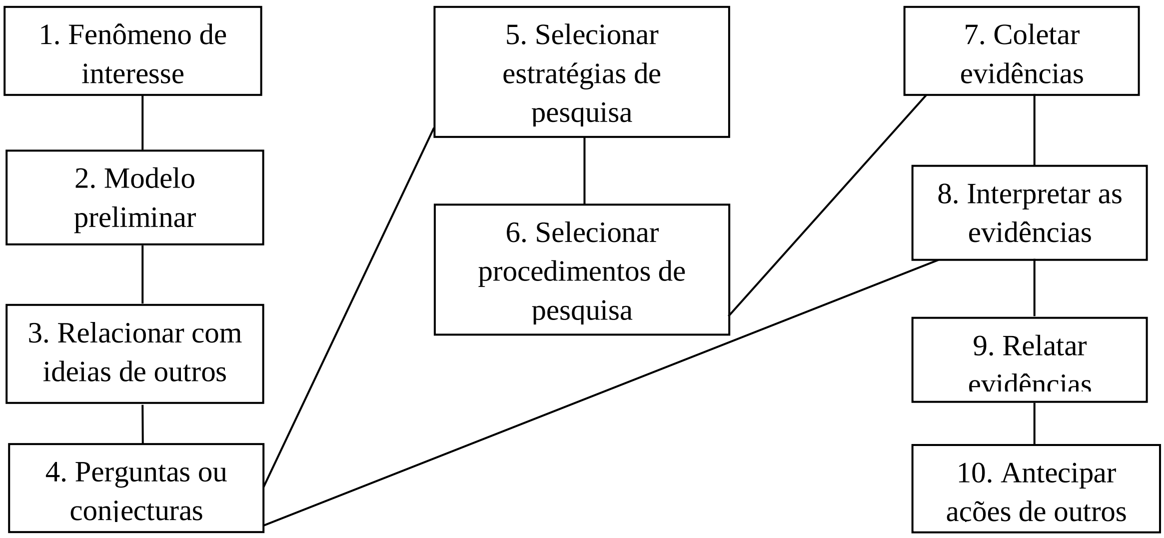
[7]Para Fiorentini & Lorenzato (2012), o *Diário de Campo* é um dos instrumentos mais ricos de coleta de dados durante o trabalho de campo. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descrevem episódios, diálogos.
[8]Aqui, consideramos a expressão "através de" na perspectiva de Allevato e Onuchic (2014), onde elas dizem que significa "ao longo", "no decurso" da resolução do problema.

O modelo é constituído por onze atividades que estão distribuídas em três blocos, Figura 2: o primeiro bloco trata da identificação do problema (atividades 1, 2, 3, 4 e 5), o segundo bloco apresenta uma proposta de resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos de trabalho são levantados e selecionados (atividades 6 e 7) e o último bloco que, após o procedimento geral ser posto em ação, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante da questão ou conjectura levantada (atividades 8, 9,10 e 11).

Romberg (1992) em seu artigo deixa claro que não há nada de único sobre sua lista de atividades, pois quase todos os métodos de pesquisa apresentam um conjunto de atividades semelhantes às defendidas por ele. Contudo, essas atividades são colocadas para: **(1)** elucidar alguns problemas comuns que as pessoas não familiarizadas com pesquisa se defrontam ao procurar entender o processo de investigação; e **(2)** dar fundamentação à discussão das tendências de pesquisa. Ele salienta ainda que independentemente das atividades estarem apresentadas numa sequência, não, necessariamente, elas precisam ser seguidas na ordem em que aparecem. Nesse sentido, fatores como intenção, hipóteses, conjecturas, disponibilidade de informação, métodos, entre outras características do pesquisador não podem ser separados tão explicitamente.

Para conhecimento do leitor, apresentamos o fluxograma com o modelo de Romberg (1992), em que, a partir dele, o GTERP, aos poucos, sugeriu modificações.

Figura 1 - Modelo Metodológico de Romberg

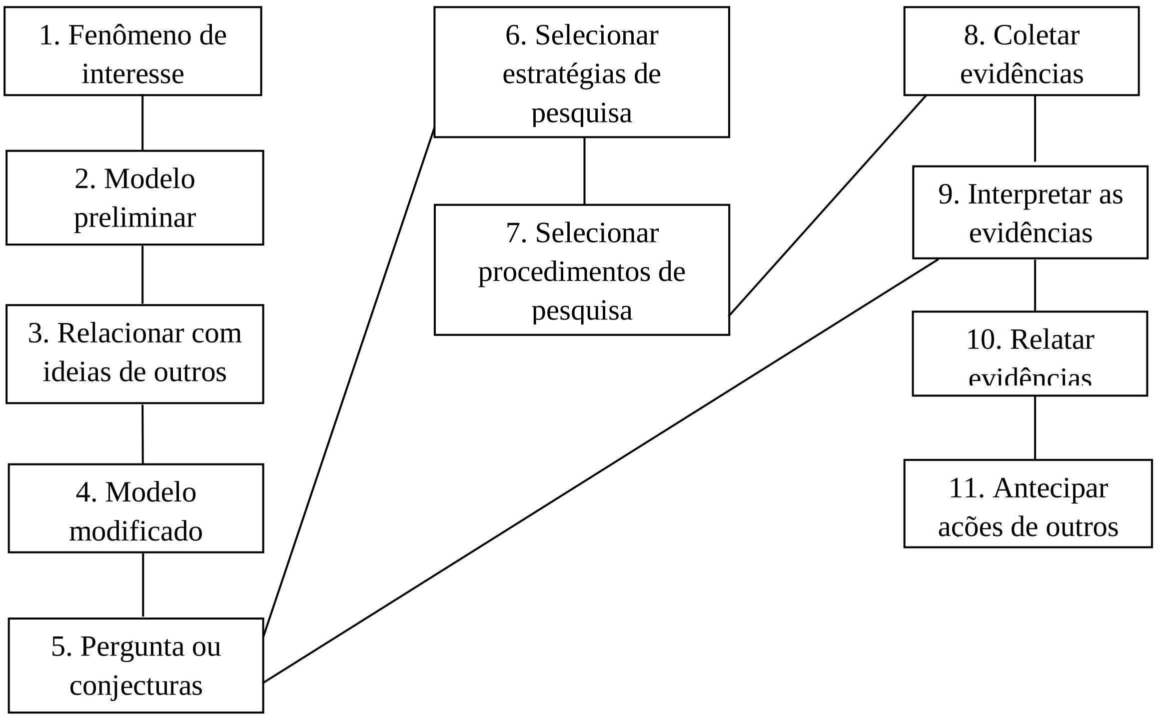


Fonte: (ROMBERG, 1992, p. 51)

As contribuições do modelo Metodológico de Romberg-Onuchic ao Modelo de Romberg não se apresentam apenas na inserção de uma nova atividade: *modelo modificado*, mas, também, nas definições de cada uma das demais atividades:

- Olhando o modelo preliminar – extrair as variáveis-chave que determinarão a fundamentação teórica;
- No relacionar com ideias de outros assumir:
    - Ouvir → modelo modificado
    - Colocar a sua própria voz → aplicação

Figura 2 - Modelo Metodológico de Romberg–Onuchic



Fonte: (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 59)

A partir daqui, vamos descrever os blocos de Romberg-Onuchic.

1º Bloco de Romberg-Onuchic: A Identificação do Problema da Pesquisa

As atividades desse bloco situam as ideias que se tem sobre um problema particular e, ao relacioná-las com ideias de outros, podemos decidir o que se quer investigar.

1ª Atividade: Fenômeno de Interesse.

A identificação do fenômeno de interesse é o início de uma pesquisa, isto é, quando o pesquisador situa sua curiosidade sobre certo fenômeno.

Para Romberg (1992, p. 51),

> toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular no mundo real. Na educação matemática, [...] o fenômeno envolve professores e alunos, como os alunos aprendem, como eles interagem com a matemática, como eles respondem aos professores, como os professores planejam ensinar e muitas outras questões.

Desta forma, de acordo com Romberg, os educadores matemáticos podem, de fato, enfocar uma variedade de áreas numa variedade de olhares. Esse é o momento em que surge uma possível pergunta sobre o que se pretende pesquisar. O fenômeno de interesse é o nosso objeto de estudo.

2ª Atividade: Modelo Preliminar.

Romberg (1992, p. 51) esclarece que o "modelo serve como um ponto de partida ou de orientação para a situação de interesse". Em sua tese de doutorado, Allevato (2005) descreve o modelo preliminar assim:

> Tal como o nome enfatiza, o modelo preliminar reflete a ideia inicial do pesquisador sobre o fenômeno que pretende estudar. Ele poderá ser alterado, e a pesquisa ser reorientada, em virtude de novos e inesperados fatos ou fatores que possam surgir no decorrer da pesquisa (p. 21).

De acordo com Onuchic e Noguti (2014, p. 60), "o *Modelo Preliminar* funciona como um guia para o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa, podendo sofrer alterações de acordo com o avanço da mesma".

Desta forma, esse *Modelo Preliminar* dá uma visão geral do fenômeno a ser estudado, apontando possíveis pontos de partida e um possível encaminhamento para a pesquisa. Assim sendo, existe a possibilidade desse modelo não ser seguido à risca, mas, a partir dele, o pesquisador poderá organizar suas ações conforme a realidade dos fatos se revela durante a pesquisa.

3ª Atividade: Relacionar com Ideias de Outros.

Na sequência das atividades do Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic (2014), *Relacionar com Ideias de Outros* significa examinar o que outras pessoas falaram ou falam sobre o tema escolhido e “determinar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo preliminar proposto” (ROMBERG, 1992, p. 51). Esta é uma atividade de suma importância, pois,

> ao "relacionar o fenômeno de interesse com ideias de outros" o pesquisador poderá, entre outras coisas, esclarecer e ampliar os resultados obtidos através de sua investigação. É uma análise de dados diferente. É olhar para os dados através de novas lentes, o que permite percebê-los sob outras perspectivas (ALLEVATO, 2005, p. 295).

Geralmente, relacionamos o trabalho com as ideias de outros pesquisadores, mas não necessariamente. Eventualmente, podemos dar ouvidos a outras pessoas ou atender a outras situações, como, por exemplo, ao planejamento interno da escola ou turma pesquisada.

4ª Atividade: Modelo Modificado

De acordo com Onuchic e Noguti (2014), após “ouvir os outros”, o pesquisador pode perceber que seu *Modelo Preliminar* é inadequado para a pesquisa, por carência de informações ou por adequação a determinada realidade, por exemplo. Assim, o *Modelo Modificado* surge como uma alteração do *Modelo Preliminar*.

5ª Atividade: Perguntas ou Conjecturas

Para Romberg (1992, p. 52), essa atividade de *Perguntas e Conjecturas* “é um passo-chave no processo de pesquisa porque, conforme se examina um particular fenômeno, uma quantidade de perguntas potenciais inevitavelmente aparece. Decidir quais perguntas examinar não é fácil”.

Ainda segundo o autor, as perguntas podem assumir as seguintes orientações: **(1) caráter descritivo:** como as coisas chegaram a ser desta maneira? (quando orientadas no passado) e, qual é a situação que se tem das coisas hoje? (orientadas no presente); **(2) caráter preditivo:** o que acontecerá se eu fizer da seguinte forma? (orientada no futuro).

Já para Onuchic e Noguti (2014, p.63), “a Pergunta da Pesquisa surge após o pesquisador relacionar o seu Fenômeno de Interesse e o Modelo Modificado com as ideias de outros”.

2º Bloco de Romberg-Onuchic: A Resolução do Problema de Pesquisa

A partir do momento em que o problema de pesquisa é identificado, “devemos elaborar um plano de ação. Este plano é focado no Modelo Modificado [...]” (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 63). Ou seja, faz-se necessário encontrar caminhos para resolvê-lo.

6ª Atividade: Selecionar Estratégias de Pesquisa

Selecionar uma Estratégia Geral de Pesquisa significa definir “o que fazer” na pesquisa. Para Romberg (1992),

> a decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão de mundo na qual as questões estão situadas, do modelo preliminar que foi construído a fim de explicar o “fenômeno de interesse” e da conjectura que se faz sobre a evidência necessária (p. 52).

Para executar a estratégia geral, é necessário selecionar também estratégias auxiliares a partir das variáveis do Modelo Preliminar. Por exemplo, criar um Plano de Trabalho constitui o que entendemos por estratégia geral de pesquisa; definir a escola e obter autorização da direção onde se pretende trabalhar é uma estratégia auxiliar.

7ª Atividade: Selecionar Procedimentos de Pesquisa

Cada estratégia tem seu respectivo procedimento, sendo que a diferença entre eles está em “o que fazer?” (estratégias) e “como fazer?” (procedimentos). Selecionar um Procedimento Geral de Pesquisa significa definir “como fazer” a pesquisa. Segundo Romberg (1992),

> É nesse passo que as técnicas usualmente ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar uma informação (entrevista, pergunta, observação, teste), como organizar a informação uma vez que ela tenha sido coletada, e assim por diante (p. 52).

Ainda segundo esse autor, muitos são os procedimentos específicos que se pode seguir para diversos tipos de questões. Assim sendo, é preciso ter cuidado suficiente ao selecioná-los de tal forma que venham a esclarecer as questões levantadas. Por exemplo, a criação de um Plano de Trabalho caracteriza o que entendemos por procedimento geral e a definição e obtenção de autorização da escola, onde se pretende desenvolver a pesquisa é um exemplo de procedimento auxiliar.

3º Bloco de Romberg-Onuchic: Análises das Informações Obtidas

As atividades que compõem esse último bloco são ações que dão sentido às informações coletadas no decorrer da aplicação do projeto. As evidências selecionadas, descritas e interpretadas frente ao problema da pesquisa levantado poderão dar suporte para conclusões sobre o resultado obtido.

De acordo com Onuchic e Noguti (2014), nesse estágio o pesquisador deverá coletar evidências e interpretá-las. Para tanto, o pesquisador planeja e executa ações de acordo com as estratégias e procedimentos selecionados anteriormente.

8ª Atividade: Coletar Informações

Este passo pode ser dado diretamente, uma vez que se decidiu coletar informações para construir um dado argumento a respeito das questões levantadas. Desse modo, quando o procedimento geral é colocado em ação, evidências importantes são obtidas para responder as questões elaboradas. Os procedimentos podem ser planejados ou até redefinidos no decorrer da coleta dos dados, dependendo da maneira que a pesquisa está sendo conduzida.

9ª Atividade: Interpretar as Informações Coletadas

Nesta atividade as informações coletadas são analisadas e interpretadas em função do problema identificado na pesquisa. Em muitos estudos, o pesquisador pode se utilizar de métodos quantitativos ou qualitativos, dependendo de serem ou não realizados testes estatísticos. Dentre as informações coletadas, é importante perceber que parte delas é relevante, que parte é irrelevante e até mesmo, que parte é incompreensível. Cabe ao pesquisador decidir, dentre todas, aquelas que merecem maior ou menor atenção, no que se refere à ajuda que se possa dar para responder a pergunta da pesquisa. Para Romberg (1992, p.53), "tentar encontrar informação importante dentre todas as que estejam disponíveis é uma arte na qual certas pessoas são melhores do que outras".

10ª Atividade: Transmitir os Resultados para Outros

Esta atividade consiste no registro e divulgação da pesquisa. Consoante com Onuchic e Noguti (2014),

> Coletadas e interpretadas as evidências, o pesquisador deve escrever seu relatório de pesquisa, isto é, deve relatar os resultados obtidos, considerando o caminhar de sua pesquisa, suas referências teóricas e aplicações, sempre mantendo vivo o objetivo de responder a pergunta definida para sua pesquisa. Tal relato pode ser um artigo, dissertação ou mesmo uma tese (p. 65).

Segundo Romberg (1992) é importante que o pesquisador deixe claro, em seu trabalho, sua própria visão de mundo, pois suas descobertas serão interpretadas segundo essa visão. Se isto não estiver garantido, os leitores usarão, sem nenhuma dúvida, suas próprias noções para interpretar o estudo realizado.

11ª Atividade: Antecipar a Ação de Outros.

Nessa atividade, o pesquisador, após a conclusão de uma investigação específica e com os resultados obtidos, fica interessado em saber o que vai acontecer com sua pesquisa e, então, deverá antecipar ações posteriores. Assim, conforme Romberg (1992) os membros de uma comunidade científica discutem suas ideias uns com os outros, confrontam as ideias de uns com as de outros e sugerem novos caminhos, modificações de estudos anteriores, elaborações de novos procedimentos e assim sucessivamente.

Onuchic e Noguti (2014) dizem que, após o término de uma investigação científica, o pesquisador tem a obrigação de informar a *outros* sobre essa conclusão e “buscar seus comentários e críticas, ou seja, Antecipar a Ação de Outros pesquisadores em relação ao seu tema de pesquisa. Ao fazer isso, o pesquisador poderá também apresentar aos seus pares possibilidades de trabalhos futuros envolvendo seu objeto de pesquisa” (p. 65).

2 IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Neste capítulo, iniciando a pesquisa, vamos trabalhar o primeiro bloco de Romberg-Onuchic, e relacionar as atividades desse bloco com o problema de nossa pesquisa.

2.1 FENÔMENO DE INTERESSE

Nesta pesquisa, o objeto de estudo foi definido a partir de minha trajetória pessoal. De acordo com Allevato (2005, p. 20), "a identificação do fenômeno de interesse ou tema geral da pesquisa, situa a curiosidade do pesquisador e corresponde ao ponto de partida para um trabalho de pesquisa".

2.1.1 Minha trajetória pessoal rumo à pesquisa

Nasci e realizei minha educação básica em Montanha – ES. Desde o Ensino Fundamental, gostava de Matemática, dedicava-me mais a ela do que às outras matérias do currículo, realizava as atividades propostas sem apresentar maiores dificuldades, etc. Era bom aluno nessa disciplina e, acredito, também por esse motivo, decidi fazer o curso Técnico em Contabilidade ao invés do Magistério no Ensino Médio, naquele tempo chamado de 2º grau. Escolhi o curso Técnico em Contabilidade, que habilitava todos que o concluíam a trabalhar nessa área. Ser professor, à época, estava fora de cogitação. Durante o curso, julgava que tinha bons professores, ou pelo menos me parecia que sabiam os conteúdos que ensinavam – achava isso, principalmente, nos professores de Matemática.

No ano de conclusão do ensino médio (segundo grau), 1987, consegui um emprego num escritório técnico em contabilidade, onde permaneci por seis anos. Em 1992, por ironia do destino, um ex-professor meu, de Matemática, saiu de licença para tratamento e me pediu para substituí-lo na disciplina de Matemática durante os últimos três meses letivos, em suas turmas de 8º e 9º anos (7ª e 8ª séries) numa escola pública do referido município. Relutei muito, mas acabei aceitando devido à sua insistência. Foi a minha primeira experiência em sala de aula como professor.

Naquela época, as escolas tinham autonomia para contratar profissionais da educação sem concurso. Em 1993, fui recontratado para substituir uma professora que saía de licença maternidade e assumi disciplinas de Matemática em outras turmas do Ensino Fundamental.

Nesse ano, trabalhei, concomitantemente, na escola e no escritório de contabilidade, mas ficou muito difícil conciliar as duas funções e, consequentemente, ter um bom desempenho. Em meados daquele ano pedi demissão do escritório e, a partir desse momento, dediquei-me, exclusivamente, à função de professor.

No início tive muita dificuldade em lidar com os alunos. O relacionamento com eles não era muito bom, pois o comportamento deles em sala de aula era complexo e a forma de ensino tradicional que eu apresentava parecia não ser a mais adequada ao trabalho daquelas séries. Eu me esforçava, sabia o conteúdo, mas não tinha didática, ensinava como havia aprendido com alguns de meus professores. Comecei a me questionar: O que poderia eu fazer para que, um dia, pudesse ser um bom professor? Minha formação inicial, técnico em contabilidade, não tinha relação com a função docente; conclui que precisava de algo mais para trabalhar bem em sala de aula.

Com a consciência da falta de condições para fazer uma licenciatura em Matemática e continuar trabalhando como professor foi preciso recorrer a outros meios de aprimoramento, de modo que, a construção de minha identidade como professor se deu a partir de interações com colegas mais experientes da escola e até mesmo fora dela. Esses, generosamente, me auxiliaram no planejamento das aulas, com orientações sobre o trabalho em sala, com sugestões de atividades, na construção e utilização de materiais manipuláveis, etc. Dessa maneira, se passaram cinco anos.

Antes mesmo de ir para o Rio Grande do Sul, através de amigos meus que moravam, estudavam e trabalhavam por lá, mais precisamente em Ijuí, noroeste daquele estado, fiquei sabendo muitas coisas sobre o ensino. Pelo que me relatavam, passei a acreditar que lá havia melhores chances para crescer profissionalmente, como eu desejava. Tanto me convidaram para ir morar, trabalhar e estudar em Ijuí que, no final de 1997, resolvi ir para lá.

Em 1998, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na Unijuí – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, no município de Ijuí. Para estudar, teria que encontrar um emprego. Por intermédio de um de meus amigos, consegui umas aulas numa escola particular em que ele trabalhava. Lecionei em turmas do Ensino Fundamental. Nessa escola havia um programa a ser cumprido rigorosamente e o professor tinha que passar o conteúdo a despeito da compreensão dos alunos. Assim sendo, os alunos esqueciam o que aprendiam logo após fazer uma avaliação, realidade não muito diferente da que eu presenciei no Espírito Santo.

Durante os cinco anos da graduação, trabalhei na mesma escola. Dessa forma, não tive oportunidade de vivenciar a realidade da escola pública gaúcha, apenas ouvi relatos. Assim que concluí a licenciatura, em 2002, retornei a Montanha – ES. Em 2003, fui contratado pelo município e pelo estado como *professor DT* (Designação Temporária) para lecionar Matemática no Ensino Fundamental e Médio. Imaginava que, ao retornar à minha cidade e às escolas nas quais havia trabalhado, iria encontrar os alunos com um rendimento melhor do que quando sai; contudo, parecia que nada havia mudado. Pude perceber a dificuldade que muitos alunos tinham em compreender Matemática, desde conceitos básicos, como, por exemplo, saber trabalhar com as Operações Aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão), principalmente a operação divisão.

Ainda em 2003, ingressei numa Pós-Graduação em Matemática e Estatística *Lato Sensu*, pela UFLA – Universidade Federal de Lavras. Esse curso não mudou muita coisa no meu conhecimento pedagógico, no sentido de aprender novas metodologias, novas estratégias para o ensino de Matemática.

No ano 2008, após aprovação num concurso, assumi o cargo de professor efetivo da rede estadual de ensino do Estado do Espírito Santo e optei por escolher trabalhar na cidade de Montanha, onde moro até hoje. Assumi a Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Professor Elpídio Campos de Oliveira”, trabalhando no Ensino Fundamental do 6º ao 9º ano e, eventualmente, no Ensino Médio em outra escola deste município.

Durante as aulas, quando abordava o tema *divisão*, alguns alunos tinham grandes dificuldades para realizar as atividades e resolver os problemas propostos. Muitos nem tentavam fazer alegando não saber. Nos nossos planejamentos, ou até mesmo nos intervalos, quando esse assunto era mencionado entre os professores, ficava nítido que o problema acontecia também nas demais turmas, inclusive no ensino Médio. Assim, os resultados dos alunos não eram satisfatórios nas avaliações regulares da escola, chegando ao final do ano letivo com algumas reprovações.

À medida que o tempo ia passando, as dificuldades (a falta de interesse, o não cumprimento de atividades, desmotivação, o baixo rendimento em avaliações regulares, reprovações, etc.) por parte dos alunos aumentavam e, consequentemente, os problemas de aprendizagem continuavam. Nas avaliações externas, a exemplo do SAEB/Prova Brasil, os alunos de 9º ano da referida escola demonstravam baixo desempenho ano após ano. Essa situação me deixava inquieto. Para mim, ficou claro que era necessário encontrar novas estratégias, uma metodologia diferente para ensinar Matemática.

Em 2009, participei do programa de formação continuada Multicurso Matemática para o Ensino Médio, promovido pela SEDU/ES – Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo, onde foi proporcionado aos participantes, entre outras coisas, o conhecimento das atuais tendências em Educação Matemática. Nesta formação, foram apresentadas atividades bem elaboradas, contextualizadas, enfatizando a metodologia Resolução de Problemas (RP) como sendo uma boa opção na busca de uma melhora no ensino e aprendizagem de Matemática para os dias atuais. Entretanto, isso não foi suficiente para mudar minha prática em sala de aula, pois continuei a propor problemas apenas como aplicação de conteúdos previamente explicados.

No segundo semestre de 2013 surgiu a oportunidade de participar da seleção de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica (PPGEEB) da Universidade Federal do Espírito Santo (UFES), no Centro Universitário Norte do Espírito Santo (CEUNES). Então, pensando nas dificuldades que os alunos do Ensino Fundamental da minha escola apresentavam em relação aos conhecimentos básicos de Aritmética, propus como tema de pesquisa o ensino e a aprendizagem da operação divisão através da Resolução de Problemas.

Depois de inserir-me no programa de mestrado, no segundo semestre de 2014, fui orientado a ir ao III SERP – Seminário em Resolução de Problemas, organizado pelo grupo GTERP. Ao participar desse Seminário, observar as várias falas dos palestrantes nas mesas redondas, apresentações de trabalhos e discussões nos minicursos, fiquei fortemente influenciado a acreditar que a Resolução de Problemas, mesmo não sendo o único caminho, poderia ser uma boa alternativa para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos em sala de aula.

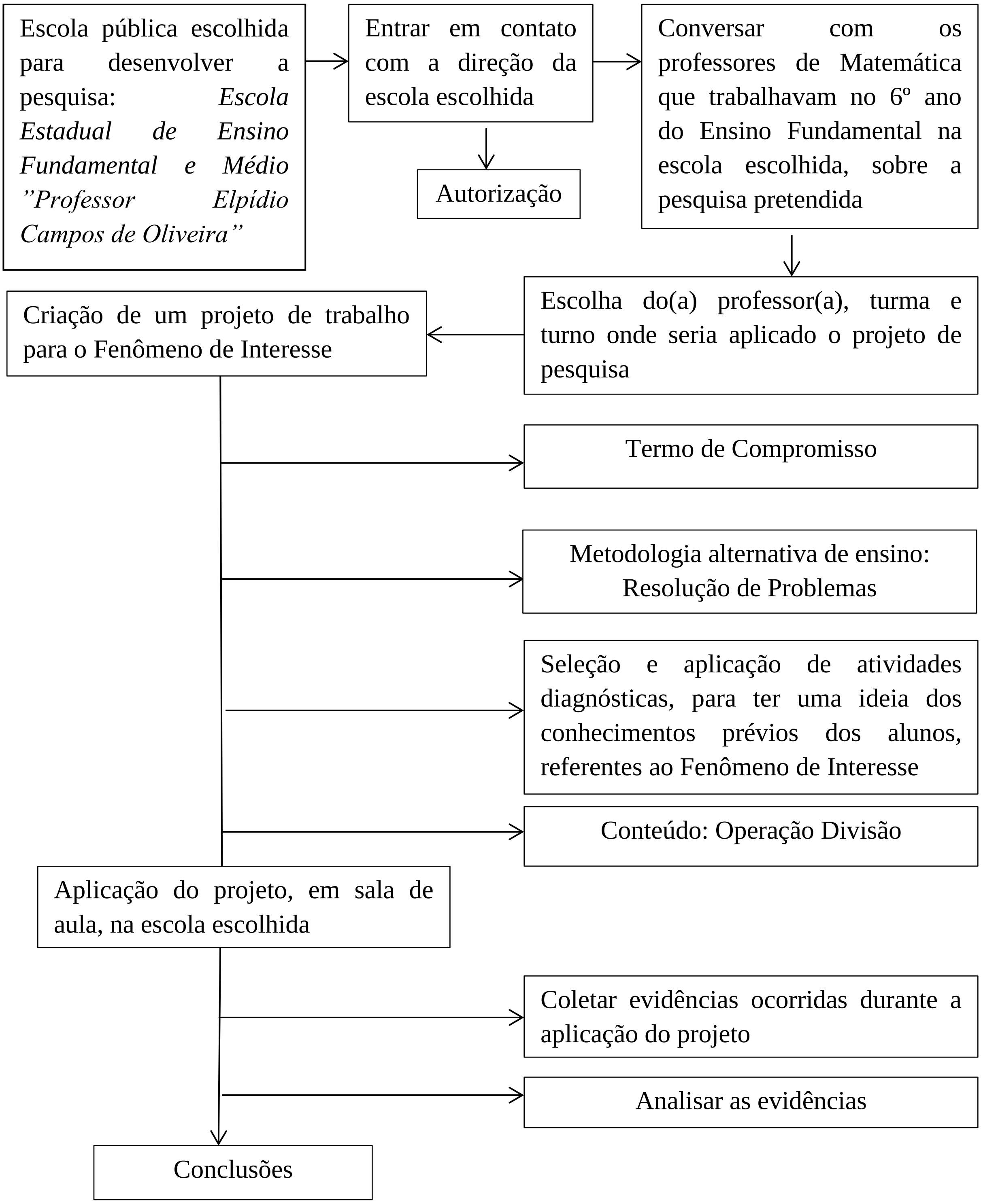
Assim, inicialmente, formulamos o nosso fenômeno de interesse para a pesquisa que seria o tema de minha dissertação de mestrado:

O ensino e aprendizagem da operação divisão, no 6º ano do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas.

2.2 MODELO PRELIMINAR

Com base no Modelo Metodológico Romberg-Onuchic, este modelo preliminar indica uma primeira imagem da pesquisa que pretendíamos fazer. O fluxograma, Figura 3, mostra uma ideia inicial e organizada desse modelo.

Figura 3 - Fluxograma do Modelo Preliminar da Pesquisa



2.3 MODELO MODIFICADO

Após o desenvolvimento de algumas etapas do processo de pesquisa, uma reavaliação do fenômeno nos remeteu a uma nova escolha de variáveis, o que resultou na elaboração de um novo modelo pra nossa pesquisa.

Antes de conhecermos a turma de 6º ano, na qual iríamos desenvolver o nosso projeto de pesquisa, realizamos uma reunião com a professora de Matemática dessa classe e a coordenadora pedagógica da escola, com o intuito de termos uma noção de como seria a turma. A pedagoga nos relatou que "os alunos que estão se matriculando no 6º ano na escola, estão chegando cada vez mais imaturos e com grande dificuldade em Matemática. Essa classe, em particular, além da imaturidade, tem muita dificuldade em conteúdos básicos, que são pré-requisitos para a série em que [os alunos] estão, como, por exemplo, as operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão) e, quando [se] fala em divisão, eles nem tentam [fazer as atividades propostas]". A professora afirmou que "realmente a operação de divisão é um problema para eles resolverem, e se for com dois ou três algarismos [no divisor] ou em forma de um problema que envolve a divisão, pior ainda, pois no problema eles não conseguem interpretar direito o que se pede no enunciado e param na primeira tentativa".

Ao perguntarmos sobre o uso do material manipulativo nas aulas de Matemática, para auxiliar no entendimento das atividades, a professora disse: "já tentei, mas eles são muito danados, não param sentados e, então, não usei mais".

Durante essa reunião, agendamos duas aulas de 55 minutos para levarmos para a turma alguns problemas sobre as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão). Os objetivos foram observar quais caminhos os alunos utilizariam para resolver os problemas e quais seriam os conhecimentos prévios necessários dessa turma em relação a esse conteúdo.

Isso corrobora com o que prega os PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática:

> [...] é fundamental que o professor, antes de elaborar situações de aprendizagem, investigue qual é o domínio que cada criança tem sobre o assunto que vai explorar, em que situações algumas concepções são ainda instáveis, quais as possibilidades e as dificuldades de cada uma para enfrentar este ou aquele desafio (BRASIL, 2000, p. 63).

A primeira aula agendada ocorreu no dia 26 de maio de 2015, no 3º horário[9] de aula, com 19 alunos presentes. Chegamos à turma, conversamos com eles sobre o nosso projeto, do que se tratava e como seria desenvolvido, etc. Então, distribuímos uma lista com seis questões extraídos de livros didáticos de 4º ano do Ensino Fundamental (seção 3.2.4). Pedimos a eles para resolver da forma que achassem melhor, mas sem pedir ajuda a mim ou à professora.

A maioria dos presentes reclamou dos dois problemas de divisão que estavam na lista. Alguns comentários surgiram durante a resolução das atividades como, por exemplo, "eu não vou fazer essa conta de dividir... não sei isso... é muito difícil tio"; "esse problema é de dividir ou de menos?"; "divisão é muito difícil... eu não sei isso não"; alguns chamavam a professora: "tia... tia... me ajuda aqui". Sem contar os que tentaram e erraram, dez deixaram as duas questões em branco. As outras quatro questões, alguns acertaram e outros as resolveram parcialmente.

A segunda aula agendada ocorreu no dia 28 de maio de 2015, no último horário de aula da turma, com 17 alunos presentes. Nessa ocasião, levamos uma lista com oito operações, sendo que duas delas eram de divisão. Uma, tinha no divisor um algarismo e a outra, dois algarismos. Ao distribuir a lista, repetimos para eles o que havíamos dito na primeira aula, para resolver como quisessem e sem nossa ajuda. E a história se repetiu. "Conta de dividir de novo... eu não sei isso não tio!", bradou um no fundo da sala quando se deparou com uma das operações de divisão. A operação que tinha um algarismo no divisor, a maioria deles deixou em branco ou errou; já a operação que tinha dois algarismos no divisor, todos erraram ou deixaram em branco. Quanto às outras operações, a maioria acertou ou acertou parcialmente.

Para conhecer a professora de Matemática da turma, marcamos uma data para conversarmos na escola, num horário que coincidisse com o seu planejamento. Preparamos um roteiro de entrevista, contemplando questões sobre sua formação, tempo de trabalho e experiência no Ensino Fundamental, qual sua percepção sobre a classe em que iríamos desenvolver o projeto, etc. (seção 3.2.3).

No decorrer da entrevista ela demonstrou preocupação com o tempo que sobraria para trabalhar *divisibilidade* após o término da nossa pesquisa. Então, nos fez a proposta para desenvolvermos o projeto de pesquisa incluindo esse tópico todo, visando não prejudicar o

[9]Esse horário antecede o intervalo (recreio escolar).

plano de ensino para o trimestre letivo[10], ora planejado por ela, baseado no livro didático adotado pela escola e respaldado pela equipe pedagógica.

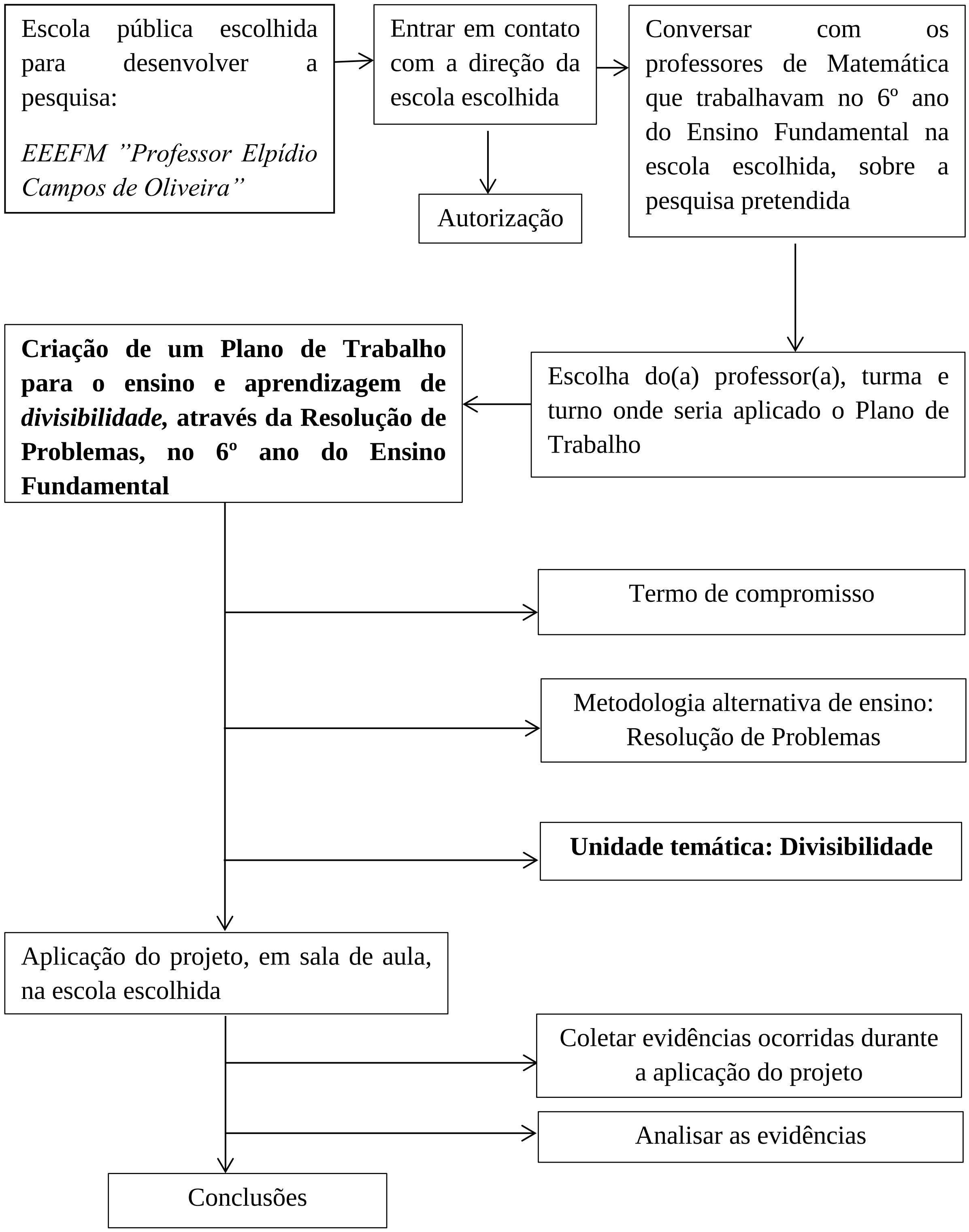
Diante da situação exposta pela professora e analisando o transtorno que seria para ela atrasar o seu conteúdo trimestral, ter que modificar seu plano de ensino, conduzir a turma com dois assuntos diferentes ao mesmo tempo e, também, levando em consideração os relatos dela e da pedagoga da escola a respeito da turma e o resultado das atividades diagnósticas aplicadas, decidimos mudar o nosso Fenômeno de Interesse para ***ensino e aprendizagem de divisibilidade, através da Resolução de Problemas no 6º ano do Ensino Fundamental.***

Desta forma, o nosso *Modelo Preliminar* sofreu uma mudança considerável e passou a ser chamado *Modelo Modificado*, como mostra o fluxograma, Figura 4, com as modificações destacadas em negrito.

---

[10]Nas escolas das redes estadual e municipal do Espírito Santo, o ano letivo é subdividido em 3 trimestres.

Figura 4 - Fluxograma do Modelo Modificado da Pesquisa



2.4 RELAÇÃO DO FENÔMENO DE INTERESSE E MODELO MODIFICADO COM IDEIAS DE OUTROS

Definido o nosso Fenômeno de Interesse e construído o Modelo Modificado, foi feito um levantamento bibliográfico em algumas pesquisas, livros e documentos oficiais pertinentes ao nosso tema de estudo.

2.4.1 Contribuições de pesquisas que possuem interseção com o nosso Fenômeno de Interesse

Ao fazermos uma busca referente às pesquisas com interseção ao nosso tema divisibilidade, selecionamos seis trabalhos realizados entre os anos de 2004 e 2015. Sendo cinco dissertações e uma tese. No banco de dados da Capes, utilizando os termos **divisibilidade, ensino-aprendizagem de divisibilidade, ensino-aprendizagem de múltiplos e divisores, construção de critérios de divisibilidade, ensino-aprendizagem de divisibilidade por meio da Resolução de Problemas, ensino-aprendizagem de múltiplos e divisores por meio da Resolução de Problemas**, encontramos a dissertação de Pizysieznig (2011); no Repositório Institucional da UNESP, encontramos a dissertação de Pereira (2004); no Google (Brasil), encontramos os trabalhos de Resende (2007), Gregoruti (2009), Silva (2010) e Maurício (2014) entre os anos 2000 e 2015. Entretanto, utilizamos em nossa revisão bibliográfica apenas as cinco pesquisas de mestrado indicadas no quadro 1. Os trabalhos escolhidos resumem o tipo de produção na área e focalizam o tema de divisibilidade. O motivo pelo qual não utilizamos a pesquisa de doutorado em nossa revisão é que ela está voltada mais para a formação de professores. Após relacioná-los nos quadros abaixo, fizemos um resumo da ideia principal de cada um deles.

Quadro 1 - Algumas pesquisas realizadas sobre divisibilidade entre os anos 2004 e 2014

Ano	Tipo	Título	Autor(a)	Orientador(a)	Instituição
2004	Mestrado em Educação Matemática	O Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas no 3º Ciclo do Ensino Fundamental	Mariângela Pereira	Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic	UNESP/Rio Claro- SP
2007	Doutorado em Educação Matemática	Re-significando a disciplina Teoria dos Números na Formação do professor de Matemática na Licenciatura	Marilene Ribeiro Resende	Profª Drª Silvia Dias Alcântara Machado	PUC/SP
2009	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática	Construção dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem	Juliana de lima Gregorutti	Profª Drª Barbara Lutaif Bianchini	PUC/SP
2010	Mestrado em Educação Matemática	Divisibilidade: práticas de estudo realizadas por alunos de um curso preparatório para o vestibular	Maysa Ferreira da Silva	Profº Dr José Luiz Magalhães de Freitas	UFMS/ Campo Grande-MS
2011	Mestrado em Educação Matemática	Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar a calculadora?	André Henrique Pizysieznig	Profª Drª Silvia Dias Alcântara Machado	PUC/SP
2014	Mestrado Profissional em Ensino de Matemática - PROFMAT	Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de M.D.C e M.M.C. na Educação Básica	Eufélix Monteiro Maurício	Profº Dr Moacir Rosado Filho	UFES/ Vitória- ES

2.4.1.1 O Ensino-Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas no 3º Ciclo do Ensino Fundamental

Em sua dissertação, Pereira (2004) teve como principal objetivo verificar qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo (5ª série/6º ano e 6ª série/7º ano) do Ensino Fundamental, partindo de problemas geradores de novas ideias matemáticas. Dentro da Educação Matemática, o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é entendido como uma metodologia alternativa, que visa a um trabalho centrado no aluno, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos. Ao trabalhar com essa metodologia, segundo a autora, o aluno participa da construção do conhecimento com a orientação e a supervisão do professor que, somente no final do desenvolvimento da atividade ou da resolução de um problema, formaliza as novas ideias construídas, utilizando notação e terminologia corretas. Foram trabalhadas as unidades temáticas: *divisibilidade* e *números racionais*. Para desenvolver a sua pesquisa, ela seguiu a metodologia de Romberg.

A questão que norteou o seu trabalho foi: *Qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos?* Para obter a resposta desta pergunta, ela elaborou uma sequência de atividades (plano de ensino) contemplando, na sua maioria, problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos para serem trabalhados com alunos de 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental, em sala de aula, de uma escola pública da rede estadual de São Paulo. Esse projeto foi desenvolvido em 58 aulas de 50 minutos cada.

A autora percebeu a necessidade de analisar o que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propunha no currículo de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental. Além disso, para poder identificar o conteúdo matemático abordado no primeiro ano do Ginásio, procurou analisar os índices de alguns livros didáticos de Matemática de modo a tentar visualizar, de maneira fidedigna, como o conteúdo matemático era tratado em cada década do século XX, a partir de 1950.

Segundo Pereira (2004), a dinâmica que ela utilizou para o desenvolvimento de todas as atividades selecionadas ou criadas para compor o seu plano de ensino se deu a partir do roteiro elaborado por Onuchic (1998), para o desenvolvimento de atividades no Programa de

Educação Continuada (P.E.C.) da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE), descrito da seguinte maneia: **formar grupos, papel do professor, resultados na lousa, plenária, análise dos resultados, consenso e formalização**.

A autora salienta que, ao dar início à aplicação do Projeto em sala de aula, os alunos, mesmo já tendo trabalhado em grupos, ainda não estavam familiarizados com essa dinâmica, num trabalho coletivo e colaborativo. Essa forma diferenciada de trabalho chocou alguns alunos. Muitos, mesmo estando juntos com seus pares, resolviam suas questões matemáticas individualmente. Houve, inclusive, discórdia entre os membros de alguns grupos, pois, ainda, não possuíam espírito de equipe.

Para Pereira (2004), quando os alunos da turma pesquisada entenderam a dinâmica de sala, no trabalho em seus respectivos grupos, mostravam preocupação em sempre apresentar corretamente seus resultados, pois acreditavam que se estivessem certos poderiam obter melhores notas. Isso, segundo ela, pôde ser percebido quando alguns grupos manifestaram forte interesse em conhecer o trabalho de grupos vizinhos, ao resolver um mesmo problema. Durante a plenária, eles puderam entender que o mais importante era o processo e não, simplesmente, o resultado de cada problema. O professor tem papel fundamental por sempre incentivá-los a continuar a construir novos conceitos e novos conteúdos, formalizando ao final da plenária.

Para a autora, em suas conclusões, a metodologia alternativa adotada em sua sala de aula, contribuiu para uma melhora do ensino-aprendizagem de Matemática. Fez com que os alunos, na sua grande maioria, pensasse, refletisse e relacionasse conceitos novos com conteúdos construídos anteriormente. Pereira (2004) afirma que

> É sabido que saber Matemática é saber relacionar. Dentro de certas limitações, pude observar, muitas vezes, os alunos nos grupos, relacionando conteúdos trabalhados num problema com tópicos matemáticos já vistos anteriormente, para poder resolver outros problemas dados. Isso foi, para mim, importante (p.242).

Assim, essa metodologia permitiu aos estudantes trabalhar as dificuldades enfrentadas na resolução dos problemas propostos, utilizando problemas auxiliares, ao invés de se fazer revisões cansativas e desinteressantes.

Respondendo à pergunta de sua pesquisa, ela afirma com segurança que, em face de todas as considerações colocadas, foi relevante a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos.

2.4.1.2 Construção dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de situações de aprendizagem

Gregorutti (2009) verificou como seis alunos de 5ª série (6º ano) do Ensino Fundamental instigam seus conhecimentos sobre divisibilidade de números inteiros, tendo em vista a construção de uma nova perspectiva aos critérios de divisibilidade referente aos números dois, três e cinco.

A autora tinha como desejo que os conhecimentos ali adquiridos fossem úteis para o entendimento da divisão, uma vez que, segundo ela, pesquisas indicam que esta é uma das operações em que os alunos apresentam maior dificuldade. Ancorada no entendimento da relação entre álgebra e aritmética, a autora elaborou uma lista com quatro situações de aprendizagem que envolviam os conceitos de múltiplos e divisores, divisão exata e não exata e os critérios de divisibilidade, cujos objetivos eram sondar o que os alunos já sabiam a respeito do tema e identificar a forma de construção de novos conhecimentos.

Dessa maneira, ela fez uma investigação sobre o significado do termo “critérios de divisibilidade” e utilizou em sua pesquisa o que julgou mais conveniente: “critérios de divisibilidade são instrumentos matemáticos que servem como uma norma para proceder à divisibilidade, ou então, uma ‘receita’ para obter maior êxito no processo de divisão” (p.15).

Gregorutti (2009) propôs três questões aos alunos a fim de atacar a pergunta que instigou sua investigação. A primeira tinha como propósito saber se os alunos estavam aptos para entender se havia um padrão nos resultados da divisão por dois, três e cinco. Ela pôde verificar que os alunos constataram tal padrão somente para os números dois e cinco, não conseguindo estabelecer critério algum para o número três.

Para a segunda questão foram apresentados dois propósitos: verificar se os alunos associavam a divisão exata e a divisão não exata ao valor encontrado no resto e perceber se eles, ao manusearem a calculadora, relacionavam as casas decimais do quociente ao resto diferente de zero, isto é, que se tratava de uma divisão não exata. Para a primeira situação a autora concluiu que os alunos reconheceram a divisão exata e a divisão não exata, e as associaram ao resto. Em relação à segunda questão, ela observou que os estudantes, ao identificarem o quociente sendo um número natural e o resto igual a zero, concluíram que se tratava de uma divisão exata. Todavia, tendo no quociente um número decimal, eles não relacionaram as casas decimais ao resto da divisão, apesar de entenderem que era uma divisão não exata.

Na terceira questão, Gregorutti (2009) verificou que, ao longo da resolução das questões anteriores, eles não observaram que os múltiplos e os divisores de um número natural eram os possíveis números de uma divisão exata e que só foram entender essa relação, após a formalização desses conceitos.

Com a quarta questão, a autora tinha como objetivo saber se os alunos após vivenciarem as situações de estudo que constaram nas questões anteriores, ficassem habilitados para construir de forma autônoma, os critérios de divisibilidade, para os números dois, três e cinco. Ela constatou que os estudantes não conseguiram criar um critério para o número três.

A referida autora também percebeu que no caso do número três, o critério de divisibilidade não é fácil de ser entendido, uma vez que este apresenta particularidades (a soma dos algarismos que compõem o número) que não podem ser observadas facilmente, como no caso do número dois e cinco.

Os resultados obtidos na pesquisa desenvolvida por Gregorutti (2009) dispuseram-nos elementos fundamentais que serviram como subsídio para nosso trabalho, evidenciando como os alunos de sexto ano vivenciam situações que envolvem o resto de uma divisão com números inteiros, múltiplos e divisores.

2.4.1.3 Divisibilidade: práticas de estudo realizadas por alunos de um curso preparatório para o vestibular

Silva (2010) teve como objetivo "analisar práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular, concernente ao tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas" (p.23), na cidade de Campo Grande - MS. O curso preparatório para o vestibular em que foi realizada a pesquisa atende alunos de baixa renda e oriundos de escolas públicas, em um contexto de Ações Afirmativas[11], que veem no Ensino Superior uma possibilidade de igualdade de oportunidades.

Para o desenvolvimento da pesquisa foram investigados dispositivos didáticos, técnicas e argumentos utilizados pelos estudantes nas resoluções de problemas que envolviam divisibilidade, bem como formas de estudo praticadas pelo grupo, a fim de se apropriarem de saberes matemático.

Segundo Silva (2010) as sessões de estudo ocorreram no horário das chamadas oficinas de aprendizagem nas quais a instituição oferecia oportunidade para alunos que pudessem e quisessem participar de algumas aulas "extras" nas disciplinas: Matemática, Língua Portuguesa, Inglês, Espanhol, Física, Química e Redação. Em um mesmo dia ocorriam duas oficinas, concomitantemente, podendo o aluno escolher qual oficina iria frequentar, conforme seu interesse. As oficinas de Matemática mantiveram uma média de cinco alunos até o final do projeto, uma vez que não eram obrigados a participar.

Silva (2010), em sua pesquisa propôs três tipos de tarefas, a saber, *T1: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros; T2: Encontrar os Múltiplos e/ou Divisores; e T3: Determinar a quantidade de divisores de um número.*

As atividades realizadas com os alunos foram organizadas em duas propostas distintas, sendo uma delas composta, em sua maioria, por tarefas rotineiras extraídas de livros didáticos do 6º

[11]Para a autora, o conceito de Ações Afirmativas é dado por meio da perspectiva de Nascimento (2007), onde de uma forma mais geral, ele entende, como sendo as dinâmicas, práticas, meios e instrumentos que têm como *meta* o reconhecimento sociocultural, a promoção da igualdade (de oportunidades, de tratamento e de condições objetivas de participação na sociedade) e, portanto, a universalização (concreta) de direitos civis, políticos e sociais em uma dada sociedade. Ainda, segundo a autora, a expressão Ações Afirmativas surgiu nos anos de 1960, nos Estados Unidos, em meio a reivindicações democráticas internas, expressas principalmente no movimento pelos direitos civis, tendo como bandeira a extensão de igualdade de oportunidade a todos. Já no Brasil um fato que poderia ser caracterizado como o primeiro registro de Ação Afirmativa ocorreu em 1968, quando surgiu a proposta da criação de uma lei que obrigaria as empresas privadas a manter uma percentagem mínima de empregados de cor (20%, 15% ou 10%, de acordo com o ramo de atividade e a demanda). Esta proposta de lei tinha o apoio de técnicos do Ministério do Trabalho e do Tribunal Superior do Trabalho. Entretanto, esta lei não chegou a ser elaborada, mas tal movimento teve sua importância como marco para o início das Ações Afirmativas no Brasil.

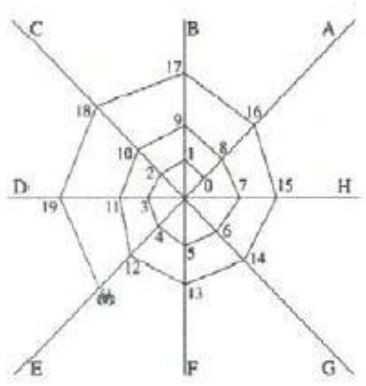
ano do Ensino Fundamental, que foram aplicadas nas sessões prévias, e a outra proposta de atividades foi, em sua maior parte, construída por tarefas não rotineiras trabalhadas nas sessões de estudo.

Após a realização das sessões prévias, cujos objetivos foram a apresentação dos envolvidos na pesquisa e o diagnóstico dos conhecimentos do grupo sobre divisibilidade, foram iniciadas as sessões concernentes aos tipos de tarefas escolhidas.

T1: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros
Uma das tarefas apresentadas foi o "Problema da Teia de Aranha"

Figura 5 - Problema da teia de Aranha

A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho.



a. Sobre qual fio de apoio estará o número 15?

b. Sobre qual fio de apoio estará o número 30?

c. É possível o número 80 estar sobre o fio de apoio C? Por quê?

d. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

e. Escreva uma regra para descobrir qual o fio de apoio de qualquer número.

Fonte: Silva (2010, p. 85)

A autora salienta que a evidência real dessa tarefa foi resolver, em especial, o item "e". Os itens de "a" a "d" tiveram um papel importante, porém estes não se caracterizaram como um problema para o grupo, pois apresentavam tarefas, de certa forma, rotineiras.

Segundo Silva (2010) houve evolução do ponto de vista matemático e didático, para resolver o problema proposto, pois os estudantes tiveram um intenso trabalho até chegar à construção do modelo por eles apresentado.

Destacamos ainda que, o desenvolvimento do grupo não ocorreu de forma linear, pois cada aluno seguiu seu próprio ritmo, o que pôde ser verificado nos registros de linguagem das técnicas, que ora eram mais evoluídos, ora rudimentares. No entanto, todos, de certa forma, aceitaram o problema e buscaram aplicar técnicas mais evoluídas para resolverem o problema.

T2: Encontrar os Múltiplos e/ou Divisores
Um dos problemas apresentados foi o do produto de três números consecutivos

O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6? Justifique sua resposta.

Sob a ótica da autora, o problema do produto de três números consecutivos foi idealizado a partir do momento em que “algumas carências conceituais que vinham perdurando no grupo quanto ao cálculo de múltiplos de um número. Desta forma, tomou-se a decisão de abordar elementos teóricos no sentido de suprir esta lacuna no conhecimento dos participantes das sessões de estudo” (p. 105).

Silva (2010) comenta que nessa tarefa, a estratégia mais utilizada pelos alunos consistiu em multiplicar três números consecutivos. Ela diz ainda que esta é uma maneira natural, espontânea dos alunos resolverem problemas desse nível, uma vez que muitos não conseguem justificar técnicas matemáticas num nível mais geral e abstrato da Matemática, apesar de a abstração e a Matemática estarem historicamente relacionadas.

Para a autora, diante desses fatos, é essencial a valorização das estratégias utilizadas pelos alunos. Certamente, ao valorizar as primeiras conclusões desenvolvidas num trabalho matemático, os estudantes poderão, a partir deles, tornar viável a construção dos elementos de nível teórico superior para a realização da tarefa.

T3: Encontrar a quantidade de divisores de um número

Um dos problemas apresentados foi o *dos dez divisores*

Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?

Silva (2010) diz que para a resolução desta atividade, vários caminhos foram traçados, várias estratégias foram montadas pelos alunos, no intuito de chegar à solução do problema. Tiveram muita dificuldade, mas juntos não desistiram.

Para Silva (2010), os resultados das sessões demonstraram que os alunos do grupo pesquisado apresentavam algumas dificuldades em relação ao tema divisibilidade como: o domínio das nomenclaturas, a elaboração de definições, a organização formal e a validação dos resultados. Observou-se que, tanto os registros de linguagem como as técnicas, ora eram mais evoluídos, ora mais rudimentares, mas que no decorrer do processo de estudo, de modo geral, houve evolução no processo de ensino e aprendizagem.

Ainda segundo a autora, ela percebeu uma real mudança de atitude. Ela afirma isso com base nos depoimentos que foram coletados, no início do ano, durante a entrevista realizada com esses estudantes sobre suas práticas de estudo, como por exemplo, a maneira como estudavam para as provas. E, como resposta, eles disseram que não gostavam, e se isso acontecesse prefeririam estudar conteúdos de geografia, história, etc. No decorrer do trabalho, através de suas observações constantes, essa situação já havia mudado bastante. Quando foram questionados novamente sobre a realização de tarefas fora da sala de aula e estudar para as avaliações, de modo geral, todos responderam que procuravam refazer as atividades já resolvidas. Eles ainda narraram que não faziam parte de suas práticas de estudo realizar atividades para as quais não tinham um modelo a ser seguido ou gabarito, por não terem certeza se a solução estaria certa ou errada.

2.4.1.4 Qual a concepção de divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar a calculadora?

O trabalho de Pizysieznig (2011) se insere na problemática que questiona o processo da construção dos principais conceitos matemáticos da Teoria Elementar dos Números durante a Educação Básica. Neste contexto, o seu estudo teve como objetivo investigar a concepção de divisibilidade de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, da rede pública estadual de São Paulo, por meio de uma abordagem com a calculadora, norteado pela seguinte questão geral de sua pesquisa: qual a concepção de divisibilidade de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental? Essa questão induziu a uma pergunta específica que teve o seguinte teor: a possibilidade do uso da calculadora na abordagem de questões sobre divisibilidade contribui para a explicitação da concepção dos alunos sobre esse conteúdo escolar? A sua pesquisa foi de cunho qualitativo e se apoiou, principalmente, na metodologia da Engenharia Didática, composta de quatro fases (análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e a análise *a posteriori* e validação).

Na fase preliminar, o autor fez um levantamento bibliográfico sobre assuntos da Teoria dos Números com foco na divisibilidade e sobre assuntos do uso das tecnologias no ensino e na aprendizagem de Matemática com foco nas calculadoras.

Na fase de análise *a priori*, foram estabelecidos os critérios de seleção dos sujeitos, a escolha do ambiente onde seria realizada a experimentação, a organização do material de apoio durante a investigação e a seleção das atividades que comporiam a sequência didática que seria aplicada, no intuito de possibilitar a percepção se a concepção de divisibilidade proposta nesse trabalho estaria articulada com o quadro geral mais amplo da rede pública.

A terceira fase, a da experimentação, foi composta por duas sessões: uma dedicada à familiarização com a calculadora e a outra visava a observação da concepção dos alunos sobre a divisibilidade. O confronto das análises *a priori* com *a posteriori* deveria validar ou não as hipóteses levantadas durante a pesquisa.

Segundo o Pizysieznig (2011), a primeira sessão da fase de experimentação, a familiarização dos quatro alunos do 6º ano, sujeitos da pesquisa, com os equipamentos (duas calculadoras de mesa, um computador e a calculadora do celular) privilegiou a comparação entre vírgula (,) no visor e na bobina da calculadora de mesa, como, por exemplo, (10.25), e o ponto no visor do celular e da calculadora do computador, por exemplo, (10,25). Ele salienta que essa comparação ocorreu de duas maneiras diferentes. Uma através do manuseio de cada dupla dos três modelos de calculadoras e pela transcrição de suas observações na lousa.

A segunda sessão foi dedicada a aplicação da sequência didática. As atividades foram elaboradas ou selecionadas com o propósito de provocar e induzir os alunos à utilização da calculadora e envolveu os seguintes conteúdos: algoritmo da divisão, múltiplos e divisores e números primos.

Segundo Pizysieznig (2011), em relação ao significado do conceito de "divisor", nenhum dos quatro participantes da pesquisa demonstrou conhecimento da palavra. Todos interpretaram "um número inteiro ser divisor de outro" como "um número dividido por outro", ou quando questionados se "2 é divisor de 24" iniciaram digitando na calculadora (2:24, 2×24, 2 – 24, ...), ou ainda, um dos participantes considerou que "2 é divisor de 13", mesmo após ter calculado pelo algoritmo da divisão (13 : 2 = 6 e r = 1).

Para o autor, fica claro também que o sentido matemático de "divisor" deve ser enfatizado pelos professores, e que só deve ser utilizado no sentido matemático do termo e apenas ao tratar de números inteiros. Assim sendo, no algoritmo da divisão "o número pelo qual se divide" não deve ser nomeado de divisor, pois cria um obstáculo didático na construção de uma concepção desejada de divisor, visto esse ser um conceito essencial para o entendimento de outros conceitos da divisibilidade, dentre os quais estão os critérios de divisibilidade, mínimo múltiplo comum, máximo divisor comum - conceitos primordiais da Teoria Elementar dos Números.

Foi também possível identificar que 2 dos 4 participantes compreenderam o conceito de um número ser "divisível por outro", estabelecendo a relação de que um número natural é divisível por outro quando esse for múltiplo do outro, revelando ter concepção da relação reversa entre multiplicação e divisão com números naturais.

Para Pizysieznig (2011), é necessário que esses conceitos fundamentais da divisibilidade sejam explorados, institucionalizados e usados usualmente em sala de aula, para que, diante de tais situações, o aluno consiga gerar e desenvolver uma concepção operacional do conceito e que tenha a oportunidade de concretizá-lo, como é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) nas orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos em números e operações.

2.4.1.5 Uma proposta de Sequência Didática para o ensino de M.D.C. e M.M.C. na Educação Básica

Maurício (2014) teve como objetivo apresentar em seu trabalho uma sequência didática voltada aos professores da educação básica, principalmente, da rede pública estadual. Essa sequência trata em específico do cálculo do Máximo Divisor Comum por meio da divisão euclidiana. Ele discorre sobre divisibilidade, Mínimo Múltiplo Comum e números primos. A proposta em questão é formada por 4 capítulos.

1 – Divisibilidade em Z
1.1 – Algoritmo da Divisão (Divisão Euclidiana)
2 – Máximo Divisor Comum (M.D.C.)
3 – Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.)
4 – Números Primos

O autor supracitado afirma que ao ministrar aulas para turmas de Ensino Médio, ao longo de vários anos, pôde observar que,

> os principais e melhores livros didáticos do mercado, nessas modalidades de ensino, têm explorado menos o conceito de mmc e mdc, bem como os processos práticos para o cálculo dos mesmos. E isso é preocupante, uma vez que tais conteúdos possuem muitas aplicações práticas, inclusive no cotidiano dos alunos que fazem parte desse nível de ensino. Não obstante disso, os conceitos elementares relacionados com esses tópicos são fáceis de serem compreendidos e aplicados na resolução de problemas (p.11).

O autor ressalta ainda que as poucas referências bibliográficas que tratam esse tema ignoram a abordagem do cálculo do m.d.c. pela divisão euclidiana. Além disso, é um assunto que não é abordado pelo CBEE/ES – Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo.

Ele, a partir de sua análise, sugere aos professores que preparem um material a parte para que possam suprir essa deficiência, considerando a importância desse tópico matemático.

Observamos que na pesquisa realizada, em cada um de seus capítulos, sempre inicia com a definição, proposição de um teorema e a prova dele. Na sequência, uma lista de exercícios. Ou seja, começa com a formalização do conceito.

Verificamos que, mesmo que esse trabalho tenha sido realizado para professores, não teve a participação de nenhum dos que trabalham em sala de aula como colaborador de sua pesquisa, ou seja, não se trata de uma formação continuada.

Apesar de o estudo do referido autor, de certa forma, ter relação com a nossa pesquisa, seu foco não foi o mesmo do nosso trabalho, uma vez que no seu estudo não há nenhuma interseção com as novas tendências para ensino e aprendizagem da matemática. Contudo, foi importante para fazermos essa reflexão.

2.4.2 Breve análise de documentos oficiais

É sabido que o nosso sistema educacional está apoiado na Lei de Diretrizes e Bases nº 9.394/96, a qual, dentre outras coisas, aborda a necessidade de estabelecer conteúdos mínimos obrigatórios para a Educação Básica. Por meio disso, criaram os PCN_s (1997, 1998, 2000), para orientação dos profissionais da educação no que tange à prática docente, assim como os objetivos a serem alcançados durante a escolaridade. Para a educação do estado do Espírito Santo, a SEDU - Secretaria Estadual de Educação publicou o CBEE – Currículo Básico das Escolas Estaduais, que trata de uma abordagem mais restrita á realidade desse estado, estabelecendo, inclusive, roteiro de conteúdos para cada série com habilidades e competências.

Dada à importância desses documentos, elaboramos uma síntese de cada um deles, ressaltando o tratamento dos conteúdos estudados em nossa pesquisa.

2.4.2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª à 4ª séries)

O livro 3, que contempla a área da Matemática, dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (1997), 1ª à 4ª séries, está dividido em duas partes. A primeira abrange a caracterização da área de Matemática, listando alguns tópicos como, por exemplo, o papel da matemática no Ensino Fundamental, a sua conexão com a construção da cidadania e os temas transversais. Na sequência, aborda o aprender e ensinar Matemática, discutindo as relações professor-aluno-saber matemático, assim como alguns dos recursos para “trabalhar Matemática” em sala de aula (Resolução de Problemas, História da Matemática, Tecnologia da Informação e jogos), e apresenta alguns objetivos gerais de Matemática para o Ensino Fundamental, anos iniciais.

A segunda parte do livro trata, separadamente, dos dois ciclos, sendo o 1º ciclo referente às 1ª e 2ª séries (2º e 3º anos) e o 2º ciclo correspondem às 3ª e 4ª séries (4º e 5º anos). Em ambos, são abordados:

- Ensino e aprendizagem de Matemática para o ciclo;
- Objetivos de Matemática para o ciclo;
- Conteúdos de Matemática para o ciclo, dispostos em cinco blocos:
  - Números Naturais e Sistema de Numeração decimal;
  - Operações com Números Naturais;
  - Espaço e Forma;
  - Grandezas e Medidas,
  - Tratamento da Informação
- Critérios de avaliação de Matemática para o ciclo.

Após fazer uma leitura cuidadosa da lista de conteúdos de cada um dos ciclos, observamos que o tópico Divisibilidade não está relacionado. Entretanto, ao interpretar o documento e a partir de observações feitas em livros didáticos, entendemos que são dadas noções desse tópico no 2o ciclo, 4ª série (5º ano). São recomendadas as operações com Números Naturais no primeiro ciclo e no segundo ciclo o aluno deverá ampliar seus conceitos em relação ao primeiro, sendo abordado o conceito de divisibilidade com números naturais.

2.4.2.2 Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª à 8ª séries)

Assim como os PCN, 1ª à 4ª séries, os dos anos finais (1998), específicos para a área de Matemática, estão divididos em duas partes. A primeira aborda, inicialmente, as reformas curriculares do ensino nacional, citando e criticando o Movimento da Matemática Moderna, que baseava o ensino nas grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático, salientando a “teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia, etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática” (p. 19).

Em seguida, à sua breve revisão histórica os PCN, 5ª à 8ª séries, listam alguns tópicos mencionando a importância do papel da Matemática como uma forma de compreender e atuar no mundo, bem como para a construção da cidadania e sua interação com os temas transversais. Trata também do processo de aprender e ensinar Matemática, discutindo as relações professor-aluno-saber matemático, assim como alguns dos recursos para "fazer Matemática" em sala de aula (Resolução de Problemas, História da Matemática, Tecnologia da Informação e jogos) e apresenta, na sequência, alguns objetivos gerais e os blocos temáticos de conteúdos de Matemática para o Ensino Fundamental, anos finais. Esses blocos são: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

Em relação à seleção de conteúdos a serem ensinados, os PCN, 5ª à 8ª séries, enfatizam uma abordagem abrangente, para além do exclusivamente conceitual: "conteúdos envolvem explicações, formas de raciocínio, linguagens, valores, sentimentos, interesses e condutas. Assim, nesses parâmetros os conteúdos estão dimensionados não só em conceitos, mas também em procedimentos e atitudes" (p. 49). Em particular, quanto às Operações, o trabalho a ser desenvolvido deve se concentrar no entendimento dos variados significados em cada uma delas, nas conexões existentes entre elas e no desenvolvimento do cálculo, contemplando diferentes tipos como, por exemplo, o exato e aproximado, mental e escrito.

A segunda parte dos PCN (5ª à 8ª séries) trata os dois ciclos (3º e 4º) separadamente, sendo o 3º ciclo referente às 5ª e 6ª séries (6º e 7º anos) e o 4º ciclo correspondem às 7ª e 8ª séries (8º e 9º anos). Em ambos, são abordados:

- Ensino e aprendizagem de Matemática para o ciclo;
- Objetivos de Matemática para o ciclo;
- Conteúdos de Matemática para o ciclo, dispostos em quatro blocos:
    - Números e Operações;
    - Espaço e Forma;
    - Grandezas e Medidas,
    - Tratamento da Informação
- Critérios de avaliação de Matemática para o ciclo.

No tópico Números e Operações, observamos que há a recomendação de se explorar situações-problema que levem o aluno a reconhecer diferentes funções da álgebra, como, por exemplo, generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar e resolver problemas aritmeticamente, entre outros.

Com relação aos números naturais, esse documento menciona que muitas vezes é considerado que o trabalho com eles é finalizado ao término do segundo ciclo; todavia, é fundamental que o estudante continue a explorá-los em situações de “contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de ‘números grandes’ e desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza” (p. 66).

Ainda, de acordo com os PCN (1998),

> **Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo,** que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. Além disso, é importante que tal trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver (*ibid*, p. 66, grifo nosso).

Dessa forma, é necessário que os alunos ampliem os seus conhecimentos sobre a cerca desses conteúdos, explorando o potencial crescente, inclusive de abstração, descobrindo regularidades e propriedades numéricas e geométricas. Com isso, criam-se também condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas.

Finalizando, são apresentados objetivos para o ensino da Matemática e orientações didáticas que visam a contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos.

2.4.2.3 CBEEES – Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo

O CBEEES (2009) foi elaborado com a finalidade de definir o Conteúdo Básico Comum - CBC para cada disciplina da Educação Básica, cuja implementação é obrigatória em todas as escolas da rede estadual do Espírito Santo. Essa proposta traz a ideia de que existe um conteúdo básico de cada disciplina correspondendo a cerca de 70% do currículo que é fundamental para a formação da cidadania e que é necessário ser ensinado a todos os estudantes da Educação Básica da rede estadual. Além do CBC, outros conteúdos complementares deverão ser acrescentados de acordo com a realidade sociocultural da região onde a unidade escolar está inserida, correspondendo aos 30% restantes do currículo.

Esse documento é composto por oito livros, distribuídos da seguinte maneira:

1. Guia de Implementação;
2. Ensino Fundamental – anos iniciais;
3. Ensino Fundamental – anos finais, volume 1 – Área de Linguagens e Códigos
    - Língua Portuguesa;
    - Artes;
    - Língua Estrangeira Moderna – Inglês;
    - Educação Física.
4. Ensino Fundamental – anos finais, volume 2 – Área de Ciências da Natureza
    - Ciências;
    - Matemática.
5. Ensino Fundamental – anos finais, volume 3 – Área de Ciências Humanas
    - História;
    - Geografia;
    - Ensino Religioso.
6. Ensino Médio – volume 1 – Área de Linguagens e Códigos
    - Língua Portuguesa;
    - Arte;
    - Educação Física;
    - Língua Estrangeira Moderna – Inglês
7. Ensino Médio – volume 2 – Área de Ciências da Natureza
    - Química;
    - Física;
    - Biologia;
    - Matemática
8. Ensino Médio – volume 3 – Área de Ciências de Ciências Humanas

- Filosofia;
- História;
- Sociologia;
- Geografia

Analisando o volume 2, Ensino fundamental, anos finais, observamos que esse é dividido em dois capítulos, sendo que o inicial, comum às várias áreas do conhecimento, trata do processo de construção desse documento, dos pressupostos teóricos, onde os princípios norteadores colocam o estudante como referência e foco de todo o processo educativo. Também "representam a base e o fundamento que subsidiam a política educacional de escolarização de crianças, jovens e adultos capixabas" (ESPIRITO SANTO, 2009, p.22). Ainda, retrata diversidade na formação humana, como, por exemplo, a Educação de Jovens e Adultos, a Educação Especial na perspectiva da inclusão escolar, Educação do Campo tendo o campo como lócus de produção de saberes, a Educação Ambiental como perspectiva de uma sociedade sustentável, entre outros.

No segundo capítulo, trata do desafio de recriar um ensino científico que contribua para a formação de um ser humano capaz de ressignificar sua própria condição humana, ou seja, as suas características fundamentais da existência da humanidade em determinado espaço.

Ancorados em fundamentos legais, como, por exemplo, a LDB - Lei de Diretrizes e Bases nº 9 394/96 e nas Resoluções 02/98 e 03/98 da CEB/CNE – Câmara de Educação Básica do Conselho Estadual de Educação, que tratam das diretrizes curriculares nacionais dos Ensinos Fundamental e Médio, na proposta da Secretaria de Educação do Espírito Santo de "Educar para a pesquisa", e nos documentos norteadores da educação, o CBEE recria proposta curricular para ensino das Ciências firmado numa perspectiva sociocultural do ensino científico. Especificamente, em torno do ensino e da aprendizagem da Matemática, há tempos, discussões a respeito de metodologias, estratégias de ensino, contextualizações, entre outros vêm sendo levantadas em todos os níveis de educação; assim,

> nesse novo contexto de discussão da Educação Nacional desprender-se das velhas filosofias e investir no estudo e na elaboração de um currículo se faz necessário. Nessa perspectiva o currículo de Matemática deve atingir aspectos essenciais da formação plena do cidadão, levando em conta a inserção no mundo do trabalho, as relações sociais, as relações simbólicas e as diversas culturas (ESPIRITO SANTO, 2009, p.81).

Esse documento, ainda relata as tendências atuais em Educação Matemática, as quais vão na direção de buscar a associação prática entre o que acontece em sala de aula e fora dela. A organização curricular é composta por competências, habilidades e conteúdos. Ao verificar a grade curricular, não encontramos a unidade temática *divisibilidade*, em nenhuma das séries do currículo, em particular no 6º ano – como podemos observar nas figuras 6 e 7. Entretanto, conteúdos dessa unidade são contemplados nos PCN e em todos os livros aprovados no âmbito do PNLD 2014.

Figura 6 - Lista de competências, habilidades e conteúdos para o 6º ano

(continua)

6.2.4 Conteúdo Básico Comum - Matemática

5ª Série

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Compreender globalmente os números e as operações e sua utilização. • Desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações. • Efetuar cálculos mentalmente, com algoritmos de papel e lápis, ou usando calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação.	• Reconhecer e utilizar diferentes formas de representação dos números, assim como das propriedades das operações. • Reconhecer a ordem de grandeza dos números. • Estimar valores aproximados e decidir a razoabilidade de resultados obtidos. • Procurar explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não-matemáticas. • Investigar relações numéricas em problemas envolvendo processos de contagem. • Reconhecer as operações que são necessárias à resolução de cada situação-problema, assim como explicar os métodos e o raciocínio que foram usados. • Compreender o sistema de numeração decimal no que tange ao valor posicional dos algarismos. • Compreender o sistema de numeração decimal e sua relação com os algoritmos da adição e subtração, multiplicação e divisão. • Reconhecer os números naturais, racionais e decimais e suas representações. • Reconhecer os números inteiros e suas representações e utilizações. • Utilizar as propriedades das operações em situações concretas e para facilitar os cálculos. • Reconhecer as frações e os decimais e suas representações. • Trabalhar com valores aproximados dos números racionais no contexto da situação-problema. • Reconhecer as situações de proporcionalidade e o uso	**NÚMEROS E OPERAÇÕES** • Os números no dia-a-dia. • Operações fundamentais. • Multiplicação: ideia proporcional. • As estratégias de cálculo: cálculo mental, estimativas, calculadora e algoritmo. • Os decimais: escrita e representações. • As frações: ideia de parte-todo e razão, representações numéricas e pictóricas. • O conceito de equivalência de frações: comparação e operações. • A porcentagem: escrita e representações. • Os números inteiros: conceito e representação. • Raciocínio proporcional.

Fonte: Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo (2009, p. 91)

Figura 7 - Lista de competências, habilidades e conteúdos para o 6º ano

(conclusão)

COMPETÊNCIAS	HABILIDADES	CONTEÚDOS
• Ler e interpretar tabelas e gráficos em situações diversas e comunicar as interpretações feitas. • Processar informações diversas.	• Registrar ideias e procedimentos. • Empregar média aritmética em situações-problema em que ela se faz necessária. • Comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem. • Utilizar a argumentação matemática apoiada em vários tipos de raciocínios.	**TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO** • Leitura e interpretação de tabelas e gráficos. • Coleta de dados e organização em gráficos de barra. • Leitura e interpretação de textos diversos. • Média aritmética.
• Visualizar, reconhecer, analisar e estabelecer relações entre as figuras geométricas. • Compreender o conceito de comprimento, massa e aptidão para utilizar conhecimento sobre esses conceitos na resolução de problemas do cotidiano. • Perceber a beleza das construções matemáticas, muitas vezes expressa na simplicidade, na harmonia e na organicidade de suas construções.	• Utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise das figuras geométricas e na resolução de problemas geométricos e de outras áreas da matemática. • Observar, explorar e investigar. • Utilizar a imaginação e a criatividade. • Reconhecer posições relativas entre retas. • Efetuar medições e estimativas em situações diversas, utilizando medidas não-padronizadas e padronizadas. • Estabelecer conexões entre os campos da Matemática e entre essa e as outras áreas do saber.	**GEOMETRIA, GRANDEZAS E MEDIDAS** • Visualização e análise de sólidos e polígonos. • Medidas de comprimento mais utilizadas. • Retas paralelas, perpendiculares e concorrentes. • Perímetro de figuras planas. • O sistema métrico decimal: a história das medidas e transformações de unidades, aplicações. • As unidades não-padronizadas de medidas. • As unidades padronizadas de medidas de comprimento (metro, centímetro e quilômetro). • As unidades de massa (quilograma e grama). • As unidades de volume (litro e mililitro). • Unidades de tempo (hora, minuto, segundo, ano, década, século).

Fonte: Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo (2009, p. 92)

Observando as figuras 6 e 7, cabe a seguinte pergunta, a nível de conjectura: Por que a escola trabalha a unidade temática d*ivisibilidade*? Penso que é porque o(a) professor(a) segue cegamente o livro didático!

2.4.3 Livro didático

Outro norteador da prática docente é o uso dos livros didáticos, muitas vezes adotados pela escola e que, de uma forma geral, tornam-se a única fonte de consulta para a preparação das aulas. Para a seleção das atividades para o nosso projeto, também fizemos uso de livros didáticos, mas buscamos, criticamente, contemplar uma variedade de fontes e adaptar livremente as atividades propostas às nossas circunstâncias.

Ao buscar por coleções que iríamos usar como fontes para tratar o assunto divisibilidade, inicialmente, verificamos a relação das obras aprovadas no âmbito do PNLD – Plano Nacional do Livro Didático para 2014, último ano de escolha (Quadro 2), publicada no Diário Oficial da União em 28 de junho de 2013, por meio da Portaria nº 29, de 26 de junho de 2013.

Quadro 2 - Relação de obras aprovadas no âmbito do PNLD 2014

Ordem	Editora	Título da Coleção	Autor (es)
01	Editora Dimensão	Descobrindo e Aplicando a Matemática	Alceu dos Santos Mazzieiro e Paulo Antônio F. Machado
02	Editora Moderna	Matemática Bianchini	Edwaldo Roque Bianchini
03	Saraiva Livreiros Editores	Matemática – Ideias e Desafios	Dulce Satiko Onaga e Iracema Mori
04	Editora Moderna	Matemática – Imenes & Lellis	Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Tera Lellis
05	Saraiva Livreiros Editores	Matemática: Teoria e Contexto	Marília Ramos Centurión e José Jakubovic
06	Editora do Brasil	Praticando Matemática – Edição renavada	Miguel Assis Name e Maria José C. de V. Zampirolo
07	Editora Moderna	Projeto Araribá Matemática	Fabio Martins de Leonardo
08	Editora Ática	Projeto Teláris - Matemática	Luiz Roberto Dante
09	Editora Scipione	Projeto Velear - Matemática	Antônio José Lopes
10	Editora FTD	Vontade de Saber Matemática	Patricia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza

Fonte: Disponível em < http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/4661-guia-pnld-2014> acesso em 25/07/2015

Verificamos que todas as dez coleções selecionadas apresentam o tema divisibilidade. Mas, optamos pela coleção **Projeto Teláris – Matemática**, do autor Luiz Roberto Dante (2012). A escolha se justifica pelo fato de que a escola onde o projeto de pesquisa seria desenvolvido adotou essa coleção para o triênio 2014, 2015 e 2016.

A coleção selecionada é dividida em quatro volumes destinados aos quatro anos finais do Ensino Fundamental, ou seja, o primeiro volume corresponde ao 6º ano; o segundo volume ao 7º ano; o terceiro ao 8º ano e o quarto ao 9º ano.

Como o nosso propósito de pesquisa não era o de analisar livros didáticos, julgamos suficiente observar apenas o primeiro volume da coleção, com o objetivo de ilustrar como o tópico divisibilidade é apresentado neste livro.

Numa visão mais geral, a obra destaca-se pela grande variedade de problemas que contextualizam a Matemática em práticas cotidianas e que fazem conexões com outras áreas do conhecimento. Nos livros, são apresentadas várias estratégias, algumas vezes postas lado a lado, o que facilita a comparação entre elas.

Cada volume é organizado em unidades e capítulos. As unidades iniciam-se com uma pequena lista de questões, denominadas *Ponto de partida*, e terminam na seção *Ponto de chegada*, composta pelas subseções *Matemática nos textos*, *Verifique o que estudou* e *Auto avaliação*. Sempre ao início de cada capítulo é apresentada uma introdução com uma situação problema trazendo a ideia do que estudará nele, ao final de cada um, encontram-se as seções *Tratamento da informação*, *Outros contextos* e *Revisão cumulativa*. No final de cada volume encontra-se um *Glossário*, as *Respostas dos exercícios propostos*, *Sugestões de leituras complementares e de sites relacionadas à Matemática.*

Em relação ao primeiro volume, correspondente ao 6º ano, o conteúdo divisibilidade está contemplado na 2ª unidade, capítulo 5, da seguinte forma:

Unidade 2: Potenciação e divisibilidade

Capítulo 5: Divisores e Múltiplos de Números Naturais

- ✓ Introdução
- ✓ Divisibilidade
  - ➢ Múltiplo e divisor de um número natural
  - ➢ Critérios de divisibilidade

- ✓ Divisores de um número natural
  - ➢ Obtenção dos divisores pelo processo geométrico
- ✓ Números primos
  - ➢ Crivo de Eratóstenes
  - ➢ Decomposição de um número natural em fatores primos
  - ➢ Máximo divisor comum (mdc)
- ✓ Múltiplos de um número natural
  - ➢ Mínimo múltiplo comum (mmc)
- ✓ Problemas envolvendo mdc e mmc
- ✓ Tratamento da informação
- ✓ Outros contextos
- ✓ Revisão cumulativa

Para iniciar o capítulo, é apresentada uma situação-problema contextualizada no cotidiano, com o intuito de introduzir o conteúdo de múltiplos e divisores, como podemos observar na Figura 8 abaixo:

Figura 8 - Fragmento da introdução do capítulo 5 - Divisores e Múltiplos

1 Introdução

As ideias de múltiplo e de divisor podem ajudar a resolver situações do nosso cotidiano. Vamos ver duas delas. Você vai resolvê-las com os conhecimentos adquiridos no capítulo.

1ª situação:

Para a realização da Festa Junina de uma escola, os alunos dos 6ºs e dos 7ºs anos vão se organizar em grupos para arrecadar prendas. Nos 6ºs anos, há 198 alunos e, nos 7ºs anos, há 189. Os grupos terão o mesmo número de alunos, serão formados sem que se misturem alunos de anos diferentes e sem que sobrem alunos.

a) Cada grupo pode ter 7 alunos?
b) Cada grupo pode ter 3 alunos?
c) Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?
d) Nesse caso, quantos grupos serão formados em cada ano?

Fonte: Projeto Teláris - Matemática, 6º ano, Dante (2012, p. 122)

O ponto de partida para introduzir os assuntos é, também, composto de situações-problema, contextualizadas no cotidiano. Na sequência, o livro aborda a linguagem matemática (divisor, múltiplo de um número, etc.), como o recorte mostrado na Figura 9 a seguir.

Figura 9 - Fragmento do tópico Múltiplo e Divisor de um número natural

Múltiplo e divisor de um número natural

Em uma escola será realizada uma gincana para a qual estão inscritos 108 alunos. Se forem formadas equipes de 6 alunos cada, algum aluno ficará de fora?

Para responder a essa questão, precisamos saber se 108 : 6 é uma divisão exata (resto 0) ou uma divisão não exata (resto ≠ 0).

Veja:

```
  1 0 8 | 6
-   6   | 18
  -----
    4 8
  - 4 8
  -----
      0
```

resto 0 (divisão exata)

Como a divisão é exata, podemos afirmar que:

- *108 é divisível por 6*
- *108 é múltiplo de 6*
- *6 é divisor de 108*

Então, se forem formadas equipes de 6 alunos, não sobrará aluno.

Fonte: Projeto Teláris - Matemática, 6º ano, Dante (2012, p. 123)

Após uma breve introdução do conteúdo, com uma situação problema, o autor propõe uma série de atividades. Novamente a situação se repete ao se tratar do conteúdo *critérios de divisibilidade*, como mostra no fragmento, Figura 10, abaixo.

Figura 10 - Fragmento do tópico introdução aos critérios de divisibilidade

Critérios de divisibilidade

No início do ano, uma papelaria vai realizar uma grande promoção para vender 3 180 cadernos que estão no estoque. O gerente pretende fazer pacotes com a mesma quantidade de cadernos sem que sobrem cadernos.

Vamos verificar se é possível que cada pacote contenha 2 cadernos, 5 cadernos e 7 cadernos. Para isso, fazemos as divisões:

- 2 cadernos

```
  3 1 8 0 | 2
- 2       | 1590
  -
  1 1
- 1 0
  ---
    1 8
  - 1 8
    ---
      0 0
```

Como a divisão é exata, é possível termos pacotes com 2 cadernos cada.

- 5 cadernos

```
  3 1 8 0 | 5
- 3 0     | 636
  ---
    1 8
  - 1 5
    ---
      3 0
    - 3 0
      ---
        0
```

Como a divisão é exata, é possível termos pacotes com 5 cadernos cada.

- 7 cadernos

```
  3 1 8 0 | 7
- 2 8     | 454
  ---
    3 8
  - 3 5
    ---
      3 0
    - 2 8
      ---
        2
```

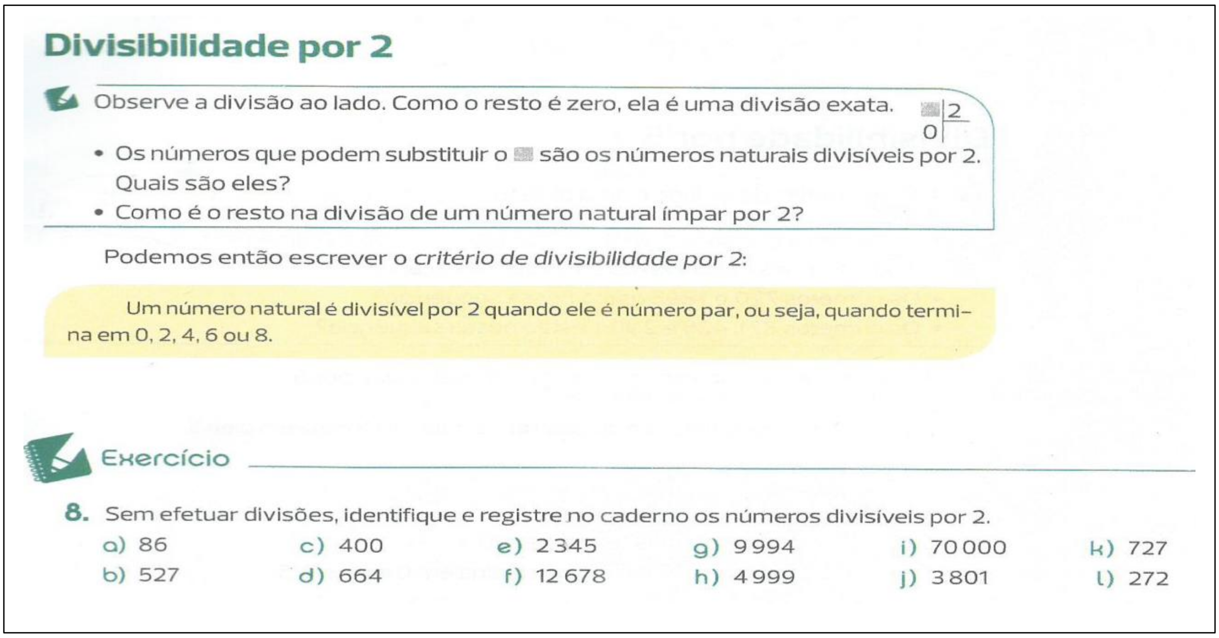
Como a divisão não é exata não podemos ter pacotes com 7 cadernos cada.

Em situações como essa, precisamos saber se um número é divisível por outro. Vamos ver agora que, em alguns casos, não há necessidade de efetuar a divisão. Basta usar os chamados *critérios de divisibilidade*.

Fonte: Projeto Teláris - Matemática, 6º ano, Dante (2012, p.125)

Entretanto, ao se tratar, especificamente, de cada um dos critérios de divisibilidade (pelos números 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10), o livro expõe, formaliza e apresenta uma lista de exercícios, assim:

Figura 11 - Fragmento do critério de divisibilidade por 2



Divisibilidade por 2

Observe a divisão ao lado. Como o resto é zero, ela é uma divisão exata.

- Os números que podem substituir o ▒ são os números naturais divisíveis por 2. Quais são eles?
- Como é o resto na divisão de um número natural ímpar por 2?

Podemos então escrever o *critério de divisibilidade por 2*:

Um número natural é divisível por 2 quando ele é número par, ou seja, quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Exercício

8. Sem efetuar divisões, identifique e registre no caderno os números divisíveis por 2.

a) 86	c) 400	e) 2 345	g) 9 994	i) 70 000	k) 727
b) 527	d) 664	f) 12 678	h) 4 999	j) 3 801	l) 272

Fonte: Projeto teláris - Matemática, 6º ano, Dante (2012, p. 125)

Assim, acontece com todos os critérios elencados acima e, também, com os outros conteúdos do capítulo.

Neste tema, observamos o predomínio de uma abordagem que vai ao encontro do que os PCN defendem, tendo o problema como ponto de partida. Desta maneira, acreditamos que a sequência apresentada no livro busca auxiliar a prática pedagógica do professor, que busca fundamentar o ensino de Matemática na resolução de problemas.

2.4.4 Ensino de Matemática no Ensino Fundamental

Num contexto geral, nos motivamos a lidar com a Matemática desde muito cedo em inúmeras situações do cotidiano e nos mais diversos contextos: no meio familiar, na rua, na escola e no trabalho. Entretanto, a partir da resolução de situações-problema no contexto escolar, vários alunos cometem equívocos em relação à compreensão e à utilização dos procedimentos algorítmicos adequados.

De acordo com os PCN (BRASIL, 2000, p. 63) “as crianças que ingressam no primeiro ciclo, [...] trazem consigo uma bagagem de noções informais sobre numeração, medida, espaço e forma, construídas em sua vivência cotidiana”.

Assim, é necessário levar em conta as experiências e atividades diárias das crianças, buscando a contextualização do conteúdo matemático, proporcionando assim meios para que os alunos entendam o que está sendo ensinado, tornando-se significativo para eles.

Para Pavanello (2004), contextualizar significa apresentar o conteúdo ao aluno por meio de uma situação problematizadora, compatível com uma situação real que possua elementos que dêem significado ao conteúdo matemático.

Essa relação da Matemática com a realidade do estudante é necessária, pois fora do ambiente escolar o aluno já realiza cálculos e operações a seu modo. Esses conhecimentos prévios não devem ser desconsiderados na educação escolar, pelo contrário, é preciso levar a criança a associar os mecanismos usados na resolução de problemas matemáticos do seu dia a dia, com os mecanismos apreendidos na escola.

O professor, ao se preocupar apenas com o conteúdo a ser ensinado para o aluno, desconsiderando sua capacidade de construir seu próprio conhecimento, normalmente, utiliza estratégias prontas e definidas, sem significado para ele. Assim, o aluno acaba por não aprender tais conteúdos, reproduzindo mecanicamente de acordo com a necessidade surgida.

Segundo Lerner (1995), o aluno deve ser levado a:

> Resolver situações-problema diversificadas, elaborar estratégias e compará-las com os outros, construir formas de representação e discuti-las com os demais, confrontar interpretações a cerca da notação convencional, antecipar e julgar resultados, refletir a partir das propriedades das operações e elaborar enunciados (p. 116).

Nesse caso, acreditamos que a atuação do professor é de suma importância, pois, cabendo a ele o papel de mediador do ensino e aprendizagem dos alunos, deve encontrar maneiras diferenciadas de ensinar o conteúdo proposto.

Igualmente essencial é possibilitar situações nas quais o aluno possa interagir com seus pares de modo cooperativo, trabalhando coletivamente em grupos, na busca de soluções para as atividades propostas, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um determinado tema, respeitando a maneira de pensar de seus colegas e aprendendo com eles. Isso é proporcionado quando o professor atua de modo a instigar e motivar o estudante a refletir sobre suas ideias e formular suas hipóteses.

Para Starepravo (2009),

> a discussão, em sala de aula, sobre as diferentes estratégias usadas pelas crianças também é fundamental neste trabalho, pois é o momento de argumentar sobre suas ideias e analisar as ideias dos outros, comparando os diferentes caminhos percorridos na busca de um mesmo resultado (p.39).

Estudos como esses demonstram as dificuldades que os alunos enfrentam para assimilar a lógica dos algoritmos das operações fundamentais e mostram que com a memorização de regras e fórmulas, na maioria das vezes, faz com que o aluno não obtém desempenho satisfatório. Assim sendo, é necessário salientar que o professor poderá criar condições de aprendizagem para seus alunos e, não, simplesmente, lançar mão de exercícios de repetição ou modelos criados nos livros didáticos.

Nos PCN (BRASIL, 2000) são discutidos que:

> Muitos dos aspectos envolvendo o processo de ensino e aprendizagem abordados no primeiro ciclo precisam também ser considerados pelos professores do segundo ciclo. Dentre esses aspectos, destaca-se a importância do conhecimento prévio do aluno como ponto de partida para a aprendizagem, do trabalho com diferentes hipóteses e representações que as crianças produzem, da relação a ser estabelecida entre a linguagem matemática e a linguagem materna e do uso de recursos didáticos como suporte a ação reflexiva do aluno (p. 79).

Dessa forma, os alunos quando começam a estabelecer relações sobre determinados conteúdos, começam a buscar explicações e também perguntam para que servem, qual a sua finalidade, permitindo-lhes assim ver a evolução das mudanças das situações e das propriedades numéricas utilizadas. Assim sendo, é percebido que “[...] o conhecimento não é algo acabado, mas uma construção que se faz e refaz constantemente” (LUDKE; ANDRÉ, 1986, p.18).

2.4.5 O Ensino e Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas

No texto seguinte, trata-se dos diversos pontos de vista que a metodologia Resolução de Problemas tem em comum. Mas, para a nossa prática de sala de aula, baseamos na concepção de Onuchic.

No início do século XX, de acordo com Onuchic e Allevato (2005), o ensino de matemática baseava-se na memorização de regras e algoritmos e na repetição de exercícios. O professor transmitia o conteúdo que o aluno deveria memorizar e o mesmo repetia o que o professor havia transmitido fazendo uma série de exercícios corriqueiros, utilizando-se a técnica ou o processo apresentado. Conforme Onuchic (1999, p. 201), “nessa época, o currículo de matemática ainda não estava bem definido, embora houvesse um caminho de trabalho: aritmética, álgebra e geometria”.

Segundo Poffo (2011), a partir da década de 1960, começou um movimento de renovação educacional intitulado de Matemática Moderna. Esse movimento deixava de lado todas as reformas existentes anteriormente e procurava estreitar a matemática que era estudada na escola com aquela estudada pelos pesquisadores, causando várias discussões e enormes mudanças no currículo matemático.

Essa orientação apresentava uma matemática com abstrações excessivas, utilização descomedida de símbolos e complexidade ao ensinar os conceitos matemáticos. No entanto, esse excesso de formalização também se distanciava de questões de relevância social e cultural. Conforme os PCN (BRASIL, 1998, p. 19), nessa época,

> o ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o pensamento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia, etc. Porém toda esta proposta estava longe da realidade dos alunos, principalmente das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Preocupados com a aprendizagem da Matemática, pesquisadores matemáticos, inclinados na mudança desse cenário, começaram as discussões a respeito da utilização da Resolução de

Problemas para se ensinar e aprender Matemática. Essa concepção começou a adquirir a devida importância mundial no final da década de 1970. Para Onuchic (1999),

> [...] O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 1960. No fim dos anos 1970, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics[12] – que apresentou recomendações para o ensino da Matemática no documento "Agenda para a Ação", na qual a resolução de problemas é o foco do ensino da Matemática dos anos 80. Este documento chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscar uma melhor educação matemática para todos (p. 203- 204).

A "Agenda para a Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980, publicado pelo NCTM" (MORAIS; ONUCHIC, 2014, p. 28) acentua ser a Resolução de Problemas uma nova reforma que desconsidera a Matemática Moderna, empenhando-se em fazer com que o aluno desenvolva e aperfeiçoe competências para resolver problemas. A maioria dos currículos de Matemática existente atualmente demonstra que para ser um aluno competente é necessário que ele se transforme em um solucionador de problemas.

Segundo Pozo (1998),

> os educadores matemáticos tinham por objetivo fazer da Resolução de Problemas o ponto central do currículo de matemática e assim fazer com que o aluno adquirisse a competência para resolver um problema. Porém o significado deste objetivo varia em função da pessoa que o emitir e do contexto ao qual for aplicado. [...] Para um aluno ser aprovado em Matemática era necessário compreendê-la e para isso precisaria ter facilidade ou ser inteligente. Essa concepção popular reflete-se na ciência e na filosofia, na medida em equiparam-se "as regras do bom pensar" com os procedimentos algorítmicos e heurísticos usados na solução de tarefas matemáticas (p. 43).

Nos anos de 1990, a Resolução de Problemas ganha uma nova roupagem, passando a ser considerada metodologia de ensino da Matemática. Segundo Diniz (2001),

> mais recentemente, nos anos 90, a Resolução de Problemas ganha uma outra dimensão sendo descrita como metodologia para o ensino de matemática e, como tal, passando a ser um conjunto de estratégias para o ensino e o desenvolvimento da aprendizagem de matemática (p. 86).

---

[12] Conselho Nacional de Professores de Matemática, nos Estados Unidos.

O ensino de matemática através de Resolução de Problemas é uma concepção relevante dentre os vários tipos de concepções já existentes, pois "os alunos podem aprender tanto sobre resolução de problemas, quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 47). Essa orientação para o ensino de matemática considera que o ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático ocorram a partir de um problema gerador, podendo este advir de uma situação contextualizada ou ser um problema puramente matemático.

Assim sendo, a Resolução de Problemas aproveita o que foi considerado adequado nas orientações curriculares anteriores. "[...] busca-se usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, a linguagem matemática da teoria dos conjuntos, técnicas de resolução de problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional." (ONUCHIC, 1999, p. 211).

Para muitos educadores matemáticos, a resolução de problemas consiste em permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos e desenvolvam a capacidade de administrar as informações ao seu redor. Dessa forma, os alunos têm a oportunidade de ampliar seu conhecimento, desenvolver seu raciocínio lógico, enfrentar novas situações e conhecer as aplicações da matemática. "Por isso, atitudes naturais do aluno que não encontram espaço no modelo tradicional de ensino, como é o caso da curiosidade e da confiança em suas próprias ideias, passam a ser valorizadas nesse processo investigativo" (DINIZ, 2001, p. 92). O mesmo sucede para o professor, pois trabalhar com a resolução de problemas permite atingir os objetivos de aprendizagem definidos, além de tornar a aula mais interessante e motivadora.

Mas, afinal, o que é um problema?

Dentre as diferentes concepções encontradas na literatura para o termo "problema", escolhemos algumas delas. Para Dante (2005, p. 10), problema é "qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la" e um problema matemático é "qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para resolvê-la".

Os PCN afirmam que "um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la" (BRASIL,1998, p. 41).

Seguindo essa mesma linha, para Onuchic e Allevato (2005, p. 221) problema “[...] é tudo aquilo que não sabemos fazer mas que estamos interessados em fazer”. Já para Van de Walle (2001) citado pelas referidas autoras, “um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta” (*ibid*, p. 221).

Há algum tempo a Resolução de Problemas ocupa um lugar de destaque quando o assunto é ensinar Matemática, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior. O uso da metodologia Resolução de Problemas se coaduna com as propostas de D’Ambrosio (1993), que critica o professor que realiza as aulas de maneira mecânica e “pré-programada”, de modo que,

> o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto (p. 36).

De acordo com Schoenfeld (1997, p.13) “o professor deve fazer uso de práticas metodológicas para a resolução de problemas, as quais tornam as aulas mais dinâmicas e não restringem o ensino de matemática a modelos clássicos, como exposição oral e resolução de exercícios”. Mas é preciso deixar claro que resolução de exercícios e resolução de problemas exigem metodologias diferentes. Enquanto na resolução de exercícios os estudantes dispõem de mecanismos que os levam, de forma imediata, à solução, na resolução de problemas isso não ocorre, pois, muitas vezes, é preciso levantar hipóteses e testá-las.

Segundo Pozo (1998),

> [...] um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício (p. 16).

Schroeder e Lester (1989), citados por Onuchic (1999), apresentam três modos diferentes de abordar Resolução de problemas:

1) Ensinar sobre resolução de problemas: O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de Polya (1978) ou alguma variação dele. Esse modelo descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreensão do problema, elaboração de um plano, execução do plano, verificação ou retrospectiva do problema inicial.

Allevato e Onuchic (2014, p. 37) nos dizem que, nessa categoria, corresponde a “considerá-la como um novo conteúdo. São abordados temas relacionados à resolução de problemas e percebe-se uma forte ênfase nas heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas, com regras, independentes do conteúdo específico abordado [...]”.

2) ***Ensinar para resolver problemas:*** Concentra-se na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la.

Conforme Allevato e Onuchic (2014, p. 38), nessa abordagem, o professor, “após ter desenvolvido a parte ‘teórica’ referente a um determinado tópico matemático, é que [...] propõe problemas aos alunos, de fato, como aplicação dos conteúdos estudados”.

3) ***Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas:*** Tem-se a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. O ensino está centrado no aluno, que constrói conceitos matemáticos durante a resolução de um problema sendo, depois, formalizados pelo professor. Entendemos que é um princípio ideal que a Matemática seja ensinada através da resolução de problemas, ou seja, que as atividades envolvendo problemas sejam o caminho pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. Deste modo, a aprendizagem em Matemática, será uma consequência do processo de resolução de problemas.

Para Onuchic e Allevato (2005), a Resolução de Problemas consiste num caminho alternativo para se ensinar Matemática resolvendo problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas de Matemática. Nesta abordagem, o problema é um ponto de partida e os professores, por meio dela, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, tendo em vista, principalmente, o processo e não somente a solução do problema trabalhado.

Conforme Menino (2013, p. 101),

> essa metodologia não valoriza a mecanização do conhecimento, pelo contrário tem por meta ajudar os alunos a se tornarem investigadores diante de uma situação desafiadora, um problema, de forma a compreender e questionar os conceitos de que irão necessitar para resolvê-lo.

Nesse sentido, o papel do professor passa de “transmissor de conhecimento” para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador da aprendizagem (SOUZA, 2010). Assim sendo, “[...] o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e, em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos [...]” (RODRIGUES, 1992, p.29)

Esse tipo de trabalho, utilizando a Resolução de Problemas, nos condiciona a indagar as soluções e a situação-problema em si, e, exigirão, na maioria das vezes, um retorno à questão resolvida, como se cada nova pergunta exigisse um novo raciocínio sobre toda a situação e até mesmo sobre o que foi realizado pelo aluno.

Segundo Cavalcanti (2001),

> para que os alunos sejam capazes de apresentar as diferentes maneiras que utilizam para resolver problemas, cabe ao professor propiciar um espaço de discussão no qual eles pensem sobre os problemas que irão resolver, elaborem uma estratégia e façam o registro da solução encontrada ou dos recursos que utilizam para chegar ao resultado (p. 125).

Remetendo-nos mais uma vez ao artigo de Diniz (2001, p. 92), onde afirma que para “[...] enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de ‘investigação científica’ em relação àquilo que está pronto”.

Perante as situações apresentadas, no tocante à contribuição da Resolução de Problemas, para o ensino e aprendizagem de Matemática de alunos do Ensino Fundamental, podemos acentuar que esta metodologia é uma boa escolha, pois situa o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem, ou seja, o aluno desempenha um papel proativo na estruturação do seu conhecimento, sendo capacitado não só para repetir ou refazer, mas da mesma forma, de adaptar e transferir seus conhecimentos para novas situações.

Assim sendo, além de expandir a visão que possui da Matemática e também do mundo em geral, a Resolução de Problemas, muito provavelmente, habilita o aluno para tomada de decisões futuras, mais satisfatórias, quanto aos possíveis problemas que aparecem no seu dia a dia.

Num ensino tradicional, os problemas matemáticos são geralmente apresentados como exercícios de fixação ou de aplicação de conteúdos. Já no ensino da Matemática através da Resolução de Problemas, os problemas precedem a formalização conceitual - característica que nos remete à própria história das ideias matemáticas: “se olharmos na história do homem a Matemática que foi sendo construída, vemos que o problema sempre apareceu primeiro, então, ia-se em busca de sua solução e, a partir daí, construía-se uma teoria” (HUANCA, 2006, p. 90).

Finalmente, a Resolução de Problemas vai além de ensinar Matemática na medida em que leva os alunos a fazer Matemática. Conforme publicação do National Council of Teacher of Mathematics - NCTM, Principles and Standards for School Mathematics[13] (STANDARDS, 2000), citado por Pereira (2004, p. 59), tem-se que:

> Resolução de Problemas não é somente um objetivo para aprender matemática, mas também, um modo importante de fazer isso [...] Resolução de Problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de matemática. [...] Bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão matemática significativa.

Mediante tudo o que discutido, formularemos a nossa pergunta de pesquisa.

2.4.6 Problema de pesquisa

[13]Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.

Baseado no Fenômeno de Interesse e no Modelo Modificado, formulamos a seguinte pergunta norteadora de nossa pesquisa:

Quais contribuições a metodologia Resolução de Problemas pode propiciar para o ensino e aprendizagem do tema divisibilidade a alunos de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Espírito Santo?

Pensando na pergunta, podemos imaginar a resposta? Pensamos que sim. Entretanto, também pensamos que ela mantém sua importância pela especificidade da situação: uma turma com alunos de baixo rendimento e sem familiaridade com a metodologia de Resolução de Problemas.

3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DA PESQUISA

Introdução

Determinados o Modelo Modificado e o Problema da Pesquisa, daremos continuidade ao nosso trabalho descrevendo as duas atividades apresentadas no segundo bloco do modelo de Romberg - Onuchic, que são: selecionar estratégias e procedimentos correspondentes à busca de caminhos para a resolução do problema.

Conforme Onuchic e Noguti (2014), "para resolver o problema de pesquisa proposto, devemos elaborar um plano de ação. Este plano é focado no Modelo Modificado e deve contemplar itens importantes que nele apareceram" (p. 63).

Dessa forma, inicialmente serão selecionados a Estratégia Geral, que é criar um plano de trabalho, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, fazendo uso da metodologia Resolução de Problemas, apoiado nas variáveis do modelo modificado, e seu equivalente Procedimento Geral, que é a criação de um plano de trabalho que tem como base esta mesma metodologia. Serão necessários procedimentos auxiliares que, ao se colocarem em ação e, em consequência disso, o procedimento geral será levado à ação.

3.1 ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Tendo sempre em mente nosso Fenômeno de Interesse e o nosso Modelo Modificado, propomos nossa Estratégia Geral e suas auxiliares, com seu correspondente Procedimento Geral e seus auxiliares, descritos da seguinte maneira:

Estratégia Geral (E_G): Criar um Plano de Trabalho, a partir, sempre que possível, de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos para trabalhar divisibilidade, no Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas.

Estratégias Auxiliares (E_A):

E_1: Definir a escola e obter autorização da direção;

E_2: Reunir com os professores de Matemática da escola

E_3: Conhecer o (a) professor (a), da turma e turno;
E_4: Elaborar atividades diagnósticas para a turma;
E_5: Elaborar um Termo de Compromisso para o trabalho em sala de aula;
E_6: Criar um Plano de Trabalho.

Com as estratégias selecionadas, o nosso Procedimento Geral e os seus auxiliares ficam da seguinte forma:

Procedimento Geral (P_G): A criação de um Plano de Trabalho, a partir, sempre que possível, de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos para trabalhar divisibilidade, no Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas.

A fim de estabelecer esse procedimento, houve a necessidade de criar procedimentos auxiliares correspondentes às estratégias auxiliares.

Procedimentos Auxiliares (P_A):
P_1: Definição e obtenção de autorização da escola;
P_2: Reunião com os professores de Matemática da escola;
P_3: Conhecimento da professora, turma e turno;
P_4: Aplicação de atividades diagnósticas na turma;
P_5: Elaboração de um Termo de Compromisso para o trabalho em sala de aula;
P_6: Criação de um Plano de Trabalho.

3.2 PROCEDIMENTOS AUXILIARES EM AÇÃO

3.2.1 (P1): A Escola

Conforme mencionamos na introdução, nossa pesquisa seria realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professor Elpídio Campos de Oliveira", onde sou professor efetivo de Matemática. Assim, o acesso às dependências da escola, o contato com a direção e coordenação facilitariam o nosso trabalho. Essa instituição está localizada na Avenida Antônio Paulino, nº 1085, centro, Montanha, região Noroeste do estado do Espírito Santo recebe alunos, em sua maioria carentes, dos bairros periféricos da cidade e também do meio rural, no Ensino Fundamental e EJA – Educação de Jovens e Adultos.

Figura 12 - Faixada frontal da EEEFM "Professor Elpídio Campos de Oliveira”

Fonte: Acervo do Pesquisador

No contato inicial que tivemos com a direção da escola, foram apresentados objetivos da pesquisa, a metodologia da Resolução de Problemas e a escolha da turma. Na ocasião, formalizamos o pedido para a realização do Projeto, uma cópia do qual segue nos apêndices.

A escola funciona em três turnos (matutino, vespertino e noturno), com turmas do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental no turno matutino, com aproximadamente 168 alunos. No turno vespertino, há cerca de 110 alunos distribuídos em turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. No turno noturno, funciona a Educação de Jovens e Adultos com aproximadamente 233 alunos distribuídos em turmas desde a 5ª Etapa do Ensino Fundamental, que corresponde ao 6º ano do Ensino Fundamental, à 3ª Etapa do Ensino Médio, que corresponde ao 3º ano do Ensino Médio.

Em seu quadro de professores, atualmente são 31, todos graduados. Alguns têm formação em outra área do conhecimento e complementação pedagógica na área de ensino. Dos 31 professores, 3 são licenciados em Matemática com Especialização em Matemática, 2 possuem formação em outra área do conhecimento com Complementação Pedagógica e Especialização em Matemática, 9 possuem graduação na sua área de atuação e 17 possuem formação na área de ensino e especialização fora da área de ensino.

A escola está fisicamente estruturada em dois pavimentos e contempla 15 salas de aula, 1 sala de Recursos Multifuncionais, 3 laboratórios (Matemática, Ciências e Informática), 1 biblioteca, 1 sala de direção, 1 sala de coordenação, 1 sala de supervisão, 1 sala para o planejamento de professores, secretaria, 1 auditório/sala de vídeo, rampa de acesso, 1 quadra poliesportiva com arquibancada e coberta, cantina, cozinha, refeitório, área de serviços, 2 depósitos, 2 salas de arquivos, 6 banheiros (alunos, funcionários e professores), sanitários para alunos com deficiência. O terreno onde a escola está construída possui uma área de 2 927, 23 m^2.

3.2.2 (P2): Reunião com os professores de Matemática da escola

Após a autorização da Direção da EEEM "Professor Elpídio Campos de Oliveira", nos reunimos com os professores de Matemática que trabalhavam no 6º ano do Ensino Fundamental para falar sobre nossa pesquisa.

Como já citado, a escola possui cinco professores de Matemática, sendo que três deles trabalhavam em turmas de 6º ano, um em cada turno. Dos três, duas professoras são contratadas como DT – Designação Temporária e estão trabalhando pela primeira vez na escola.

O propósito inicial da reunião foi comentar sobre o desenvolvimento de um Plano de Trabalho, utilizando uma metodologia alternativa, no caso, a Resolução de Problemas, para o ensino e a aprendizagem de Operações Aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão), numa turma de 6º ano do Ensino Fundamental. Além disso, tivemos a intenção de conhecer os novos colegas, investigar suas disponibilidades e interesses em participar de nossa pesquisa e, também, verificar quais eram suas expectativas em relação ao trabalho que seria desenvolvido em sala de aula.

Após a exposição de nosso plano de trabalho, uma das professoras novas na escola, se propôs a nos ajudar, cedendo uma das suas turmas para o desenvolvimento do projeto. Para o desenvolvimento do trabalho, dissemos que seriam necessárias pelo menos duas das cinco aulas semanais de Matemática na turma e que, eventualmente, as aulas seriam fotografadas, resguardando a identidade dos participantes.

3.2.3 (P3): A professora, turma e turno

Como visávamos conhecer um pouco mais sobre a professora da turma em que seria desenvolvido o nosso projeto, tanto no que se refere a sua formação acadêmica, a sua experiência profissional em relação ao ensino de Matemática no Ensino Fundamental, quanto na utilização da metodologia alternativa de ensino, a Resolução de Problemas, a percepção dela em relação à turma, entre outras coisas, elaboramos um roteiro de entrevista semiestruturada[14]. A entrevista com a professora foi gravada e a descrevemos abaixo.

Entrevista com a Professora

1) Qual é a sua formação em nível superior?

R: "Sou Bacharel em Administração com Complementação Pedagógica em Matemática".

2) Possui Pós-Graduação? (Especialização, Mestrado, Doutorado).

R: "Tenho Especialização em Matemática".

3) Há quanto tempo leciona?

R: "6 anos"

4) Há quanto tempo leciona a disciplina de Matemática?

R: "4 anos"

- **E no Ensino Fundamental (6º ao 9º ano)?**

R: "2 anos"

- **E no 6º ano?**

R: "2 anos"

5) Há quanto tempo atua como docente na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professor Elpídio Campos de Oliveira"?

R: "Comecei trabalhar nessa escola, no início desse ano. Tem 5 meses".

- **Trabalha em outra escola?**

R: "Sim, na escola de Ensino Fundamental e Médio de Mucurici, em Mucurici – ES".

- **No mesmo nível de ensino?**

---

[14]Utilizamos a entrevista semiestruturada na perspectiva de Fiorentini e Lorenzato (2012), os quais caracterizam este instrumento de coleta de dados como sendo uma forma que articula entre **as entrevistas estruturadas**, que admitem perguntas, previamente elaboradas e organizadas segundo uma ordem que o entrevistador não se pode mudar, e **não estruturadas**, onde não apresenta um roteiro previamente organizado, permitindo que o entrevistado navegue pelo assunto livremente. Ou seja, **a entrevista semiestruturada**, possui um "roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem deles e, até mesmo, formular questões não previstas inicialmente" (p. 121).

R: “Não. Em Mucurici, trabalho no Ensino Médio”.

- **Nas mesmas séries desta escola?**

R: “Não. Trabalho em turmas de 1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio”.

6) Qual é sua percepção a respeito dos alunos do 6º MO1, com os quais será desenvolvido o projeto na EEEFM “Professor Elpídio Campos de Oliveira”?

R: “Eles, na sua maioria, além de ter muita dificuldade em Matemática, são muito desinteressados, brincam demais nas aulas, são bastante agitados, faltam muito e não gostam muito de resolver as atividades propostas em sala de aula e muito menos, os para casa. Essa sala possui uns seis repetentes e que estão bem acima da idade para esta série, são os que mais atrapalham as aulas. Mas existem os bons, que querem aprender, esses resolvem as atividades .... quando não conseguem, chama a gente, vem à mesa ... mas são só uns dez alunos que fazem isso. A coordenadora vem na sala, conversa com eles, mas quando ela sai daí a pouco tudo de novo”.

- **Você já tentou trabalhar usando o Material Manipulativo (Material concreto)?**

R: “Já tentei uma vez. Levei eles no Laboratório de Matemática para que pudéssemos trabalhar a operação de Multiplicação utilizando um jogo lá. Nossa! Arrependi. Eles não paravam para ouvir, não conseguiam desenvolver o trabalho que tinha preparado. Desisti e retornei com eles para a sala de aula. Desse dia para cá, não levei mais e nem tentei mais usar nada de diferente, só quadro e giz. É muito difícil trabalhar nessa turma”.

- **Eles têm dificuldade em resolver atividades envolvendo as 4 operações?**

R: “Muita. Essa dificuldade, de certa forma reflete no rendimento trimestral deles. A maioria fica em recuperação paralela”.

- **Qual é a operação que eles têm mais dificuldade?**

R: “Na operação de divisão. Eles apresentam dificuldades também nas outras três (adição, subtração e multiplicação), mas na divisão é demais! Eles não conseguem resolver uma continha com dois algarismos”, referindo-se a dois algarismos no divisor. “Já estou preocupada quando for trabalhar divisibilidade, pois é preciso dividir .... e tem outros conteúdos referentes a esse tópico ... e eles não ajudam muito ... você poderia desenvolver seu projeto sobre divisibilidade ... tem a operação de multiplicação, divisão ...e assim eles não ficavam com dois conteúdos diferentes (risos). O que você acha da ideia?”

- **Quando é que você pretende iniciar esse tópico?**

R: “Estamos em maio ... mais ou menos na metade do trimestre, início de Julho”.

- **Nesse caso, eu assumirei a turma sozinho?**

R: “Não. Eu ficarei com você na sala de aula”. [Eu disse que pensaria na resposta e voltei a questionar o uso do material concreto.]

- **Você já tentou trabalhar com o ábaco ou Material Dourado, para auxiliar no entendimento da atividade?**

R: “Ainda não. Eles não colaboram. Eu quero até ver como você trabalha para eu usar na outra turma”.

- **Quanto ao uso da calculadora, que importância você atribui ao uso dela nas aulas de Matemática?**

R: “Para essa série, pouco importante. Não é primordial”.

- **O que você acha do professor que permite o uso da calculadora por parte dos alunos, durante as aulas de Matemática e nas avaliações? Por quê?**

R: “O uso da calculadora é um instrumento de auxílio à aprendizagem e tem que ser usada de acordo com o nível de aprendizagem do aluno; não sou a favor nas séries iniciais, mas no ensino médio vejo que vem a facilitar e é de grande auxílio no desenvolvimento dos alunos”.

- **Mas você permite o uso dela nas suas aulas no Ensino Fundamental?**

R: “Não. Como acabei de falar, só deixo no Ensino Médio. Acho que, no Ensino Fundamental, eles têm que aprender a fazer a continha, no caderno. Para mim, só aprende dessa forma”.

7) Com relação à resolução de problemas para você o que é um problema?

R: “Problema tem que estar ligado ao meio em que o aluno vive, e levá-lo a pensar nas possíveis soluções”.

- **E um problema matemático?**

R: “Acho que é quando o aluno tem que pensar numa maneira, qual é a melhor fórmula que melhor se encaixa para resolver a atividade”.

8) Ainda, com relação à resolução de problemas com enunciado, como você vê os seus alunos? Eles conseguem interpretar o que está pedindo no enunciado e ir à busca da solução?

R: “Meu Deus! (risos), é um problema sério isso. Pode ser até um probleminha que envolve a adição que, principalmente os que mais brincam nas aulas, reclamam, dizendo que é muito difícil. Muitas vezes, eles nem leem o problema e acham que está difícil e param por aí mesmo, não tentam fazer. Eles têm muita dificuldade em interpretar um problema. Acho que é um problema de leitura. Um ou outro consegue resolver algum problema. Quando eu percebia que eles não iriam resolver, então eu lia com eles, pausadamente, explicando e resolvendo com eles. Depois que eu começava a resolver, aqueles que diziam que não sabiam fazer, diziam ‘tia, é só isso’? É só isso, respondo a eles. Dá uma vontade .... (risos). Eles são muito desmotivados para resolver as coisas. Acho que você vai ter muita dificuldade nessa turma (risos)”.

➢ **Em alguma vez, você pediu para eles resolverem da forma que acharem melhor?**

R: “Já. Mas nem assim eles tentam. É claro que depois, quando estiver corrigindo, eu quero que façam as continhas todas, para quando forem estudar para uma avaliação, eles saberem como fizeram nos exercícios”.

➢ **Como você introduz um novo conteúdo matemático?**

R: “Como todo mundo faz. Eu falo do conteúdo que vamos estudar e, se tiver uma fórmula eu passo no quadro. Não demonstro, pois no 6º ano eles não têm maturidade para entender essa coisa abstrata, e dou exemplos sobre aquele assunto, resolvo para eles e depois passo outros semelhantes para eles resolverem. E, assim por diante”.

➢ **Você trabalha com a turma dividida em pequenos grupos?**

R: “Em grupos, nem pensar. Se eles já atrapalham separados, imaginem juntos. Não, é melhor que eles fiquem cada um no seu lugar”.

➢ **Você não acha que em pequenos grupos eles poderiam render mais? Um ajudaria o outro a fazer a atividade.**

R: “Naquele 6º ano, acho que não. Eles aí é que iam conversar mesmo ... não ... ali não”.

➢ **Em sua opinião existe diferença entre problema e exercício? Por quê?**

R: “Sim, pois os problemas são estruturados de modo a fazer o aluno pensar, analisar e somente depois solucionar, já os exercícios eles seguem certo padrão em suas resoluções”.

➢ **Em sua opinião, o aluno, ao resolver um problema matemático, ele só pode percorrer o caminho que o professor espera? E, consequentemente, só poderá chegar a uma única resposta?**

R: “O aluno não terá somente uma forma de resolução, mas o resultado encontrado deverá ser único”.

➢ **Você poderia justificar essa resposta?**

R: “Simples. Em Matemática você só tem uma resposta para um problema”.

- **Quando você propõe problemas matemáticos aos seus alunos, você o elabora ou segue apenas os que estão nos livros didáticos?**

R: "Uso basicamente os dos livros. Mas elaboro e faço adaptações de acordo à realidade do aluno".

- **Você já leu alguma literatura sobre a metodologia Resolução de Problemas? Em caso afirmativo, poderia citar algum autor que trata sobre esse assunto?**

R: "Não".

- **Nem os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais?**

R: "Pouca coisa".

9) Em relação à Avaliação, como você avalia os seus alunos?

R: "Minha avaliação é constante, é diária, é individual ... Eu avalio participação, atividades realizadas, disciplina em sala de aula ... eles, já sabendo que estão sendo avaliados o tempo todo, já atrapalham tanto, imaginem se deixar só para a prova".

- **Então, eles sabem que são avaliados em tudo, constantemente?**

R: "Sim. Eles sabem de tudo. Eu falei para eles no início do ano. Eles atrapalham porque não têm muita responsabilidade com as tarefas".

A Turma e Turno em que será Desenvolvido o Projeto

Junto à secretaria da escola, pudemos constatar a existência de dois 6º anos em cada turno e, em média, o número de matrículas no início do ano letivo é de 35 alunos.

Como a professora só trabalha nessa instituição no turno matutino e iríamos desenvolver o projeto em uma de suas turmas, então, em comum acordo escolhemos a turma 6º M01. Nessa sala de aula, haviam inicialmente, 34 alunos matriculados, mas até o mês de maio de 2015, quando começamos a aplicar as atividades diagnósticas, entre transferências e desistências, saíram 6 alunos. Assim, a turma com a qual trabalhamos foi composta por 28 alunos, sendo 16 meninos e 12 meninas entre 11 e 17 anos de idade, com uma boa parte deles fora da faixa etária indicada para a série e, além disso, 3 desses eram alunos com deficiência.

Ao observar as pautas de frequência e notas do primeiro trimestre, notamos que, a turma era bastante faltosa e possuíam muita nota abaixo da média. Levando em consideração que, dos 28 alunos dessa turma, apenas 10 não ficaram em recuperação trimestral, confirma-se o que a professora relatou sobre a dificuldade deles.

3.2.4 (P4): Atividades diagnósticas

A professora de Matemática do 6º M01, em sua entrevista, relatou que a turma tinha muita dificuldade em resolver atividades que envolviam as operações fundamentais, principalmente, a divisão, e que essa dificuldade, de certa forma, se refletia no rendimento trimestral deles. Podemos constatar esse fato quando observamos a pauta de notas do primeiro trimestre deste ano letivo, junto à secretaria da escola, onde verificamos a quantidade de alunos que ficaram em recuperação paralela trimestral. Então, resolvemos aplicar algumas atividades preliminares envolvendo as operações aritméticas, combinando alguns cálculos diretos e alguns problemas extraídos de livros didáticos (Quadros 3, 4 e 5).

Quadro 3 - Primeira atividade diagnóstica

1ª Atividade Diagnóstica[15]
Resolva as Seguintes Questões:
Problema 1) Tia Rose comprou uma dúzia de laranjas e colocou na fruteira que estava vazia. Depois usou 4 laranjas para fazer um suco. Quantas laranjas ainda restam na fruteira? **Problema 2)** Numa escola, estudam 218 alunos no período da manhã, 127 no período da tarde e, 312 no período da noite. Quantos alunos estudam nessa escola? **Problema 3)** Roberto depositou R$ 2 390,00 na sua conta bancária e ficou com um saldo de R$ 3 870,00. Quantos reais Roberto tinha na conta antes do depósito? **Problema 4)** Em um jardim há 3 canteiros. Em cada um deles há 5 fileiras com 8 roseiras plantadas em cada uma. Quantas roseiras há nesse jardim? **Problema 5)** Numa chácara, colheram-se 374 laranjas. As laranjas vão ser embaladas em caixas com 12 cada uma. Quantas caixas serão necessárias para embalar todas as laranjas? **Problema 6)** Vovô Augusto comprou 4 pares de tênis, um para cada neto. Para não haver diferença, comprou todos da mesma marca, escolhendo cores diferentes, mas preços iguais. Na hora de pagar, Augusto deu 4 notas de 50 reais e, recebeu de troco 28 reais. Quanto custou cada par de tênis?

O objetivo desta atividade, composta por 6 problemas envolvendo as 4 operações aritméticas, era verificar, além do conhecimento que eles tinham sobre o SND – Sistema de Numeração

[15]Atividades extraídas e/ou adaptadas do livro Matemática pode contar comigo, 4º ano do Ensino Fundamental, de José Roberto Bonjorno e Regina de Fátima Souza Azenha Bonjorno, São Paulo: FTD, 2008.

Decimal, como estavam interpretando um determinado problema e qual era a familiaridade deles com números pequenos e grandes.

Quadro 4 - Segunda atividades diagnóstica

2ª Atividade Diagnóstica[16]	
Arme e Efetue as Operações Abaixo:	
a) 23 + 186 + 1463	e) 45 x 4356
b) 19 + 4364	f) 6 x 2563
c) 3591 - 234	g) 824 : 2
d) 3905 - 1734	h) 2842 : 14

O objetivo dessa atividade era o de verificar qual o conhecimento que os alunos tinham sobre o SND e o que eles sabiam sobre unidade, dezena, centena, etc.

A primeira atividade diagnóstica foi aplicada, numa terça feira (26/05/15), terceiro horário, como descrito [na seção 2.3, pagina 34]. Por serem eles (alunos) muito agitados e demorarem a se organizar no início de cada aula, não houve tempo para a maioria resolver os dois últimos problemas envolvendo a divisão. Entretanto, se a atividade teve seu objetivo comprometido, pelo menos ficou evidente o que a professora nos havia dito na entrevista sobre o mau comportamento dos alunos.

Quando aplicamos a segunda lista, numa 5ª feira (28/05/15), no último horário de aula na turma, percebemos que muitos deles, assim como na primeira, apresentavam muitas dificuldades, principalmente, quando se tratava da operação divisão e, então, chamavam-nos a todo instante em suas mesas para que pudéssemos ajudá-los. Mas, também para aquele momento, não era nosso propósito, pois queríamos saber o que eles já conheciam em relação às 4 operações.

Assim sendo, sentimos a necessidade de elaborar mais uma lista, desta vez somente com problemas envolvendo a operação de divisão e aplicamos numa quarta feira (10/06/15), na 1ª aula.

[16]Atividade elaborada pelo Pesquisador.

Quadro 5 - Terceira atividade diagnóstica

3ª Atividade Diagnóstica[17]
Resolva as Seguintes Questões:
Problema 1) Júlia ganhou 12 chocolates e quer dividir entre 4 amigos de sua sala. Quantos chocolates vai receber cada um? **Problema 2)** João tem uma coleção de 325 figurinhas e quer distribui-las, igualmente, entre seus 13 netos. Quantas figurinhas cada um receberá? **Problema 3)** Mateus tem 96 fotografias e quer colocá-las em álbuns. Quantos álbuns com 12 fotografias cada um, serão necessários?

Nesta atividade, eles demonstraram mais tranquilidade, leram os enunciados, não ficaram chamando às suas mesas o tempo todo, como nas duas primeiras e, dos 22 alunos que estavam presentes, quase todos acertaram os três problemas. Para estas três atividades, como já mencionamos anteriormente, não interferimos na resolução que eles desenvolviam e pedimos para resolverem da forma que eles achassem melhor.

3.2.5 (P5): Termo de Compromisso para o trabalho em sala de aula

Ao iniciar os nossos trabalhos com a turma, tivemos uma conversa com eles, buscando deixar claro como seria o desenvolvimento do projeto, a dinâmica de grupo em sala de aula, destacando a importância de se trabalhar coletivamente e colaborativamente.

Falamos em firmar um Termo de Compromisso, com direitos e deveres entre nós (professora, alunos e pesquisador), para que as nossas aulas fossem organizadas, eficientes e que todos, assim, pudessem entender melhor o que seria trabalhado. Explicamos que isso seria um acordo entre nós, no qual eles tinham a obrigação de realizar todas as atividades propostas, serem frequentes, colaborar com os colegas em seus respectivos grupos, serem disciplinados, etc. Enfim, entenderam, mas não foi tão simples essa discussão, pois alguns alunos não aceitaram. Como eram somente uns 4 alunos que não aceitaram, preparamos o nosso documento em comum acordo com a maioria. Conforme, Huanca (2006),

[17]Atividades extraídas e/ou adaptadas do livro: Números, Brincadeiras e Jogos, de Ivani da Cunha Borges Berton e Ruth Ribas Itacarambi, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, e do livro: Matemática pode contar comigo, 4º ano do Ensino Fundamental, de José Roberto Bonjorno e Regina de Fátima Souza Azenha Bonjorno, São Paulo: FTD, 2008.

> O Termo de Compromisso refere-se às regras que podem orientar professor e aluno no decorrer das atividades estabelecidas para um trabalho organizado e eficiente. Esse documento, preparado para ser obedecido ao longo do ano letivo, tem, por finalidade, fazer com que o professor possa desenvolver seu trabalho dentro de um ambiente que compreende um conjunto de comportamentos do aluno esperados pelo professor e, de outro lado, um conjunto de comportamentos do professor esperados pelo aluno (p. 88).

Após termos discutidos os principais direitos e deveres para um bom desenvolvimento de um trabalho em sala de aula e da proposta ter sido aceita pela maioria, todos assinaram. Esse documento ficou com a professora da turma.

Termo de Compromisso[18]**:**

Introdução

Este *Termo de Compromisso* tem por objetivos estabelecer critérios para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos, do pesquisador e da professora da turma. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática, no 6º M01 do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Professor Elpídio Campos de Oliveira, em Montanha – ES.

Conteúdo e Metodologia

Será desenvolvida a unidade temática *divisibilidade*, que está contemplada na grade curricular do 6º ano do Ensino Fundamental e prevista para ser estudada pela turma no segundo trimestre do corrente ano letivo, nessa escola. O trabalho será desenvolvido pelo pesquisador José Aparecido da Silva Fernandes e terá a colaboração da professora da turma. Para a aplicação do Plano de Ensino estão previstas 30 aulas, nos meses de julho a setembro de 2015, e será utilizada a metodologia alternativa Resolução de Problemas para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Normas

- Todos deverão seguir as regras da escola;

---

[18]Para a elaboração desse termo, baseamo-nos no modelo disponível em Huanca (2006).

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa e colaborativa. A turma será subdividida em pequenos grupos, onde os alunos deverão trabalhar com o objetivo de resolver problemas tendo em vista a construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Todos deverão comprometer-se na discussão e resolução dos problemas apresentados;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se 5 na impossibilidade de conseguir um novo grupo com 4 pessoas;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo;
- Cada grupo deverá entregar as atividades em uma folha separada ao final de cada aula ao pesquisador e, na próxima aula de matemática da turma, o pesquisador devolverá uma cópia das atividades entregues pelos grupos, para que os mesmos possam ter os registros em seus cadernos;
- As tarefas que serão realizadas em casa deverão ser discutidas e entregues na aula seguinte.

Avaliação

Cada aluno será avaliado, individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V – a, da L.D.B. - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional -, lei Nº 9 394 de 20/12/1996, onde menciona que a avaliação é "contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais". Assim sendo, utilizaremos os seguintes itens:

- FREQÜÊNCIA (Peso 1): Todos (alunos, pesquisador e professora) deverão estar presentes no local e horário marcados.
- ATIVIDADES (Peso 1): As atividades extraclasse serão recolhidas no início de cada aula.
- TRABALHO DESENVOLVIDO NO GRUPO (Peso 1,5): Os trabalhos de grupos serão observados e avaliados durante a atividade.
- PARTICIPAÇÃO (Peso 1,5): Participação e comprometimento nas discussões e desenvolvimento de atividades propostas.
- DISCIPLINA (Peso 1): Será observada a disciplina dos alunos em todos os momentos, na sala de aula, no decorrer das atividades.
- PROVA (Peso 4): A avaliação escrita terá valor de 4 pontos.

Outras resoluções

Questões e problemas que poderão surgir durante a aplicação do plano de ensino serão discutidos por todos (alunos, pesquisador e a professora da turma), no intuito de chegarmos a um acordo. Assim, fica combinado que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos, pelo pesquisador e pela professora.

Sabedores dessas normas e de acordo com todas as situações combinadas, assinamos abaixo.

Montanha - ES, ______ de ______________ de 2015.

___________________________	_________________________
Professor (a) da turma	Aluno (a)

____

Pesquisador

3.2.6 (P6): O Plano de Trabalho

Para a criação de um plano de trabalho em Matemática, para a sala de aula, necessitamos de acordo e harmonia, pois se passa por diversas situações. Para Azevedo (2002),

> a elaboração de um projeto de trabalho em matemática para a sala de aula não é uma tarefa fácil. É um trabalho que requer acordo e harmonia de um conjunto de fatores que vão desde a construção do projeto até à obtenção de um espaço físico, passando por um conjunto de ações como preparação de materiais instrucionais, localização de um ambiente adequado e a administração do tempo destinado à sua aplicação. Para a elaboração de uma proposta de ensino-aprendizagem, no contexto de um projeto de trabalho para a sala de aula, é necessário levar-se em conta alguns aspectos como: a escolha do tema; os objetivos do projeto; a escolha da metodologia de ensino-aprendizagem adotada; a elaboração de um roteiro de atividades (p. 89)

Também é necessário observar a realidade dos alunos, propor problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos a partir do conteúdo programático pertinente à série. Além do mais, na aplicação de um projeto de trabalho diferenciado em sala de aula envolve assumir que não é uma tarefa simples, pois diferentes personalidades estão envolvidas.

3.2.6.1 Ensino e Aprendizagem da Divisibilidade no Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas

Inicialmente, como mencionamos, tínhamos pensado em trabalhar com a operação divisão, no 6º ano do Ensino Fundamental. Mas, durante a entrevista realizada com a professora de Matemática, desta série, ela me falou que seria trabalhada a partir da metade do segundo trimestre deste ano, a unidade temática, divisibilidade. Isso aconteceria, exatamente, no período em que estaríamos com a turma. Então, para não prejudicar o plano de ensino da professora, trabalharíamos juntos em sala de aula e, considerando a importância desse assunto, decidimos mudar a nossa proposta de trabalho para contemplar o tópico divisibilidade.

As atividades selecionadas para a criação desse Plano de Trabalho são parte da Matemática que trabalha sobre números, determinando relações entre eles, definindo operações sobre eles e identificando propriedades sobre elas.

Os conteúdos matemáticos escolhidos para esta pesquisa fazem parte das operações fundamentais, no caso **a divisão**, e da unidade temática **divisibilidade**. Esta unidade é uma ampliação das operações multiplicação e divisão, que já vinham sendo ensinadas em séries anteriores.

Conforme Silva (2014, p. 49), “na operação de dividir está implícita a ideia de repartir, equitativamente, os elementos de um conjunto. As situações que envolvem divisão contêm duas ideias diferentes: repartir em partes iguais e de medida”.

Onuchic e Botta (1998, p. 23) dizem que,

> Na divisão partitiva, o dividendo é repartido no número de partes especificadas pelo divisor e o resultado, chamado quociente, é o tamanho de cada uma das partes. Na divisão quotitiva, o divisor especifica uma medida que será repetidamente extraída do dividendo, e o quociente será um número puro, o número de quotas.

Para ilustrar essas ideias, consideramos os seguintes exemplos: ***(i)* Queremos distribuir, igualmente, 20 balas entre 5 crianças**. (Temos nesse caso duas grandezas diferentes: balas e crianças) precisamos encontrar a quantidade de balas que caberá a cada criança. Situação-problema deste tipo é chamada de **divisão por partição** (FERREIRA, 2005; JESUS, 2005), onde conhecemos o número total de elementos (20 balas) e queremos que sejam distribuídas em um dado número de partes iguais, necessitando de ser calculado o tamanho de cada parte (4 balas), independentemente da maneira utilizada. Assim sendo, temos o dividendo (20 balas), o divisor (5 crianças) e procuramos o quociente (4 balas).

Segundo Ferreira (2005), é de fundamental importância que o aluno entenda as situações que permanecem constantes entre o dividendo e o divisor; por exemplo, se considerarmos o dividendo 20 balas, cada criança receberá mais balas (quociente) à medida que o divisor diminuir. E, se aumentarmos a quantidade de crianças e fixarmos em 20 o número de balas (dividendo), cada criança ficará com menos balas (quociente).

(ii) **Temos 20 balas e queremos distribuir 4 balas para cada uma criança, quantas crianças receberão balas?** Nesse caso é preciso identificar o número de crianças que irão receber, cada uma, 4 balas. Essa divisão é outra situação que é chamada de **medida** ou **quota** (cota)[19] (FERREIRA, 2005; JESUS, 2005). Nesse sentido, temos o todo conhecido (20 balas) dividido em partes iguais com tamanho inicialmente estabelecidos (4 balas), sendo preciso calcular quantas dessas partes (quotas) cabem dentro do todo.

A unidade temática divisibilidade é considerada, de acordo com Resende (2007), como tópicos essenciais da Teoria Elementar dos Números[20] para serem trabalhados com alunos da Licenciatura em Matemática, da seguinte forma: “Divisibilidade: algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética” (p. 228).

Segundo o minidicionário da língua portuguesa, Silveira Bueno (2000), o termo *divisibilidade* significa a qualidade do que é divisível e o termo *divisão* é a operação matemática destinada a determinar o maior número de vezes que um número contém outro. Ou seja, é o ato de dividir. De acordo com Pizysieznig (2011), a divisão no conjunto dos números naturais nem sempre é possível e o mesmo acontece no conjunto dos números inteiros. Dessa forma, “quando essa operação é possível ela se expressa por meio da relação de divisibilidade” (p. 21).

---

[19]Segundo do dicionário Houaiss Conciso (2011, p. 242), cota significa parcela determinada de um todo.
[20]Mesmo não sendo o nosso foco de pesquisa a Teoria Elementar dos Números e nem a Licenciatura em Matemática, utilizamos como parâmetro o que a autora entende sobre quais conteúdos compõem a unidade temática divisibilidade.

Para ensinar divisibilidade na Educação Básica é de fundamental importância começar com situações-problema, no intuito de levar o aluno à construção de novos conhecimentos, ao invés de somente apresentar diferentes técnicas ou dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, coisas como o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum, sem o entendimento e a compreensão de que possam resolver determinados problemas com eles.

Para cada problema serão elencados objetivos específicos. Em consequência disso, em consenso com os alunos, formalizamos o conteúdo construído a partir do problema.

Os conteúdos trabalhados no projeto foram distribuídos da seguinte maneira:

Divisão euclidiana

- Ideia de repartir
- Ideia de Medida

Divisibilidade

- Múltiplos e Divisores de um número natural
- Critérios de Divisibilidade
- Números Primos e Números Compostos
- Reconhecimento de um número primo
- Decomposição de um número em fatores primos
- Regra prática para a fatoração
- Máximo Divisor Comum
- Mínimo Múltiplo Comum

3.2.6.2 Os objetivos para o desenvolvimento do Plano de Trabalho

Para o desenvolvimento do projeto proposto em sala de aula, elencamos os seguintes objetivos:

Objetivo Geral

Selecionar e aplicar atividades didáticas sobre divisibilidade usando como metodologia de ensino a Resolução de Problemas e analisar o processo de aprendizagem na perspectiva da participação do aluno na construção do seu conhecimento.

Objetivos Específicos

- Desenvolver nos alunos a capacidade de interpretar e resolver problemas referentes à divisibilidade;
- Ensinar os alunos a utilizar diferentes registros de estratégias (desenhos, esquemas, escritas numéricas) como recurso para a resolução do problema, bem como a verificar e comunicar as respostas obtidas;
- Praticar o trabalho em grupos com os alunos de modo colaborativo;
- Desenvolver nos alunos a capacidade de questionar e discutir as ideias apresentadas pelos seus pares de modo amistoso e produtivo;
- Incentivar o aluno a construir conceitos e conteúdos matemáticos por meio da resolução de problemas relativos à divisibilidade;
- Formalizar conceitos a partir de problemas motivadores, estruturando a teoria da divisibilidade.

3.2.6.3 Uma metodologia de trabalho para sala de aula

Para nossas aulas, as atividades selecionadas que compuseram o nosso plano de ensino foram, na sua maioria, situações-problema propostas, pois escolhemos para desenvolver o nosso trabalho em sala de aula a metodologia alternativa Resolução de Problemas.

Não é o propósito desse estudo dar uma receita pronta para o ensino mas, apresentar uma forma diferenciada de trabalhar Matemática, pois acreditamos que a Resolução de Problemas pode desenvolver nos alunos competências e habilidades necessárias para avançar na busca de novos conhecimentos.

Contudo, ao planejar uma aula utilizando essa metodologia, concordamos com Onuchic (1998), quando evoca ser fundamental o professor refletir sobre algumas questões, tais como:

✓ Isso é um problema? Por quê?

✓ Que tópicos de matemática podem ser iniciados com esse problema?

- ✓ Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- ✓ Para que séries você acredita ser este problema adequado?
- ✓ Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- ✓ Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- ✓ Você, como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema?
- ✓ Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- ✓ Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Além disso, Allevatto e Onuchic (2014, p.44-46) elaboraram um roteiro contendo uma sequência de 10 etapas:

> **1. Proposição do problema –** Seleciona ou elabora um problema e denomina-se de problema gerador.
>
> **2. Leitura individual –** Distribuir uma cópia impressa do problema para cada aluno e solicitar a leitura do mesmo.
>
> **3. Leitura em conjunto –** Distribuir a turma em pequenos grupos e, solicitar uma nova leitura do problema.
>
> **4. Resolução do problema -** A partir do momento em que o aluno entendeu o problema tenta resolver, em grupo, permitindo assim a construção de conhecimento sobre o conteúdo que o professor planejou para aquela aula.
>
> **5. Observar e incentivar –** Nesse momento, o professor muda de transmissor do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador, incentivador da aprendizagem.
>
> **6. Registro das resoluções na lousa -** Anotar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certo ou errado e aqueles feitos por diferentes caminhos.
>
> **7. Plenária –** Assembleia com todos os alunos. Como todos trabalham sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados, dessa forma, participam.
>
> **8. Busca do consenso –** Após discussões, e sanadas as dúvidas, o professor juntamente com os alunos tentam chegar a um consenso.
>
> **9. Formalização do conteúdo –** Faz-se uma síntese daquilo que se objetivava “aprender” a partir do problema gerador. São colocadas as devidas definições, identificando propriedades, fazendo demonstrações, etc.
>
> **10. Proposição e resolução de novos problemas –** Nesta etapa, após a formalização do conteúdo, propõem-se novos problemas para fixação de aprendizagem. Ademais, o professor, através dessa última etapa, pode consolidar aprofundar e ampliar conhecimentos construídos nas etapas anteriores, sobre determinado tema ou tópico matemático.

Podemos perceber que ao desenvolver um trabalho em sala de aula através da Resolução de Problemas, esse processo permite ao professor recuperar conhecimentos prévios dos alunos, aprofundar e ampliar o entendimento desses alunos sobre determinado conceito ou conteúdo matemático.

Segundo Onuchic & Allevato (2005), para Van de Walle (2001) para o bom desenvolvimento de uma aula, é preciso que o professor esteja atento para as seguintes etapas referentes ao momento em que os alunos trabalham na resolução do problema: **antes, durante e depois**. Além disso, ele é o responsável para criar e manter um ambiente agradável, onde o aluno se sinta estimulado para a aprendizagem.

Para a primeira etapa, a **antes**, Van de Walle (2001), citado pelas autoras supracitadas descreve as seguintes tarefas a serem realizadas: **(i)** o professor deve verificar se os alunos estão preparados para receber a atividade; **(ii)** estar seguro de que todas as expectativas estabelecidas para a tarefa estão claras. A primeira etapa começa com o planejamento, desenvolvido fora da sala de aula. Consoante com Herminio (2008), o professor pode, entre outros, seguir os seguintes passos:

- Fazer uma programação para o desenvolvimento do trabalho, com foco na sala de aula;
- Selecionar o(s) problema(s), tendo em vista a construção de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos;
- Selecionar as estratégias ou recursos que poderão ser utilizados na resolução do problema selecionado;
- Fazer a resolução detalhada, selecionando diferentes caminhos para se chegar à solução;
- Levantar questões para estimular os alunos à discussão e à exploração do problema durante a plenária;
- Pensar na formalização.

De acordo com as referidas autoras, Van de Walle (2001), na segunda etapa, **durante**, é a da resolução do problema por parte do estudante. Nessa, os alunos trabalham e o professor observa, incentiva-os, motiva-os, escuta-os, atende-os sem dar respostas imediatas; acompanha como os diferentes alunos ou grupos estão pensando, que ideias eles estão usando, e como eles estão abordando o problema. Enfim, dar-lhes a oportunidade de usar suas próprias ideias, ao invés de simplesmente seguir fórmulas prontas.

Segundo, ainda, essas mesmas autoras, para Van de Walle (2001) é na fase **depois** que a melhor aprendizagem ocorre, pois nela o professor aceita a resposta dos estudantes e conduz a discussão enquanto os mesmos justificam seus resultados e métodos. Esse não é um tempo de verificar se as respostas estão certas ou erradas, mas para a classe socializar ideias; é o momento da plenária e formalização de conceitos.

Para isto, Herminio (2008) sugere, dentre outras, as seguintes situações:

- O Professor é o orientador de questionamentos que foram pré-programados;
- Os alunos participam também com questionamentos próprios e devem ser ouvidos em todas as suas dúvidas numa participação ativa e respeitosa;
- A busca de um consenso é de suma importância nesse momento. A discussão organizada constitui-se numa parte riquíssima para tal situação;
- Formalização dos novos conceitos e conteúdos que foram construídos ao longo da resolução desse problema, dando-lhes significado.

Assim, conforme Onuchic (1999, p. 208), o ponto chave de nosso interesse em trabalhar o ensino e aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas apoia-se "na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática".

A partir desse momento, elaboramos um roteiro de atividades para serem desenvolvidas junto aos alunos da turma pesquisada.

3.2.6.4 Roteiro de atividades

Atividade 1[21]: Divisão euclidiana - ideias de partição e medida.

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira de como você chegou ao resultado.

[21] Adaptado do livro *Números: Brincadeiras e jogos*, de Ivani da Cunha Borges Berton e Ruth Ribas Itacarambi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 141.

a) Maria tem três filhos e resolveu presenteá-los com 54 reais. Sabendo que cada um vai ficar com a mesma quantidade de dinheiro, quantos reais cada filho receberá?

b) João quer repartir entre seus irmãos mais novos 75 reais, para o lanche da semana na escola em que eles estudam. Se ele der 15 reais para cada um, quantos são os irmãos de João que receberão dinheiro?

Número de aulas previstas: 2

Objetivos:

- Contextualizar a divisão numa situação cotidiana, concreta;
- Desenvolver a intuição sobre divisão nas ideias de repartir e medida;
- Verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver os problemas;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos;
- Conceituar divisão.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com os problemas.
- ✓ Pseudocédulas (dinheiro de brinquedo).

Comentário: Na atividade 1, a questão *a* caracteriza a ideia de partição e a questão *b* caracteriza a ideia de medida (cota).

Tarefa Extraclasse 1[22]

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

a) Fernando chegou em casa com 36 balas e distribuiu entre seus irmãos, dando 12 balas para cada um. Quantos são os irmãos de Fernando que receberam balas?

b) Nágila tem três filhos e resolveu presenteá-los com 315 reais. Quantos reais receberá cada filho? Sabendo que todos receberam a mesma quantia e que Nágila possui somente notas de 5 e de 50 reais, quantas notas de 5 reais e quantas notas de 50 reais receberá cada um filho?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

[22]Adaptado do livro *Números: Brincadeiras e jogos*, de Ivani da Cunha Borges Berton e Ruth Ribas Itacarambi. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 141.

- Fixar os conceitos construídos na atividade anterior.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com os problemas.

Comentários: **(i)** Na tarefa extraclasse 1, a questão *a* caracteriza a ideia de medida (cota) e a questão *b* caracteriza as duas ideias.

(ii) Todas as atividades extraclasse serão destinadas às discussões e fixação de conceitos vistos em aulas anteriores.

Atividade 2[23]: Divisão Euclidiana - ideia de partição e medida, com foco no resto.

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

a) Numa excursão da Escola ECO para a feira de tecnologia no Palácio Anchieta, em Vitória – ES, foram 46 pessoas entre professores e alunos. Na volta, o ônibus quebrou perto de São Mateus - ES. Foram disponibilizadas 3 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte? **b)** Pedro vai encaixotar seus livros para doar à biblioteca da cidade em que ele mora. São 94 livros e ele quer colocar 12 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- Contextualizar a divisão euclidiana numa situação cotidiana, concreta;
- Desenvolver a intuição sobre a divisão nas ideias de repartir e medida;
- Desenvolver a intuição sobre a divisão com foco no resto;
- Verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver os problemas;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com os problemas.
- ✓ Ábaco.

[23] A questão *a* desta atividade foi elaborada por nós (eu e o meu orientador) e a questão *b* foi adaptada do livro *Matemática pode contar comigo*, 4º ano do Ensino Fundamental, de José Roberto Bonjorno e Regina de Fátima Souza Azenha Bonjorno. São Paulo: FTD, 2008. p. 131

Comentário: Na atividade 2, a questão *a* caracteriza a ideia de partição e a questão *b* caracteriza a ideia de medida (cota).

<u>Tarefa Extraclasse 2</u>[24]

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

a) Numa excursão da Escola ECO para um dia de lazer no parque aquático em São Mateus – ES foram 30 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o Micro-ônibus, que transportava essas pessoas, quebrou perto de Pinheiros - ES. Foram disponibilizadas 2 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

b) Maria está guardando os livros da sua mãe para uma mudança. São 128 livros e, ela quer colocar 13 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ela irá precisar para colocar todos os livros?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

➢ Fixar os conceitos construídos na atividade anterior.

Material auxiliar:

✓ Folha com os problemas.

Comentário: Na tarefa extraclasse 2, a questão *a* caracteriza a ideia de partição e a questão *b* caracteriza a ideia de medida (cota).

<u>Atividade de Fixação 1</u>[25]**: *A trilha do Resto.***

54	23	17	88	76	35	62	97	49	67	29	94
45											41
81		19	71	44	51	80	96	FIM			73
26		98									58
34		39	86	21	0	75	33	18	95	61	30
59											
83	12	91	11	65	52	77	15	36	24	43	

[24] A questão *a* desta atividade foi elaborada por nós (eu e o meu orientador) e a questão *b* foi adaptada do livro *Matemática pode contar comigo*, 4º ano do Ensino Fundamental, de José Roberto Bonjorno e Regina de Fátima Souza Azenha Bonjorno. São Paulo: FTD, 2008. p. 131

[25] Atividade disponível em: <https://jucienebertoldo.files.wordpress.com/2013/02/jogos-matemc3a1ticos-3c2ba-a-5c2ba-ano-vol-1.pdf>. Acesso em: 4 jul. 2015.

Número de aulas previstas: 1

Objetivo:

➢ Fixar o conceito de divisão Euclidiana

Material auxiliar:

✓ Folha com a *trilha*.

✓ Dados.

✓ Marcadores [que podem ser qualquer material colorido que diferencia os jogadores].

✓ Eventualmente: Calculadora.

Procedimentos:

- Distribuir os alunos em duplas, trios ou quartetos [dependendo da situação].
- Cada jogador coloca seu marcador na primeira casa da *trilha* [nesse caso, no 43].
- Cada jogador lança o dado e divide o número da casa em que se encontra pelo número da face superior do dado.
- O resto da divisão será o número de casas que o jogador terá de avançar na *trilha*. Se a divisão for exata, isto é, o resto for igual a zero (0), o jogador não avançará nenhuma casa.
- Se errar a divisão, perderá a vez.
- Ganha o jogo quem primeiro chegar ao final da *trilha*.

<u>Atividade 3:</u> ***Um jogo de baralho*[26].**

Em um jogo de certo baralho podem participar, no mínimo, dois participantes. Cada participante deve ficar com no mínimo uma carta. Distribuir todas as 54 cartas entre os participantes, igualmente.

(a) Qual é o menor número de jogadores que deve participar desse jogo? E o maior número?

(b) Será que podem participar desse jogo, 3 jogadores? E 4? E 6? E 15?

Número de aulas previstas: 2

Objetivos:

[26] Adaptado da Dissertação de Mariângela Pereira, com tema: *O Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental*, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro – SP, em 2004. p 79.

- Relacionar uma situação cotidiana com a Matemática;
- Verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver as questões do problema;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver as questões propostas;
- Conceituar múltiplos e divisores de um número.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Baralho comum.
- ✓ Eventualmente: Tabuada.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

Tarefa Extraclasse 3[27]

Em um jogo de certo baralho podem participar, no mínimo, dois participantes. Cada participante deve ficar com no mínimo uma carta. Distribuir igualmente todas as 48 cartas (normalmente um baralho tem 52 cartas) desse jogo entre os participantes.

(a) Qual é o menor número de jogadores que deve participar desse jogo? E o maior número?

(b) Será que podem participar desse jogo, 3 jogadores? E 4? E 6? E 15?

(c) Quando os jogadores recebem mais cartas? E em quais eles recebem menos cartas?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- Fixar o conceito conceitos construídos na atividade anterior.

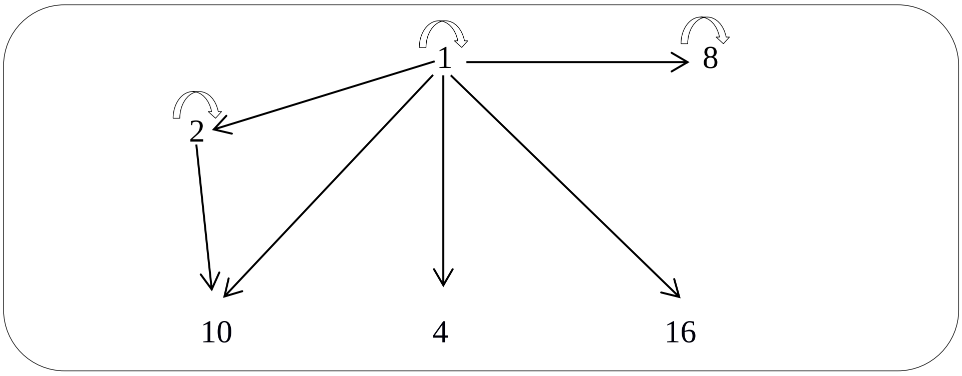
Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.

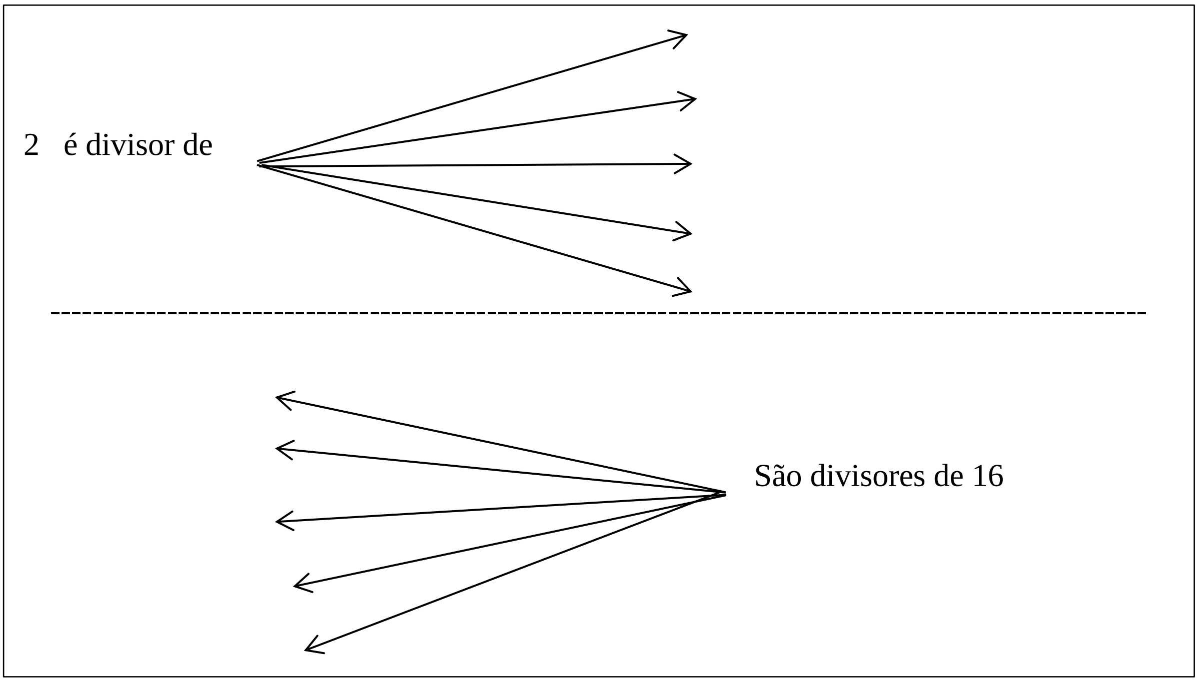
Atividade 4: ***Diagrama de Flechas***[28]

[27] Adaptado da Dissertação de Mariângela Pereira, com tema: *O Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental*, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro – SP, em 2004. p 79.

A flecha ⟶ indica “é divisor de”. Por exemplo, 3 ⟶ 15 significa: “3 é divisor de 15” e 3 significa: “3 é divisor de 3”.



Observando o diagrama acima, desenhe todas as flechas que estão faltando e complete o quadro abaixo:



Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- Reforçar os conceitos de divisor e múltiplo de um número;
- Reforçar os conceitos de que o número 1 é divisor de todos os números;
- Fixar a ideia de que todos os números diferentes de zero são divisores de si mesmos;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver as questões propostas;

[28]Adaptado da Dissertação de Mariângela Pereira, com tema: *O Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental*, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro – SP, em 2004. p. 81.

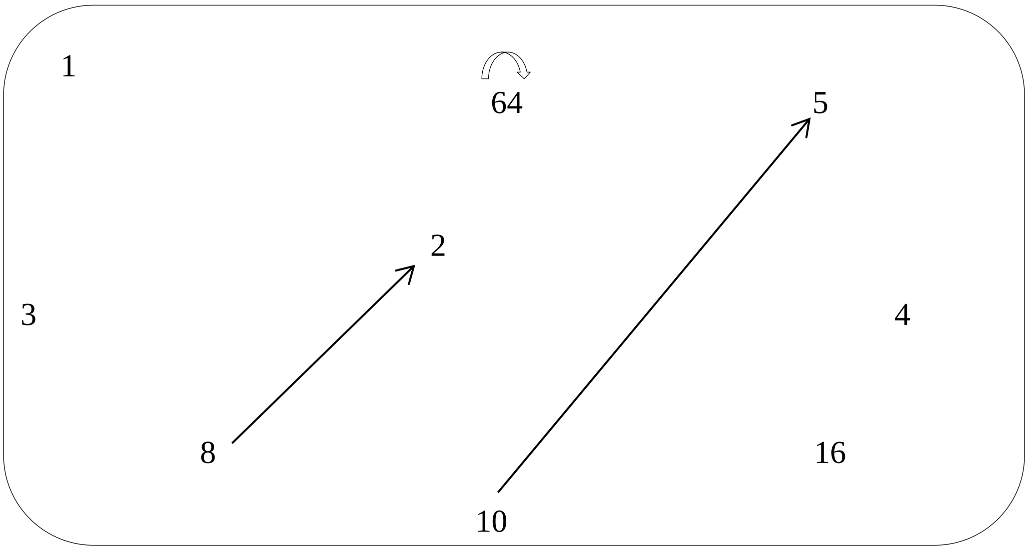
- Perceber a relação de Múltiplo de divisor de um número.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

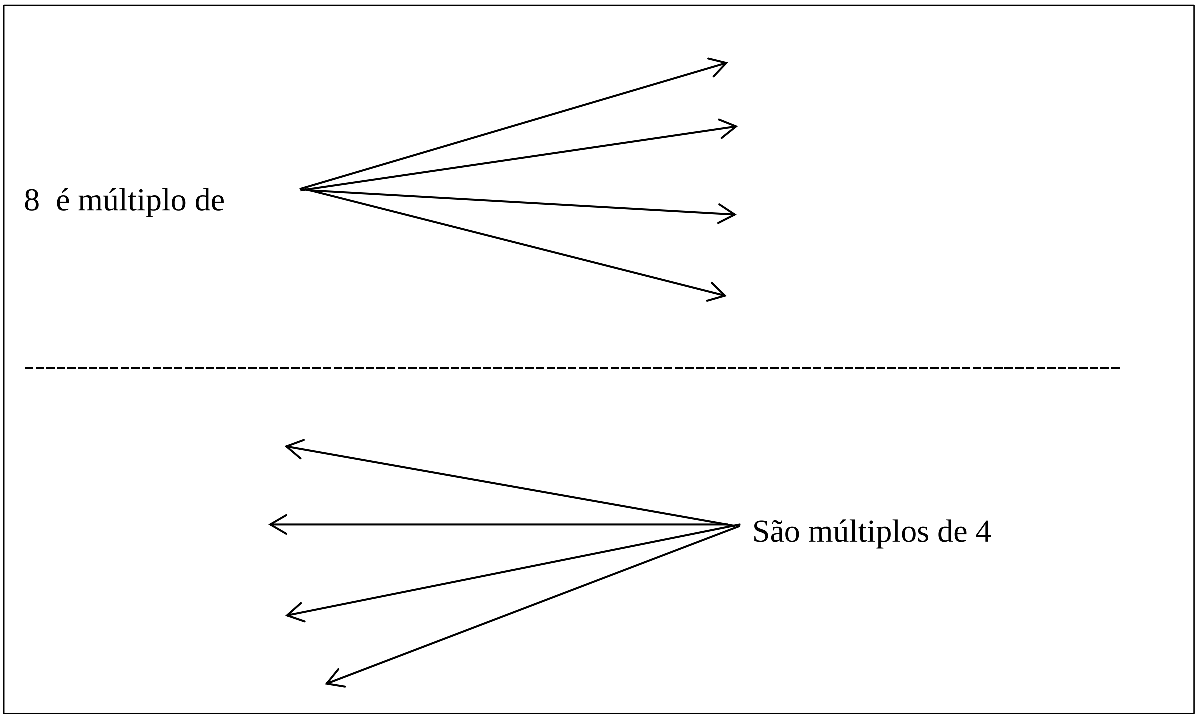
<u>Atividade 5</u>: *Diagrama de Flechas*[29]

A flecha $\longrightarrow$ indica “é múltiplo de”. Por exemplo, 15 $\longrightarrow$ 3 significa: “15 é múltiplo de 3” e $\overset{\curvearrowright}{3}$ significa: “3 é múltiplo de 3”



Observando o diagrama acima, desenhe todas as flechas que estão faltando e complete o quadro abaixo:

[29]Adaptado da Dissertação de Mariângela Pereira, com tema: ***O Ensino-Aprendizagem de Matemática através de Resolução de Problemas no 3º ciclo do Ensino Fundamental***, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro – SP, em 2004. p. 82



Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- ➢ Reforçar os conceitos de divisor e múltiplo de um número;
- ➢ Reforçar os conceitos de que o número 0 (zero) é múltiplo de todos os números;
- ➢ Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver as questões propostas;
- ➢ Perceber a relação de Múltiplo de divisor de um número;
- ➢ Perceber que todos os números são múltiplos de si mesmos;
- ➢ Reforçar a ideia de números pares e ímpares.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

<u>Atividade 6</u>: *Os bolinhos da dona Ana*[30]

Dona Ana fez 10 bolinhos e vai distribuí-los igualmente em bandejas nas seguintes condições: todas as bandejas devem ficar com a mesma quantidade de bolinhos e nenhum bolinho pode ficar fora de nenhuma bandeja. Sem fazer conta, mostre todas as possibilidades que ela tem para distribuir os bolinhos. Registre todas as possibilidades que você encontrou para chegar à resposta do problema de dona Ana.

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- ➢ Relacionar uma situação cotidiana com a Matemática;
- ➢ Verificar quais estratégias os alunos usarão para resolver o problema;
- ➢ Fixar o conceito de divisor e múltiplo de um número;
- ➢ Reconhecer que os divisores de um número são também chamados de fatores;
- ➢ Reforçar a ideia de ordem crescente e ordem decrescente

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

<u>Tarefa Extraclasse 4[31]</u>

I) Suponha que o número de bolinhos que dona Ana quisesse distribuir igualmente em bandejas fosse 12. Mostre todas as possibilidades que ela tem para distribuir os bolinhos, indicando como uma multiplicação de dois números naturais. Ou seja, a quantidade de bandejas multiplicada pelo número de pães que está nelas, não ultrapassando o total de pães. Registre todas as possibilidades que você encontrou para chegar à resposta do problema de dona Ana e escreva os fatores da multiplicação encontrados, em ordem crescente, sem repeti-los.

[30]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012, p. 130-131.
[31]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012, p. 130-131.

II) Determine os divisores de:			
a) 8:	b) 2:	c) 1:	d) 5:
e) 11:	f) 16:	g) 64:	h) 0:

III) Determine os múltiplos de:			
a) 5:	b) 3:	c) 10:	d) 6:
e) 8:	f) 4:	g) 0:	h) 7:

Número de aulas previstas: 2

Objetivos:

- Fixar o conceito de divisor e múltiplo de um número;
- Reconhecer que o conjunto de divisores de um número é finito;
- Reconhecer que o conjunto de múltiplos de um número é infinito;
- Reconhecer que existem números que possuem apenas um divisor;
- Reconhecer que o zero (0) não é divisor de nenhum número;
- Reconhecer que existem números que possuem dois ou mais divisores;
- Iniciar a construção do conceito de números primos.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.

Observação: Após a realização da atividade 6, será aplicada uma avaliação baseada em conteúdos estudados até o momento.

Atividade 7[32]: *Crivo de Eratóstenes*[33]

Siga as instruções dadas e faça o que se pede:

i) Observe o quadro abaixo com os números naturais de 2 a 100;

ii) Risque os múltiplos de 2, maiores do que ele, de uma cor;

iii) Risque os múltiplos de 3, maiores do que ele, de uma outra cor;

iv) Risque os múltiplos de 4, maiores do que ele. Os múltiplos de 5, maiores do que ele, e assim por diante. Sempre usando uma cor diferente das anteriores.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

v) Coloque no quadro a seguir, todos os números que ficaram sem ser riscados

[32]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 134

[33]Segundo Dante (2012, p.134), no livro referente ao 6º ano da coleção *Projeto Teláris: matemática*, menciona que "Eratóstenes (276 a.C. – 195 a.C.), matemático, geógrafo e astrônomo grego, criou um método simples e prático para a obtenção de números primos até um determinado limite: *O Crivo de Eratóstenes*".

vi) Indique do primeiro quadro, do crivo:

a) Os múltiplos de 2, maiores do que ele:

b) Os múltiplos de 3, maiores do que ele:

c) Os múltiplos de 4:

d) Os múltiplos de 5:

e) Os múltiplos de 6:

f) Os múltiplos de 7, maiores do que ele:

Número de aulas previstas[34]: 5

Objetivos:

- Permitir ao aluno a descoberta de certos padrões dos múltiplos de um número, como, por exemplo, os múltiplos de 2 são todos pares e que esses múltiplos podem ser conhecidos, contando de 2 em 2;
- Permitir ao aluno a descoberta de conexões que existem entre os múltiplos de 6 e os múltiplos de 2 e de 3;
- Determinar critérios de divisibilidade.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.
- ✓ Lápis coloridos.

[34]Estamos considerando uma previsão de 5 aulas, para o desenvolvimento das atividades, até à extraclasse 6.

Tarefa Extraclasse 5[35]

Dados os números 12678, 272, 2345, 3815, 2016, 660, 8300, 246, 57402, 37512. Indique quais são divisíveis por: 2: 3: 5: 6: 9: 10:

Objetivo:

- Fixar conceitos construídos sobre as regras de divisibilidade.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.

Observação: Voltaremos à atividade 7, *O Crivo de Eratóstenes*, com os seguintes objetivos:

- Permitir ao aluno a descoberta de que os números que não serão marcados, no quadro, possuem somente dois divisores;
- Permitir ao aluno a descoberta de que só existe um número par primo;
- Construir o conceito de números primos e compostos;
- Reconhecer quando um número é primo.

Tarefa Extraclasse 6[36]

Verifique se cada um dos seguintes números é primo ou composto. Por quê? a) 36 b) 45 c) 18 d) 7 e) 3 f) 11 g) 8 h) 17

Objetivo:

- Fixar conceitos construídos sobre números primos e compostos.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.

Observação: Voltaremos ao conceito de decomposição de um número, construído anteriormente, com o objetivo:

[35]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 129

[36]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 133.

- Construir o conceito de fatoração completa de um número;

Número de aulas previstas: 1

<u>**Tarefa Extraclasse 7[37]:**</u> ***Fatore os seguintes números abaixo:***

a) 48	b) 27	c) 15	d) 18	e) 8	f) 12	g) 36	h) 140

Número de aulas previstas: 2

Objetivos:

- Encontrar todos os divisores de um número;
- Encontrar a quantidade de divisores de um número;
- Permitir ao aluno a descoberta, quando os números são primos entre si;
- Permitir ao aluno a descoberta de caminhos mais tranquilos para a decomposição de um número em fatores primos.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.

[37]Atividade adaptada do livro *Vontade de saber Matemática*, 6º ano, de Joanir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2012. p.114.

Atividade de Fixação 2[38]:

a) Quais são os 10 primeiros Múltiplos de 3? Justifique.

b) Quando um número é primo?

c) Quais são os divisores de 17? E os de 24? Justifique.

d) Em relação à questão *a*, tem algum número primo? Por quê?

e) Decomponha o número 40 em um produto de:

i) Dois fatores **ii)** Três fatores **iii)** Em fatores primos

f) Fatore os seguintes números abaixo:

i) 28 **ii)** 38 **iii)** 45 **iv)** 11 **v)** 230

g) No 6º ano A da escola ECO há 36 alunos, e no 6º ano B desta mesma escola há 28 alunos. Para a realização de uma gincana na escola, todos esses alunos serão organizados em grupos com o mesmo número, sem que misturem alunos de classes diferentes.

i) Cada grupo pode ter 7 alunos?

ii) Cada grupo pode ter 4 alunos?

iii) Qual é o número máximo de alunos que pode haver em cada grupo?

iv) Nesse caso, quantos grupos serão formados em cada uma das classes?

Número de aulas previstas: 1

Objetivo:

- Fixar conceitos construídos em aulas anteriores.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.

[38]Atividade adaptada do livro *Vontade de saber Matemática*, 6º ano, de Joanir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2012 e do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 122; 135

<u>Atividade 8</u>: *Um Jogo de fichas*[39]

Em um jogo de duas ou mais pessoas, há 24 fichas vermelhas e 40 fichas azuis para serem distribuídas igualmente entre os participantes. Nenhuma ficha pode sobrar.

a) Esse jogo pode ser jogado por 3 participantes? E por 4? E por 5?

b) Qual é o número máximo de pessoas que podem participar desse jogo?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- Incentivar o aluno a utilizar conceitos aprendidos anteriormente para resolver outros problemas;
- Verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver os problemas;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos;
- Construir o conceito de divisores comuns de dois ou mais números.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Eventualmente: Tabuada.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

<u>Tarefa Extraclasse 8[40]:</u>

[39] Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 138.

[40] Atividade adaptada do livro *Vontade de saber Matemática*, 6º ano, de Joanir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2012. p. 111.

Determine:	
a) m.d.c. (8, 12)	**e)** m.d.c. (6, 26)
b) m.d.c. (4, 6)	**f)** m.d.c. (27, 45)
c) m.d.c. (28, 70)	**g)** m.d.c. (40, 12)
d) m.d.c. (15, 12)	**h)** m.d.c. (20, 52)

Número de aulas previstas: 1

Objetivo:

- Fixar conceitos construídos em aulas anteriores.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com a atividade.

Atividade 9: ***A escada da escola ECO***[41]

Na escola ECO tem uma escada que liga os dois andares do prédio. Essa escada tem 30 degraus, enumerados de 1 a 30. João está subindo de 3 em 3 degraus, e Félix esta subindo de 2 em 2. Sabendo que os dois começaram a subir juntos, responda:

a) Algum deles vai pisar no 15º degrau?

b) Algum deles vai pisar no 18º degrau?

c) Em quais degraus os dois vão pisar juntos?

d) Qual é o menor número do degrau em que os dois vão pisar juntos?

Número de aulas previstas: 1

Objetivos:

- Incentivar o aluno a associar a Matemática de sala de aula com uma situação real, ao usar o conceito de M.M.C.;

[41]Problema adaptado do *livro Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 141.

- Trabalhar o conceito de múltiplos comuns (M.C) de dois ou mais números;
- Orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos;
- Construir o conceito de M.M.C. de dois ou mais números.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.
- ✓ Eventualmente: Tabuada.
- ✓ Eventualmente: Calculadora.

Tarefa Extraclasse 9[42]:

Determine o Mínimo Múltiplo Comum de:				
a) 6 e 9	b) 2, 8 e 12	c) 3, 4 e 6	d) 12 e 15	e) 8 e 40

Número de aulas previstas: 1

Objetivo:

- Fixar conceitos construídos anteriormente.

Material auxiliar:

- ✓ Folha com o problema.

Atividade 10: ***Horário de ônibus***[43]

Na cidade de Montanha - ES há uma empresa de ônibus e ela possui dois tipos de ônibus: convencional e executivo.

O ônibus convencional sai do terminal rodoviário a cada 20 minutos e o executivo a cada 30 minutos. Se os dois saíram juntos às 12 horas, qual é o próximo horário em que eles voltarão a sair juntos desse mesmo terminal rodoviário?

---

[42]Atividade adaptada do livro *Vontade de saber Matemática*, 6º ano, de Joanir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro. São Paulo: FTD, 2012. p. 115.

[43]Problema adaptado do livro *Projeto Teláris: Matemática*, 6º ano, de Luiz Roberto Dante. São Paulo: Ática, 2012. p. 142.

Número de aulas previstas: 1

Objetivo:

➢ Contextualizar o m.m.c. com uma situação real do cotidiano.

Material auxiliar:

✓ Folha com o problema.

✓ Eventualmente: Tabuada.

✓ Eventualmente: Calculadora.

Observação: Após a realização da última atividade, será aplicada uma avaliação baseada em conteúdos estudados nas atividades de 7 a 10.

<u>Cronograma</u>

Considerando as atividades planejadas, em conjunto com a professora da turma elaboramos um possível cronograma para aplicá-las.

Obs.: Na primeira coluna [sequência de atividades] estão inclusas as atividades extraclasse e, as de fixação em sala de aula.

Quadro 6 - Cronograma de aulas

(continua)

Atividades	**Data**	**Dia da semana**	**Horário da aula**		**Nº de aulas**
Julho/2015 --- Início da Aplicação do Projeto					
1ª	03/07	6ª feira	4ª aula	10h10min à 11h05min	3
	06/07	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	07/07	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
2ª	08/07	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	3
	09/07	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	
	10/07	6ª feira	4ª aula	10h10min à 11h05min	
Recesso Escolar ---- 13/07 a 21/07					
3ª	27/07	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	3
	28/07	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	29/07	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	
4ª , 5ª 6ª	30/07	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	5
	31/07	6ª feira	4ª aula	10h10min à 11h05min	
	Agosto/2015				
	03/08	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	04/08	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	05/08	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	

Fonte: Pesquisador e a professora de Matemática da turma

Quadro 7 - Cronograma de aulas

(conclusão)

Atividades	**Data**	**Dia da semana**	**Horário da aula**		**Nº de aulas**
Avaliação	06/08	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	1
7ª	07/08	6ª feira	4ª aula	10h10min à 11h05min	5
	10/08	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	12/08	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	
	13/08	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	
	14/08	6ª feira	4ª aula	10h10min à 11h05min	
8ª	20/08	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	4
	24/08	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	25/08	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
	26/08	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	
9ª	31/08	2ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	2
	Setembro/2015				
	01/09	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
10ª	02/09	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	2
	08/09	3ª feira	3ª aula	8h50min à 9h45min	
11ª	09/09	4ª feira	1ª aula	7h à 7h55min	1
Avaliação	10/09	5ª feira	5ª aula	11h05min à 12h	1

Fonte: Pesquisador e a professora de Matemática da turma

Desta forma, observamos que a previsão para a aplicação efetivamente do nosso Plano de Ensino em sala de aula abarcou 30 aulas, entre os meses de julho e setembro de 2015.

4 A APLICAÇÃO DO PLANO DE TRABALHO

Neste capítulo, seguindo o Modelo Metodológico Romberg–Onuchic, colocamos o Procedimento Geral em ação. O Projeto de Ensino foi desenvolvido numa turma do 6º ano do turno matutino (6ºM01), composto por 28 alunos, como descrito na página 81, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Professor Elpídio Campos de Oliveira”, na cidade de Montanha – ES. Este trabalho foi realizado durante as aulas de Matemática, entre os meses de julho e setembro de 2015. Para a coleta dos dados, além de aplicarmos as atividades de ensino junto aos alunos, analisamos o que aconteceu em sala de aula com vistas ao roteiro apresentado na página 92 deste texto e utilizamos algumas técnicas: entrevista com a professora de Matemática da turma (vide páginas 77-81) observação participante e registros no diário de campo do transcorrer das atividades com os alunos.

A análise de dados segundo Bodgan e Biklen (1994, p.205) é,

> (...) é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros.

Nesse período em que aplicamos o plano de ensino, a professora regente nos auxiliou, o tempo todo, na organização da sala de aula e nos registros dos diálogos, no diário de campo, entre os alunos e entre esses e o pesquisador. Além disso, no decorrer da aplicação do plano de trabalho, em momentos de conversas informais realizadas com ela, juntos, buscamos resgatar na memória as lembranças de acontecimentos e fragmentos que escaparam dos registros realizados. Optamos pela não gravação de áudio porque a turma, no início de nossa investigação, era muito agitada, todos conversavam ao mesmo tempo e muito alto, o que se tornou muito difícil identificar o que falavam e quem falava.

No trabalho de transcrição e organização de dados coletados, pode ter ocorrido que alguns detalhes, como, por exemplo, falas dos alunos ou discursos feitos por nós, tenham escapado de nossos olhares e escrita, por mais atentos e cuidadosos que tentamos ser. Por isso, de acordo com (SILVA, 2014, p. 66), “cientes da complexidade que é a ação no campo da pesquisa, estamos conscientes de que não devemos imaginar algo a respeito da realidade e nem considerar que conseguimos esgotar a totalidade de informações".

Tivemos algumas interrupções no planejamento, principalmente, à rotina escolar, a saber, recesso escolar, reuniões com pais, atividades culturais. Salientamos que há uma diferença entre planejar um projeto e aplicá-lo, como, por exemplo, o tempo estipulado para o desenvolvimento das atividades não foi suficiente. Esperávamos que 30 aulas de 55 minutos fossem suficientes, no entanto, precisamos de 36 para realizar o plano de trabalho.

Para cada encontro foram formados novos grupos; assim, o grupo nomeado como, por exemplo, GA na primeira aula não é, necessariamente, o mesmo grupo na segunda aula. Outro fator relevante a destacar é que as atividades extraclasse foram quase todas resolvidas em sala de aula, pois os alunos, dificilmente, as resolviam em casa. Esse também foi um dos motivos para a necessidade de aumentar o número de aulas previstas.

Faremos agora a descrição de algumas atividades propostas ao longo dos encontros, que compõem o plano de ensino, para esta pesquisa de campo. Optamos por descrever apenas algumas atividades para que não ficasse muito extenso, no entanto, os dados utilizados são representativos, em relação ao todo. Salientamos que todas elas foram conduzidas com base no roteiro organizado por Allevato e Onuchic (2014) descrito na página 90 deste trabalho. Além disso, todas as atividades encontram-se disponíveis na seção 3.2.6.4 – *Roteiro de atividades*, páginas 94 a 113.

Atividade 1: Divisão euclidiana - ideias de partição e medida

Os objetivos da atividade foram: contextualizar a divisão numa situação cotidiana, concreta; desenvolver a intuição sobre a divisão nas ideias de repartir e medida; verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver os problemas; orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos; conceituar divisão euclidiana.

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado:
a) Maria tem três filhos e resolveu presenteá-los com 54 reais. Sabendo que cada um vai ficar com a mesma quantidade de dinheiro, quantos reais cada filho receberá?
b) João quer repartir entre seus irmãos mais novos 75 reais, para o lanche da semana na escola em que eles estudam. Se ele der 15 reais para cada um, quantos são os irmãos de João que receberão dinheiro?

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse complementar, foram previstas três aulas, realizadas nos dias 03, 06 e 07 de julho de 2015. Nessas primeiras aulas de aplicação das atividades do plano de ensino tivemos muita dificuldade para desenvolver o que havíamos planejado, pois os alunos da turma estavam muito dispersos; como afirmavam os professores da escola: “eles não têm um bom comportamento em sala de aula e a grande maioria não é comprometida e nem responsável com e pelo seu próprio aprendizado”. Além disso, não estavam familiarizados com a dinâmica de trabalho proposta. Mesmo explicando para eles como seriam as aulas durante a aplicação do projeto, não tivemos a colaboração da maioria, de modo que houve certa desordem na organização do ambiente de estudo e demora a se engajarem nos problemas propostos.

Como salienta Rodrigues (1992, p. 29), “[...] o professor terá que enfrentar situações inesperadas em sala de aula e, em algumas oportunidades, deverá alterar aquilo que tinha planejado, ainda mais, terá que estar atento às dificuldades apresentadas pelos alunos [...]”. Assim sendo, a situação exigiu de nós, pesquisador e professora regente, muitas intervenções, muita conversa visando a organização, o respeito com o colega, o trabalho em grupo de forma colaborativa, a responsabilidade e o compromisso com a realização das atividades. Em consequência perdemos bastante tempo; por isso, foi preciso mais uma aula, realizada no dia 08/07/15.

Segundo Van de Walle (2001) citado por Onuhic e Allevato (2005), ensinar Matemática através da metodologia de Resolução de Problemas não significa dar o problema, sentar e esperar que aconteça uma mágica; é necessária a criação de uma situação em que todos se sintam interessados no transcorrer de cada aula, sendo o professor o responsável pela criação desta situação. Ainda de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 23), “o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem”.

Em relação ao trabalho em grupo, para que ele se desenvolva bem, é importante que os membros de cada grupo se apropriem de habilidades para o trabalho cooperativo, visando atingir objetivos comuns. Além disso, cada membro do grupo pode aprender o conteúdo proposto através de suas interações com os outros membros do grupo. Damiani (2008, p. 215) menciona que

> (...) ao trabalharem juntos, os membros de um grupo se apoiam, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo, estabelecendo relações que tendem à não-hierarquização, liderança compartilhada, confiança mútua e co-responsabilidade pela condução das ações.

A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 1:

Aula 1:

No dia 03/07/15 estavam todos os 28 alunos[44] da turma presentes[45] e, assim, foram divididos em 6 grupos[46], sendo que quatro grupos ficaram com 5 componentes cada um e dois com 4 componentes cada um, como mostra o Quadro 8[47] a seguir. Começamos explicando como procederíamos na atividade, dividindo-os em grupos que deveriam trabalhar juntos e que, ao final de cada atividade, escolheríamos representantes que deveriam ir à lousa para socializar a resolução das questões com os demais colegas; no final de cada aula seria recolhido todo o material distribuído, para que não corrêssemos o risco de alguns deles esquecessem em casa e que, na aula seguinte seria devolvido para dar continuidade na atividade.

No início da aplicação das atividades, como já mencionamos acima, tivemos dificuldades desde a formação dos grupos, uma vez que decidimos seguir a sugestão da professora regente, em distribuí-los nos respectivos grupos por nível de responsabilidades de cada um. Isso gerou certo desconforto em muitos deles, pois queriam ficar com quem tinham mais afinidade. Não foi tarefa fácil acalmá-los e distribuir a atividade proposta para essa aula. Sendo assim, concluímos não ter sido uma boa ideia essa organização proposta pela professora.

---

[44]Substituímos os nomes dos alunos por símbolos A1, A2, etc., a fim de preservar suas identidades. Os símbolos foram definidos na primeira atividade e mantidos ao longo do Projeto, por exemplo, A2 designa sempre a mesma pessoa.

[45]Ao longo da aplicação do nosso Plano de Ensino, esse foi o único dia [03/07/15] em que todos os alunos da turma estiveram presentes.

[46]GA: Grupo A; GB: Grupo B; GC: Grupo C;...; GF: Grupo F.

[47]Mostraremos apenas esse quadro onde constam todos os alunos da turma e os respectivos grupos como ilustração de nossos registros. Omitiremos as(os) demais listas (quadros), para não estender desnecessariamente o texto.

Quadro 8 - Grupos de alunos para realização da primeira atividade

ALUNOS	GRUPOS
A1	GA
A2	
A3	
A4	
A5	GB
A6	
A7	
A8	
A9	
A10	GC
A11	
A12	
A13	
A14	
A15	GD
A16	
A17	
A18	
A19	GE
A20	
A21	
A22	
A23	
A24	GF
A25	
A26	
A27	
A28	

Fonte: Diário de Campo do Pesquisador

Com os alunos reunidos em grupos, após muitas reclamações, foi entregue a cada membro dos grupos a atividade, contendo duas situações: problemas sobre divisão com as ideias de repartir (partição) e medida (cota) (vide páginas 116-117); também demos um tempo para que eles lessem e discutissem o problema entre si.

Em seguida, muitos alunos, sem terem lido, totalmente, o que estava escrito no enunciado da atividade já nos chamavam em seus grupos, ou aproximavam-se de nós, para nos dizer que não sabiam resolvê-lo e pediam que disséssemos como é que deveriam fazer para chegarem à resposta ou que tipo de operação era para ser usada. Por exemplo, nos perguntavam sobre o problema: “é de mais ou de menos?”. Como o nosso propósito era levá-los a construir seu próprio conhecimento ao invés de darmos respostas prontas, pedimos para que eles fizessem novamente a leitura do texto do problema juntos conosco, e continuamos a instigá-los com questões diretivas, incentivando-os e orientando-os para a resolução das questões. Mesmo assim, poucos alunos começaram a resolver as questões indicadas na atividade. Corroboramos, desse modo, com Souza (2010), ao mencionar que o papel do professor, quando trabalha com a metodologia Resolução de Problemas, muda de "transmissor de conhecimento" para o de observador, organizador, consultor, mediador, controlador, incentivador, orientador da aprendizagem.

A aula do dia 03/07/15 chegou ao seu final, sem que pudéssemos avançar na atividade proposta para esse dia. Como combinado no início dos nossos trabalhos, recolhemos todo o material distribuído com o intuito de devolvê-lo na aula seguinte, para dar continuidade à atividade.

Aula 2:

No dia 06/07/15 estavam presentes 22 alunos. Distribuímos os alunos em 5 grupos. Nesta aula, tivemos menos dificuldades na divisão dos grupos, pois resolvemos fazer uma nova experiência em deixá-los formar os grupos por afinidade, mas estipulamos dois grupos com 5 membros cada um e três grupos com 4 membros cada um.

Devolvemos o material recolhido na aula anterior e, praticamente, começamos a atividade do início, novamente. Pedimos para cada um deles, nos grupos, ler o texto do problema e, na sequência, lemos junto com eles. Assim que terminamos a leitura, um dos alunos, A12, nos perguntou como poderia "resolver um problema sem fazer conta".

> **Existem meios de resolver uma situação problema, que não seja só por meio de uma conta. (**Respondemos para ele)
> A12: "Tem que fazer desenho?"
> **Você é que vai mostrar para nós, quais são as suas estratégias, o que você vai utilizar para resolver o problema. Tenta resolver.**

Nessa atividade, não estávamos interessados com o resultado dos problemas, senão com o processo, em como e quais estratégias eles usariam para resolvê-los. Ao circular pelos grupos, percebemos que a maioria dos alunos estava trabalhando, mas muitos ainda, individualmente.

Continuamos a incentivá-los ao trabalho coletivo, especialmente, porque alguns desses alunos ainda reclamavam com o pesquisador ou com a professora sem discutir com os colegas, dizendo:

> A1: “Não tem como resolver isso sem fazer conta.”
> A13: “Ah tio, isso é muito difícil.”
> A23: “Me ajuda aqui, tio. Como eu faço isso?”
> A26: “Tia, eu vou fazer uma conta.”

Percebemos no excerto acima, a dificuldade que os alunos têm quando se deparam com situações-problema que exijam deles certas estratégias de resolução que não se reduzam a uma conta. Então, em certo momento, entregamos para cada grupo algumas pseudocédulas como material de apoio na resolução dos problemas. Freitas (2004), em sua dissertação de mestrado, afirma que todos os materiais concretos têm como característica principal o fato de oferecer, a partir da manipulação, suporte aos alunos para entender conceitos importantes. A Figura 13 mostra alunos trabalhando com o auxílio das pseudocédulas.

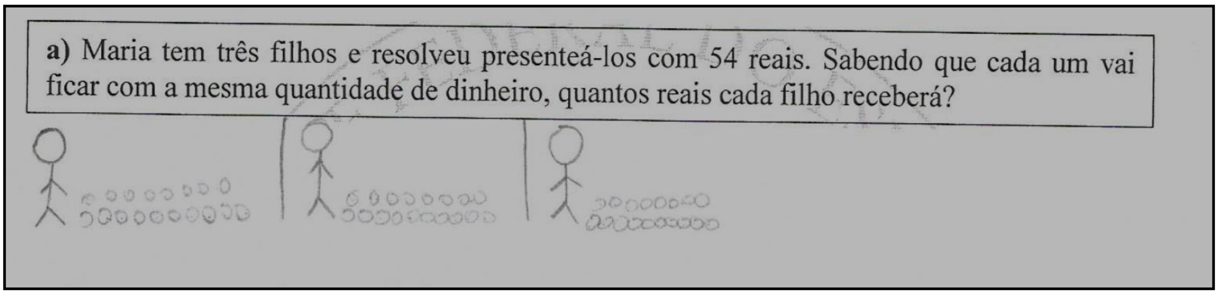
Figura 13 - Alunos do GB trabalhando na atividade 1, com apoio das pseudocédulas

Fonte: Acervo do Pesquisador

A partir da entrega do material de apoio, sempre circulando pelos grupos, instigando-os, orientando-os e incentivando-os, a atividade fluiu bem melhor; estratégias foram apresentadas pelos alunos na resolução dos problemas, como, por exemplo, é mostrado nas Figuras 14 - 18. Em certo momento, começamos a exigir que eles redigissem as respostas por extenso, a fim de que tivessem melhor clareza e argumentação em suas soluções.

Na resolução da questão *a*, o GA como podemos observar na Figura 14, fez desenhos para representar os 3 filhos de Maria e distribuiu 18 bolinhas correspondentes ao valor que cada um iria receber. Entretanto, o GA não descreveu a maneira como resolveu o problema e nem registrou quantos reais cada filho de Maria deveria receber. Analisando a figura, parece-nos que o GA, inicialmente, fez o cálculo da divisão de 54 por 3, encontrando 18 como resultado e, em seguida, fez o desenho com a distribuição de 18 bolinhas para cada filho; contudo, o GA em plenária afirmou que distribuiu de 1 em 1 para cada filho.

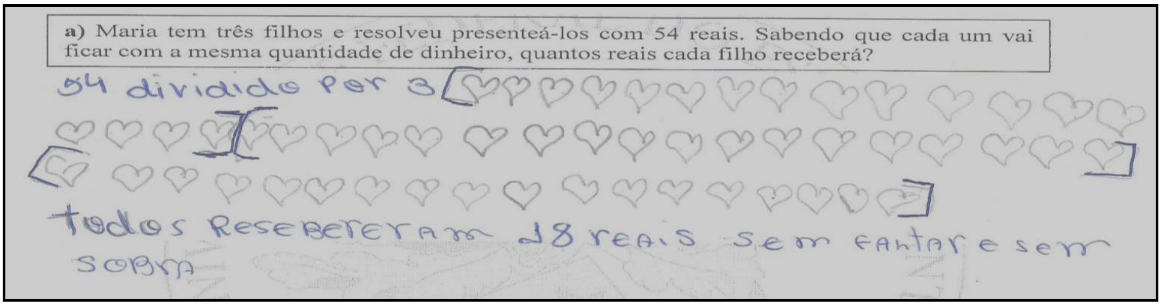
Figura 14 - Resolução da questão *a* da atividade 1 pelo GA



Fonte: Folha de respostas dos alunos

O GC, ao resolver a questão *a* da atividade 1, Figura 15, utilizou uma representação pictórica[48] em formato de corações, inseridos em 3 pares de colchetes para representar o valor em reais que cada filho de Maria iria receber. Observamos que o GC redigiu: *54 dividido por 3* [...] *todos receberam 18 reais sem faltar e sem sobrar*. Percebemos que o grupo entendeu a questão, porém, também nos parece que ele pode ter efetuado a divisão de 54 por 3, encontrando 18 como resposta, e em seguida agrupou de 18 bolinhas em cada par de colchetes.

Figura 15 - Resolução da questão *a* da atividade 1 pelo GC

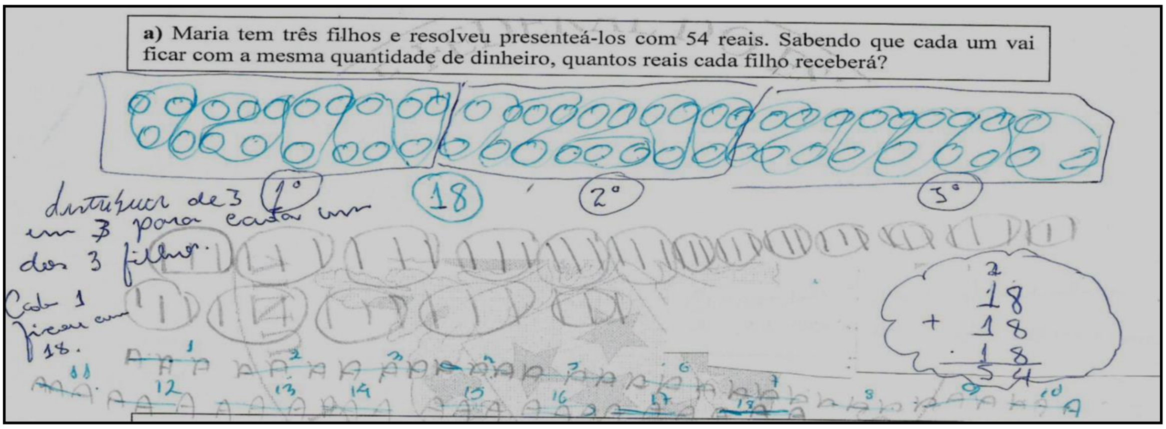


Fonte: Folha de respostas dos alunos

[48]"Em geral, no ensino de matemática, o recurso da expressão pictórica fica restrito a esquemas que auxiliam a compreensão de alguns conceitos e operações" (CÂNDIDO, 2001, p. 18).

Os alunos do GD, apesar de resolverem a questão *a*, Figura 16, de forma semelhante aos grupos anteriores, deixou clara a forma como eles desenvolveram a resolução do problema, ao escrever: *distribuir de 3 em 3 para cada um dos três filhos. Cada 1 ficou com 18*. E, ainda, verificaram por meio da operação da adição os três valores encontrados, resultando em 54. Isto é, o grupo teve entendimento da questão e clareza na resposta.

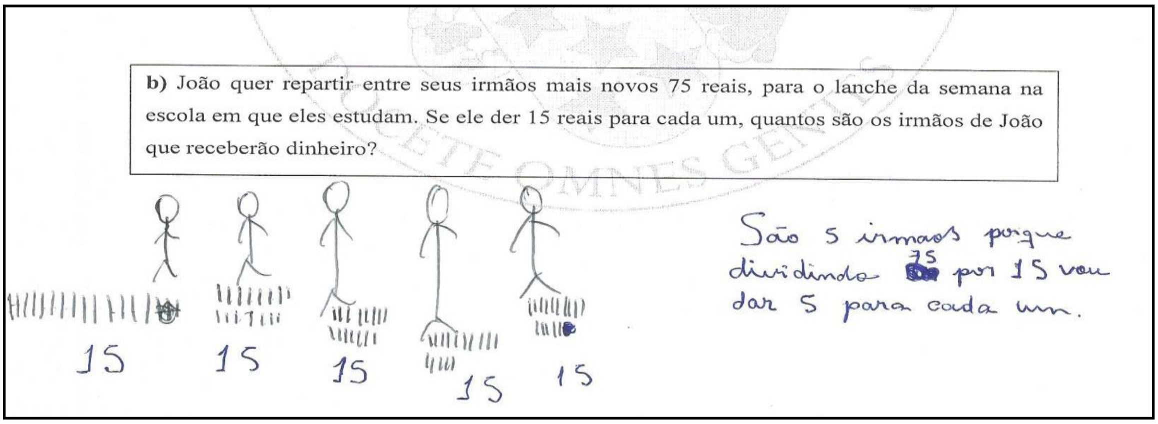
Figura 16 - Resolução da questão *a* da atividade 1 pelo GD



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Nos outros grupos (B e E) tivemos respostas semelhantes à do GA para a questão *a* da atividade 1. O GB, ao responder a questão *b*, Figura 17, afirma que *são 5 irmãos, porque dividindo 75 por 15 vai dar 5 para cada um*. Entendemos que o grupo, para chegar a essa conclusão, fez um desenho representando um irmão de João e atribuiu 15 tracinhos mais o número 15 abaixo e foi realizando somas parciais até chegar o valor de 75, como está mostrado na figura abaixo. Observamos que ao representar a quantia do primeiro e do ultimo irmão de João, o grupo registrou tracinhos a mais e depois teve que rasurar a sua resposta, talvez por falta de atenção na hora de contar os tracinhos; isso mostra que houve uma conferência na resposta antes de nos entregar a folha de resposta. Verificamos que o grupo entendeu a questão e conseguiu resolvê-la corretamente.

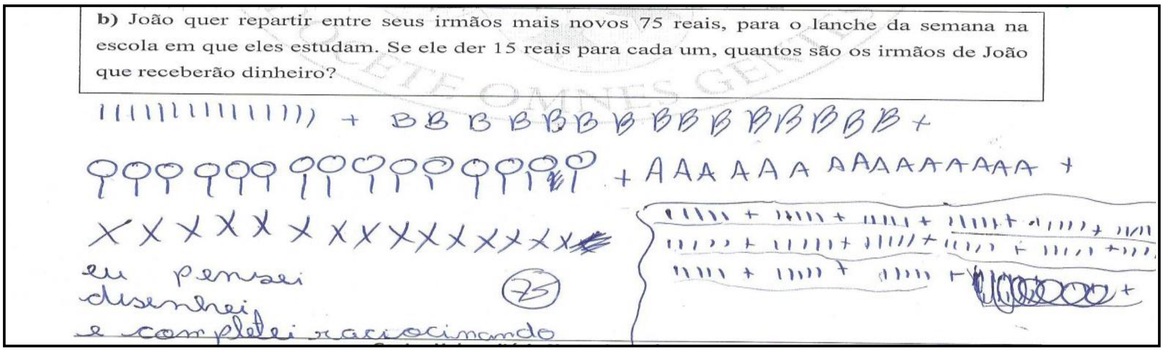
Figura 17 - Resolução da questão *b* da atividade 1 pelo GB



Fonte: Folha de respostas dos alunos

O GE, ao responder a questão *b*, Figura 18, demostrou certa incompreensão no enunciado do problema, onde menciona: se ele der 15 reais para cada irmão de João, quantos são os irmãos de João? Nesse caso, não pode dar outra quantia para cada um, a não ser os 15 reais. O grupo, além de resolver o que se pedia na questão, também distribuiu de 5 em 5 tracinhos até chegar ao valor de 75. Há indícios de que esse grupo ao encontrar a quantidade de irmãos de João corretamente, quis fazer uma verificação adicionando cada agrupamento de 5 tracinhos, 15 vezes, o que deixou a resolução do problema um pouco confusa.

Figura 18 - Resolução da questão *b* da atividade 1 pelo GE



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Os outros grupos (A, C e D) resolveram a questão *b* da atividade 1 de forma semelhante à do GB.

No final dessa aula, assim como aconteceu na aula anterior, recolhemos todo o material distribuído.

<u>Aula 3:</u>

No dia 07/07/15 estavam presentes 19 alunos e todos estiveram na aula anterior. Recompusemos os grupos do mesmo modo que na aula 2 e devolvemos a folha com a atividade resolvida e pedimos que cada grupo escolhesse um representante para ir à lousa e mostrar como o seu grupo resolveu os problemas. Logo surgiram alguns comentários do tipo: “eu não vou, o nosso tá errado”; “eu não vou não tio, essa turma fica rindo da gente, quando a gente faz errado”; “eu não vou, eu não gosto de ir no quadro”; “eu tenho vergonha”.

Após esses comentários da turma, fizemos intervenções dizendo a eles que aquele era um momento importante para a aprendizagem; não é para julgar certo ou errado, não é para alguém ficar rindo do colega porque ele fez diferente; é um momento para cada grupo mostrar como resolveu a sua questão, defender suas ideias e todos, juntos, escolher a melhor resolução de cada problema. Depois de algum tempo, conseguimos levar representantes dos grupos ao quadro para socializar as resoluções com toda a turma. Vejamos algumas falas de alunos de alguns grupos na resolução das questões da atividade.

Grupo A

> **Como o seu grupo resolveu a questão *a*?**
> A4: “Desenhamos três filhos e fomos colocando uma bolinha para cada um até dá 54.”
> **Quanto recebeu cada filho?**
> A4: “18 bolinhas”
> **O que significa essas 18 bolinhas?**
> A4: “O dinheiro que cada um filho ganhou.”
> **Será que poderia fazer de outra forma, usar outra estratégia?**
> A4: “Ah, pode fazer uma conta?”
> **Sem fazer conta, por enquanto, teria outra maneira de resolver esse problema? Mostre pelo menos mais uma.**
> A4: “Acho que pode fazer de dois em dois.” (Disse indeciso.)
> **Distribui aí, de dois em dois, nos três desenhos até chegar ao valor 54.** (Pedimos para ele ao percebermos a sua indecisão.)

A4 fez três desenhos correspondentes aos três filhos de Maria e foi distribuindo de dois em dois tracinhos (|) para cada filho e foi realizando somas parciais até chegar ao valor 54.

A4: “De dois em dois dá sim.”

Muito bem!

Observamos que esse grupo conseguiu entender a questão *a* e resolveu-a corretamente. Inicialmente, distribuiu as bolinhas de 1 em 1 [real] e, após instigarmos a procura de outras estratégias, o seu representante A4, mostrou que poderia distribuir de 2 em 2 reais para cada um. Salientamos que, nesse caso, eles poderiam distribuir da maneira que achassem melhor desde que todos os filhos de Maria ficassem com a mesma quantidade. Já no caso da questão *b*, eles resolveram assim:

E, como o seu grupo resolveu a questão *b*?

A4: “Ah, nós fez quase do mesmo jeito da *a*.”

Como assim? Mostre para nós.

A4: “Nós fez um ‘neguinho’ e colocou 15 bolinhas para ele; depois desenhamos mais um ‘neguinho’ e colocou 15 bolinhas para ele e somou com o 15 do primeiro neguinho e, foi fazendo assim até gastar todo 75; depois contamos os ‘neguinhos’ e deu 5.”

Ótimo! Muito bom!

Esses “neguinhos” representam o que pra vocês?

A4: “Representa os irmãos de João.”

Percebemos nesse excerto que o aluno diz que eles fizeram quase do mesmo jeito da questão *a*. Observamos que a resposta do grupo está correta; entretanto, não puderam distribuir para cada filho uma quantidade diferente de 15. Deu 15 bolinhas [reais] para o primeiro “neguinho” [filho], em seguida deu 15 para o segundo filho e somou com a quantidade do primeiro filho; isso aconteceu em todo o processo até distribuir todos os 75 reais e concluiu, corretamente, que João tem 5 irmãos.

Grupo B

E o seu grupo resolveu como a questão *a*?

A20: “Nós fez igual ao grupo dele [fazendo referência a A4], só que nós fez tracinho.”

Vocês distribuíram de um em um para cada filho?

A20: “Foi.”

Para o grupo de vocês, quanto ganha cada filho?

A20: "Ganha 18 reais."

Ótimo!

Mas, será que podemos distribuir de outra maneira entre os meninos?

A20: "Dá sim. De dois em dois." (A4 já tinha mostrado na lousa, ele só repetiu.)

Isso mesmo! Mas, será que só podemos distribuir de um em um e de dois em dois?

A20: "Ah tio, acho que não. Pode fazer a letra *b*?" (Disse querendo ficar livre logo.)

Será que não dá para Maria distribuir uma quantidade maior entre os seus filhos?

A20: "Dá para fazer de três em três?"

O que você acha?

A20: "Acho que dá."

Então, tenta fazer.

Assim como o A4, ele fez três desenhos correspondentes aos filhos de Maria, distribui de três em três para cada um e foi somando parcialmente até chegar ao número 54. Assim que completou a tarefa, disse:

A20: "De três em três, também dá."

Dá o que?

A20: "Dá certo."

Então, cada filho continua ganhando os 18 reais?

A20: "Continua."

Observamos que esse grupo fez algo diferente em relação ao GA; mostrou que é possível distribuir de 3 em 3 reais para cada filho e cada um ficar com 18 reais. Reconhecemos que poderíamos tê-los instigados mais a encontrar outras formas de Maria distribuir os 54 reais entre os seus filhos, cabendo a cada a mesma quantidade.

E, como o seu grupo resolveu a questão *b*?

A20: "A gente desenhou um 'neguinho' e colocou 15 tracinhos e o número 15 abaixo para ficar mais fácil de somar e desenhou mais um 'neguinho' e colocou 15 tracinhos e o número 15 abaixo e foi somando até dá 75. Depois só contamos os ‘neguinhos’ e deu 5 ‘neguinhos’.”

Muito bom! E, o que significa esses “neguinhos” para vocês?

A20: “Os filhos.”

Valeu! Bom demais!

Grupo D

E o seu grupo resolveu como a questão *a*?

A17: “Nós não fez ‘neguinho’ não. Nós fez uma tentativa de distribuir de três em três bolinhas dentro de um quadro e conseguimos chegar no 54. Depois, somamos quantos tinha dentro de cada quadro e achamos 18 em cada um.”

Mas, será que podemos distribuir de outra maneira entre os filhos?

A17: “Não sei. Acho que não.”

Será que não pode distribuir de 4 em 4? E de 5 em 5? E de 10 em 10? E de 15 em 15?

A17: “Por 15, é na letra *b*.”

Ok. E com outros números, não dá?

A17: “Acho que não.”

Você não quer tentar fazer por outro número? Por um, dois e três, os seus colegas já fizeram.

A17 pensou por alguns minutos, foi ao canto do quadro colocou alguns números e nos disse:

A17: “Tio, dá também por 6. Eu fiz aqui de seis em seis e, na primeira vez acho 18. Então, se eu fazer mais duas vezes vou achar 18 e 18 que é 36. 36 mais 18 da primeira vez dá 54.”

Como assim, na primeira vez você encontrou dezoito?

A17: “Assim, eu coloquei 6 no primeiro quadro, 6 no segundo e 6 no terceiro, somei tudo e deu 18. Fazendo mais duas vezes do mesmo jeito, vamos ter 36 e 36 mais 18 é 54.”

Muito bem garoto! Mas, será que podemos distribuir uma quantidade maior, para cada filho?

A17: “Não sei.”

O que você acha de fazer uma tentativa por um número maior do que 10? Será que podemos distribuir uma quantidade maior que 10 para cada filho?

A17: "Nossa!"

Eu sei que você consegue.

A17: "É muito difícil fazer."

Pensa um pouco.

A17: [Depois de um tempo, olhou o que estava escrito no quadro e respondeu assim:] "Professor, na resposta de A20 ele fez de três em três e achou dezoito para cada um, então, eu posso dá 18 pra cada um também?"

O que você acha?

A17: "Eu acho que pode."

Tenta fazer.

A17: [Pensou mais pouco e demonstrou segurança ao responder.] "Pode sim. Se somar 18 três vezes vai dá 54, né? E, se eu somar 3 dezoito vezes vai dá 54 também. Então eu posso dá 18 para cada um".

Ótimo! Muito bom mesmo!

Percebemos aqui que A17, representando o seu grupo, além de encontrar a resposta corretamente da questão *a* e após a nossa provocação, também, conseguiu chegar ao resultado distribuindo de 6 em 6 bolinhas [reais] para cada filho. Ele, recorrendo ao que os outros grupos fizeram na lousa, pensou algo que nenhum outro colega conseguiu: *se A20 fez de três em três e achou dezoito para cada um, então eu posso dá 18 para cada um também*. Ao fazer um cálculo mental, há indícios de que A17 pensou algo do tipo: Se eu fizer agrupamentos de 3 em 3 bolinhas [reais] vou dar 18 bolinhas [reais] para cada um, totalizando 54 bolinhas [reais]; então eu posso fazer agrupamentos de 18 em 18 bolinhas [reais], isto é, distribuir 18 para cada um. Ou seja, se fizer $3 \times 18 = 54$ ou se fizer $18 \times 3 = 54$. Com relação ao cálculo mental, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 76), "pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos".

E, como o seu grupo resolveu a questão *b*?

A17: "Nós foi colocando 15 em cada quadro e somando. Deu 75 no quinto quadro."

Então, quantos são os irmãos de João?

A17: "5."

Muito bem!

Salientamos que existe uma diferença considerável entre as duas questões propostas nessa atividade. A questão *a* está associada à *ideia de partição*, pois temos: o todo (54 reais), o número de partes (3 filhos) e queremos saber o tamanho das partes (18 reais); aqui, cada filho tem que receber a mesma quantia previamente desconhecida. Já na questão *b*, está presente a *ideia de medida* (*quota*), pois conhecemos: o todo (75 reais), o tamanho das partes (15 reais) e queremos o número de partes (5 irmãos); nesse caso, cada irmão de João, cujo número é desconhecido, deve receber 15 reais.

Nessa questão e nas demais, consideramos que todo processo de resolução e os diálogos são importantes para a aprendizagem e a construção de conceitos. Todavia, nesse início de aplicação do plano de ensino, percebemos que os alunos não gostavam muito de ler as questões propostas, tinham muitas dificuldades em registrar as estratégias de resolução de um problema. Isso pode resultar em algumas incoerências, ou implicar num erro.

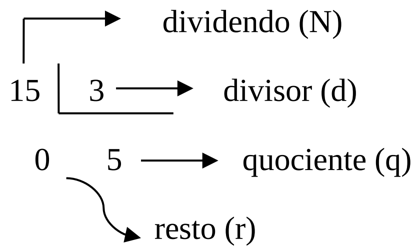
Mesmo não registrando aqui os diálogos de todos os grupos, verificamos que os alunos conseguiram entender e fazer a atividade proposta de alguma forma, sem mesmo saber qual a ideia que estava associada à divisão em cada questão. Assim, formalizamos o conceito de divisão escrevendo na lousa algo do tipo:

Definições

A divisão é a operação matemática inversa da multiplicação.
Dados os números N (dividendo) e $d \neq 0$ (divisor diferente de zero), o resultado q (quociente) da divisão de N por d será o maior número natural q, tal que, o produto $q \times d$ não ultrapasse o valor de N, e o *resto* dessa divisão é igual à diferença entre o dividendo N e o produto $q \times d$.

Exemplos

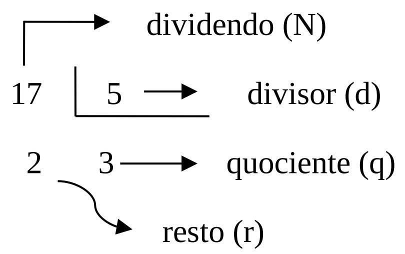
Exemplo 1: Se dividirmos 15 balas entre 3 crianças, quantas balas cada criança receberá?



Isto é, 15 = 3 × 5 + 0.

Note que 3× 5 = 15 e o resto é 0 (zero), ou seja, 15 – 3×5 = 15 – 15 = 0 (zero).

<u>Exemplo 2</u>: Se dividirmos 17 balas entre 5 crianças, quantas balas inteiras cada criança vai receber?



Isto é, 17: 5 = 3 × 5 + 2.

Note que 3 × 5 = 15 < 17 e o resto é 2, ou seja, 17 – 3 × 5 = 17 – 15 = 2.

Observamos que os dois exemplos satisfazem a situação dada: $N = q \times d + r \;\; e \;\; 0 \leq r < d$.

Os significados das palavras: **divisor**, **divide**, **dividendo, quociente e resto** foram construídos juntamente por nós e pelos alunos. Dissemos ainda que **divisor** indica quem faz a ação, ou seja, é quem divide, enquanto **dividendo** indica quem sofre a ação.

Foram deixados, ainda nessa aula, problemas de fixação dos conceitos trabalhados, como atividade extraclasse 1, a seguir. De acordo com Souza (2005, p. 12), “As atividades extraclasse ou tarefas complementares têm o objetivo de aprofundar conhecimentos relacionados aos conteúdos estudados em sala de aula (...)”. Para essa atividade tivemos como objetivo fixar o que havia sido estudado nas aulas. Nossa intenção para a aula seguinte era apenas discutir e corrigir o que haveriam feito em casa.

<u>Tarefa extraclasse 1:</u>

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

a) Fernando chegou em casa com 36 balas e distribuiu entre seus irmãos, dando 12 balas para cada um. Quantos são os irmãos de Fernando que receberam balas?

b) Nágila tem três filhos e resolveu presenteá-los com 315 reais. Quantos reais receberá cada filho? Sabendo que todos receberam a mesma quantia e que Nágila possui somente notas de 5 e de 50 reais, quantas notas de 5 reais e quantas notas de 50 reais receberá cada um filho?

Para informação do leitor, apresentamos no apêndice D a definição formal de divisão euclidiana e a demonstração do algoritmo de Euclides (existência e unicidade do quociente e resto). Salientamos que não fizemos isso em sala de aula, por entendermos que os alunos participantes da pesquisa, ainda não tinham maturidade adequada para compreender o formalismo.

<u>Aula 4:</u>

No dia 08/07/15 compareceram 16 alunos. Ao circularmos entre os alunos, observamos que nenhum deles tinha feito a atividade extraclasse; assim, os deixamos trabalhar na atividade.

Como já haviam resolvido uma atividade semelhante em aulas anteriores, não tiveram dificuldades na resolução desta. Mesmo assim, nós sempre estávamos percorrendo os grupos e incentivando, principalmente, os menos dedicados à atividade. Assim, seguindo o mesmo caminho da aula 2 (usando as pseudocédulas), todos conseguiram encontrar o número de irmãos de Fernando e também quantos reais cada um dos filhos de Nágila recebeu, usando apenas notas de 5 reais e de 50 reais.

Atividade 2: Divisão com foco no resto

O objetivo desta atividade foi, além de todos os da atividade 1, também desenvolver a intuição sobre o resto de uma divisão.

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

a) Numa excursão da Escola ECO para a feira de tecnologia no Palácio Anchieta, em Vitória – ES foram 46 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o ônibus quebrou perto de São Mateus - ES. Foram disponibilizadas 3 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

b) Pedro vai encaixotar seus livros para doar à biblioteca da cidade em que ele mora. São 94 livros e ele quer colocar 12 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse, foram utilizadas duas aulas, realizadas nos dias 09 e 10 de julho de 2015. Nesta atividade, não tivemos maiores problemas na organização dos grupos, mas precisamos continuar a incentivá-los a se dedicarem às resoluções das questões e ao trabalho cooperativo e colaborativo, uma vez que, alguns ainda trabalhavam individualmente e outros, apenas copiavam. Em relação à tarefa extraclasse, a maioria resolveu em casa. Assim, não perdemos tempo e pudemos aproveitar mais da metade da segunda aula (10/07/15) para aplicarmos o jogo denominado *A Trilha do Resto*, descrito nas páginas 97 - 98.

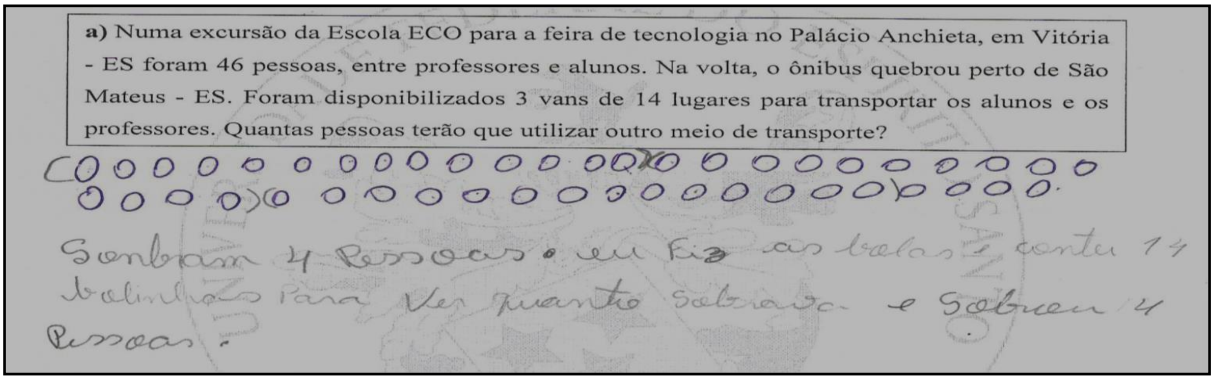
A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 2:

Aula 1:

No dia 09/07/15 estavam presentes 20 alunos. Cada membro de cada grupo recebeu uma folha impressa com a atividade. Foi dado um tempo para que os alunos lessem e discutissem entre si as questões. Ao passarmos pelos grupos observamos que, mesmo que a grande maioria estivesse desenvolvendo a atividade, ainda havia alunos dispersos, esperando os colegas terminarem para que pudessem copiar. Vejamos a resolução das questões de cada grupo.

Para resolver a questão *a*, Figura 19, o GA demonstrou que houve leitura do enunciado e interpretação do problema. Observamos que os alunos desse grupo conseguiram resolver e explicar o caminho percorrido até chegar à resposta correta da questão. Porém, ao descrever os passos utilizados, o grupo deixou de indicar os significados de alguns termos, talvez por falta de atenção. Veja a transcrição da resposta do grupo: *sobram 4 pessoas. Eu fiz as bolas e* *contei 14 bolinhas* [em cada conjunto] *para ver quanto sobrava e sobrou 4* [bolinhas] *pessoas.* Isso significa dizer que 4 pessoas terão que utilizar outro meio de transporte.

Figura 19 - Resolução da questão *a* da atividade 2 pelo GA

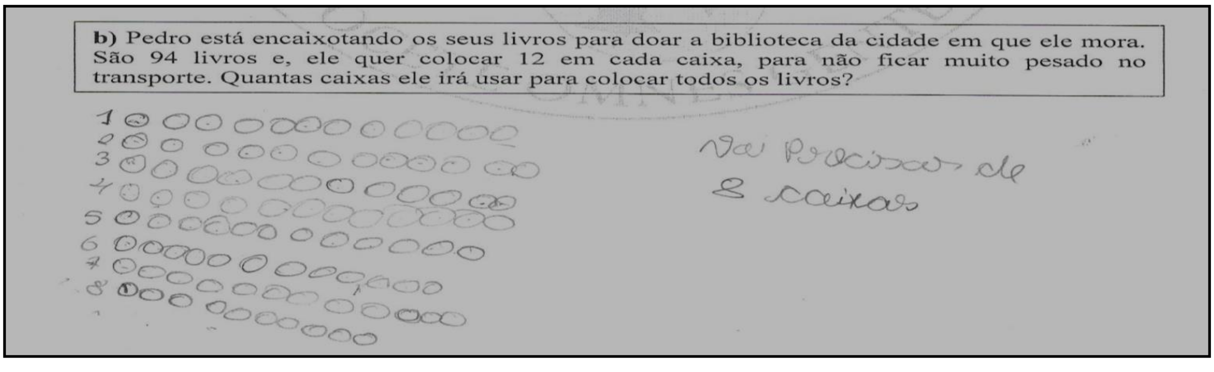

a) Numa excursão da Escola ECO para a feira de tecnologia no Palácio Anchieta, em Vitória - ES foram 46 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o ônibus quebrou perto de São Mateus - ES. Foram disponibilizados 3 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

Sobram 4 Pessoas. eu Fiz as bolas e contei 14 bolinhas Para Ver quanto Sobrava e Sobrou 4 Pessoas.

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Para resolver a questão *b*, Figura 20, o GA novamente, demostrou segurança na resolução do problema e respondeu corretamente: *vai precisar de 8 caixas*. Observamos que os alunos desse grupo distribuíram 12 bolinhas, que representam os livros de Pedro, até o agrupamento 7 e, no agrupamento 8, colocou as 10 últimas bolinhas. Com isso, eles conseguiram entender que mesmo sendo estipulado 12 livros por caixa, sobrariam 10 livros e, então, precisariam de mais uma caixa, totalizando 8 caixas.

Figura 20 - Resolução da questão *b* da atividade 2 pelo GA


b) Pedro está encaixotando os seus livros para doar a biblioteca da cidade em que ele mora. São 94 livros e, ele quer colocar 12 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

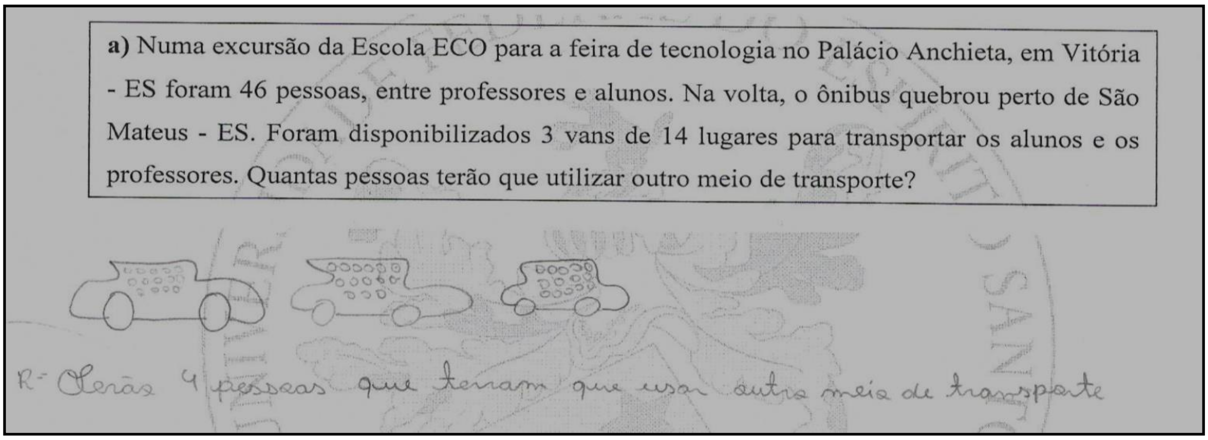
1
2
3
4
5
6
7
8

Vai Precisar de 8 caixas

Fonte: Folha de respostas dos alunos

O GB, ao resolver questão *a*, Figura 21, demonstrou clareza e segurança na resposta ao desenhar as 3 "vans com as 14 pessoas dentro" e escrever por extenso a quantidade de pessoas que deverão ir em outro meio de transporte.

Figura 21 - Resolução da questão *a* da atividade 2 pelo GB



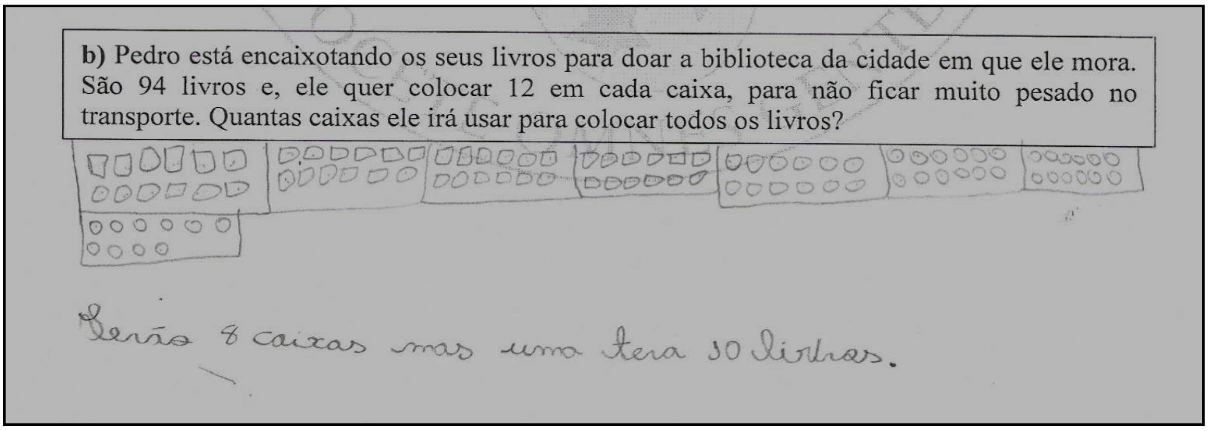
a) Numa excursão da Escola ECO para a feira de tecnologia no Palácio Anchieta, em Vitória - ES foram 46 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o ônibus quebrou perto de São Mateus - ES. Foram disponibilizados 3 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

R= Serão 4 pessoas que teram que usar outro meio de transporte

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Como podemos observar os alunos do GB não demonstraram nenhuma dificuldade ao resolver a questão *b*, Figura 22, onde eles representaram corretamente a quantidade de caixas utilizadas para encaixotar todos os livros de Pedro. Além disso, eles escreveram a resposta do problema por extenso, inclusive, evidenciando os 10 livros restantes que fiariam em uma das caixas.

Figura 22 - Resolução da questão *b* da atividade 2 pelo GB



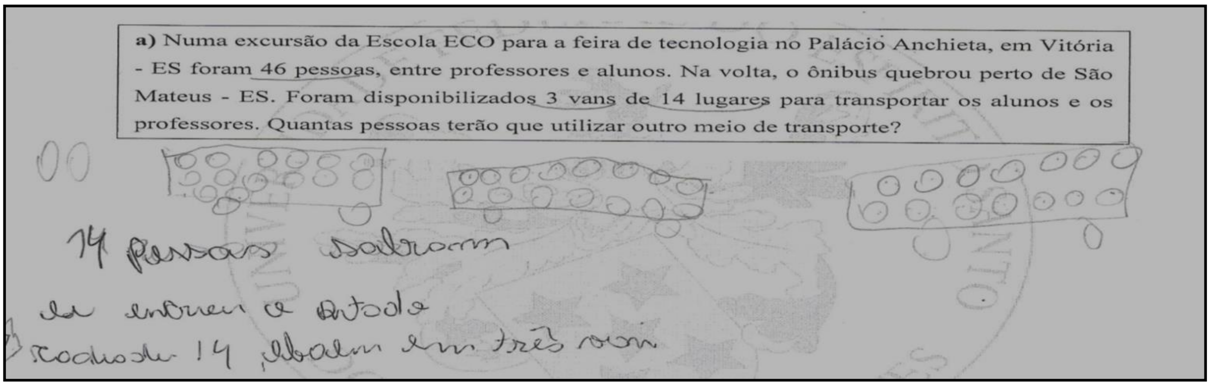
b) Pedro está encaixotando os seus livros para doar a biblioteca da cidade em que ele mora. São 94 livros e, ele quer colocar 12 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

Serão 8 caixas mas uma tera 10 livros.

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Como podemos verificar, o GC ao resolver a questão *a*, Figura 23, demostrou falta de atenção ao registrar a resolução do problema proposto. Observamos que no segundo desenho, da esquerda para a direita, representando uma das 3 vans, foram colocadas 15 bolinhas [pessoas] ao invés de 14 [pessoas]. Além disso, ao escrever por extenso a resposta encontrada, o grupo afirma que *14 pessoas sobram* ao invés de dizer que sobram apenas 4 pessoas, as quais deverão utilizar outro meio de transporte.

Figura 23 - Resolução da questão *a* da atividade 2 pelo GC



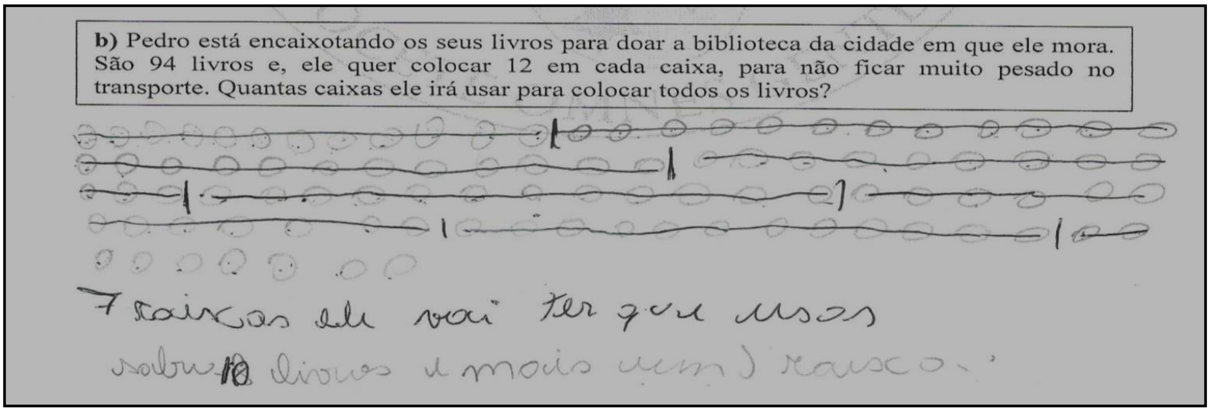
a) Numa excursão da Escola ECO para a feira de tecnologia no Palácio Anchieta, em Vitória - ES foram 46 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o ônibus quebrou perto de São Mateus - ES. Foram disponibilizados 3 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

14 pessoas sobram

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Ao verificar a Figura 24 correspondente à resolução da questão *b*, realizada pelo GC, percebemos novamente que o grupo não estava atento ao resolver as questões *a* e *b* dessa atividade. Como podemos observar, os alunos desse grupo respondem corretamente a quantidade de caixas que serão utilizadas para encaixotar todos os livros de Pedro - 7 caixas com12 livros e mais 1 com 10 livros. Todavia, ao analisar a representação pictórica, vemos que ela não condiz com que o grupo escreve na resposta por extenso, pois na antepenúltima “caixa” foram colocados 13 livros e na última 9 livros. Concluímos que, possivelmente, houve desatenção, ou até mesmo dificuldade ao resolver a questão proposta.

Figura 24 - Resolução da questão *b* da atividade 2 pelo GC



b) Pedro está encaixotando os seus livros para doar a biblioteca da cidade em que ele mora. São 94 livros e, ele quer colocar 12 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

7 caixas ele vai ter que usar

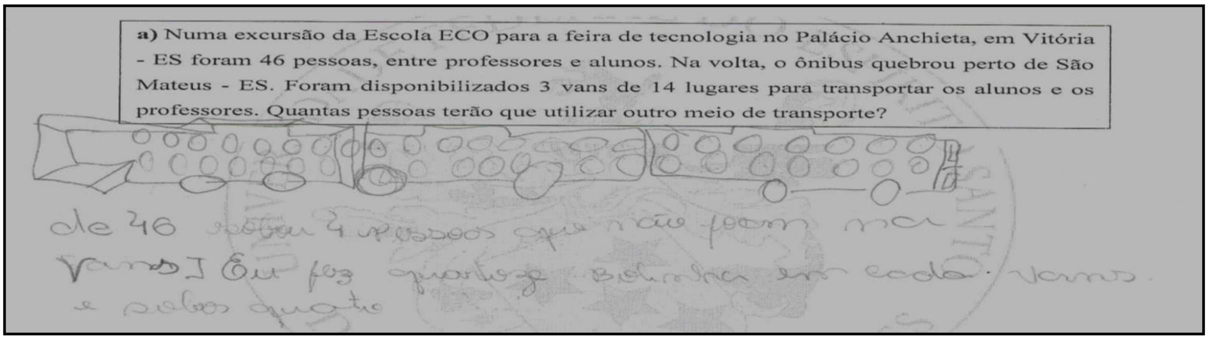
Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 24:

7 caixas ele vai ter que usar; sobra 10 livros, é mais uma caixa.

Ao analisar a resolução da questão *a*, Figura 25, desenvolvida pelo GD, percebemos que esse grupo não teve dificuldade para entender o enunciado do problema e demonstrou segurança e clareza na sua resposta.

Figura 25 - Resolução da questão *a* da atividade 2 pelo GD



Fonte: Folha de respostas dos alunos

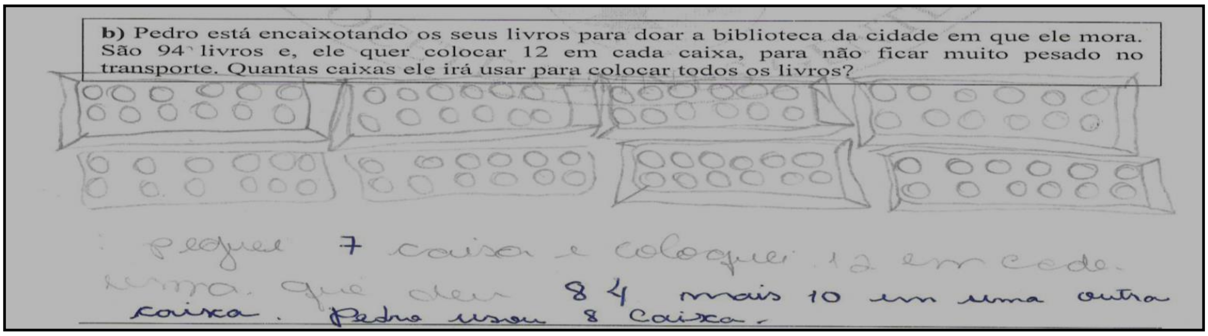
Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 25:

> De 46, sobrou 4 pessoas que não foram nas vans. Eu fiz quatorze bolinhas (pessoas) em cada van e sobrou quatro.

Já para a questão *b*, Figura 26, o GD não teve a mesma atenção; mesmo respondendo corretamente por extenso a questão, ao representar, por meio de um desenho, distribuiu 12 livros em cada uma das 8 caixas. O equívoco está na última caixa, uma vez que sobram 10 livros, como o próprio grupo menciona na sua resposta por extenso.

.

Figura 26 - Resolução da questão *b* da atividade 2 pelo GD



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 26:

> Peguei 7 caixas e coloquei 12 [livros] em cada uma que deu 84 [livros], mais 10 [livros] em uma outra caixa. Pedro usou 8 caixas.

Essa atividade se diferencia da primeira apenas no resto. Nessa, o resto é diferente de 0 (zero); o que pretendíamos com essa atividade era fazer com que os alunos percebessem que nem sempre, dentro do conjunto dos números naturais, a divisão entre dois números será exata, no sentido de ter resto igual a 0 (zero). Entretanto, essa operação pode ser útil em diversas situações (aplicações).

Na formalização desse conteúdo, dissemos para eles que era a mesma coisa que já havíamos feito na atividade 1, então, era só seguir o mesmo raciocínio. Assim, colocamos na lousa a mesma definição da atividade 1.

Definição:

Dados os números N (dividendo) e $d \neq 0$ (divisor diferente de zero), o resultado q (quociente) da divisão de N por d, será o maior número natural q**,** tal que, o produto $q \times d$ não ultrapasse o valor de N**,** e o r (resto) dessa divisão é igual a diferença entre o dividendo N e o produto $q \times d$.

Foi deixada no final desta aula, uma atividade extraclasse, abaixo, composta com duas questões, semelhante aos problemas da atividade 2, para fixação dos conceitos trabalhados. Nossa intenção para a aula seguinte era discutir e corrigir o que haviam feito em casa.

Tarefa extraclasse 2:

Resolver os problemas sem fazer a conta e registrar a maneira de como você chegou ao resultado.

a) Numa excursão da Escola ECO para um dia lazer no parque aquático em São Mateus – ES foram 30 pessoas, entre professores e alunos. Na volta, o Micro-ônibus, que transportava essas pessoas, quebrou perto de Pinheiros - ES. Foram disponibilizados 2 vans de 14 lugares para transportar os alunos e os professores. Quantas pessoas terão que utilizar outro meio de transporte?

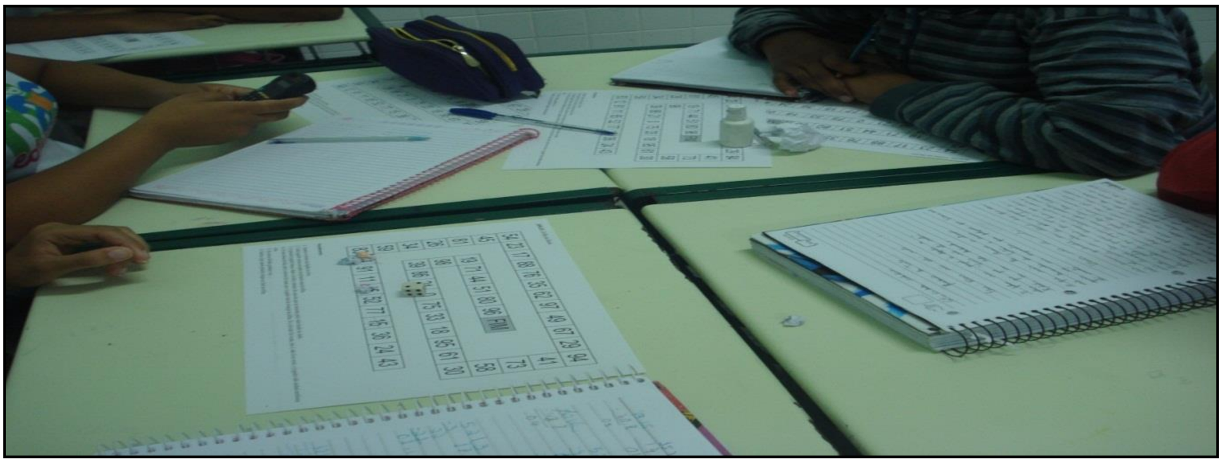
b) Maria está guardando os livros da sua mãe para uma mudança. São 128 livros e, ela quer colocar 13 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ela irá precisar para colocar todos os livros?

Aula 2:

No dia 10/07/15[49] compareceram 20 alunos, exatamente os presentes da aula anterior. Observamos que a maioria dos alunos fez a atividade extraclasse. Ao discutirmos a tarefa proposta pudemos perceber que eles entenderam as questões. Na sequência, com o objetivo de fixar o conceito de divisão, distribuímos folhas impressas com o jogo denominado *A Trilha do Resto* e seus respectivos procedimentos (regras) e também um dado para cada grupo. Nesse momento, junto com o jogo, entregamos a cada grupo uma calculadora comum, no intuito de usarem como apoio para os cálculos mais difíceis. De acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p. 49), "(...) a calculadora será usada como recurso, não para substituir a construção de procedimentos de cálculo pelo aluno, mas para ajudá-lo a compreendê-los".

O contato com as calculadoras foi um instante de alegria para a maioria deles, pois, segundo eles mesmos, nunca tinham usado esse tipo de material nas aulas de matemática.

Figura 27 - Alunos, do GA, manuseando a calculadora durante o jogo: *A Trilha do Resto*



Fonte: Acervo do Pesquisador

Para essa atividade combinamos da seguinte maneira: em cada grupo, para cada partida um aluno manuseava a calculadora enquanto os colegas jogavam; o aluno que chegasse em último lugar na partida, iria substituir aquele que estava com a máquina e assim por diante. Nesse jogo, o ponto de partida para todos é o no número 43 e, logo no começo do jogo, um dos alunos, A17, nos perguntou:

[49]Última aula antes do recesso escolar.

A17: “Tio, eu joguei o dado e saiu na parte de cima um 4; A23 dividiu na calculadora 43 por 4 e deu 10,75, eu não vou para frente nenhuma casa, né?”

Por que não?

A17: “Por que o resto é zero.”

Você tem certeza?

A8: “Nós jogou o dado aqui e deu na parte de cima o 6, aí dividimos o 43 por 6, deu 7.1 e um monte de 6, como nós faz agora?”

Todos os outros colegas ficaram nos olhando e ouvindo a nossa conversa. Entendemos, nesse momento, que eles não sabiam identificar o resto de uma divisão entre dois números naturais, usando uma calculadora. Então, entendemos que seria importante ensiná-los, sem falar diretamente como fazer. Primeiro pedimos para eles dividirem o 43 por 4 sem usar a máquina.

A17: “Eu dividi e achei o quociente igual a 1 e sobra 3, que não dá para dividir mais.”

Você tem certeza que só dá 1 no quociente?

A17: Tenho. Eu peguei o 4 e dividi por 4, deu 1 e 1× 4 é 4; 4 – 4 = 0. Aí baixei o 3; 3 não dá para dividir por 4; aí no quociente só fica 1.”

A20: “Tio, eu resolvi aqui e deu 1 também.”

Qual é o dividendo?

A4: “43.”

E o seu divisor?

A23: “No dado deu 4, acho que é 4.”

A17: “É mesmo, é o 4.”

Muito bom! Vamos imaginar que você tem 43 balas e quer dividir entre 4 amigos, com quantas balas cada um vai ficar?

Enquanto isso, os demais colegas ficaram parados, em silêncio, ouvindo a nossa conversa.

A17: “10 balas e sobra 3.” (Respondeu, depois de certo tempo.)

Nesse caso, o quociente é igual a quanto?

A17: “10.”

Tem certeza?

A17: “Sim.”

Legal! Agora, tenta fazer de novo essa operação, usando a calculadora.

A17: [Ele dividiu 43 por 4 e disse:] “Deu 10,75.”

A8: “Dividi também tio, deu 10,75.”

Então, o que a gente pode fazer com esse resultado?

A17: “Não sei. Acho que tem que dá 10, igual nós achou com as balas, mas tem esse 75 aí.”

O aluno conseguiu associar a quantidade de balas que poderiam receber com o quociente da divisão realizada, mas não conseguia, ainda, entender o que fazer com a parte fracionária 0,75. Então foi preciso, continuar a provocá-lo.

O que você acha de fazermos uma multiplicação?

A17: “Multiplicação? Com quem?”

Pensa um pouquinho. Você disse: “acho que tem que dá 10”.

A17: [Pensou um pouco, pegou a calculadora, fez um cálculo e disse:] “10 × 4 = 40.”

Qual é mesmo o seu dividendo e o seu divisor?

A17: “O dividendo é 43 e o divisor é 4.”

Você já tem noção de qual número será o resto dessa divisão?

A17: “Não sei. Acho que é 3.” (Disse indeciso.)

No cálculo que você fez: 10 × 4 = 40, qual é o divisor? E o quociente?

A23: “Tio, o divisor é o 4, é o número que saiu no dado.” (Respondeu com convicção.)

A17: “E o 10 é o quociente.”

O que poderemos fazer para encontrar o resto, nesse caso?

A18: “Nós pega o 43 e diminui 40 e acha 3, aí acha o resto.”

De onde veio esse 43?

A1: “É o primeiro número do jogo.” (Fazendo referência ao ponto de partida da trilha do resto.)

Você não acha que dá para continuar a dividir?

A17: “Não. O 3 é menor que o 4.” (Parece que estava havendo uma disputa entre eles, um querendo responder primeiro do que o outro.)

Tenta dividir aí na máquina 3 por 4, para a gente ver quanto dá.

A17: [Efetuou o cálculo e disse:] “Dá 0,75.”

Se você somar o 0,75 com 10, vai encontrar qual resultado?

A17: [Efetuou o cálculo e disse:] “Dá 10,75.”

Muito bem! Isso mesmo!

Então, perguntamos ao aluno como fazer para descobrir o resto de uma divisão utilizando a calculadora. Ele respondeu corretamente, dizendo algo do tipo: *divide um número pelo outro e pega o número que está antes do ponto e multiplica com o divisor e depois diminui o maior pelo menor, o resultado é o resto*. Naturalmente, o parabenizamos e continuamos o diálogo com A17.

> **Tenta fazer o de A8. Ele jogou o dado e deu 6 na parte superior.**
> A17: [Agora, sem demorar, efetuou o cálculo e disse:] “O resto é 1.”
> A13: “Então, ele vai andar só uma casa?”
> A17: “Sim.”
> **Explique para os seus colegas como você chegou a esse resultado.**
> A17: “Eu peguei o 43 e dividi por 6, achei 7.1 e um monte de 6 e um 7 no final; peguei o 7, que estava antes do ponto e multipliquei por 6, achei 42; aí, peguei 43 e diminui 42 e deu 1; esse 1 é o resto.”
> **Muito bem! Vocês podem observar que não importa a quantidade de números que estão após o ponto, basta multiplicar o número que está antes desse ponto pelo divisor e calcular a diferença do maior pelo menor para encontrar o resto. Vocês entenderam?**
> Todos responderam que sim.

Continuamos a circular pelos respectivos grupos. Assim, percebemos que todos os alunos estavam envolvidos com o jogo, algo que até então não havia acontecido em nenhuma atividade. Continuamos desta forma até chegar ao final da aula, quando alguns alunos nos pediram para continuar no horário seguinte [aula do próximo professor] porque eles precisavam terminar a atividade. Infelizmente, não foi possível.

Reconhecemos que em algumas de nossas intervenções, nessa atividade, foram levados a obter o resultado sem maior esforço; entretanto, conseguimos atingir o objetivo da atividade que focava o resto de uma divisão entre dois números naturais quaisquer.

Atividade 3[50]: Um jogo de Baralho[51]

[50]Aqui transcrevemos a atividade com algumas modificações no enunciado, que explicitam explicações dadas na aula, visando dar à atividade o caráter de um jogo no qual há algo para ser feito e pode haver ganhadores e perdedores.
[51]Para o desenvolvimento desta atividade nos baseamos em Pereira (2004).

Os objetivos da atividade foram: relacionar uma situação cotidiana com a Matemática; verificar quais estratégias os alunos usariam para resolver as questões do problema; orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver as questões propostas; conceituar múltiplos e divisores de um número.

Em um jogo de baralho podem participar, no mínimo, duas pessoas. Cada participante deve ficar com, no mínimo, uma carta. O jogo consiste em distribuir todas as 54 cartas entre os participantes, igualmente. Ganha o participante que conseguir acertar as seguintes questões: **(a)** Qual é o menor número de jogadores que deve participar desse jogo? E o maior número? **(b)** Será que podem participar desse jogo, 3 jogadores? E 4? E 6? E 15?

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse, foram previstas três aulas, realizadas nos dias 27, 28 e 29 de julho de 2015. Ainda, nesta atividade, devido aos alunos manterem certa desordem em sala de aula, demorarem a se envolver com o problema proposto e não realizarem a tarefa extraclasse, exigindo de nós, pesquisador e professora regente, muitos artifícios para fazê-los se dedicar ao trabalho, naturalmente, perdemos algum tempo; portanto, foi preciso mais uma aula, realizada no dia 30/07/15. Acreditamos que um dos motivos a deixá-los agitados em sala de aula é por estarem retornando à escola após o recesso escolar, o que "quebrou" o ritmo de trabalho que havíamos conseguido na última atividade. Tivemos que retomar as nossas falas do início do trabalho.

A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 3:

Aula 1:

No dia 27/07/15[52] estavam presentes 20 alunos e cada membro dos grupos recebeu uma folha impressa com a atividade *Um jogo de baralho*, constituída por um problema e questões relacionadas, como foi mostrado na página anterior.

Foi dado um tempo para que os alunos lessem e discutissem entre si as questões. De imediato, percebemos que alguns deles, sem ao menos ler o problema, já nos chamavam para ajudá-los, querendo que indicássemos como resolver, ou mesmo dar as respostas prontas. Como nosso objetivo era levá-los a construir seu próprio conhecimento, nós os instigávamos com questões

[52]Primeira aula depois do recesso escolar.

diretivas ao invés de responder suas perguntas, na tentativa de eliminar “dúvidas referentes à notação, à passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática, a conceitos relacionados e a técnicas operatórias” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 45).

Depois da leitura individual e da leitura coletiva, pudemos observar que, enquanto alguns alunos ainda reclamavam não terem entendido o problema, outros faziam divisões do número 54, limitando-os apenas aos divisores 2 e 3.

A princípio, os alunos não se dedicaram à **questão *a***: *Qual é o menor número de jogadores que deve participar desse jogo? E o maior?* Acreditamos que um dos motivos para essa situação é que eles não tinham um número explícito na questão, que servisse de parâmetro para fazer algum cálculo, como havia na **questão *b***. Conforme os PCN (BRASIL, 1998, p. 40), “para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado [...]”. Segundo a professora regente, esses alunos estão acostumados a receber uma determinada questão e, sem ler direito o enunciado, reclamar que não sabem resolver: "uns nem tentam e outros, depois de muita luta, começam a fazer as contas".

Após alguns questionamentos, percebemos ainda que alguns alunos se interessaram em responder antes a **questão *b*** do problema: *Será que podem participar desse jogo 3 jogadores? E 4? E 6? E 15?* Por causa disso e também pela dificuldade que estavam tendo com a **questão *a***, decidimos focar o trabalho na **questão *b*** e deixar a **questão *a*** para a aula seguinte.

Visando a melhorar o entendimento do problema, fizemos alguns outros questionamentos para a turma:

> **De acordo com as regras desse jogo, pode haver apenas um jogador?**
> **De acordo com o problema, quantos participantes podem ter, no mínimo, nesse jogo?**

Para a primeira pergunta, alguns alunos responderam “não”, outros disseram “sim”. Em relação à segunda, alguns alunos não entenderam o significado da palavra “mínimo”. Foi, então, explicado para eles que “mínimo” significa menor, nesse caso, o menor número de participantes desse jogo. Após esse esclarecimento dois dos alunos começaram um diálogo, como descrito a seguir:

> A17: “Professor, podem participar no mínimo 2 jogadores”.
>
> A10: “Não, o menor número é 3 jogadores, está escrito na letra b”.
>
> A17: “Claro que não, você não leu o problema não? Está escrito no problema que podem participar no mínimo dois participantes... como é 3? Na letra *b* está perguntando se pode participar desse jogo 3 jogadores. Mas, o menor é 2”.

Observamos nesse diálogo entre os colegas uma discórdia amigável no que se refere à compreensão da questão. Em relação à aprendizagem de Matemática, Mellin-Olsen (1993) citado por AlrØ e Skovsmose (2010, p. 132), “descreve um diálogo como um método de confrontação e exploração de discordâncias [...] em um ambiente amistoso e cooperativo”.

Nesse instante, alguns alunos, por exemplo, A3, A6, A12, A18 e A24, inclusive A10, concordaram com A17. Então, aproveitando a situação suscitada para a discussão entre os alunos, voltamos a perguntar para toda a sala.

> **Será mesmo que poderá haver 3 jogadores nesse jogo? O que vocês acham? Se puder, quantas cartas cada um receberá? E poderá ter 4 jogadores? E, no máximo, quantos jogadores podem participar desse jogo?**

Após todos ficarem em silêncio por um tempo, A7 perguntou:

> A7:“Tio, se mínimo significa o menor número, então, máximo significa maior número”?
>
> **Nesse caso, menor número de que?**
>
> A7: “Menor número de jogadores do jogo e máximo é o maior número de jogadores do jogo”.
>
> **Muito bem! Agora vamos continuar com a resolução da questão.**

Continuamos a circular pelos grupos, incentivando-os a lerem e resolverem as questões propostas no problema. Enquanto circulávamos os grupos, um dos alunos, o A2, que ainda não tinha feito absolutamente nada além de atrapalhar os colegas de seu grupo, chegou perto de mim e disse:

A2:“Tio, como eu faço essa questão”?

Você já leu o problema?

A2:“Sim”

Leia mais uma vez, pensa direitinho.

A2:“Não quero”.

Leia o problema para você entender o que está pedido no enunciado.

A2:“Eu não vou ler não; eu não sei ler”.

Não! Sabe sim. Eu sei que você sabe ler. Você só vai entender o problema se você ler. Se não entender na primeira leitura, leia de novo; leia em voz alta para eu ouvir a sua voz.

A2:“Eu não vou ler não; é muito chato ficar lendo; eu não sei ler; me diz como eu faço”.

Eu te ajudo. Mas, primeiro você lê o problema para que você entenda a questão.

A2:“Eu não quero não”.

Mas, por que você não quer ler?

A2:“Porque eu não gosto”.

Então vamos ler o problema, juntos?

A2, mais uma vez, recusou-se a ler e voltou para o seu grupo. Nesse caso, provavelmente, o que ele queria era a resposta pronta, sem a menor boa vontade de, pelo menos, tentar ler e fazer o que se pedia no problema. Segundo Allevato e Onuchic (2014), enquanto o aluno resolve o problema, o professor observa-o, incentiva-o a utilizar conhecimentos anteriores, técnicas operatórias já conhecidas e a troca de ideias com os seus pares. Além disso, auxilia nas dificuldades sem, contudo, dar respostas prontas.

Durante o diálogo do pesquisador com esse aluno, a maioria dos outros alunos continuou a fazer os cálculos da **questão *b*** do problema. Quando A2 retornou para seu grupo e os demais continuavam trabalhando, me direcionei a professora regente e perguntei se A2 realmente não sabia ler. A professora, com naturalidade, disse-me: “ele sabe ler sim, esses dias atrás ele leu um texto no livro de matemática, mas não gosta. Ele gosta muito de escorar nos colegas e atrapalhar a turma em todas as aulas”.

Em certo momento, distribuímos um jogo de baralho comum para cada grupo, com o objetivo de auxiliar no entendimento do problema e não para jogar. Mesmo após explicar a utilização proposta do baralho, alguns alunos tiveram como primeira ação jogar, como mostra figura 28 abaixo. Eu e a professora regente intervimos para contornar a situação.

Figura 28 - Alunos do GC, jogando com as cartas do baralho

Fonte: Acervo do Pesquisador

Os nossos diálogos com os alunos e o manuseio do material concreto colaboraram para organizar, nos alunos, as ideias do problema e parece que eles começaram a ter melhor discernimento, haja vista o que alguns disseram, por exemplo:

> A3: "Professor, eu distribui as cartas do baralho entre nós dois [A3 e A5] e não sobrou nenhuma carta, então pode ter dois jogadores nesse jogo".
> A9: "Tio eu fiz assim, primeiro eu contei as cartas do baralho e tinha 54 cartas com os curingas, aí eu distribui as cartas em 3 montes e não sobrou nenhuma, depois A10 contou cada monte e tinha 18, então tá certo, o jogo pode ter 3 jogadores".
> A17: "Professor, com o baralho nós entendeu melhor quando sobra carta, quando eu distribui as cartas do baralho entre nós 4 do grupo, cada um ficou com 13 cartas e ainda sobrou duas cartas e não dá para dividi mais".
> A28: "Tio, nós fez assim, pegamos as cartas do baralho e dividimos em 15 montinhos, só que sobra 9 cartas e não dá mais para colocar 1 em cada montinho, e agora? Fica faltando 6 cartas. Acho que no jogo não pode ter 15 jogadores".
> **Ótimo! Vocês são inteligentes e capazes! Vamos lá, continuem resolvendo,**
> **vocês conseguem.**

Figura 29 - Alunos do GE trabalhando na atividade 3, com apoio no baralho

Fonte: Acervo do Pesquisador

Observamos que alguns alunos ainda esperavam pelos resultados de outros colegas. Outros prestavam atenção às conversas de alunos de grupos ao lado, com a nítida intenção de obter informações sobre o que estavam falando e fazendo, para poder usar essas dicas na resolução do seu problema. Além disso, muitas vezes foi preciso pedir atenção e continuar a incentivá-los para que o trabalho fosse feito em grupo, um ajudando o outro, pois muitos alunos estavam fazendo individualmente. Inicialmente, em alguns casos, parecia haver certa disputa entre os componentes dos grupos e, na maioria das vezes, era preciso intervir nos conflitos. Mesmo que eu e a professora regente estivéssemos falando sempre sobre o trabalho colaborativo, ainda não haviam interiorizado essa prática.

A aula do 27/07/15 chegou ao seu final e, como combinado no inicio dos nossos trabalhos, recolhemos todo o material disponibilizado na aula.

<u>Aula 2:</u>

No dia 28/07/15 estavam presentes 18 alunos dos que vieram na aula passada e não compareceu nenhum outro aluno que esteve ausente no dia 27/07/15. Nesse dia a aula foi mais tranquila, no sentido de organização da turma, de modo que não perdemos muito tempo como nas aulas anteriores.

Devolvemos o material recolhido na aula anterior e também entregamos a cada grupo uma calculadora comum, no intuito de terem mais uma ferramenta para auxiliá-los nos cálculos que, eventualmente, seriam mais difíceis.

Assim, retomamos a atividade, relembrando alguns pontos da aula anterior, principalmente, a **questão *a*** do problema, pois a tínhamos deixado de lado. Desta forma, ao responderem essa questão, a maioria dos alunos, face aos nossos questionamentos, disse que o menor número de pessoas era 2 (como exposto no enunciado do problema) e, como cada jogador deve ficar com no mínimo 1 carta, que o maior número de participantes nesse jogo era 54.

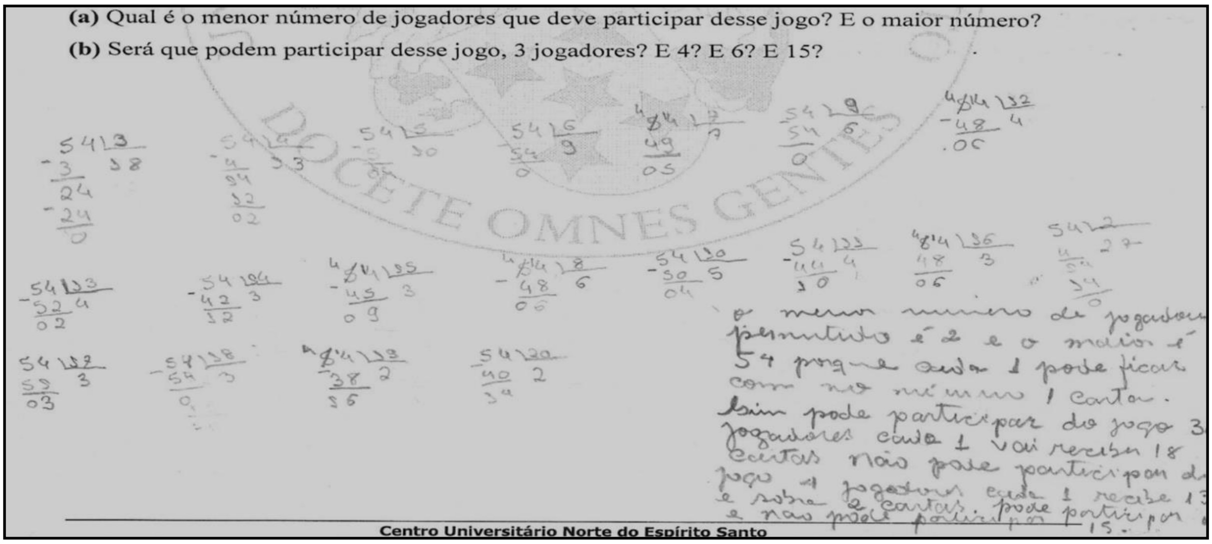
Para que eles chegassem a essa conclusão foi preciso, primeiro, acalmá-los e convencê-los a lerem o texto do problema; depois, pedimos para que discutissem entre si nos grupos e realizamos vários questionamentos visando a levá-los a interpretar o enunciado e se disporem a resolver, sem que disséssemos o que deveriam fazer. Julgamos que, de início, eles não haviam notado bem as informações contidas no texto da questão, por falta de atenção à leitura do problema.

Tendo como objetivo, no final da atividade, chegar ao conceito de divisores de um número natural, no caso, o número 54, perguntamos:

> **Será que existem outros possíveis números de participantes desse jogo, diferentes dos que foram pedidos no enunciado desse problema?**

Já mais familiarizados com o problema proposto, a maioria deles respondeu que sim e já haviam feito alguns cálculos, utilizando uma sequência de números, na tentativa de chegar ao resultado do problema, como mostrado na Figura 30 (referente à resolução do GD, o qual traz os cálculos e a resposta redigida para o problema, que transcreveremos e analisaremos abaixo da Figura 30) e a Figura 31 (referente ao GB, cujo registro se resume apenas aos cálculos para a questão *b, considerando parte da sequência de 2 a 54*).

Figura 30 - Resolução do problema *um jogo de baralho* por alunos do GD



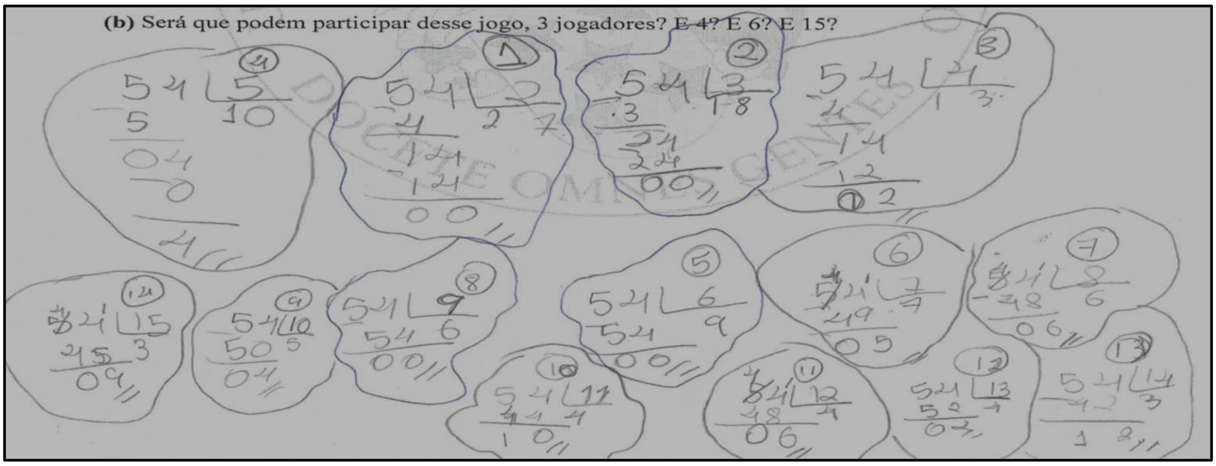
Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 30:

> O menor número de jogadores permitido é 2 e o maior é 54 porque cada 1 pode ficar com no mínimo 1 carta; sim, pode participar do jogo 3 jogadores e cada 1 vai receber 18 cartas; não pode participar do jogo 4 jogadores, cada um recebe 13 [cartas] e sobra 2 cartas; pode participar 6 [jogadores] e não pode participar 15 [jogadores].

Como podemos observar o GD efetuou divisões utilizando a sequência de números de 2 a 20 (alguns cálculos utilizando o processo longo, outros não); a partir desses cálculos, o grupo respondeu a questão *b* do problema (onde estavam explícitos os valores que necessitavam de resposta), corretamente. Para responder a questão *a* precisaria dar sequência nas divisões até o número 54, encontrando assim todos os divisores desse número, o que não aconteceu na resolução do GD. No entanto, o grupo conseguiu chegar à solução dos problemas, demonstrando entendimento no enunciado da atividade.

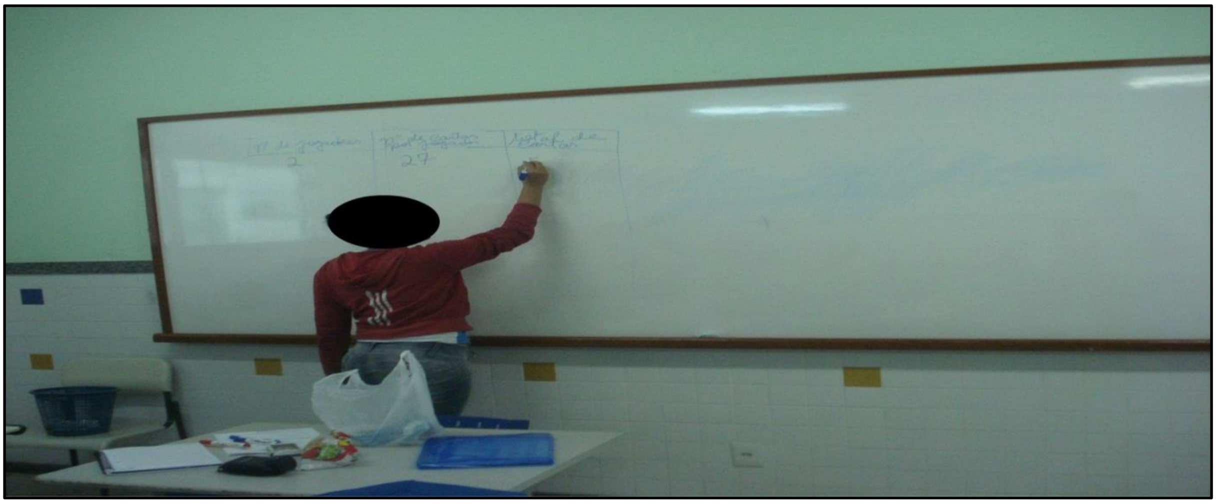
Figura 31 - Resolução da questão *b* do problema *um jogo de baralho* por alunos do GB



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Na sequência da atividade, pedimos que eles organizassem os dados do problema em um quadro (número de jogadores, número de cartas por jogador e número total de cartas, incluindo a possibilidade de haver apenas um jogador). Ficaram meio perdidos, sem saber como construir esse quadro. Assim, fomos à lousa e fizemos a primeira linha do quadro para que eles pudessem dar sequência. A aluna A2, nos pediu para deixá-la ir à lousa completar o quadro. Acatamos o seu pedido, autorizando-a ir à lousa, como mostra na figura 32.

Figura 32 - Aluna A2, na lousa, resolvendo o problema: *um jogo de baralho*



Fonte: Acervo do Pesquisador

Desta forma, com a colaboração de alguns colegas, ela preencheu toda a tabela. Após nossa intervenção para inserir algumas linhas e ordená-las segundo o número de jogadores, a tabela ficou conforme reproduzimos no Quadro 9:

Quadro 9 - Organização dos dados do problema: *um jogo de baralho*

Nº de jogadores	Nº de cartas por jogador	Total de cartas
1	54	54
2	27	54
3	18	54
6	9	54
9	6	54
18	3	54
27	2	54
54	1	54

Fonte: Diário de Campo do Pesquisador

Perguntamos à turma se havia alguma relação entre as colunas *número de jogadores* e *número de cartas por jogador.* Alguns deles, depois alguns instantes, responderam que os mesmos números apareciam nas duas colunas, mas em ordem contrária e, após mais algum tempo, disseram que o número de jogadores multiplicado pelo número de cartas por jogador dava sempre 54.

Continuando com as discussões em torno desse problema, o aluno A22 disse:

> A22: "Tio, está faltando o número 8 nessa tabela, eu dividi o 54 por 8 na calculadora e deu certo, não tem um monte de números depois da vírgula; dá 6,75, não vai sobrar carta".

Ainda surgiu dúvida na frase **distribuir igualmente**, em que o aluno afirmou que as 54 cartas poderiam ser distribuídas igualmente para 8 jogadores e não sobrava cartas e, os outros colegas ficaram calados. O problema pedia para **distribuir todas as 54 cartas entre os participantes, igualmente**. Explicamos que isso significava dizer que dividir todas as 54 cartas igualmente entre os 8 participantes, por exemplo, não poderiam sobrar nenhuma carta, o resultado **6,75** é a mesma coisa que **6 + 0,75 (6 mais 0,75)**, ou seja, cada jogador vai receber 6 cartas e ainda sobram algumas cartas, por isso que o 8 não é divisor de 54. Para ser divisor, é necessário que a divisão seja exata, como já havíamos estudado nas primeiras aulas sobre divisão. A22 voltou a questionar:

> A22: "Por que algumas cartas? 0,75 é menor que 1, então não sobra nenhuma carta inteira".

Percebemos que esse aluno possuía certo conhecimento sobre os números decimais, mas ainda não dominava o que representava na situação o 0,75, em quantidade de cartas. Mesmo não se aplicando a divisão com resto diferente de zero ao problema proposto, resolvemos levar adiante os questionamentos sobre esse assunto. Assim, perguntamos para A22:

> **Você pode nos dizer o que representa o 6 na resposta 6,75, que você encontrou?**
> "O 6 significa a quantidade de cartas que cada um jogador vai receber, mas ainda tem o 0,75". (respondeu, após ficar um tempo calado)
> **Será que podemos efetuar uma multiplicação utilizando esses números que você mencionou [6 e 8]?**

Nesse momento, outros alunos, como, por exemplo, (A1, A3, A10, A12, A14) começaram a interagir conosco, todos respondendo "sim", quase que ao mesmo tempo. Então perguntamos para A10:

> **Qual é o resultado?**
> A10: "Dá 48".
> **O que significa o cálculo que você acabou de fazer, encontrando como resultado o 48?**
> A10: "Uai, eu peguei 6 cartas de baralho e multipliquei pela quantidade de participantes do jogo e encontrei 48 cartas". (Ele respondeu mostrando certa segurança, depois de pensar um pouco.)
> **Mas, qual é a quantidade de cartas que esse baralho possui e que poderão ser distribuídas igualmente entre os participantes desse jogo?**
> A10: "Tio, tem 54 cartas". (Disse rapidamente e quase gritando, para que ouvíssemos bem que teria sido ele.)
> **Muito bem! Mas, nesse caso, será que só podemos efetuar uma multiplicação entre 6 e 8?**
> A17: "Tio, podemos também, multiplicar 8 por 0,75 que dá 6, eu acabei de fazer a conta aqui".
> **Legal! Muito bem!**

Esse aluno nos mostrou que, enquanto os seus colegas estava dialogando conosco e ele permanecia calado, estava, na verdade, pensando em outras situações do problema. Então, direcionando-nos ao A22, perguntamos sobre a relação entre os valores encontrados:

> A22: "Podemos somar 48 com 6 que dá 54".
> **O que significa esse 6 nessa operação?**
> A22: "Esse 6 é o número de cartas que sobrou da divisão de 54 por 8".
> **A22, voltando um pouco ao inicio da questão, você nos disse que *"0,75 é menor que 1, então não sobra nenhuma carta inteira".* Você ainda acha que nesse caso, o 0,75 significa dizer que não sobra nenhuma carta inteira?**
> A6: "Tio, por que você pergunta tanto se você já sabe a resposta? A gente quer que você dá a resposta e, não nós te dá." (Ela disse isso depois de ficar pensativa por algum tempo.)
> **Realmente, essa resposta já temos, mas estamos mostrando caminhos para que você também chegue nela, e temos certeza que você é capaz e vai conseguir chegar na resposta.**

Entendemos que a angústia de A6 é causada pelo simples fato de que ela e seus colegas não estão acostumados com esse tipo trabalho, que a partir de um problema, o aluno constrói o seu conhecimento, tendo o professor como orientador, incentivador, mediador, consultor, organizador e não um transmissor de conhecimento (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Após o descontentamento de A6, A22 disse:

> A22: "Não tio, deixa ela, ela está com preguiça de pensar mas eu não, eu quero responder a questão".

Após esse aluno discordar da colega e demonstrar certo entendimento da dinâmica de trabalho, pensou mais um pouco e respondeu a questão, mostrando conhecimento matemático, da seguinte forma:

> A22: "Tio, eu não pensei direito, só olhei o 0,75 e disse que era menor do que 1, se eu tenho zero na unidade, esse número é menor do 1. Se eu tivesse pegado o 0,75 e multiplicado pelo 8, tinha encontrado 6 que é o resto da divisão. Nós já tinha feito isso na atividade 1 e 2, mas tinha esquecido".

> **Muito bem! Mas, nesse caso, o 8 é divisor de 54?**
> A22: “Não”.
> **Por quê?**
> A22: “Porque dividindo 54 por 8, dá 6 cartas para cada um e ainda sobra 6 cartas e não dá para dá 1 outra carta para cada um dos 8 jogadores”.
> **Vocês concordam com a resposta de A22?** (Perguntamos para a turma.)

Uns ficaram calados, só copiando que o que A22 falava e a maioria respondeu que sim, concordando com o colega. Demos os parabéns para A22 pelo seu empenho e dedicação e incentivamos os demais para a construção de seu próprio conhecimento, pois todos são capazes. Quando acabamos de falar, já no final da aula, A20 disse:

> A20: “Na próxima aula, eu vou ficar no grupo de A22, esse ‘cara’ é muito inteligente”.

<u>Aula 3:</u>

No dia 29/07/15 compareceram, além dos 18 da aula anterior, A7 e A18 que estavam no dia 27/07/15 e o A11 que esteve somente na primeira atividade (08/07/15), totalizando 21 alunos. Após realizar toda preparação para iniciar como nas aulas anteriores, voltamos à atividade e pedimos para os alunos irem à lousa e colocarem as suas soluções, como mostra a Figura 33 abaixo:

Figura 33 - Alunos na lousa, socializando as respostas obtidas na atividade 3

Fonte: Acervo do Pesquisador

Em seguida, sintetizamos os resultados numa tabela, reproduzida abaixo no Quadro 10, e discutimos os resultados obtidos; oportunamente, dissemos que os números das duas primeiras colunas do quadro eram chamados de **fatores** ou **divisores** de 54 e que 54 era dito **múltiplo de** ou **divisível por** seus fatores.

Quadro 10 - Distribuição do total de cartas do baralho entre participantes

Total de Cartas	Número de Cartas × Número de Participantes
54	1 × 54
54	2 × 27
54	3 × 18
54	6 × 9
54	9 × 6
54	18 × 3
54	27 × 2
54	54 × 1

Fonte: Diário de campo do Pesquisador

Então, escrevemos na lousa algo do tipo: *1 é divisor de 54 e 54 é múltiplo de 1, ou 54 é divisível por 1; 2 é divisor de 54 e 54 é múltiplo de 2, ou 54 é divisível por 2; ...; 54 é divisor de 54 e 54 é múltiplo de 54, ou 54 é divisível por 54.*

Os significados das palavras: **divisor**, **múltiplo, divisível**, foram construídos conjuntamente por nós e pelos alunos. Dissemos ainda, reforçando a ideia, que **divisor** indica quem faz a ação, ou seja, é quem divide, enquanto **divisível** indica quem sofre a ação. Em síntese vale a seguinte relação:

Se um número é ***múltiplo*** *de outro, então este outro é* ***divisor*** *ou* ***fator*** *daquele número. Por exemplo, 54 é múltiplo de 2 e 2 é divisor ou fator de 54.*

Falamos ainda que um dado número natural, diferente de zero, ele possui uma infinidade de múltiplos, bastando apenas efetuar multiplicações desse número por todos os outros elementos do conjunto dos números naturais para obtermos todos os seus múltiplos; entretanto, ele possui um número finito de divisores, sendo o menor deles o número 1 e o maior deles o próprio número.

Mostrando isso, ainda, da seguinte forma:

$$\boxed{54 \div 6 = 9}$$

54 → Divisível por 6 ou Múltiplo de 6

54 → Divisível por 9 ou Múltiplo de 9

e,

6 → Divisor de 54 ou Fator de 54

9 → Divisor de 54 ou Fator de 54

Finalmente, formalizamos os conceitos de divisor e múltiplo de um número natural:

<u>Definições</u>

Um número é divisível por outro quando a sua divisão (euclidiana) por esse número é exata, ou seja, possui resto igual a zero. Se um número é **divisível** por outro número, dizemos que ele é **múltiplo** desse outro número, o qual também é seu **divisor**.

Foi colocado para eles, como observação, que em todo o estudo com divisibilidade, os números 0 (zero) e 1 realizam funções importantes, enquanto o 0 (zero) é múltiplo de qualquer número, o 1 é divisor de qualquer número.

Souza e Pataro (2012, p. 102), no primeiro livro da coleção **Vontade de Saber Matemática**, afrmam que “quando uma divisão de números naturais é exata, temos que o dividendo é múltiplo do divisor e múltiplo do quociente”. Por exemplo, 54 é divisível por 6 pois $54 = 9\times6$ (o resto é zero); isto é, ao distribuirmos igualmente todas as 54 cartas do baralho entre 6 jogadores, cada um receberá 9 (quociente) e não sobram cartas no jogo (resto zero). Outro exemplo, 54 não é divisível por 8 pois $54 = 6\times8 + 6$ (o resto não é zero); ou seja, ao distribuirmos igualmente as 54 cartas entre 8 jogadores, cada um receberá no máximo 6 cartas e sobrarão no mínimo 6.

Os mesmos exemplos usando a calculadora, 54÷6 = 9,0 (o resto é zero); 54÷8 = 6,75 (o resto não é zero, devido à parte fracionária).

Foi deixado, ainda nessa aula, uma tarefa de fixação dos conceitos trabalhados como atividade extraclasse, semelhante à da atividade 3 (vide páginas 142 - 143). Para essa atividade tivemos como objetivo rever o que havia sido discutido nas aulas. Nossa intenção para a aula seguinte era somente verificar e corrigir o que haviam feito em casa.

Tarefa extraclasse 3[53]:

Em um jogo de baralho podem participar, no mínimo, dois participantes. Cada participante deve ficar com, no mínimo, uma carta. O jogo consiste em distribuir igualmente todas as 48 cartas entre os participantes. Ganha o participante que acertar as seguintes questões: **(a)** Qual é o menor número de jogadores que deve participar desse jogo? E o maior número? **(b)** Será que podem participar desse jogo, 3 jogadores? E 4? E 6? E 15? **(c)** Quando os jogadores recebem mais cartas? E em quais eles recebem menos cartas?

Aula 4:

No dia 30/07/15 compareceram todos que vieram na aula anterior, exceto A11. Ou seja, nessa aula estavam presentes 20 alunos. Após observarmos que a grande maioria deles não tinha feito a atividade extraclasse, os deixamos resolver o problema. Como eles já tinham resolvido algo bem parecido na aula anterior, seguiram os passos então utilizados e não tiveram maiores dificuldades na resolução. Mesmo assim, alguns ainda ficavam dispersos, sempre na espera do colega terminar para copiar. Como sempre, nós sempre estávamos incentivando-os, orientando-os e pedindo para redigirem as suas respostas por extenso.

[53]Aqui transcrevemos a atividade com algumas modificações no enunciado, que explicitam explicações dadas na aula, visando dar à atividade o caráter de um jogo no qual há algo para ser feito e pode haver ganhadores e perdedores.

Com o auxílio de uma calculadora, que distribuímos no inicio dessa aula, e, por meio de nossas intervenções, vários deles fizeram as divisões do número 48 pela sequência de números 1, 2, 3, 4, 5,..., 48, a partir do que puderam ver em quais casos a divisão era exata. Dessa forma, constataram e elencaram todos os divisores de 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 e 48.

Observação: No dia 07 de agosto de 2015 aplicamos a primeira avaliação (apêndice E) baseada em conteúdos estudados nas atividades de 1 a 6 e mais de 80% dos 24 alunos que fizeram a atividade avaliativa conseguiram nota entre 3 e 4 pontos, sendo 4 o valor máximo (apêndice F). Ou seja, o resultado da maioria foi acima da média[54]. Essas avaliações ficaram de posse da professora regente e as notas foram registradas em sua pauta de classe. Consideramos esse resultado importante e positivo, embora na pesquisa tenhamos avaliado os alunos somente em aspectos qualitativos.

Atividade 7: Crivo de Eratóstenes[55]

Os objetivos da atividade foram: Permitir ao aluno a descoberta de certos padrões dos múltiplos de um número, como, por exemplo, os múltiplos de 2 são todos pares e que esses múltiplos podem ser conhecidos, contando de 2 em 2; permitir ao aluno a descoberta de conexões que existem entre os múltiplos de 6 e os múltiplos de 2 e de 3; permitir ao aluno a descoberta de que os números que não serão marcados no quadro possuem somente dois divisores; permitir ao aluno a descoberta de que só existe um número par que é primo; determinar critérios de divisibilidade; construir o conceito de números primos e compostos.

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse, foram previstas cinco aulas, realizadas nos dias 10, 11, 12, 13 e 14 de agosto de 2015. Nesta atividade, os alunos se enrolaram um pouco ao usarem os lápis coloridos, uma vez que nela pedia-se para pintar com cores diferentes os múltiplos de 2 maiores que 2, os múltiplos de 3 maiores que 3, e assim sucessivamente; a partir do momento em que essas cores começaram a coincidir no mesmo número, eles sentiram dificuldades para dar continuidade; parece que a atividade tornou-se cansativa e eles se dispersaram, exigindo de nós, pesquisador e professora regente, algumas intervenções.

[54]A média das escolas públicas da rede estadual é 60%.
[55]Para o desenvolvimento desta atividade nos baseamos em Pereira (2004).

Então, perdemos algum tempo. Portanto, foram necessárias mais duas aulas para alcançarmos todos os objetivos da atividade, realizadas nos dias 20/08/15 e 21/08/15.

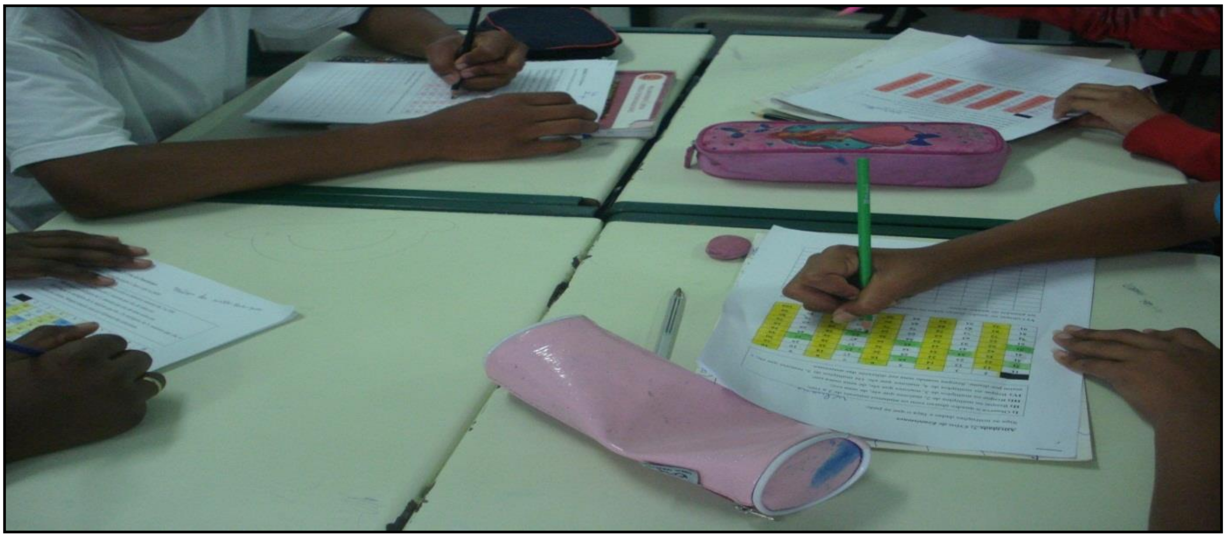
A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 7:

Aula 1

Na primeira aula (10/08/15) estavam presentes 20 alunos e, então, formamos 4 grupos com 5 componentes cada um; cada um membro dos grupos recebeu uma folha impressa com a atividade *Crivo de Eratóstenes*, (vide p.105-106) e, também, distribuímos para cada grupo uma caixa de lápis coloridos para auxiliá-los no desenvolvimento da atividade.

Foi dado um tempo para que os alunos lessem e discutissem livremente a proposta de trabalho desta aula. Ao passarmos pelos grupos observamos que eles estavam desenvolvendo bem a atividade, como, por exemplo, mostra a figura 34 abaixo.

Figura 34 - Alunos trabalhando com os lápis coloridos na atividade: *Crivo de Eratóstenes*



Fonte: Acervo do Pesquisador

Porém, quando as cores começaram a se sobrepor aos números da folha de atividade, os alunos ficaram confusos e começaram a se dispersar; intervimos algumas vezes e, em uma delas, pedimos para eles que, à medida que fossem pintando, anotassem em uma folha a parte os múltiplos de cada um desses números. Assim, fomos até o final dessa aula e recolhemos o material da atividade.

Aula 2

Na segunda aula (11/08/15) estavam presentes 20 alunos, todos os que vieram na aula anterior e, então, permanecemos com os mesmos grupos e devolvemos para eles o material que havia sido recolhido, para dar continuidade ao trabalho iniciado. Voltamos a explicá-los a atividade e estimulá-los a focar no trabalho, pois eles já tinham conhecimento a respeito de múltiplos de um número; com isso, eles pararam de reclamar e desenvolveram melhor a atividade.

O aluno A17 percebeu que à medida que ia fazendo a atividade, precisaria pintar apenas até os múltiplos de 50, pois os múltiplos de 51 seriam maiores que 100 e, nos chamou para contar essa descoberta. Passado mais algum tempo, A22 também nos disse que "o número 9 e todos os seus múltiplos já estavam pintados". Ao falar isso, ele, de certa forma, estimulou os seus colegas que estavam atrasados e dispersos a continuarem trabalhando. Esperamos e incentivamos todos a terminarem a tarefa proposta, para que pudéssemos começar a nossa plenária; entretanto, ela só aconteceu na aula seguinte.

Aula 3

Na terceira aula (12/08/15) compareceram 25 alunos; os dividimos em 5 grupos e pedimos para eles observarem em seus materiais que havíamos acabado de devolvê-los, os múltiplos de cada um dos números dados. A partir desse momento, fizemos alguns questionamentos, do tipo:

> **O que vocês descobriram? Quais são as características que podemos perceber, por exemplo, nos múltiplos de 2 maiores que ele?**
> A22: "Os múltiplos de 2, são números pares." (Disse rapidamente.)
> A9: "É sempre de dois em dois, né?"
> A22: "É"
> **E, os múltiplos de 3?**
> A1: "Os múltiplos de 3 é ímpar?"
> A17: "Claro que não, o 6 é par e é múltiplo de 3." (Retrucou, corrigindo A1, com convicção.)
> A1: "Mas é de três em três." (Indícios de que entendeu que os múltiplos de 3, podem ser pares ou ímpares.)
> A17: "Sim." (Concordou com A1.)

A7: “Professor, quando eu fui pintar os múltiplos de 4, já estava todos pintados de verde.

O que significa o que A7 acabou de falar? (Perguntamos para a turma.)

A22: “Tio, no meu, pintei todos de azul e todos são múltiplos de 2.” (Disse, depois de certo tempo.)

Será que todos os múltiplos de 4, são múltiplos de 2? (Perguntamos à turma.)

“Sim.” (Responderam)

Confirmamos a eles que todos os múltiplos de 4 também são múltiplos de 2. Em certo momento, um aluno do grupo A, A4, nos disse:

A4: “tio, nos múltiplos de 6, aconteceu a mesma coisa; quando eu fui pintar, já estava tudo pintado.”

Com a mesma cor?

A4: “Não. Diferentes.”

E, o que significa isso?

A4: “Não sei.”

Pensa um pouquinho. Dá uma olhada no quadro novamente [e os deixamos discutindo entre eles, por um tempo].

A22: [Depois da discussão com os colegas de seu grupo disse:] “Os que está todos de uma cor é os múltiplos de 2.”

A17: “A outra cor é os múltiplos de 3.” (Complementou.)

A turma concordou com eles.

Então, o que podemos afirmar com essa descoberta?

A22: “Eu acho que a cor dos múltiplos de 6 tem que passar pelos múltiplos de 2 e de 3, igual ao dos múltiplos de 4, tem que passar pelos de 2.” (Indícios de que entendeu a questão.)

O que você quer dizer com isso?

A22: “Não tem os múltiplos de 2 todos de uma cor? E, os múltiplos de 3 todos de outra cor?”

Sim.

A22: “Então, a cor dos múltiplos de 6, passa por cima da cor dos múltiplos de 2 e da cor dos múltiplos de 3.”

Percebemos que alguns ficaram meio confusos com a resposta de A22, então, resolvemos instigá-lo mais um pouco e perguntamos:

> **Quais são os múltiplos de 6?**
> 0, 6, 12, 18, 24, 30,... (Responderam e anotamos na lousa.)
> **E, os múltiplos de 2?**
> 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30,... (Responderam e anotamos na lousa.)
> **E, os de múltiplos de 3?**
> 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30,... (Responderam e anotamos na lousa.)

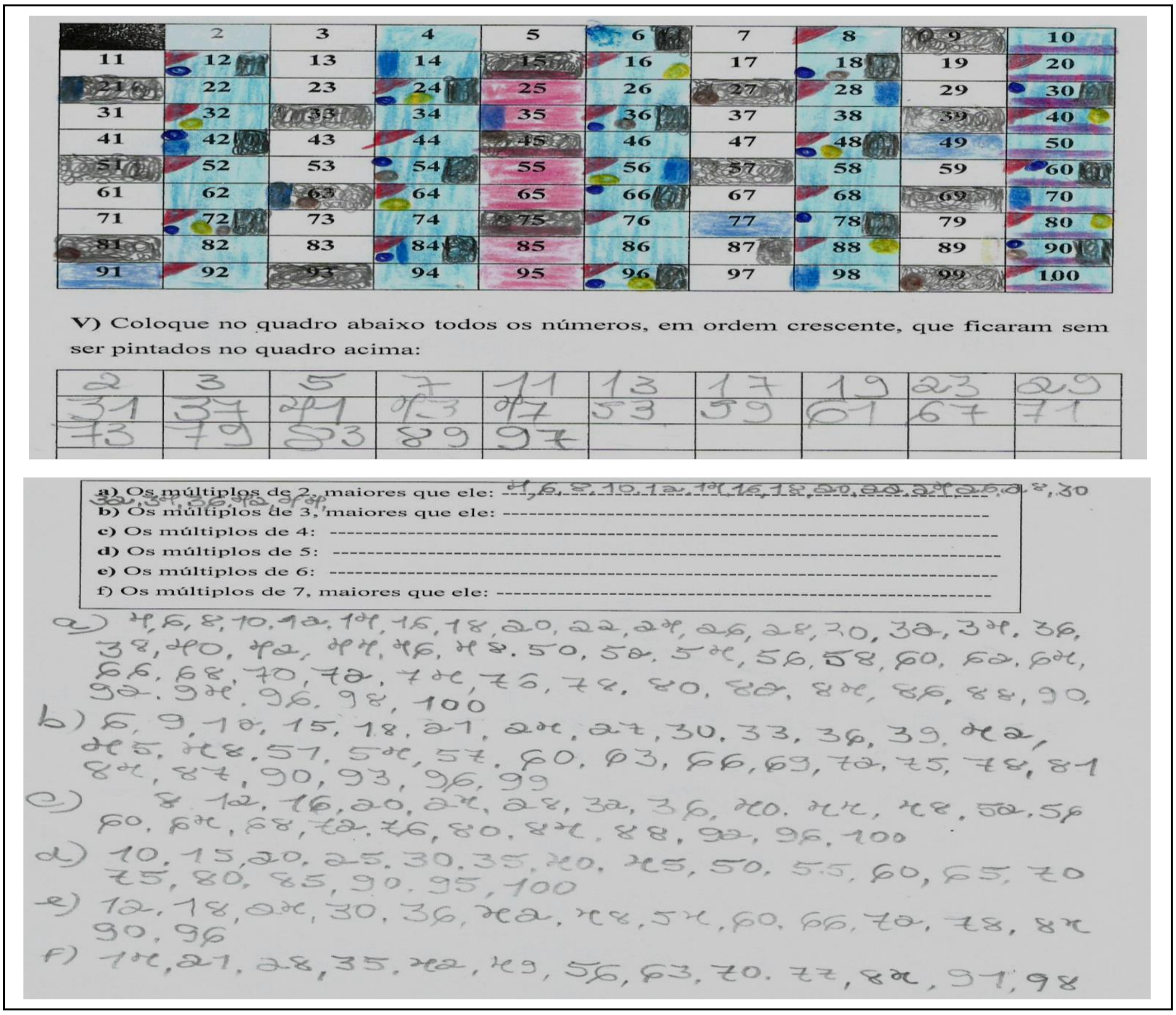
Observamos no excerto acima que os alunos incluem o zero como múltiplo de um número, mesmo que esse número não aparece no quadro do crivo. Isso acontece porque eles já haviam construído esse conhecimento, em atividades anteriores.

> **Vocês percebem que a sequência dos múltiplos de 6 aparece na sequência dos múltiplos de 2 e na sequência dos múltiplos de 3?**
> "Sim." (Responderam.)
> **E, o que mais podemos afirmar?**
> "São números pares." (Respondeu a maioria, depois de certo tempo.)

A partir daí, concluímos que para ser múltiplo de 6 é preciso ser múltiplo de 2 e múltiplo de 3 ao mesmo tempo. Por exemplo, vejamos a resolução do GC, Figura 35.

Ao verificar a Figura 35 correspondente à resolução da atividade 7, realizada pelo GC, percebemos que o grupo conseguiu descobri e escrever, corretamente, quais são os números que não foram pintados no quadro do crivo [*2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97*]. Mas, ao resolver as questões [c, d, e] dessa atividade, possivelmente, não estavam atentos ao que se pediam no enunciado, pois para essas questões eram para indicar os múltiplos de 4, os múltiplos de 5 e os múltiplos de 6, respectivamente. Eles elencaram os múltiplos desses números, maiores do que eles. Por exemplo, na questão *c* [os múltiplos de 4], eles deram como resposta: [8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100] ao invés de [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100]. Concluímos que, exceto os equívocos nas três questões indicadas acima, os alunos conseguiram entender e desenvolver bem a atividade proposta, como podemos observar na Figura 35 abaixo.

Figura 35 - Resolução do problema 7, *Crivo de Eratóstenes*, por alunos do GC



	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

V) Coloque no quadro abaixo todos os números, em ordem crescente, que ficaram sem ser pintados no quadro acima:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97					

a) Os múltiplos de 2, maiores que ele:
b) Os múltiplos de 3, maiores que ele:
c) Os múltiplos de 4:
d) Os múltiplos de 5:
e) Os múltiplos de 6:
f) Os múltiplos de 7, maiores que ele:

a) 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100
b) 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99
c) 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100
d) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100
e) 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96
f) 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98

Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição da resposta de cada questão (item vi) desenvolvida pelos alunos, na Figura 35:

a) 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100.

b) 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99.

c) 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100.

d) 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100.

e) 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96.

f) 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98.

Os demais grupos desenvolveram a atividade proposta, semelhante à resolução do grupo C.

<u>Aula 4</u>

Na quarta aula (13/08/15) compareceram 20 alunos. Devolvemos os materiais da aula anterior e os dividimos em grupos; pedimos para eles continuarem com seus materiais que havíamos acabado de devolvê-los, pois iríamos trabalhar algumas regras, chamadas de critérios de divisibilidades, que facilitaria decidir se um número é divisível por outro, sem ter que fazer muitos cálculos; esse era o nosso objetivo para essa aula.

Critérios de Divisibilidade

Dizemos que um número *b* é divisível por um número *a* quando *b* é múltiplo de *a*. Isso equivale a dizer que o resto da divisão euclidiana de *b* por *a* é igual a zero. No entanto, existem regras para saber se um número é divisível por outro sem precisar efetuar a divisão. Essas regras são chamadas de *critérios de divisibilidade*. Salientamos que não tivemos a preocupação de demonstrar esses critérios por entendermos que, nessa etapa da vida estudantil dos alunos, isso seria incompreensível para eles. Mas, se o leitor tiver interesse na demonstração de cada critério, encontra-se em Reis (2009).

Critério de divisibilidade por 2

Chamamos a atenção dos alunos para a atividade, *Crivo de Eratóstenes*, desenvolvida por eles, em que ficou evidente [para eles] que todos os múltiplos de 2 são números pares.

Destacamos que, para os alunos, a definição de número par é *ter o algarismo das unidades igual a 0, 2, 4, 6, ou 8*. Pelo critério de divisibilidade por 2 que acabamos de mostrar que essa definição é equivalente à usual; considerando-a, não é uma tautologia o que escrevemos na lousa: *Quem garante que um número é ou não divisível por dois é o algarismo da unidade:*

- se ele for par, o número todo o será e, portanto, será um número múltiplo de dois;
- se ele for ímpar, o número todo o será e, portanto, não será um número múltiplo de dois.

Exemplos:

- ✓ 456748 divisível por 2, pois é um número par.
- ✓ 456743 não é divisível por 2, pois não é um número par.

Critério de divisibilidade por 3

Pedimos para os alunos voltarem à atividade, *Crivo de Eratóstenes* e observarem no quadro que os múltiplos de três seguem um padrão de três em três e nem sempre são números ímpares, como disse A17: "Claro que não, o 6 é par e é múltiplo de 3.", refutando a indagação de A1: "Os múltiplos de 3 é ímpar?". A partir daí, falamos para eles que os múltiplos de três podem ser pares ou ímpares e que existe uma regra para verificar se um número é ou não divisível por 3 sem efetuar a divisão.

Antes de enunciarmos a regra perguntamos para eles se o número 1314 é divisível por 3 e a primeira reação deles foi realizar a divisão. Como a operação deu exata, puderam garantir que esse número era divisível por 3. Pedimos, na sequencia, para somarem os algarismos que compunham esse número; ao fazerem 1 + 3 + 1 + 4 encontraram 9 como resposta; assim, ao perguntarmos quanto é 9 dividido por 3, obtemos como resposta, 3 e resto zero.

Pedimos, ainda, para eles pegarem outro número no quadro da atividade e fizessem o mesmo procedimento. Um dos alunos pegou o número 19 e ao resolver a divisão por 3, encontrou 6 no quociente e 1 como resto. Ao somar os algarismos desse número (1 + 9), encontrou 10, que não é múltiplo de 3. Perceberam, com a nossa ajuda, que o resto da divisão de um número por três é o mesmo que o resto da divisão da soma dos algarismos do número estipulado por três. Desta forma, escrevemos na lousa a regra: **um número natural é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3**.

Critério de divisibilidade por 4

Com os alunos, na tentativa de descobrir quando um número é múltiplo de quatro, durante o desenvolvimento da tarefa, um aluno, observando o quadro da atividade nos disse que quando foi pintar os múltiplos de quatro, já estavam todos pintados; concluímos naquele momento que todos os números divisíveis por quatro, também são divisíveis por dois.

Mostramos para eles que, $100 = 4 \times 25$, então todo número terminado em dois zeros é múltiplo de 4 e de 25 e que se o número não terminar em dois zeros pode ser escrito da seguinte forma:

$$2316 = 2300 + 16 = m(4) + 16$$

e como 16 é múltiplo de quatro, o número todo é também. Ainda escrevemos na lousa:

Examine o número 19312 e a sua decomposição:

$$19\,312 = \underbrace{10\,000}_{\substack{\text{múltiplo} \\ \text{de 4}}} + \underbrace{9\,000}_{\substack{\text{múltiplo} \\ \text{de 4}}} + \underbrace{300}_{\substack{\text{múltiplo} \\ \text{de 4}}} + \underbrace{10 + 2}_{\substack{\text{basta verificar} \\ \text{se esta soma} \\ \text{é múltiplo de 4}}}$$

Dessa forma, podemos afirmar que: **um número natural é divisível por 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos é divisível por 4.**

Outros exemplos foram dados:

- ✓ 267724 é divisível por 4, pois 24 é múltiplo de 4.
- ✓ 16460 é divisível por 4, pois 60 é múltiplo de 4.
- ✓ 4400 é divisível por 4, pois 00 é múltiplo de 4.
- ✓ 17218 não é divisível por 4, pois 18 não é múltiplo de 4.

Critério de divisibilidade por 5

Com os alunos, voltamos o quadro da atividade 7, em relação aos múltiplos de 5 e eles perceberam que haviam sido pintados todos os números da coluna do 5, menos ele e todos da coluna do 10. Assim, chamamos a atenção deles e escrevemos na lousa a seguinte situação:

10 = 2 × 5 e todo número terminado em zero é múltiplo de 2 e de 5, mas nem sempre um número é múltiplo de 2 e múltiplo de 5 e vice versa. O que nos garante se um número é múltiplo de 5 é o algarismo da unidade:

- se for igual a zero ou 5, o número será um múltiplo de 5.
- se for diferente de zero ou 5, o número não será um múltiplo de 5.

Desta forma, podemos afirmar que **um número natural é divisível por 5 quando termina em zero ou 5.**

Exemplos:

- ✓ 395 é divisível por 5, pois termina em 5
- ✓ 42390 é divisível por 5, pois termina em 0 (zero)
- ✓ 254 não é divisível por 5, pois não termina em 0 (zero) ou 5

Essa aula chegou ao seu final e procedemos da mesma forma em que as aulas anteriores.

Aula 5

Na quinta aula (14/08/15) compareceram 21 alunos. Devolvemos os materiais da aula anterior e os dividimos em grupos. Assim, continuamos com o estudo sobre critérios de divisibilidades.

Critério de divisibilidade por 6

Os alunos, ao trabalharem no desenvolvimento da atividade 7, perceberam, ao buscarem os múltiplos de 6 que esses já estavam todos pintados e com duas cores diferentes: todos são múltiplos de 2 e de 3 simultaneamente. Voltando a essa atividade, pedimos para eles observarem, novamente, os múltiplos de 6; a maioria deles, além de confirmar as suas descobertas, agora, com mais conhecimento, disseram que para descobrir se um número é múltiplo de 6, é preciso fazer a soma dos valores absolutos dos algarismos desse número, pois ele é, também, múltiplo de três. Colocamos na lousa os seguintes exemplos: “Verifique se os números 246 e 4 712 são múltiplo de 6”. Antes mesmo de terminar de colocar o exemplo na lousa, alguns já nos perguntavam se era para fazer a divisão. Dissemos que eles fizessem da maneira que entendessem melhor. Em seguida, A22, utilizando do conhecimento adquirido, disse:

> A22: “Professor, 246 é par, é múltiplo de 2 e somando 2 + 4 + 6 dá 12; 12 é múltiplo de 3, então esse número é múltiplo de 6.”
> A9: “É mesmo, é múltiplo de 2 e múltiplo de 3, é múltiplo de 6.”
> **Muito bem!**
> **Vocês entenderam o que os colegas disseram?** (Perguntamos para a turma.)
> “Sim.”
> **Legal!**
> **Alguém fez a divisão?**

A minoria dos alunos havia feito a operação, mas os que fizeram encontraram quociente 41 e resto zero.

> **E, o número 4 712 é múltiplo de 6?**
> A22: “Ele é múltiplo de 2, é par.”
> A11: “Mas, não múltiplo de 3; eu somei 4 + 7 + 1 + 2 deu 14; 14 não é múltiplo de 3.” (Complementou.)
> **Então, o que vocês acham?**
> A11: “Não é múltiplo de 6; não é múltiplo de 3.”
> A22: “Não é múltiplo de 6, porque tem que ser múltiplo de 2 e de 3; ele só é múltiplo de 2.”
> **Muito bem! Isso mesmo!**
> **Todos entenderam o que os colegas disseram a respeito dos múltiplos de 6?**
> Todos responderam que sim.

Desta forma, escrevemos na lousa a seguinte regra: **um número natural é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3 ao mesmo tempo.**

Critério de divisibilidade por 7

Regra[56]**:** Um número é divisível por 7 se o dobro do último algarismo, subtraído do número sem o último algarismo, resultar um número divisível por 7. Se o número obtido ainda for grande, repete-se o processo até que se possa verificar a divisibilidade por 7.

Exemplos: Verifique se os números 33523, 182 e 398898 são múltiplos de 7.

✓ 33523

$3352 - 2 \times 3 = 3352 - 6 = 3346$

$334 - 2 \times 6 = 334 - 6 = 322$

$32 - 2 \times 2 = 32 - 4 = 28.$

Como 28 é múltiplo de 7, então 33523 é divisível por 7.

✓ 182

$18 - 2 \times 2 = 18 - 4 = 14$

Como 14 é múltiplo de 7, então 182 é divisível por 7.

✓ 398898

$39889 - 2 \times 8 = 39669 - 16 = 39873$

$3987 - 2 \times 3 = 3987 - 6 = 3981$

$398 - 2 \times 1 = 398 - 2 = 396$

$39 - 2 \times 6 = 39 - 6 = 27.$

Como 27 não é múltiplo de 7, então 398898 não é divisível por 7.

Observando o quadro da atividade 7, os alunos não visualizaram uma particularidade que os levassem a construir uma regra para a divisibilidade por 7. À vista disso, falamos para eles que há regras criadas para visualizar quando um número é divisível por 7 mas, por serem mais difíceis, é preferível que se faça a divisão habitual.

Critério de divisibilidade por 8

Os alunos, observando o quadro da atividade 7, perceberam que todos os múltiplos de 8 estavam pintados, com cores diferentes. Falamos e anotamos na lousa que $1000 = 8 \times 125$ e desta forma, quando todo número é terminado em três zeros é um múltiplo de 8.

[56]Disponível em Reis (2009).

Consideramos, como exemplo, o número 367384 e fizemos:

367384 = 367 000 + 384 = m (8) + 384

e calculando 384 : 8, por meio de uma divisão habitual,

$$\begin{array}{r|l} 384 & 8 \\ \cline{2-2} 64 & 48 \\ 0 & \end{array}$$

constatamos que 384 é múltiplo de 8, pois é uma divisão exata.

Ainda, colocamos na lousa a decomposição desse número.

$$367384 = \underbrace{300\,000}_{\substack{\text{múltiplo}\\ \text{de 8}}} + \underbrace{60\,000}_{\substack{\text{múltiplo}\\ \text{de 8}}} + \underbrace{7\,000}_{\substack{\text{múltiplo}\\ \text{de 8}}} + \underbrace{300 + 80 + 4}_{\substack{\text{basta verificar}\\ \text{se esta soma}\\ \text{é múltiplo de 8}}}$$

Assim, 367384 é múltiplo de 8, pois o número formado pelos 3 últimos algarismos constitui um um múltiplo de 8, ou, ainda, a soma de múltiplos de 8 é múltiplo de 8. Então, escrevemos a seguinte regra: **um número é múltiplo de 8 quando é terminado em três zeros, ou quando os três últimos algarismos do certo número representa um múltiplo de 8**.

Critério de divisibilidade por 9

Chamamos a atenção dos alunos que, para a divisibilidade por 9, a regra estipulada para os múltiplos de 3 é semelhante para os múltiplos de 9. Então, escrevemos na lousa a regra: **um número natural é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é divisível por 9.**

Como exemplo, colocamos na lousa os números 37512 e 984:

- ✓ 37512 é divisível por 9, porque a soma: 3 + 7 + 5 + 1 + 2 = 18, e 18 é divisível por 9.
- ✓ 984 não é divisível por 9, porque a soma: 9 + 8 + 4 = 21, e 21 não é divisível por 9.

Critério de divisibilidade por 10

Os alunos, observando o quadro da atividade 7, perceberam que todos os números da coluna do 10 estavam pintados. Então, chamamos a atenção para o que já havíamos falado anteriormente: *todo número terminado em zero é múltiplo de 2 e de 5 e que 10 = 2 × 5*, assim, dissemos para eles e anotamos na lousa a regra: **um número natural é divisível por 10 quando termina em zero.**

Como exemplo, colocamos na lousa: verifique se os números 63420 e 45765 são múltiplos de 10.

- ✓ 63420 é múltiplo de 10, pois termina em 0 (zero).
- ✓ 45765 não é múltiplo de 10, pois não termina em 0 (zero).

Ainda nessa aula, foi deixada a atividade extraclasse, abaixo, com o objetivo de fixar as regras ora encontradas.

Tarefa Extraclasse 5

Dados os números 12678, 272, 2345, 3815, 2016, 660, 8300, 246, 57402, 37512.					
Indique quais são divisíveis por:					
2:	3:	5:	6:	9:	10:

Aula 6

No dia 20/08/15[57], estavam presentes 20 alunos e dividimos a turma em 4 grupos com 5 componentes cada um. Na sequencia, foi retomada a atividade 7, *Crivo de Eratóstenes*, com o objetivo de fazer com que o aluno pudesse perceber que os números que ficaram sem ser pintados, no quadro, possuíam apenas dois divisores e, posteriormente, construir os conceitos de número primo e número composto.

Nesse reencontro com a turma, perguntamos a respeito da atividade deixada na aula anterior e percebemos que a maioria havia feito. Assim, fizemos uma breve revisão sobre divisores e

[57]O motivo pelo qual retornamos nesta data, se deu por causa da viagem do pesquisador à UNESP, Rio Claro, em visita ao GTERP.

múltiplos de um ou mais números e, em seguida, pedimos para eles voltarem à atividade *Crivo de Eratóstenes* para desenvolvermos o que havíamos planejado e tínhamos como objetivos. Esse trabalho parece ter sido mais tranquilo para os alunos, pois eles já tinham conhecimento para encontrar os divisores de um número. Assim, fizemos alguns questionamentos, do tipo:

> **Vocês, ao pintarem os números no quadro, ficou algum sem ser pintado?**
> A turma respondeu que sim.
> **Qual é o primeiro número que não foi pintado?**
> A turma respondeu que era o número 2.
> **Que tipo de número é o 2?**
> "É um número par." (Respondeu a maioria deles.)
> **Ficou mais algum número par sem ser pintado?**
> "Não." (Respondeu a turma.)
> **Quais são os divisores de 2?** (Perguntamos para a turma.)
> A14: "Eu acho que é 1 e 2; $2 = 1 \times 2$ e não pode mais."
> A17: "Só tem dois divisores mesmo." (Concordou com A14.)
> **O que vocês acham, os colegas estão certos ou o 2 tem mais divisores?**
> A turma concordou com os colegas.
> A17: "Professor, então o 3, o 5, o 7 só tem dois divisores, né? é a mesma coisa do 2."
> **O que você acha?**
> A17: "Eu acho que sim; $3 = 1 \times 3$ e $3 \times 1 = 3$; $5 = 1 \times 5$ e $5 \times 1 = 5$; $7 = 1 \times 7$ e $7 \times 1 = 7$; só tem dois divisores."
> **O que vocês acham da resposta de A17?** (Perguntamos para a turma.)
> A turma, depois de certo tempo, concordou com o colega.
> A8: "Tio, esses números que ele [A17] falou não são múltiplos de nenhum número, né? Eles não estão pintados."
> **Por quê?**
> A8: "Eles não estão pintados."
> **Vamos pensar juntos. Por exemplo, o seu colega [A17] disse que $3 = 1 \times 3$ e $3 \times 1 = 3$. O que você acha disso?**
> A8: "Eu acho que $3 \times 1 = 3$; ele tá certo."
> **Mas, só podemos fazer isso?**
> A22: "Professor, eu sei."

> **Pode falar. Ajude a sua colega.**
>
> A22: "Se dividir 3 por 1 dá 3 e se dividir 3 por 3 dá 1. Então, o 3 é múltiplo de 1 e de 3.
>
> **Quais são os divisores de 3?**
>
> A22: "1 e 3."
>
> **Muito bem! Isso mesmo.**

E, assim, falamos para todos: se 1 e 3 são divisores de 3 então, o 3 é múltiplo de 1 e de 3; múltiplos e divisores andam sempre juntos. Esse mesmo trabalho foi desenvolvido com outros números que não haviam sido pintados e os alunos perceberam que todos os números não pintados tinham somente dois divisores. Para nossa surpresa, um aluno do grupo C, A22, nos perguntou:

> A22: "Professor, existe números maior que 100 só com dois divisores?"
>
> **Sim. Por exemplo, o 101 e 103 só tem dois divisores. São infinitos números que possuem apenas dois divisores.**
>
> A22: "Ah, tá! Aqui [na folha de atividade] só tem até 97, achei que não tinha mais."

Não foi possível continuarmos com as discussões, pois chegou ao final dessa aula.

Aula 7

No dia 21/08/15, estavam presentes 19 alunos, todos os presentes da aula anterior, então mantivemos os mesmos grupos. Voltamos à atividade, recapitulamos algumas coisas que discutimos na aula anterior e continuamos a construção do conceito de números primos e números compostos.

Dissemos para eles que o motivo que deixamos alguns números sem pintar foi para diferenciar os que têm apenas dois divisores (o 1 e ele mesmo) dos que tem mais de dois divisores. Os números que não foram pintados são chamados números primos e os outros são chamados números compostos. Assim, estabelecemos o conceito de números primos e escrevemos na lousa a seguinte definição: **Número Primo é todo número natural maior do que 1 e que tem apenas dois divisores: o 1 e ele mesmo.**

Exemplos:

- ✓ 2 é primo, pois ele possui apenas dois divisores: 1 e 2.
- ✓ 5 é primo, pois ele possui apenas dois divisores: 1 e 5.
- ✓ 6 não é primo, pois ele possui mais de dois divisores: 1, 2, 3 e 6.

Observamos e escrevemos, ainda, que o número 1 não é primo, porque ele possui apenas um divisor que é ele mesmo ($1 \times 1 = 1$; $1 : 1 = 1$) e o 2 é o único número par que é primo. Os números que possuem mais de dois divisores são chamados **números compostos**. Por exemplo, o número 6 possui 4 divisores: 1, 2, 3 e 6.

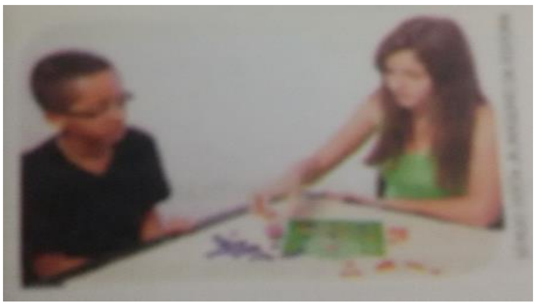
Conforme Dante (2012, p.136), em seu livro referente ao 6º ano, da coleção **Projeto Teláris**: matemática, "a palavra primo vem do latim *primus*, que significa 'primeiro'. A partir dos números primos é que formamos os números maiores do que 1 que não são primos".

Atividade 8: *Um Jogo de Fichas*

Máximo Divisor Comum (M. D. C.) de dois ou mais números

Os objetivos desta atividade foram: incentivar os alunos a utilizarem conceitos aprendidos anteriormente para resolver outros problemas; verificar quais estratégias eles usariam para resolver os problemas; orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolver os problemas propostos; construir o conceito de divisores comuns de dois ou mais números.

Em um jogo de duas ou mais pessoas, há 24 fichas vermelhas e 40 fichas azuis para serem distribuídas igualmente entre os participantes. Nenhuma ficha pode sobrar.



a) Esse jogo pode ser jogado por 3 participantes? E por 4? E por 5?
b) Qual é o número máximo de pessoas que podem participar desse jogo?

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse, foram previstas duas aulas, realizadas nos dias 08 e 09 de setembro de 2015. Nesta atividade, não tivemos maiores problemas na organização dos grupos e nem no trabalho colaborativo, entretanto, precisamos continuar a incentivá-los e instigá-los com alguns questionamentos na resolução das questões da atividade, mediante dúvidas surgidas. Em relação à tarefa extraclasse, a maioria resolveu em casa. Para o desenvolvimento da atividade, precisamos de mais uma aula que foi realizada no dia 10/09/15.

A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 8:

Aula 1:

No dia 08/09/15, estavam presentes 20 alunos. Foi entregue para cada membro dos respectivos grupos a atividade e dado um tempo para que eles pudessem fazer as leituras e se familiarizassem com o problema. Assim que fizeram a leitura, um dos alunos, acostumado em receber os materiais de apoio às atividades, nos perguntou se nós íamos dar as fichinhas coloridas. Respondemos que para essa atividade não havíamos preparado esse material, mas a falta do material não dificultava a resolução do problema.

Esperávamos que os alunos, após terem adquirido conhecimento para calcular todos os divisores de um número, a primeira ação deles fossem utilizar o dispositivo prático para fatoração completa e, assim, encontrar o número de pessoas participantes desse jogo. Mas, surgiram dúvidas e outros questionamentos foram feitos, por exemplo:

> A9: “Professor, é para fazer divisões de todos os números, igual a gente fez no problema do baralho?” (Disse, lembrando da atividade 3, um jogo de baralho.)
> **Será que o problema é semelhante?**
> A9: “Acho que é, porque os dois fala de jogo.”
> **Mas nem sempre quando fala de jogo em problemas, quer dizer que eles são resolvidos do mesmo jeito. Existem meios mais fáceis para resolver os problemas.**
> A2: “Tio, se eu quiser fazer as contas, eu posso né?”
> A17: “Nós estudou como calcular todos os divisores de um número, usando aquele traço vertical e usando as regras para dividir os números. Nós pode

> fazer daquele jeito também, né?" (Nos perguntou depois de certo tempo; ele demonstrou indícios de que quis mencionar o dispositivo prático para fatoração completa e dos critérios de divisibilidade.)
>
> **Sim. Mas, se vocês quiserem fazer todas as divisões podem. Como A17 falou, já sabemos de outros caminhos, menos trabalhosos, para resolver esse tipo de problema.**
>
> A9: "Ah tio, agora sei. É para usar daquele jeito que nós aprendeu, faz um traço vertical e vai calculando os divisores de um número; esse é mais fácil mesmo." (Os colegas concordaram com ele, que esse processo é bem mais tranquilo para encontrar os divisores.)

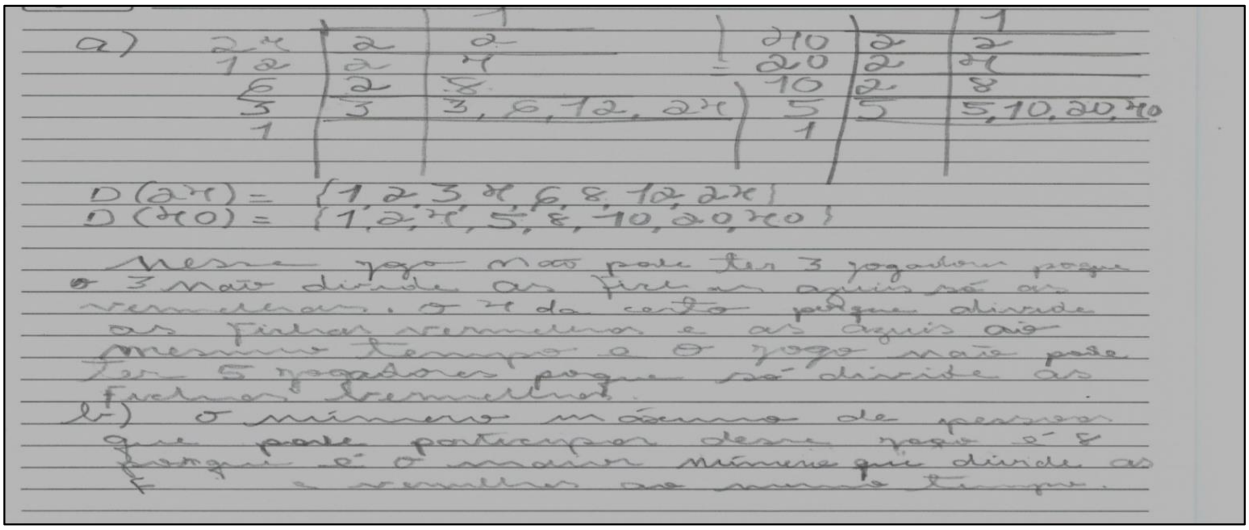
A partir desse momento, eles começaram a resolver o problema, mas não foi possível dar continuidade nessa aula, pois ela chegou ao fim.

<u>Aula 2:</u>

No dia 09/09/15, estavam presentes 18 alunos. Devolvemos o material recolhido na aula anterior e retomamos a atividade 8 proposta. Apesar de ter falado que poderiam fazer todas as divisões pelo processo usual, os alunos optaram pelo dispositivo prático para divisões sucessivas, como, por exemplo, mostram as Figuras 36 e 37. Ao percorremos pelos grupos, intervindo, orientando-os e insistindo para que eles redigissem as suas respostas por extenso, observamos que eles estavam desenvolvendo a atividade com facilidade, uns ajudando os outros.

Os componentes do GB e GC, Figuras 36 e 37, respectivamente, resolveram as questões *a* e *b* do problema dado da seguinte maneira: Para a questão *a*, eles utilizaram o dispositivo prático para fatoração completa em fatores primos e calcularam todos os divisores de 24 [fichas vermelhas] e ordenaram em ordem crescente; fizeram a mesma coisa para todos os divisores de 40 [fichas azuis]. Observamos que os grupos não tiveram dificuldade no desenvolvimento da atividade. Eles demonstraram segurança e clareza na resolução e no registro do caminho percorrido. Os outros grupos resolveram de modo similar, sem maiores dificuldades.

Figura 36 - Resolução da atividade 8 pelo GB

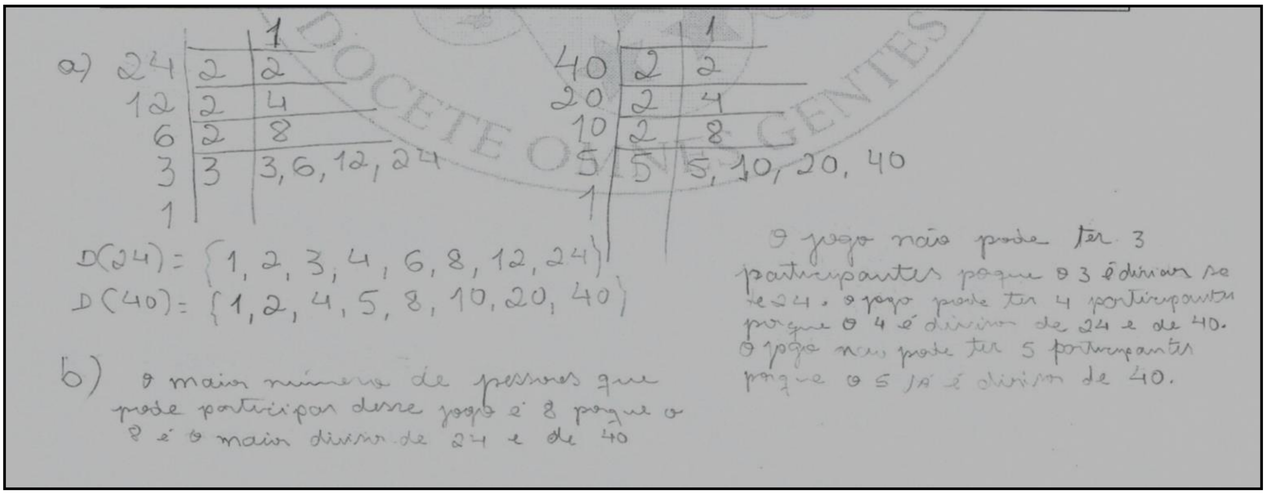


Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 36:

> a) D(24)= {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}; D(40)={1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}
> Nesse jogo não pode ter 3 jogadores, porque o 3 não divide as fichas azuis, só as vermelhas. O 4 dá certo porque divide as fichas vermelhas e as azuis ao mesmo tempo e o jogo não pode ter 5 jogadores porque só divide as fichas vermelhas.
> b) O número máximo de pessoas que pode participar desse jogo é 8 porque é o maior número que divide as fichas azuis e vermelhas ao mesmo tempo.

Figura 37 - Resolução da atividade 8 pelo GC



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 37:

> a) D(24)= {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}; D(40)={1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}
> O jogo não pode ter 3 participantes porque o 3 é divisor só de 24 e o jogo pode ter 4 participantes porque o 4 é divisor de 24 e de 40. O jogo não pode ter 5 participantes porque o 5 só é divisor de 40.

Durante a plenária, aproveitamos o que já estava escrito na lousa,
D (24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
D (40) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40}

e perguntamos quais eram os divisores comuns (DC) entre 24 e 40. Como resposta, obtivemos: 1, 2, 4, 8.

Então, escrevemos: DC = {1, 2, 4, 8} e chamamos a atenção dos alunos para o fato de que 24 [fichas vermelhas] e 40 [fichas azuis] são múltiplos de [ou divisíveis por] 1, 2, 4 e 8 simultaneamente e, nesse caso, o número máximo de participantes desse jogo é 8, pois é o maior divisor comum entre 24 e 40, assim, temos:

m.d.c. (24, 40) = 8.

Ainda falamos que não poderia haver 3 participantes no jogo porque as 40 fichas azuis não poderiam ser distribuídas igualmente entre eles e nem 5 participantes pelo fato de que as 24 fichas vermelhas também não poderiam ser distribuídas igualmente entre as 5 pessoas. Desta forma, concluímos a atividade dizendo que, para achar os divisores comuns de dois ou mais números, usando o dispositivo prático para a determinação de todos os divisores desses números é necessário está claro que um número é chamado divisor comum de dois ou mais números, quando ele for divisor de todos ao mesmo tempo.

Mostramos ainda na lousa, outra maneira de calcular o m.d.c. de dois ou mais números, adaptando-o o dispositivo prático e o chamando de **processo simplificado**:

24, 40	**2 Divide ambos os números.**
12, 20	**2 Divide ambos os números.**
6, 10	**2 Divide ambos os números.**
3, 5	3 Divide somente o número 3.
1, 5	5 Divide somente o número 5.
1, 1	O quociente 1 de todos números indica o final do processo.

O m.d.c. é dado pelo produto dos fatores primos que divide ambos os números. Assim:

m.d.c. (24, 40) = 2 × 2 × 2 = 8

Desta forma, formalizamos o processo de encontrar o m.d.c. de dois ou mais números e, colocamos na lousa algo do tipo:

Definição 1: O **máximo divisor comum (m.d.c.)** de dois ou mais números naturais, não nulos, é o maior número que é divisor de todos esses números.

Definição 2: Quando dois ou mais números naturais apresentam o máximo divisor comum igual a 1, esses números são chamados números primos entre si.

Deixamos uma atividade extraclasse, abaixo, com o objetivo de fixar conceitos construídos a respeito de m.d.c.

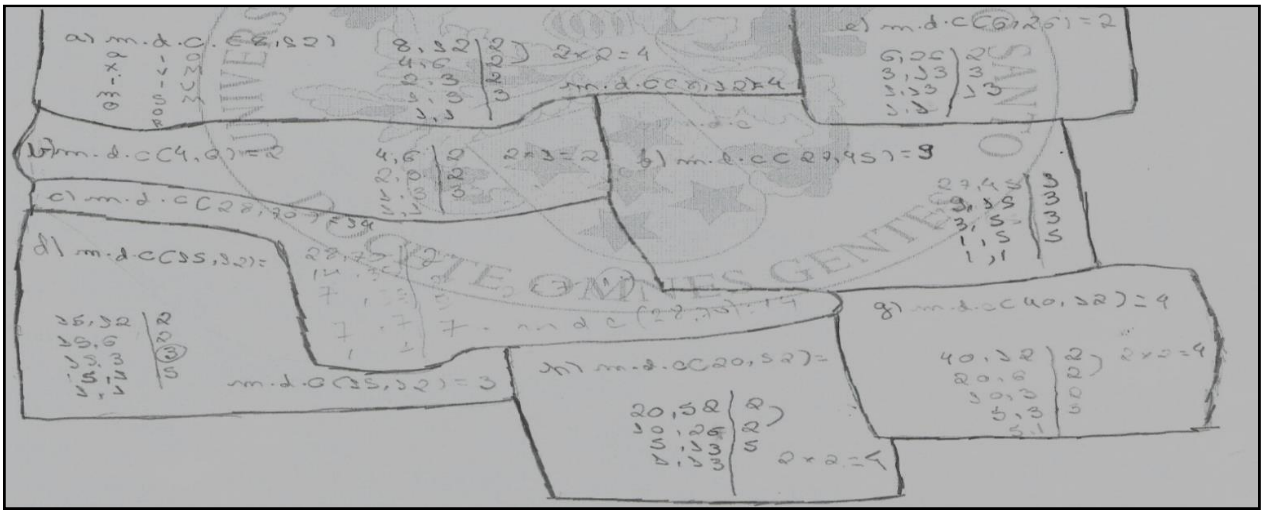
Tarefa Extraclasse 8:

Determine:	
a) m.d.c. (8, 12)	**e)** m.d.c. (6, 26)
b) m.d.c. (4, 6)	**f)** m.d.c. (27, 45)
c) m.d.c. (28, 70)	**g)** m.d.c. (40, 12)
d) m.d.c. (15, 12)	**h)** m.d.c. (20, 52)

Aula 3:

No dia 10/09/15 compareceram os mesmos 18 alunos da aula anterior e, então, mantivemos os mesmos grupos. Ao circularmos pelos grupos observamos que a maioria havia feito a tarefa extraclasse. Esperamos todos terminarem a atividade para discutirmos as questões propostas e, segundo eles, não tiveram e nem restaram dúvidas. Todos os que fizeram a tarefa extraclasse, resolveram todas as questões semelhante à resolução do grupo A, mostrado na Figura 38. Nenhum deles redigiu a resposta por extenso, mas não tiveram dificuldades na resolução.

Figura 38 - Resolução da tarefa extraclasse 8 pelo GA



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Mostramos ainda, para os alunos outra maneira de como encontrar o m.d.c. de, por exemplo, 27 e 45, utilizando a fatoração, assim:

Passo 1: Fatorar completamente 27 e 45;

27	3
9	3
3	3
1	

45	3
15	3
5	5
1	

Passo 2: Escrever 27 e 45 numa decomposição de fatores primos;

$27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$

$45 = 3 \times 3 \times 5 = 3^2 \times 5$

Passo 3: Buscar todos os divisores que são comuns nos dois números fatorados: 3. O m.d.c. entre esses dois números é encontrado multiplicando os fatores primos em comum elevados ao menor expoente em que cada um aparece nas decomposições. Assim:

m.d.c. (27, 45) $= \mathbf{3 \times 3 = 3^2 = 9}$ ou ainda,
$27 = 3^3$
$45 = 3^2 \times 5$

Desta forma, o m.d.c. $(27, 45) = 3^2 = 9$

No final dessa aula sugerimos, como tarefa extraclasse, que eles voltassem à atividade 3 [*um jogo de baralho*] e a extraclasse correspondente, para encontrar todos os divisores comuns aos números 54 e 48 e, ainda, calcular o m.d.c deles.

Atividade 9: *A escada da escola ECO*

Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre dois ou mais números

Os objetivos da atividade 9 foram: trabalhar o conceito de múltiplos comuns (m. c.) de dois ou mais números; construir o conceito de m.m.c. de dois ou mais números; orientar e ajudar os alunos nas buscas por caminhos para resolverem os problemas propostos; incentivar os alunos a associar a Matemática de sala de aula com uma situação real ao usar o conceito de m.m.c.

A escola ECO tem uma escada que liga os dois andares do prédio. Essa escada tem 30 degraus, enumerados de 1 a 30. João está subindo de 3 em 3 degraus e Félix está subindo de 2 em 2. Sabendo que os dois começaram a subir juntos, responda:

a) Algum deles vai pisar no 15º degrau?
b) Algum deles vai pisar no 18º degrau?
c) Em quais degraus os dois vão pisar juntos?
d) Qual é o menor número do degrau em que os dois vão pisar juntos?

Para esta atividade, incluindo a tarefa extraclasse, foram utilizadas duas aulas, realizadas nos dias 11 e 14 de setembro de 2015. Nesta atividade, não tivemos nenhum problema na organização dos grupos e muito menos na empolgação e motivação dos alunos para resolução do problema; essa foi uma das melhores aulas ao longo da aplicação das atividades do plano de ensino. Quanto à tarefa extraclasse, a maioria resolveu em casa.

A seguir, relatamos e analisamos cada aula da atividade 9:

Aula 1:

No dia 11/09/15 estavam presentes 20 alunos. Depois que constituímos os grupos, verificamos que a maioria dos alunos havia feito a atividade extraclasse proposta na aula anterior e encontrou todos os divisores comuns de 54 e 48 [1, 2, 3 e 6], consequentemente, calculou o maior deles [6], sem dificuldade. Em seguida, entregamos para cada aluno uma folha com a atividade e foi dado um tempo para que pudessem ler e discutir o problema nos grupos. Após a leitura, os alunos se empolgaram com o problema, possivelmente, porque este representava uma situação real do seu dia a dia, com dados adaptados à sua própria escola. Inclusive, alguns deles quiseram sair da sala de aula para ir até à escada e fazer o percurso estipulado no problema. Não os deixamos ir, pois nesse horário as pessoas que são responsáveis pela faxina da escola estavam lavando o 2º piso. Os alunos não tiveram dificuldade na resolução desse problema.

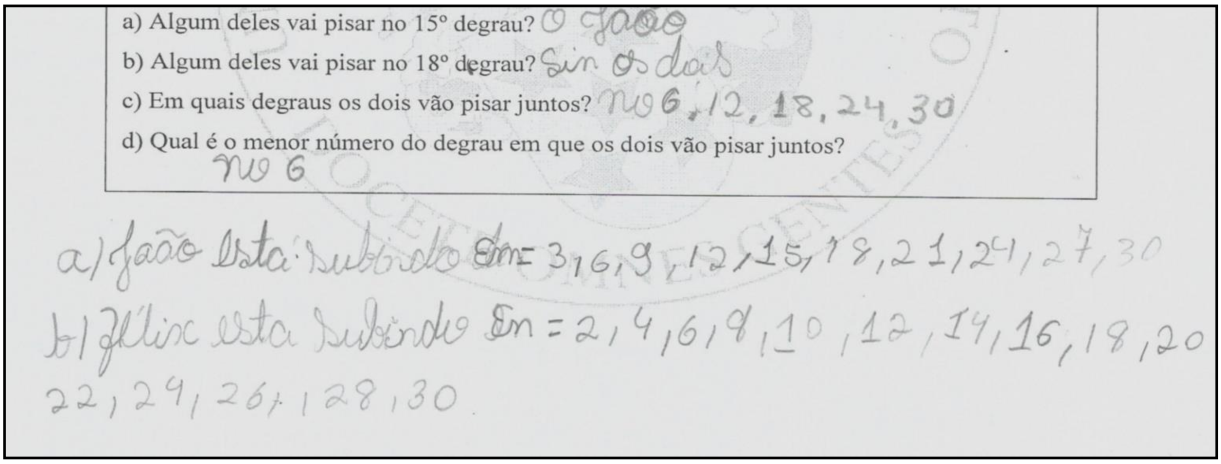
Ao percorrermos os grupos, sem que fizéssemos alguma intervenção, percebemos que muitos alunos, utilizando o cálculo mental, já sabiam em quais degraus, João e Félix poderiam pisar - concluímos isso pelo fato de que eles descobriram a resposta sem terem feito a resolução no papel. Desse modo, pedimos para que eles justificassem matematicamente as soluções que haviam obtido mentalmente. Em certo momento, um aluno do GA, nos perguntou:

> A2: “Tio, se João sobe de 3 em 3, nós vai calcular os múltiplos de 3, né?
> **O que você acha?**
> A2: “Eu acho que sim; ele está subindo de 3 em 3. De 3 em 3, vai ser 3, 6, 9,..., isso é os múltiplos de 3.
> A22: “Claro que é os múltiplos de 3 e os degraus que Félix pisa é os múltiplos de 2.

Muito bem! Isso mesmo! Agora, já podemos resolver o problema.

Assim, como mostram as Figuras 39 e 40, todos os alunos chegaram corretamente à solução de cada questão proposta no problema, demonstrando segurança e destreza.

Figura 39 - Resolução da atividade 9 pelo GB

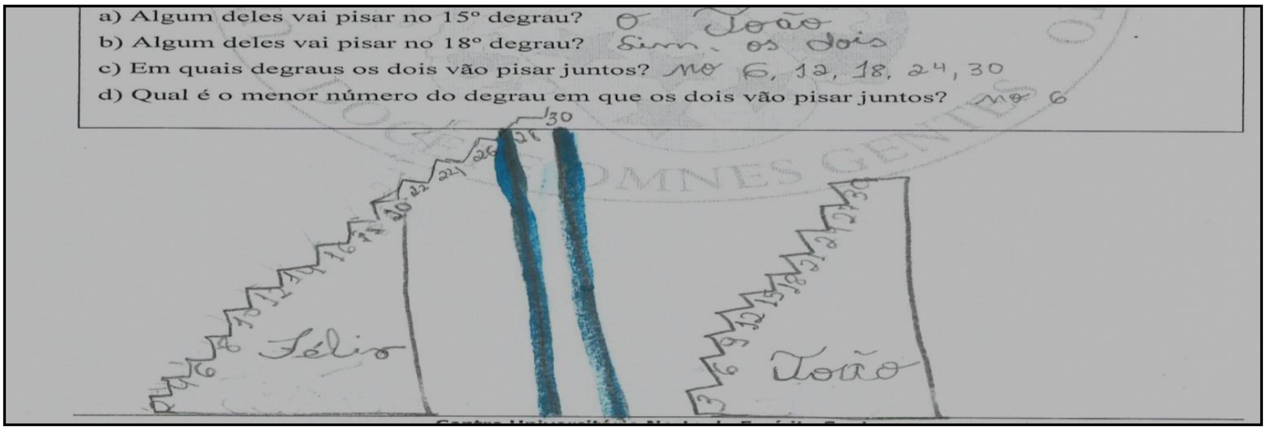

a) Algum deles vai pisar no 15° degrau? O João
b) Algum deles vai pisar no 18° degrau? Sim os dois
c) Em quais degraus os dois vão pisar juntos? no 6, 12, 18, 24, 30
d) Qual é o menor número do degrau em que os dois vão pisar juntos?
no 6

a) João esta subindo em = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30
b) Félix esta subindo em = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
22, 24, 26, 28, 30

Fonte: Folha de respostas dos alunos

O GD, para resolver o problema proposto, Figura 40, fez um desenho ilustrativo contendo duas escadas, uma para cada participante – Félix e João (diferenciando de todos os outros grupos). Na primeira escada enumerou todos os degraus em que Félix iria pisar e na segunda, também, enumerou todos os degraus em que João iria pisar. Entendemos que o grupo não teve nenhuma dificuldade, até porque ele [o grupo] conseguiu projetar a ideia do problema em forma de desenho. Resolveu corretamente todas as questões.

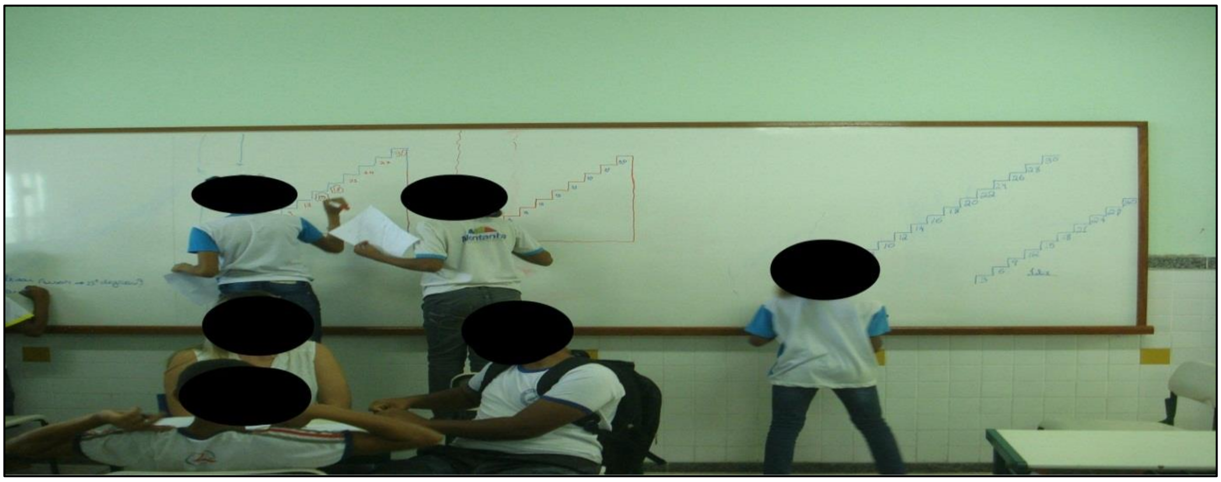
Figura 40 - Resolução da atividade 9 pelo GD



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Para a plenária, empolgados com o problema, todos quiseram ir à lousa para socializar as suas respostas, como não havia espaço à frente para todos, autorizamos apenas os representantes de cada grupo, como mostra a Figura 41.

Figura 41 - Representantes de grupos, socializando as respostas obtidas na atividade 9



Fonte: Acervo do Pesquisador

Dissemos para os alunos que poderiam escrever todos os múltiplos de 2 e de 3 até o 30, que é o limite máximo de degraus da escada na escola ECO; em seguida, observar os múltiplos comuns aos dois números. Dessa forma, discutindo-se juntos, colocamos na lousa:

Múltiplos de 2 = {**0**, 2, 4, **6**, 8, 10, **12**, 14, 16, **18**, 20, 22, **24**, 26, 28, **30**} ⟶ degraus que Félix pisou.
Múltiplos de 3 = {**0**, 3, **6**, 9, **12**, 15, **18**, 21, **24**, 27, **30**} ⟶ degraus que João pisou.

Logo, o conjunto de múltiplos comuns de 2 e 3 é {0, 6, 12, 18, 24, 30}

Assim, concluímos que o menor múltiplo comum de 2 e 3, diferente de zero, é 6.
Então, m.m.c. (2, 3) = 6

Voltamos ao problema e dissemos para eles que o m.m.c. de 2 e 3 significa que os dois alunos pisam juntos, pela primeira vez depois do degrau inicial, no degrau de número 6; pela 2ª vez, no degrau de número 12 e assim até o último degrau de número 30. Ou seja, eles pisam juntos no mesmo degrau a cada 6 degraus. Quanto às respostas das questões, os alunos entenderam satisfatoriamente.

Desse modo, colocamos na lousa que para construir o conceito de m. m. c. de dois ou mais números é necessário:

- ✓ Elencar uma sequência de múltiplos dos números dados;
- ✓ Encontrar alguns dos múltiplos comuns entre eles;
- ✓ Considerar o menor deles.

Por conseguinte, definimos **mínimo múltiplo comum de dois ou mais números.**

Definição: O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números naturais é o **menor** número natural, exceto zero, que é múltiplo desses números.

Deixamos nessa aula, uma tarefa extraclasse, abaixo, com o objetivo de fixar conceitos aprendidos.

<u>Tarefa Extraclasse 9:</u>

Determine o Mínimo Múltiplo Comum de:				
a) 6 e 9	b) 2, 8 e 12	c) 3, 4 e 6	d) 12 e 15	e) 8 e 40

<u>Aula 2:</u>

No dia 14/09/15, estavam presentes 22 alunos; os mesmos da aula anterior mais o A3 e o A7. Ao percorrermos os grupos, percebemos que a maioria havia feito a tarefa. Os que fizeram a atividade gostaram e acharam fácil. Consequentemente, dissemos para eles que poderíamos, também, calcular o m.m.c. usando a fatoração, para dar um exemplo, mostramos na lousa como calcular o m.m.c. de 8 e 20.

Passo 1: Decompor os dois números em fatores primos;

8	2
4	2
2	2
1	

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

Passo 2: Escrever os números dados na sua forma fatorada;

$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$
$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$

Passo 3: Encontrar o m.m.c. dos números dados, multiplicando todos os fatores, comuns ou não considerando seus maiores expoentes.

m.m.c. $(8,40) = 2^3 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$.

Observamos, ainda, que:

- ✓ o m.m.c. de quaisquer dois ou mais números obrigatoriamente possui todos os fatores primos de cada um desses números;
- ✓ se optarmos a calcular o m.m.c. pela definição, no caso do exemplo também devemos chegar ao número 40.

M (8) = {0, 8, 16, 24, 32, **40**, 48, 54,...}; M (40) = {0, **40**, 80,...}

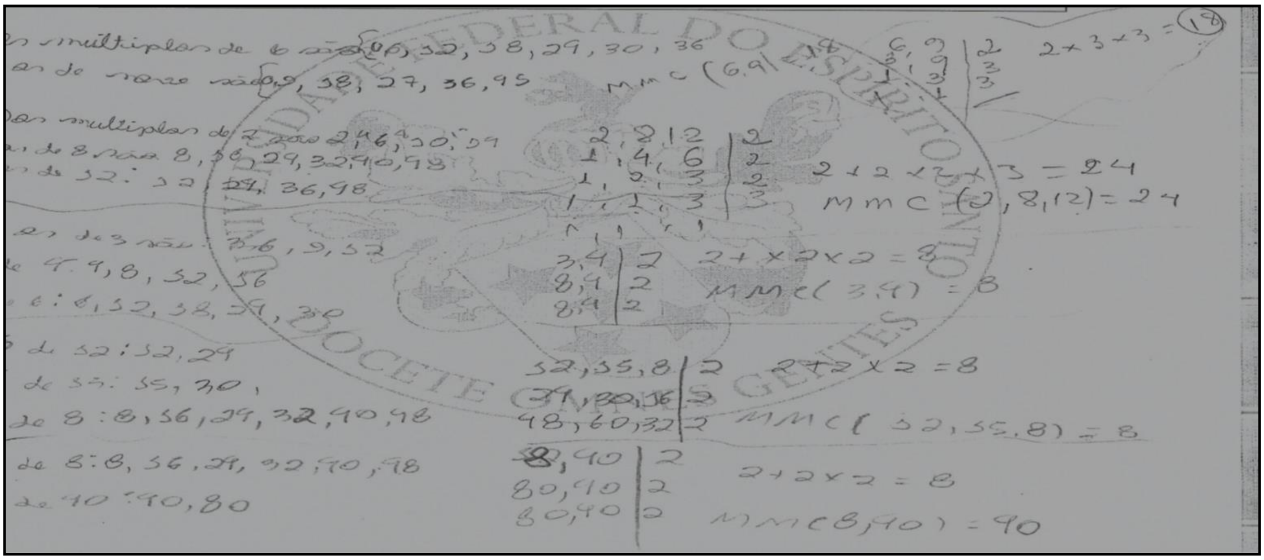
Mostramos também como calcular através da **regra da decomposição simultânea para a busca do m.m.c.** considerando os números 12 e 18.

12, 18	**2**	→ **O 2 divide ambos os números.**
6, 9	2	→ O 2 divide somente o 6.
3, 9	**3**	→ **O 3 divide ambos os números.**
1, 3	3	→ O 3 divide somente o 3.
1, 1		→ O quociente 1 de todos os números indica o final do processo.

O m.m.c. é dado pelo produto de todos os fatores primos encontrado. Assim, temos:
O m.m.c. (12, 18) = $2 \times 2 \times 3 \times 3 =$ **36**; ou ainda: o m.m.c. (12, 18) = $2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 =$ **36**

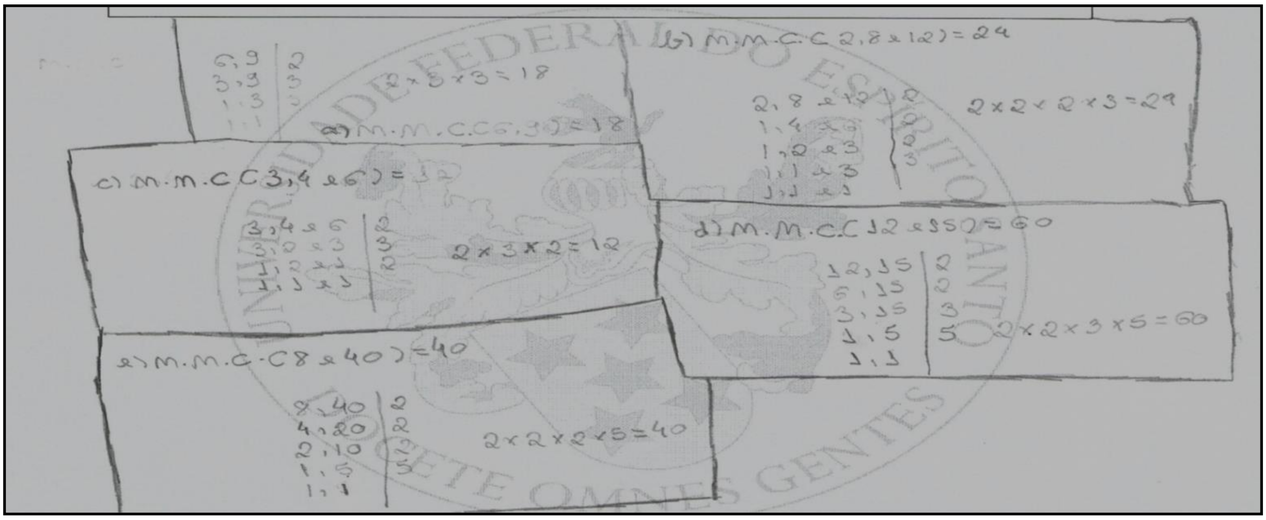
Os alunos gostaram e acharam muito fácil esse processo para calcular o m.m.c de dois ou mais números. Como ainda, estavam com as folhas da atividade em mãos, a maioria aproveitou o exemplo resolvido na lousa e, além do que já haviam desenvolvido, acrescentaram, também, a resolução por meio da regra prática; outros que ainda não tinham feito resolveram somente via regra prática, como mostram, por exemplo, as Figuras 42 e 43, a seguir. No geral, eles conseguiram entender e resolver as questões propostas.

Figura 42 - Resolução da tarefa extraclasse 9 pelo GB



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Figura 43 - Resolução da tarefa extraclasse 9 pelo GC



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Na plenária, muitos alunos quiseram ir à lousa para socializar as suas resoluções. No entanto, pedimos que viesse apenas 1 representante de cada grupo, por falta de espaço à frente, como mostra a Figura 44, a seguir.

Figura 44 - Alunos na lousa, socializando as respostas obtidas na tarefa extraclasse 9

Fonte: Acervo do Pesquisador

Atividade 10: *Horário de ônibus*

Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C.) entre dois ou mais números

O objetivo da atividade 10, abaixo, foi, além de todos os da atividade 9, contextualizar o m.m.c. numa situação real do cotidiano.

A cidade de Montanha - ES tem uma empresa de ônibus, e ela possui dois tipos de ônibus: convencional e executivo.

O ônibus convencional sai do terminal rodoviário a cada 20 minutos e o executivo a cada 30 minutos. Se os dois saíram juntos às 12 horas, qual é o próximo horário em que eles voltarão a sair juntos desse mesmo terminal rodoviário?

Para esta atividade foi utilizada apenas uma aula, realizada no dia 15 de setembro de 2015. Nesta atividade também, não tivemos nenhum problema na organização dos grupos e nem no desenvolvimento da atividade.

Aula 1:

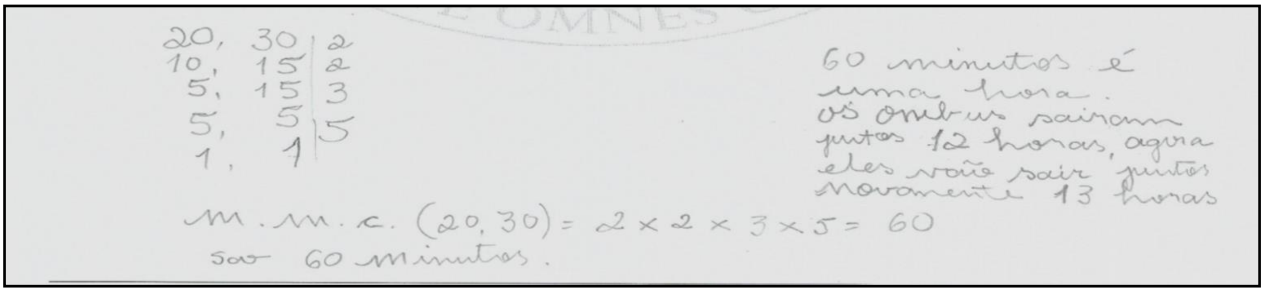
No dia 15/09/15, estavam presentes 20 alunos e todos eles estiveram presentes na aula anterior; então, mantivemos os mesmos grupos e foi entregue a atividade para cada aluno presente. Foi dado um tempo para que eles pudessem fazer as leituras e discutir entre si; os alunos também não tiveram dificuldade na resolução deste problema.

Ao circularmos pelos grupos, percebemos que alunos estavam envolvidos e discutiam a forma mais simples de resolvê-lo, o processo prático de efetuar os cálculos ou elencar os múltiplos de cada um dos números. A dúvida era que estava envolvido o tempo em minutos. O grupo C superou a dificuldade, calculou a resposta utilizando o processo prático e encontrou 60; então nos perguntou: “Professor, a gente fez pela regra prática e encontramos 60 para o m.m.c., e agora o que a gente faz? O problema fala de minutos”. Perguntamos:

> **O que significa esse 60 que vocês encontraram?**
> A22: [Representando o grupo, disse:] “Significa os minutos.”
> **Vocês têm certeza que o m.m.c. é 60?**
> A26: “Tio, é 60. Nós fizemos aqui do outro jeito [a sequência de múltiplos] e deu certo isso.”
> **Agora, então, vamos pensar mais um pouco no que está pedindo no problema.**
> A26: “60 minutos é igual há 1 hora.”
> **Isso mesmo. Muito bem!**
> **Agora leia novamente o problema e verifica o que se pede nele.**

A partir desse momento, observamos que todos os grupos começaram a resolver o problema, conseguindo como resposta 60; em certo momento, o Grupo C nos disse que “60 minutos é igual à uma hora e como os ônibus saíram juntos 12 horas, mais uma hora, eles voltam a sair juntos às 13 horas”. Enfim, todos os grupos conseguiram entender e resolver o problema corretamente seja pelo dispositivo prático ou não, como mostram as Figuras 45 e 46 a seguir.

Figura 45 - Resolução da atividade 10 pelo GC



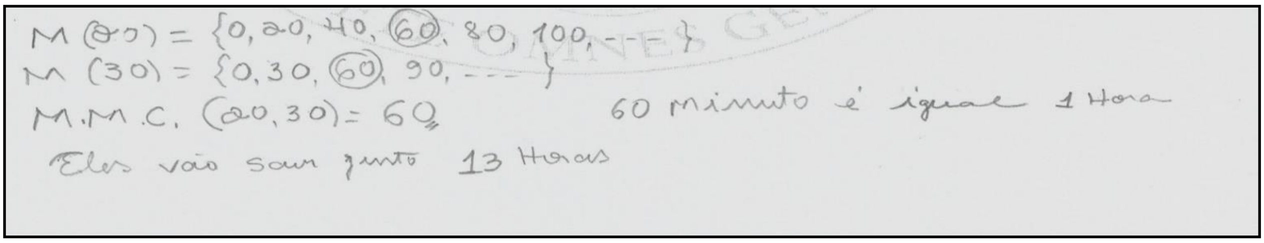
Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 45:

m.m.c.(20, 30)= 2×2×3×5 = 60; são 60 minutos.

60 minutos é uma hora. Os ônibus saíram juntos 12 horas, agora eles vão sair juntos novamente 13 horas.

Figura 46 - Resolução da atividade 10 pelo GA



Fonte: Folha de respostas dos alunos

Obs.: Transcrição do texto redigido pelos alunos na Figura 46:

M(20) = {0, 20, 40, **60**, 80, 100, ...}
M(30) = {0, 30, **60**, 90,...}
m.m.c. (20,30) = 60

60 minutos é igual 1 hora. Eles vão sair juntos 13 horas.

No dia 18 de setembro aplicamos a segunda avaliação (apêndice G) baseada em conteúdos estudados nas atividades de 7 a 10, 75% dos 20 alunos que fizeram a atividade avaliativa, conseguiram nota entre 3 e 4 pontos (apêndice H), sendo 4 o valor máximo. Essa avaliação, assim como a primeira, ficou de posse da professora regente e as notas foram registradas em sua pauta de classe.

Esse foi o ultimo dia de aplicação das atividades do plano de ensino, no 6º M01 da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professor Elpídio Campos de Oliveira".

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste último capítulo, são coletadas e analisadas informações surgidas ao longo do desenvolvimento do Plano de Ensino, bem como são discutidas suas possíveis implicações.

5.1 INFORMAÇÕES COLETADAS

Os fatos mais relevantes, para nossa questão de pesquisa, obtidos no desenvolvimento das atividades que compõem o Plano de Trabalho foram:

- Defasagem da turma nos conteúdos envolvendo as quatro operações aritméticas, identificadas nas atividades diagnósticas.
- Mau comportamento e desorganização dos alunos em sala de aula, dificuldades para trabalhar de maneira colaborativa e não cumprimento das tarefas extraclasse observadas no início da aplicação do plano, o que prejudicou o desenvolvimento de algumas atividades.
- Dificuldades dos alunos com a resolução dos problemas, especialmente quanto à elaboração de estratégias e validação das respostas.
- Morosidade para os alunos se engajarem nas atividades propostas.
- Muita preocupação dos alunos com o quesito avaliação, no início do trabalho.
- Algumas intervenções não ajudaram os alunos a construírem o seu próprio conhecimento.
- O pesquisador instigou e incentivou os alunos para o trabalho colaborativo ao longo do desenvolvimento das atividades.
- Houve melhora dos alunos quanto à aprendizagem e recuperação de notas e conteúdos.
- A maioria dos alunos aprendeu a redigir suas respostas por extenso.
- Ao resolverem problemas, os alunos fizeram conexões com conteúdos estudados em momentos anteriores.
- Algumas dúvidas dos alunos em relação a conhecimentos prévios, quando detectadas dentro da resolução de um problema proposto, puderam ser esclarecidas através de problemas secundários.

- A Resolução de Problemas como metodologia de ensino de Matemática proporcionou aos alunos maior interesse pela disciplina, evidenciada pela maior participação nas aulas.

5.2 CONSIDERAÇÕES

Das informações coletadas no decorrer da aplicação do Plano de Trabalho, selecionamos para discutir aquelas que atendem melhor à pergunta norteadora de nossa pesquisa.

No início desta pesquisa, ao elaborarmos o modelo preliminar, tínhamos em mente trabalhar como Fenômeno de Interesse **o ensino e a aprendizagem da operação divisão, no 6º ano do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas**. Mas, devido às circunstâncias internas à escola, modificamos o nosso modelo para **ensino e aprendizagem de divisibilidade, através da Resolução de Problemas no 6º ano do Ensino Fundamental**. Desta forma, relacionamos o nosso Fenômeno de Interesse com o Modelo Modificado, realizamos um levantamento bibliográfico de dissertações e teses, livros e documentos oficiais pertinentes ao nosso tema de estudo e, a partir disso, formulamos o seguinte problema de pesquisa: **Quais contribuições a metodologia Resolução de Problemas pode propiciar para o ensino e aprendizagem do tema divisibilidade a alunos de 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Espírito Santo?**

O objetivo de nossa pesquisa foi o de **selecionar e aplicar atividades didáticas sobre divisibilidade usando como metodologia de ensino a Resolução de Problemas e analisar o processo de aprendizagem na perspectiva da participação do aluno na construção do seu conhecimento**. No que tange ao trabalho com divisibilidade no 6º ano do Ensino Fundamental (junto a uma turma composta por 28 alunos entre 11 e 17 anos, alguns repetentes e outros com deficiência), para selecionarmos as atividades do nosso Plano de Trabalho, buscamos apoio no Plano de Ensino da professora regente, em livros didáticos e/ou outras fontes. Para responder ao problema desta pesquisa, criamos um Plano de Trabalho que contemplou conteúdos de divisão euclidiana, com as suas ideias de partição e medida, e da unidade temática divisibilidade.

No planejamento das aulas, o desenvolvimento do nosso Plano de Ensino com os alunos da turma escolhida teve como objetivo prever quais e quantas aulas seriam necessárias para a sua aplicação. Como a professora regente conhecia bem os alunos da turma pesquisada e sabia de suas limitações, decidimos em comum acordo preparar duas atividades que chamamos de diagnósticas, envolvendo as operações aritméticas, combinando alguns cálculos diretos e alguns problemas extraídos de livros didáticos (Quadros 3, 4 e 5), para termos mais informações sobre a realidade dos alunos. A aplicação dessas atividades foi importante, pois nos permitiu o primeiro contato com a turma e, também, para constatarmos que realmente eles tinham uma defasagem em aritmética, principalmente, em relação à operação divisão.

As atividades que propusemos, excetuando algumas extraclasse ou de fixação, foram consideradas como ponto de partida para o desenvolvimento de conceitos de divisão euclidiana e divisibilidade. A cada grupo foram entregues atividades que deveriam ser lidas e exploradas, com tempo suficiente para que os alunos discutissem estratégias para a resolução de cada problema proposto. Como estavam habituados a sempre receber dos professores problemas junto com o modo de resolvê-los, no princípio sentiram dificuldade em encontrar caminhos de resolução sem nossa ajuda; alguns até desistiam, esperando respostas prontas. Com isso, naturalmente, no início foi difícil realizar satisfatoriamente a proposta de trabalho. No entanto, com os nossos incentivos para que eles próprios construíssem o seu conhecimento, essa situação não demorou muito para mudar, mesmo que, parcialmente, como podemos ver em diálogos ocorridos perante a resolução de vários problemas dados.

Com relação à turma pesquisada, desde a nossa primeira conversa com a professora, ficamos sabendo do mau comportamento, desordem e falta de interesse dos alunos. Em reuniões, e até durante os intervalos (recreio escolar), os professores reclamavam o tempo todo das atitudes e do comportamento desses alunos. Realmente, pudemos constatar tudo isso em sala de aula, quando iniciamos a aplicação das atividades. Contudo, à medida em que as aulas foram sendo realizadas, ao trabalharmos com a metodologia Resolução de Problemas e os alunos se adaptaram à dinâmica proposta para o trabalho de sala de aula, houve um aumento significativo na motivação e interesse deles pela própria aprendizagem, pois passaram a participar mais e com maior qualidade das atividades. Após cerca da metade da aplicação do Plano de Trabalho, houve ocasiões dos alunos pedirem para continuar a atividade na aula do professor seguinte por estarem interessados no que estava acontecendo. Acreditamos que, também, foi de suma importância para esse resultado a seleção de problemas lúdicos ou contextualizados em situações cotidianas (por exemplo, o *problema dos bolinhos da dona Ana*, *o problema do baralho*, *o problema da escada da escola)* e a utilização de material concreto na composição do Plano de Trabalho (por exemplo, *baralho, pseudocédulas, dados, calculadora*). Em relação à seleção de problemas, Smole & Diniz (2001, p. 97) afirmam que "sem dúvida, bons problemas, situações próximas à realidade do aluno [...] favorecem a aprendizagem e o envolvimento do aluno [...]".

O não cumprimento das tarefas extraclasse pelos alunos (que prejudicou o desenvolvimento das atividades iniciais e colaborou para o aumento do número de aulas para aplicar o Plano de Trabalho) foi sendo minimizado ao longo do trabalho. Essas tarefas tinham como propósito revisar, fixar e "consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos [...]" (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p.46).

A preocupação dos alunos em saber se determinado conteúdo ia "cair" na prova demonstra o foco na avaliação ao invés do foco no aprendizado. Podemos entender a redução dessa preocupação ao longo da aplicação do Plano de Ensino como uma importante contribuição da metodologia de Resolução de Problemas. É interessante notar que a redução dessa preocupação foi compatível com um bom desempenho da turma nas duas provas aplicadas. Em síntese, acreditamos que essa metodologia transformou a percepção que os alunos tinham da aprendizagem da Matemática: *boas notas nas provas deixou de ser um objetivo para ser consequência do aprendizado*.

Depois de certo tempo, começamos a exigir dos alunos que redigissem as respostas por extenso, a fim de que tivessem maior clareza nas resoluções dos problemas propostos; houve resistência durante algumas aulas por não terem o hábito de resolver questões matemáticas dessa maneira. Entretanto, com a nossa exigência, persistência e incentivo, eles passaram a fazer isso, atingindo o objetivo pretendido. A capacidade de comunicar ideias matemáticas é um importante elemento da aprendizagem, "pois é o aluno, falando, escrevendo ou desenhando, que mostra ou fornece indícios de que habilidades ou atitudes ele está desenvolvendo e que conceitos ou fatos ele domina, apresenta dificuldades ou incompreensões" (SMOLE & DINIZ, 2001, p.95). Assim, o ambiente para a comunicação e o estímulo para a leitura e escrita proporcionados pela Resolução de Problemas é uma contribuição dessa metodologia que pudemos verificar em nossa pesquisa.

Quanto ao trabalho colaborativo, os alunos, não familiarizados com essa dinâmica, tiveram muita dificuldade no início da aplicação das atividades. Muitos, mesmo que estivessem juntos nos grupos, resolviam os problemas individualmente. Em algumas aulas, no início, aconteceram intrigas entre os componentes de alguns grupos, pois ainda não possuíam espírito de equipe. A aplicação da metodologia de Resolução de Problemas contribuiu para que os alunos superassem essas dificuldades, o que constitui uma importante conquista visto que o trabalho colaborativo faz com que os alunos desenvolvam habilidades que propiciam socialização do processo de construção do conhecimento. Segundo Artzt e Newman (1991), citados por Justulin (2014, 67), o trabalho cooperativo não se qualifica somente pela distribuição das mesas em sala de aula, uma vez que:

> Não é aprendizagem cooperativa se os estudantes se sentam juntos em grupos e trabalham individualmente sobre o problema. Não é aprendizagem cooperativa se estudantes se sentam juntos em grupos e uma só pessoa faz todo o trabalho. Verdadeiramente aprendizagem cooperativa requer a orientação de um professor que é quem pode ajudar os estudantes a entender a dinâmica de grupo, a desenvolver as habilidades que eles precisam para a aprendizagem cooperativa e a aprender Matemática trabalhando juntos em grupos.

Muitas vezes percebemos alguns alunos em seus respectivos grupos muito interessados nas respostas de grupos vizinhos, demonstrando preocupação em entregar suas soluções corretamente. Fato é que essa *bisbilhotice*[58] é uma prática comum adotada por muitos alunos, e que pode até ser interpretada como um aspecto do trabalho colaborativo. Embora possa ser um comportamento motivado pela preguiça, ela também pode significar interesse no que o colega está fazendo, algo que pode resultar em seu aprendizado. Acreditamos que não é razoável esperar autonomia de alunos desacostumados a resolver problemas; além disso, buscar reproduzir as resoluções de alguém (no caso, de um colega) que sabe mais (ou parece saber) o que está fazendo é comportamento natural e, eventualmente, útil para quem está aprendendo.

O estudo divisão euclidiana enfocou o significado, ao invés da operacionalidade, de modo que não podemos afirmar com base no que foi feito que os alunos adquiriram ampla competência no assunto, particularmente quanto à capacidade para realizar divisões em que o divisor tem diversos algarismos.

---

[58]Aqui, entendemos como *bisbilhotice* a situação em que um aluno busca saber o que os colegas estão falando ou fazendo.

Ao trabalharmos a unidade temática divisibilidade, procuramos através da metodologia de Resolução de Problemas levar os alunos a construir diversos conceitos (quociente, múltiplos e divisores, critérios de divisibilidade, etc.) e eles corresponderam bem, na medida em que entenderam os significados das palavras e conseguiram relacionar com situações cotidianas. Entretanto, no ensino de alguns pontos mais complexos fomos mais dogmáticos. Especificamente, nos casos do m.m.c. e do m.d.c., a construção dos conceitos foi trabalhada via Resolução de Problemas, mas não os algoritmos de cálculo. Até os melhores métodos têm suas limitações.

As discussões com os alunos, especialmente, na parte plenária, foram momentos bastante proveitosos das atividades, pois foi por meio dessas discussões que suas ideias clarificaram-se para a compreensão de conceitos matemáticos construídos na resolução dos problemas. Essa compreensão acontece a partir do enfrentamento de ideias contrárias, onde os alunos defendem suas posições e refletem o trabalho realizado. Naturalmente, a consolidação dessa compreensão foi realizada na Formalização, quando registramos, na lousa, as definições dos novos conceitos e conteúdos focalizados naquele problema.

Percebemos várias vezes os alunos tentarem, mas sem conseguir, recorrer a noções que já deveriam ter aprendido (como nas perguntas: "esse problema é de dividir ou de menos?", vide p.34 e "*é de mais ou é de menos*?", vide p.119). Nessas situações, os problemas propostos também serviram como instrumentos de avaliação do conhecimento de conteúdos prévios, bem como oportunidade para revisar tais conteúdos.

É preciso registrar que não conseguimos trabalhar satisfatoriamente com os alunos com deficiência da classe. O fato é que a dinâmica durante as aulas não nos permitiu dar a esses alunos especiais toda a atenção necessária para acompanharem o resto da turma. Na prática, eles foram deixados a cargo da professora regente e, como ela já fazia, não nos preocupamos com sua aprendizagem. Mesmo assim, notamos que um deles demonstrou progredir em alguns aspectos. Por nossa experiência, concluímos que é bastante difícil aplicar a metodologia de Resolução de Problemas numa turma em que há alunos com dificuldades especiais.

O Plano de Trabalho foi bastante longo para que pudéssemos descrever e analisar exaustivamente todas as atividades na pesquisa, pelo que optamos por tratar apenas daquilo que nos pareceu mais relevante nas primeiras e últimas atividades. Essa escolha foi motivada, principalmente, pela intenção de evidenciar a evolução [para melhor] da turma em alguns aspectos qualitativos da aprendizagem, adquiridos através da Resolução de Problemas: comportamento em sala de aula, engajamento nas atividades propostas, trabalho colaborativo e a atitude frente a resolução de problemas propriamente dita. Dificilmente poderíamos observar esses resultados se o número de atividades e o tempo que passamos com a turma fossem significativamente menores (menos de 10 aulas, conforme pretendíamos inicialmente). Enfim, concluímos que a passagem do Modelo Preliminar para o Modelo Modificado resultou em perdas e ganhos: perdemos a possibilidade de abordar completa e detalhadamente a experiência, mas ganhamos prazo suficiente para que a metodologia de ensino pudesse surtir efeitos que naturalmente demandam tempo e paciência.

Quanto ao ganho pessoal, aperfeiçoamos a aplicação da metodologia de Resolução de Problemas. No início, tivemos dificuldades para ajudar os alunos a pensarem por si mesmos, na medida em que nossos questionamentos eram, em partes, inadequados. No decorrer da aplicação, com mais atenção e prática, conseguimos tornar nossas intervenções mais objetivas e proveitosas, procurando sempre evitar o absolutismo burocrático (ALRØ; SKOVSMOSE, 2010) e conduzir, assim, os alunos a construírem o seu próprio conhecimento. Foi fundamental para o nosso crescimento pessoal e profissional - comprovando, por experiência própria que, quem ensina aprende ao ensinar (FREIRE, 1996).

Respondendo a pergunta de nossa pesquisa, levando em consideração todas as informações aqui levantadas e analisadas e observando a evolução [para melhor] dos alunos da turma pesquisada e, inclusive, a do pesquisador (professor) ao aplicar as atividades do Plano de Ensino, podemos afirmar que a metodologia Resolução de Problemas contribuiu de maneira significativa para o ensino e a aprendizagem do tema divisibilidade.

Comparando o nosso trabalho com as pesquisas relatadas na seção 2.4.1, verificamos que há muita semelhança entre esta e aquela realizada por Pereira (2004): público-alvo, metodologia de pesquisa, metodologia de ensino, assunto e resultados (melhoria do interesse e do rendimento, engajamento e envolvimento dos alunos na resolução de problemas, bem com na dinâmica em sala de aula). As diferenças são pelo menos duas: nós estudamos a divisibilidade e divisão, abrangendo as ideias de partição e medida, mas não estudamos os números racionais; também, em nosso caso, a turma apresentava defasagem de conhecimento e os alunos não tinham qualquer experiência com resolução de problemas e trabalho colaborativo em grupos, enquanto Pereira era professora da turma antes de realizar a pesquisa e essa turma já tinha experiência de trabalhar em grupos. A novidade que constatamos foi a velocidade com que nossa turma se acostumou com a metodologia de trabalho, especialmente com prática de resolver problemas matemáticos.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o Computador à resolução de Problemas Fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2005.

ALLEVATO, Norma Suely Gomes; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. *et al*. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35 - 52.

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

AZEVEDO, Elizabeth Quirino de. **Ensino-Aprendizagem das Equações Algébricas através da Resolução de Problemas**. 2002. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2002.

BERTON, Ivani da Cunha Borges; ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Números**: brincadeiras e jogos. São Paulo: Ed Livraria da Física, 2009.

BIANCHINI, Edwaldo Roque. **Matemática – Bianchini**. 7. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2011. (Coleção Matemática – Bianchini).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994

BONJORNO, José Roberto; BONJORNO, Regina de Fátima Souza Azenha. **Matemática pode contar comigo**. 1. ed. ren. 4º ano. São Paulo: FTD, 2008. (Coleção pode contar comigo).

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. 2 ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

BRASIL. Resolução CEB nº 2, de 7 de abril de 1998. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, 15 de abr. 1998. Seção I, p. 31. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb02_98.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2015.

BRASIL. Resolução CEB nº 3, de 28 de junho de 1998. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil,** Brasília, 5 de ago. 1998. Seção I, p. 21. Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2015.

BRASIL. Portaria nº 29, de 26 de julho de 2013. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil,** Brasília, 28 e jun. 2013. Seção I, p. 23. Disponível em: <http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?jornal=1&pagina=23&data=28/06/2013>. Acesso em: 25 ago. 2015.

BRASIL**.** Lei nº 9 394, de 20 de dezembro de 1996. Dispõe sobre as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil,** Brasília, 23 dez. 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm>. Acesso em: 01 set. 2015.

CANDIDO, Patrícia Teresinha. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 14 - 28.

CAVALCANTI, Claudia Tenório. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 121 - 149.

CENTURIÓN, Marília Ramos; JAKUBOVIC, José. **Matemática**: Teoria e Contexto. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2012. (Coleção Matemática: Teoria e Contexto).

D'AMBRÓSIO, B.S. Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. **Proposições**, 4 (1), 35-41. 1993

D'AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**. Curitiba, Editora UFPR, n. 31, p. 213-230, 2008.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas**. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática. 1. ed. 6º ano. São Paulo: Ática, 2012. (Coleção Projeto Teláris: Matemática).

DINIZ, Maria Ignez. Resolução de Problemas e Comunicação. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

ESPÍRITO SANTO (Estado). Secretaria Estadual da Educação. **Currículo Básico das Escolas Estaduais do Espírito Santo**. Vitória: SEDU, 2009.

FERREIRA, E. Um percurso na aprendizagem do conceito de divisão no 1º ciclo. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 113-137.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas: Autores Associados, 2012.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, Rony Cláudio de Oliveira. **Um ambiente para Operações Virtuais com o Material Dourado**. 2004. 189 f. Dissertação (Mestrado em informática) - Programa de Pós-Graduação em Informática, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, ES, 2004.

GIL, Antônio Carlos. Métodos e técnicas de pesquisa social. São Paulo: Atlas, 1999.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: **c**omo fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Editora Record, 2004.

GREGORUTTI, Juliana de Lima. **Construção dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de Situações de Aprendizagem**. 2009. 147 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Ensino de Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2009.

HERMÍNIO, Paulo Henrique. **Matemática Financeira - um enfoque da Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem**. 2008. 243 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2008.

HUANCA, Roger Rubem Huaman. **A Resolução de Problemas no Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula**. 2006. 247 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2006.

IMENES, Luiz Márcio Pereira; LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Matemática** – Imenes & Lellis. 2. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2012. (Coleção Matemática – Imenes & Lellis).

JESUS, A. M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GTI (org.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 91-111.

JUSTULIN, Andresa Maria. **A Formação de Professores de Matemática no Contexto da Resolução de Problemas**. 2014. 308 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2014.

LANNER, Ana Regina de Moura. *et. al.* **A contagem cada vez mais rápida e mais fácil:** as operações aritméticas, elementos históricos do movimento numérico, operações e cálculo. Oficina pedagógica de Matemática vinculada ao GEPAPe-USP (Grupo de Estudos e Pesquisa da Atividade pedagógica), 2004.

LEONARDO, Fabio Martins de. **Projeto Araribá Matemática**. 3. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2010. (Coleção projeto Araribá Matemática).

LERNER, D. A. **Matemática na escola**: aqui e agora. Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1995.

LOPES, Antônio José. **Projeto Velear** – Matemática. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2012. (Coleção Projeto Velear – Matemática).

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: E.P.U., 1986.

MAURÍCIO, Eufélix Monteiro. **Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de MDC e MMC na Educação Básica**. 2014. 46 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.

MAZZIEIRO, A. S.; MACHADO, P. A. **Descobrindo e Aplicando a Matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Dimensão, 2012. (Coleção Descobrindo e Aplicando a Matemática).

MENINO, Fernanda dos Santos. **Resolução de Problemas no Cenário da Matemática Discreta**. 2013. 290 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2013.

MORAIS, Rosilda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Uma Abordagem Histórica da Resolução de Problemas. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. *et al*. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 17 - 34.

NAME, M. A.; ZAMPIROLO, M. J. C. V. **Praticando Matemática –** Edição renovada. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção Praticando Matemática – edição renovada).

ONAGA, Dulce Satiko; MORI, Iracema. **Matemática** - Ideias e Desafios. 17. ed. São Paulo: Saraiva, 2012. (Coleção Matemática- ideias e desafios).

ONUCHIC, L. R. **Roteiro de Atividades**. Programa de Educação Continuada (P.E.C.) da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE). São Carlos: UFSCAR, 1998.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2005, cap. 12, p. 213-231.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; BOERO, Maria Lúcia. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisas. **Bolema**. Rio Claro, v. 20, n. 27, p. 93 – 139, 2007.

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 4, p. 19 - 26, 1998.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner. A pesquisa científica e a pesquisa pedagógica. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. *et al*. (Orgs.). **Resolução de Problemas**: Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 53 - 68.

PAVANELLO, Regina Maria. Contextualizar, o que é isso? In. NOGUEIRA, Clélia; BARROS, Rui. (orgs) **Conversas e experiências de quem gosta de ensinar Matemática**. Maringá, PR: Manoni, 2004.

PEREIRA, Mariângela. **O Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no 3º Ciclo do Ensino Fundamental**. 2004. 263 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2004.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemática na Sala de Aula**. 3. ed. rev. ampl. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

PIZYSIEZNIG, André Henrique. **Qual a Concepção de Divisibilidade explicitada por alunos do 6º ano ao poderem utilizar calculadora?** 2011. 157 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

POFFO, Elaine Maria. **Vivenciando a Matemática por meio da Resolução de problemas: um caminho para o ensino de Matemática**. 2011. 111 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2011.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POZO, Juan Ignácio. **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

REIS, Jackson Martins. **Tópicos de Teoria dos Números e Teste de Primalidade**. 2009. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, São Paulo, 2009.

RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

RODRIGUES, V. **Resolução de Problemas como estratégia para incentivar e desenvolver a criatividade dos alunos na prática educativa matemática**. 1992. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 1992.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: GROUWS, D. A. (ed). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: NCTM, 1992. p. 49-64.

SCHOENFELD, A. H. Heurísticas na sala de aula. In: KRULIK. S. REYS, R.E**. A resolução de problemas na matemática escolar**. São Paulo: atual, 1997.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER Frank. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989. p. 31 - 42.

SILVA, A. L. M. L. S. **A Apropriação do conceito de divisão por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2014. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito, Vitória, 2014.

SILVA, Maysa Ferreira da. **Divisibilidade: Práticas de Estudo Realizados por Alunos de um Curso Preparatório para o Vestibular**. 2010. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas**: Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUZA, Analucia Castro Pimenta de. **Análise Combinatória no Ensino Médio Apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas** 2010. 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós – Graduação em Educação Matemática, Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, São Paulo, 2010.

SOUZA, Angela Aparecida Ricardo. **Os deveres para casa no processo ensino-aprendizagem.** 2005. 116 f. Dissertação (Mestrado em Educação e Cultura) – Programa de Pós – Graduação em Educação e Cultura, Universidade do Estado de santa Catarina – Convênio com a Fundação Educacional Barriga Verde – FEBAVE, Florianópolis, SC, 2005.

SOUZA, Joanir Roberto de; PATARO, Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber Matemática**. 2. ed. 6º ano. São Paulo: FTD, 2012. (Coleção vontade de saber Matemática).

STAREPRAVO, Ana Ruth. **Jogando com a matemática**: números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

VILLAR, Mauro de Salles (ed.). Estratégia. In: **Houaiss** Dicionário Conciso. 2011. 1. ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2011, p. 402.

VILLAR, Mauro de Salles (ed.). Procedimento. In: **Houaiss** Dicionário Conciso. 2011. 1. ed. Rio de Janeiro: Moderna, 2011, p. 759.

APÊNDICES

Apêndice A - Autorização da Escola

(Pesquisa e Divulgação de Dados)

Eu, ____, Diretor (a) da Escola EEEFM "Professor Elpídio Campos de Oliveira", localizada na Avenida Antônio Paulino, 1085, Centro, Município de Montanha – ES, autorizo o pesquisador José Aparecido da Silva Fernandes a desenvolver seu projeto de pesquisa e divulgar os dados educacionais da mencionada Unidade de Ensino, para fins acadêmicos de estudo e pesquisa do curso de Mestrado em Ensino na Educação Básica do Programa de Pós Graduação do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo – CEUNES/UFES a ser realizado junto a um grupo representativo de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, turno matutino, nesta Unidade de Ensino.

____

Assinatura e carimbo do (a) Diretor (a)

____

Assinatura do Pesquisador

Montanha (ES), ____ de _______________ de 2015.

Apêndice B - Autorização da professora de Matemática da turma pesquisada

(Realização de pesquisa e Divulgação de Dados)

Eu, ____, professora de Matemática da EEEFM "Professor Elpídio Campos de Oliveira", localizada na Avenida Antônio Paulino, nº 1085, Centro, Município de Montanha – ES, autorizo o pesquisador José Aparecido da Silva Fernandes a desenvolver seu projeto de pesquisa em uma das turmas de 6º ano, do Ensino Fundamental que leciono no turno matutino, e divulgar os dados referentes à pesquisa, para fins acadêmicos de estudo e pesquisa do curso de Mestrado em Ensino na Educação Básica do Programa de Pós Graduação do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo – CEUNES/UFES.

____

Assinatura da professora da turma

____

Assinatura do pesquisador

Montanha (ES), ____ de ________________ de 2015.

Apêndice C - Autorização de pais e alunos

(Realização de pesquisa e Divulgação de Dados)

Eu, ---, aluno do 6º ano (6º M01) do Ensino Fundamental, turno matutino, da EEEFM "Professor Elpídio Campos de Oliveira", localizada na Avenida Antônio Paulino, nº 1085, Centro, Município de Montanha – ES, e meu (minha) responsável legal, --, autorizamos o pesquisador José Aparecido da Silva Fernandes a desenvolver seu projeto de pesquisa, vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica – PPGEEB do Centro Universitário Norte do Espírito Santo da Universidade Federal do Espírito Santo – CEUNES/UFES, bem como divulgar os dados referentes à pesquisa para fins acadêmicos, preservando as identidades e eventuais imagens que forem obtidas.

____

Assinatura do aluno (a)

____

Assinatura do (a) responsável legal do aluno (a)

____

Assinatura da professora da turma

____

Assinatura do pesquisador

Montanha (ES), ____ de _______________ de 2015.

Apêndice D - Algoritmo da Divisão de Euclides[59]

A divisão, no conjunto dos números naturais, é uma operação aplicada apenas a dois números (dividendo e divisor) e que produz dois resultados chamados de quociente e resto, respectivamente**.**

A divisão de um número N (**dividendo**) por um número d (**divisor**) tem como resultado os números naturais q (**quociente**) e r (**resto**) caracterizados pelas seguintes condições:

$N = q \times d + r$ *e* $0 \leq r < d$ (o resto é maior ou igual a zero e menor que o divisor).

Fica claro que não definimos divisão quando o divisor é zero, pois, sendo $d = 0$, não existe número r que satisfaça a situação $0 \leq r < d$**.** Vide (TOLEDO & TOLEDO, 1997; SANTOS, 1997; CARRAHER, 1998; BERTON & ITACARAMBI, 2009).

Teorema: Sejam a e b inteiros, com $b \neq 0$. Existem únicos q e r, também inteiros, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Tais inteiros q e r são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de a por b.

Demonstração:

I) A existência de q e r.

Vamos supor, inicialmente, $b > 0$. Seja q o maior inteiro, de modo que $b \times q \leq a$. Sendo assim, temos $bq \leq a < b(q + 1)$. Segue daí que $0 \leq a - bq < b = |b|$ e basta definir $r = a - bq$. Se $b < 0$, então $-b > 0$, portanto, existem inteiros q e r tais que $a = (-b)q + r$, com $0 \leq r < -b = |b|$. Isso acarreta $a = b(-q) + r$ e, assim, concluímos a existência de q e r.

II) A unicidade de q e r.

Admitamos que existam inteiros q_1 e r_1, de tal maneira que $a = bq_1+r_1$, com $0 \leq r_1 < |b|$. Dessa forma, tem-se $(bq + r) - (bq_1+r_1) = 0$, o que implica em $b(q - q_1) = r_1 - r$ donde $|b| : |r_1 - r|$. Mas, uma vez que $0 \leq r_1 < |b|$ e $0 \leq r < |b|$, então $|r_1 - r| < |b|$, portanto, como $|b| : |r_1 - r|$, temos $r_1 - r = 0$, o que acarreta $r = r_1$. Logo, $bq_1 = bq \Rightarrow q_1 = q$, já que $b \neq 0$.

[59]Para a demonstração do Teorema da Existência e Unicidade nos baseamos em Maurício (2014).

Apêndice E – Primeira avaliação da turma pesquisada

ATIVIDADES AVALIATIVAS

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Professor Elpídio Campos de Oliveira"

Nome: **nº:** **data:** 07/08/15 **Turma:** 6º M01

1ª questão) Resolver os problemas e registrar a maneira como você chegou ao resultado

a) Joana tem 5 filhos e resolveu presenteá-los com 60 reais. Sabendo que cada um vai ficar com a mesma quantia, quantos reais cada filho receberá?

b) Pedro quer repartir entre seus colegas 80 figurinhas. Se ele der 5 figurinhas para cada um, quantos são os colegas de Pedro que receberão figurinhas?

c) Manoel vai encaixotar seus livros para doar a biblioteca da escola em que ele estudou. São 28 livros. Ele quer colocar 6 em cada caixa, para não ficar muito pesado no transporte. Quantas caixas ele irá usar para colocar todos os livros?

2ª questão) Resolver o problema e registrar a maneira como você chegou ao resultado.

Dona Benta fez 18 pães e vai distribuí-los igualmente em bandejas, nas seguintes condições: todas as bandejas devem ficar com a mesma quantidade de pães e nenhum pão pode ficar fora de nenhuma bandeja. Registre todas as possibilidades, em forma de uma multiplicação entre dois números, que dona Benta tem para distribuir os pães nas bandejas. Em seguida, escreva os números encontrados em ordem crescente. O que podemos dizer sobre a sequência de números, em ordem crescente, encontrada nessa atividade?

3ª questão) Determine os divisores de:

a) D(4) =	**b)** D(6) =	**c)** D(12) =

4ª questão) Determine os múltiplos de:

a) M(3) =	**b)** M(7) =	**c)** M(14) =

Apêndice F – Quadro de notas da primeira avaliação da turma pesquisada

Número de ordem	Aluno	Nota obtida
1	A1	3,1
2	A2	3,0
3	A3	3,5
4	A4	3,8
5	A5	3,6
6	A6	4,0
7	A7	4,0
8	A8	4,0
9	A9	3,9
10	A11	4,0
11	A12	2,7
12	A13	3,1
13	A14	2,0
14	A15	3,3
15	A17	4,0
16	A18	4,0
17	A20	4,0
18	A22	4,0
19	A23	3,2
20	A24	2,9
21	A25	1,9
22	A26	3,8
23	A27	3,7
24	A28	4,0

Fonte: Diário de classe da professora regente

Apêndice G – Segunda avaliação da turma pesquisada

ATIVIDADES AVALIATIVAS

Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Professor Elpídio Campos de Oliveira”

Nome: **nº:** **data:** 18/09/15 **turma:** 6º M01

1ª questão:

A escola DJD tem uma escada que liga os dois andares do prédio. Essa escada tem36 degraus, enumerados de 1 a 36. Ana está subindo de 2 em 2 degraus e Maria está subindo de 3 em 3. Sabendo que os dois começaram a subir juntos, responda:

a) Em quais degraus os dois vão pisar juntos?

b) Qual é o menor número do degrau em que os dois vão pisar juntos?

2ª questão:

Determine:

a) M.D.C. (8, 12) = **b)** M.D.C. (6, 26) =

3ª questão:

Determine todos os divisores de:

a) D (20) = **b)** D (15) =

4ª questão:

O Senhor Manoel, muito gripado, foi à farmácia comprar remédios com o intuito de tomar para melhorar da gripe. O Farmacêutico lhe receitou um xarope e uma cartela de comprimidos e indicou os seguintes horários para tomar esses remédios: o xarope tomar de 4 em 4 horas e um comprimido de 3 em 3 horas. Às 8 horas da manhã, o Senhor Manoel tomou os dois remédios juntos. A que horas ele voltará a tomar, novamente, os dois remédios juntos?

Apêndice H – Quadro de notas da segunda avaliação da turma pesquisada

Número de ordem	Aluno	Nota obtida
1	A1	3,5
2	A2	2,2
3	A3	3,6
4	A4	3,9
5	A5	3,8
6	A7	4,0
7	A9	3,8
8	A11	4,0
9	A12	2,7
10	A14	2,0
11	A15	3,4
12	A17	4,0
13	A18	4,0
14	A20	4,0
15	A22	4,0
16	A23	3,5
17	A24	2,9
18	A25	2,8
19	A26	3,9
20	A27	3,6

Fonte: Diário de classe da professora regente